
MECÀNICA DEL VOL

DINÀMICA DE REENTRADA ATMOSFÈRICA

Estudiants: YI QIANG JI ZHANG, PEDRO LÓPEZ SANCHÁ,
IVÁN SERMANOUKIAN MOLINA

Professor: MIQUEL SUREDA ANFRES

Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Escola d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa
Universitat Politècnica de Catalunya

4 de febrer de 2021

Índex

1 Introducció	3
2 Fonament teòric	4
2.1 Entrada balística	4
2.1.1 El coeficient balístic	4
2.2 Entrada sustentadora	5
2.3 Models d'atmosfera estàndard 1976 USA	6
3 Equacions de govern de la trajectòria	8
3.1 Sistema de referència	8
3.2 Equacions cinemàtiques i dinàmiques de la mecànica del vol	9
3.3 Equacions de govern de la reentrada sustentadora	9
3.4 Equacions de govern de la reentrada balística	10
4 Resolució numèrica	12
4.1 Resolució numèrica de sistemes d'equacions diferencials	12
4.2 Resolució numèrica de la trajectòria balística	13
4.3 Resolució numèrica de la trajectòria sustentadora	14
4.4 Càcul de variables derivades	15
5 Condicions atmosfèriques a la Terra	16
5.1 Distribució de temperatura	17
5.2 Distribució de pressió	18
5.3 Distribució de densitats	19
6 Condicions atmosfèriques a Mart	20
7 Entrada balística a la Terra	21
7.1 Gràfica: Velocitat respecte Altitud	21
7.2 Gràfica: Desacceleració respecte Altitud	22
7.3 Gràfica: Pressió dinàmica respecte altitud	23
7.4 Gràfica: Mach respecte Altitud	24
7.5 Gràfica: Reynolds respecte Altitud	25
7.6 Gràfica: Pressió d'estancament respecte Altitud	26
7.7 Gràfica: Entalpia d'estancament respecte Altitud	29
7.8 Gràfica: Transferència de calor d'estancament respecte Altitud	31
7.9 Gràfica: Temps de reentrada respecte Altitud	32

7.10 Gràfica: Abast respecte Altitud	33
7.11 Gràfica: Energia dinàmica respecte Altitud	34
8 Cas d'entrada balística a la Terra: Càpsula Mercury	35
8.1 Entrada balística de la càpsula Mercury “Friendship 7” a la Terra	37
9 Entrada sustentadora a la Terra	38
9.1 Gràfica: Velocitat respecte Altitud	39
9.2 Gràfica: Desacceleració respecte Altitud	40
9.3 Gràfica: Pressió dinàmica respecte Altitud	41
9.4 Gràfica: Número de Mach respecte Altitud	42
9.5 Gràfica: Número de Reynolds respecte Altitud	43
9.6 Gràfica: Pressió d'estancament respecte Altitud	44
9.7 Gràfica: Transferència de calor respecte Altitud	45
9.8 Gràfica: Temps de reentrada respecte Altitud	46
9.9 Gràfica: Abast respecte Altitud	47
9.10 Gràfica: Energia dinàmica respecte Altitud	48
A Entrada balística i sustentadora a la Terra	49

1 Introducció

El següent projecte presenta un estudi de la mecànica de vol darrere d'una reentrada d'un vehicle a l'atmosfera terrestre.

En el retorn de l'espai, l'atmosfera terrestre es comporta com un fluid dens, el qual a velocitats orbitals es transforma en un gran obstacle que cal creuar. És necessari impactar amb l'atmosfera amb un precís angle de reentrada i velocitat per assegurar un aterratge segur segons [1].

Existeixen dos tipus de vehicles en la reentrada planetària destacats per [2] a l'atmosfera terrestre. Segons el tipus en concret, es determina completament el disseny d'aquests vehicles tripulats o dels vehicles no tripulats per a la reintroducció hipersònica a l'atmosfera terrestre des de l'espai.

- **Balístics** (vehicles de reentrada, càpsula Mercury, etc.).
- **Sustentadors** (vehicles de reentrada maniobrables, càpsules Gemini i Apollo, HL-10, ACTIU, PRIME, X24-A, X24-B, etc.)



Figura 1 Coet Saturn V. A partir de [3]



Figura 2 Space Shuttle. A partir de [4]

2 Fonament teòric

Primerament, és interessant fer una distinció entre la diferència d'una reentrada balística i una reentrada sustentadora. Aquests dos tipus de reentrada són àmpliament usats en les missions actuals i mentre que la sustentadora permet més flexibilitat en quant a control, la entrada balística suposa menys càlculs matemàtics.

2.1 Entrada balística

Una entrada balística es defineix com una reentrada atmosfèrica en què les úniques forces són la gravetat i la força *Drag* aerodinàmic. En canvi, una reentrada no balística, i.e., *entrada sustentador* introduceixen altres forces per intentar augmentar la durada de la reentrada i així disminuir la dissipació d'energia durant un període de temps més gran.

L'energia mecànica que té un objecte en la reentrada és molt elevada:

$$E_{\text{mec}} = \frac{mv^2}{2} + GMm \left(\frac{1}{r_{\text{earth}}} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.1)$$

Un dels principis fonamentals de la física és que l'energia en un sistema tancat es conserva. La pregunta és, on va a parar tota aquesta energia que conté? La resposta a aquesta pregunta és que tota l'energia acumulada es bescanvia amb l'aire en forma d'energia de fregament.

2.1.1 El coeficient balístic

L'equació del moviment es pot escriure com:

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{C_D A}{m} \quad (2.2)$$

Observant l'equació 2.2 el terme $\frac{C_D A}{m}$ té un sentit físic molt usat en l'estudi de les trajectòries balístiques. Aquest coeficient s'anomena coeficient balístic i té un significat especial en la descripció de com es mou un objecte en l'atmosfera i s'expressa de la següent manera:

$$\beta = \frac{W}{C_D A} \quad (2.3)$$

on β : coeficient balístic del vehicle (kg/m^2) W : pes del vehicle (N) C_D : Coeficient de Resistència aerodinàmica (adim) A : Secció transversal del vehicle (m^2)

És precisament a partir d'aquesta expressió que es mostra que l'acceleració d'un objecte és inversament proporcional al coeficient balístic β . En altres paraules, un objecte amb un baix coeficient balístic, desaccelera molt més ràpidament que un objecte amb un alt coeficient balístic.

El coeficient balístic és per tant el paràmetre més important en el control de la trajectòries en la reentrada. Com a conseqüència, les calor s i desacceleracions són menys intenses per un valor reduït de β (baix pes i/o alta resistència aerodinàmica o àrea) que per un valor elevat de β (gran pes i/o baix drag reduïda àrea). Tots aquests conceptes s'analitzaran en detall en la següents seccions [Veure Annex 39] [5] [6].

2.2 Entrada sustentadora

Recordem que l'entrada balística se suposava que la força de sustentació L a la reentrada és nul·la. Tanmateix, si s'afegeix una força de sustentació a la reentrada, aquest aportarà més flexibilitat en quant al marge d'error a la velocitat de reentrada o angle de trajectòria. A més, aquest tipus de reentrada permet millorar la precisió. Alhora, també permet canviar l'angle d'atac per millorar la sustentació de tal forma que el vehicle adopti un comportament més d'aeronau que d'un objecte sólid en caiguda.

No obstant, tot i que la resistència aerodinàmica és present durant tota la reentrada, la trajectòria resultant es pot ajustar contínuament per canviar ambdós moviments verticals i direcció de vol quan es redueix la velocitat. De la mateixa manera que per la reentrada balística, el coeficient més important és la β , en una reentrada sustentadora, el paràmetre de disseny primari és la eficiència aerodinàmica:

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} \quad (2.4)$$

Valors reduïts de L/D produueixen càrregues g moderades, moderats nivells de calor i poca maniobrabilitat. En canvi, valors elevats d'eficiència aerodinàmica produueixen càrregues g reduïdes, tanmateix, les entrades són de llarga duració i de transferència de calor contínua. En el cas del Space Shuttle, la eficiència aerodinàmica és de l'ordre de la unitat.

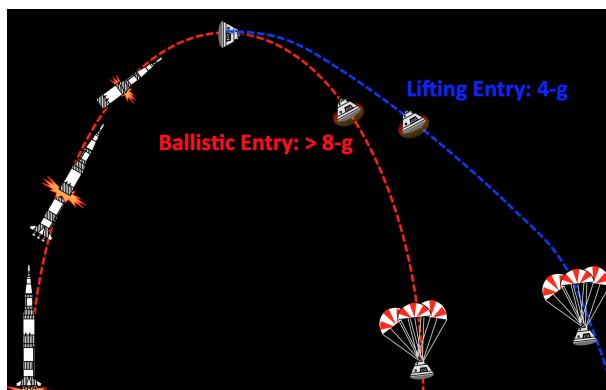


Figura 3 Comparació de la desacceleració entre entrada balística i l'entrada sustentadora. Crèdits: [7]

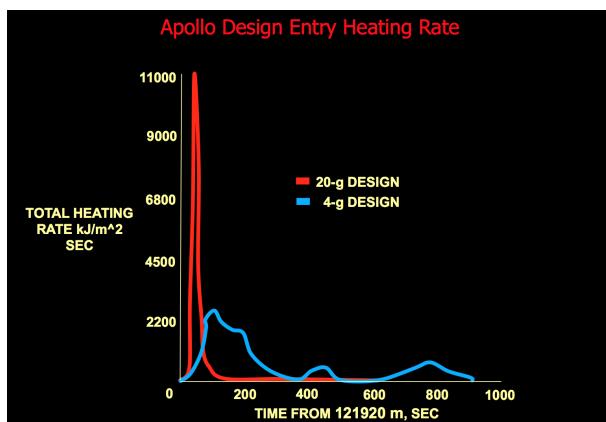


Figura 4 Comparació de l'energia adquirida entre l'entrada balística i l'entrada sustentadora. Crèdits: [7]

2.3 Models d'atmosfera estàndard 1976 USA

El model d'atmosfera estàndard internacional desenvolupat pels Estats Units d'Amèrica l'any 1976 es va construir a partir de la compilació de dades meteorològiques de l'hemicèl nord. L'estudi realitzat per John C. Adams, Jr. es basa en aquest sistema pel càlcul de les variables atmosfèriques tot i que el model GRAM de la NASA és el que actualment s'utilitza juntament amb el marc de l'atmosfera ISA (*International Standard Atmosphere*).

L'atmosfera USSMA inclou 14 atmosferes diferents corresponents a latituds que van des dels 15° fins els 75° , per a diferents estacions (primavera/tardor, estiu/hivern) sempre per a altituds inferiors als 120 km. A partir d'ara s'utilitzarà la latitud corresponent a 45° .

Aquest model utilitza una altura geopotencial h que es defineix com:

$$g_{\text{ref}} h = \int_0^z g(z) dz \quad (2.5)$$

on $g(z)$ representa un valor aproximat del camp de gravetat a la latitud considerada a una altitud geomètrica z .

$$g(z) \approx g(0) \frac{R_t^2}{(R_t + z)^2} \quad (2.6)$$

on les expressions R_t i $g(0)$ són també funcions de la latitud, que indiquen el radi terrestre i la gravetat de referència a nivell del mar, respectivament.

Atès que la atmosfera abasta una distància considerable, el perfil de pressió i temperatura varia considerablement entre les diferents capes que la composen. D'aquesta manera, a partir de la definició d'altura geopotencial:

$$dp = -\rho g dz = -\rho g_{\text{ref}} dz \quad (2.7)$$

Una vegada combinada amb l'equació d'estat, s'obté:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M g_{\text{ref}}}{RT} dh \quad (2.8)$$

A continuació, s'integra l'equació (2.8) entre h_b i h per obtenir:

$$p(h) = p(h_b) \exp \left(\frac{M g_{\text{ref}}}{R} \int_{h_b}^h \frac{dh}{T(h)} \right) \quad (2.9)$$

Prenent un model de temperatura lineal com

$$T(h) = T_b + \lambda(h - h_b) \quad (2.10)$$

on λ és el gradient de temperatura a la capa, es poden distingir dos casos:

- Per a capes atmosfèriques isotermes, i.e., amb $\lambda = 0$:

$$p(h) = p(h_b) \exp \left(-\frac{M g_{\text{ref}}}{RT_b} (h - h_b) \right) \quad (2.11)$$

- Per a capes atmosfèriques no isotermes:

$$p(h) = p(h_b) \left(\frac{T_b + \lambda(h - h_b)}{T_b} \right)^{-\frac{M g_{\text{ref}}}{\lambda R}} \quad (2.12)$$

Finalment, per al càlcul de la densitat:

$$\rho(h) = \frac{M}{R} \cdot \frac{p(h)}{T(h)} \quad (2.13)$$

Considerant com a constants conegudes en el cas de la Terra:

$$M = 28.9644 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol} \quad (2.14)$$

$$g_{ref} = 9.80665 \frac{m}{s^2} \quad (2.15)$$

$$p(0) = 101325 Pa \quad (2.16)$$

A continuació es presenten les diverses seccions de l'atmosfera terrestre que s'utilitzaran per a modelitzar les diverses variables termodinàmiques en funció de l'altura.

Altituds geopotencial i temperatura inicial a cada secció			
Index de secció	Altituds $h_b(m)$	Gradients $A_b(\frac{K}{m})$	Temperatures $T_b(K)$
1	0.	$-6.5 \cdot 10^{-3}$	288.15
2	11000.	0.	216.65
3	20000.	$+1. \cdot 10^{-3}$	216.65
4	32000.	$+2.8 \cdot 10^{-3}$	228.65
5	47000.	0.	270.65
6	52000.	$-2 \cdot 10^{-3}$	270.65
7	61000.	$-4 \cdot 10^{-3}$	252.65
8	69000.	$-3 \cdot 10^{-3}$	220.65
9	79000.	0.	190.65
10	90000.	$+2 \cdot 10^{-3}$	190.65
11	100000.	$+4.36 \cdot 10^{-3}$	210.65
12	110000.	$+16.4596 \cdot 10^{-3}$	254.25
13	117776.		382.24

Taula 1 A partir de [8].

A partir d'aquestes dades es deriven els següents paràmetres [8]:

- Velocitat del so:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T} \quad (2.17)$$

amb $\gamma = C_p/C_v$ i $r = R/M_m = 287.053 \text{ J/(kg K)}$.

- Viscositat dinàmica (Sutherland):

$$\mu = \frac{B T^{3/2}}{T + S} \quad (2.18)$$

amb $B = 1.458 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(s m K}^{1/2}\text{)}$ i $S = 110.4 \text{ K}$.

3 Equacions de govern de la trajectòria

3.1 Sistema de referència

Per tal d'estudiar el moviment i la trajectòria de qualssevol cos cal considerar uns eixos de coordenades. Per tal de poder aplicar la segona llei de Newton, és necessari que el sistema de coordenades considerat sigui inercial, dit d'una manera simple, un sistema de referència és inercial quan estan fixos o tenen moviment relatiu uniforme. És a dir, que la variació de moment lineal del sistema sigui igual a les forces reals sobre el sistema, de manera matemàtica, un sistema en el qual:

$$\sum F_{\text{reals}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.1)$$

Mentre que en la descripció no newtoniana d'un sistema de referència NO inercial s'han d'afegir el terme de les forces fictícies F_{fict} .

$$\sum F_{\text{reals}} + \sum F_{\text{fict}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.2)$$

De sistemes de referència inercials es poden definir diferents. No obstant, per d'agilitzar els càlculs i simplificar les expressions, per aquest problema en particular es definiran els eixos horitzó local i el sistema de referència d'eixos vent [Figura 5]:

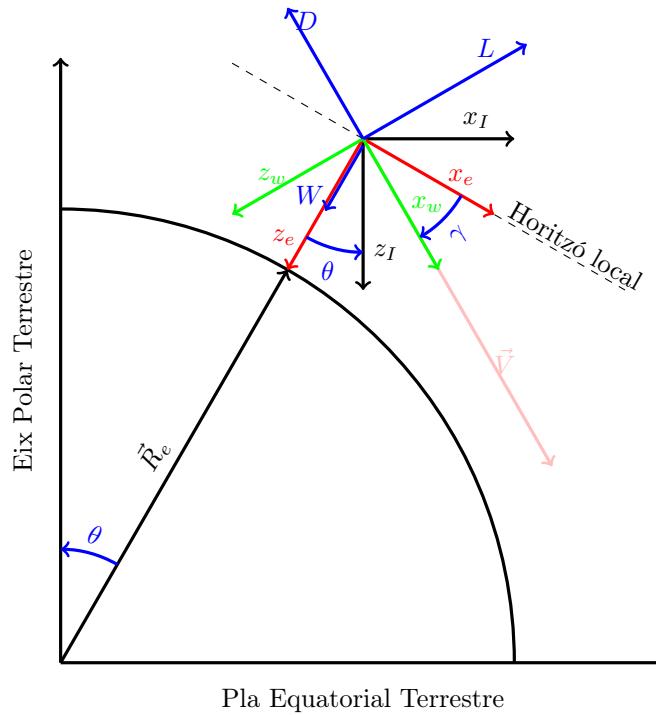


Figura 5 Esquema del sistema de coordenades

El sistema de referència d'eixos horitzó local es defineixen un pla horitzontal definida per \hat{x} i \hat{y} normalment en les quals apunten cap al nord i cap a l'est geogràfic, respectivament. Quedant per finalment, \hat{z} definida cap al centre de la Terra.

Tanmateix, per l'estudi de les actuacions, els eixos de referència d'eixos vent són d'extrema utilitat doncs està lligat a la velocitat aerodinàmica instantània de l'avió on \hat{z} està contingut en el pla de simetria i \hat{x} i \hat{y} contindran les forces aerodinàmiques de sustentació L i resistència aerodinàmica D .

3.2 Equacions cinemàtiques i dinàmiques de la mecànica del vol

Les equacions que governen la trajectòria de reentrada atmosfèrica es poden derivar de les equacions de la mecànica del vol. Les equacions cinemàtiques són [9]:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \gamma' \cos \chi \\ \dot{y} = V \cos \gamma' \sin \chi \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\dot{z} = -\dot{h} = -V \sin \gamma' \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \gamma' \cos \chi \\ \dot{y} = V \cos \gamma' \sin \chi \\ \dot{z} = -\dot{h} = -V \sin \gamma' \end{cases} \quad (3.5)$$

I les equacions dinàmiques:

$$\begin{cases} T \cos \varepsilon \cos \nu - D - mg \sin \gamma' - m\dot{V} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} T \cos \varepsilon \sin \nu - F_y + mg \cos \gamma' \sin \mu + mV(\dot{\gamma}' \sin \mu - \dot{\chi} \cos \gamma' \cos \mu) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} -T \sin \varepsilon - L + mg \cos \gamma' \cos \mu + mV(\dot{\gamma}' \cos \mu + \dot{\chi} \cos \gamma' \sin \mu) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Durant la reentrada no hi ha empenta, $T = 0$. Es considera que el vehicle es manté en un pla vertical, i.e., $\dot{y} = 0$, de mode que $\chi \in \{0, \pi\}$. Es suposa a més que el vol és simètric, $F_y = 0$ i $\mu = 0$. Prenent $\chi = 0$ i introduint aquestes simplificacions a les equacions anteriors, s'obté:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \gamma' \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \dot{h} = V \sin \gamma' \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} D + mg \sin \gamma' + m\dot{V} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} -L + mg \cos \gamma' + mV\dot{\gamma}' = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

L'angle γ' és l'angle “de asiento” de la velocitat, i.e., l'angle que forma l'eix x_w amb el pla horitzontal. Atès que es tracta d'un descens, aquest és negatiu. Per simplificar les expressions, es pren l'angle $\gamma = -\gamma'$. Aleshores:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \gamma \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \dot{h} = -V \sin \gamma \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} D - mg \sin \gamma + m\dot{V} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} -L + mg \cos \gamma - mV\dot{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

A partir d'aquest sistema de quatre equacions diferencials ordinàries es poden deduir les equacions de la reentrada sustentadora i de la reentrada balística.

3.3 Equacions de govern de la reentrada sustentadora

A partir de l'equació (3.15), s'obté la primera equació de la reentrada sustentadora:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = g \sin \gamma - \frac{D}{m} = g \sin \gamma - \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{SC_D}{m} = g \sin \gamma - Qg \frac{SC_D}{mg}$$

En el cas que el planeta on es fa la reentrada atmosfèrica sigui la Terra, es considera que aquesta comença al voltant dels $h_0 = 80$ km, on l'acceleració de la gravetat és $g(h_0) = 9.57825$ m/s². Això representa una variació relativa respecte de l'acceleració de la gravetat a nivell del mar ($g_0 = 9.80665$ m/s²) del 2.32%. Es pot aproximar per tant $g(h_0) \approx g_0$, i es té que

$$\frac{dV}{dt} \approx g \sin \gamma - Qg \frac{SC_D}{mg_0} = g \sin \gamma - \frac{Q}{\beta} g = g \left(\sin \gamma - \frac{Q}{\beta} \right) \quad (3.17)$$

Partint de l'equació (3.16), es dedueix la segona equació de la reentrada sustentadora:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{g \cos \gamma - \frac{L}{m}}{V} = \frac{g \cos \gamma - \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{SC_L}{m}}{V} = \frac{g \cos \gamma - Qg \frac{SC_D C_L}{mg C_D}}{V}$$

$$\approx \frac{g \cos \gamma - \frac{Qg}{\beta} \frac{C_L}{C_D}}{V}$$

Degut a que el vehicle de reentrada està girant, apareix una acceleració normal $V^2 / (R_p + h)$ de sentit contrari a l'acceleració de la gravetat g . Per tant, el primer terme del numerador s'ha de corregir restant aquesta acceleració. D'aquesta manera s'obté la segona equació:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\left(g - \frac{V^2}{R_p + h}\right) \cos \gamma - \frac{Qg}{\beta} \frac{C_L}{C_D}}{V} \quad (3.18)$$

De l'equació (3.14), es té directament la tercera equació de la reentrada sustentadora:

$$\frac{dh}{dt} = -V \sin \gamma \quad (3.19)$$

Sobre una circumferència de radi R , la longitud que abasta un arc d'angle angle θ és $L = R\theta$, amb θ en radians. En un instant de temps donat t , el vehicle es troba a una altitud h sobre la superfície del planeta, per tant a una distància $R_p + h$ del centre del planeta. Durant un interval de temps $t + dt$ es pot considerar que les variables del descens no varien. Així, la distància horitzontal recorreguda és $dL = V \cos \gamma dt$ i l'angle abastat

$$d\theta = \frac{dL}{R_p + h} = \frac{V \cos \gamma}{R_p + h} dt$$

Conseqüentment, la projecció sobre la superfície del planeta és $dr = R_p d\theta$. Atès que $dt > 0$, es multiplica per $1/dt$ a ambdues bandes de la igualtat i s'obté l'última equació de la reentrada sustentadora:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{R_p}{R_p + h} V \cos \gamma \quad (3.20)$$

3.4 Equacions de govern de la reentrada balística

L'altitud del vehicle de reentrada és una funció contínua i derivable del temps, definida sobre un interval $\mathcal{I} = [0, t_{\max}]$, i.e., $h: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, on $\mathcal{X} = [0, h_{\max}]$. En general, h no és bijectiva, ja que en alguns casos de reentrada, el vehicle augmenta la seva altitud. No obstant, es poden trobar intervals $I \subseteq \mathcal{I}$ on la restricció de la funció a l'interval, $h|_I: I \rightarrow X \subseteq \mathcal{X}$, sigui bijectiva. Aquests intervals són aquells on h és estrictament creixent o estrictament decreixent. En aquests casos la funció té una funció inversa local definida, i.e., $t: X \rightarrow I$, que és també contínua i derivable. En general, el vehicle no mantindrà alçada constant, per tant l'interval \mathcal{I} es pot expressar com a unió dels intervals I on h és bijectiva, és a dir, t es pot expressar com una funció a trossos. És sabut de l'anàlisi, que donada una funció f amb inversa f^{-1} en un punt que verifiqui les condicions prèvies, la derivada de f^{-1} és la inversa de la derivada de f [10]. D'aquesta manera, a partir de l'equació (3.19), s'obté la primera equació de la reentrada balística,

$$\frac{dt}{dh} = \left(\frac{dh}{dt} \right)^{-1} = -\frac{1}{V \sin \gamma} \quad (3.21)$$

Aplicant la regla de la cadena a l'expressió (3.17) usant (3.21), s'arriba a la segona equació de la reentrada balística:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{dV}{dt} \frac{dt}{dh} = \frac{g \left(\frac{Q}{\beta} - \sin \gamma \right)}{V \sin \gamma} \quad (3.22)$$

Durant la reentrada balística no hi ha sustentació, aleshores $C_L = 0$. Aplicant la regla de la cadena a l'equació (3.18),

$$\frac{d\gamma}{dh} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{dh} = \frac{\left(\frac{V^2}{R_p + h} - g \right) \cos \gamma}{V^2 \sin \gamma} \quad (3.23)$$

Novament, aplicant la regla de la cadena a l'equació (3.20), s'obté l'última equació de la reentrada balística:

$$\frac{dr}{dh} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dh} = - \frac{R_p}{R_p + h} \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \quad (3.24)$$

4 Resolució numèrica

4.1 Resolució numèrica de sistemes d'equacions diferencials

Es considera un problema de valor inicial com el següent:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

amb $x \in [a, b]$, $y(x) \in \mathbb{R}$ i $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En general, la major part d'equacions diferencials que es plantegen no tenen una solució explícita $y(x)$. No obstant, donats punts $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$, es pot obtenir el valor que pren $y(x)$ en aquests [11].

Els algorismes de Runge-Kutta venen donats per [11]:

$$y(a) = y_0 \quad (4.3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^k c_i k_i^n, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.4)$$

amb $k \in \mathbb{N}$ definit prèviament, i els coeficients k_i^n són funcions definides per:

$$k_1^n = f(x_n, y_n) \quad (4.5)$$

$$k_i^n = f\left(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j^n\right), \quad 2 \leq i \leq k \quad (4.6)$$

L'algorisme RK4, és l'algorisme de Runge-Kutta que s'obté per $k = 4$. Aquest s'escriu com:

$$y(a) = y_0 \quad (4.7)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4^n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.8)$$

on els coeficients es defineixen per:

$$k_1^n = f(x_n, y_n) \quad (4.9)$$

$$k_2^n = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1^n\right) \quad (4.10)$$

$$k_3^n = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2^n\right) \quad (4.11)$$

$$k_4^n = f(x_n + h, y_n + h k_3^n) \quad (4.12)$$

Intuïtivament, els mètodes de Runge-Kutta discretitzen el domini definit per la variable independent x en passes definides per h , i per a cada punt x_n de la discretització, calculen el valor de y' en punts de l'entorn de x_n , i.e., els coeficients k_i^n . A partir del valor actual y_n de la funció i dels coeficients, es calcula el següent valor de la funció, y_{n+1} .

Els mètodes numèrics són, en general, aproximacions a la solució analítica del problema. La precisió del l'aproximació depèn de h . No obstant, el mètode RK4 és d'ordre global 4, és a dir, l'error és de l'ordre de $\mathcal{O}(h^4)$. Això implica que, si es defineix $h' = h/2$ i s'aplica novament l'algorisme RK4, l'error es reduirà 16 vegades.

Els mètodes de Runge-Kutta i, en particular el mètode RK4, són fàcilment generalitzables a sistemes d'equacions diferencials ordinàries, com es veurà a continuació.

4.2 Resolució numèrica de la trajectòria balística

El sistema d'equacions diferencials donat per (3.22), (3.23), (3.21) i (3.24), es pot reescriure com segueix:

$$\frac{dV}{dh} = f_1(h, V, \gamma, t, r) \quad (4.13)$$

$$\frac{d\gamma}{dh} = f_2(h, V, \gamma, t, r) \quad (4.14)$$

$$\frac{dt}{dh} = f_3(h, V, \gamma, t, r) \quad (4.15)$$

$$\frac{dr}{dh} = f_4(h, V, \gamma, t, r) \quad (4.16)$$

Les condicions de contorn són l'altura inicial H_0 , la velocitat inicial $V(H_0) = V_0$, l'angle de descens inicial $\gamma(H_0) = \gamma_0$ i l'altura final $H_f = 0$.

L'altitud pot prendre valors a l'interval $\mathcal{I} = [H_f, H_0]$. Es divideix l'interval \mathcal{I} amb una discretització uniforme en $N + 1$ punts, amb una separació Δh . Atès que es tracta d'una trajectòria de descens, es té que $h_0 = H_0$, $h_{N+1} = H_0$ i $h_n = h_0 + n \Delta h$. L'algorisme ha de fer $N + 1$ iteracions, començant en h_0 i acabant en h_{N+1} . Per a la iteració n , amb $0 \leq n \leq N$, es tenen els següents coeficients primers:

$$i_1^n = f_1(h_n, V_n, \gamma_n, t_n, r_n) \quad (4.17)$$

$$j_1^n = f_2(h_n, V_n, \gamma_n, t_n, r_n) \quad (4.18)$$

$$k_1^n = f_3(h_n, V_n, \gamma_n, t_n, r_n) \quad (4.19)$$

$$l_1^n = f_4(h_n, V_n, \gamma_n, t_n, r_n) \quad (4.20)$$

Els coeficients segons són:

$$i_2^n = f_1\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_1^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_1^n\right) \quad (4.21)$$

$$j_2^n = f_2\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_1^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_1^n\right) \quad (4.22)$$

$$k_2^n = f_3\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_1^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_1^n\right) \quad (4.23)$$

$$l_2^n = f_4\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_1^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_1^n\right) \quad (4.24)$$

Les expressions pels coeficients tercers són:

$$i_3^n = f_1\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_2^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_2^n\right) \quad (4.25)$$

$$j_3^n = f_2\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_2^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_2^n\right) \quad (4.26)$$

$$k_3^n = f_3\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_2^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_2^n\right) \quad (4.27)$$

$$l_3^n = f_4\left(h_n + \frac{\Delta h}{2}, V_n + \frac{\Delta h}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta h}{2}j_2^n, t_n + \frac{\Delta h}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta h}{2}l_2^n\right) \quad (4.28)$$

Els coeficients quarts es calculen com:

$$i_4^n = f_1(h_n + \Delta h, V_n + \Delta h i_3^n, \gamma_n + \Delta h j_3^n, t_n + \Delta h k_3^n, r_n + \Delta h l_3^n) \quad (4.29)$$

$$j_4^n = f_2(h_n + \Delta h, V_n + \Delta h i_3^n, \gamma_n + \Delta h j_3^n, t_n + \Delta h k_3^n, r_n + \Delta h l_3^n) \quad (4.30)$$

$$k_4^n = f_3(h_n + \Delta h, V_n + \Delta h i_3^n, \gamma_n + \Delta h j_3^n, t_n + \Delta h k_3^n, r_n + \Delta h l_3^n) \quad (4.31)$$

$$l_4^n = f_4(h_n + \Delta h, V_n + \Delta h i_3^n, \gamma_n + \Delta h j_3^n, t_n + \Delta h k_3^n, r_n + \Delta h l_3^n) \quad (4.32)$$

Finalment, es calculen les variables per h_{n+1} :

$$V_{n+1} = V_n + \frac{\Delta h}{6} (i_1^n + 2i_2^n + 2i_3^n + i_4^n) \quad (4.33)$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \frac{\Delta h}{6} (j_1^n + 2j_2^n + 2j_3^n + j_4^n) \quad (4.34)$$

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\Delta h}{6} (k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4^n) \quad (4.35)$$

$$r_{n+1} = r_n + \frac{\Delta h}{6} (l_1^n + 2l_2^n + 2l_3^n + l_4^n) \quad (4.36)$$

4.3 Resolució numèrica de la trajectòria sustentadora

El sistema d'equacions diferencials donat per (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), es poden reescriure com a funcions:

$$\frac{dV}{dt} = g_1(t, V, \gamma, h, r) \quad (4.37)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = g_2(t, V, \gamma, h, r) \quad (4.38)$$

$$\frac{dh}{dt} = g_3(t, V, \gamma, h, r) \quad (4.39)$$

$$\frac{dr}{dt} = g_4(t, V, \gamma, h, r) \quad (4.40)$$

Les condicions sobre el sistema són l'altitud inicial $h(t_0) = H_0$, la velocitat inicial $V(t_0) = V_0$, l'angle de descens inicial $\gamma(t_0) = \gamma_0$ i l'altitud final en l'instant final $h(t_f) = 0$.

Novament es fa una discretització temporal del domini del temps, $\mathcal{I} = [t_0, t_f]$, en $N + 1$ instants separats per un temps Δt . Per a la iteració n , amb $0 \leq n \leq N$, els coeficients es calculen com:

$$i_1^n = g_1(t_n, V_n, \gamma_n, h_n, r_n) \quad (4.41)$$

$$j_1^n = g_2(t_n, V_n, \gamma_n, h_n, r_n) \quad (4.42)$$

$$k_1^n = g_3(t_n, V_n, \gamma_n, h_n, r_n) \quad (4.43)$$

$$l_1^n = g_4(t_n, V_n, \gamma_n, h_n, r_n) \quad (4.44)$$

$$i_2^n = g_1\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_1^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_1^n\right) \quad (4.45)$$

$$j_2^n = g_2\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_1^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_1^n\right) \quad (4.46)$$

$$k_2^n = g_3\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_1^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_1^n\right) \quad (4.47)$$

$$l_2^n = g_4\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_1^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_1^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_1^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_1^n\right) \quad (4.48)$$

$$i_3^n = g_1\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_2^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_2^n\right) \quad (4.49)$$

$$j_3^n = g_2\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_2^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_2^n\right) \quad (4.50)$$

$$k_3^n = g_3\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_2^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_2^n\right) \quad (4.51)$$

$$l_3^n = g_4\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, V_n + \frac{\Delta t}{2}i_2^n, \gamma_n + \frac{\Delta t}{2}j_2^n, h_n + \frac{\Delta t}{2}k_2^n, r_n + \frac{\Delta t}{2}l_2^n\right) \quad (4.52)$$

$$i_4^n = g_1(t_n + \Delta t, V_n + \Delta t i_3^n, \gamma_n + \Delta t j_3^n, h_n + \Delta t k_3^n, r_n + \Delta t l_3^n) \quad (4.53)$$

$$j_4^n = g_2(t_n + \Delta t, V_n + \Delta t i_3^n, \gamma_n + \Delta t j_3^n, h_n + \Delta t k_3^n, r_n + \Delta t l_3^n) \quad (4.54)$$

$$k_4^n = g_3(t_n + \Delta t, V_n + \Delta t i_3^n, \gamma_n + \Delta t j_3^n, h_n + \Delta t k_3^n, r_n + \Delta t l_3^n) \quad (4.55)$$

$$l_4^n = g_4(t_n + \Delta t, V_n + \Delta t i_3^n, \gamma_n + \Delta t j_3^n, h_n + \Delta t k_3^n, r_n + \Delta t l_3^n) \quad (4.56)$$

Finalment, el valor de les magnituds en t_{n+1} és:

$$V_{n+1} = V_n + \frac{\Delta t}{6} (i_1^n + 2i_2^n + 2i_3^n + i_4^n) \quad (4.57)$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \frac{\Delta t}{6} (j_1^n + 2j_2^n + 2j_3^n + j_4^n) \quad (4.58)$$

$$h_{n+1} = t_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4^n) \quad (4.59)$$

$$r_{n+1} = r_n + \frac{\Delta t}{6} (l_1^n + 2l_2^n + 2l_3^n + l_4^n) \quad (4.60)$$

4.4 Càcul de variables derivades

Una vegada obtingudes les variables principals del problema, i.e., h , V , γ , t i r , és necessari calcular altres magnituds derivades d'aquestes i de les condicions atmosfèriques.

En el cas de l'acceleració, s'utilitza un esquema de segon ordre [12], definit per

$$a_n = \left(\frac{dV}{dt} \right)_n = \frac{V_{n+1} - V_{n-1}}{t_{n+1} - t_{n-1}}, \quad 1 \leq n \leq N \quad (4.61)$$

Com s'observa, l'acceleració no està definida per $n \in \{0, N+1\}$. En aquests casos, es pot utilitzar una diferència “endavant” o “endarrere”, donades per:

$$a_0 = \frac{V_1 - V_0}{t_1 - t_0} \quad (4.62)$$

$$a_{N+1} = \frac{V_{N+1} - V_N}{t_{N+1} - t_N} \quad (4.63)$$

No obstant, aquestes són aproximacions de primer ordre que redueixen la precisió donada per (4.61), [12]. Per aquest motiu, es considera que en aquests punts extrems l'acceleració no està definida.

Es considera el cas d'una variable escalar ϕ qualsevol que depèn de m variables $\sigma^1, \dots, \sigma^m$. Pel càcul de ϕ en el punt n , amb $0 \leq n \leq N+1$, s'empra el valor de les m variables en el mateix punt, i.e.,

$$\phi_n = \phi(\sigma_n^1, \dots, \sigma_n^m) \quad (4.64)$$

5 Condicions atmosfèriques a la Terra

Primerament, és important conèixer l'atmosfera que envolta la Terra. Aquesta atmosfera es divideix en diferents capes que presenten diferents propietats [13].

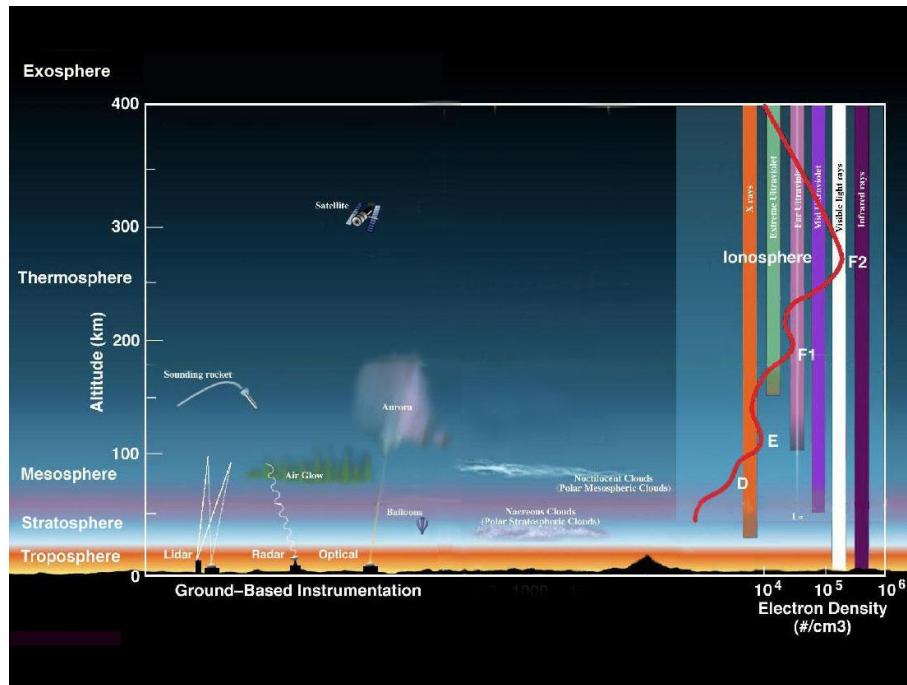


Figura 6 Capes atmosfèriques de la Terra. Crèdits: [13]

- **Troposfera**

La troposfera s'inicia a la superfície terrestre i s'estén entre 8 i 12 km d'alçada. Aquesta part de l'atmosfera és la més densa. Conté el 99% del vapor d'aigua del planeta. A la troposfera, les temperatures solen disminuir a mesura que s'augmenta l'alçada, ja que la major part de la calor que es troba a la troposfera es genera per la transferència d'energia a partir de la superfície de la Terra. La troposfera és la capa atmosfèrica més densa, comprimida pel pes de la resta de l'atmosfera per sobre d'aquesta. Gairebé tot els fenòmens meteorològics ocorren en aquesta regió.

- **Estratosfera**

L'estratosfera comença just per sobre de la troposfera i s'estén fins a 50 km d'alçada. A l'estratosfera s'ubica la famosa capa d'ozó de la Terra, que protegeix als éssers vius de les radiacions ultraviolades del Sol. A causa de la radiació ultraviolada, la temperatura augmenta amb un augment d'alçada.

- **Mesosfera**

La mesosfera s'inicia just per sobre de l'estratosfera i s'estén fins a 85 quilòmetres d'alçada. La temperatura a la mesosfera disminueix progressivament amb l'altitud. De fet, la part superior d'aquesta capa és la capa amb menor temperatura que es troba dins del sistema terrestre, amb una temperatura mitjana d'uns -85°C . La majoria de meteors es cremen en aquesta capa atmosfèrica.

- **Termosfera**

La termosfera comença just per sobre de la mesosfera i s'estén fins a 700 km d'alçada. En aquesta capa, les temperatures augmenten amb l'altitud a causa de la baixa densitat de molècules d'aire. Aquesta capa està exempt de vapors i de núvols. En aquesta capa es produeixen els fenòmens d'aurora boreals i l'aurora austral. L'Estació Espacial Internacional orbita a la termosfera.

- **Exosfera**

Situada entre uns 700 i 10000 km sobre la superfície terrestre. L'exosfera és la capa més alta de l'atmosfera terrestre i, a la part superior, es fusiona amb el vent solar. La densitat de molècules en aquesta capa és extremadament baixa de manera que aquesta capa ja no es comporta com un gas sinó que les partícules s'escapen a l'espai. La majoria de satèl·lits terrestres orbiten a l'exosfera.

A continuació, s'elaboraran les diferents distribucions de pressió, temperatura i densitat a la Terra. Posteriorment, serviran de suport per explicar els comportaments les diferents gràfiques.

5.1 Distribució de temperatura

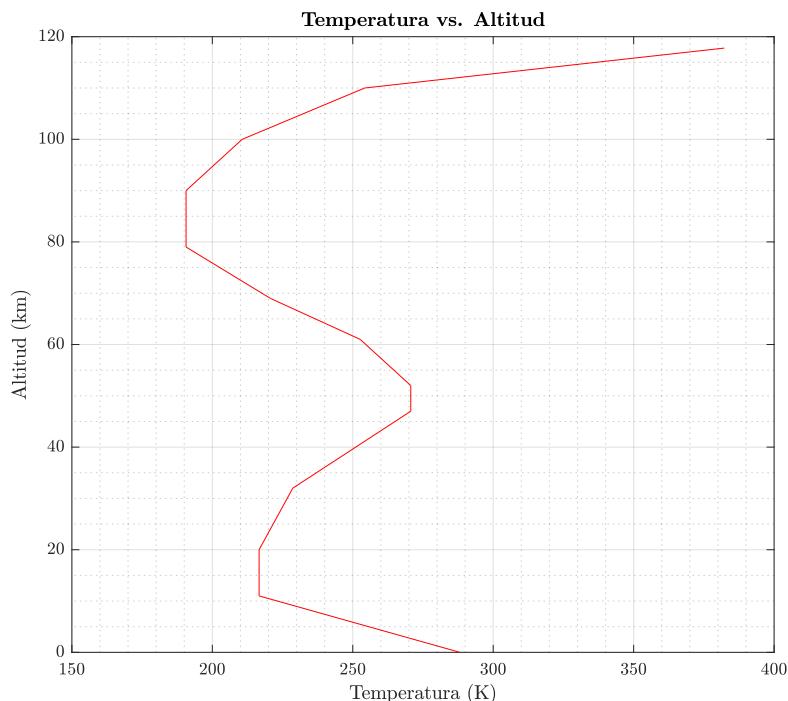


Figura 7 Representació gràfica de la distribució temperatura T respecte l'altura h a la Terra

La distribució de la temperatura segueix el model de capes desenvolupat en el fonament teòric 1 amb gradients lineals. La validesa del model es troba entre la superfície de la Terra i els 117776 m.

5.2 Distribució de pressió

A continuació es presenta el model de pressió de l'atmosfera terrestre.

Els primers 20 km són d'especial interès pel món aeronàutic i, per tant, es separarà la distribució en dos grups per a una millor visualització de l'evolució amb l'altitud.

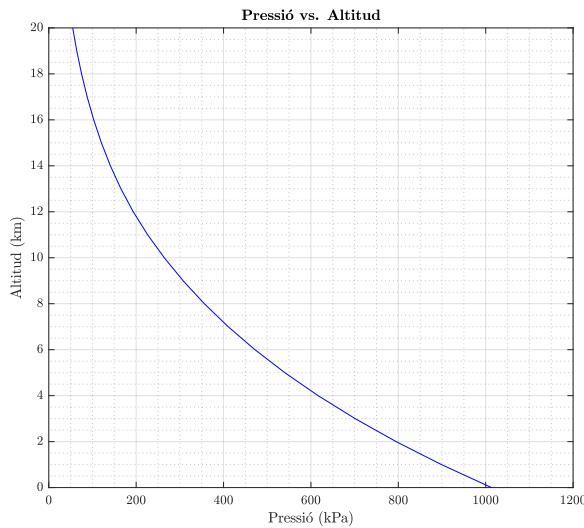


Figura 8 Representació gràfica de la distribució pressió p_∞ respecte l'altura h a la Terra en un rang de $0 < h < 20$ km

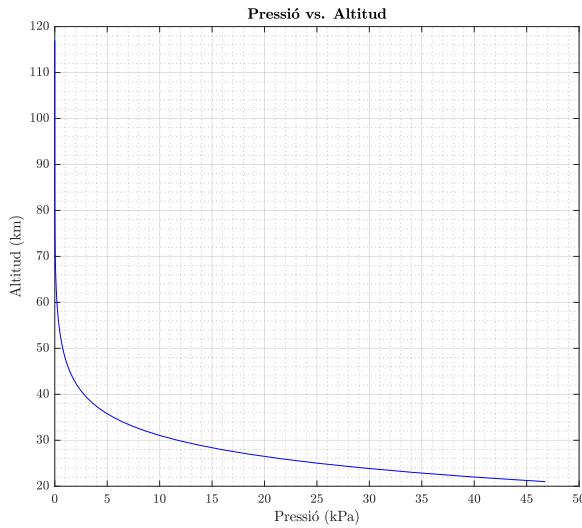


Figura 9 Representació gràfica de la distribució pressió p_∞ respecte l'altura h a la Terra en un rang de $20 < h < 120$ km

5.3 Distribució de densitats

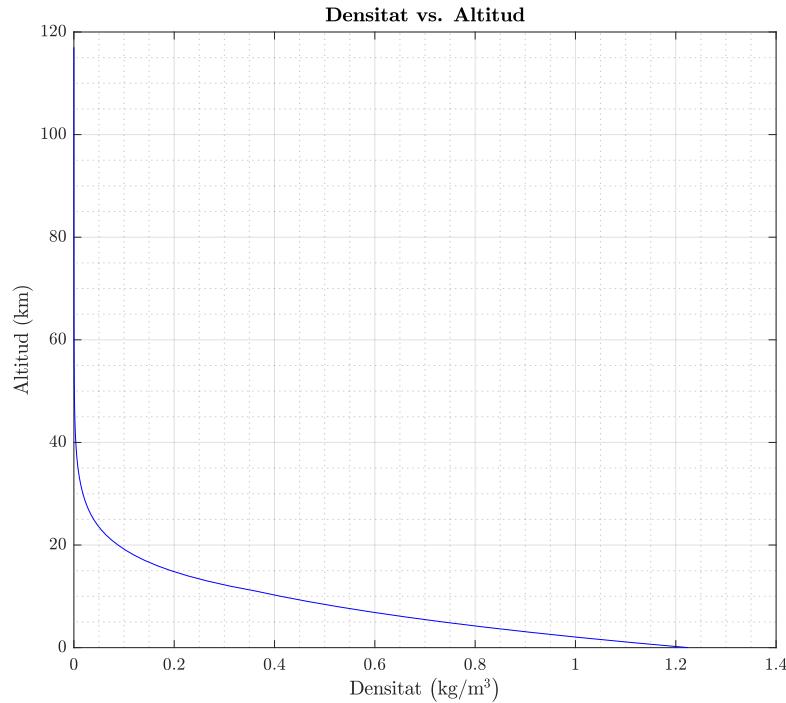


Figura 10 Representació gràfica de la distribució de densitat T respecte l'altura h a la Terra

En el cas de la densitat la variació respecte el nivell del mar ja és unes 10 vegades més petita a una altura de 20 km. A més a més, a partir dels 40 km és tant baixa que, en casos on no es requereixi molta precisió, es podria aproximar a la nul·litat.

6 Condicions atmosfèriques a Mart

El procediment seguit no és només vàlid per a la Terra. Seguint un procediment similar amb l'atmosfera marciana, es poden obtenir totes les gràfiques. Com a exemple, a continuació es calculen les propietats termodinàmiques a partir de [14].

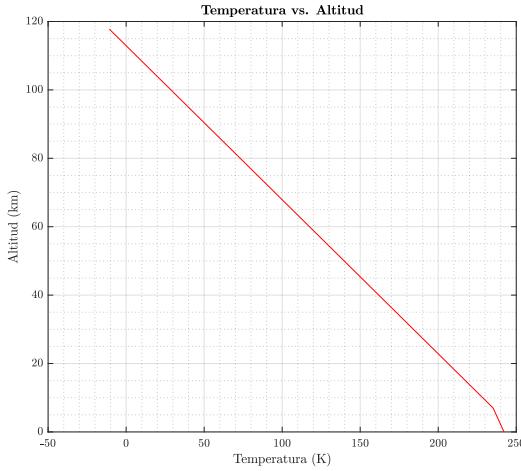


Figura 11 Distribució de temperatura

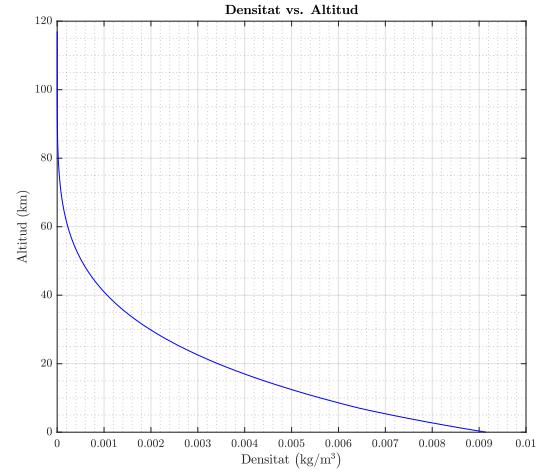


Figura 12 Distribució de densitats

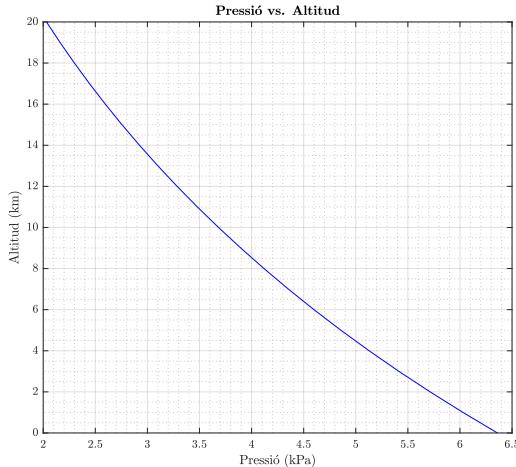


Figura 13 Distribució de pressió 0 – 20 km

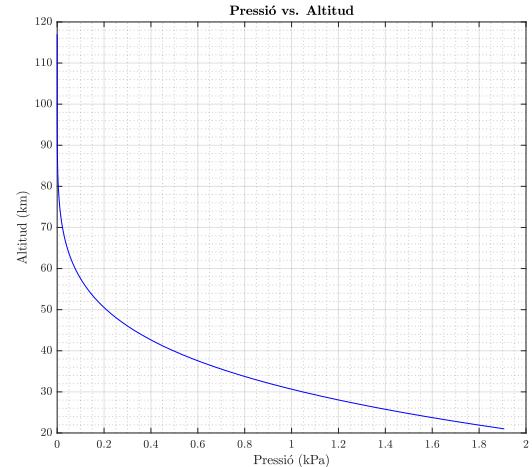


Figura 14 Distribució de pressió 20 – 120 km

Les distribucions de temperatura i pressió a Mart es recullen segons [15]:

- Per $h > 7000$ m

$$T = -23.4 - 0.00222h$$

$$P = 0.699 * \exp(-0.00009h)$$

- Per $h \leq 7000$ m

$$T = -31 - 0.000998h$$

$$P = 0.699 * \exp(-0.00009h)$$

7 Entrada balística a la Terra

7.1 Gràfica: Velocitat respecte Altitud

La gràfica 15 representa la velocitat del vehicle en front a la l'alçada. Si s'analitza amb detall aquesta gràfica, per una $\beta = 500$ per una alçada de prop dels $80 \cdot 10^3$ m a mesura que disminueix s'alçada la velocitat es manté gairebé constant a un valor d'aproximadament 7000 ms. A mesura que es disminueix l'alçada, la velocitat del vehicle segueix disminuint de forma bruscament en quan s'assoleix una alçada de $50 \cdot 10^3$ m on seguidament comença un tram en què aquesta relació pren una forma lineal. No és estrany aquest canvi de comportament ja que com s'ha vist en l'apartat 5, l'estratosfera se situa per sobre de la troposfera i s'estén fins a prop dels 50 km d'alçada.

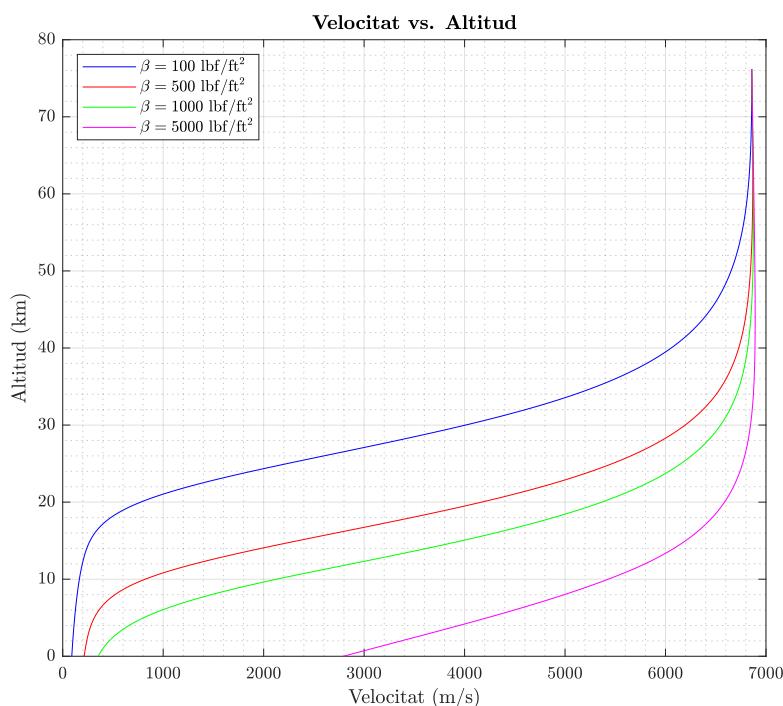


Figura 15 Representació gràfica de la velocitat v respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

A partir de la troposfera (~ 12 km) els valors de la velocitat per $\beta = 500$ i $\beta = 1000$ canvien de pendient i la velocitat sembla estabilitzar-se al voltant de 300m/s. En canvi, si el vehicle tingués un alt coeficient balístic, aquesta estabilitat no es presenta en cap moment i la velocitat a 0m és superior a 2800m/s, el qual suposa que no ha estat capaç e vehicle de frenar-se suficient i la inviabilitat d'aquesta β .

A mesura que disminueix el coeficient balístic, per una mateixa alçada la velocitat del vehicle amb major coeficient balístic és més gran que el del vehicle amb menor coeficient balístic tal i com s'ha comentat anteriorment. De fet, menor coeficient balístic es tradueix com un augment de l'àrea de la secció transversal o un augment de la resistència aerodinàmica C_D , llavors BC disminueix. De tal manera que la desacceleració és major.

7.2 Gràfica: Desacceleració respecte Altitud

La desacceleració és un cas especial d'acceleració pel qual només s'aplica a objectes que perdencen velocitat amb el temps. Per tant, és la velocitat amb què s'alenteix un objecte.

L'acceleració és un vector que indica la com varia la velocitat en magnitud amb un direcció concreta. En un cas de moviment unidimensional, s'utilitzen signes negatius i positius per indicar la direcció. Així, si els signes són negatius, l'objecte es va desaccelerant. La desacceleració és, per tant, l'acceleració amb un signe negatiu.

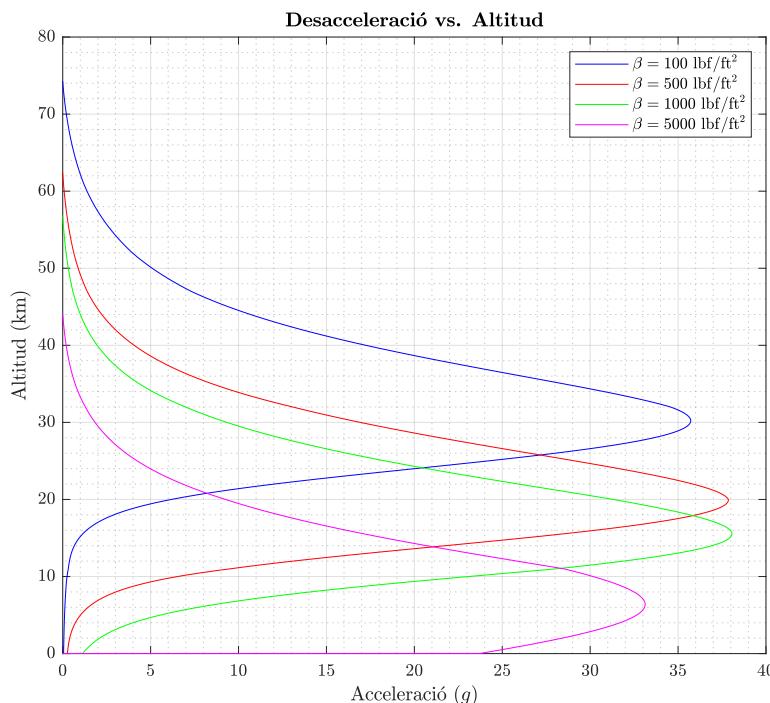


Figura 16 Representació gràfica de la desacceleració a respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

En la reentrada balística, noteu com a mida que minva l'alçada, el vehicle va adquirint desacceleració paulativament fins arribar a un pic en què la desacceleració és màxima. Aquest pic es troba a una alçada de ~ 30 km (pel cas de $\beta = 100$ coincideix just amb el punt d'inflexió de la gràfica anterior [Figura 15]). Si es continua disminuint l'alçada, s'observa com la desacceleració continua decaient tendint cada cop cap a un valor de desacceleració nul·la.

Tanmateix, és interessant destacar que, si s'augmenta el coeficient balístic, el màxim de desacceleració es trasllada cada cop a una alçada menor. Aquest fenomen coincideix amb el resultat de la gràfica 15 i el seu significat físic s'explica perquè en augmentar el coeficient balístic, és a dir, una disminució del C_D i/o de l'àrea S significa que el coeficient balístic β augmenta i per conseqüent, la desacceleració del vehicle disminueix. Cal destacar també com per una $\beta = 5000$, la desacceleració màxima és més petita que els casos de menor β , la qual cosa és coherent perquè indica que li costa més frenar-se al vehicle.

7.3 Gràfica: Pressió dinàmica respecte alçada

La pressió es defineix com una força per àrea d'unitat. Quan s'exerceix una força sobre un objecte, aquesta força s'aplica sobre una superfície en concret. La pressió relaciona aquestes dues variables. En el cas de fluids, són les molècules d'aire que exerceixen una pressió sobre la superfície considerada. Cal distingir entre dos tipus de pressió:

- Pressió estàtica: És la pressió aplicada per l'aire i actua de forma normal a la superfície del cos.
- Pressió dinàmica: És la pressió associada a l'energia cinètica de l'aire que impacta sobre la superfície considerat. Aquesta es pot expressar com:

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (7.1)$$

Quan un fluid es troba en moviment, la inèrcia del moviment provoca un increment addicional de la pressió estàtica al xocar sobre la secció perpendicular al moviment. La pressió dinàmica depèn de la velocitat i la densitat del fluid.

A continuació es mostra la gràfica 17 associat a la pressió dinàmica del vehicle respecte l'alçada. En primer lloc, cal destacar l'ordre de magnitud de la pressió dinàmica, la qual es troba al voltant de $\sim 10^6$.

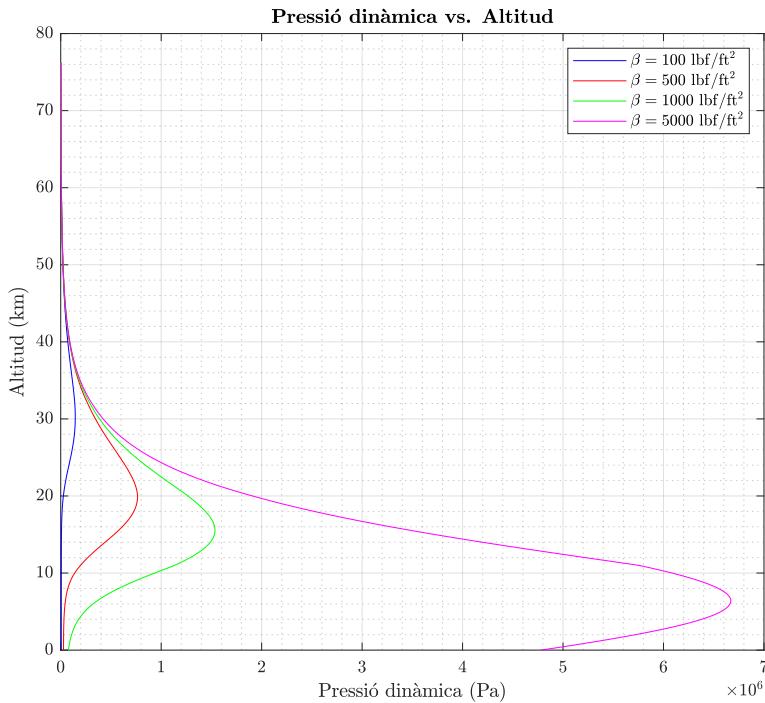


Figura 17 Representació gràfica de la pressió dinàmica q respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

Pel que fa referència a la pressió dinàmica, en enginyeria aeroespacial existeix un punt on es maximitza l'estrés aerodinàmic en una nau espacial en el vol atmosfèric. En altres paraules, sota el punt de màxima Q, l'efecte de l'acceleració de la nau espacial per crear més pressió dinàmica s'imposa a l'efecte de la reducció de densitat de l'aire. Per tant, arriba un punt en què la relació és màxima. Passant el punt màxim, aquesta es redueix en la mesura que es redueix la velocitat.

7.4 Gràfica: Mach respecte Altitud

Respecte a la gràfica del Mach, el comportament d'aquest coeficient adimensional ve descrit per la següent relació:

$$M = \frac{v}{a} \quad (7.2)$$

on M és el número de Mach, v és la velocitat del vehicle i a és la velocitat del so. La velocitat del so a és un paràmetre que depèn de diversos variables com el tipus de medi en què es propaga el so i la temperatura del medi de tal forma que, partint de l'equació de la conservació de la quantitat de moviment s'arriba a:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Assumint que el gas és caloríficament perfecte. Per tal cas, la relació isentròpica és:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^\gamma$$

Es pot obtenir que, la velocitat del so:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

A primera vista l'equació superior sembla indicar que la velocitat del so depèn de la pressió i densitat, tanmateix, introduint l'equació d'estat pels gasos ideals $P = \rho R_g T$:

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (7.3)$$

L'expressió resultant es tracta de la relació de la velocitat del so per un gas caloríficament perfecte i és funció només de la temperatura T i del tipus de medi en què viatja. [16].

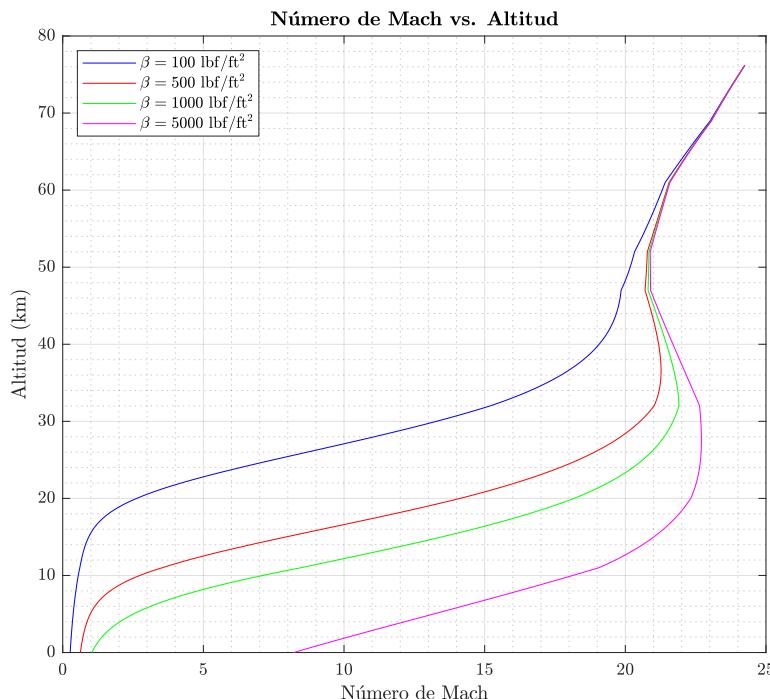


Figura 18 Representació gràfica del número de Mach M respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

De tal forma que, per una alçada del voltant dels 80 km, ens situem sobre la capa de la mesosfera on la temperatura i amb l'alçada. Segons la gràfica 7, aquesta és la capa amb menys temperatura amb un 190 K. Relacionant aquest número adimensional amb la velocitat, és fàcil deduir que s'arribin a números de Mach elevats de magnituds superiors a $M = 20$. Vegeu que en aquesta alçada, la velocitat de reentrada del vehicle és molt elevat i la temperatura del medi molt baix, amb la qual cosa, la relació $\frac{v}{a}$ es dispara. Al voltant de l'alça de 30 km es produeix un canvi i el número de Mach disminueix intensament en qüestió de 20 km i passa a prendre un valor d'entre $M = 5$ i $M = 10$. En aquest tram la caiguda del número de Mach pren la mateixa forma que la caiguda de la velocitat doncs, la influència del canvi de temperatures és menyspreable en front al canvi de velocitats.

7.5 Gràfica: Reynolds respecte Altitud

Si un objecte es desplaça a través de l'atmosfera, les molècules de gas de l'atmosfera properes a l'objecte es veuen pertorbades per aquest. En aquesta interacció es generen forces aerodinàmiques entre el gas i l'objecte. El nombre de Reynolds expressa la relació de forces inercials (forces associades a la resistència al moviment) amb les forces viscoses (forces adherents) [17]:

$$Re = \frac{\text{Forces inercials}}{\text{Forces viscoses}} \quad (7.4)$$

La magnitud d'aquestes forces depenen de la forma de l'objecte d , la velocitat de l'objecte v , la densitat del fluid que interacciona amb l'objecte i d'altres dues propietats com són la viscositat cinemàtica μ .

Anàlogament, partint d'un anàlisi detallat de l'equació de la conservació de la quantitat de moviment. Les forces inercials es caracteritzen pel producte de la densitat ρ per la velocitat u i pel gradient de la velocitat $\frac{\partial V}{\partial x}$. Les forces viscoses es caracteritzen pel coeficient de viscositat dinàmica μ pel segon gradient de la velocitat $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. El número Reynolds Re es converteix llavors en:

$$Re = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Desenvolupant, el gradient de la velocitat és proporcional a la velocitat dividida per una longitud característica L . Paral·lelament, la segona derivada de la velocitat és proporcional a la velocitat dividida pel quadrat la longitud característica, donant:

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (7.5)$$

En quant al comportament del número de Reynolds, a la mesosfera ($\sim 50 - 85$ km) la densitat de d'aire és molt reduïda. L'aire de la mesosfera té una densitat extremadament baixa: el 99.9% de la massa de l'atmosfera es troba per sota de la mesosfera. Com a resultat, el número de Reynolds és relativament baix en comparació amb les altres corbes. Nogensmenys, en un anàlisis detallat el valor del Reynolds més reduït de tots els coeficients balístics, això és, $\beta = 100$ es troba a l'ordre de $4 \cdot 10^5$. Aquest valor és similar per la resta de corbes a una alçada elevada. Tot seguit, aquesta tendència es veu afectat per l'imminent augment de la densitat que passa de ser d'aproximadament $\sim 0.0020 \text{ kg/m}^3$ a augmentar en aproximadament un 200% fins a un valor de $\sim 0.3639 \text{ kg/m}^3$ a la troposfera (~ 11 km).

A mesura que augmenta el coeficient balístic, com s'ha vist amb les gràfiques del Mach i velocitat respecte l'altura. La velocitat també augmenta. Com s'ha explicat anteriorment, en augmentar el coeficient balístic, es redueix el C_D . Aleshores, degut la pèrdua de la força de resistència aerodinàmica els efectes de fregament entre el vehicle i els gasos també disminueixen. En conseqüència, aquest fenomen afecta negativament a la velocitat doncs perilla la frenada. Anàlogament a 17, el número de Reynolds també depèn de la densitat i el quadrat de la velocitat, tot introduint la viscositat dinàmica.

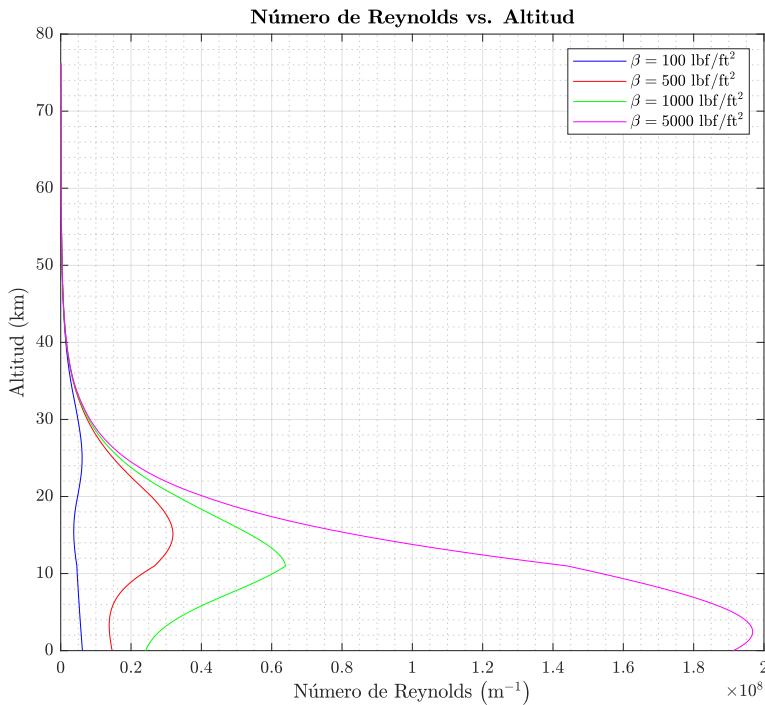


Figura 19 Representació gràfica del número de Reynolds Re respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

7.6 Gràfica: Pressió d'estancament respecte Altitud

Es defineix la temperatura d'estancament com la temperatura que tindria un fluid si es portés al repòs ($v = 0 \text{ m/s}$) adiabàticament. La pressió d'estancament és la pressió que obtindria el fluid si es portés aquest isentropípicament ($dS = 0$) fins al repòs (adiabàtic i reversible).

L'ús de propietats d'estancament com la temperatura o la pressió d'estancament proporcionen una mesura de la quantitat d'energia total o capacitat d'accelerar el flux disponible. Les propietats d'estancament no són les “reals” (exceptuant els llocs en què la velocitat sí són nules). Les propietats estàtiques són les reals. La densitat de l'aire, la velocitat del so depenen de les propietats estàtiques locals.

El tub de pitot és instrument usat en aviació per mesurar les pressures estàtiques i dinàmiques. Coneixent aquestes dues pressures és fàcil trobar la pressió d'estancament. Aplicant l'equació de Bernouilli [18],

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Aplicant en una línia de corrent en els punts A i B s'obté:

$$\underbrace{P_1}_{\substack{\text{Pressió} \\ \text{estàtica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_1^2}_{\substack{\text{Pressió} \\ \text{dinàmica}}} = \underbrace{p_0}_{\substack{\text{Pressió} \\ \text{d'estancament}}} \quad (7.6)$$

Particularment, la pressió estàtica en el nostre problema es tracta de la pressió atmosfèrica a cada alçada la qual segueix les Figures 8 i 9. La pressió dinàmica, en canvi, és la associada al moviment de les partícules de 'aire al xocar amb el vehicle. Aleshores, la pressió total d'estancament és la suma de les dues anteriors. Tanmateix, aquest és només és vàlid per règim incompressible. En canvi, per un règim de flux compressible, això és, per un $M > 0.3$ cal reformular les expressions.

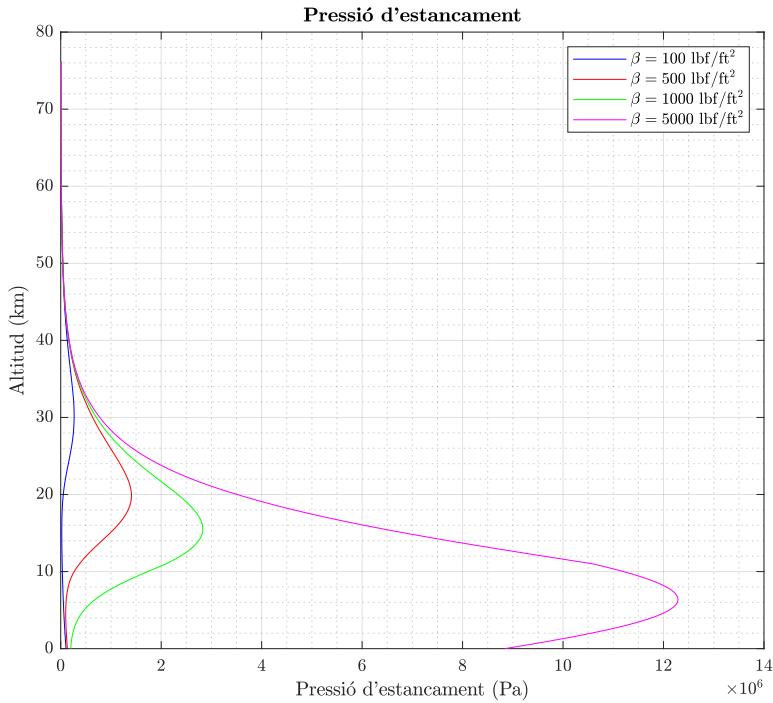


Figura 20 Representació gràfica de la pressió d'estancament P_t respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

Finalment, la pressió d'estancament es tracta d'una propietat intensiva del fluid i dóna a conèixer del nivell d'energia d'aquest. A més a més, alhora és un indicador del nivell de compressió del fluid.

A l'hora d'aplicar aquesta definició, cal diferenciar quin règim de treball s'està considerant [19].

- Règim Subsònic [$M < 1$]

En aquest règim es fa servir l'expressió del flux per un flux isentròpic. Partint de l'equació de conservació de l'energia:

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (7.7)$$

Aplicant les relacions isentròpiques,

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \quad \text{i} \quad T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$$

S'obté que la pressió d'estancament s'expressa de la següent forma:

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (7.8)$$

- Règim supersònic i hipersoníic [$M \geq 1$]

En règim supersònic o sònic, cal considerar la possibilitat de la generació d'una ona de xoc normal. Aquest valors són obtinguts a partir de les equacions *Rankine-Hugoniot* i les relacions isentròpiques:

$$p_{\text{shock}} = p_\infty \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_\infty^2 - 1) \right] \quad (7.9)$$

Introduint l'expressió anterior en les equacions de *Rankine-Hugoniot* per règim sònic i supersònic

la pressió d'estancament p_0 [8]:

$$p_0 = p_{\text{shock}} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}{\gamma M_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (7.10)$$

Com es pot observar en les gràfiques, el comportament global de les corbes s'assimila molt a la corba de pressions dinàmiques. No obstant, fixant-nos amb l'escala horitzontal en comparació, existeix un *offset*. Com es pot observar en la gràfica, la dependència obtinguda no només depèn de la del Mach de vol, i en conseqüència de la temperatura sinó que també cal distingir entre un règim subsònic o supersònic, doncs a partir de règim supersònic pot existir ones de xoc. A mesura que s'augmenta el com eficient balístic, el número de Mach és creixent, de forma que els valors de pressió d'estancament són també més elevats, fins i tot arribar a l'ordre de $\sim 10^7$ en el cas de $\beta = 5000$, el qual clarament indica la forta contribució d'ones de xoc.

7.7 Gràfica: Entalpia d'estancament respecte Altitud

La entalpia és una propietat d'un sistema termodinàmic que es igual a l'energia interna més el producte de la pressió pel volum.

$$H(S, p) = U + pV \quad (7.11)$$

Aquesta propietat representa una mesura de la quantitat d'energia del sistema. A més a més, es tracta d'una funció d'estat amb propietats extensives, és a dir, es poden sumar diversos subsistemes modificant el valor final en funció de la grandària.

$$H = \sum_k H_k \quad (7.12)$$

on H es l'entalpia total dels subsistemes, k es refereix al nombre de subsistemes i H_k representa cada subsistema.

La unitat de mesura de l'entalpia en el sistema internacional és el Joule [J]. Cal també recalcar que en sistema imperial s'utilitzen també les Unitats Tèrmiques Britàniques *BTU* i les calories. En [2] s'utilitzen les BTU, que es defineixen com la quantitat de calor necessari per augmentar una lliura d'aigua un gran Fahrenheit. Encara que l'entalpia com a valor únic ja és de força utilitat, a vegades es prefereix comptabilitzar el canvi en l'entalpia a pressió o volum constant per a simplificar l'expressió. L'entalpia total, no es pot mesurar directament i sempre s'utilitza un punt de referència ja que només el canvi té un significat físic.

L'equació de l'energia per un flux estacionari en règim permanent sense calors externs i energies internes es pot escriure com:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (7.13)$$

on la h és l'entalpia que es pot reescriure com la capacitat calorífica a pressió constant C_p per la temperatura i on T_0 representa la temperatura d'estancament:

$$C_p T + \frac{v^2}{2} = \underbrace{C_p T_0}_{v_2 = 0} \quad (7.14)$$

Una altra forma d'expressar la relació anterior a partir de diferencials on cap valor es constant, ja que les propietats termofísiques dependran de l'altitud de vol.

$$dH = C_p \cdot dT + V \cdot dp \quad (7.15)$$

Els valors del coeficient C_p es poden aproximar utilitzant únicament la temperatura a partir dels coeficients NASA. A continuació s'utilitzaran les taules extretes de [20] per a aire sec comprès entre 100 K i 2500 K:

$$C_p = 1034.09 - 2.849 \cdot 10^{-1}T + 7.817 \cdot 10^{-4}T^2 - 4.971 \cdot 10^{-7}T^3 + 1.077 \cdot 10^{-10}T^4 \quad \left(\frac{J}{kgK} \right) \quad (7.16)$$

Finalment, s'obté l'equació a partir de les variables termofísiques de l'atmosfera amb les aproximacions corresponents:

$$h_0 = C_p \cdot T + \frac{v^2}{2} \quad (7.17)$$

On h_0 es l'entalpia d'estancament, una forma de generalitzar el concepte d'entalpia quan es treballa amb fluids amb alta energia cinètica, és a dir, amb velocitats no despreciables, com per exemple en el flux a través de turbines de gas o motors d'aviació. El balanç d'energia del fluid és considera de forma adiabàtica i reversible (isentròpicament), fins a velocitat nul·la.

La variació de l'entalpia d'estancament amb els coeficients balístics és molt notable. Per a coeficients baixos l'entalpia d'estancament es redueix més lentament que per a coeficients elevats, principalment a causa de l'altitud a partir de la qual es comença a variar el valor entalpic. Les pendents de decreixement

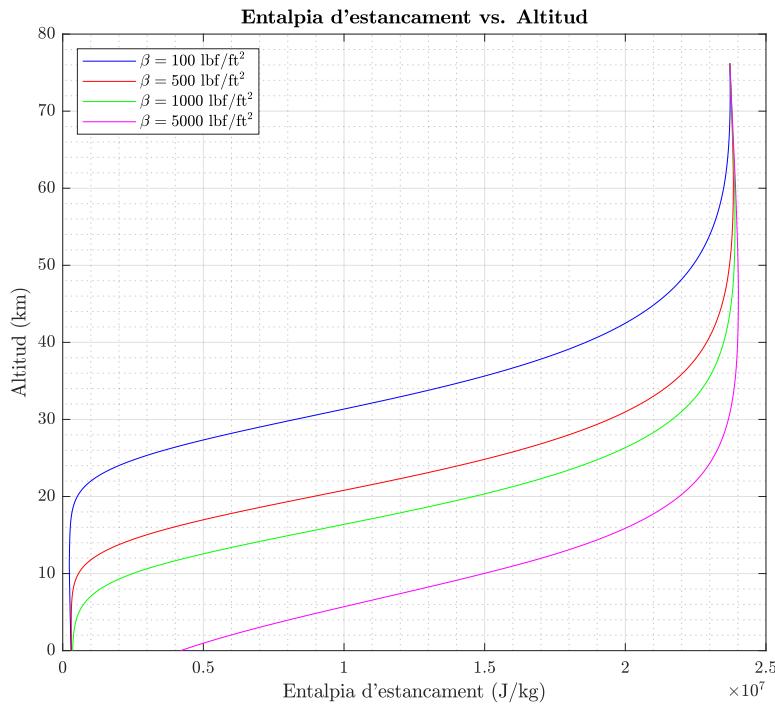


Figura 21 Representació gràfica de l'entalpia d'estancament h_0 respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

per a qualsevol coeficient balístics són constants entre els $0.5 \frac{J}{kg}$ i els $2 \frac{J}{kg}$. Si es referencia a l'altitud a nivell del mar, les β entre 100 i 1000 finalitzen en la mateixa posició mentre que per a $\beta = 5000 \frac{lbf}{ft^2}$, com que l'entalpia d'estancament comença a decréixer a una altura més baixa, llavors arriba al terra amb un valor aproximat de $h_o = 0.4 \frac{J}{kg}$.

7.8 Gràfica: Transferència de calor d'estancament respecte Altitud

L'energia cinètica d'un vehicle en reentrada es dissipa transformant l'energia tèrmica (calor) a la vegada que el sistema desaccelera.

La transferència de calor en el punt d'estancament normalment s'aproxima a partir de mètodes numèrics. Un mètode molt utilitzat és el de Fay & Ridell (1958), que es pot veure en [2].

$$\dot{q}_w = \frac{0.763}{Pr_w^{0.6}} \cdot (\rho_e \mu_e)^{0.4} \cdot (\rho_w \mu_w)^{0.1} \cdot [(h_0)_e - h_w] \cdot \left[1 + (Le^{0.52} - 1) \frac{h_d}{(h_0)_e} \right] \cdot \left[\left(\frac{du_e}{dx} \right)_t \right]^{0.5} \quad (7.18)$$

Amb gairebé la mateixa precisió existeix el mètode simplificat de Sutton Graves, només valid per a la Terra i Mart, que s'utilitzarà per al càlcul del flux calorífic en [21]. És important recalcar que la validesa només s'aplica per a superfícies catalítiques. Existeixen altres expressions per a parets no catalítiques però no es tractaran.

$$q_s = k_{world} \left(\frac{\rho}{R_n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot V^3 \quad (7.19)$$

on ρ és la densitat, R_n és l'aspror, que es considera el d'una esfera de $radi = 0.03048m$, V és la velocitat, $k_{Earth} = 1.7415 \cdot 10^{-4}$ és la constant per a la Terra i $k_{Mars} = 1.9027 \cdot 10^{-4}$ és la constant per a Mart, ambdues en unitats del SI segons la NASA [21]. Tot i això, es important destacar que [2] utilitza unes constants similars que són $k_{Earth} = 1.83 \cdot 10^{-4}$ i $k_{Mars} = 1.89 \cdot 10^{-4}$ per a realitzar els càculs.

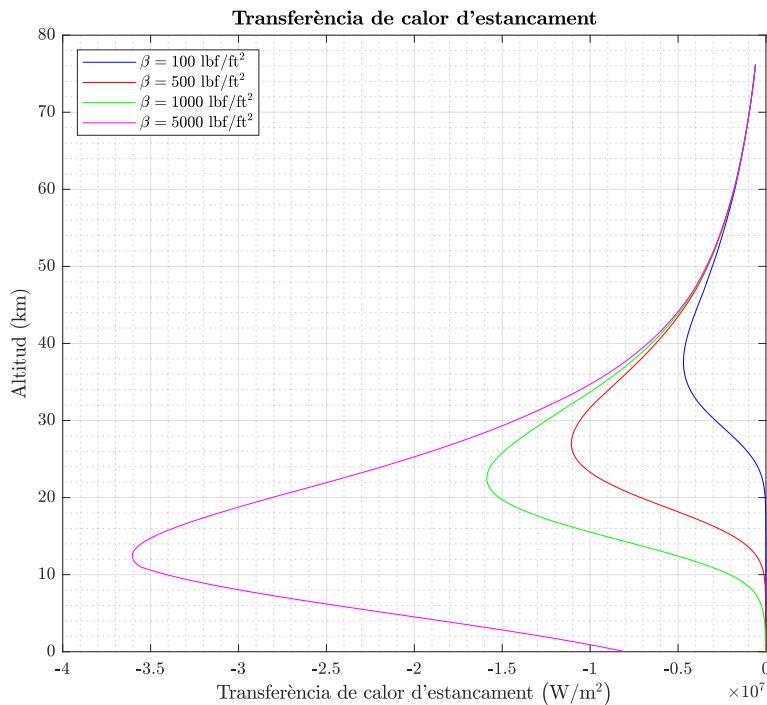


Figura 22 Representació gràfica de la transferència de calor d'estancament \dot{Q} respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

La transferència de calor d'estancament varia considerablement segons el coeficient balístic analitzat. Per a un $\beta = 100 \text{ lbf/ft}^2$, la \dot{Q} s'incrementa entre els 76 km i els 35 km i decreix fins a una transferència nula entre els 35 km i els 20 km. Per a la $\beta = 500 \text{ lbf/ft}^2$ es duplica la magnitud de la transferència de calor amb un màxim de $-1.2 \frac{W}{m^2}$ a una altitud de 26 km. De manera similar, per a la $\beta = 1000 \text{ lbf/ft}^2$ la posició de la màxima transferència es dóna a terme a una altitud més baixa amb un valor més alt de

calor d'estancament. Finalment, pel coeficient balístic màxim els valors es disparen a més del doble del cas anterior en la posició de 12 km amb una transferència de calor de $-3.6 \frac{W}{m^2}$.

7.9 Gràfica: Temps de reentrada respecte Altitud

El temps de reentrada respecte a l'altitud es gràfica en la Figura 23. En aquest cas, no és d'estranyar

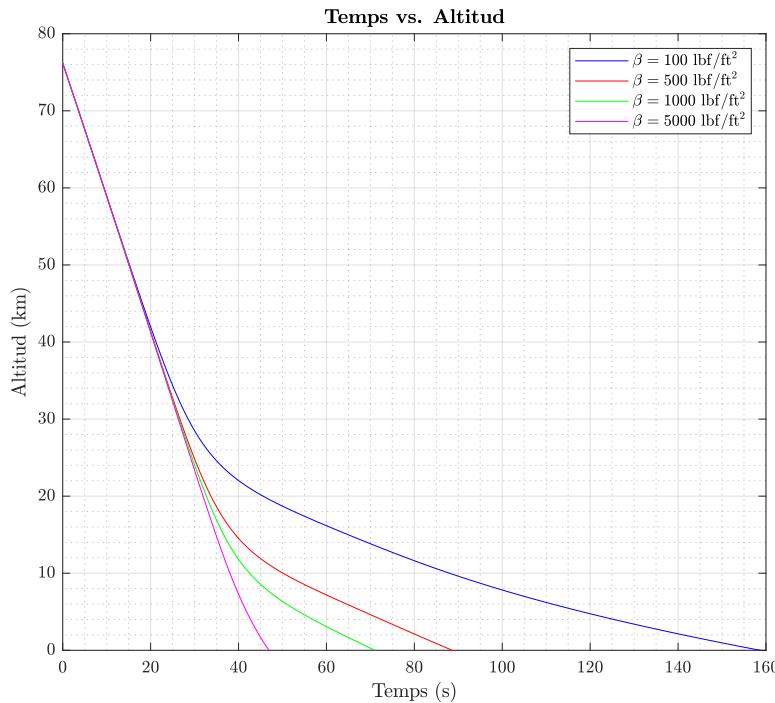


Figura 23 Representació gràfica del temps de reentrada t respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

que en augmentar el paràmetre del coeficient balístic β , la massa del vehicle s'imposa al terme del drag i l'àrea. Tot plegat, en un augment de β , disminueix el temps de reentrada arribant a valors de fins ~ 50 s per la $\beta = 5000$ i de fins 180 s per una $\beta = 100$. No obstant, també cal remarcar que aquesta dependència presenta un caràcter lineal de de l'inici de $h = 76.2$ km fins una alçada d'uns 25 – 15 km on es produeix un canvi en la pendent a una pendent més suau tot i conservant la linealitat. La velocitat mitja en la primera regió és entorn a:

$$v_{\text{mitjà}} = \frac{80 \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^3}{35} = 1857.1439 \text{ ms} = 6685.7149 \text{ km/s}$$

Tanmateix, avaluant la velocitat instantània, el valor mitjà s'allunya del valor de velocitat instantània real que es mostra en la gràfica 15. Doncs la velocitat associat a les alçades de 20 km fins als 76.2 km superen els 4000 m/s (exceptuant $\beta = 100$). La conclusió que s'estreu d'aquest resultat és coherent amb la definició de coeficient balístic.

7.10 Gràfica: Abast respecte Altitud

L'abast és la distància màxima horitzontal que pot assolir un objecte que es llença a partir d'una determinada altitud inicial. En aquest cas tenim una reentrada d'un objecte balístic com el que utilitzaven els primers ICBM (Inter-Continental Ballistic Missiles).

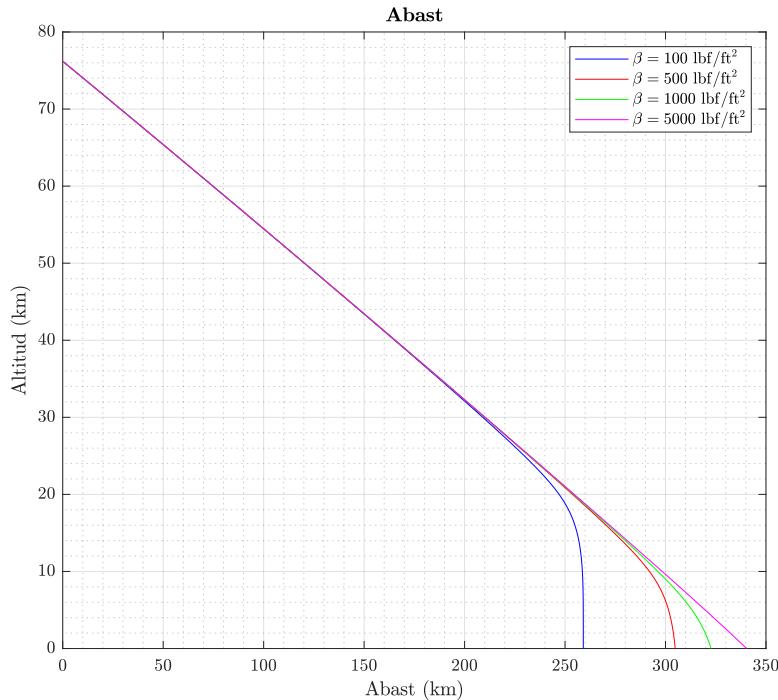


Figura 24 Representació gràfica del abast Δx respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

Fins a una altura de 25 km, l'abast és indiferent al coeficient balístic. A partir d'aquest punt, una reentrada amb $\beta = 100 \text{ (lbf/ft}^2)$ descendeix de manera gairebé vertical fins els 260 km de distància respecte la posició inicial. Per a valors entre $\beta = 500 \text{ (lbf/ft}^2)$ i $\beta = 5000 \text{ (lbf/ft}^2)$, aquesta separació es duu a terme a una altura 10 km inferior. Així, per a $\beta = 500 \text{ (lbf/ft}^2)$, $\beta = 1000 \text{ (lbf/ft}^2)$ i $\beta = 5000 \text{ (lbf/ft}^2)$, els valors d'abast són, respectivament, 305 0km, 320 km i 340 km.

7.11 Gràfica: Energia dinàmica respecte Altitud

La energia dinàmica és una relació entre la pressió dinàmica i la velocitat d'un cos tal que:

$$\text{Energia Dinàmica} = \frac{\rho \cdot V^3}{2} \quad (7.20)$$

En una reentrada, la velocitat és el terme més important de l'energia dinàmica a causa del seu exponencial cúbic.

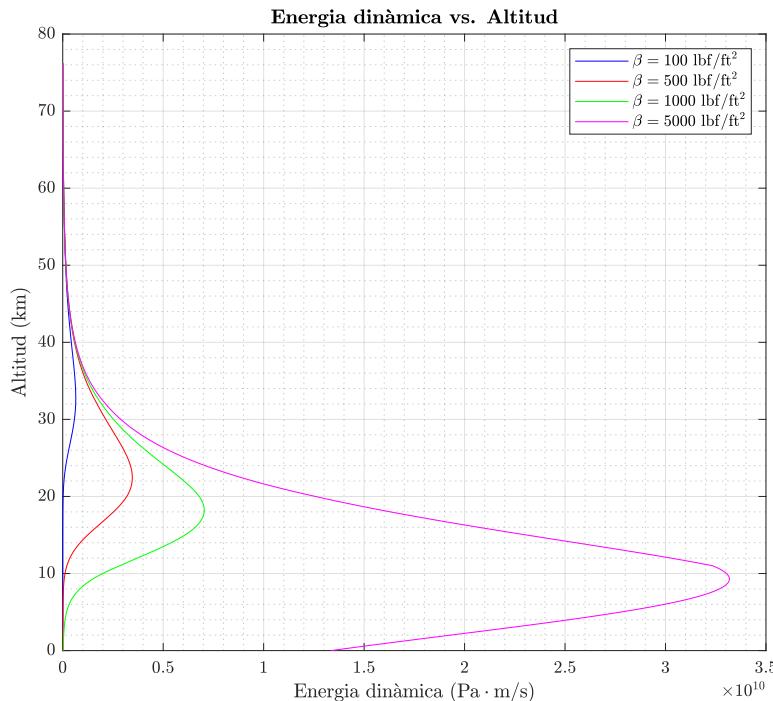


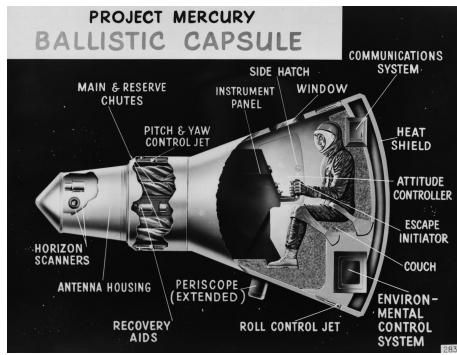
Figura 25 Representació gràfica de l'energia dinàmica E respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

Per a β entre 100 i 500 $\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2}$ l'energia dinàmica es troba entre l'interval de 0 i $0.35 \cdot 10^{10} \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}}{\text{s}}$. Per a $\beta = 1000$ hi ha un màxim de $0.7 \cdot 10^{10} \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ a una altura de 18 km. Seguint la tendència, per a $\beta = 5000$ els valors gairebé es multipliquen per 5 respecte a la β anterior arribant a $3.3 \cdot 10^{10} \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

A partir dels coeficients balístics analitzats, es veu una tendència a decreixir de la posició de màxima energia dinàmica quant més gran és el coeficient balístic, amb una pèrdua d'energia considerable un cop es passa aquest valor.

8 Cas d'entrada balística a la Terra: Càpsula Mercury

El projecte Mercury va ser el primer programa de vol espacial humà dels Estats Units. Va funcionar des del 1959 fins al 1963 amb dos objectius: posar un humà en òrbita al voltant de la Terra i realitzar-ho abans que ho aconseguís la Unió Soviètica, com a part de la carrera espacial. Aquesta càpsula va ser un èxit en la primera missió el 5 de maig de 1961 on Alan Shepard es va convertir en el primer nord-americà a l'espai en vol suborbital. No obstant això, la Unió Soviètica prèviament havia guanyat la carrera enviant a Yuri Gagarin a l'espai un mes abans. El *Friendship 7* va ser una càpsula d'un sol home amb forma de con amb un cilindre muntat a la part superior. De dos metres de llarg, 1.9 metres de diàmetre fixada a una torre d'escapament de 5.8 metres al cilindre de la càpsula. Per tal de d'evitar els efectes abrasius de la calor, es va cobrir amb un protector de calor ablatiu per protegir-lo contra la calor de 3000°C en la reentrada a l'atmosfera.



(a) Esquema de la càpsula Mercury. Crèdits: [22]



(b) Càpsula Mercury a l'espai. Crèdits: [23]

Per tal de fer un estudi detallat del comportament d'aquesta càpsula, calen conèixer les seves propietats:

- Pes $W = 11844.720 \text{ N}$
- Àrea de referència $A = 2.812 \text{ m}^2$
- Longitud de referència $L = 1.890 \text{ m}$
- Radi de punta (esfera) $R_N = 0.3048 \text{ m}$
- Coef. Sustentació $C_L = 0$
- Coef. Drag $C_D = 1.60$

Amb aquestes dades s'obté un coeficient balístic de $\beta = 54.98 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$ o en SI $\beta \approx 2632$.

- Alçada inicial $h_0 \approx 85344 \text{ m}$
- Velocitat inicial $v_0 = 7010.4 \text{ m/s}$
- Angle d'entrada $\gamma = 1.5^{\circ}$

Els resultats obtinguts es mostren a la Figura 27. Començant per la gràfica de la velocitat respecte l'altitud, el comportament segueix essent similar a l'anàlisi de la secció anterior. A mesura que disminueix en alçada, es va reduint la velocitat. A més, torna a evidenciar-se una zona lineal.

Pel que fa al temps de reentrada, la tendència de la corba es pot aproximar lineal i en qüestió de ≈ 6 minuts arriba a la Terra. Aquest comportament es respalda degut que té un coeficient balístic de només $\beta = 54.98$, quasi la meitat de la menor β de les gràfiques 23. Estant aquest temps en caiguda lliure no és estranyar que l'abast sigui de 1000 km.

El pic de desacceleració, en canvi, no arriba a als valors de $> 20g$ sinó que el seu màxim es troba a quasi $10g$. Que en comparació amb les dades oficials no s'allunyen massa dels $8 g$ que va patir John Glenn. Tot i això, posteriorment s'observarà que la reentrada sustentadora ofereix valors molt inferiors, la qual cosa per és un gran avantatge si la missió és tripulada.

Finalment, en relació al número de Mach, cal insistir en què la major part del trajecte és vol supersònic, i aquest disminueix progressivament amb l'alçada, de tal manera que és a patir de l'altura mitja de l'estratosfera quan la disminució creix de forma més aggressiva, tal i com s'ha comentat anteriorment 18.

8.1 Entrada balística de la càpsula Mercury "Friendship 7" a la Terra

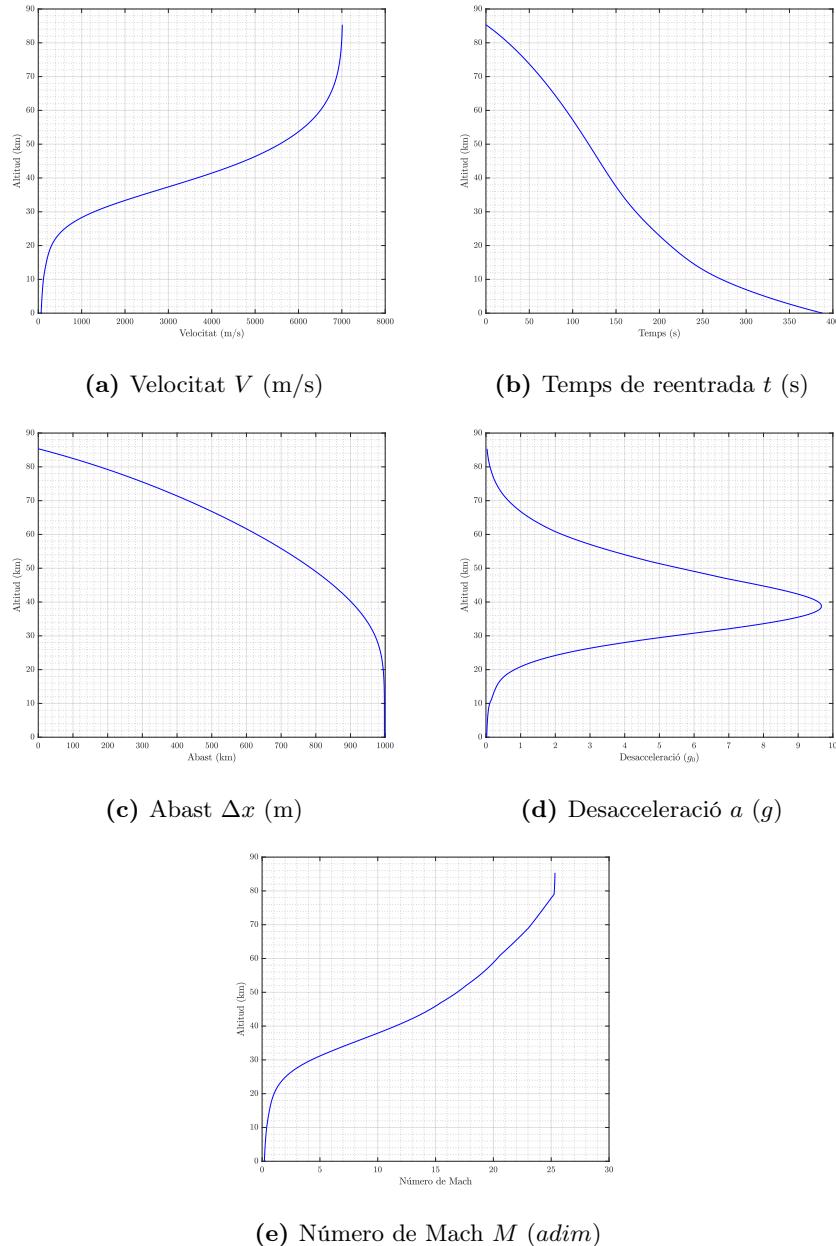


Figura 27 Trajectòria de reentrada balística a la Terra de la càpsula Mercury

Aquestes gràfiques s'obtenen particularitzant les entrades balístiques per les propietats específiques de la càpsula Mercury "Friendship" a partir de l'atmosfera USA 1976. Un important factor que es pot observar que el Coronel Glenn va estar subjecte a una càrrega de desacceleració per sobre de $8g$ durant un període de temps aproximat de 30 segons.

Aquesta va ser la raó principal que va promoure el desenvolupament de les reentrades sustentadores per a viatges espacials tripulats de manera que la càrrega de g durant períodes llargs de temps.

9 Entrada sustentadora a la Terra

Com s'ha explicat anteriorment, el cas de l'Space Shuttle, és un exemple de vehicle en què usa una reentrada sustentadora.

Així doncs, a continuació s'estudiaran trajectòries d'entrada representatives a la Terra per tres valors inicials de l'angle d'entrada γ_0 (0.1° , 1.0° i 2.5°). Les condicions inicials de la reentrada són:

- Alçada inicial $h_0 = 76200$ m
- Velocitat inicial $v_0 = 7010.4$ m/s

Els paràmetres disseny de l'Space Shuttle són els següents:

- Pes $W = 889644$ N
- Àrea de referència $A = 819.912 \text{ m}^2$
- Longitud de referència $L = 32.766$ m
- Radi de punta (esfera) $R_N = 0.3048$ m
- Coef. Sustentació $C_L = 0.84$
- Coef. Drag $C_D = 0.84$

Amb aquestes dades, el coeficient balístic resultant és de $\beta = 4237.401 \text{ N/m}^2$ ($\beta = 88.5 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$ en Sistema Imperial). Els càlculs s'han realitzat amb el coeficient de reentrada de $\beta = 88.5$ per obtenir els càlculs amb més precisió. La transferència de calor per una esfera amb nas radial de $R_N = 0.3048$ usant la correlació de Sutton-Graves. El número de Reynolds es calcula amb la longitud de referència superior, aquesta longitud és bàsicament la longitud de l'Space Shuttle. Tal i com es mostra en les Figures 28, per una eficiència aerodinàmica de l'ordre de la unitat és molt sensible a l'angle d'entrada.

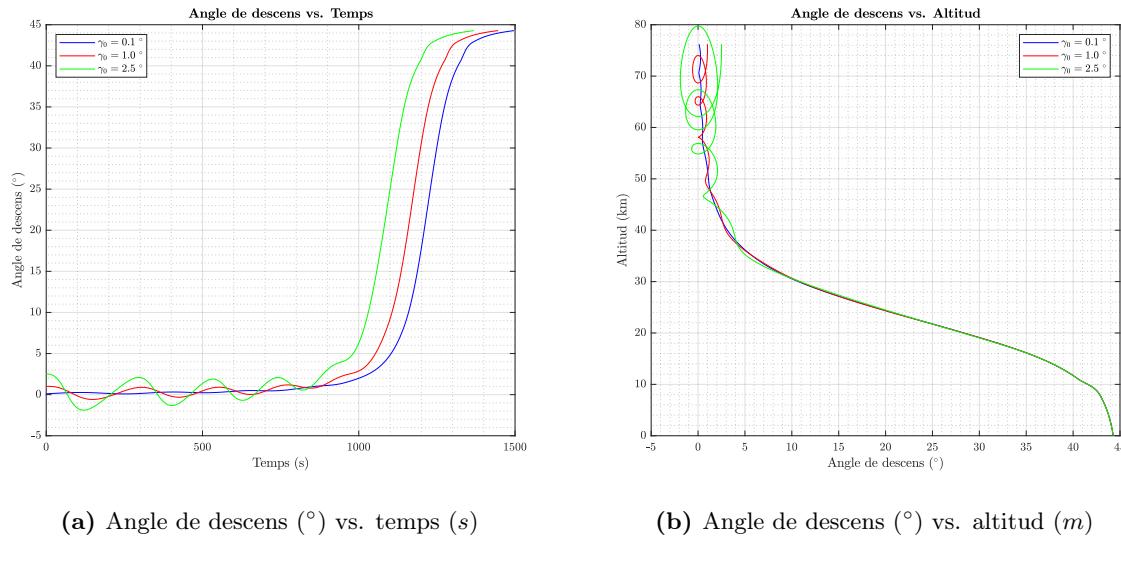


Figura 28 Variació dels angles de descens amb el temps i l'altitud

La entrada amb un angle de reentrada massa elevat resulta en una trajectòria oscil·latòria a elevades altituds, fins i tot incloent la possibilitat de retornar a l'espai exterior. En el cas de la entrada balística, en canvi, un increment en l'angle de reentrada resultava en un decreixement en el temps de reentrada i del rang.

La variació de l'angle influeix principalment a la desacceleració, la pressió dinàmica, la transferència de calor d'estancament i l'energia dinàmica.

9.1 Gràfica: Velocitat respecte Altitud

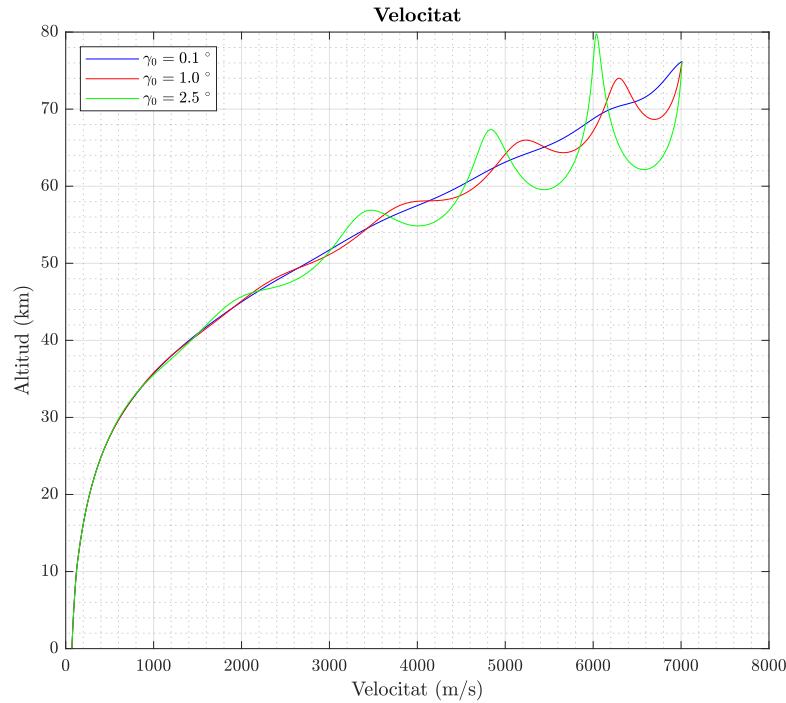


Figura 29 Representació gràfica de la velocitat V respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

La velocitat per a un angle $\gamma_o = 0.1^\circ$ té un pendent aproximadament constant des de l'altitud inicial fins els 45 km. En canvi, per l'angle $\gamma_o = 1.0^\circ$, la velocitat es veu alterada amb una sinusoïdal amb un coeficient d'esmorteïment. De forma similar, per l'angle $\gamma_o = 2.5^\circ$, la velocitat varia considerablement fins els 45 km amb un interval de valors de dimensions considerables.

A partir dels 45 km, l'angle no interfereix en la variació de la velocitat fins que l'objecte arriba a la superfície terrestre.

9.2 Gràfica: Desacceleració respecte Altitud

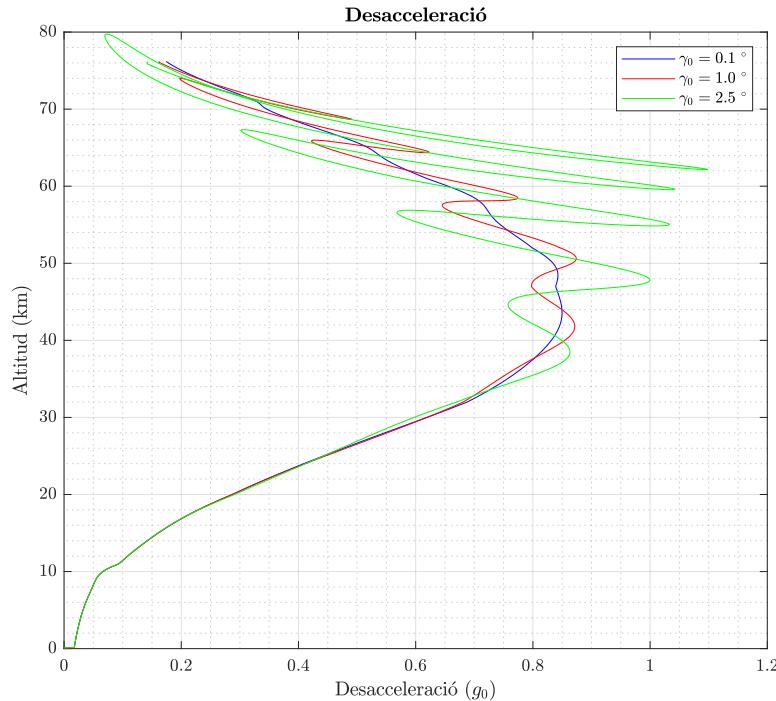


Figura 30 Representació gràfica de la desacceleració a respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

La desacceleració presenta un esquema complex per a altituds superiors als 34 km. Entre el valor inicial i els 34 km, la desacceleració s'incrementa fins a quadruplicar el valor inicial. Per a $\gamma_0 = 0.1^\circ$ existeixen petites variacions però es podria aproximar a una equació de segon grau tal que la desacceleració = $h^2 + h_i$. Per a $\gamma_0 = 1.0^\circ$, com s'ha vist a les gràfiques 28, el valor de γ influeix fortament sobre la desacceleració provocant un moviment oscil·latori característic fins a l'altitud prèviament esmentada.

Per evitar aquest fenomen, es recomana utilitzar angles petits, concretament inferiors a 1° , que minimitzen l'oscil·lació del conjunt.

Un factor important per una vol tripulat és la reducció significativa de les càrregues g en la reentrada sustentadora versus la entrada balística. Per exemple, per la reentrada sustentadora del Space Shuttle, els astronautes experimenten una desacceleració del voltant de $0.5 - 1g$ comparats amb els $8g$ de la càpsula Mercury.

9.3 Gràfica: Pressió dinàmica respecte Altitud

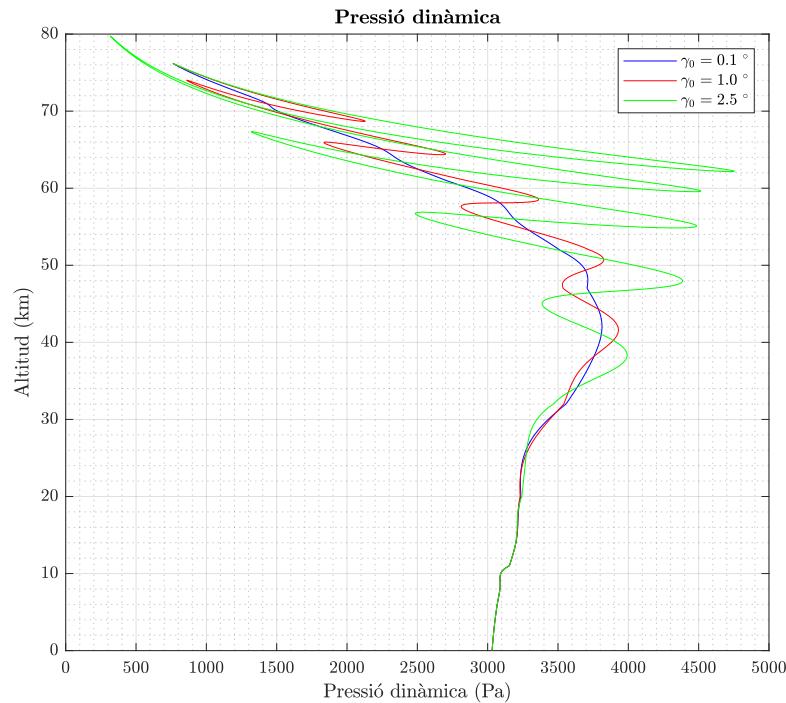


Figura 31 Representació gràfica de la pressió dinàmica q respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

La pressió dinàmica segueix la mateixa tendència que la desacceleració a causa de la influència de γ en els resultats. Es segueix veient un oscil·lador esmoreït en sentit vertical que disminueix entre el punt inicial i els 32 km, a partir dels quals existeix una independència de l'angle en la pressió dinàmica. També es compleix que per a angles majors la inestabilitat és més gran.

Fins a un angle $\gamma = 1.0^\circ$ les variacions es podrien considerar controlables però per a angles $\gamma = 2.5^\circ$ o superiors les variacions poden arribar als 4000 Pa.

Es recomanaria un estudi acurat per a mantenir un angle on les variacions de pressures al llarg del temps fossin mínimes de manera que la integritat de l'aeronau no es pogués veure afectada.

9.4 Gràfica: Número de Mach respecte Altitud

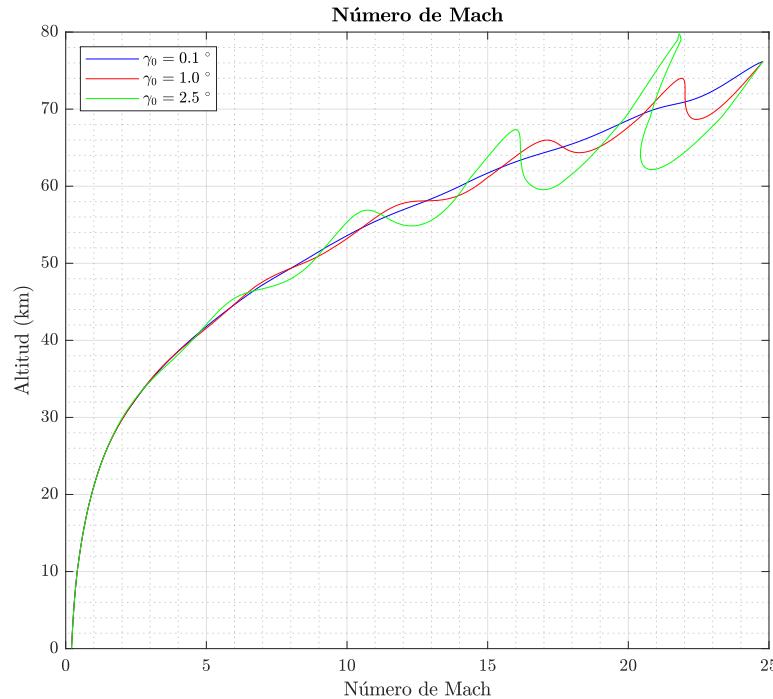


Figura 32 Representació gràfica del número de Mach M respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

El número de Mach inicial $M = 25$ denota una velocitat de reentrada atmosfèrica gairebé lineal per $\gamma_o = 0.1^\circ$ fins a una altitud de 48 km. Pels altres dos angles, el número de Mach té el mateix comportament que la velocitat en aquest interval com es d'esperar. La zona altament hipersònica, entre $M = 10$ i $M = 25$ és on es produueixen variacions considerables mentre que per la zona hipersònica, entre $M = 5$ i $M = 10$, el comportament és linealitzable pels angles d'estudi.

La part supersònica, que considerarem entre $M = 1.2$ i $M = 5$, es troba entre les altituds de 25 km i 42 km, la part transsònica, entre $M = 0.8$ i $M = 1.2$, es troba entre les altituds de 18 km i 25 km i, finalment, l'estat subsònic des de 18km fins a la superfície terrestre. És important recalcar que la velocitat en la superfície no es nul·la.

9.5 Gràfica: Número de Reynolds respecte Altitud

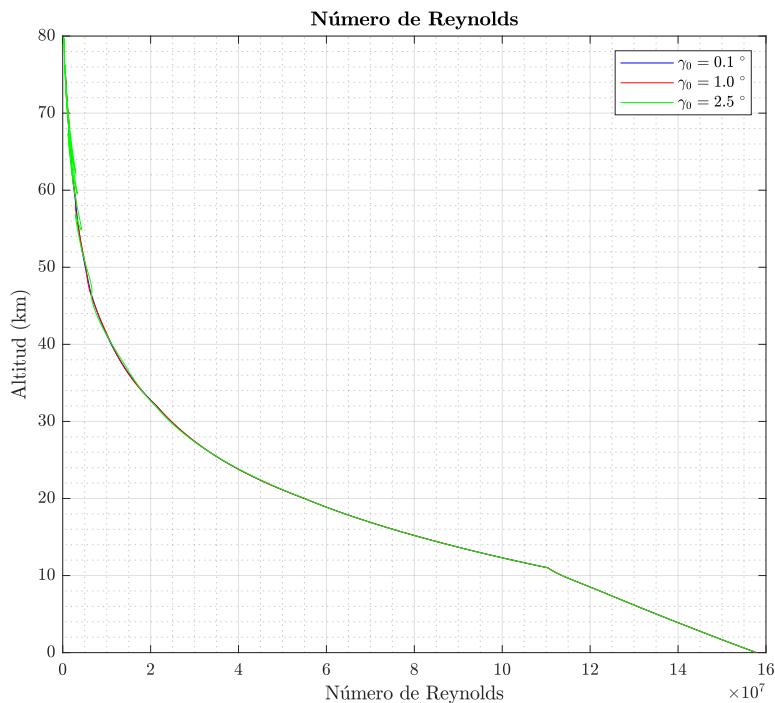


Figura 33 Representació gràfica del número de Reynolds Re respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

El número de Reynolds és invariant amb els angles γ d'estudi. Això es fàcilment visible si estudiem les variables de les quals depèn:

$$Re = \frac{\rho \cdot v_s \cdot L_{car}}{\mu} \quad (9.1)$$

La densitat i la viscositat dinàmica només depenen de les propietats termofísiques de l'atmosfera, que són constants diferents conegeudes per a cada altitud. Per una altra banda, la longitud característica només depèn del objecte i es manté constant en aquest cas.

Per tant, la única variable que podria modificar el resultat seria la velocitat però com els números de Reynolds de la reentrada son de l'ordre de 10^7 , l'efecte de petites variacions en la velocitat no és apreciable. El rang entre $Re = 0$ i $Re = 11$ es podria aproximar a una exponencial negativa a partir de la qual el rang fins a $Re = 16$ és una recta de pendent constant.

9.6 Gràfica: Pressió d'estancament respecte Altitud

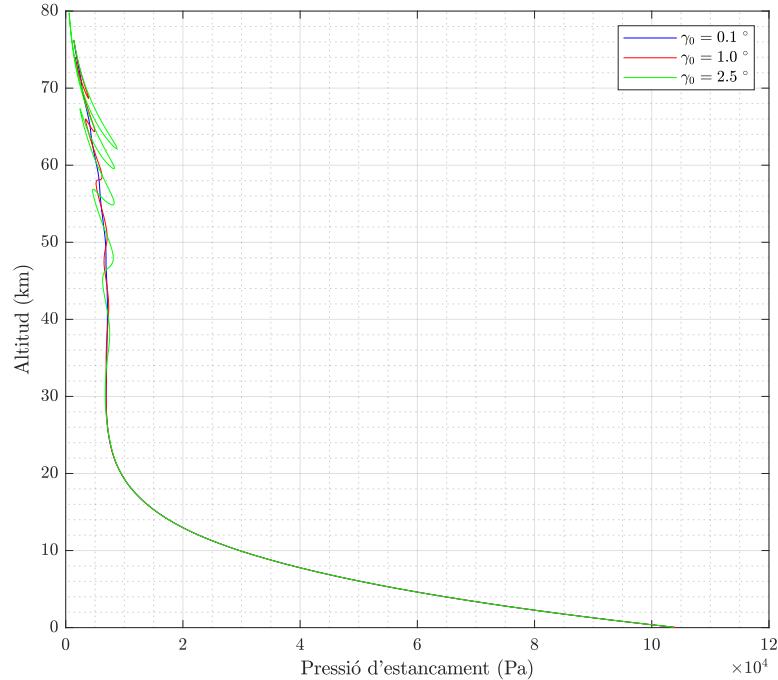


Figura 34 Representació gràfica de la pressió d'estancament p_0 respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

Excepte en la regió entre 80 km i 50 km, la pressió d'estancament es manté constant per a qualsevol angle de descens. En aquesta primera zona, els angles $\gamma = 0.1^\circ$ i $\gamma = 1.0^\circ$ proporcionen resultats aproximats mentre que $\gamma = 2.5^\circ$ visualitza el comportament oscil·lant característic dels vehicles sustentadors.

El valor inicial és gairebé nul a causa de que la pressió i la densitat ho són també. A mesura que disminueix augmenta la pressió i la densitat mentre que disminueix la velocitat, tot i això, la pressió es va incrementant de forma gairebé exponencial negativa fins arribar a la superfície.

9.7 Gràfica: Transferència de calor respecte Altitud

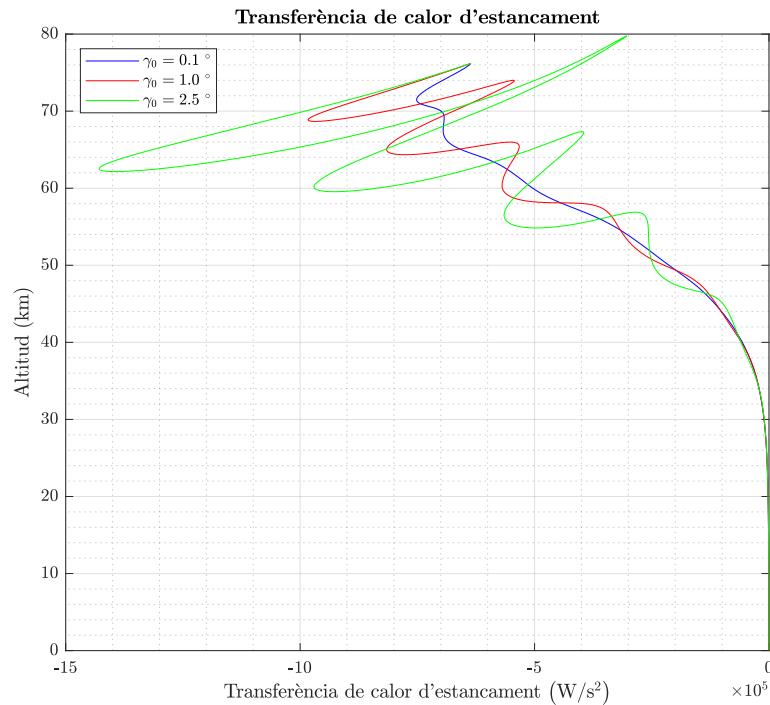


Figura 35 Representació gràfica de la pressió d'estancament q respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

Un factor molt important en l'entrada sustentadora té a veure amb el pic de la màxima transferència de calor. Contràriament al cas balístic en què el màxim es situa per baixes altituds, normalment per sota dels $30 - 45$ km d'alçada, per l'entrada sustentadora, en canvi, el màxim es troba per damunt dels 60 km d'alçada.

Això comporta unes conseqüències importants en el sistema de protecció tèrmica ja que una prioritat és que la nau mantingui la integritat de la calor durant la reentrada i sigui capaç d'absorir tot el flux de calor de calor durant la reentrada.

També és important recalcar el model d'oscil·lador harmònic que segueixen els angles $\gamma = 1.0^\circ$ i $\gamma = 2.5^\circ$ entre les posicions inicials i els 46 km a causa de la dependència amplificada de γ a mesura que va augmentant l'angle.

9.8 Gràfica: Temps de reentrada respecte Altitud

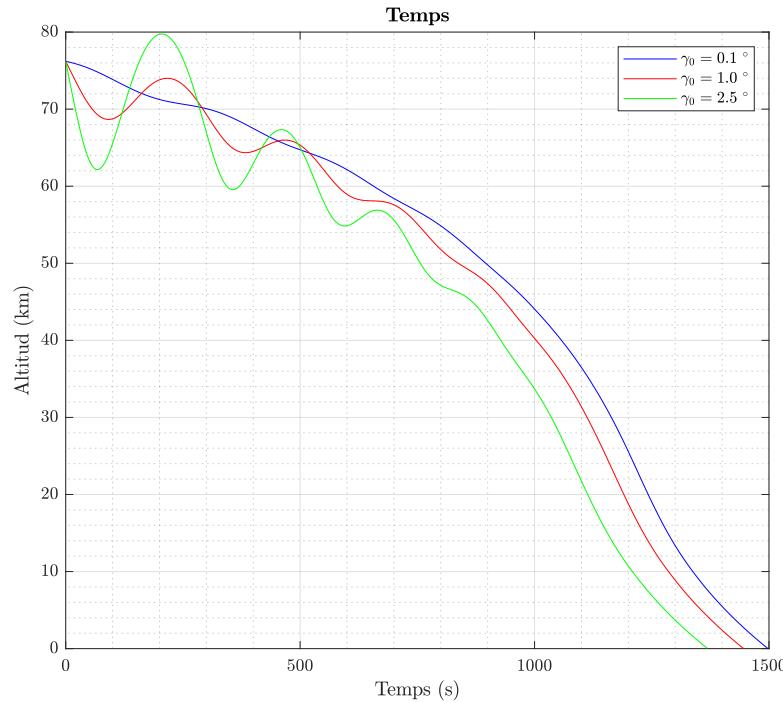


Figura 36 Representació gràfica del temps de reentrada t respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

El temps de reentrada total varia entre $t = 1350$ i $t = 1500$ segons l'angle inicial. Evidentment, per angles més petits trigarà més temps ja que l'abast és superior. La zona que comprèn els valors des de l'inici fins els 50 km actuen com a ones sinusoïdals amb esmoreïment que depèn de l'angle inicial. A partir d'aquest punt les línies son paral·leles localment independentment de l'angle d'estudi. En aquest cas, les variacions de les magnituds generals no es desplacen entre grans intervals com en casos anteriors on la dependència de γ és major.

9.9 Gràfica: Abast respecte Altitud

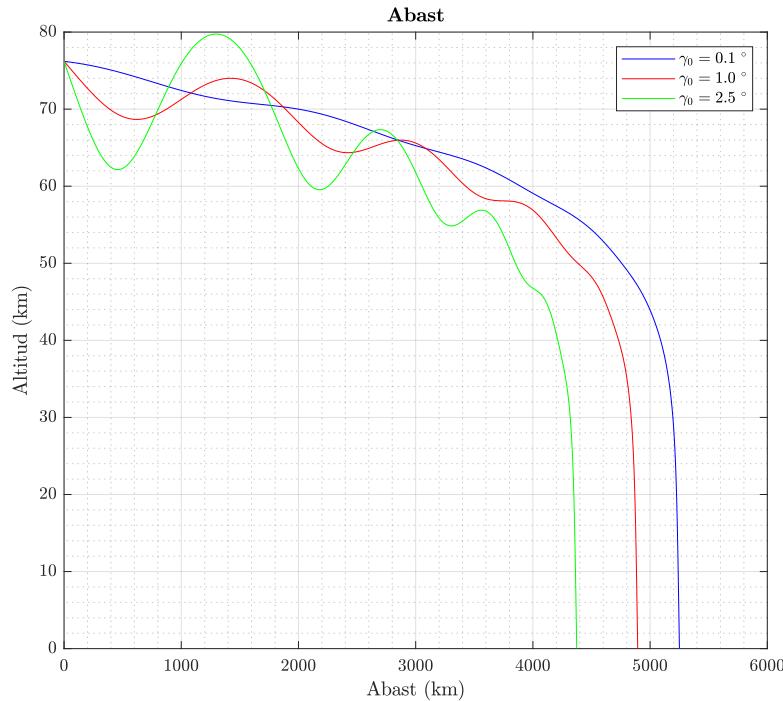


Figura 37 Representació gràfica de l'abast Δx respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

L'abast es veu clarament minvat per a angles majors. Tal i com s'esperaria en un planejador a l'atmosfera baixa terrestre, per a angles petits com ,per exemple, l'angle $\gamma = 0.1^\circ$, l'abast es veu incrementat uns 800 km respecte de l'angle $\gamma = 2.5^\circ$. En un punt mig, més apropiat, de l'angle mínim es troba $\gamma = 1.0^\circ$ amb uns 1900 km d'abast.

A partir dels 40 km cap a la superfície terrestre, l'abast es comporta de forma independent a l'angle γ però si ens fixem en la part superior torna a haver l'oscil·lador harmònic característic de les gràfiques amb sustentació.

9.10 Gràfica: Energia dinàmica respecte Altitud

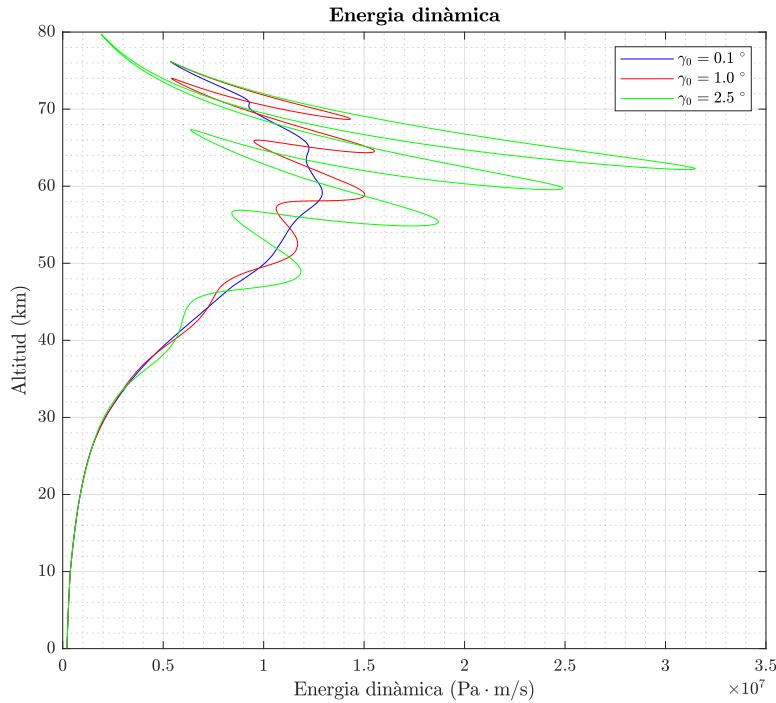


Figura 38 Representació gràfica de l'energia dinàmica E respecte l'alçada h per diferents coeficients balístics β

En aquest cas analitzarem cada angle per separat ja que les diferencies són notables. L'energia dinàmica inicial a $\gamma = 0.1^\circ$ es va incrementant fins els 59 km d'altitud i després comença a decréixer fins que arriba a la superfície terrestre. Les oscil·lacions són relativament petites i es podrien menysprear.

Per a $\gamma = 1.0^\circ$ les oscil·lacions són molt visibles i l'energia dinàmica del sistema varia gairebé un màxim d'1 Pa · m/s. De la mateixa manera, en el cas de $\gamma = 2.5^\circ$, el sistema varia gairebé un màxim de 3 Pa · m/s i oscil·la descontroladament.

A Entrada balística i sustentadora a la Terra

A continuació es presentaran les gràfiques calculades amb el mateix format que l'article de John C. Adams, Jr. [2] amb dues pàgines, cadascuna amb 11 plots. La primera amb l'entrada balística i la segona amb l'entrada sustentadora.

També s'han realitzat distincions amb els coeficients balístics i els angles inicials. Les β s'han mantingut amb unitats imperials per a que es pugui visualitzar ràpidament amb valors enteros. Es important recalcar que com els càlculs s'han realitzat en SI, això ja s'ha tingut en compte mitjançant factors de conversió en la programació.

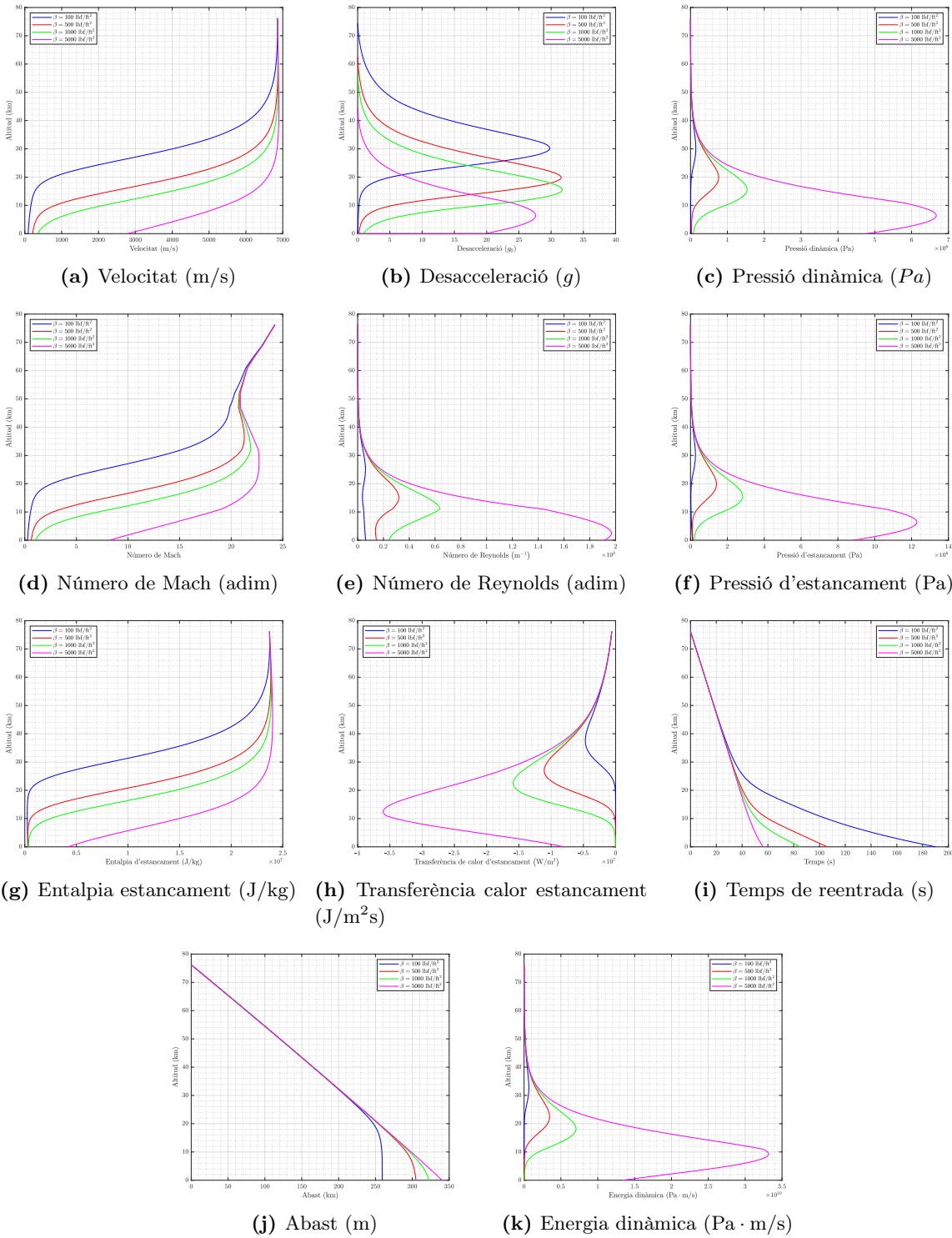


Figura 39 Trajectòria de reentrada balística a la Terra

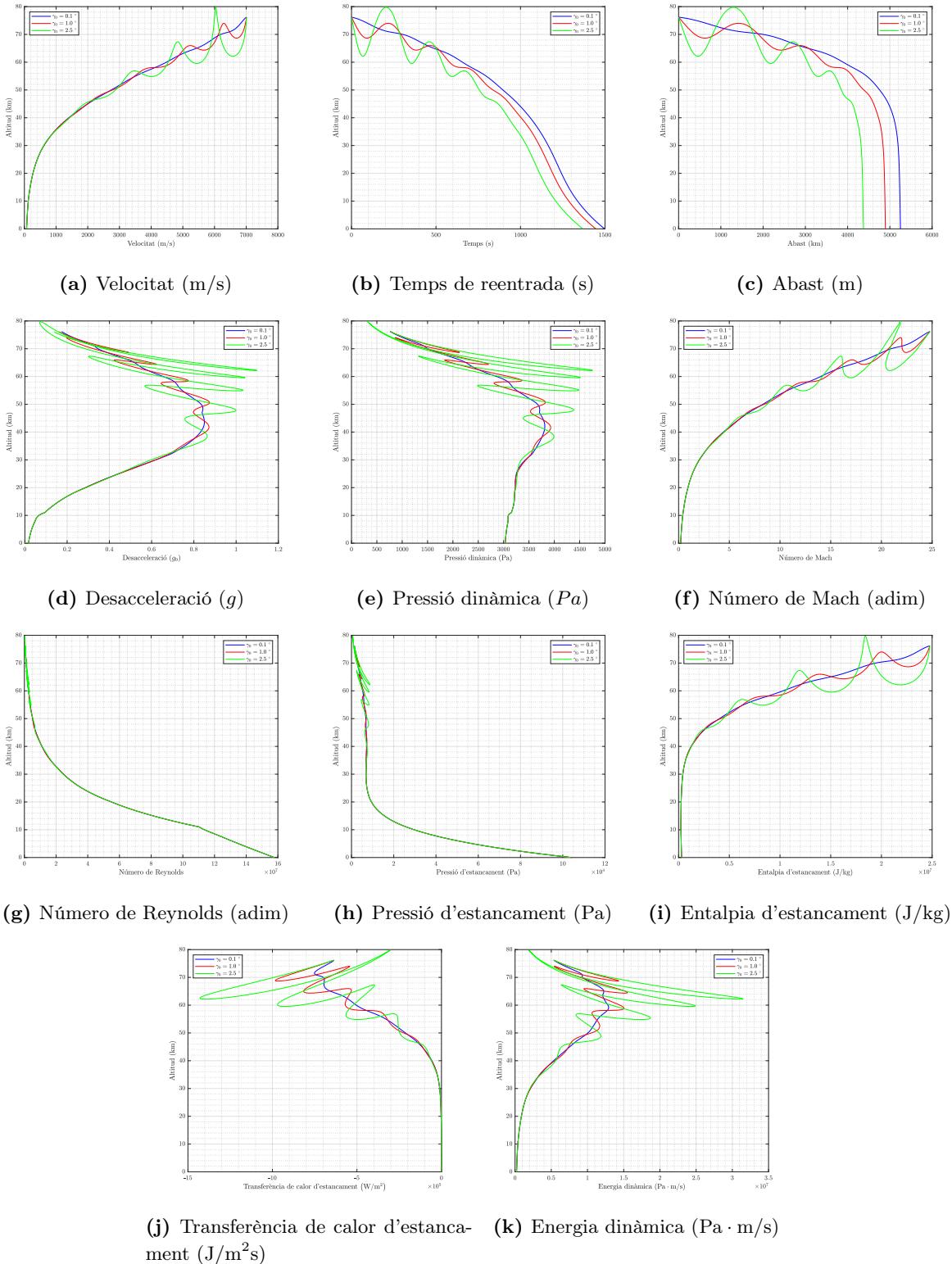


Figura 40 Trajectòria de reentrada sustentadora de l'Space Shuttle

Referències

- [1] «Returning from Space: Re-entry». A: Motion, R. E., 2016. Cap. 4.1.7, pàg. 1 - 32.
- [2] Jr John C. Adams. «Atmospheric Re-entry». A: *Semantic Scholar* (2003), pàg. 1 - 20.
- [3] NASA. *Launch of the Skylab space station*. 1973. URL: www.nasa.gov/feature/skylab-america-s-first-space-station.
- [4] NASA. *NASA's Columbia orbiter launches skyward*. 1981. URL: www.space.com/16726-space-shuttle.html.
- [5] NASA. *Equacions de vol balístic*. 2019. URL: www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/ballflight.html.
- [6] NASA. *Equacions de vol amb Drag*. 2018. URL: www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/flteqs.html.
- [7] Robert Frost. *Comparació entre balístic i sustentadora*. 2014. URL: [quora.com/In-regards-to-atmospheric-reentry-what-exactly-is-a-ballistic-reentry-and-can-you-describe-in-detail-an-example-of-it](https://www.quora.com/In-regards-to-atmospheric-reentry-what-exactly-is-a-ballistic-reentry-and-can-you-describe-in-detail-an-example-of-it).
- [8] Gallais Patrick. *Atmospheric Re-Entry Vehicle Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg New York UK: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. Cap. 3.
- [9] Gómez Tierno, Miguel Ángel; Pérez Cortés, Manuel; Puentes Márquez, César. «Mecànica del Vuelo». A: 2a ed. Ibergarceta Publicaciones S.L, 2012. Cap. 3, pàg. 33 - 50.
- [10] Vladimir A. Zorich. «Mathematical Analysis I». A: 2a ed. SpringerIbergarceta Publicaciones S.L, 2012. Cap. 5, pàg. 197.
- [11] Carles Bonet Reves et al. «Càlcul numèric». A: 2a ed. Edicions UPC, 2012. Cap. 9, pàg. 229, 238 - 241.
- [12] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen i David R. Dowling. «Fluid Mechanics». A: 6a ed. 125, London Wall, EC2Y 5AS: Elsevier, 2016. Cap. 6, pàg. 233 - 235.
- [13] NASA. *Earth's Atmospheric Layers*. 2017. URL: www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/science/atmosphere-layers2.html.
- [14] Dr. David R. Williams. *Mars Fact Sheet*. 2018. URL: nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/marsfact.html.
- [15] Nancy Hall. *Mars Atmosphere Model*. 2015. URL: www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/atmosmrm.html.
- [16] Jr. John D. Anderson. «Fundamentals of Aerodynamics». A: 5a ed. 1221 Avenue of the Americas, New York, NY 10020: McGraw-Hill Education, 2020. Cap. 8, pàg. 555 - 560.
- [17] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen i David R. Dowling. «Fluid Mechanics». A: 6a ed. 125, London Wall, EC2Y 5AS: Elsevier, 2016. Cap. 4, pàg. 164.
- [18] Jr. John D. Anderson. «Fundamentals of Aerodynamics». A: 5a ed. 1221 Avenue of the Americas, New York, NY 10020: McGraw-Hill Education, 2020. Cap. 3, pàg. 224 - 227.
- [19] N. A. Cumpsty. «Jet Propulsion. A Simple Guide to the Aerodynamic and Thermodynamic Design and Performance of Jet Engines». A: The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK: Cambridge University Press, 2003. Cap. 6, pàg. 61 - 64.
- [20] E.R.G. Eckert i Robert M. Drake Jr. «Analysis of Heat and Mass Transfer». A: 806 pàgines. CRC Press, gen. de 1985. ISBN: 0891165533.
- [21] NASA. *Lecture 1: Stagnation Point Heating*. 2012. URL: www.tfaaws.nasa.gov/TFAWS12/Proceedings/Aerothermodynamics%5C%20Course.pdf.

- [22] Hipertextual. *Esquema Càpsula Mercury*. 2011. URL: www.hipertextual.com/2011/10/proyecto-mercury-la-carrera-espacial-de-estados-unidos/mercury-capsule.
- [23] Bisbos. *Càpsula Mercury*. URL: www.bisbos.com/space_past_mercury.html.