Cálculo y análisis de los parámetros aerodinámicos de perfiles 4-digit NACA con flaps mediante el Método de Vórtice Discreto (DVM)

Alumnos: Cambra, Joan; de Paz, Marc; López, Pedro; Pujadas, Roger
Profesor: Ortega, Enrique

Ingeniería en Tecnologías y Vehículos Aeroespaciales
Escuela Superior de Ingenierías Industrial, Aeroespacial y Audiovisual de Terrassa
Universitat Politècnica de Catalunya

26 de junio de 2020

I. Introducción

En Mecánica de Fluidos y Aerodinámica se elaboran teorías analíticas de gran utilidad, pero con alcance en ocasiones limitado. Es por lo tanto necesario desarrollar métodos de análisis numérico que proporcionen resultados más realistas. Uno de los métodos numéricos para el análisis de perfiles aerodinámicos delgados es el Método de Vórtice Discreto (DVM).

En el siguiente proyecto se presenta el cálculo y análisis de los parámetros aerodinámicos más relevantes para perfiles 4-digit NACA, con cuerda y velocidad de corriente libre unitarias, usando el DVM. Los resultados conseguidos se compararan con los obtenidos con el cálculo teórico usando la Teoría de Perfiles Delgados (TAT).

II. Verificación

En este primer apartado se verifica la solución obtenida con el DVM. Se ha escogido el perfil NACA 2408 sin deflexión de flap de borde de salida y con un ángulo de ataque $\alpha = 4°$. Para ello se analiza la convergencia del coeficiente de sustentación (C_l) y el coeficiente de momento respecto del borde de ataque $(C_{m,\text{LE}})$. Posteriormente se comparan los resultados obtenidos del DVM con los calculados de la TAT.

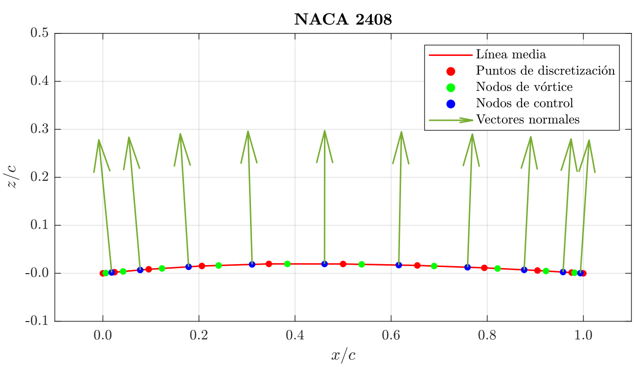

Figura 1. Línea media, puntos de discretización, nodos de vórtice, nodos de control y vectores normales para el perfil NACA 2408 sin flap de borde de salida, con distribución *full cosine* y $N = 10$ paneles.

El coeficiente de sustentación se calcula para distintos números de paneles $(0 - 200)$. En la figura 1 se representa la línea media del perfil NACA 2408, la separación entre paneles, las posiciones de los vórtices, los puntos de control y los vectores normales.

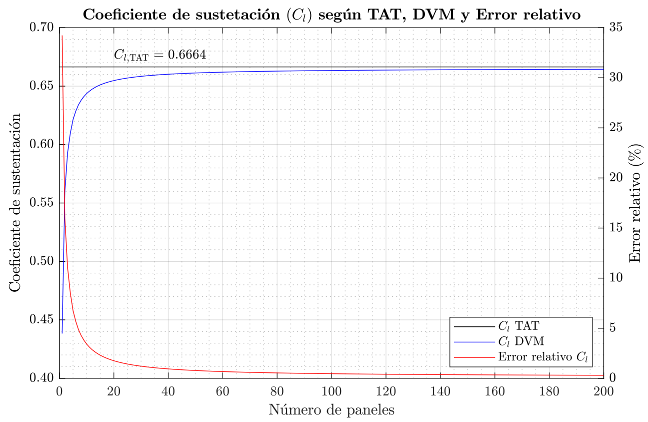

Figura 2. Coeficiente de sustentación (C_l) según TAT, DVM y error relativo en función del número de paneles (N).

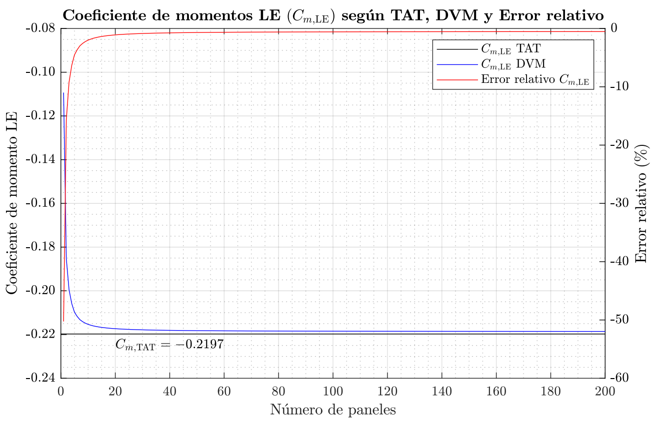

Figura 3. Coeficiente de momento respecto del LE $(C_{m,\text{LE}})$ según TAT, DVM y error relativo en función del número de paneles (N).

El DVM proporciona una aproximación a la solución de la TAT. Por consiguiente, los resultados a obtener son los adquiridos con la teoría, i.e., $C_l = 0.6664$ y $C_{m,\text{LE}} = -0.2197$.

En la figura 2 se muestran el C_l mediante TAT, la convergencia mediante DVM y el error relativo. Se aprecia que con pocos paneles se obtiene un error significativo, que disminuye a medida que N aumenta. Para $N \geq 80$ el error es inferior al 0.5%, considerándose despreciable.

En la figura 3 se muestran el $C_{m,\text{LE}}$ mediante TAT, la convergencia usando DVM y el error relativo. La relación entre el error y el número de paneles es idéntica a la del coeficiente de sustentación, i.e., el error disminuye rápidamente al aumentar el número de paneles.

III. Validación

En esta sección se estudia el mismo perfil NACA sin deflexión de flaps. Primeramente se calcula la pendiente de sustentación ($C_{l\alpha}$), el ángulo de sustentación nula (α_{l0}) y el coeficiente de momento en el centro aerodinámico (C_{m0}). Posteriormente, se calcula la eficiencia del flap para distintos *flap-chord ratios* y se verifica la efectividad de la corrección de flap.

Numéricamente se obtienen el C_l y el C_{m0} para un amplio rango de ángulos de ataque ($-30°$ a $30°$), con $N = 200$ paneles. Se elige un tramo lineal de $\pm 10°$ y se calcula el $C_{l\alpha}$ como la pendiente de la recta de sustentación. El α_{l0} se obtiene con el método de la bisección y el C_{m0} se calcula como el promedio en el rango lineal elegido. La variación máxima de C_{m0} es de 3.53%, por lo que se considera constante.

La curva de sustentación en el tramo lineal obtenida es:

$$C_l = 0.1091\alpha - 0.2254 \quad [\alpha] = \mathrm{deg} \tag{1}$$

En la figura 4 se muestra el C_l experimental, con y sin flap, en función de α, para el perfil NACA 2408. Se recogen curvas para distintos números de Reynolds (Re). Se toma como referencia la curva de $\mathrm{Re} = 9 \cdot 10^6$. Para obtener $C_{l\alpha}$ y α_{l0} experimentales se escogen dos puntos representativos del régimen lineal: $\alpha_1 = -8°$, $C_{l1} = -0.6$ y $\alpha_2 = 4°$, $C_{l2} = 0.6$.

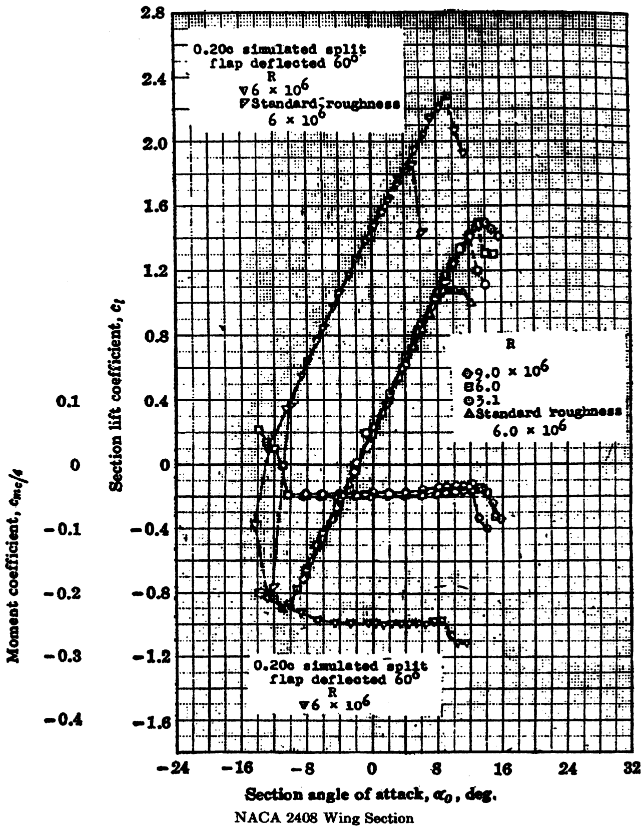

Figura 4. Curva de sustentación ($C_l(\alpha)$) en función del ángulo de ataque (α), con y sin flap de borde de salida, para distintos números de Reynolds (Re). A partir de [1].

En la figura 5 se muestran el coeficiente de resistencia aerodinámica (C_d) y el C_{m0} en función de α. En el rango de C_l usado anteriormente, C_{m0} es ligeramente superior a -0.05. A falta de mayor precisión, se elige $C_{m0} = -0.05$.

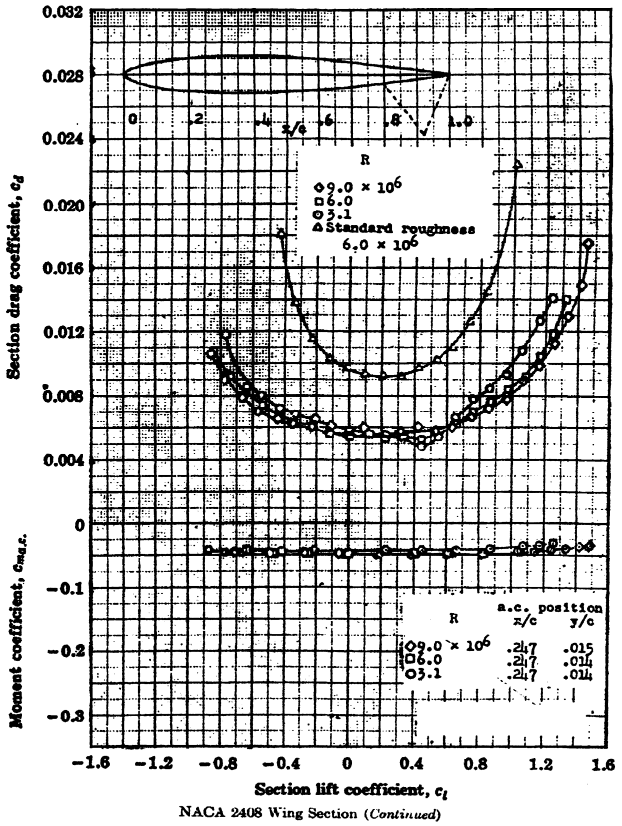

Figura 5. Coeficiente de resistencia aerodinámica (C_d) y coeficiente de momento libre (C_{m0}), en función del coeficiente de sustentación (C_l), para distintos números de Reynolds (Re). A partir de [1].

En la tabla I se recogen los valores obtenidos mediante el DVM y los experimentales, con los correspondientes errores.

Variable	Numérico	Experimental	Error (%)
$C_{l\alpha}$ (1/deg)	0.1091	0.1000	9.12%
α_{l0} (deg)	-2.0654	-2.0000	-3.27%
C_{m0}	-0.0527	-0.0500	-5.40%

Tabla I
Resultados numéricos mediante DVM, experimentales y error relativo, para $C_{l\alpha}$, α_{l0} y C_{m0}. Resultados experimentales a partir de [1].

Como se observa en la tabla I, el error relativo máximo es inferior al 10%. Por consiguiente, los resultados numéricos obtenidos con el DVM son cercanos a los experimentales dados por Abbott & Doenhoff (1959). Considerando que cualquier medida experimental conlleva cierto error, se concluye que el error es menospreciable.

Para validar los parámetros aerodinámicos del perfil NACA 2408 con flap de borde de salida, se comparan los calculados empleando el DVM con los dados por Abbott & Doenhoff.

Seguidamente, se estudia el factor de eficiencia del flap ($\partial\alpha_{l0}/\partial\eta$) en función del *flap-chord ratio* (E). Este último se define como $E = 1 - x_h/c$, donde c es la cuerda y x_h es la posición del eje de charnela respecto c.

La eficiencia del flap de borde de salida se define como la variación del ángulo de sustentación nula respecto del ángulo de deflexión del flap (η) [4],

$$\frac{\partial \alpha_{l0}}{\partial \eta} = -\left(1 - \frac{\theta_h}{\pi} + \frac{\sin\theta_h}{\pi}\right) \tag{2}$$

La variación en el ángulo de sustentación nula se calcula como

$$\Delta\alpha_{l0} = \frac{\partial \alpha_{l0}}{\partial \eta}\eta \tag{3}$$

Según la TAT la pendiente de sustentación $C_{l\alpha}$ no varía con la deflexión de flap [4]. Conocidos los coeficientes de sustentación para un ángulo de ataque, sin deflexión de flap (C_l) y con deflexión de flap $(C_{l,f})$ de ángulo η, el factor de eficiencia del flap se determina a partir de

$$\frac{\partial \alpha_{l0}}{\partial \eta} = \frac{C_l - C_{l,f}}{C_{l\alpha}\eta} \tag{4}$$

De (4) se aprecia que el factor de eficiencia es negativo, pues $C_{l,f} > C_l$ para deflexiones de flap positivas.

Para obtener el factor de eficiencia del flap se elige un ángulo de ataque $\alpha = 0$ y un ángulo de deflexión del flap $\eta = 10°$. Posteriormente se calcula $C_{l,f}$ con $N = 200$ paneles. Conocidos C_l y $C_{l\alpha}$, se aplica (4). Para el cálculo del factor de eficiencia corregido, se aplica un factor de corrección de 0.8, correspondiente a flap simple con deflexión $\eta = 10°$ según [5].

El factor de eficiencia experimental para *flap-chord ratio* en el rango 0–0.5 dado por Abbott & Doenhoff se muestra en la figura 6.

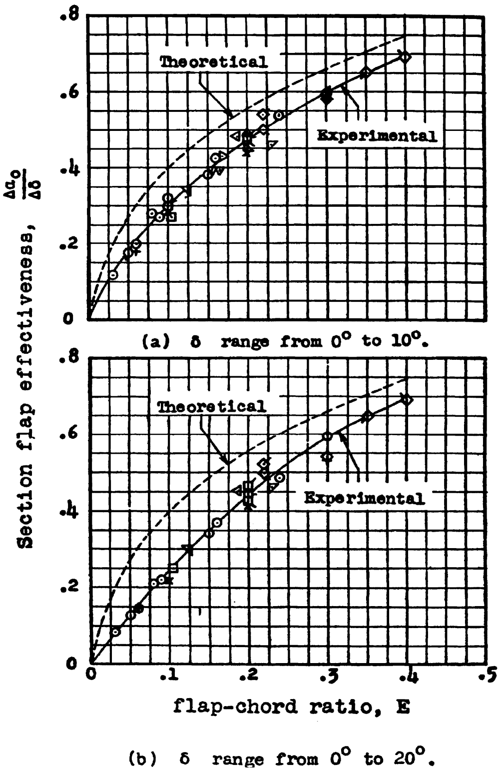

Figura 6. Factores de eficiencia del flap $(\partial\alpha_{l0}/\partial\eta)$ teórico y experimental, en función del *flap-chord ratio* (E) según Abbott & Doenhoff. A partir de [2].

En la figura 7 se representa el factor de eficiencia según DVM, el factor corregido y el experimental, para *flap-chord ratio* en el rango 0–0.40. Como se ha comentado, para $\eta > 0$, el factor de eficiencia es negativo. Por consiguiente, realmente se representa el valor absoluto del factor. En la tabla II se recogen los factores de eficiencia del flap y los errores relativos respecto del valor experimental.

Se observa que el factor de eficiencia del flap aumenta con E. El efecto que introduce la combadura positiva sobre un perfil es un ángulo de sustentación nula negativo, i.e., $\alpha_{l0} < 0$. Cuanto mayor es la combadura, menor es α_{l0}. Para una misma deflexión de flap η, a medida que aumenta E, también aumenta la combadura, reduciendo aún más α_{l0}. Por consiguiente, el factor de eficiencia del flap debe aumentar.

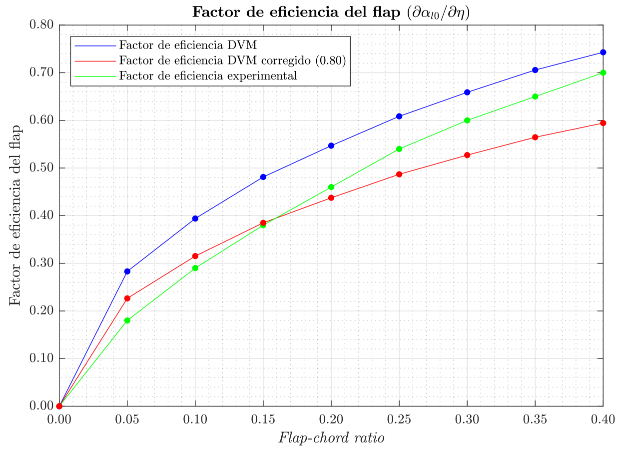

Figura 7. Factor de eficiencia del flap $(\partial\alpha_{l0}/\partial\eta)$ según DVM, corregido (factor 0.8) y experimental en función del *flap-chord ratio* (E). Ángulo de ataque $\alpha = 0$, ángulo de deflexión del flap $\eta = 10°$.

Se observa gran similitud entre los valores del DVM corregido y los experimentales para $E \leq 0.30$. A medida que E crece, la diferencia entre ambas curvas aumenta. En la región anterior al borde de salida la capa límite tiene un espesor considerable. Ello implica que el flap actúe sobre un flujo de menor energía. En estas condiciones, el alcance de la TAT es limitado. Por consiguiente, para E pequeñas el factor de eficiencia es considerablemente superior al experimental, por lo que es necesario introducir el factor de corrección. A medida que E aumenta, la similitud entre ambos es mayor, pues el flap actúa sobre un flujo más energético.

				Error (%)	
E	DVM	Corr.	Exp.	DVM	Corr.
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.05	0.28	0.23	0.18	57.23	25.78
0.10	0.39	0.32	0.29	35.85	8.68
0.15	0.48	0.38	0.38	26.63	1.30
0.20	0.55	0.44	0.46	18.89	4.89
0.25	0.61	0.49	0.54	12.69	9.85
0.30	0.66	0.53	0.60	9.81	12.15
0.35	0.71	0.56	0.65	8.57	13.15
0.40	0.74	0.59	0.70	6.13	15.10

Tabla II
FACTOR DE EFICIENCIA DEL FLAP $(\partial\alpha_{l0}/\partial\eta)$ SEGÚN DVM, CORREGIDO (FACTOR 0.8), EXPERIMENTAL Y ERRORES RELATIVOS EN FUNCIÓN DEL *flap-chord ratio* (E). ÁNGULO DE ATAQUE $\alpha = 0$, ÁNGULO DE DEFLEXIÓN DEL FLAP $\eta = 10°$.

IV. DISCUSIÓN

En este último apartado, tomando como referencia los NACA 4-digit, se examina el comportamiento del α_{l0} y el C_{m0} en función de la posición de máxima combadura (p) y el valor de esta (f).

Se aplica el DVM a perfiles con f en el rango 0–0.06, en incrementos de 0.01 y p de 0.1–0.6 en incrementos de 0.1. Para cada par (f, p), se calculan el C_l y el C_{m0} en un rango lineal $\alpha_1 = -10°$ a $\alpha_2 = 10°$. Denotando $C_{li} = C_l(\alpha_i)$, el ángulo de sustentación nula se determina a partir de

$$\alpha_{l0} = \frac{C_{l2}\alpha_1 - C_{l1}\alpha_2}{C_{l2} - C_{l1}} \quad (5)$$

El C_{m0} se calcula como el promedio en el rango lineal de C_l elegido.

En la figura 9 se representa el ángulo de sustentación nula en función de la posición de máxima combadura para distintas combaduras máximas. Lo propio con el coeficiente de momento libre se muestra en la figura 8.

En la figura 8 se representa el coeficiente de momento libre en función de la posición de máxima combadura para distintas combaduras máximas. Lo propio con el ángulo de sustentación nula se muestra en la figura 8.

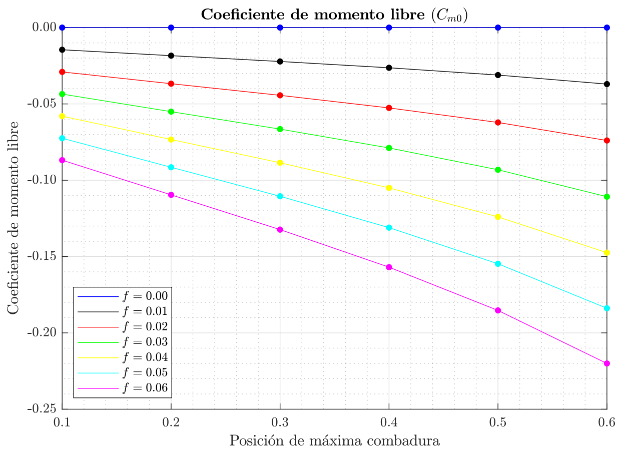

Figura 8. Coeficiente de momento libre (C_{m0}) en función de la posición de máxima combadura (p), para distintas combaduras máximas (f).

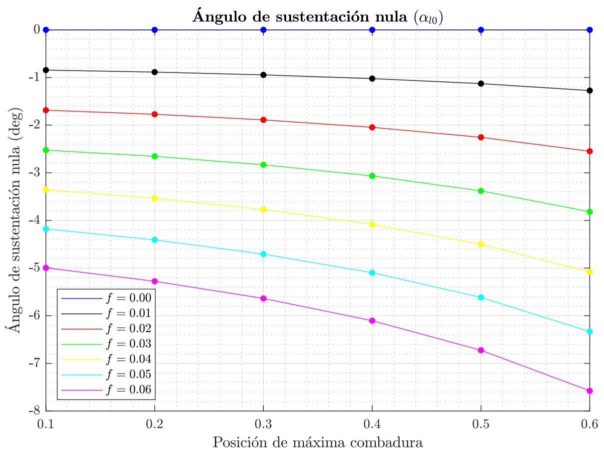

Figura 9. Ángulo de sustentación nula (α_{l0}) en función de la posición de máxima combadura (p), para distintas combaduras máximas (f).

Se aprecia que el C_{m0} disminuye cuando f y p aumentan. Tal como predice la TAT, cuando $f = 0$, i.e., un perfil simétrico, el C_{m0} es nulo. A medida que la posición de máxima combadura se desplaza hacia el borde de salida, la curvatura en esta zona aumenta. Según el modelo de flujo potencial usado por la TAT [4], el flujo se mantiene adherido. Cuando el flujo se curva este se acelera, intercambiando energía de presión por energía cinética. Consecuentemente, la presión local disminuye, i.e., el coeficiente de presión (C_p) disminuye. Aparece así la sustentación (L), debida a la diferencia de presiones. Al estar desplazada hacia el borde de salida, el brazo de palanca de L aumenta, volviendo más negativo el momento libre. Esto se justifica con resultados experimentales. Según [3], para el perfil NACA 6716, la recuperación de presión en el extradós es abrupta, i.e., dC_p/dx es importante hasta llegar a la posición de máxima combadura. En esta zona la recuperación de presión se reduce.

De igual forma sucede con el ángulo de sustentación nula. Conforme f y p aumentan, el α_{l0} disminuye, i.e., su módulo aumenta. De nuevo, para perfil simétrico, se tiene $\alpha_{l0} = 0$, en concordancia con la TAT. Como en el caso del momento libre, a mayor f y p, la carga aerodinámica sobre la zona del borde de salida es mayor para todo ángulo de ataque. En consecuencia, el ángulo de ataque de sustentación nula se incrementa en valor absoluto.

En ambos casos se ha visto que un aumento de f y p comporta un aumento en los valores absolutos de α_{l0} y C_{m0}. Dentro de unos márgenes razonables, aumentar el ángulo de sustentación nula resulta beneficioso, pues la sustentación será mayor para ángulos de ataques menores. No obstante el ángulo de entrada en pérdida (α_{stall}) disminuye. Asimismo, el C_{m0} disminuye, pudiendo afectar a la estabilidad de la aeronave. Por lo tanto, desde el diseño debe encontrarse el equilibrio adecuado entre α_{l0} y C_{m0}.

Referencias

[1] H. Abbott, Ira & E. Von Doenhoff, Albert. "Theory of Wing Sections. Including a Summary of Airfoil Data". In: 2nd ed. 180 Varick Street, New York, N.Y. 10014: Dover Publications, Inc, 1959. Chap. Appendix IV, pp. 474, 475.

[2] H. Abbott, Ira and E. Von Doenhoff, Albert. "Theory of Wing Sections. Including a Summary of Airfoil Data". In: 2nd ed. 180 Varick Street, New York, N.Y. 10014: Dover Publications, Inc, 1959. Chap. 8, p. 190.

[3] J. Bingham, Gene and W. Noonan, Kevin. *Low Speed Aerodynamic characteristics of NACA 6716 and 4416 airfoils with 35-percent-chord single-slotted flaps*. Tech. rep. Hampton, Virginia 23665: National Aeronautics and Space Administration, May 1974.

[4] Enrique Ortega. "Classical Thin-Airfoil Theory". Transparencias de Aerodinámica. Feb. 2020.

[5] W. McCormick, Barnes. "Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics". In: 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. Chap. 3, p. 100.

ANEXOS

CÓDIGO MATLAB

Para las simulaciones con DVM se han desarrollado dos códigos, en MATLAB y en Python, con el fin de verificar los resultados obtenidos con ambos. Los gráficas del documento se han elaborado con el código de MATLAB. Por motivos de extensión solamente se incluye el código de MATLAB. Ambos códigos se pueden consultar en toda su extensión aquí.

A. CÁLCULO GEOMETRÍA

```matlab
function [x, z, vortex, node, c, n_vec, t_vec] = ...
   computeGeometry(f, p, chord, x_flap, eta, N, distribution)
% Compute airfoil geometry (camber line, vortex nodes, control nodes,
% panel chord, normal vectors)

% Compute distribution (uniform or full cosine)
if distribution == "uniform" % Uniform distribution
   x = linspace(0, 1, N+1);
else % Full cosine distribution
   theta = linspace(0, pi, N+1);
   x = (1 - cos(theta))/2;
end

% Compute camber line coordinates (Z)
z = zeros(1, N+1); % Camber line
i = 1;
while x(i) < p % Prevent division by 0, in case of p = 0
   z(i) = f/p^2*(2*p*x(i) - x(i)^2);
   i = i+1;
end
z(i:end) = f/(1-p)^2*(1 - 2*p + 2*p*x(i:end) - x(i:end).^2);
x = x*chord;
z = z*chord;

% Find closest point to flap
if x_flap ≠0 % in case there is a trailing edge flap
   min_dif = intmax;
   ih = 1;
   for i = 1:N+1
      dif = abs(x_flap - x(i));
      if dif < min_dif
         min_dif = dif;
         ih = i;
      end
   end
   % Flap initial node coordinates
   xh = x(ih);
   zh = z(ih);
   % Rotate flap
   x(ih:end) = x(ih:end) - x(ih); % Move to origin (x)
   z(ih:end) = z(ih:end) - z(ih); % Move to origin (z)
   M = [cos(eta) sin(eta); -sin(eta) cos(eta)]; % Rotation matrix
   X = M*[x(ih:end); z(ih:end)]; % Rotation
   x(ih:end) = X(1,:); % New flap coordinates (x)
   z(ih:end) = X(2,:); % New flap coordinates (z)
   x(ih:end) = x(ih:end) + xh; % Move to xh
   z(ih:end) = z(ih:end) + zh; % Move to zh
end

% Compute geometric properties of discretization
c = zeros(1, N); % Panel's chord
t_vec = zeros(N, 2); % Tangent vectors (unused)
n_vec = t_vec; % Normal vectors
vortex = t_vec; % Vortex position
node = t_vec; % Control nodes (solid body condition)
for i = 1:N
   Δ_x = x(i+1) - x(i);
   Δ_z = z(i+1) - z(i);
   c(i) = sqrt(Δ_x^2 + Δ_z^2);
   t_vec(i,:) = [Δ_x Δ_z]/c(i);
   n_vec(i,:) = [-Δ_z Δ_x]/c(i);
   vortex(i,:) = [x(i) z(i)] + t_vec(i,:)*c(i)/4;
   node(i,:) = [x(i) z(i)] + 3*t_vec(i,:)*c(i)/4;
end

end
```

B. Cálculo circulación

```
function [Gamma] = computeCirculation(U_inf, alpha, vortex, node, n_vec, N)
%------------------------------------------------------------------------------
% Inputs:
% Physical data
% - U_inf Free stream velocity
% - alpha Attack angle
% - vortex Vortex position [N x 2]
% - node Control nodes position [N x 2]
% - n_vec Normal vectors [N x 2]
% Numerical data
% - N Number of panels (N+1 nodes)
%------------------------------------------------------------------------------
% Outputs:
% - Gamma Circulation [N x 1]
%------------------------------------------------------------------------------

% Compute influence coefficients and RHS
A = zeros(N, N); % Matrix of influence coefficients
RHS = zeros(N,1); % Right hand side vector for DVM
for i = 1:N
   for j = 1:N
      r_sq = (node(i,1)-vortex(j,1))^2 + (node(i,2)-vortex(j,2))^2;
      u = (node(i,2)-vortex(j,2))/(2*pi*r_sq);
      w = -(node(i,1)-vortex(j,1))/(2*pi*r_sq);
      A(i,j) = n_vec(i,1)*u + n_vec(i,2)*w;
   end
   RHS(i) = -U_inf*(n_vec(i,1)*cos(alpha) + n_vec(i,2)*sin(alpha));
end
% Solve linear system
Gamma = linsolve(A, RHS);
end
```

C. Cálculo del coeficiente de sustentación y de momento

```
function [Cl, Cm] = computeCoefficientsDVM(U_inf, chord, alpha, x_ref, Gamma, vortex)
% Computation of Cl and Cm_ref coefficients given physical data
Cl = 2*sum(Gamma)/(U_inf*chord); % Lift coefficient
Cm = -2*cos(alpha)*(Gamma')*(vortex(:,1)-x_ref)/(U_inf*chord^2); % Moment coefficient
end
```

D. Cálculo de los coeficientes A_0, A_1 y A_2 para la Thin Airfoil Theory

```
function [A0, A1, A2] = computeACoefficients(f, p, alpha)
% Computation of A0, A1 and A2 coefficients for TAT
theta_p = acos(1-2*p);
fun0 = @(theta) (cos(theta)+2*p-1); %Function to compute A0
fun1 = @(theta) (cos(theta)+2*p-1).*cos(theta); %Function to compute A1
fun2 = @(theta) (cos(theta)+2*p-1).*cos(2*theta); %Function to compute A2
A0 = integral(fun0, theta_p, pi)/(1-p)^2;
A1 = integral(fun1, theta_p, pi)/(1-p)^2;
A2 = integral(fun2, theta_p, pi)/(1-p)^2;
if p ≠0 % Prevent division by 0
   A0 = integral(fun0, 0, theta_p)/p^2 + A0;
   A1 = integral(fun1, 0, theta_p)/p^2 + A1;
   A2 = integral(fun2, 0, theta_p)/p^2 + A2;
end
A0 = alpha - (f/pi)*A0; % Coefficient A0
A1 = (2*f/pi)*A1; % Coefficient A1
A2 = (2*f/pi)*A2; % Coefficient A2
end
```

E. Verificación de perfil simétrico con $N = 5$ y $\alpha = 5°$

```
%% 1. DATA
% Airfoil
NACA = 0012; % Airfoil
x_flap = 0; % Flap location
eta = 0*pi/180; % Flap deflection angle

% Numerical data
```

```
N = 5; % Number of panels
distribution = "uniform"; % Type of discretization

% Physical data
U_inf = 1; % Free stream velocity
chord = 1; % Airfoil chord length
alpha = 5*pi/180; % Angle of attack
x_ref = 0; % Reference point for moment computation

% Airfoil geometric parameters
f = floor(NACA/1000)/100; % Maximum camber (percent of chord)
p = mod(floor(NACA/100), 10)/10; % Maximum camber position (tenths of chord)
t = mod(NACA, 100)/100; % Thickness (percent of chord)

%% 2. DISCRETE VORTEX METHOD
[x, z, vortex, node, c, n_vec, t_vec] = ...
   computeGeometry(f, p, chord, x_flap, eta, N, distribution);
[Gamma] = computeCirculation(U_inf, alpha, vortex, node, n_vec, N);
[Cl_DVM, Cm_DVM] = computeCoefficientsDVM(U_inf, chord, alpha, x_ref, Gamma, vortex);
```

F. Verificación del perfil NACA 2408

```
%% 1. DATA
% Airfoil
NACA = 2408; % Airfoil
x_flap = 0; % Flap location
eta = 0*pi/180; % Flap deflection angle

% Numerical data
distribution = "fullcosine";

% Physical data
U_inf = 1; % Free stream velocity
chord = 1; % Airfoil chord length
alpha = 4*pi/180; % Angle of attack

% Airfoil geometric parameters
f = floor(NACA/1000)/100; % Maximum camber (percent of chord)
p = mod(floor(NACA/100), 10)/10; % Maximum camber position (tenths of chord)

%% 2. THIN AIRFOIL THEORY COMPUTATIONS
[A0, A1, A2] = computeACoefficients(f, p, alpha); %A0, A1, A2 coefficients
Cl_TAT = (2*A0+A1)*pi; % Lift coefficient
Cm_TAT = -Cl_TAT/4 + (A2-A1)*pi/4; % Leading edge moment coefficient

%% 3. DISCRETE VORTEX METHOD CONVERGENCE
N = 1:1:200; % Number of panels
Cl_DVM = zeros(1, length(N)); % Computed lift coefficient
Cm_DVM = zeros(1, length(N)); % Computed leading edge moment coefficient

for i = 1:length(N)
   % Discrete Vortex Method
   [x, z, vortex, node, c, n_vec, t_vec] = ...
   computeGeometry(f, p, chord, x_flap, eta, N(i), distribution);
   [Gamma] = computeCirculation(U_inf, alpha, vortex, node, n_vec, N(i));
   [Cl_DVM(i), Cm_DVM(i)] = computeCoefficientsDVM(U_inf, chord, alpha, 0, Gamma, vortex);
end
```

G. Validación del perfil NACA 2408 sin deflexión de flap

```
%% 1. DATA
% Airfoil
NACA = 2408; % Airfoil
x_flap = 0; % Flap location
eta = 0*pi/180; % Flap deflection angle

% Numerical data
N = 200; % Number of panels
distribution = "fullcosine"; % Type of discretization

% Physical data
U_inf = 1; % Free stream velocity
chord = 1; % Airfoil chord length
x_ref = 1/4; % Reference point for moment computation (a.c.)

% Airfoil geometric parameters
f = floor(NACA/1000)/100; % Maximum camber (percent of chord)
```

```
p = mod(floor(NACA/100), 10)/10; % Maximum camber position (tenths of chord)

%% 2. COMPUTATION FOR DIFFERENT ANGLES OF ATTACK
alpha_step = 1e-2; % Step for alpha vector
alpha_lim = 30; % Limit for alpha vector
alpha = -alpha_lim:alpha_step:alpha_lim; % Alpha vector
alpha = alpha*pi/180; % Conversion to radians
Cl_DVM = zeros(1, length(alpha)); % Computed lift coefficient
Cm0_DVM = zeros(1, length(alpha)); % Computed free moment coefficient
% Geometry computation
[x, z, vortex, node, c, n_vec, t_vec] = ...
   computeGeometry(f, p, chord, x_flap, eta, N, distribution); %#ok<ASGLU>
% Discrete Vortex Method, compute Gamma, Cl and Cm0 for each alpha
for i = 1:length(alpha)
   Gamma = computeCirculation(U_inf, alpha(i), vortex, node, n_vec, N);
   [Cl_DVM(i), Cm0_DVM(i)] = computeCoefficientsDVM(U_inf, chord, alpha(i), x_ref, Gamma, vortex);
end

%% 3. COMPUTE Cl_alpha, alpha_l0, Cm0
% Computation of 0 lift angle (alpha_l0)
i = 0; % Initial index for search
found = 0; % Binary variable to end search
while (i ≤length(alpha)) && (found == 0)
   i = i + 1;
   if Cl_DVM(i) ≥0
      found = 1;
   end
end
x = Cl_DVM(i-1)/(Cl_DVM(i-1)-Cl_DVM(i)); % Linear interpolation
alpha_l0 = x*alpha(i)+(1-x)*alpha(i-1); % Angle of 0 lift
alpha_l0 = alpha_l0*180/pi; % Conversion to degrees

% Find indexs for limits of linear range
lin_lim = 10*pi/180; % Limit of Cl linear range
i = 1; % Initial index for search
i1 = 1; % Index for lower limit of linear range
i2 = 1; % Index for upper limit of linear range
found = 0; % Binary variable to end search
% Index search
while (i ≤length(alpha)) && (found < 2)
   if alpha(i) == -lin_lim
      found = found + 1;
      i1 = i;
   elseif alpha(i) == lin_lim
      found = found + 1;
      i2 = i;
   end
   i = i + 1;
end

% Compute lift slope (1/deg)
Cl_alpha = (Cl_DVM(i2) - Cl_DVM(i1))/(2*lin_lim*180/pi);

% Compute Cm0
Cm0 = sum(Cm0_DVM(i1:1:i2))/length(Cm0_DVM(i1:1:i2));
min_Cm0 = min(Cm0_DVM); % Minimum Cm0
max_Cm0 = max(Cm0_DVM(i1), Cm0_DVM(i2)); % Max Cm0
% Max relative variation of Cm0 wrt minimum Cm0
max_variation = 100*abs((max_Cm0 - min_Cm0)/min_Cm0);

% Alternative computation of Cm0 (mean value of Cm0 function) (unused)
Cm0_2 = 0;
for i = i1:1:i2-1
   Cm0_2 = Cm0_2 + (Cl_DVM(i+1)-Cl_DVM(i))*(Cm0_DVM(i+1)+Cm0_DVM(i))/2;
end
Cm0_2 = Cm0_2/(Cl_DVM(i2)-Cl_DVM(i1));
```

H. Validación del perfil NACA 2408 con deflexión de flap

```
%% 1. DATA
% Airfoil
NACA = 2408; % Airfoil
x_flap = 0; % Flap location
eta = 0*pi/180; % Flap deflection angle

% Physical data
U_inf = 1; % Free stream velocity
chord = 1; % Airfoil chord length
x_ref = 1/4; % Reference point for moment computation (a.c.)

```

```
% Airfoil geometric parameters
f = floor(NACA/1000)/100; % Maximum camber (percent of chord)
p = mod(floor(NACA/100), 10)/10; % Maximum camber position (tenths of chord)

% Numerical data
N = 200; % Number of points
distribution = "fullcosine"; % Type of distribution

%% 2. COMPUTATION FOR DIFFERENT ANGLES OF ATTACK WITHOUT FLAP
alpha_step = 1e-2; % Step for alpha vector
alpha_lim = 30; % Limit for alpha vector
alpha = -alpha_lim:alpha_step:alpha_lim; % Alpha vector
alpha = alpha*pi/180; % Conversion to radians
Cl_DVM = zeros(1, length(alpha)); % Computed lift coefficient
Cm0_DVM = zeros(1, length(alpha)); % Computed free moment coefficient
% Geometry computation
[x, z, vortex, node, c, n_vec, t_vec] = ...
   computeGeometry(f, p, chord, x_flap, eta, N, distribution); %#ok<ASGLU>
% Discrete Vortex Method
for i = 1:length(alpha)
   Gamma = computeCirculation(U_inf, alpha(i), vortex, node, n_vec, N);
   [Cl_DVM(i), Cm0_DVM(i)] = computeCoefficientsDVM(U_inf, chord, alpha(i), x_ref, Gamma, vortex);
end

%% 3. COMPUTE alpha_l0, Cl_alpha WITHOUT FLAP
% Computation of 0 lift angle (alpha_l0)
i = 0; % Initial index for search
found = 0; % Binary variable to end search
while (i ≤length(alpha)) && (found == 0)
   i = i + 1;
   if Cl_DVM(i) ≥0
      found = 1;
   end
end
x = Cl_DVM(i-1)/(Cl_DVM(i-1)-Cl_DVM(i)); % Linear interpolation
alpha_l0 = x*alpha(i)+(1-x)*alpha(i-1); % Angle of 0 lift
alpha_l0 = alpha_l0*180/pi; % Conversion to degrees

% Compute Cl_alpha
lin_lim = 10*pi/180; % Linear limit
found = 0; % Binary variable to end search
i = 1; % Initial index for search
i1 = 1; % Index for lower limit of linear range
i2 = 1; % Index for upper limit of linear range
while (i ≤length(alpha)) && (found < 2)
   if alpha(i) == -lin_lim
      found = found + 1;
      i1 = i;
   elseif alpha(i) == lin_lim
      found = found + 1;
      i2 = i;
   end
   i = i + 1;
end
Cl_alpha = (Cl_DVM(i2) - Cl_DVM(i1))/(2*lin_lim);

%% 4. COMPUTATION FOR SEVERAL FLAP-TO CHORD RATIOS
% Angles of attack for which flap efficiency factor will be computed
alpha_flap = [0]; % Angle of attack for airfoil with flap deflection
% alpha_flap is a vector, so it allows computing flap efficiency factor for
% several angles of attack
alpha_flap = alpha_flap*pi/180;

% Get lift coefficient without flap from the previous computations
Cl_no_flap = zeros(1, length(alpha_flap));
i = 0; % Search index
current = 1; % Current index in alpha_flap
while (i ≤length(alpha)-1) && (current ≤length(alpha_flap))
   i = i + 1;
   if alpha(i) == alpha_flap(current)
      Cl_no_flap(current) = Cl_DVM(i);
      current = current + 1;
   end
end

% Flap deflection angle
eta = 10;
eta = eta*pi/180;

% Flap chord ratios and flap hinge position
E = 0:0.05:0.4;
xh = chord*(1-E);

% Computation of Cl for airfoil with deflected flap
```

```
Cl_flap = zeros(length(xh), length(alpha_flap)); % C
for i = 1:length(xh)
   [x, z, vortex, node, c, n_vec, t_vec] = ...
      computeGeometry(f, p, chord, xh(i), eta, N, distribution);
   % Discrete Vortex Method
   for j = 1:length(alpha_flap) % Compute Cl and Cm0 for each alpha
      Gamma = computeCirculation(U_inf, alpha_flap(j), vortex, node, n_vec, N);
      [Cl_flap(i,j), Cm0_DVM(i,j)] = ...
         computeCoefficientsDVM(U_inf, chord, alpha_flap(j), x_ref, Gamma, vortex);
   end
end

% Computation of flap effectivenes DVM
flap_eff_DVM = zeros(length(xh), length(alpha_flap));
for i = 1:length(xh)
   flap_eff_DVM(i,:) = (Cl_no_flap - Cl_flap(i,:))/(Cl_alpha*eta);
end

% Computation of corrected flap effectivenes
factor = 0.8;
flap_eff_corrected = factor*flap_eff_DVM;

% Experimental flap effectivenes (from
flap_eff_exp = -[0, 0.18, 0.29, 0.38, 0.46, 0.54, 0.60, 0.65, 0.70];
```

I. Discusión de α_{l0} y C_{m0} en perfiles 4-digit NACA en función de f y p

```
%% 1. DATA
% Airfoil properties
x_flap = 0; % Flap location
eta = 0*pi/180; % Flap deflection angle

% Numerical data
N = 200; % Number of panels
distribution = "uniform"; % Type of discretization

% Physical data
U_inf = 1; % Free stream velocity
chord = 1; % Airfoil chord length
x_ref = 0.25; % Reference point for moment computation (a.c.)

% Airfoil geometric parameters
f = 0:0.01:0.06; % Max camber
p = 0.1:0.1:0.6; % Max camber position


%% 2. COMPUTATION FOR DIFFERENT ANGLES OF ATTACK
alpha_step = 1e-1; % Step for alpha vector
alpha_lim = 10; % Limit for alpha vector
alpha = -alpha_lim:alpha_step:alpha_lim; % Alpha vector
alpha = alpha*pi/180; % Conversion to radians
alpha_l0 = zeros(length(p), length(f)); % Angle of 0 lift matrix
Cm0 = zeros(length(p), length(f)); % Free moment coefficient matrix
% Discrete Vortex Method
for i = 1:length(p) % Compute for each p
   for j = 1:length(f) % Compute for each f
      % Compute geometry
      [x, z, vortex, node, c, n_vec, t_vec] = ...
         computeGeometry(f(j), p(i), chord, x_flap, eta, N, distribution);
      % Lift coefficient and free moment
      Cl_DVM = zeros(1, length(alpha));
      Cm0_DVM = zeros(1, length(alpha));
      for k = 1:length(alpha) % Compute for each alpha
         Gamma = computeCirculation(U_inf, alpha(k), vortex, node, n_vec, N);
         [Cl_DVM(k), Cm0_DVM(k)] = ...
            computeCoefficientsDVM(U_inf, chord, alpha(k), x_ref, Gamma, vortex);
      end
      % Compute alpha_l0 (radians) and free moment coefficient
      alpha_l0(i,j) = (Cl_DVM(end)*alpha(1) - Cl_DVM(1)*alpha(end))/(Cl_DVM(end) - Cl_DVM(1));
      Cm0(i,j) = sum(Cm0_DVM)/length(Cm0_DVM);
   end
end
alpha_l0 = alpha_l0*180/pi; % Conversion to degrees
```