Лабораторная работа №1

“Формы представления линейных систем”

Вариант 6

Выполнил: Галкина Е. Д.

Группа: R33372

Преподаватель: Пашенко Артем Витальевич

Университет ИТМО

2023

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	2
Задание №1	3
Задание №2	5
Задание №3	8
Задание №4	12
Задание №5	14
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	18

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Задание №1

Формулировка задания: Одноканальная система в форме вход-выход. Возьмите коэффициенты a_2, a_1 , a_0, b_2 , b_1, b_0 из таблицы 1 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите уравнение

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u \qquad (1)$$

Выполните моделирование при входном воздействии u(t) = 1(t) и нулевых начальных условиях. Приведите в отчете схему моделирования и графики входного воздействия u(t) и выхода y(t).

Таблица 1. Исходные данные для заданий 1 и 2

Вариант	a_2	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
№6	9	3	6	12	7	7

Решение: Одноканальная система в форме вход-выход с коэффициентами в соответствии с вариантом, из таблицы 1 подставим в уравнение (1):

$$\dddot{y} + 9\ddot{y} + 3\dot{y} + 6y = 12\ddot{u} + 7\dot{u} + 7u \qquad (2)$$

Для построения модели в MATLAB необходимо выразить $\dddot{y}$:

$$\dddot{y} = -9\ddot{y} - 3\dot{y} - 6y + 12\ddot{u} + 7\dot{u} + 7u \qquad (3)$$

Заменим производные оператором p и выразим y:

$$y = \frac{1}{p}\left(12u - 6y + \frac{1}{p}\left(7u - 3y + \frac{1}{p}(7u - 9y)\right)\right)$$

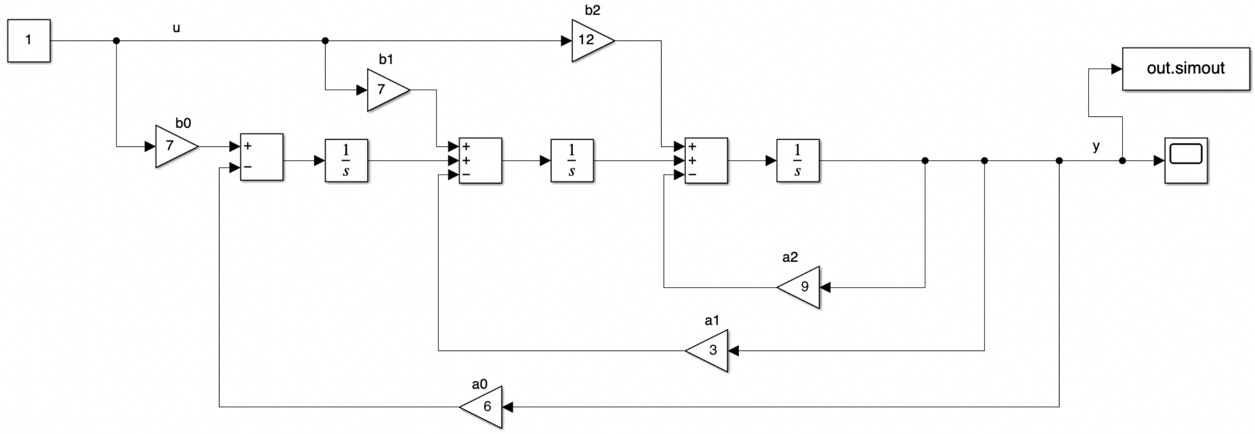
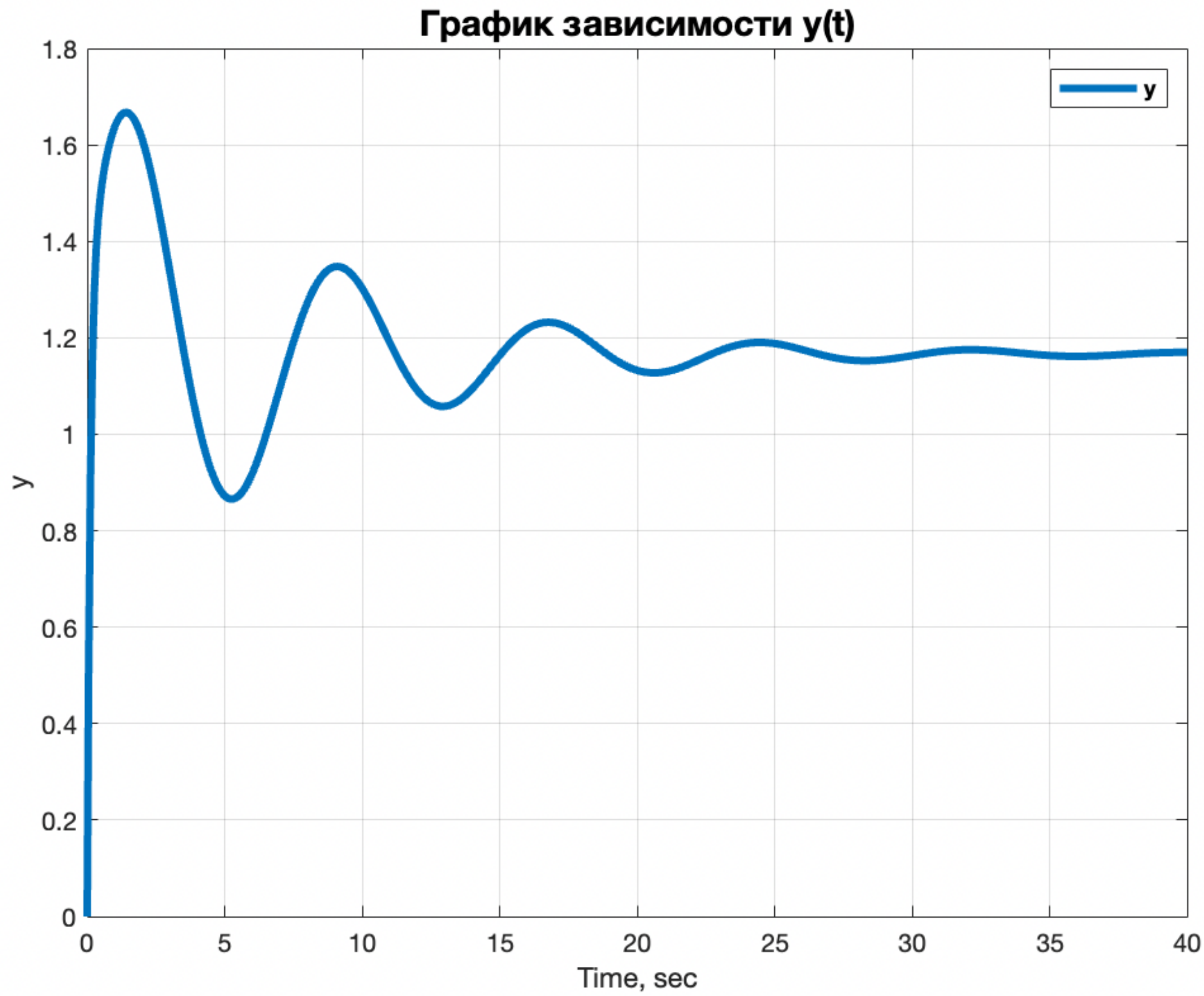
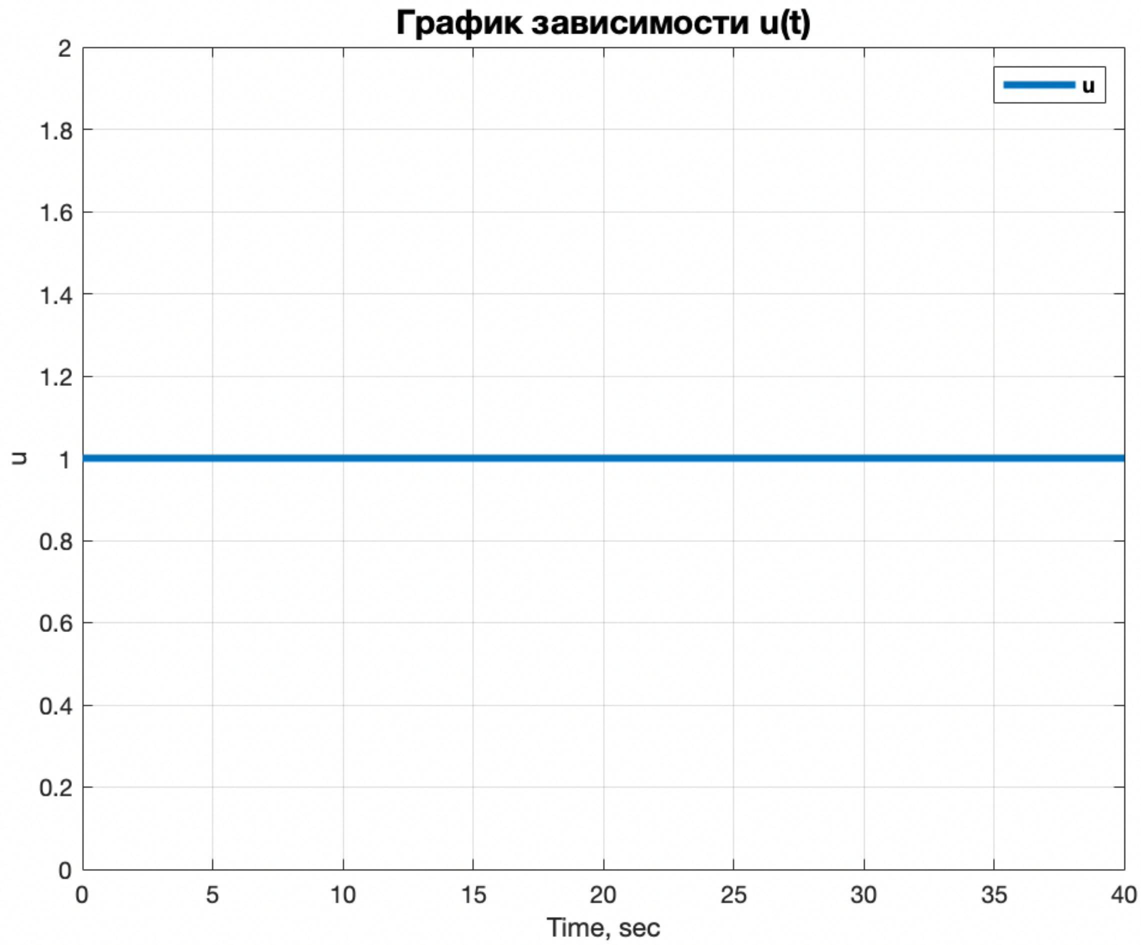


Рисунок 1 - Схема моделирования 1 задания





Вывод: Проанализировав уравнение по передаточной функции можно сказать, что система физически реализуема. При заданных коэффициентах и нулевых начальных условиях система приходит в равновесие через 40 секунд.

Задание №2

Формулировка задания: Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход. Возьмите коэффициенты a_2, a_1 , a_0, b_2 , b_1, b_0 из задания 1. Определите передаточную функцию системы. Постройте математические модели вход-состояние-выход в одной из канонических форм: канонической управляемой для четных и канонической наблюдаемой для остальных вариантов. Выполните сравнительное моделирование полученных форм представления системы при входном воздействии u(t) = 1(t) и нулевых начальных условиях. Приведите в отчете схемы моделирования и графики входного воздействия u(t) и выхода y(t), сделайте выводы.

Решение: Уравнение (2) преобразуем из формы вход-выход к форме состояния вход-состояние-выход с помощью формулы (4):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u, y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \qquad (4)$$

В формуле (4) x_1, x_2, x_3 - состояния, a_2, a_1 , a_0, b_2 , b_1, b_0 - коэффициенты. Так же матрицы включающие в себя коэффициенты имеют отдельные названия.

$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix} -$ матрица A; $\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} -$ матрица B

$[b_0 \quad b_1 \quad b_2] -$ матрица C

Подставив соответствующие коэффициенты получим:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -3 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u, y = [7 \quad 7 \quad 12]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \qquad (5)$$

Далее воспользуемся блоком state-space (рис. 3): туда нужно ввести соответствующие матрицы (рис. 2). Матрица D отсутствует и равна нулю так как система имеет нулевые начальные условия.

Рисунок 2 - Пример ввода матриц в блок state-space

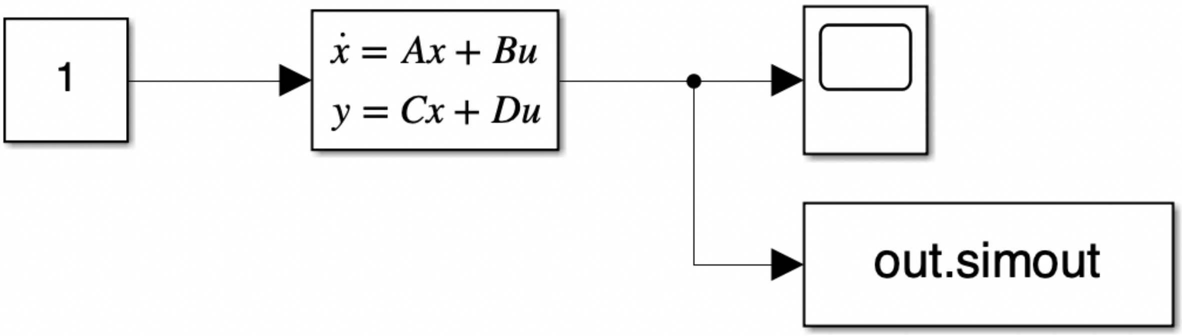
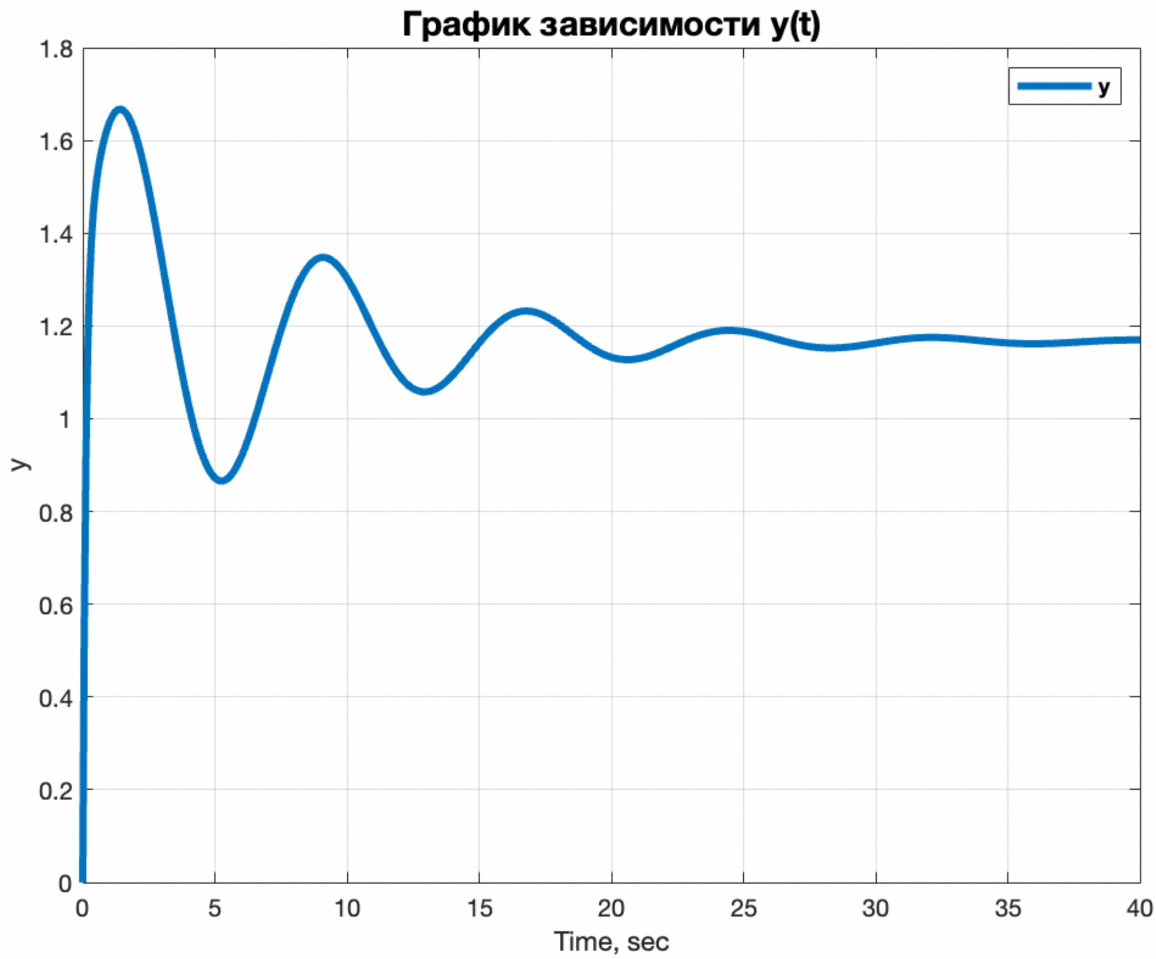
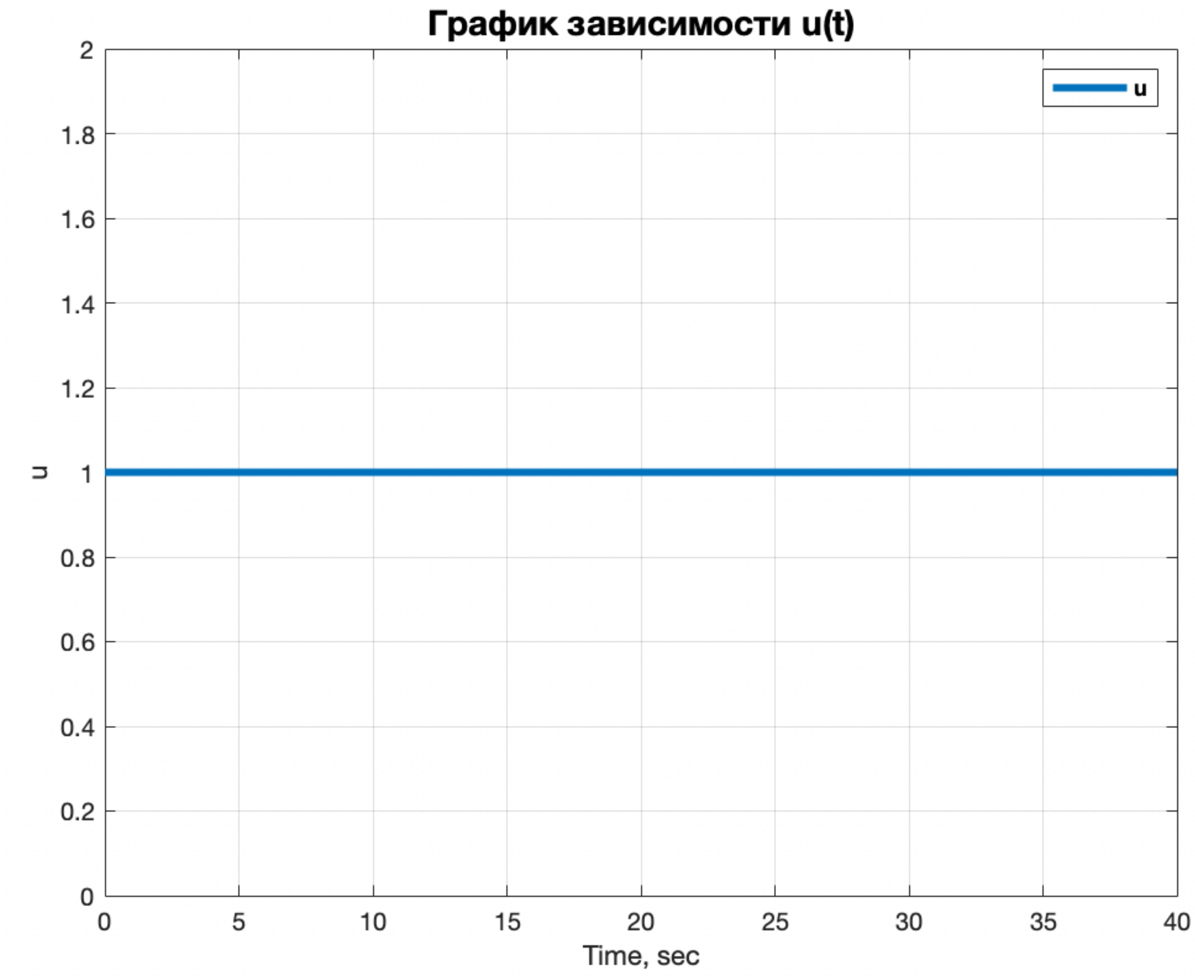


Рисунок 3 - Схема моделирования 2 задания





Вывод: график выхода так же имеет затухающие колебания и через 40 секунд система успокаивается. Графики выхода первого и второго задания получились одинаковые.

Задание №3

Формулировка задания: Многоканальная система в форме вход-выход. Возьмите коэффициенты a_{11}, a_{12} , a_{21}, a_{22}, b_{11} , b_{12}, b_{21}, b_{22} из таблицы 2 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (6)$$

где

$$A(p) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B(p) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Выполните моделирование при входных воздействиях $u_1(t) = 1(t)$ и $u_2(t) = 2\sin(t)$ и нулевых начальных условиях. Приведите в отчете схему моделирования и графики входных воздействий $u_1(t)$ и $u_2(t)$ и выходов $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Таблица 2: Исходные данные для задания 3

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}
№6	p+19	p+3	p+6	p+2	7	7	5	6

Решение: упростим уравнение (6) выразив y:

$$A * y = B * u \tag{7}$$

$$A^{-1} * A * y = A^{-1} * B * u \tag{8}$$

$$y = A^{-1} * B * u \tag{9}$$

Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * A^T \tag{10}$$

Найдем определитель матрицы A ($|A|$) и транспонированную матрицу A^T с коэффициентами, соответствующими варианту:

$$|A| = (p + 19)(p + 2) - (p + 3)(p + 6) = 12p + 20$$

$$A^T = \begin{bmatrix} p + 2 & -p - 3 \\ -p - 6 & p + 19 \end{bmatrix}$$

Подставим найденные множители в (9) и до множим на матрицу B и u:

$$y = \frac{1}{12p + 20} \begin{bmatrix} p + 2 & -p - 3 \\ -p - 6 & p + 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} u = \frac{1}{12p + 20} \begin{bmatrix} 2p - 1 & p + 115 \\ -2p + 53 & -p + 72 \end{bmatrix}$$

Чтобы понять какое из слагаемых относится к первому входу или выходу, представим y и u как вектор:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12p + 20} \begin{bmatrix} 2p - 1 & p + 115 \\ -2p + 53 & -p + 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Умножив правую сторону (11), можно заметить какие из выражений относятся к каждому входу и выходу:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12p + 20} \begin{bmatrix} u_1(2p - 1) + u_2(p + 115) \\ u_1(-2p + 53) + u_2(-p + 72) \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Благодаря выражению (12) можно построить схему моделирования:

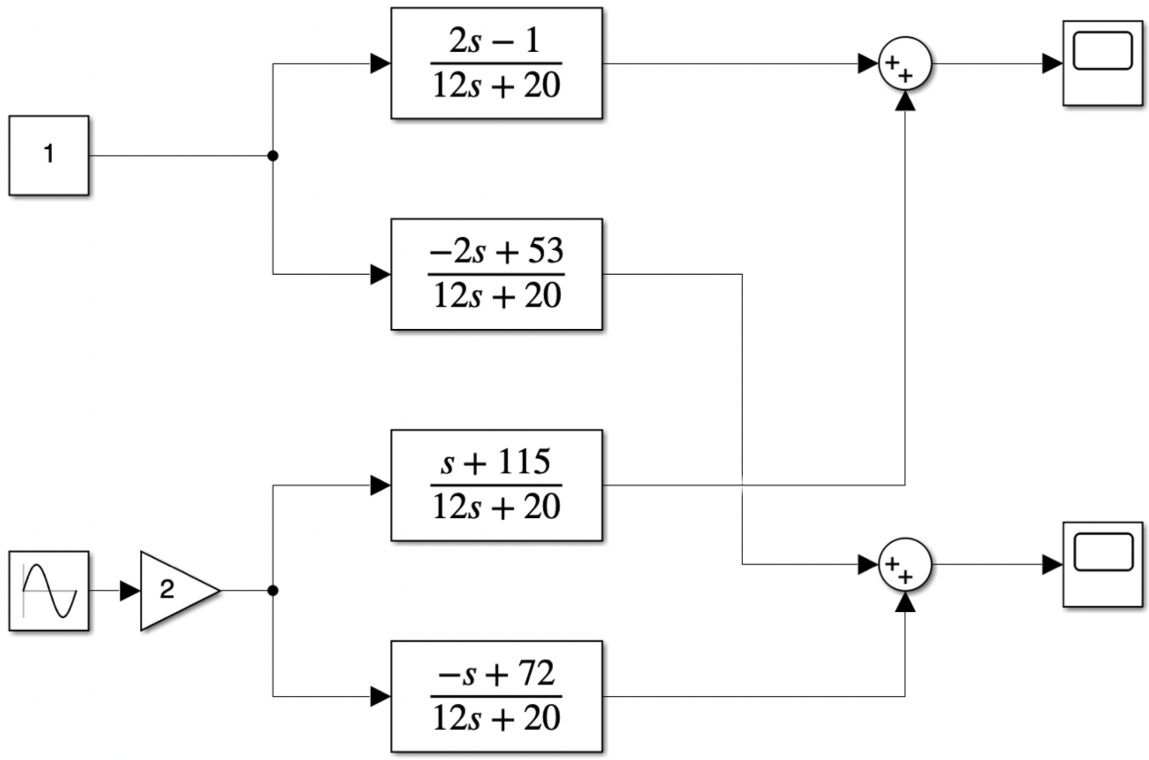


Рисунок 4 - Схема моделирования 3 задания

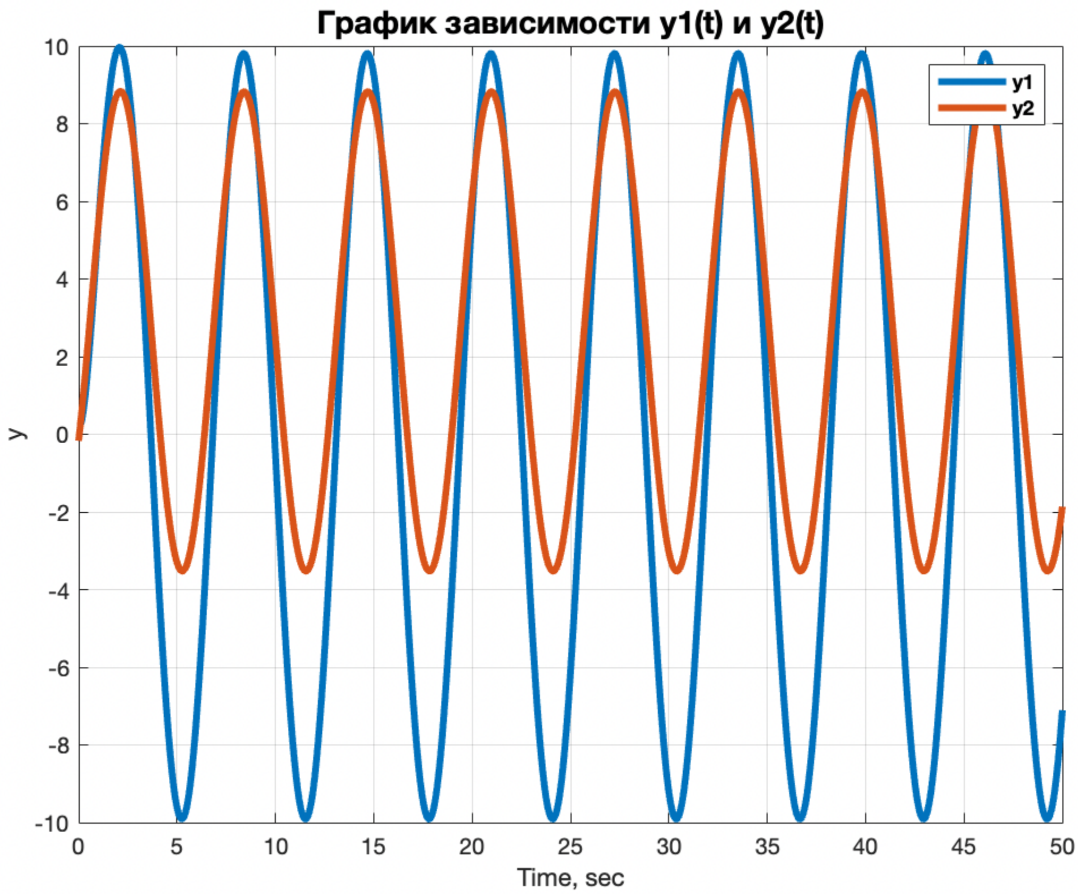


График зависимости y1(t) и y2(t)
y1
y2
y
Time, sec

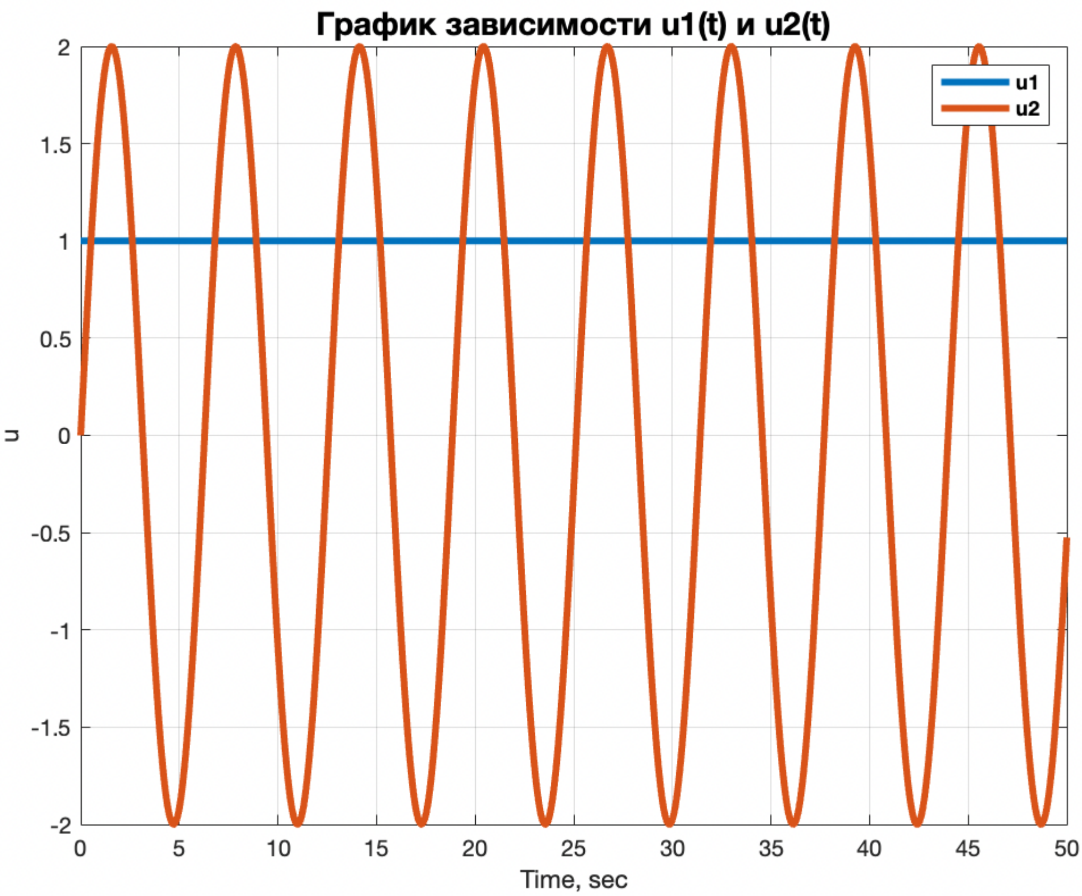


График зависимости u1(t) и u2(t)
u1
u2
u
Time, sec

Вывод: Относительный порядок данной системы равен нулю, возможно, из-за этого система не приходит к устоявшемуся значению, но при этом амплитуда колебаний не растет.

Задание №4

Формулировка задания: Одноканальная система в форме вход-состояние-выход. Возьмите матрицы A, B и C из таблицы 3 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{13}$$

Выполните моделирование при входном воздействии u(t) = 1(t) и нулевом начальном значении вектора состояния. Приведите в отчете схему моделирования и графики входного воздействия u(t) и выхода y(t).

Таблица 3: Исходные данные для задания 4

Вариант	A	B	C
№6	$\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

Решение: заполним матрицы A, B, C согласно варианту и введем их в блок state-space (рис. 5), затем построим модель (рис. 6):

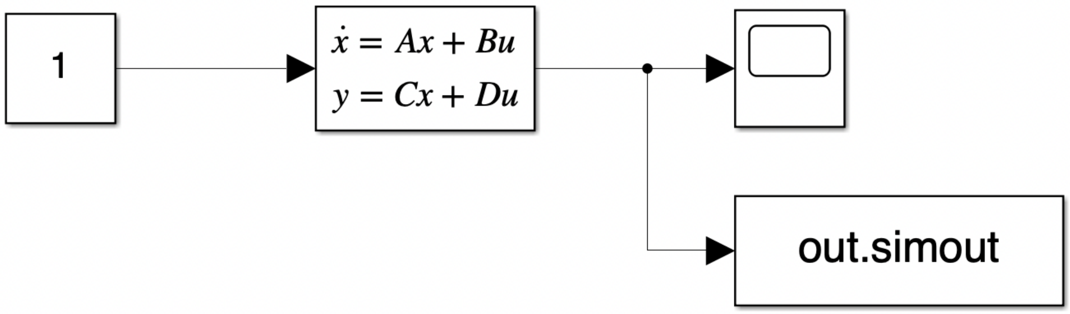
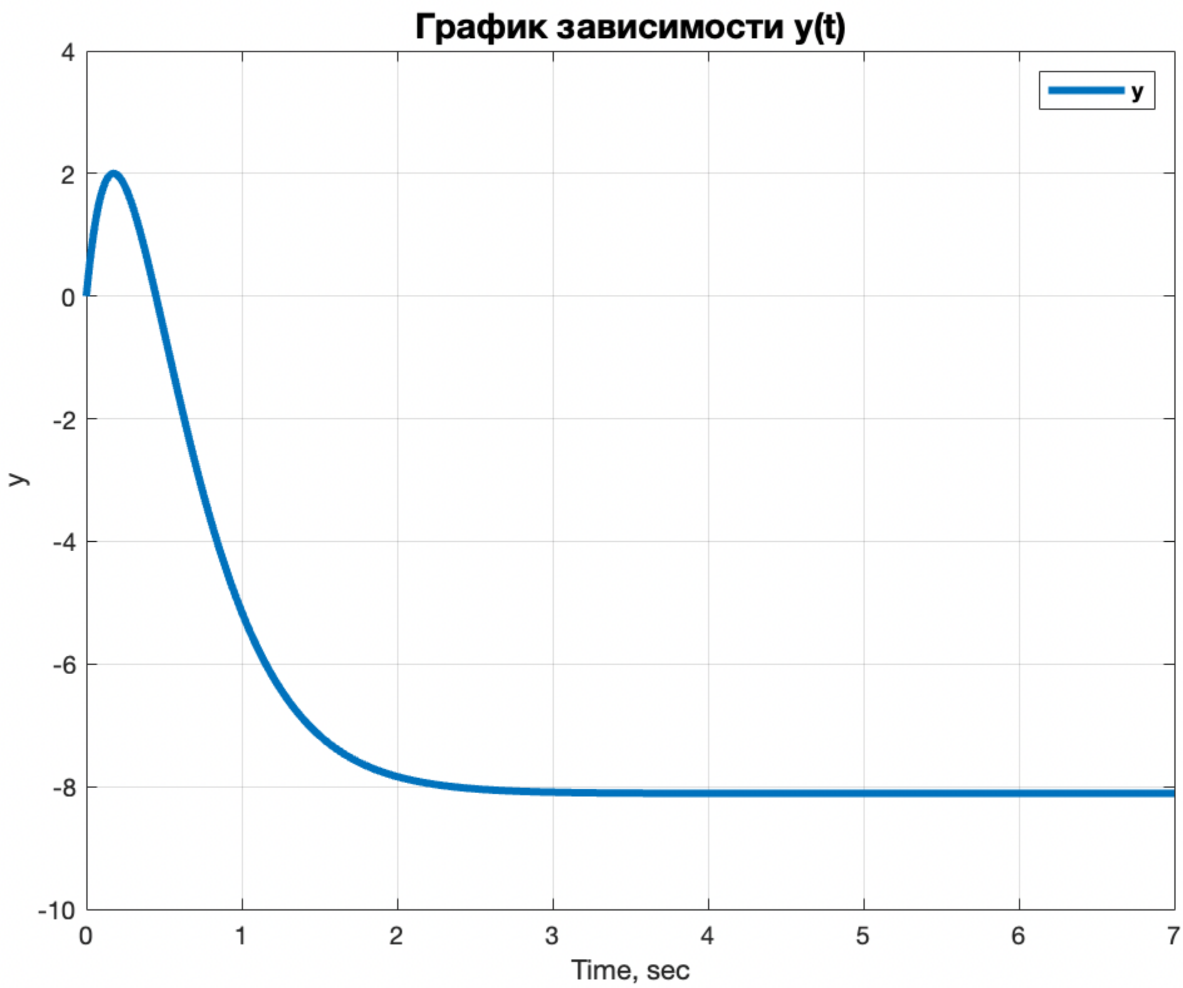
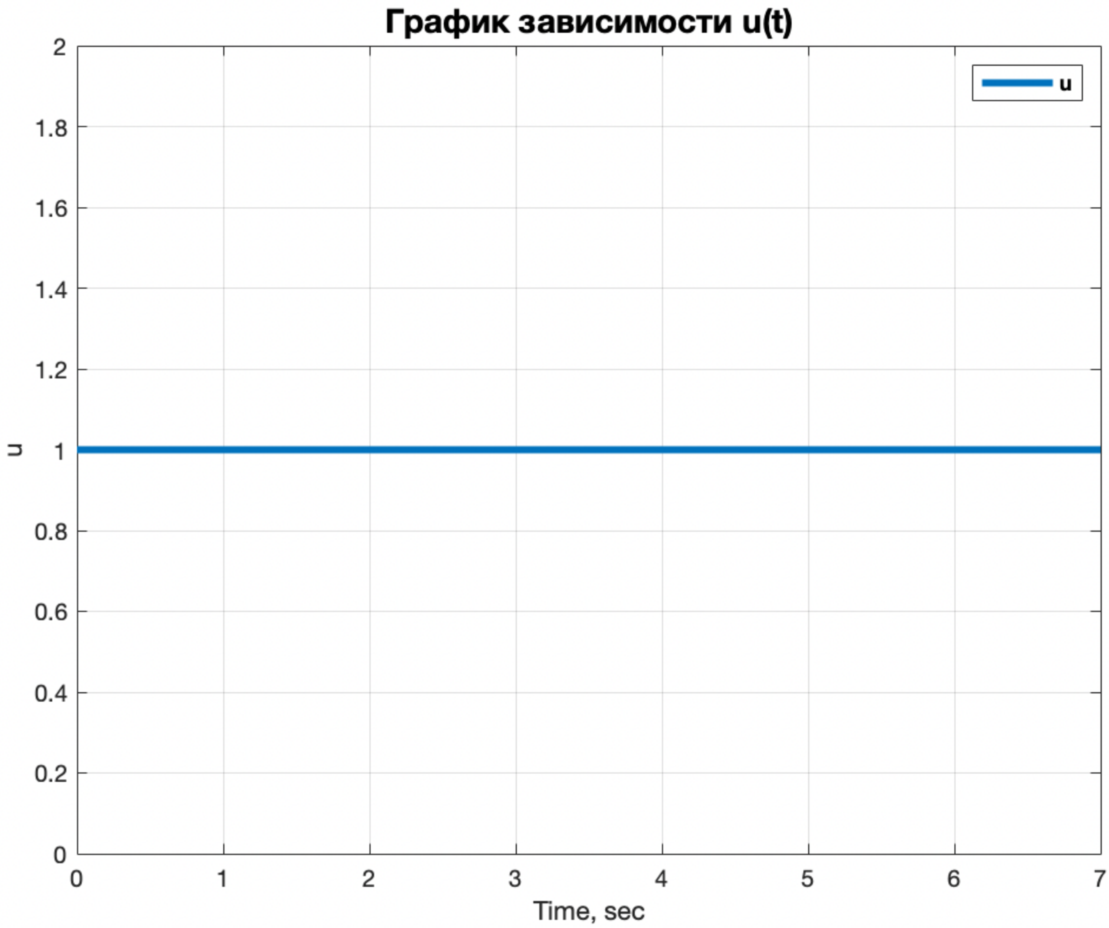


Рисунок 5 - Схема моделирования 4 задания





Вывод: путем преобразований системы как в задании 5 (уравнения (16) - (19)) было выявлено, что система реализуема, ее относительный порядок равен единице, а порядок двум.

Задание №5

Формулировка задания: Многоканальная система в форме вход-состояние-выход. Возьмите матрицы A, B и C из таблицы 4 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (14) \\ y = Cx & (15) \end{cases}$$

Выполните моделирование при входных воздействиях $u_1(t) = 1(t)$ и $u_2(t) = 2\sin(t)$ и нулевом начальном значении вектора состояния. Приведите в отчете схему моделиро- вания и графики входных воздействий $u_1(t)$ и $u_2(t)$ и выходов $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Таблица 4: Исходные данные для задания 5

Вариант	A	B	C
№6	$\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Решение: перепишем уравнение (14) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Вынесем оператор в отдельную матрицу:

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Приведем подобные слагаемые:

$$\begin{bmatrix} p - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & p - a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

До множим на $\begin{bmatrix} p - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & p - a_4 \end{bmatrix}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & p - a_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Подставим правую часть (17) в (15) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & p - a_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Далее найдем обратную матрицу как в задании 3 и получим аналогичное выражение:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2 + 6p + 9} \begin{bmatrix} 23p - 35 & 43p - 14 \\ 22p - 78 & 46p - 60 \end{bmatrix} \tag{19}$$

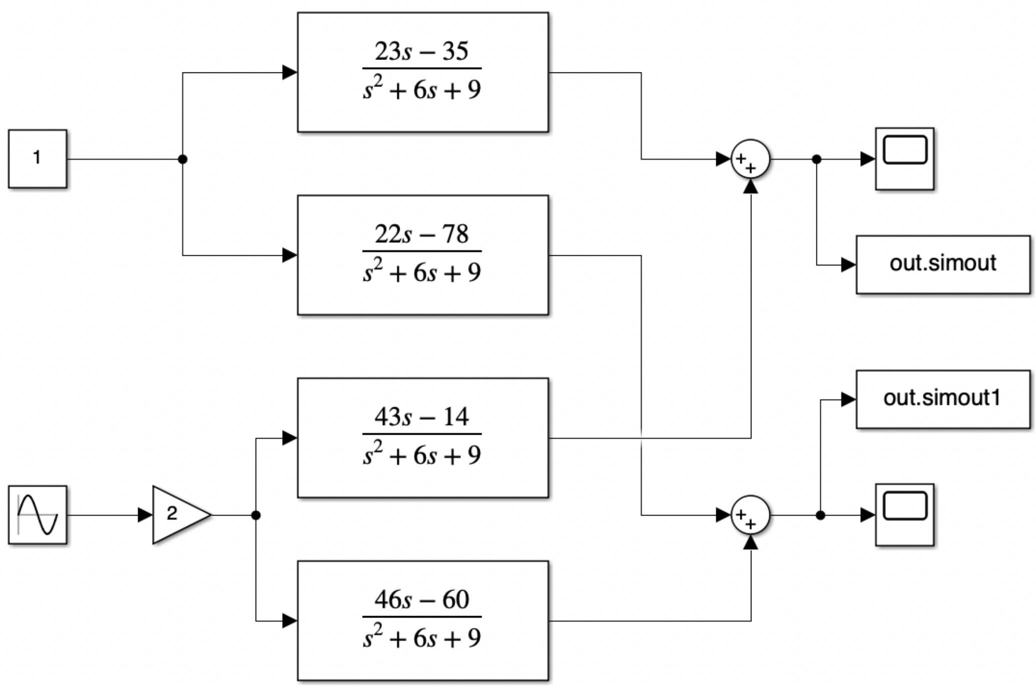


Рисунок 7 - Схема моделирования 5 задания

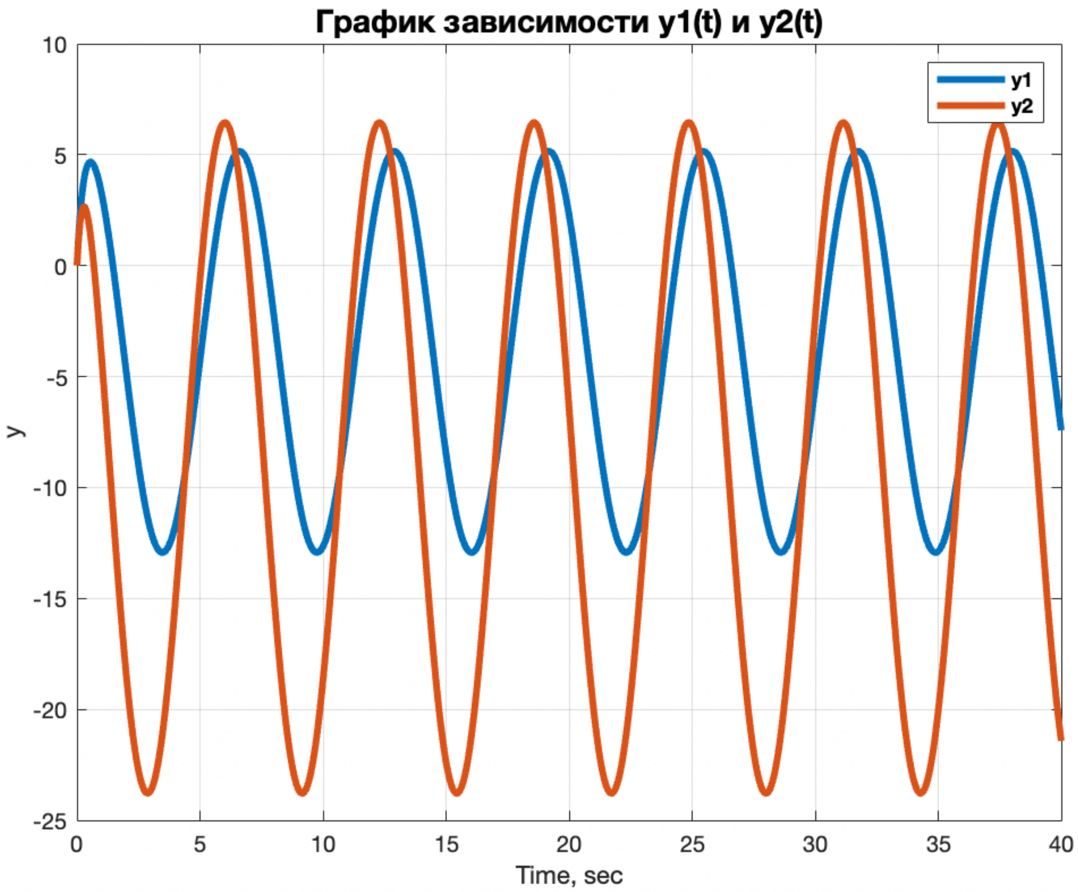


График зависимости y1(t) и y2(t)
y1
y2
y
Time, sec

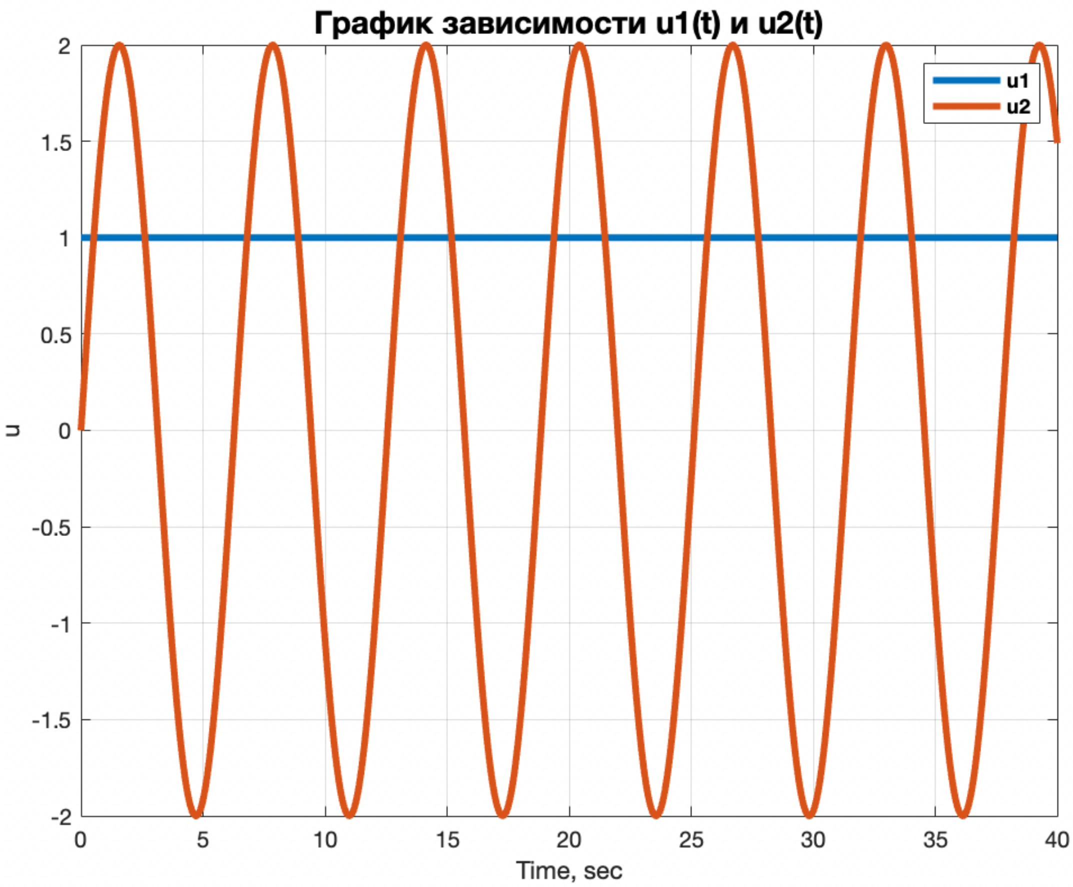


График зависимости u1(t) и u2(t)
u1
u2
u
Time, sec

Вывод: система реализуема, но колебания незатухающие, скорее всего это говорит о том, что реализуемость системы не связана с ее результативностью и достижению ей затухания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы я научилась работать в MATLAB, построила различные графики. Так же попыталась выявить закономерность колебаний выхода от передаточной функции, но заметить закономерность не вышло, потому что колебания выхода становились незатухающими из-за подающегося на вход синуса, таким образом на выход повлияло начальное состояние системы, а не передаточная функция. Зависимости между входами и выходами в многоканальной системе не удалось заметить: в одном случае (5 задание), когда на вход подается константа амплитуда выхода меньше, чем так, где на вход подавался синус. В 3 задании противоположная ситуация. Следовательно связь между входом и выходом в этом случае контролируется самой передаточной функцией, это связано с тем, что входные сигналы как бы перемешиваются.

Задание 4 и 1 я попробовала сравнить на достижение системой равновесия. Передаточная функция в двух случаях имеет одинаковые параметры. Но графики сильно отличаются амплитудой и количеством колебаний. Это говорит о том, что весомо повлиять на систему могут не только порядок и реализуемость, но и численные коэффициенты.