Teorija grafov - zapiski predavanj prof. Klavžarja

Yon Ploj

2. semester 2021

1 Osnovni pojmi

$G = (V(G), E(G))$
$V(G) = \{u, v, w, x, y, z\}$
$E(G) = \{\{u, v\}, \{u, x\}, \{u, y\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{y, z\}\}$ (neurejeni pari)
Definiramo: vozlišče, povezava, sosednja vozlišča, incidenčni povezavi

Skica grafa:

- vozliščem injektivno priredimo točke v ravnini.
- povezave ponazorimo s krivuljo med krajiščema povezave.

Definicija 1.1 (Soseščina vozlišča)**.** $N_g(v) := \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$

Definicija 1.2 (Stopnja vozlišča)**.** $deg(v) := |N_g(v)|$

$$\delta(G) := \min_{v\in V(G)} \{deg(v)\}$$

$$\Delta(G) := \max_{v\in V(G)} \{deg(v)\}$$

Definicija 1.3 (Izolirano vozlišče)**.** $deg(v) = 0$

Definicija 1.4 (List grafa)**.** $deg(v) = 1$

Definicija 1.5 (k-regularen graf)**.** Graf, kjer je vsako vozlišče stopnje k

Definicija 1.6 (Kubični graf)**.** 3-regularen graf

Definicija 1.7 (Matrika sosednosti)**.** $A_{ij} = \begin{cases} 1; & v_i \sim v_j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \dots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

je vedno simetrična po diagonali (ker $u \sim v \iff v \sim u$) diagonala so ničle (ker $\forall v : \neg(v \sim v)$)

Definicija 1.8 (Incidenčna matrika)**.** $B_{ij} = \begin{cases} 1; & v_i \in e_j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$

$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \dots & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

vsak stolpec ima natanko 2 enici (vsaka povezava ima natako 2 krajišči)

Lema 1.1 (Lema o rokovanju)**.** za vsak G velja

$$\sum_{v \in V(G)} (deg(v)) = 2 * |E(G)|$$

Dokaz. Število enic v incidenčni matriki je število stolpcev $*$ 2 (ker ima vsak stolpec natanko 2 enici). Število stolpcev je $|E(G)|$. V vrstici v_i je $deg(v_i)$ enic. Če seštejemo število enic po vrsticah = število enic po stolpcih = $\sum_{v \in V(G)} (deg(v)) = 2 * |E(G)|$ ■

Posledica 1.1. V poljubnem grafu je število vozlišč lihe stopnje sodo mnogo.

Dokaz.

$$2 * |E(G)| = \sum_{v} (deg(v)) = \sum_{v \text{ sodo}} (deg(v)) + \sum_{v \text{ liho}} (deg(v))$$

Prvi člen je sodo število in vsota je sodo število. Torej je drugi člen sodo število. Torej je sumandov v drugi vsoti sodo mnogo. ■

Trditev 1.1. Ne obstaja kubičen graf na 9 vozliščih

1.1 Podgrafi

Definicija 1.9 (Podgraf)**.** Graf H je podgraf G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Pišemo $H \leq G$

Definicija 1.10 (Vpeti podgraf)**.** $V(H) = V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$

Definicija 1.11 (Inducirani graf)**.** Vsak $v_1 v_2 \in E(H)$: $(\{v_1, v_2\} \subseteq V(H) \implies \{v_1, v_2\} \subseteq V(G))$
Podgraf dobimo, če zbrišemo nekaj vozlišč in pripadajočih robov, ne pa drugih robov. Inducirani podgraf je natančno določen z množico vozlišč (katera smo odstranili).

1.2 Družine grafov

Definicija 1.12 (Polni graf)**.** K_n; $|V| = n$, vsak par vozlišč je soseden.

K_3 = trikotnik.

$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (dokaz z lemo o rokovanju)

Definicija 1.13 (Pot na n vozliščih)**.** P_n;
$V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$;
$E(P_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in [n-1]\} = \{\{i, i+1\}\,; i \in \mathbb{Z}_n \setminus \{n-1\}\}$

Definicija 1.14 (Cikel na n vozliščih)**.** $C_n = (V(C_n), E(C_n))$
$V(C_n) = \mathbb{Z}_n$
$E(C_n) = \{\{i, i+1\}\,; i \in \mathbb{Z}_n\}$

Limitacije:

- $K_n : n \geq 0$
- $P_n : n \geq 0$
- $C_n : n \geq 3$

Če v C_n zbrišemo poljubno povezavo, dobimo vpeti P_n.

1.3 Polni dvodelni grafi

Definicija 1.15 (Poln dvodelni graf)**.** $K_{m,n}$; $m, n \geq 0$
je graf, za katerega obstajata množici A in B, tako da je

$$\forall u \in A, v \in B : \{u, v\} \in E(K_{m,n})$$

oziroma

$$E(K_{m,n}) = \{\{u, v\} : u \in A, v \in B\}$$

$|A| = m, |B| = n$

Definicija 1.16 (Zvezde)**.** Grafi oblike $K_{1,n}$

$K_{2,2} = C_4$

Definicija 1.17 (d-kocka Q_d)**.** Graf oblike $V(Q_d) = \{0, 1\}^n$
(potenca označuje kartezični produkt)
$= \{(b_1, \ldots, b_n) : b_i \in \{0, 1\}\}$ (binarni niz dolžine n)

Limitacije:

- $d \geq 1$

Vozlišči $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ in $\{b'_1, b'_2, b'_3, \ldots\}$ sta sosednji $\iff$ obstaja natanko en $i \in [n] : (b_i \neq b'_i)$

Q_n je n-regularen graf; $deg(b_1) = deg(b_2) = \ldots = n$.

1.4 Posplošeni Petersenovi grafi $P_{n,k}$

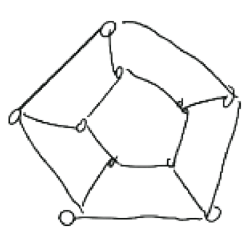
Definicija 1.18 (Petersenov graf)**.**

$$V(P_{n,k}) = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \dot\cup \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$$

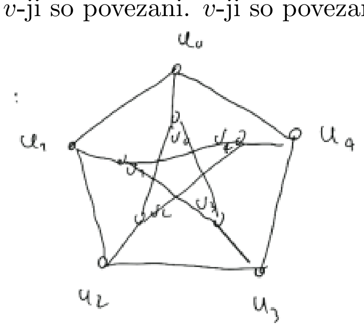
$$E(P_{n,k}) = \{\{u_i, u_{i+1}\} : i \in \mathbb{Z}_n\} \dot\cup \{\{u_i, v_i\} : i \in \mathbb{Z}_n\} \dot\cup \{\{v_i, v_{i+n}\} : i \in \mathbb{Z}_n\}$$

u-ji so povezani v cikel. Enakoležni u-ji in v-ji so povezani. v-ji so povezani s preskoki po k.

$P_{5,1}$:



$P_{5,2}$:



Petersenov graf je nek bad boy ker pokvari veliko izrekov.

Limitacije:

- $n \geq 3$
- $2k < n$

Definicija 1.19 (Krožni grafi)**.** Vzemimo poljubno množico $S \subset \mathbb{Z}_n$, za katero velja $0 \notin S \wedge (s \in S \implies (n - s) \in S)$.
Tedaj je krožni graf $\text{Cir}(n, S)$ tak graf, katerega vozlišča tvori $\mathbb{Z}_n$, povezave pa $\{uv, v - u \in S\}$.

$K_n = \text{Cir}(n, [n - 1])$
$C_n = \text{Cir}(n, \{1, n - 1\})$

Definicija 1.20 (Enostaven graf)**.** Graf je enostaven, če nima večkratnih povezav ali zank. Za nas je graf $\iff$ enostaven graf.

Definicija 1.21 (Digrafi)**.** Usmerjeni grafi (mi ne poznamo)

Definicija 1.22 (Obteženi grafi)**.** mi še ne poznamo

2 Poti, cikli in dvodelnost

Definicija 2.1 (Sprehod)**.** Zaporedje vozlišč $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$, da je $v_i \sim v_{i+1}$ za $i \in \{0, \ldots, k-1\}$

Definicija 2.2 (Enostaven sprehod)**.** Povezave se ne ponavljajo (vozlišča pa lahko)

Definicija 2.3 (Sklenjen sprehod)**.** $v_0 = v_k$

Definicija 2.4 (Pot v grafu)**.** (Enostaven) sprehod, kjer so vsa vozlišča različna (torej tudi povezave različne)

Definicija 2.5 (Dolžina sprehoda)**.** Št. povezav v sprehodu

Definicija 2.6 (Cikel v grafu)**.** Sklenjen sprehod, v katerem so vsa vozlišča različna

Lema 2.1. Če med dvema vozliščema obstaja sprehod dolzine k, potem med njima obstja tudi pot dolžine kvečjemu k.

Dokaz. Naj bosta $u, v \in V(G)$ in $u = x_0, x_1, \ldots, x_k = v$ je uv-sprehod. Če so vsa vozlišča paroma različna, je to iskana pot. Sicer se nek x ponovi. Naj bo x_i prvo tako vozlišče, x_j pa druga pojavitev x_i. Sprehod $x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_k$ je krajši od originalnega, in ima manj ponovitev. Če je ta sprehod pot, je to iskana pot. Sicer ponavljamo postopek dokler ne najdemo iskane poti. ■

Lema 2.2. Če med vozliščem grafu u in v obstajata dve različni poti, potem G vsebuje vsaj en cikel.

Dokaz. Naj bosta P in Q u,v-poti v G. Če je $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$, potem je P unija Q iskani cikel. Sicer poiščemo prvo vozlišče x na Q, da ni na P (obstaja ker $P \neq Q$). Nato poiščemo prvo naslednje vozlišče y na Q, da je tudi na P (obstaja, ker se P in Q srečata vsaj na v). Tedaj podpot od P med x in y ter podpot od Q med x in y tvorita iskani cikel na G. ■

Lema 2.3. Če ima graf sklenjen sprehod lihe dolžine, potem vsebuje tudi cikel lihe dolžine.

Dokaz. (indukcija po dolžini sprehoda k)
BI: $k = 3$ OK
IK: $n - 1 \implies n$
Naj bo $S = v_0, v_1, \ldots, v_n = v_0$ sprehod lihe dolžine. Če so vsa vozlišča različna, imamo lih cikel. Sicer obstaja i,j da $(0 \leq i < j) \wedge (v_i = v_j)$. Vsota dolžin sprehodov $v_0, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n = v_0$ in $v_j = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j = v_i$ je liha. Torej je natanko eden od teh sprehodov lih. Oba sprehoda sta strogo krajša od originalnega sprehoda. IP zagotavlja, da ima lih od sprehodov lih cikel. ■

Definirajmo relacijo R: $xRy \iff$ med x in y obstaja pot.

Trditev 2.1. R je ekvivalenčna

Ekvivalenčnim razredom R pravimo komponente grafa
$\Omega(G) =$ število komponent

Definicija 2.7 (Povezan graf)**.** $\Omega(G) = 1$

Definicija 2.8 (Razdalja $d_G(u, v)$)**.** je število povezav na najkrajši uv poti v G. Če taka pot ne obstaja, je $d(u, v) = \infty$

Trditev 2.2. $(V(G), d_G)$ je metrični prostor.
$\implies (d_G(u, v) \geq 0) \wedge (d_G(u, v) = 0 \iff u = v)$
$\implies d_G(u, v) = d_G(v, u)$
$\implies d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G$

Definicija 2.9 (Ekscentričnost)**.** $ecc_g(u) = max_{x \in V(G)} \{d_G(u, x)\}$

Definicija 2.10 (Premer $diam(G)$)**.** je največja ekscentričnost

Definicija 2.11 (Polmer $rad(G)$)**.** je najkrajša ekscentričnost

Definicija 2.12 (Ožina ali notranji premer)**.** je dolžina najkrajšega cikla. Če graf nima cikla, je ožina $= \infty$.

Definicija 2.13 (Dvodelnost)**.** G je dvodelen, če lahko $V(G)$ razdelimo v disjunktni množici A in B, da $uv \in E(G) =>$ $u \in A \wedge v \in B$ ali obratno.
Pravimo, da sta A in B neodvisni. (Ni povezave znotraj množice)

Trditev 2.3. Vse kocke so dvodelne.

Dokaz. z indukcijo (dvodelno povežemo dve $n-1$ kocki) ■

Izrek 2.1. Graf G je dvodelen natanko tedaj ko ne vsebuje lihih ciklov.

Dokaz. ($\Rightarrow$) lihi cikli niso dvodelni, zato tudi graf z lihim ciklom ne more biti dvodelen.
($\Leftarrow$) predpostavimo lahko, da je G povezan. (Če ni povezan, je dvodelen natanko tedaj, ko so vse komponente dvodelne). Vzemimo vozlišče v_0. Definirajmo $A = \{x \in V(G) : d(v_0, x) \text{ je sodo}\}$ in $B = \{x \in V(G) : d(v_0, x) \text{ je liho}\}$ (tukaj nam pomaga, da smo predpostavili povezanost, saj nam morebitna neskončna razdalja ne dela preglavic). Očitno je $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = V(G)$. Pokažimo, da je (A, B) dvodelna razdelitev (znotraj A in znotraj B ni povezav): naj bosta $u, w \in A$. Ločimo 3 primere:

1. $|d(v_0, u) - d(v_0, w)| \geq 2$
   Tedaj $uw \notin E(G)$. To je res, sicer bi dobili:
   $$\text{BŠS } d(v_0, u) < d(v_0, w)$$
   Če bi obstajala uw, potem je
   $$d(v_0, w) \leq d(v_0, u) + d(u, w) = d(v_0, u) + 1$$
   To je bodisi očitno, lahko pa temu rečete tudi trikotniška neenakost.
2. $|d(v_0, u) - d(v_0, w)| = 1$
   Vemo, da to ni možno, ker sta obe iz množice A, torej sta obe razdalji sodi, desna stran pa liha.
3. $d(v_0, u) = d(v_0, w) = k$
   Recimo, da obstaja povezava uw. Naj bo P poljubna najkrajša v_0, u-pot in Q poljubna najkrajša v_0, w-pot. Poglejmo $P \cup Q \cup \{uw\}$. P in Q nista nujno notranje disjunktni, toda $P \cup U \cup \{uw\}$ je sklenjen sprehod ($v_0 \xrightarrow{P} u, w \xrightarrow{Q} v_0$) z dolžino $|P| + 1 + |Q| = 2k + 1$. Po lemi 2.3 vemo, da imamo v G nek lih cikel. To je v nasprotju s predpostavko.

Dokazali smo, da je množica A neodvisna. Dokaz za množico B poteka na enak način. ■

Ko se bomo pogovarjali o barvanju grafov, bomo karakterizirali dvodelne grafe tudi s kromatičnim številom.

3 Morfizmi grafov

Definicija 3.1 (Homomorfizem)**.** Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je homomorfizem ntk. $u \sim v \Rightarrow f(u) \sim f(v)$

Definicija 3.2 (Epimorfizem)**.** Surjektiven homomorfizem

Definicija 3.3 (Monomorfizem (vložitev))**.** Injektiven homomorfizem (G je podgraf v H)

Definicija 3.4 (Izometrična vložitev)**.** Če je $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ za vsak x,y

Definicija 3.5 (Avtomorfizem)**.** Izomorfna preslikava $G \to G$

Definicija 3.6 (Asimetričen graf)**.** Graf katerega edini avtomorfizem je id

4 Operacije z grafi in k-povezanost

Definicija 4.1 (Komplement G)**.** $\overline{G} := (V(G), \overline{E(G)})$

P_4 je sebi-komplementaren

Grupa avtomorfizmov G in $\overline{G}$ je enaka.

Če G ni povezan, je $diam(\overline{G}) \leq 2$

Definicija 4.2 (Skrčitev)**.** Odstranimo povezavo in identificiramo vozlišči ki jih povezuje. Morebitne podvojene povezave odstranimo.

Definicija 4.3 (Minor)**.** H je minor grafa G, če G premore podgraf X in množico povezav $F \subseteq E(X)$, tako da je H dobljen s skrčitvijo povezav iz F. Označimo $H = X \backslash F$ (V tem primeru \ pomeni skrčitev povezav)

Trditev 4.1. Vrstni red skrčitev ni važen

4.1 Subdividiranje

Če povezavo nadomestimo s potjo dolžine 2, smo povezavo subdividirali. Označimo $G^+(E)$

Definicija 4.4 (Subdividiranje)**.** Neformalno: nekaj povezav nadomestimo s potmi.
Formalno: naj bo $e = uv \in E(G)$

$$V(G^+(e)) = V(G) \cup \{v_0\}, v_0 \notin V(G)$$
$$E(G^+(e)) = (E(G)\{uv\}) \cup \{u \sim v_0, v \sim v_0\}$$

Graf H je subdivizacija G, če H dobimo iz G prek zaporednega subdividiranja povezav.

Definicija 4.5 (Glajenje vozlišč)**.** Neformalno: obratna operacija subdividiranja.
Formalno:

$$V(G - \{w\})) = V(G) \backslash \{w\}$$
$$E(G - \{w\}) = (E(G) \backslash \{uw, vw\}) \cup \{uv\}$$

Definicija 4.6 (Homeomorfizem)**.** Grafa G in H sta homeomorfna, če postaneta izomorfna, ko zgladimo vsa vozlišča stopnje 2 v obeh grafih.

Definicija 4.7 (Kartezični produkt grafov)**.**

$$V(G \,\square\, H) = V(G) \times V(H)$$
$$E(G \,\square\, H) = \{(g,k)(g',k') : (gg' \in E(G) \wedge k = k') \vee (g = g' \wedge kk' \in E(H))\}$$

Lastnosti: (monoid)

- komutativnost
- asociativnost
- enota

Trditev 4.2. $Q_n = (K_2)^n$

Definicija 4.8 (Prerezno vozlišče)**.** v je prerezno, če ima $G - v$ več komponent kot G.

Definicija 4.9 (Prerezna povezava)**.** e je prerezna (aka. most), če je $\Omega(G - e) > \Omega(G)$.

Definicija 4.10 (k-povezan graf)**.** Če (ima vsaj $k + 1$ vozlišč in) ne premore nobenega prereza moči $< k$ (prerez tu pomeni množico odstranjenih vozlišč). Z drugimi besedami, k-povezanemu grafu moramo odstraniti najmanj k vozlišč, da povečamo število njegovih komponent.

Definicija 4.11 (Povezanost G)**.** Največji k da je G k-povezan. Označimo $\kappa(G)$

Izrek 4.1 (Menger, globalni)**.** Naj bo G graf z vsaj $k + 1$ vozlišč. G je k-povezan ntk. za vsak par vozlišč obstaja k notranje disjunktnih uv poti.

Izrek 4.2 (Menger, lokalni)**.** Naj bosta u,v nesosednji vozlišči G. Tedaj je največje število notranje disjunktnih uv poti enako moči najkrajšega prereza S, za katerega sta u in v v različnih komponentah $G - S$.

Dokaz. Dokaz za oba izreka se nahaja v magisterskem programu. Lp ∎

Definicija 4.12 (Povezavna povezanost G)**.** Je najmanjše število povezav, ki jih moramo odstraniti, da povečamo število komponent G. Označimo $\kappa'(G)$

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

5 Drevesa

Definicija 5.1 (Gozd)**.** Graf brez ciklov.

Definicija 5.2 (Drevo)**.** Povezan graf brez ciklov.

Definicija 5.3 (List)**.** Vozlišče stopnje 1.

Definicija 5.4 (Drevo s korenom)**.** Drevo, v katerem izberemo vozlišče in ga imenujemo "koren". Ponavadi rišemo koren na vrhu ali dnu drevesa.

Lema 5.1. Če je T drevo z vsaj 2 vozliščema, T vsebuje vsaj 1 list.

Dokaz. Naj bo x poljubno vozlišče T. Ker je T povezan in $|V(T) \geq 2|$, je $st(x) \geq 1$. Če je x' edini sosed od x, je x iskani list. Sicer obravnavamo naslednjega soseda od x'. x'' je različen od x, ker je T brez ciklov. Na vsakem koraku najdemo bodisi list ali novega soseda. Ker ima T končno mnogo vozlišč, bomo na neki točki našli list v T. ■

Lema 5.2. Če je T drevo, je $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Dokaz. (z indukcijo)
BI: $|V(T)| = 1 \Rightarrow |E(T)| = 0$ OK
IK: Ker je T drevo z vsaj 2 vozlišči, ima list. Če odstranimo ta list, je $|V(T')| = |V(T)| - 1$ in $|E(T')| = |E(T)| - 1$. Po IP sledi dokaz. ■

Lema 5.3. Če v poljubnem povezanem grafu odstranimo poljubno povezavo poljubnega cikla, bo graf ostal povezan.

Dokaz. Poglejmo $G - e$. Naj bosta $u, v \in V(G - e)$. Ker je G povezan, obstaja v njem uv pot P.
Če $e \in E(P)$: P očitno obstaja tudi v $G - e$.
Če $e \notin E(P)$: povezavo e nadomestimo s potjo xy vzdolž cikla. Tedaj je P' sprehod med u in v. Po lemi od zadnjič obstaja zato tudi pot med u in v. ■

Lema 5.4. Za vsak povezan graf velja $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$. (Drevo ima najmanj povezav)

Dokaz. Če je G drevo, je lema dokazana (glej zgoraj). Sicer G vsebuje nek cikel. Po prejšnji lemi lahko odstranimo poljubno povezavo tega cikla, da G ostane povezan. Proces ponavljamo dokler ne dobimo drevesa. ■

Izrek 5.1. Za vsak graf so ekvivalentne naslednje trditve:

1. G je drevo.
2. Za vsak par vozlišč u in v, $u \neq v$, obstaja enolična uv-pot.
3. G je povezan in vsaka povezava je most.
4. G je povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Če imamo v G dve poti, iz 2. poglavja vemo, da imamo cikel.
(2) $\Rightarrow$ (3): G je očitno povezan. Naj bo $e = uv \in E(G)$. Po (2) je to edina uv pot. Torej ta u in v v različnih komponentah grafa $G - e$, torej je e most.
(3) $\Rightarrow$ (4): $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Naj bo e poljubna povezava. Ker je most, ima $G - e$ natanko 2 komponenti G_1 in G_2. Obe zadoščata (3). Induktivno sklepamo, da je $|E(G_1)| = |V(G_1)| - 1$ in $|E(G_2)| = |V(G_2)| - 1$. Torej $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + 1$ in $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$, zato $|E(G)| = |V(G)| - 1$. ■

Izrek 5.2. Če ima drevo vsaj 2 vozlišči, ima vsaj 2 lista.

Dokaz. Naj bo x število listov v T. Po lemi o rokovanju velja:

$$2|E(T)| = \sum_{v \in V(T)} deg(v) \geq x + 2(|V(T)| - x)$$

$$\Rightarrow x \geq 2$$

■

Definicija 5.5 (Vpeto drevo)**.** Vpet podgraf, ki je drevo. $|V(G)| = |V(T)|$

Trditev 5.1. Graf je povezan natanko tedaj ko vsebuje vpeto drevo.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Očitno.
($\Rightarrow$) Če je G drevo je sam sebi vpeto drevo. Sicer vsebuje cikel. Na povezavi cikla uporabimo lemo 5.3. Uničujemo cikle dokler ne dosežemo drevesa. To drevo je vpeto. ∎

Definicija 5.6 ($\tau(G)$)**.** Število vpetih dreves G.

$\tau(\text{drevo}) = 1$
$\tau(C_n) = n$
$\tau(K_n) =$ ne povem ampak še danes boste zvedli

Trditev 5.2. $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \backslash e)$

Definicija 5.7 (Laplaceova matrika $L(G)$)**.** Laplaceova matrika multigrafa G je kvadratna matrika, katere vrstice in stolpci so indeksirani z vozlišči grafa G, elementi $L(G)$ pa so določeni takole:

$$L(G)_{ii} = deg(v_i)$$

$$L(G)_{ij_{i \neq j}} = -\text{število povezav med } v_i \text{ in } v_j$$

Če je G graf, je $L(G)_{ij} = -1$, če je $v_i v_j \in E(G)$, sicer 0.

Izrek 5.3 (Kirchoff)**.** Število vpetih dreves multigrafa G je enako determinanti matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da odstranimo vrstico in stolpec, ki pripadata nekemu vozlišču.

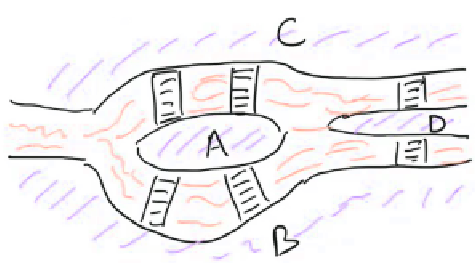
Izrek 5.4 (Cayleyev)**.** $\tau(K_n) = n^{n-2}$

Obstajajo (med drugim) bijektivni dokazi Cayleyevega izreka (vpeta drevesa spravimo v bijektivno korespondenco z nekimi objekti, ki jih znamo prešteti). En tak način je Prüferjeva koda.

Definicija 5.8 (Prüferjeva koda)**.** Imamo označeno drevo. Po vrsti odstranjujemo liste z najmanjšo oznako in v kodo postavimo oznako soseda od lista, ki smo ga odstranili. Ustavimo se, ko ostane ena povezava (zadnjega vozlišča ne dodamo v kodo).

Dobili smo zaporedje dolžine $n - 2$ nad množico $[n]$, takih zaporedij pa vemo da je natanko n^{n-2}. Prüferjeva koda nam torej vzpostavi bijekcijo med vsemi vpetimi drevesi grafa K_n in takimi zaporedji.

6 Eulerjevi in Hamiltonovi grafi



Problem Königsberških mostov: ali se lahko sprehodimo tako, da gremo prek vsakega mosta natanko enkrat (in zaključimo kjer smo začeli)?

Definicija 6.1 (Eulerjev sprehod)**.** Sprehod v grafu, ki vsako povezavo prehodi natanko enkrat.

Definicija 6.2 (Eulerjev obhod)**.** Sklenjen Eulerjev sprehod.

Definicija 6.3 (Eulerjev graf)**.** Graf, ki premore Eulerjev obhod.

Trditev 6.1. Če graf premore vozlišče stopnje 1, potem ni Eulerjev.

Izrek 6.1. Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča sode stopnje.

Dokaz. (⇒) Naj bo G Eulerjev graf. Opazujmo poljuben obhod P. Izberimo poljubno vozlišče x. Povezave vozlišča vedno nastopajo v parih (pot pride noter, potem gre ven). Par prve povezave je zadnja povezava.
(⇐) Naj bo G poljuben povezan graf s samimi sodimi vozlišči. Dokažemo z indukcijo po $|E(G)|$.
B.I. $|E(G)| = 3$ OK
I.K. $|E(G)| \geq 4$. Trdimo, da G premore cikel (ker vemo, da ni drevo - ker nima listov (ki bi bili lihe stopnje)). Naj bo C poljuben cikel grafa G. H naj bo graf enak Gju, brez povezav cikla C. V grafu H so spet vsa vozlišča sode stopnje. H v splošnem ni povezan, toda vsaka komponenta (komponente so po definiciji povezane) ima vsa vozlišča sode stopnje. Po IP vsak izmed $H_1, ...H_k$ premore Eulerjev obhod. Sedaj konstruiramo Eulerjev obhod v G: gibljemo se vzdolž C. Brž ko naletimo na neprehojeno komponento H_i, jo prehodimo. ■

Trditev 6.2. Zgornji izrek velja tudi za multigrafe. Dokaz je podoben.

Trditev 6.3. Eulerjev sprehod premorejo natanko tisti grafi, ki imajo kvečjemu 2 vozlišči. Če jih ima 0, je to Eulerjev graf, če pa ima 2, ima Eulerjev sprehod. (1 lihega vozlišča ne more imeti zaradi leme o rokovanju)

Izrek 6.2 (Fleuryjev algoritem)**.** Za iskanje Eulerjevih obhodov.
Vhod: povezan graf s samimi sodimi vozlišči.
Izhod: Eulerjev obhod.

1. Začnemo v poljuben vozlišču.
2. Gremo po poljubni povezavi, ki jo zbrišemo za seboj.
3. Postopek ponavljamo in pri tem pazimo le na to, da naslednja izbrana povezava ni most, razen če ni druge možnosti.

Definicija 6.4 (Dekompozicija grafa)**.** Seznam podgrafov, da se vsaka povezava pojavi v natanko enem podgrafu.

Trditev 6.4. Če je G graf, ki ima sama soda vozlišča, potem G premore dekompozicijo v cikle.

Dokaz. Vemo, da G premore cikel; odstranimo ga in argument zaključimo z indukcijo. ■

6.1 Hamiltonovi grafi

Definicija 6.5 (Hamiltonova pot)**.** Pot, ki gre skozi vsa vozlišča grafa ($V(P) = V(G)$).

Definicija 6.6 (Hamiltonov cikel)**.** Cikel, ki gre skozi vsa vozlišča grafa ($V(C) = V(G)$).

Definicija 6.7 (Hamiltonov graf)**.** Graf, ki premore Hamiltonov cikel.

Hamiltonova pot je vpeta pot (oz. vpet podgraf, ki je pot).

Hamiltonov cikel je torej vsak vpet cikel grafa.

Ali je graf Eulerjev? Ali je graf Hamiltonov?

Trditev 6.5. "Ali je graf Hamiltonov?" je NP-poln problem.

Izrek 6.3. Če je G Hamiltonov graf in je $S \subseteq V(G)$, potem je

$$\Omega(G - S) \leq |S|$$

Dokaz. Naj bo $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Ker je G Hamiltonov, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $v_1 \to v_2 \to ... \to v_n \to v_1$ Hamiltonov cikel.

$S = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$
$i_1 < i_2 < \ldots < i_k$
$|S| = k$
Tedaj vozlišča med v_{i_j} in $v_{i_{j+1}}$ ležijo v isti komponenti $G - S$. V vsakem primeru je komponent v $G - S$ kvečjemu $k = |S|$ ■

V praksi zadnji izrek uporabljamo, da dokazujemo, da graf NI Hamiltonov. Kontrapozicija izreka se namreč glasi:

$$\text{Če } \exists S \leq V(G) : \Omega(G - S) > |S| \Rightarrow G \text{ ni Hamiltonov.}$$

Trditev 6.6. Če ima (povezan) graf prerezno vozlišče, potem ni Hamiltonov.

Trditev 6.7. $K_{m,n}$ je Hamiltonov $\iff$ $m = n$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $m \neq n$ in BŠS $m < n$. Postavimo $S = A$. Tedaj ima graf $K_{m,n} - S$ natanko n komponent (n izoliranih vozlišč).
($\Leftarrow$) Opazujmo $K_{m,n}$. Brez težav najdemo Hamiltonov cikel. ■

Izrek 6.4 (Orejev)**.** Naj bo G graf z $|V(G)| \geq 3$. Če za vsak par nesosednjih vozlišč u, v velja

$$deg(u) + deg(v) \geq |V(G)|$$

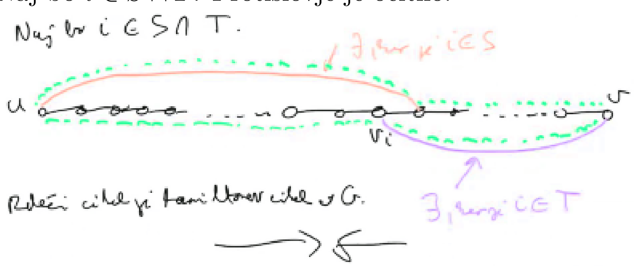
potem je G Hamiltonov.

Dokaz. (Z metodo najmanjšega protiprimera) Recimo, da izrek ne velja. Potem obstajajo grafi, za katere velja dani pogoj, a niso Hamiltonovi. Med vsemi takimi primeri poiščemo tiste, ki imajo najmanj vozlišč. Med vsemi takimi izberimo tistega (imenujmo G), ki ima največ povezav. G ni poln graf (ker poln graf je gotovo Hamiltonov), zato obstajata nesosednja u in v. Poglejmo $G + uv$. Ta je gotovo Hamiltonov (ker ima G največ povezav možno). Torej $G + uv$ ima Hamiltonov cikel. Ta cikel gotovo vsebuje povezavo uv.

Definirajmo

$$S = \{i; u \sim u_{i+1}\}$$
$$T = \{i; u \sim u_i\}$$
$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$$
$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T|$$
$$|S| + |T| = deg(u) + deg(v) \geq_{(\text{po izreku})} |V(G)|$$
$$n \notin S \wedge n \notin T$$
$$\Rightarrow |S \cup T| < n$$
$$\Rightarrow |S \cap T| \geq 1$$

Naj bo $i \in S \cap T$. Protislovje je očitno.



■

Posledica 6.1 (Dirac)**.** Naj bo G graf z $|V(G)| \geq 3$. Če za vsako vozlišče velja

$$deg(u) \geq \frac{|V(G)|}{2}$$

potem je G Hamiltonov.

Dokaz. Diracov pogoj zagotavlja, da je izpoljnjen Orejev pogoj prejšnjega izreka. Naj bosta u in v nesosednji vozlišči v G. Potem je $deg(u) + deg(v) \geq \frac{|V(G)|}{2} + \frac{|V(G)|}{2} = |V(G)|$ ■

7 Ravninski grafi

Definicija 7.1 (Ravninska risba)**.** Risba grafa, kjer se nobeni dve povezavi ne sekata.

Definicija 7.2 (Ravninski graf)**.** Graf, ki ima ravninsko risbo.

- Vsi cikli so ravninski
- Vsa drevesa so ravninska
- $K_{2,3}$ je ravninski
- $K_{3,3}$ ni ravninski

Definicija 7.3 (Graf vložen v ravnini)**.** Če imamo ravninski graf in njegovo sliko v ravnini.

Definicija 7.4 (Enostavna krivulja)**.** Krivulja, ki ne seka same sebe.

Izrek 7.1 (Jordanov)**.** Enostavna sklenjena krivulja razdeli ravnino na notranjost in zunanjost.

Dokaz. Je daleč od tega da bi bil enostaven, zato se skriva pri predmetu Topologija. ∎

Definicija 7.5 (Lice)**.** Če v ravninski risbi zbrišemo vse točke, ki predstavljajo povezave in vozlišča, dobimo nekaj ločenih območij, ki jim pravimo lica vložitve (ang. faces). Množico vseh lic označimo $F(G)$

Trditev 7.1. Graf lahko vložimo v ravnino natanko tedaj, ko ga lahko vložimo na sfero.

Ker je na sferi vsako lice omejeno, lahko sklepamo, da zunanje lice ravninske risbe "ni nič posebnega".

Definicija 7.6 (Dolžina lica)**.** Število povezav, ki jih prehodimo, ko obhodimo lice. Oznaka $l(f)$.

Trditev 7.2. Naj bo G ravninski graf, vložen v ravnino. Tedaj velja:

$$\sum_{f \in F(G)} l(f) = 2 * |E(G)|$$

Definicija 7.7 (Ožina grafa)**.** Je dolžina najkrajšega cikla v grafu. Oznaka $g(G)$. Če G nima cikla (je gozd), postavimo $g(G) = \infty$.

Trditev 7.3. Če je G povezan ravninski graf vložen v ravnino, potem je

$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2} |F(G)|$$

Dokaz. Če je G povezan graf vložen v ravnino in f lice vložitve, potem je $f(g) \geq g(G)$. Po prejšnji trditvi dobimo:

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f) \geq \sum_{f \in F(G)} g(G) = |F(G)| * g(G)$$

∎

Povezanost je pomembna lastnost v prejšnjem dokazu.

Izrek 7.2 (Eulerjeva formula)**.** Naj bo G ravninski graf z vsaj eno povezavo vložen v ravnino. Tedaj velja, da je

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + |\Omega(G)|$$

Dokaz. Z indukcijo po $|E(G)|$.
BI. $|E(G)| = 1 \Rightarrow 2 - 1 + 1 = 1 + 1$ OK
Formula velja za vsa drevesa.

$$|V(T)| - |E(T)| + |F(T)| = |V(T)| - (|V(T)| - 1) + 1 = 2$$

Sicer naj bo G poljuben povezan ravninski graf z $n \geq 3$ vložen v ravnino z vsaj enim ciklom C.
IK. Vzemimo povezavo e iz C. Vemo, da je $G - e$ povezan. Je tudi ravninski graf, in je vložen v ravnino. Ker je $|E(G - e)| = n - 1$, po IP velja Eulerjeva formula.

$$|V(G - e)| - |E(G - e)| + |F(G - e)| = 2$$

$$|V(G)| - (|E(G)| - 1) + (|F(G)| - 1) = 2$$

-1 se odšteje ...

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$$

Če graf ni povezan, uporabimo Eulerjevo formulo za vsako komponento posebej in združimo rezultat. ■

Posledica 7.1 (Sporočilo Eulerjeve formule)**.** Ne glede na to, kako narišemo graf v ravnini, ima enako število lic.

$$|F(G)| = -|V(G)| + |E(G)| + 2$$

Posledica 7.2. Če je G povezan ravninski graf, ki ni drevo, potem je

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

Dokaz. Trditev od prej:

$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2}|F(G)|$$

$$|F(G)| \leq \frac{2 * |E(G)|}{g(G)}$$

Po Eulerjevi formuli dobimo:

$$2 = |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \leq$$

$$\leq |V(G)| - |E(G)| + \frac{2|E(G)|}{g(G)} =$$

$$= |V(G)| - |E(G)|(\frac{g(G) - 2}{g(G)})$$

$$|E(G)|(\frac{g(G) - 2}{g(G)}) \leq |V(G)| - 2 \Rightarrow$$

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

■

Ker je $g(G) \geq 3$ in $\frac{g(G)}{g(G)-2} \leq 3$, za VSAK ravninski graf, velja

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$$

Če ima cikel, to sledi iz zadnje posledice, če pa je drevo, pa itak vemo, da je $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Če pa je G ravninski graf brez trikotnikov in z vsaj 3 vozlišči, potem velja:

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$$

Ti dve formuli sta pomembni tudi zato, ker nam data linearno oceno za število povezav ravninskega grafa.

Kako ugotovimo ali je graf ravninski?

- Če je, potem dokažemo tako, da podamo vložitev v ravnino
- Če ni, potem uporabimo izrek Kuratowskega ali Wagnerjev izrek

Izrek 7.3 (Kuratowski)**.** Graf je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa izomorfnega subdiviziji grafa K_5 ali subdiviziji $K_{3,3}$.

Dokaz. V eno smer je skoraj očitno.

- $K_{3,3}$ in K_5 nista ravninska
- G je ravninski $\iff$ vsaka njegova subdivizija je ravninska.

V drugo smer, je predolg ■

Izrek 7.4 (Wagner)**.** Graf je ravninski natanko tedaj, ko nima minorja izmorfnega s K_5 ali $K_{3,3}$

8 Barvanje grafov

Definicija 8.1 (Barvanje grafa)**.** Je preslikava, ki vsakemu vozlišču v grafu priredi barvo.

Definicija 8.2 (Dobro barvanje)**.** Sosednji vozlišči se preslikata v različni barvi.

$$\forall u, v \in E(G) : c(u) \neq c(v)$$

Definicija 8.3 ((dobro) k-barvanje)**.** (Dobro) barvanje, kjer za množico barv K velja $|K| = k$

Definicija 8.4 (Kromatično število)**.** Najmanjši k, za katerega obstaja k-barvanje grafa. Označimo z $\chi(G)$

Od tu dalje barvanje pomeni dobro barvanje.

$\chi(K_n) = n$
$\chi(C_n) = 2$, če je n sod, sicer 3
$\chi(P(5, 2)) = 3$

Definicija 8.5 (Barvni razredi)**.** Množice vozlišč iste barve.

Bistvo je, da znotraj barvnega razreda ni povezav. Rečemo, da so barvni razredi neodvisne množice.

Kako določimo $\chi(G)$? Poiščemo k, da velja:

- $\chi(G) \leq k$
- $\chi(G) \geq k$

Konstrukcija: poiščemo k-barvanje. Potrebujemo dokaz, da ne gre z manj kot k barvami. Na primer, poiščemo C_k kot podgraf.

Trditev 8.1. Če je H podgraf G, velja $\chi(G) \geq \chi(H)$

Dokaz. Trditev očitno velja. ■

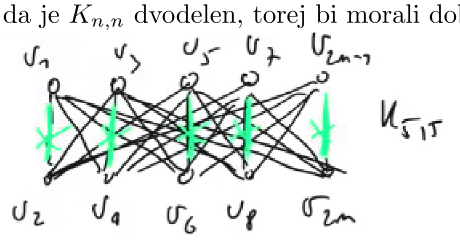
8.1 Požrešni algoritem barvanja

Barve si od tu dalje predstavljamo kot naravna števila. Natančneje, k-barvanje pomeni $c : V(G) \to [k]$

Naj bo G graf z vozlišči $v_1, v_2, ..., v_k$. Po tem vrstnem redu barvamo vozlišča tako, da uporabimo najmanjšo možno barvo (najmanjša, ki še ni uporabljena na nobenem od sosedov).
Očitno je rezultat algoritma odvisen od ostevilčenja vozlišč.

Trditev 8.2. Požrešni algoritem je lahko poljubno slab

Dokaz. Iz grafa $K_{n,n}$ odstranimo vse "navpične" povezave. Poženemo požrešni algoritem, ki vrne $\chi = n$. Vemo pa, da je $K_{n,n}$ dvodelen, torej bi morali dobiti $\chi = 2$.



■

Trditev 8.3. Vedno obstaja tak vrstni red vozlišč, da požrešni algoritem vrne pravilen rezultat.

Trditev 8.4. Če je G graf, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Dokaz. Poženemo požrešni algoritem v poljubnem vrstnem redu. Ko barvamo v, ima kvečjemu $deg(v)$ pobarvanih sosedov.

$$deg(v) \leq \Delta(G)$$

Zato v množici barv $[\Delta(G) + 1]$ obstaja barva, ki jo požrešni algoritem lahko uporabi za barvo vozlišča v. Torej smo vsa vozlišča pobarvali z eno izmed barv iz $[\Delta(G) + 1]$. ■

Trditev 8.5. Če G ni regularen graf, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Dokaz. Naj bo v vozlišče, za katerega velja $deg(v) < \Delta(G)$ (obstaja, ker graf ni regularen). Opazujmo BFS drevo iz v. Sedaj poženemo požrešni algoritem v vrstnem redu $n, n-1, n-2, ..., 1$. Ko barvamo poljubno vozlišče $x \neq v$, ima x vsaj enega nepobarvanega soseda: torej je v množici $[\Delta(G)]$ vsaj ena prosta barva. Ta zaključek pa velja tudi za barvanje zadnjega vozlišča v, saj je $deg(v) < \Delta(G)$. ■

Opomba: pogoj regularnosti v zadnji trditvi potrebujemo.

Izrek 8.1 (Brooks)**.** Če je G povezan graf, ki ni cikel lihe dolžine in ni polni graf, potem velja

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Dokaz. Nima preprostega dokaza. Morda na drugi stopnji. ■

Slavni problem 4 barv: ali lahko vedno pobarvamo zemljevid tako, da vsaki sosednji državi prejmeta različni barvi in za to porabimo kvečjemu 4 barve?

Izrek 8.2 (4 barv)**.** Če je G ravninski graf, potem je $\chi(G) \leq 4$.

8.2 Barvanje povezav

Definicija 8.6 (k-barvanje povezav)**.** je preslikava $c : E(G) \to [k]$. Če gre za dobro barvanje, velja:

$$\forall uv, uw \in E(G) \Rightarrow c(uv) \neq c(uw)$$

Definicija 8.7 (Kromatični indeks)**.** Najmanjši k, za katerega obstaja barvanje povezav G. Označimo $\chi'(G)$.

Trditev 8.6. $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Izrek 8.3 (Vizing)**.** Za vsak graf G velja

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Dokaz. Če imate dokaz ki se po nekom imenuje, potem je verjetno izven obsega našega predmeta. ■

Torej: $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$

Definicija 8.8 (Razred grafa)**.** Graf G je razreda 1, če je $\chi'(G) = \Delta(G)$. V nasprotnem primeru mora veljati $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, G pa je razreda 2.

Izrek 8.4. Če je n sod, je K_n razreda 1, sicer je razreda 2.

Dokaz. Naj bo najprej $n = 2k + 1$. Pobarvajmo povezave takole: zamislimo si pravilen $(2k + 1)$-kotnik in povezave vzdolž tega poligona pobarvajmo z barvami $1, 2, ..., 2k+1$. Vsaka nadaljna povezava je vzpredna z eno stranico $(2k+1)$-kotnika. Sedaj te preostale povezave (tetive) pobarvamo z isto barvo, kot jo ima vzporedna povezava $(2k+1)$-kotnika. Ker vzporedne povezave nimajo skupnih krajišč, je to dobro barvanje povezav K_{2k+1} z $2k + 1$ barvami.

$$\Rightarrow \chi'(K_{2k+1}) \leq 2k + 1 = \Delta(G) + 1$$

Dokažimo še, da $\chi'(K_{2k+1}) \geq 2k+1$. Recimo nasprotno: K_{2k+1} smo uspeli po povezavah pobarvati s samo $2k$ barvami. Koliko največ povezav lahko pobarvamo z isto barvo? Kvečjemu k, ker vsaka povezava "zasede" dve krajišči zase. Ker imamo $2k$ barv, smo torej pobarvali $\leq (2k) * k$ povezav. Naše barvanje je pobarvalo kvečjemu $2k^2$ povezav. Vemo pa, da je

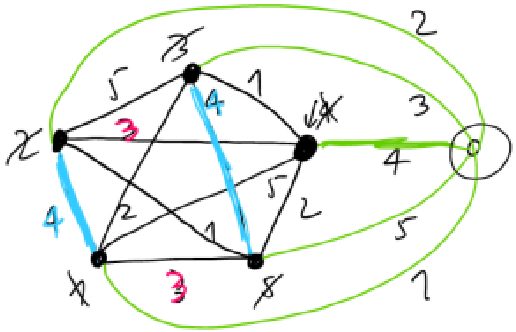
$$|E(K_{2k+1})| = \binom{2k+1}{2} = \frac{(2k+1) * 2k}{2} = 2k^2 + k$$

Torej imamo več barv kot smo jih lahko pobarvali, kar je protislovje.

$$\Rightarrow \chi'(K_{2k+1}) \geq 2k + 1$$

$$\Rightarrow \chi'(K_{2k+1}) = 2k + 1, \text{ torej je razreda 2}$$

Naj bo sedaj $n = 2k$. Lahko ga dobimo iz K_{2k-1} tako, da dodamo novo vozlišče, ki ga povežemo z vsemi vozlišči iz K_{2k-1}. Sedaj povezave v K_{2k-1} pobarvamo z zgoraj opisano konstrukcijo. Vsakemu vozlišču tedaj "manjka" ena barva; tista, s katero smo pobarvali temu vozlišču nasprotno stranico. S to barvo pobarvamo povezavo do novo dodalega vozlišča.



S tem smo dodali vse prej obstoječe barve in dobili barvanje za K_{2k}. Torej smo porabili

$$\Delta(K_{2k-1}) + 1 = \Delta(K_{2k})$$

barv. Ker velja tudi

$$\chi'(K_{2k}) \geq \Delta(K_{2k})$$
$$\implies \chi'(K_{2k}) = \Delta(K_{2k})$$

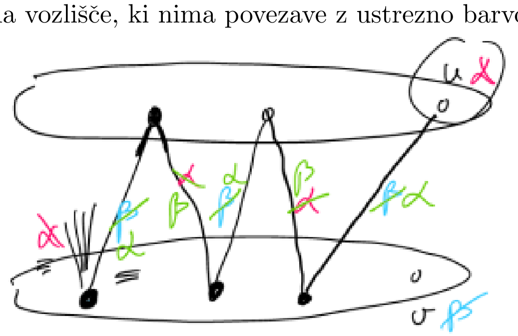
torej je K_{2k} razreda 1. ■

Izrek 8.5. Če je G dvodelen graf, potem je G razreda 1.

Dokaz. Z indukcijo po $|E(G)|$
BŠS naj bo G povezan.
BI: $\Delta(K_2) = 1 = \chi'(K_2)$ OK
G je poljuben povezan dvodelen graf in $uv = e \in E(G)$.
$H := G - e$.
Po IP (ker je H tudi dvodelen): $\chi'(H) = \Delta(H)$. Če je $\Delta(H) < \Delta(G)$, potem je seveda tudi G razreda 1; povezavo e pobarvamo s svojo barvo. Naj bo torej $\Delta(H) = \Delta(G)$. Naj bo c poljubno optimalno barvanje povezav grafa H. Opazujmo vozlišče $u \in e$. To vozlišče je v H stopnje $< \Delta(H)$ (ker smo eno njegovo povezavo odstranili). Zato v barvanju c pri vozlišču u manjka vsaj ena barva iz množice $[\Delta(H)]$. Naj bo to barva α. Analogno sklepamo, da pri $v \in e$ manjka ena barva iz $[\Delta(H)]$, naj bo to β.

- Če je $\alpha = \beta$:
  Povezavo uv lahko tedaj pobarvamo z α in zaključimo indukcijski korak.
- Če $\alpha \neq \beta$:
  Vemo, da iz u poteka povezava barve β (sicer bi to lahko obravnavali kot zgornji primer $\alpha = \beta$).

  Naredimo cik-cak pot P (ki se začne v u), ki sledi izmenično najprej barvi α, nato β. V neki točki bomo naleteli na vozlišče, ki nima povezave z ustrezno barvo. Tam pot zaključimo.

  Potem na tej poti zamenjamo α in β. Novo barvanje je še vedno dobro barvanje, toda sedaj v vozlišču u manjka β namesto α. Ker tudi v v manjka β, lahko e pobarvamo z β. To zaključi IK.

■