Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid
Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Aplicaciones del Conjunto de Cantor en Topología y Análisis Funcional

Paula López Pozuelo

17 de enero de 2014
Curso académico 2013-2014

Director del trabajo:
Prof. José Pedro Moreno Díaz

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo principal presentar el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, junto con una de sus aplicaciones más importantes en análisis funcional: el Teorema de Banach-Mazur. Esto requerirá que hagamos uso de un buen número de herramientas matemáticas avanzadas: topologías débiles, espacios duales, los teoremas de Tikhonov, de Banach-Alaoglu y de Hahn-Banach, etc.

El primer capítulo es de preliminares, y se puede abordar antes de comenzar la lectura completa, o se podrá volver a él más adelante, cuando se considere necesario. En el segundo capítulo, se presentan el conjunto y el espacio de Cantor, junto con algunas de sus propiedades más importantes. Este estudio de conceptos topológicos y de análisis funcional culmina en los posteriores capítulos con las demostraciones de los dos teoremas centrales.

El tercer capítulo gira en torno al Teorema de Alexandroff-Hausdorff, cuya demostración no se encuentra habitualmente en los textos de topología general, lo que fue una motivación para presentarla con todo detalle. El teorema afirma que todo espacio compacto y metrizable es imagen continua del espacio de Cantor. Finalmente se procederá, en un cuarto capítulo, a presentar el Teorema de Banach-Mazur, según el cual todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}[0,1]$.

Abstract

The main goal of this bachelor thesis is to present the Alexandroff-Hausdorff Theorem, together with one of its most important applications in functional analysis: the Banach-Mazur Theorem. This will require that we make use of a wide range of mathematical tools: weak topologies, dual spaces, the Tikhonov, Banach-Alaoglu and Hahn-Banach theorems, etc.

The first chapter is composed by a group of preliminaries, and the reader can decide whether to tackle it before beginning to read the project, or whether to go back to it whenever it is needed. In the second chapter, the Cantor set and space will be introduced, coupled with some of their most noticeable properties. This study of topological and functional analysis concepts will result in the detailed proofs of the two central theorems in the two following chapters.

The third chapter orbits around the Alexandroff-Hausdorff Theorem, whose proof isn't usually found in general topology textbooks, which motivated us to present it in an extensive manner. The theorem states that every compact and metrizable space is a continuous image of the Cantor space. We will finally proceed, in a fourth chapter, to present the Banach-Mazur Theorem, according to which every separable Banach space is linearly isometric to a subspace of $\mathcal{C}[0,1]$.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Hay algunos conceptos topológicos y de análisis funcional que conviene tener claros antes de sumergirse en la lectura de las próximas páginas. En este primer capítulo, presentamos una recopilación con el fin de facilitar la tarea, con excepción de aquellos más usuales que se pueden encontrar en cualquier libro de topología general o de análisis funcional.

1.1. Espacio producto

El espacio producto y la topología producto serán dos de nuestras herramientas principales, como se verá más adelante. A continuación, definimos estos conceptos, empezando con las definiciones de producto cartesiano y proyección.

Definición 1.1. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos indexada, y sea $X = \cup_{\alpha\in I}A_\alpha$. El *producto cartesiano* de esta familia, $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$, es el conjunto de todas las I-uplas $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ de elementos de X tal que $x_\alpha \in A_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. Dicho de otro modo, es el conjunto de todas las funciones

$$x : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

tales que $x(\alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$.

Definición 1.2. Sea $\beta \in I$ y sea

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del producto cartesiano su coordenada β-ésima,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in I}) = x_\beta.$$

Llamamos a esta función la *proyección* asociada al índice β o *proyección* β-ésima.

Definición 1.3. Sea $\{X_\beta, \mathcal{T}_\beta\}$ una familia de espacios topológicos. Sea la colección

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ abierto de } X_\beta\},$$

y $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in I} \mathcal{S}_\beta$. Decimos que la *topología producto* es la generada por la subbase $\mathcal{S}$. Además, al conjunto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ con la topología producto, lo llamaremos *espacio producto*.

En el caso de que I sea numerable, podemos expresar $\mathcal{S}$ de una forma más visual:

$$\begin{aligned}
&U_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_n \times ... \\
&X_1 \times U_2 \times X_3 \times ... \times X_n \times ... \\
&X_1 \times X_2 \times U_3 \times ... \times X_n \times ... \\
&\vdots
\end{aligned}$$

donde, como antes, U_1 es abierto de X_1, U_2 es abierto de X_2, etc... La topología generada por $\mathcal{S}$ tiene como base las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$; por tanto, en el caso de que I sea numerable, los abiertos de la base serán los conjuntos de la forma

$$U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_n \times X_{n+1} \times ...$$

La topología producto, que, como se verá después, es la menos fina de entre todas las topologías que hacen continuas las proyecciones π_β, es la más adecuada para trabajar en $\prod_{\beta \in I} X_\alpha$ puesto que preserva bien las siguientes propiedades: [3]

- Separación: Si X_i es T_1 (Fréchet), T_2 (Hausdorff) o T_3 (regular), entonces $\prod_{\beta \in I} X_\beta$ también lo es.

- Conexión: Si X_β es conexo, $\prod_{\beta \in I} X_\beta$ es conexo.

- Compacidad: Si X_β es compacto, $\prod_{\beta \in I} X_\beta$ también es compacto.

Esta última propiedad se conoce como teorema de Tikhonov, y es uno de los resultados más importantes de la topología general. Recibe su nombre del matemático Andrey Nikolayevich Tikhonov, que lo demostró en 1930 para potencias del intervalo cerrado $[0, 1]$. La prueba más temprana publicada del teorema completo se atribuye a Eduard Cech, un matemático checo, en el año 1937.

Teorema 1.4. (de Tikhonov)[3]
Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ una familia cualquiera de espacios topológicos. Entonces, el espacio producto $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto si y sólo si cada $(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto.

1.2. Espacios de Banach y espacios separables

Definición 1.5. Decimos que un espacio es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge.

El ejemplo más sencillo de espacio completo es el de los números reales, que es completo con la métrica habitual (euclídea). En cambio, el conjunto de los números racionales con la misma métrica no es completo, pues existen sucesiones de números racionales que convergen a irracionales. De hecho, todo número irracional posee una sucesión de números racionales que converge a él.

Definición 1.6. Un espacio vectorial normado y completo recibe el nombre de *espacio de Banach*.

Introducimos ahora la noción de separabilidad, acuñada por Maurice Fréchet en su tesis de doctorado 'Sur quelques points du calcul fonctionnel', (1906). Se trata de la famosa obra en la que introdujo el concepto de espacio métrico.

Definición 1.7. Decimos que un subconjunto A de un espacio X es *denso* en X si se verifica que $\overline{A} = X$.

Definición 1.8. Un espacio topológico es *separable* si contiene un subconjunto denso y numerable.

Si un espacio topológico tiene una base numerable, entonces es separable, aunque el recíproco es falso. Por otra parte, si en un espacio existe una familia no numerable de abiertos disjuntos dos a dos, entonces se trata de un espacio no separable, pues si hubiera en él un conjunto denso numerable, cada uno de los abiertos de nuestra familia debería contener un punto de dicho conjunto, pero esto es imposible.

Ejemplo: El espacio $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ de todas las sucesiones que convergen a cero, con la norma del supremo, es separable.

Consideremos en c_0 la familia Y, cuyos elementos son las sucesiones cuya primera componente es un número racional y el resto ceros, las sucesiones cuyas primera y segunda componentes son números racionales y el resto cero, y así sucesivamente.

Ahora, fijados un elemento x de c_0 y un radio $r > 0$, tenemos que encontrar un elemento y de Y que esté dentro de la bola abierta $B(x, r)$, es decir, tal que $\|x - y\|_\infty < r$.

Por la convergencia de $x(n)$ a cero, sabemos que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|x(n)| < r$. Escogemos un elemento y de Y, cuyas primeras $n_0 - 1$ componentes sean números racionales que verifiquen que $|x(i) - y(i)| < r$ para $i < n_0$. Las demás componentes de y serán ceros, i.e. $y(i) = 0$ para $i \geq n_0$. De este modo se tiene que $|x(n) - y(n)| < r$ para todo $n \in N$. Por lo tanto,

$$\|x - y\|_\infty < r,$$

lo que implica que Y es un conjunto denso y, puesto que es numerable, resulta que c_0 es separable. □

Ejemplo: El espacio $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ de todas las sucesiones acotadas no es separable.

Sea X el conjunto de sucesiones cuyos términos son ceros y unos. Se trata de un conjunto no numerable, pudiéndose demostrar esto de la misma forma que la no numerabilidad del conjunto de Cantor (argumento diagonal).

Dos sucesiones cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, han de tener al menos una componente diferente, $x_i \neq y_i$. De ser así, tenemos que $\mid x_i - y_i \mid = 1$ y, por lo tanto,

$$\|x - y\|_\infty = \sup\{\mid x_n - y_n \mid : n \in \mathbb{N}\} = 1$$

La familia de bolas centradas en los puntos de X y con radio $\frac{1}{2}$ es una familia no numerable de abiertos, disjuntos dos a dos. Como consecuencia, ℓ_∞ no es separable.

□

Teorema 1.9. [2]

Sea f una aplicación lineal entre dos espacios normados X e Y. Entonces, son equivalentes:

(i) f es continua;

(ii) f es continua en 0;

(iii) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$.

Demostración.
$\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Trivial: f continua $\implies f$ continua en 0.

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(iii)}}$ Supongamos que (ii) es cierto. Como $f(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $\|x\| \leq \delta$, entonces $|f(x)| \leq 1$. Sea $x \in X$ distinto de cero, y sea $x' = \delta x / \|x\|$. Entonces, $\|x'\| = \delta$, por lo que $|f(x')| \leq 1$. Pero $f(x') = \delta f(x)/\|x\|$, de manera que $|f(x)| \leq \|x\|/\delta$. Es decir, se cumple (iii) para $M = 1/\delta$.

$\boxed{\text{(iii)} \implies \text{(i)}}$ Si (iii) es cierto, entonces f es continua, pues

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$$

para todo $x_1, x_2 \in X$ (de hecho, f es Lipschitz). □

1.3. Espacio dual y norma dual

En este apartado, introducimos el concepto de espacio dual, que es de gran importancia en el estudio del análisis funcional. Aunque se puede definir en un contexto más amplio, nos interesa sólo el caso de los espacios normados.

Definición 1.10. El *espacio dual* de un espacio normado X es el espacio vectorial X^*, cuyos elementos son los funcionales lineales y continuos en X.

Del mismo modo que se define el espacio dual X^*, se puede definir también el espacio bidual X^{**}, cuyos elementos son los funcionales lineales y continuos en X^*.

La noción de espacio dual ofrece mucha facilidad de manejo de espacios normados, pues, generalmente, el interés de estos se encuentra en sus funcionales lineales y continuos. En estos casos, se podrá hacer referencia directamente al espacio dual correspondiente.

Para trabajar con espacios duales, es necesario definir la norma dual sobre los elementos de X^*.

Definición 1.11. Sea X^* un espacio dual y sea $f \in X^*$. Definimos la *norma dual* como

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

1.4. Topologías débiles

¿Por qué se define la topología producto tal y como se describe en la sección 1.1, empleando las proyecciones? La topología producto es la forma más económica de hacer que las proyecciones sean continuas. Para precisar qué entendemos por "más económica", vamos a introducir el concepto de topología débil.

Definición 1.12. Si X es un espacio de Banach, $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones de X en Y_i, la *topología débil* en X asociada a $\mathcal{F}$ está generada por la base

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I \text{ finito}, U_i \in \mathcal{T}_{Y_i}\}$$

En otras palabras, la topología débil $\mathcal{T}_X$ asociada a $\mathcal{F}$ es la topología menos fina que hace todas las funciones f_i continuas.

La topología producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ es, precisamente, la topología débil en X para la familia $\mathcal{F} = \{\pi_i\}_{i \in I}$ de las proyecciones $\pi_i : X \longrightarrow X_i$.

Echemos un vistazo a otro tipo de topología producto (y por lo tanto débil), que recibe el nombre de topología débil*. Sea X un espacio de Banach, y sea X^* su dual. Fijado $x \in X$, definimos $\widehat{x}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \widehat{x} : \quad & X^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f \longrightarrow \widehat{x}(f) = f(x) \end{aligned}$$

Es decir, $\widehat{x}(f)$ es la evaluación de f en x. Veamos que $\widehat{x}$ es lineal y continua, de modo que $\widehat{x} \in X^{**}$.

En primer lugar, se puede ver fácilmente que $\widehat{x}$ es un operador lineal, pues $\widehat{x}(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \widehat{x}(f) + \mu \widehat{x}(g)$. En segundo lugar, la continuidad de $\widehat{x}$ se deduce directamente de la desigualdad

$$|\widehat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

y del Teorema 1.9. La topología débil* (o $\mathcal{T}_{w^*}$) en X^* es precisamente la más económica, o menos fina, que hace continuas las funciones $\widehat{x}$.

Definición 1.13. Sea X un espacio de Banach. La topología $\mathcal{T}_{w^*}$ en X^* se define como la topología débil generada por X, considerado como un subespacio de X^{**}.

Capítulo 2

El universo de Cantor

"Nadie logrará alejarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros."

David Hilbert

2.1. Georg Cantor

Aunque en muchas ocasiones se atribuye a Georg Cantor la nacionalidad alemana, en realidad nació en Rusia en el año 1845, en la ciudad de San Petersburgo. Se mudó con su familia a Alemania a la edad de 11 años, pero nunca olvidó su infancia en Rusia ni llegó a estar completamente a gusto en su nuevo país de residencia, en el que permaneció hasta su muerte.

A pesar de los deseos de su padre de que se convirtiera en un brillante ingeniero, Cantor quiso dedicar su vida al estudio de las matemáticas. Recibió la mayor parte de su educación universitaria en la Universidad de Berlín, donde asistió a clases impartidas por matemáticos de la talla de Weierstrass, Kummer y Kronecker. En el año 1868, obtuvo su doctorado en el mismo centro, con una tesis sobre teoría de números.

A la edad de 27 años, comenzó a ejercer como catedrático en la Universidad de Halle. Dedicó gran parte de su carrera matemática a la teoría de conjuntos. Fue el fundador de esta disciplina, introduciendo el concepto de cardinalidad al que tan acostumbrados estamos hoy en día. Clasificó los conjuntos infinitos en función de su cardinal y proporcionó demostraciones de la numerabilidad (o no numerabilidad) de varios conjuntos.[6]

A lo largo de su vida sufrió numerosos episodios depresivos, que provocaron altibajos en sus avances matemáticos. El último medio año de su vida estuvo interno en un sanatorio, hasta que finalmente murió de un ataque al corazón a la edad de 73 años.

2.2. El conjunto de Cantor

Partimos del segmento $[0,1]$. Extrayendo el tercio interior de dicho segmento, obtenemos el conjunto cerrado

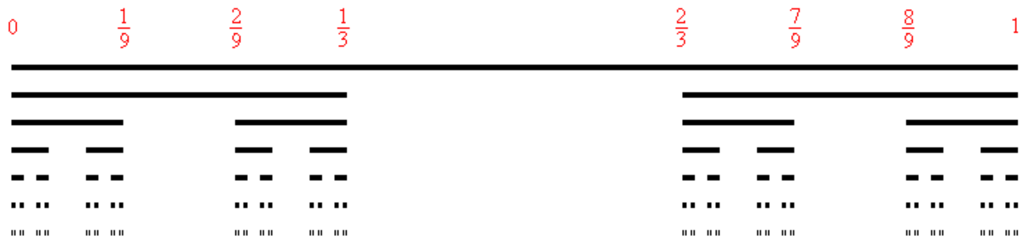
$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

A continuación, repetimos la extracción del tercio interior con los dos segmentos obtenidos, de manera que obtenemos otro conjunto cerrado,

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \bigcup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Si procedemos inductivamente del mismo modo e intersecamos los conjuntos cerrados obtenidos, obtendremos el conjunto de Cantor:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$$



El conjunto de Cantor posee numerosas e interesantes propiedades, algunas de las cuales enunciamos y demostramos a continuación.

<u>El conjunto de Cantor es compacto.</u>
El conjunto $\mathcal{C}$ es cerrado por ser una intersección infinita de conjuntos cerrados, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Es acotado por que, claramente, $\mathcal{C} \subset [0,1]$. En consecuencia, es compacto. $\square$

<u>Los elementos del conjunto de Cantor son aquellos puntos de $[0,1]$ que admiten una expresión decimal en base 3 que contiene únicamente 0's ó 2's.</u>
Cualquier $x \in [0,1]$ se puede escribir en base 3 como sigue

$$x = 0.c_1c_2c_3... = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + ...$$

siendo $c_i = 0, 1$ ó 2. Si en la expresión anterior $c_1 \neq 1$ entonces $x \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ luego $x \in \mathcal{C}_1$. Si además $c_2 \neq 1$ entonces $x \notin (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$, de modo que $x \in \mathcal{C}_2$. Del mismo modo, s también $c_n \neq 1$, entonces $x \in \mathcal{C}_n$. Por tanto, si $c_n \neq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$.

Recíprocamente, supongamos que $x = 0.c_1c_2c_3... \in \mathcal{C}$. Si todos los c_i son 0's ó 2's, entonces no hay nada que probar. En caso contrario, sea c_k el primer 1 que encontramos en la expresión en base 3 de x. Pueden suceder tres cosas: (i) $x = 0.c_1...c_{k-1}1$, en cuyo caso podemos escribir $x = 0.c_1...c_{k-1}0\widehat{2}$; (ii) $x = 0.c_1...c_{k-1}1\widehat{2}$, en cuyo caso podemos escribir $x = 0.c_1...c_{k-1}2$; (iii) $x = 0.c_1...c_{k-1}1c_{k+1}...c_n...$ con los c_i, $i \geq k$ no todos iguales a 0 y no todos iguales a 2, en cuyo caso x estaría en el intervalo abierto

$$\left(\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+...+\frac{c_{k-1}}{3^{k-1}}+\frac{1}{3^k}\,,\,\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+...+\frac{c_{k-1}}{3^{k-1}}+\frac{2}{3^k}\right)$$

lo cual es imposible porque es precisamente uno de los que hemos quitado en la construcción de $\mathcal{C}$. $\square$

El conjunto de Cantor es no numerable.

Usamos el celebrado argumento de diagonalización para demostrar que $\mathcal{C}$ es no numerable. Supongamos que es numerable, de manera que lo podemos expresar como $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Cada uno de esos números tendrá una expresión en base 3,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.c_{11}c_{12}c_{13}... \\ x_2 &= 0.c_{21}c_{22}c_{23}... \\ &\vdots \\ x_n &= 0.c_{n1}c_{n2}c_{n3}... \end{aligned}$$

donde $c_{ij} = 0$ ó 2, para todo i, j.

Sea $y = 0.d_1d_2d_3...$, donde $d_i = 0$ si $c_{ii} = 2$ y $d_i = 2$ si $c_{ii} = 0$. Entonces, $d_1 \neq c_{11} \Rightarrow y \neq x_1$, $d_2 \neq c_{22} \Rightarrow y \neq x_2$, ... y por lo tanto, $y \notin \mathcal{C}$. Esto es una contradicción, pues $d_i \in \{0, 2\}$ para todo i, lo que implica que $y \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es no numerable. $\square$

Para algunas aplicaciones del conjunto de Cantor, conviene verlo no como un subconjunto de $[0, 1]$, sino, de forma más abstracta, como un espacio producto.

2.3. El espacio de Cantor

El espacio de Cantor es el espacio producto $2^{\mathbb{N}}$ (donde 2 denota el espacio de dos puntos $\{0, 1\}$ con la topología discreta). Los $x \in 2^{\mathbb{N}}$ son sucesiones, cuyos valores

$x(n)$ serán 0 o 1. La topología en $2^{\mathbb{N}}$ es, obviamente, la topología producto.

Nos será útil saber como es una base de entornos en el espacio de Cantor, pero no sin antes definir dicho concepto.

Definición 2.1. Dado $x \in X$, diremos que una familia $\mathcal{B}^x$ de entornos de x es una *base de entornos de x* si para todo V^x entorno de x, existe $B^x \in \mathcal{B}^x$ tal que $B^x \subset V$.

¿Cómo podemos describir una base de entornos en el espacio de Cantor? Es sencillo. Fijado $x \in 2^{\mathbb{N}}$, una base de entornos de x tiene la siguiente forma

$$\{y : y(i) = x(i) \text{ para } i \leq n\}$$

Para la próxima caracterización del conjunto de Cantor dada por Luitzen Brouwer en 1910, necesitamos dos conceptos que aparecerán en dicho teorema.

Definición 2.2. Un espacio topológico es *conexo* si no contiene un par de abiertos no vacíos y disjuntos A, B tal que $X = A \cup B$. Si contiene un par de abiertos semejante, diremos que es un *espacio inconexo*.

Además, definiremos un espacio *totalmente inconexo* como aquel cuyos únicos subconjuntos conexos son los triviales (i.e. el vacío y los subconjuntos con un solo punto).

Definición 2.3. Un *espacio perfecto* X es un espacio sin puntos aislados. Es decir, no existe en él ningún $x \in X$ tal que la intersección de X con un entorno de x sólo contiene al punto x.

Teorema 2.4. (de Brouwer)[8]
Todo espacio no vacío, perfecto, compacto, metrizable y totalmente inconexo es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Algunas consecuencias importantes de este teorema son:

1. Cualquier subespacio perfecto y no vacío de $\mathcal{C}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$.

2. Cualquier subespacio de $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$ si y sólo si es perfecto, compacto y diseminado (i.e. el interior de su clausura es vacío).

3. Los espacios producto $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^2$, ..., $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ son homeomorfos a $\mathcal{C}$.

4. Sean X_1, X_2, ... espacios metrizables, compactos y totalmente inconexos con al menos dos puntos, entonces $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$.

En particular, como $\{0, 1\}$ es metrizable, compacto y totalmente inconexo, concluimos que el espacio de Cantor es homeomorfo al conjunto de Cantor. Esto nos será de gran utilidad más adelante.

Una de las propiedades más importantes del espacio de Cantor está recogida en el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, cuyos enunciado y demostración serán el centro del siguiente capítulo.

Capítulo 3

El Teorema de Alexandroff-Hausdorff

3.1. Pavel Alexandroff

Pavel Sergeevich Alexandroff nació en 1896 en la ciudad de Bogorodsk (Rusia). Su padre era médico, lo que obligaba a la familia Alexandroff a cambiar mucho de ciudad, y por esta razón fue la madre la encargada de educar a los niños durante su infancia. Cuando Alexandroff comenzó a acudir a la escuela, destacó por ser un alumno excelente en todos los aspectos, y su profesor de matemáticas advirtió en él un gran talento para la materia.

Estudió matemáticas en la Universidad de Moscú, y al tomar esta decisión no se planteaba la posibilidad de llegar a ser profesor de universidad, sino que tenía la intención de dedicarse a la enseñanza secundaria. Con tan solo 19 años, probó su primer resultado notable, relativo a la teoría de conjuntos. Luzin, su director de tesis, le animó a trabajar en la hipótesis del continuo, problema planteado por Cantor en 1878. Alexandroff no logró probar este resultado, pues, como es sabido, no es posible demostrar ni su veracidad ni lo contrario. Este "fracaso", le llevó a replantearse seriamente su carrera como matemático.

Durante esta etapa de desmotivación, Alexandroff se dedicó a algo completamente desvinculado de las matemáticas: la producción teatral. En 1919, pasó una temporada en la cárcel durante la revolución rusa, y, al salir, se unió a un grupo de investigación en la Universidad de Moscú, liderada por Luzin. A partir de 1921, comenzó a dar clases en dicha universidad. Además, junto con su gran amigo Urysohn, desarrolló, entre otros resultados, la noción de compacidad y las condiciones para la metrizabilidad.

Entre 1927 y 1928, pasó un año en la Universidad de Princeton, junto al matemático Hopf, con el que escribió un libro de topología, cuyo primer y único volumen apareció en 1935. A lo largo de su toda carrera matemática, Alexandroff publicó alrededor de 300 trabajos, y recibió numerosos premios y honores por sus contribuciones. Finalmente, falleció en noviembre de 1982 en Moscú.

3.2. Felix Hausdorff

Felix Hausdorff nació en 1868 en Breslau, Alemania (actualmente Wroclaw, Polonia) dentro de una familia judía acomodada. Desde niño, fue un apasionado de la música y soñó con llegar a ser compositor algún día. No obstante, sus padres emplearon todos sus esfuerzos en impedir que esto ocurriera. Lo lograron, y fue así como Hausdorff tomó la decisión de dedicar su vida al estudio de las matemáticas.

Creció en la ciudad de Leipzig, en cuya universidad se graduó en el año 1891 con un doctorado sobre las aplicaciones de las matemáticas a la astronomía. Curiosamente, dedicaba más tiempo e interés a la literatura y al arte que al progreso de su carrera profesional matemática, pues tenía todas sus necesidades económicas cubiertas. Este hecho es curioso porque no impidió que Hausdorff realizará grandes descubrimientos matemáticos.

Fue a partir de los treinta años cuando empezó a dedicar más tiempo al mundo matemático, centrándose en la topología y la teoría de conjuntos. Investigó e impartió clases en varias ciudades (Leipzig, Greifswalf y, finalmente, Bonn), y desarrolló el concepto de conjunto parcialmente ordenado, probando varios resultados relacionados.

Con el inicio del nazismo en Alemania, Hausdorff decidió no emigrar cuando aun tenía la posibilidad, pues no fue capaz de imaginar lo que deparaba a los judíos bajo el mando de Hitler. En el año 1934, hizo el juramento a Hitler exigido por el régimen. A pesar de ello y de sus influencias, en 1935 fue obligado a retirarse de la enseñanza, y, aunque siguió investigando, sus resultados no podían ser publicados en Alemania. En el año 1941, evitó ser enviado a un campo de concentración, contando con el apoyo de la Universidad de Bonn para que él y su mujer pudieran permanecer en su hogar.

En octubre del mismo año, fueron obligados a identificarse con la estrella amarilla, y en enero de 1942, recibieron la terrible noticia de que, esta vez sí, serían internados en Endenich de forma inminente. El final de Hausdorff fue trágico: se suicidó junto a su mujer y su cuñada el día 26 de ese mismo mes, como último recurso para evitar ser internados.

3.3. El Teorema de Alexandroff-Hausdorff

El Teorema de Alexandroff-Hausdorff describe una característica del conjunto de Cantor que le otorga un papel muy importante dentro de la teoría de espacios compactos. Este nombre se debe a que fueron Alexandroff y Hausdorff los matemáticos que dieron la primera prueba del teorema de forma paralela e independiente. Esta demostración fue publicada en 1927 en la segunda edición del libro *"Grundzüge der Mengenlehre"* ("Nociones básicas de la Teoría de Conjuntos") de Hausdorff, y en un artículo de Alexandroff en el *"Mathematischen Annalen"*. [11]

Su demostración no se suele incluir en cursos habituales de topología, y tampoco es usual hallarla en libros de topología general. En esta sección, ofrecemos dicha prueba con todo detalle y precedida por las herramientas necesarias para su desarrollo.

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X. Se dice que A es un *retracto* si existe una función continua $f : X \longrightarrow A$ tal que $f(a) = a$, para todo $a \in A$.

Ejemplo: En el caso de $\mathbb{R}$ con la topología usual, los retractos son todos los intervalos cerrados y semirrectas cerradas.

Teorema 3.2. [2]
Todo subconjunto cerrado y no vacío del espacio de Cantor es un retracto.

Demostración.
Sea A un subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$ cerrado y no vacío. Tomamos un $x \in 2^{\mathbb{N}}$, y definimos otro elemento $y = h(x)$ de la siguiente manera. El primer elemento de y es

$$y(1) = \begin{cases} x(1) & \text{si existe } a \in A : a(1) = x(1) \\ 1 - x(1) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Supongamos que $y(i)$ se ha definido para $i < n$. Entonces,

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si existe } a \in A : a(i) = x(i), \text{ para } i \leq n \\ 1 - x(n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Claramente, $h(a) = a$, para todo $a \in A$. Para el elemento y que hemos construido, se puede comprobar por inducción que, para cada n, hay un elemento $a_n \in A$ tal que $a_n(i) = y(i)$, para todo $i \leq n$. Por lo tanto, $y \in \overline{A}$, ya que una base de entornos de y está formada por los abiertos de la forma

$$\{y(1)\} \times ... \times \{y(n)\} \times \{0, 1\} \times ... \times \{0, 1\} \times ...$$

Como A es cerrado, se tiene que $y \in A$. Por último, h es una función continua, pues si $x_1(i) = x_2(i)$ para $i \leq n$, entonces $h(x_1)(i) = h(x_2)(i)$. Luego A es un retracto de X. □

Definición 3.3. Se dice que una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de la intersección finita si cada subcolección finita $\{C_1, ..., C_n\}$ de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía.

Teorema 3.4. (de la Intersección Finita-Infinita)[3]
Un espacio topológico X es compacto si, y sólo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección es no vacía.

Procedemos, por fin, a enunciar y demostrar el Teorema de Alexandroff-Hausdorff. Seguimos para ello la estructura de la demostración dada por Jameson.[2]

Teorema 3.5. (de Alexandroff-Hausdorff)
Todo espacio compacto y metrizable es imagen continua del espacio de Cantor.

Demostración.
Sea T un espacio compacto y metrizable. Queremos encontrar una función continua $f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow T$. Por ser T compacto y metrizable, no es difícil demostrar que existe una base numerable $\{G_n\}$ para los conjuntos abiertos de T. Definimos

$$\phi_n(0) = \overline{G}_n,$$

$$\phi_n(1) = T \setminus G_n,$$

y para $x \in 2^{\mathbb{N}}$,

$$E_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n[x(n)].$$

En primer lugar, veamos que E_x contiene, como máximo, un punto. Sea $a \in E_x$ y $b \neq a$, como T es un espacio de Hausdorff (porque es metrizable), existe un entorno abierto de a cuya clausura no contiene a b. Como consecuencia, existe n tal que $a \in G_n$ y $b \notin \overline{G}_n$. Como hemos dicho que $a \in E_x$ y $a \in G_n$, se tiene que $x(n) = 0$, pero $b \notin \phi_n(0)$ y por lo tanto $b \notin E_x$.

Llamemos D al conjunto de todas las $x \in 2^{\mathbb{N}}$ para las que E_x es no vacío, de modo que tiene un único punto al que llamaremos $f(x)$. De esta manera, acabamos de definir una aplicación f que va de D a T.

Sea $a \in T$; para cada n, a estará o bien en $\phi_n(0)$, o bien en $\phi_n(1)$, o bien en ambos. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos $x(n) \in \{0, 1\}$ tal que $a \in \phi_n[x(n)]$, tenemos definido un elemento x de $2^{\mathbb{N}}$ tal que $a \in E_x$. Esto implica que $a = f(x)$, y, en consecuencia, la función f es sobreyectiva.

Ahora, queremos probar la continuidad de f. Sea U un entorno abierto de $f(x)$, es decir,

$$f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n[x(n)] \subset U \,. \tag{3.1}$$

Consideramos el siguiente recubrimiento abierto de T:

$$\mathcal{V} = \{U, T \setminus \phi_1(x(1)), ..., T \setminus \phi_n(x(n)), ...\}$$

(que $\mathcal{V}$ recubre T es consecuencia de 3.1). Como T es compacto, sabemos que $\mathcal{V}$ posee un subrecubrimiento finito $\mathcal{W}$ que también recubre T. No hay pérdida de generalidad si suponemos que para algún $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{W} = \{U, T \setminus \phi_1(x(1)), ..., T \setminus \phi_N(x(N))\}$$

de modo que si $z \in \bigcap_{n=1}^{N} \phi_n[x(n)]$, entonces $z \notin \bigcup_{n=1}^{N} T \setminus \phi_n[x(n)]$ y por lo tanto $x \in U$. En consecuencia, se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{N} \phi_n[x(n)] \subset U.$$

Para terminar de probar la continuidad, buscamos un entorno abierto V de x tal que $f(V) \subset U$. Definimos V como el conjunto de sucesiones de $2^{\mathbb{N}}$ cuyas primeras N coordenadas coinciden con las de x,

$$V = \{x(1)\} \times ... \times \{x(N)\} \times \{0,1\} \times ... \times \{0,1\} \times ... \tag{3.2}$$

Si tomamos $y \in D \cap V$, de forma que $y(i) = x(i)$ para $i \leq N$, tendremos que

$$f(y) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \phi_i[y(i)] \subset \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i[y(i)] = \bigcap_{i=1}^{N} \phi_i[x(i)] \subset U$$

con lo cual

$$f(D \cap V) = f(V) \subset U.$$

El último paso de la demostración consiste en ver que D es cerrado, de forma que podremos aplicar el Teorema 3.2 para asegurar que existe una función $g : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow D$ continua, y así poder obtener la función continua de $2^{\mathbb{N}}$ a T buscada mediante la composición de g con f.

Supongamos que $x \notin D$, entonces, $E_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n[x(n)]$ es vacío, y por el Teorema 3.4, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la intersección $\bigcap_{i=1}^{N} \phi_n[x(i)]$ es vacía. Consideramos el entorno abierto V de x, definido como en 3.2. Como para todo $y \in V$ tenemos $y(i) = x(i)$ para $i \leq N$, la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n[y(n)]$ será vacía y por tanto $y \notin D$. Luego $T \setminus D$ es abierto, lo que implica que D es cerrado y, finalmente, podemos afirmar que T es imagen continua del espacio de Cantor. $\square$

3.4. Curvas que recubren el espacio

Como primera aplicación del Teorema de Alexandroff-Hausdorff, podemos construir una curva que recubre el espacio, es decir, una función continua que lleva el intervalo $[0,1]$ al cubo unidad $[0,1]^d$ en el espacio d-dimensional $\mathbb{R}^d$.

¿Cómo logramos esto?

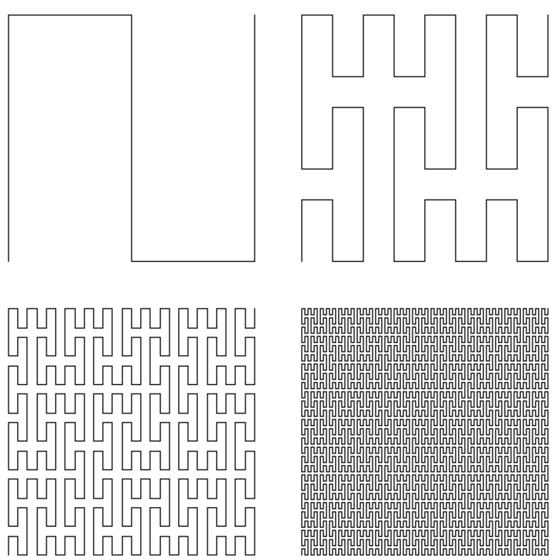
Como $[0,1]^d$ es un espacio compacto y metrizable, y como $\mathcal{C}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son homeomorfos, el Teorema 3.5 garantiza la existencia de una aplicación continua del conjunto de Cantor en $[0,1]^d$,

$$\phi : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]^d$$

Como $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor clásico en $[0,1]$, basta extender ϕ a una función continua ϕ' que esté definida sobre todo el intervalo $[0,1]$. Lógicamente, nuestra nueva función verificará que $\phi'(x) = \phi(x)$ para todo $x \in \mathcal{C}$. El complementario de $\mathcal{C}$ es una unión numerable de intervalos abiertos. Dado uno cualquiera de estos intervalos abiertos, (a,b), representaremos sus puntos como $ta + (1-t)b$ para $0 < t < 1$, de manera que podemos definir ϕ' por linealidad:

$$\phi'(ta + (1-t)b) = t\phi(a) + (1-t)\phi(b).$$

Como $[0,1]^d$ es convexo, tenemos que $\phi'(x) \in [0,1]^d$ para todo $x \in [0,1]$. Además, es sencillo comprobar que ϕ' también es continua en $[0,1]$. $\square$



Henri Lebesgue utilizó este resultado para dar una demostración de la compacidad del cubo en “Leçons sur l’intégration” [4]. Se tiene una función continua de $[0,1]$ en $[0,1]^d$, y como $[0,1]$ es un intervalo compacto, se obtiene directamente que $[0,1]^d$ también es compacto.

Además, de la existencia de una función continua de $[0,1]$ a $[0,1]^d$, se deduce también el siguiente corolario, que es en realidad una generalización del Teorema de Alexandroff-Hausdorff que nos será de gran utilidad más adelante.

Teorema 3.6. [1]
Sea K un subconjunto convexo, compacto y metrizable de un espacio vectorial topológico V. Entonces, existe una función continua sobreyectiva de $[0,1]$ a K. De forma más general, si K no es convexo, existe una función continua de $[0,1]$ a V cuya imagen contiene a K.

Capítulo 4

El Teorema de Banach-Mazur

4.1. Stefan Banach

Stefan Banach nació en la actual Polonia, en la ciudad de Cracovia, en el año 1892. Un dato sorprendente sobre Banach es que nunca estudió matemáticas a nivel universitario, por lo que podríamos decir que fue autodidacta en la materia. La razón por la que decidió no estudiar matemáticas fue porque consideraba que se trataba de un mundo del que ya no quedaba nada por descubrir. Más tarde, demostraría lo contrario con sus numerosas aportaciones.

Comenzó a estudiar ingeniería en la Universidad Técnica de Lvov (perteneciente al imperio austriaco en aquel entonces), de la que se graduó en 1914. Dos años después de que Banach terminase sus estudios de ingeniería, y de manera fortuita, el matemático austriaco Hugo Steinhaus se topó con él, y enseguida supo apreciar su talento. Fue a raíz de su amistad con Steinhaus que Banach comenzó a publicar artículos de gran calidad.

A pesar de no tener una formación matemática previa, la Universidad Técnica de Lvov hizo una excepción con él, de forma que pudo doctorarse y presentar una tesis que marcó el nacimiento del análisis funcional. En 1924, empezó a dar clases en la misma universidad, a la vez que continuaba publicando artículos a buen ritmo.

En el año 1939, fue nombrado presidente de la Sociedad Matemática de Polonia, y, con el comienzo de la ocupación soviética, logró mantener su puesto en la universidad gracias a sus relaciones amistosas con matemáticos soviéticos.

Los años más duros de la vida de Banach comenzaron con el inicio de la ocupación nazi en el año 1941. Fue testigo de las muertes de muchos de sus compañeros académicos, y tuvo que abandonar su trayectoria profesional. Hasta 1944, su única ocupación consistió en proporcionar su sangre como sustento para piojos, en el instituto alemán de enfermedades infecciosas.

Cuando las tropas soviéticas retomaron el control sobre Lvov, Banach pudo restablecer su situación anterior, aunque ya era tarde, pues padecía un cáncer de pulmón que acabaría con su vida en 1945.

4.2. Stanislaw Mazur

En el año 1905, nació Stanislaw Mazur en Lemberg, una ciudad del antiguo imperio austriaco que pasó más tarde a conocerse como Lvov, y que hoy conocemos como Lviv (Ucrania).

Estudió matemáticas en la Universidad Jan Kazimierz de Lvov. Su doctorado, obtenido en 1935, fue dirigido por Banach. Fue así como comenzó tanto una amistad como una alianza matemática entre ellos, que llevó a la publicación de numerosos artículos en los que trabajaron juntos. Además, fundaron la escuela polaca de análisis funcional.

Mazur dio clases en la Universidad Jan Kazimierz hasta el año 1948, en el que se mudó para comenzar a dar clases en la Universidad de Varsovia. A lo largo de su vida, sus publicaciones fueron regulares, logrando aportaciones de gran importancia.

4.3. El Teorema

La importancia de este teorema reside en que, gracias a él, se concluye que $C[0,1]$, el espacio de las funciones continuas $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ con la norma del supremo, es un espacio separable universal. Es decir, además de ser separable, contiene copias de cualquier espacio separable. Es sencillo encontrar la propiedad de universalidad en espacios no separables, como por ejemplo en el caso de $(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty)$, cuya separabilidad demostramos en el primer capítulo. De hecho, si X es un espacio separable y $\{x_n\}\subset X$ es un subconjunto denso y numerable, existe $f_n\in B_{X^*}$ tal que $f_n(x_n)=1$. Definimos la aplicación ϕ

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \ell_\infty \\ x &\longrightarrow \phi(x)=(f_n(x)) \end{aligned}$$

que es una isometría, por lo que $(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty)$ contiene una copia de X, y es, por lo tanto, un espacio universal para los separables.

En primer lugar, vamos a enunciar y probar los resultados de los que nos vamos a ayudar para completar la demostración.

Teorema 4.1. (de Banach-Alaoglu)[5]
Si X es un espacio normado, entonces B_{X^*} es compacto con la topología $\mathcal{T}_{w^*}$.

Demostración.
Por el teorema de Tikhonov, sabemos que $Y=\prod_{x\in X}[-|x|,|x|]$ es compacto con la topología producto, $\mathcal{T}_Y$. El espacio Y es el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$ que satisfacen $|f(x)|\leq|x|$. Si escogemos las funciones de este conjunto que son lineales, obtenemos justamente la bola B_{X^*}. Además, es importante observar que la topología inducida en B_{X^*} por la topología producto $\mathcal{T}_Y$ es, precisamente, la topología débil $\mathcal{T}_{w^*}$.

Para ver que B_{X^*} es cerrado, dado $f\in\overline{B_{X^*}}^{\mathcal{T}_{w^*}}$, debemos probar que $f\in B_{X^*}$, es decir, que f es lineal y continua.

Para empezar, veamos que f es acotada en la bola B_{X^*}, es decir, que $|f(x)| \leq M\|x\|$ para algún $M \in \mathbb{R}$, lo que implica la continuidad de f por el Teorema 1.9. Tomando $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in B_{X^*}$ (es decir, con $|g(x)| \leq \|x\|$) tal que

$$\begin{aligned} |f(x)| = |f(x) - g(x) + g(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x)| \\ &\leq \varepsilon + |g(x)| \\ &\leq \varepsilon + \|x\| \end{aligned}$$

de manera que, al ser ε arbitrario, resulta que $|f(x)| \leq \|x\|$ en B_{X^*}.

Comprobemos ahora la linealidad. Sean $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in B_{X^*}$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|f(y) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, y

$$f(x+y) - g(x+y) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

y como $g(x+y) = g(x) + g(y)$, entonces

$$\begin{aligned} &|f(x+y) - f(x) - f(y)| \\ &\qquad = |f(x+y) - f(x) - f(y) - g(x+y) + g(x) + g(y)| \\ &\qquad \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Al ser cierto lo anterior para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. De manera similar, se puede comprobar que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Queda demostrado que $B_{X^*} = \overline{B_{X^*}}^{\mathcal{T}_{w^*}}$ y por tanto que B_{X^*} es compacto en $\mathcal{T}_{w^*}$, pues todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es automáticamente compacto. $\square$

En 1932, Stefan Banach dio una prueba de este teorema para el caso particular en el que X es un espacio separable. Ocho años más tarde, Leonidas Alaoglu publicó la primera demostración del caso general.

El siguiente teorema, que recibe el nombre de Teorema de Hahn-Banach, es de enorme importancia en el análisis funcional, pues permite tomar cualquier aplicación lineal y continua de un subespacio vectorial y extenderla al espacio que lo contiene. Además, la aplicación y su extensión tienen la misma norma. Este resultado fue demostrado de forma independiente por Hans Hahn y Stefan Banach a lo largo de los años veinte.

Teorema 4.2. (de Hahn-Banach)[10]
Sea X un espacio normado y sea Y un subespacio de X. Supongamos que $F : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación lineal tal que $|F(x)| \leq M\|x\|$ para todo $x \in Y$. Entonces, existe una extensión lineal $G : X \longrightarrow \mathbb{C}$ de F tal que $|G(x)| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$.

Corolario 4.3. *Para todo $x \in X$, existe $f \in \mathcal{S}_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$.*

El teorema de Hahn-Banach nos permite demostrar el siguiente teorema, que será crucial para la demostración del Teorema de Banach-Mazur.

Teorema 4.4. [10]
$(B_{X^*}, \mathcal{T}_{w^*})$ es metrizable si y sólo si X es separable.

Demostración.
Supongamos que X es separable, y sea $\{x_n\} \subset B_X$ un conjunto denso en B_X (tomamos $D \cap B_X$ con D denso y numerable en X). Definimos ahora la métrica d mediante la expresión:

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - g)(x_n)|,$$

donde $f, g \in X^*$.

Queremos ver que $\mathcal{T}_d$, la topología asociada a d, coincide en B_{X^*} con $\mathcal{T}_{w^*}$. Para ello, primero veremos que $\mathcal{T}_{w^*} \subset \mathcal{T}_d$, es decir, que para todo $f \in B_{X^*}$ y para todo V entorno de f en $\mathcal{T}_{w^*}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(f, \varepsilon) \subset V$.

Sea $f_0 \in B_{X^*}$ y sea V un entorno de f_0 en la topología $\mathcal{T}_{w^*}$. Podemos suponer que

$$V = \{f \in B_{X^*} : |(f - f_0)(y_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, ..., k\},$$

siendo $|y_i| \leq 1$. Como $\{x_n\}$ es denso en B_X, podemos encontrar, para cada $i = 1, ..., k$, un número natural n_i tal que $|y_i - x_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{4}$. Buscamos ahora $r > 0$ tal que $B_d(f_0, r) \subset V$. Si $g \in B_d(f_0, r)$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|(g - f_0)(x_n)| < r$, de modo que

$$\begin{aligned} |(g - f_0)(y_i)| &\leq |(g - f_0)(x_i)| + |(g - f_0)(y_i - x_i)| \\ &\leq 2^m r + 2\varepsilon/4 \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., k$, siendo $m = \max\{i\}$. Para obtener $|(g - f_0)(y_i)| < \varepsilon$, basta escoger $r < \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$. Por lo tanto, $g \in V$ y $B_d(f_0, r) \subset V$. De esta forma, tenemos que $\mathcal{T}_{w^*} \subset \mathcal{T}_d$.

Veamos ahora que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{w^*}$. Fijados $f_0 \in B_{X^*}$ y $r > 0$, tenemos que encontrar un entorno V de f_0 en la topología $\mathcal{T}_{w^*}$ tal que $V \subset B_d(f_0, r)$. Basta tomar V de la forma

$$V = \{f \in B_{X^*} : |(f_0 - f)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., k\},$$

y determinar qué valores deben tomar k y ε.

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}|f - f_0(x_n)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}|f - f_0(x_n)| \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} \\ &< \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} < r \end{aligned}$$

De forma que debemos tomar $\varepsilon < \frac{r}{2}$ y $2^{1-k} < \frac{r}{2}$ para obtener $V \subset B_d(f_0, r)$, y, en consecuencia, que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{w^*}$.

Para probar el recíproco, comenzamos suponiendo que $(B_{X^*}, \mathcal{T}_{w^*})$ es metrizable. Sea V_n un $\mathcal{T}_{w^*}$-entorno de 0 tal que $V_n \subset B_d(0, \frac{1}{n})$. Podemos suponer que

$$V_n = \{f \in B_{X^*} : |f(x)| < \varepsilon_n, \forall x \in F_n\}$$

donde F_n es un conjunto finito, de modo que $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ es numerable. Entonces, tenemos que $\cap_{n=1}^{\infty} V_n \subset \cap_{n=1}^{\infty} B_d(o, \frac{1}{n}) = \{0\}$.

Sea $\mathrm{span} F$ el subespacio vectorial generado por F, veamos que $\overline{\mathrm{span} F} = X$. Si, por el contrario, existe un $x \in X \setminus \overline{\mathrm{span} F}$, podemos construir por el teorema de Hahn-Banach una función $g \in X^*$ (es decir, lineal y continua) tal que $g(y \in \overline{\mathrm{span} F}) = 0$ y $g(x) = 1$. Resulta que la función que hemos construido satisface $g \in \cap_{n=1}^{\infty} V_n$ y además $g \neq 0$. Por lo tanto, hemos llegado a una contradicción y concluimos que $\overline{\mathrm{span} F} = X$.

Sea el siguiente conjunto un subconjunto de $\mathrm{span} F$,

$$\mathrm{span}_{\mathbb{Q}} F = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 ... \lambda_n x_n; \quad \lambda_i \in \mathbb{Q},\ x_i \in F,\ i = 1, ..., n\}$$

Al ser F numerable, el subconjunto $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}} F$ también lo es. Además, $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}} F$ es claramente denso en $\mathrm{span} F$, y $\mathrm{span} F$ es denso en $\overline{\mathrm{span} F}$. Como consecuencia, $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}} F$ es un subconjunto denso y numerable de X. Luego queda demostrada la separabilidad del espacio X. $\square$

Por fin, introducimos el Teorema de Banach-Mazur, y con él su demostración. Este resultado sobre la estructura de los espacios de Banach fue enunciado y demostrado conjuntamente por Banach y Mazur en el año 1933.

Teorema 4.5. (de Banach-Mazur)[1]
Todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio de $\mathcal{C}[0, 1]$.

Demostración.
Vamos a dividir la demostración de este teorema en dos pasos.

1. Todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio de $\mathcal{C}(K)$ para algún K convexo, compacto y metrizable.

Sea X un espacio de Banach separable, y X^* su dual. Podemos considerar todo elemento $x \in X$ como una función en X^* utilizando la fórmula

$$x(x^*) := x^*(x)$$

para $x^* \in X^*$. Tomamos ahora la topología débil* ($\mathcal{T}_{w^*}$), que convierte X^* en un espacio topológico vectorial lineal. Además, es la topología más fina en X^* bajo la cual todos los elementos de X son continuos cuando se consideran como funciones de X^*, de la forma indicada más arriba.

Sea B_{X^*} la bola unidad de X^*, que es convexa. Sabemos que B_{X^*} es compacta por el Teorema 4.1 de Banach-Alaoglu, y que es metrizable por el Teorema 4.4. Definimos ahora una isometría J, que va desde X hasta B_{X^*}, de manera que

$$(J(x))(f) = f(x), \quad \text{para todo } x \in X \text{ y } f \in B_{X^*}$$

Puesto que J se corresponde con el $\widehat{x}$ que definimos en la sección 1.4, sabemos que $J(x)$ es continua en B_{X^*} para todo x, y que J es un operador lineal. Solamente nos queda demostrar que J es realmente una isometría, para lo que debemos ver que $\|J(x)\|_{C(B_{X^*})} = \|x\|_X$. Para todo $x \in X$ y $f \in B_{X^*}$,

$$|(J(x))(f)| = |f(x)| \leq \underbrace{\|f\|_{X^*}}_{\leq 1} \|x\|_X \leq \|x\|_X,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \|J(x)\|_{C(B_{X^*})} &= \sup\{|(J(x))(f)| : f \in B_{X^*}\} \\ &= \sup\{|f(x)| : f \in B_{X^*}\} \\ &\leq \|x\|_X \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

El corolario 4.3 del Teorema de Hahn-Banach asegura que para todo $x \in X$, existe un elemento f de la bola unidad B_{X^*} tal que $f(x) = \|x\|$, de forma que

$$\begin{aligned} \|J(x)\|_{C(B_{X^*})} &= \sup\{|f(x)| : f \in B_{X^*}\} \\ &\geq \|x\|_X \end{aligned}$$

Queda claro que $\|J(x)\|_{C(B_{X^*})} = \|x\|_X$ y, como consecuencia, que el operador $J(x)$ definido es una isometría.

2. $\mathcal{C}(K)$ es linealmente isométrico a un subespacio de $\mathcal{C}[0,1]$.

Como K es un espacio metrizable, compacto y convexo, gracias al Teorema 3.6 obtenemos una aplicación sobreyectiva y continua $\phi : [0,1] \longrightarrow K$. Tomamos S, el operador de la composición de $f \in C(K)$ con ϕ,

$$Sf(t) = f(\phi(t))$$

para todo t en el intervalo $[0,1]$. S es un operador lineal que va desde $C(K)$ hasta $C([0,1])$, y además veamos que es una isometría. Como ϕ es una aplicación sobreyectiva, tenemos que

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{C([0,1])} &= \sup\{|(f(\phi(t))| : t \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|f(k)| : k \in K\} \\ &= \|f\|_{C(K)} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{C}(K)$ es isométrico a un subespacio de $\mathcal{C}[0,1]$. $\square$

Bibliografía

[1] Yoav Benyamini. *Applications of the Universal Surjectivity of the Cantor Set.* The American Mathematical Monthly, vol. 105, 1998, pp. 832-839

[2] Graham J. O. Jameson. *Topology and normed spaces.* Chapman & Hall, London, 1974.

[3] James R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, New Jersey, 1975.

[4] Henri Lebesgue. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Paris, 1928.

[5] Walter Rudin. *Functional Analysis* McGraw Hill, 2nd edition, 1991.

[6] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK.* Springer, Berlin, New York. 4th Edition, 2009.

[7] Julian F. Fleron. *A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function.* Mathematics Magazine, vol. 67, abril 1994.

[8] Michael Francis. *Two Topological Uniqueness Theorems for Spaces of Real Numbers.* University of Victoria, 2011.

[9] Hans Sagan. *Space-Filling Curves.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[10] Haïm Brezis. *Análisis Funcional.* Alianza Universidad Textost, 1984.

[11] L. Koudela. *The Hausdorff-Alexandroff Theorem and its Application in Theory of Curves*. WDS '07 Proceedings of Contributed papers, Part I, 257-260, 2007.

[12] Wilson A. Sutherland. *Introduction to Metric and Topological Spaces*. Oxford University Press, 2009.

[13] Referencias biográficas: *MacTutor History of Mathematics*. www-history.mcs.st-and.ac.uk