Introducció a l'àlgebra homològica.

Víctor González Alonso.

Índex

1 Introducció.

En aquest treball es pretèn fer una ullada als conceptes bàsics de l'àlgebra homològica, intentant que sigui tan autocontingut com sigui possible.

La secció 2 es dedicarà a exposar el llenguatge i els resultats fonamentals de la teoria de categories que serà necessari a la resta del treball. Es farà especial èmfasi en les categories abelianes, i en particular en la categoria de mòduls sobre un anell commutatiu R.

A la secció 3 s'estudiarà la categoria de mòduls sobre un anell commutatiu R, dedicant atenció especial als mòduls lliures, projectius i injectius. També es faran algunes "excursions" a l'àrea de les resolucions (lliures i injectives) de mòduls, especialment a les resolucions minimals.

A la secció 4 es desenvoluparà la teoria de la derivació de functors entre categories abelianes, començant amb l'estudi general dels complexes i l'homologia d'aquests. També dedicarem apartats destacats a l'estudi de les propietats dels functors Ext i Tor entre categories de mòduls.

Per últim, a la secció 5 farem una introducció a la teoria de les successions espectrals, donant-ne algunes aplicacions tant a la pròpia teoria (simplificant les proves d'alguns teoremes anteriors) com a la topologia i la geometria algebraica (amb la successió espectral de Grothendieck).

2 Categories i functors.

En aquesta secció farem un resum de les definicions i propietats bàsiques relacionades amb el llenguatge de categories, començant amb la definició de les mateixes.

2.1 Categories i subcategories.

Definició 2.1. *Una* categoria $\mathfrak{C}$ *consisteix en*

- *una classe* $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$*, els elements de la qual anomenarem* objectes *de* $\mathfrak{C}$
- *per cada parella* (M, N) *d'objectes de* $\mathfrak{C}$*, un conjunt* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N)$ *de* morfismes *de* M *en* N
- *i per cada tres objectes* (M, N, P)*, una aplicació*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, P) \qquad (f, g) \mapsto g \circ_{\mathfrak{C}} f$$

  anomenada composició *de morfismes*

complint els axiomes següents:

i. per cada quatre objectes (M, N, P, Q) *de* $\mathfrak{C}$ *i tres morfismes*

$$(f, g, h) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, P) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, Q)$$

es té

$$h \circ_{\mathfrak{C}} (g \circ_{\mathfrak{C}} f) = (h \circ_{\mathfrak{C}} g) \circ_{\mathfrak{C}} f$$

(és a dir, la composició de morfismes és associativa)

ii. i per cada objecte $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *existeix un morfisme* $1_M \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, M)$*, anomenat* identitat *de* M*, tal que per tot objecte* N *i tot morfisme* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N)$ *(resp.* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, M)$*) es compleix* $f \circ_{\mathfrak{C}} 1_M = f$ *(resp.* $1_M \circ_{\mathfrak{C}} f = f$*).*

Notem que com a conseqüència dels axiomes, els morfismes identitat 1_M són únics per cada objecte M de $\mathfrak{C}$.

Normalment, si no hi ha risc de confusió, s'ometen els subíndexos $\mathfrak{C}$ tant als conjunts de morfismes com a les composicions.

També és habitual representar els morfismes amb fletxes de la següent manera: si $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ s'escriu $f : M \longrightarrow N$ o també $M \xrightarrow{f} N$. Aquesta notació esdevé molt útil quan treballem amb una certa quantitat d'objectes i morfismes entre ells, donant lloc a diagrames del tipus següent:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
P \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & Q \arrow[dr] & \\
& & R
\end{tikzcd}$$

Aquests diagrames s'anomenen *commutatius* quan les composicions de morfismes al llarg de diferents "camins" entre dos objectes coincideixen. Per exemple, el quadrat següent serà commutatiu si $k \circ f = h \circ g$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ P & \xrightarrow[h]{} & Q \end{array}$$

Direm que un morfisme $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ entre dos objectes M i N és un *isomorfisme* si existeix un morfisme $g \in \mathrm{Hom}(N,M)$ tal que $g \circ f = 1_M \in \mathrm{Hom}(M,M)$ i $f \circ g = 1_N \in \mathrm{Hom}(N,N)$. En aquest cas, direm que els objectes M i N són *isomorfs*, i que g és el *morfisme invers* de f.

Un morfisme $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ ess diu *mònic* si per qualsevol parella de morfismes $g,h \in \mathrm{Hom}(P,M)$ tals que $f \circ g = f \circ h \in \mathrm{Hom}(P,N)$ es té $g = h$. Anàlogament direm que el morfisme morfisme $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ és *èpic* si per qualsevol parella de morfismes $f,g \in \mathrm{Hom}(N,P)$ tals que $g \circ f = h \circ f$ es té $g = h$.

Per últim, direm que un objecte M és *inicial* (resp. *final*) de $\mathfrak{C}$ si donat un altre objecte qualsevol N existeix un únic morfisme $M \longrightarrow N$ (resp. $N \longrightarrow M$). Notem que dos objectes inicials o finals M,N d'una categoria han de ser isomorfs: per definició existeixen morfismes únics $f : M \longrightarrow N$ i $g : N \longrightarrow M$, i la seves composicions dónen morfismes $g \circ f : M \longrightarrow M$ i $f \circ f : N \longrightarrow N$. Ara bé, de nou per definició d'objecte inicial o final, només hi ha una possibilitat per aquests morfismes: les identitats corresponents, d'on resulta que f i g són isomorfismes, amb invers l'altre. En cas que un objecte M sigui a la vegada inicial i final, direm que M és un objecte *nul*. Òbviament, dos objectes nuls són isomorfs.

Posem a continuació uns quants exemples de categories.

Exemples:

- La categoria **Set** dels conjunts. Els objectes són els conjunts pròpiament dits, els morfismes són les aplicacions entre conjunts, i la composició de morfismes és la composició natural d'aplicacions. L'objecte inicial és el conjunt buit (en aquest cas és únic), i els objectes finals són els conjunts amb un únic element.

- La categoria **Ab** del grups abelians. Els objectes són els grups abelians, els morfismes són els morfismes de grups habituals i la composició també. Anàlogament podem definir les categories **Ring** d'anells commutatius, **Mod**(R) de mòduls sobre un anell commutatiu R, etc. En totes aquestes categories hi ha un únic element nul: el grup (anell, mòdul,...) trivial 0.

- La categoria **Top** dels espais topològics. Els objectes són els espais topològics i els morfismes són les aplicacions contínues amb la composició natural.

- Donat un espai topològic X, podem definir la categoria **Top**(X), on els objectes són els oberts de X i els morfismes són les inclusions, és a dir, $\mathrm{Hom}(U,V) = \emptyset$ si $U \nsubseteq V$ i $\mathrm{Hom}(U,V) = \{i_{UV}\}$ si $U \subseteq V$ (on $i_{UV} : U \longrightarrow V$ és la inclusió).

- Donat un espai topològic X, els prefeixos de conjunts (grups abelians, anells,...) en X i els seus morfismes formen una categoria, així com els feixos.

Definició 2.2. *Sigui* $\mathfrak{C}$ *una categoria. Una* subcategoria $\mathfrak{C}'$ *ve donada per una subclasse* $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}')$ *d'objectes de* $\mathfrak{C}$*, i per cada parella d'objectes* (M,N) *de* $\mathfrak{C}'$ *un subconjunt* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(M,N)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,N)$*, complint les condicions evidents:*

- *per cada objecte* $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}')$*, el morfisme identitat* 1_M *pertany a* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(M,M)$

- *i per cada parella de morfismes* $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(M,N) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(N,P)$*, la seva composició* $g \circ f$ *pertany a* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(M,P)$

Notem que una subcategoria $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ és una categoria de manera natural.

Diem que una subcategoria $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ és *plena* si per qualsevol parella d'objectes M, N de $\mathfrak{C}'$ es té $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,N)$, és a dir, si els morfismes de M a N en $\mathfrak{C}'$ són tots els morfismes que hi ha en $\mathfrak{C}$.

Exemples: Les categories **Ab** i **Top** són de manera natural subcategories de **Set**, però no són subcategories plenes, ja que no totes les aplicacions entre els conjunts que formen els grups abelians envien el neutre al neutre (condició necessària per ser morfisme de grups), o no totes les aplicacions entre dos espais topològics són contínues. Per altra banda, les categories de feixos (de conjunts, grups abelians,...) sobre un espai topològic fixat X són subcategories plenes de les categories de prefeixos corresponents.

Altres construccions de categories a partir d'altres són la *categoria producte* de $\mathfrak{C}_1$ i $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ (on els objectes són parells ordenats d'objectes de $\mathfrak{C}_1$ i $\mathfrak{C}_2$, els morfismes són parells de morfismes i la composició es fa independentment en cada component) i la *categoria dual* d'una categoria $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^o$ (on els objectes són els mateixos però els morfismes canvien de sentit, és a dir, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^o}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N,M)$).

2.2 Functors.

Un cop definit el concepte de categoria, estudiem les aplicacions entre elles: els functors.

Definició 2.3. *Donades dues categories $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$, un* functor *covariant (resp. contravariant) F de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$ és una assignació que dóna*

- *per cada objecte M de $\mathfrak{C}$, un objecte $F(M)$ de $\mathfrak{C}'$*
- *per cada morfisme $f : M' \longrightarrow M$ entre dos objectes de $\mathfrak{C}$, un morfisme $F(f) : F(M') \longrightarrow F(M)$ (resp. $F(f) : F(M) \longrightarrow F(M')$)*

de manera que $F(1_M) = 1_{F(M)}$ per tot objecte M de $\mathfrak{C}$, i que per tota parella de morfismes f, g tals que $g \circ f$ tingui sentit, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (resp. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

Notem que un functor contravariant de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$ és un functor covariant de $\mathfrak{C}^o$ (la categoria dual de $\mathfrak{C}$) en $\mathfrak{C}'$, i per tant podem limitar-nos a l'estudi de functors covariants (tot i que a la pràctica farem servir els dos conceptes).

Exemples:

- Donada una categoria $\mathfrak{C}$, el *functor identitat* $1_{\mathfrak{C}}$ definit per $1_{\mathfrak{C}}(M) = M$ i $1_{\mathfrak{C}}(f) = f$ per tots objectes M i morfismes f és clarament un functor (covariant) de $\mathfrak{C}$ en si mateixa.
- Donades una categoria $\mathfrak{C}$ i una subcategoria $\mathfrak{C}'$, la inclusió de $\mathfrak{C}'$ en $\mathfrak{C}$ és de manera natural un functor (covariant): el *functor d'inclusió*.
- El functor O de **Ab** en **Set** que a cada grup abelià li assigna el seu conjunt d'elements, i a cada morfisme de grups l'aplicació de conjunts subjacent, és un functor covariant anomenat *functor d'oblit*. També podem considerar el functor oblit definit de les categories d'anells, R-mòduls,... en **Set**.
- Sigui $\mathfrak{C}$ una categoria i X un objecte fixat. El functor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,-)$ és el functor covariant de $\mathfrak{C}$ en **Set** tal que per tot objecte M de $\mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,-)(M)$ és el conjunt $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,M)$ de morfismes de X en M, i per tot morfisme $f : M' \longrightarrow M$ entre objectes de $\mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,-)(f) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,f)$ és el morfisme de conjunts (i.e. aplicació) $g \mapsto f \circ g$ de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,M')$ en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,M)$.
- Anàlogament, el functor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(-,X)$ és el functor contravariant de $\mathfrak{C}$ en **Set** tal que per tot objecte M de $\mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(-,X)(M)$ és el conjunt $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,X)$ de morfismes de M en X, i per tot morfisme $f : M' \longrightarrow M$ entre objectes de $\mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(-,X)(f) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(f,X)$ és el morfisme $g \mapsto g \circ f$ de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,X)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M',X)$.

- Fixat un enter positiu n, les aplicacions H_n, H^n de **Top** en **Ab** que assignan a cada espai topològic X els grups d'homologia i cohomologia n-èssims, i a cada aplicació contínua $f : X \longrightarrow Y$ els morfismes induïts $f_* = H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ i $f^* = H^n(f) : H^n(Y) \longrightarrow H^n(X)$ són functors (el primer covariant i el segon contravariant).
- Sigui X un espai topològic i $\mathcal{F}$ un prefeix de conjunts (grups abelians, anells commutatius,...) sobre X. De la definició de prefeix podem interpretar $\mathcal{F}$ com un functor contravariant de **Top**(X) en **Set** (**Ab**, **Ring**,...).
- Per altra banda, si X és un espai topològic i $\mathfrak{C}$ és una categoria de (pre)feixos (de conjunts, grups abelians,...) sobre X, el functor Γ de seccions globals (definit com $\Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ per tot (pre)feix $\mathcal{F}$ i $\Gamma(\phi) = \phi(X) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ per tot morfisme de (pre)feixos $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$) és un functor covariant de $\mathfrak{C}$ en **Set**, **Ab**, etc.
- Si tenim tres categories $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ i dos functors (covariants) F i G de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$ i de $\mathfrak{C}'$ en $\mathfrak{C}''$ respectivament, es defineix el *functor compost* $G \circ F$, de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}''$, de manera natural: $(G \circ F)(M) = G(F(M))$ i $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ per tot objecte M i tot morfisme f de $\mathfrak{C}$.

Anem a definir ara certs tipus especials de functors. Siguin $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$ dues categories, i F un functor (covariant) de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$. En aquest cas direm que les categories $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$ són isomorfes.

Com és natural, direm que F és un *isomorfisme* si existeix un functor (també covariant) de $\mathfrak{C}'$ en $\mathfrak{C}$ tal que $G \circ F = 1_{\mathfrak{C}}$ i $F \circ G = 1_{\mathfrak{C}'}$.

Direm que F és *fidel* (resp. *ple*, *plenament fidel*) si per tota parella (M, N) d'objectes de $\mathfrak{C}$, l'aplicació $f \mapsto F(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(M), F(N))$ és injectiva (resp. exhaustiva, bijectiva).

Direm que F és *essencialment exhaustiu* o també *dens* si per tot objecte M' de $\mathfrak{C}'$ existeix almenys un objecte M de $\mathfrak{C}$ tal que $F(M)$ és isomorf a M'.

2.3 Morfismes functorials. Equivalència de functors. Equivalència de categories.

A l'apartat anterior hem definit quan dues categories són isomorfes. Ara bé, aquesta noció és massa restrictiva ja que, per exemple, una categoria $\mathfrak{C}$ i una subcategoria plena $\mathfrak{C}'$ que tingui almenys un objecte isomorf a cada objecte de $\mathfrak{C}$ contenen essencialment la mateixa informació, però generalment no seran isomorfes ($\mathfrak{C}$ pot tenir molts més objectes que $\mathfrak{C}'$). La noció més general que es fa servir és l'*equivalència* de categories, però per definir-la necessitem abans definir alguna mena de transformacions entre functors: els *morfismes functorials.*

Definició 2.4. *Si $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$ són dues categories i F i G són dos functors (covariants) de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$, un* morfisme functorial Φ *de F en G és una assignació*

$$M \mapsto \Phi_M \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(M), G(M))$$

per cada objecte M de $\mathfrak{C}$, de manera que per cada morfisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathfrak{C}$, el següent diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "\Phi_M"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(M) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(M') \arrow[r, "\Phi_{M'}"'] & G(M') \end{tikzcd}$$

és commutatiu, és a dir, $G(f) \circ \Phi_M = \Phi_{M'} \circ F(f)$ com a morfismes de $\mathfrak{C}'$.

Si F, G, H són tres morfismes de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$, Φ és un morfisme functorial de F en G i Ψ és un morfisme functorial de G en H, aleshores la composició $\Psi \circ \Phi$ definida per

$$(\Psi \circ \Phi)_M = \Psi_M \circ \Phi_M$$

és un morfisme functorial de F en G.

Com sempre, un morfisme functorial Φ de F en G és un *isomorfisme functorial* si per tot objecte M de $\mathfrak{C}$, Φ_M és un isomorfisme de $\mathfrak{C}'$. En aquest cas els morfismes inversos $(\Phi_M)^{-1}$ defineixen un morfisme functorial Φ^{-1}, que anomenarem *invers* de Φ. En aquest cas direm que F i G són functors *equivalents*. Òbviament, la composició de dos isomorfismes functorials és un altre isomorfisme functorial.

En particular, direm que un functor F de $\mathfrak{C}$ (una categoria qualsevol) en **Set** és *representable* si existeix un objecte M de $\mathfrak{C}$ tal que F és equivalent a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, -)$.

Ara ja podem definir l'equivalència de categories com segueix.

Definició 2.5. *Siguin $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$ dues categories, F un functor (covariant) de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$. Direm que F és una* equivalència de categories *si existeix un functor (també covariant) G de $\mathfrak{C}'$ en $\mathfrak{C}$ i dos isomorfismes functorials de $G \circ F$ en $1_{\mathfrak{C}}$ i de $F \circ G$ en $1_{\mathfrak{C}'}$ (per tant, G és automàticament una equivalència de categories).*

Notem que la relació "existeix una equivalència de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$" és una relació d'equivalència en el conjunt de categories, i direm que dues categories són *equivalents* si existeix una equivalència d'una en l'altra.

Aquesta definició, però, és difícil de comprovar, ja que passa per construir el functor G. El següent teorema dóna una caracterització depenent únicament en les propietats del functor F:

Teorema 2.6. *Siguin $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$ dues categories i F un functor covariant de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$. Aleshores són equivalents:*

i. F és una equivalència de categories

ii. F és dens i plenament fidel.

Demostració.

Començarem veient *ii.* $\Longrightarrow$ *i.* Per fer-ho construirem el functor G de la definició d'equivalència de categories.

Sigui M' un objecte de $\mathfrak{C}'$. Com que F és dens, existeix un objecte M de $\mathfrak{C}$ i un isomorfisme $u_{M'} : M' \longrightarrow F(M)$ de $\mathfrak{C}'$. Definirem $G(M') = M$.

Sigui ara $f' : M' \longrightarrow N'$ un morfisme de $\mathfrak{C}'$. Hem de definir $f = G(f') : G(M') = M \longrightarrow G(N') = N$ de manera que els morfismes $u_{M'}$ defineixin un morfisme functorial. Per tant, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "u_{M'}"] \arrow[d, "f'"'] & F(G(M')) \arrow[d, "F(G(f'))=F(f)"] \\ N' \arrow[r, "u_{N'}"] & F(G(N')) \end{tikzcd}$$

ha de ser commutatiu, de manera que hem de tenir

$$F(f) = u_{N'} \circ f' \circ u_{M'}^{-1}$$

Ara bé, donat que F és plenament fidel, existeix un únic $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N)$ complint aquesta condició, i per tant podem definir $G(f') = f$ de manera única.

Ara hem de comprovar que G és un functor, és a dir, que $G(g' \circ f') = G(g') \circ G(f')$. Com que F és fidel, això equival a veure que $F(G(g' \circ f')) = F(G(g') \circ G(f')) = F(G(g')) \circ F(G(f'))$ (on la segona igualtat és conseqüència de que F és un functor). Però aquesta igualtat es dedueix de considerar el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rrr, "u_{M'}"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, bend right, "g' \circ f'"'] & & & F(M) \arrow[dl, "F(G(f'))"'] \arrow[dd, bend left, "F(G(g' \circ f'))"] \\
& N' \arrow[r, "u_{N'}"] \arrow[dl, "g'"'] & F(N) \arrow[dr, "F(G(g'))"] & \\
P' \arrow[rrr, "u_{P'}"] & & & F(P)
\end{tikzcd}$$

Ara falta construir els isomorfismes functorials de $F \circ G$ en $1_{\mathfrak{C}'}$ i de $G \circ F$ en $1_{\mathfrak{C}}$.

Per construcció, els isomorfismes $u_{M'}$ dónen l'isomorfisme de $F \circ G$ en $1_{\mathfrak{C}'}$. Per tant,només falta construir l'altre, és a dir, per cada objecte M de $\mathfrak{C}$ hem de donar un isomorfisme $u_M : M \longrightarrow (G \circ F)(M)$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "f"'] & G(F(M)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\
N \arrow[r, "u_N"] & G(F(N))
\end{tikzcd}$$

sigui commutatiu per tot morfisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N)$, és a dir, que

$$(G(F(f)) \circ u_M = u_N \circ f$$

Com que F és fidel, n'hi ha prou amb comprovar

$$F(G(F(f))) \circ F(u_M) = F(u_N) \circ F(f)$$

Si imposem $F(u_M) = u_{F(M)}$ (com que F és plenament fidel, existeix un únic u_M amb aquesta propietat) i anomenem $M' = F(M)$, $N' = F(N)$ i $f' = F(f)$, només hem de comprovar que

$$F(G(f')) \circ u_{M'} = u_{N'} \circ f'$$

que és cert per definició de $F(f)$.

Vegem ara l'altra implicació. Suposem doncs que F defineix una equivalència de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$ i vegem que F és plenament fidel i dens. Sigui G el functor de $\mathfrak{C}'$ en $\mathfrak{C}$ de la definició d'equivalència de categories.

Comencem veient que F és dens. Sigui doncs M' un objecte de $\mathfrak{C}'$. Per hipòtesi tenim un isomorfisme $u_{M'}$ de M' en $F(G(M'))$, i posant $M = G(M')$ tenim que M' és isomorf a $F(M)$, que és el que volíem.

Per veure que F és fidel, prenem f_1, f_2 dos morfismes de M en N (de $\mathfrak{C}$) tals que $F(f_1) = F(f_2)$. Com que $G \circ F$ és isomorf a $1_{\mathfrak{C}}$, tenim el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "f_i"'] & G(F(M)) \arrow[d, "G(F(f_i))"] \\
N \arrow[r, "u_N"] & G(F(N))
\end{tikzcd}$$

per $i = 1, 2$, on u_M i u_N són isomorfismes. Per tant tenim

$$f_i = u_N^{-1} \circ G(F(f_i)) \circ u_M$$

i com que $G(F(f_1)) = G(F(f_2))$, resulta $f_1 = f_2$. Per tant, F és fidel.

Per últim hem de veure que F és ple, i.e., que per tot morfisme $f' : F(M) \longrightarrow F(N)$ de $\mathfrak{C}'$, existeix un morfisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathfrak{C}$ tal que $F(f) = f'$. Si prenem $f = u_N^{-1} \circ G(f') \circ u_M$, tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "f"'] & G(F(M)) \arrow[d, "G(f')"] \\ N \arrow[r, "u_N"] & G(F(N)) \end{tikzcd}$$

i com que per tot $f : M \longrightarrow N$ tenim també el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "f"'] & G(F(M)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\ N \arrow[r, "u_N"] & G(F(N)) \end{tikzcd}$$

resulta que $G(F(f)) = G(f')$. Però com que G defineix una equivalència de $\mathfrak{C}'$ en $\mathfrak{C}$, també és fidel, de manera que $G(F(f)) = G(f')$ implica $F(f) = f'$ i ja hem acabat. $\square$

Un cas particular de categories equivalents són els esquelets. Donada una categoria $\mathfrak{C}$, un *esquelet* de $\mathfrak{C}$ és una subcategoria plena $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ de manera que $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C}')$ té un únic objecte de $\mathfrak{C}$ per cada classe d'objectes isomorfs. L'existència d'un esquelet per qualsevol categoria és conseqüència de l'axioma de l'elecció. És evident que la inclusió d'un esquelet $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ en la categoria original $\mathfrak{C}$ és un functor dens (per definició) i plenament fidel (perquè $\mathfrak{C}'$ és una subcategoria plena). Per tant, la inclusió dóna una equivalència de categories entre $\mathfrak{C}'$ i $\mathfrak{C}$.

Exemples:

- Sigui k un cos. Considerem $\mathfrak{C}$ la categoria dels espais vectorials de dimensió finita sobre k, amb morfismes les aplicacions k-lineals. Aleshores la subcategoria plena $\mathfrak{C}'$ amb objectes els espais vectorials k^n, $n \geq 0$ és un esquelet de $\mathfrak{C}$, i per tant és equivalent a $\mathfrak{C}$.
- Un exemple més interessant és el Nullstellensatz de Hilbert, que dóna una equivalència entre la categoria de les varietats algebraiques afins sobre un cos algebraicament tancat k i la categoria d'algebres reduïdes (sense elements nilpotents) finitament generades sobre k.

2.4 Functors adjunts.

En aquest apartat parlarem una mica del que s'entén per functors adjunts, considerant els casos més habituals trobats en l'àlgebra commutativa i la geometria algebraica.

Definició 2.7. *Considerem dues categories $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ i dos functors $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}'$, $G : \mathfrak{C}' \longrightarrow \mathfrak{C}$. Direm que F és* adjunt per l'esquerra *de G (i que G és* adjunt per la dreta *de F) si per tota parella d'objectes M de $\mathfrak{C}$ i N de $\mathfrak{C}'$ es té una bijecció natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(M), N) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, G(N))$$

Exemples:

- Sigui R un anell commutatiu i $\mathbf{Mod}(R)$ la categoria dels R-mòduls, amb morfismes les aplicacions R-lineals. Considerem ara M, N, P tres R-mòduls i $f : M \times N \longrightarrow P$ una aplicació R-bilineal (o equivalentment, $f : M \otimes_R N \longrightarrow P$ R-lineal). Per $x \in M$ fixat, l'aplicació $y \mapsto f(x, y)$ de N en P és R-lineal, i per tant f indueix una aplicació $M \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, P)$ que és R lineal per què f és bilineal. Recíprocament, qualsevol aplicació R-lineal $\phi : M \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, P)$ defineix una aplicació R-bilineal $M \times N \longrightarrow P$ donada per $(x, y) \mapsto \phi(x)(y)$, o equivalentment, una aplicació R-lineal $M \otimes_R N \longrightarrow P$. Per tant, tenim una bijecció natural

$$\mathrm{Hom}(M \otimes_R N, P) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

i per tant, per qualsevol R-mòdul N, el functor $-\otimes_R N$ és adjunt per la dreta de $\mathrm{Hom}(N,-)$. (Per més detalls veure el capítol següent o [2] pàg. 28.)

- Considerem ara X, Y dos espais topològics i $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua entre ells, que indueix un functor f^{-1} de la categoria de feixos sobre Y a la de feixos sobre X, i un altre functor f_* en el sentit contrari. Per qualsevol parella de feixos $\mathcal{F}$ en X i $\mathcal{G}$ en Y, hi ha morfismes de feixos naturals $f^{-1}f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ i $\mathcal{G} \longrightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$, i amb aquests morfismes es pot construir una bijecció

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

  (on Hom_X denota els morfismes a la categoria de feixos sobre X, i anàlogament per Hom_Y). Per tant f^{-1} és l'adjunt per l'esquerra de f_*. (Per més detalls, veure [6] pàg. 68.)

- Siguin ara $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos espais anellats, $f : X \longrightarrow Y$ un morfisme entre ells, $\mathcal{F}$ un feix de $\mathcal{O}_X$-mòduls en X i $\mathcal{G}$ un feix de $\mathcal{O}_Y$-mòduls en Y. El morfisme de feixos $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ indueix de manera natural una estructura de $\mathcal{O}_Y$-mòdul en $f_*\mathcal{F}$ (la imatge directa de $\mathcal{F}$), de manera que f_* és un functor de la categoria de feixos de $\mathcal{O}_X$-mòduls en la de feixos de $\mathcal{O}_Y$-mòduls. Per altra banda, per l'exemple anterior, el morfisme $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ es correspon amb un morfisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$, i podem doncs definir el feix *imatge inversa de* $\mathcal{G}$

$$f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

  (f^* també és un functor, ara de la categoria de $\mathcal{O}_Y$-mòduls en la de $\mathcal{O}_X$-mòduls). En aquest cas també hi ha una bijecció

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

  que fa f^* adjunt per l'esquerra de f_*. (Veure també [6] pàg. 110.)

2.5 Límits inductius i projectius.

En aquest apartat definirem límit inductiu i projectiu en una categoria, i com a casos particulars el pull-back, push-out, producte directe i suma directa, molt importants (en particular la suma directa) en la teoria de categories abelianes, que és en la que estem interessats.

Sigui I un conjunt, que entendrem com un conjunt d'índexos. Recordem que una relació $\leq$ és de preordre si és reflexiva i transitiva, i si a més és antisimètrica direm que és una relació d'ordre. Un conjunt dotat d'una relació de preordre (resp. ordre) és un conjunt preordenat (resp. ordenat). Un conjunt preordenat I es diu *filtrant* si per qualsevol parella $i, j \in I$ existeix un majorant, és a dir, un element $k \in I$ tal que $i \leq k$ i $j \leq k$.

Definició 2.8. *Sigui I un sistema preordenat i $\mathfrak{C}$ una categoria. Un* sistema projectiu *de $\mathfrak{C}$ indexat per I és una família d'objectes $\{M_i\}_{i\in I}$ i morfismes $f_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$ per cada parella d'índexos $i, j \in I$ amb $i \leq j$, de manera que per tota terna d'índexos $i, j, k \in I$ tals que $i \leq j \leq k$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[r, "f_{jk}"] \arrow[dr, "f_{ik}"'] & M_j \arrow[d, "f_{ij}"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

sigui commutatiu, i a més $f_{ii} = 1_{M_i}$ per tot $i \in I$.

Exemples:

- En el cas que la relació de preordre sigui la trivial ($i \leq j$ si i només si $i = j$), un sistema projectiu és simplement la família d'objectes $\{M_i\}_{i\in I}$.

- Posem $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunt dels enters positius amb l'ordre habitual, $\mathfrak{C} = \mathbf{Ab}$ i n un enter no nul. Si definim $M_i = \mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$ i $f_{ij} : \mathbb{Z}/n^j\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}$ l'aplicació canònica de pas al quocient, aleshores obtenim un sistema projectiu de grups abelians. (Aquesta construcció es pot fer més generalment en la categoria $\mathbf{Mod}(R)$ de mòduls sobre un anell commutatiu R, canviant $\mathbb{Z}$ per un mòdul M i n per un ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$.)

Definició 2.9. *Sigui $(M_i, f_{ij})_{i,j\in I}$ un sistema projectiu de $\mathfrak{C}$ indexat per I. Un* límit projectiu *d'aquest sistema ve donat per un objecte M de $\mathfrak{C}$ i un morfisme $f_i : M \longrightarrow M_i$ per cada $i \in I$ de manera que*

i. si $i \leq j$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "f_i"'] & M_j \arrow[d, "f_{ij}"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

és commutatiu (i.e. $f_i = f_{ij} \circ f_j$)

ii. i per qualsevol objecte N de $\mathfrak{C}$ i qualsevol família de morfismes $\{g_i : N \longrightarrow M_i\}$ tals que $g_i = f_{ij} \circ g_j$ per $i \leq j$, existeix un únic morfisme $g : N \longrightarrow M$ tal que podem recuperar els g_i com $f_i \circ g$.

$$\begin{tikzcd} & & M_j \arrow[dd, "f_{ij}"] \\ N \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[urr, bend left, "g_j"] \arrow[drr, bend right, "g_i"'] & M \arrow[ur, "f_j"] \arrow[dr, "f_i"] & \\ & & M_i \end{tikzcd}$$

En general, no podem garantir l'existència de límits projectius en una categoria $\mathfrak{C}$ arbitrària, però en cas d'existir, dos límits projectius d'un mateix sistema són isomorfs (amb isomorfisme únic). Quan existeix un límit projectiu, es denota per $\varprojlim (M_i, f_{ij})$, o també $\varprojlim M_i$ (oblidant els morfismes f_{ij}).

De qualsevol manera, en les categories més habituals (**Set**, **Ab**, **Ring**, $\mathbf{Mod}(R)$, feixos sobre un espai topològic,...) sempre tenim assegurada l'existència. Per exemple, a la categoria de conjunts **Set**, el límit projectiu és el subconjunt M dels $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ tals que $f_{ij}(x_j) = x_i$, i els morfismes f_i són les restriccions a M de les projeccions $(x_k)_{k\in I} \mapsto x_i$. Es poden trobar més detalls i altres construccions a [7], [2] o [10], per exemple.

Exemples:

- Quan la relació d'ordre és la trivial, el límit projectiu s'anomena *producte directe*, es denota $\prod_{i\in I} M_i$, i els morfismes f_i s'anomenen *projeccions*. A més, a les categories habituals (**Set**, **Ab**, **Ring**, $\mathbf{Mod}(R)$) coincideix amb el producte directe habitual.

- Amb les notacions de l'exemple anterior, si $n = p$ és un nombre primer, el límit projectiu és $\mathbb{Z}_p$, l'anell dels enters p-àdics.

- Si ara prenem $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ l'anell de polinomis en n variables sobre un cos k, i $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$, aleshores el límit projectiu del sistema $(R/\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on els morfismes són els passos al quocient) és l'anell $\hat{R} = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ de sèries formals en n variables.

- Considerem ara el sistema projectiu donat pel diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

El límit projectiu corresponent es denota $M \times_P N$, i s'anomena *pull-back* o *producte fibrat.* Notem que és l'únic objecte (llevat d'isomorfisme) que omple el diagrama a un quadrat de manera que per qualsevol altre objecte S i morfismes $p : S \longrightarrow M$, $q : S \longrightarrow N$ complint $f \circ p = g \circ q$ existeix un únic morfisme $S \longrightarrow M \times_P N$ fent commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & M \times_P N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \arrow[r, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

Com a última propietat dels límits projectius, esmentem la següent proposició, de demostració senzilla.

Proposició 2.10. *Sigui $(M_i, f_{ij})_{i,j\in I}$ un sistema projectiu d'una categoria $\mathfrak{C}$, i suposem que $(M, \{f_i\}_{i\in I})$ és un límit projectiu. Aleshores tenim:*

i. *Per tot objecte N de $\mathfrak{C}$, el sistema $(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, M_i), \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, f_{ij}))_{i,j\in I}$ és un sistema projectiu en* **Set***.*

ii. *Per qualsevol morfisme $g : N \longrightarrow M$, l'element $(f_i \circ g)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, M_i)$ pertany al límit projectiu $\varprojlim \mathrm{Hom}_{fC}(N, M_i)$.*

iii. *L'aplicació $g \mapsto (f_i \circ g)_{i\in I}$ és una bijecció de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, M)$ en $\varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, M_i)$ functorial en N.*

Una manera més fàcil de recordar aquesta proposició és escrivint-la com

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, \varprojlim M_i) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, M_i)$$

i en particular tenim

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(N, M_i)$$

Ara passem als límits inductius, i com a casos particulars el push-out, la unió disjunta i la suma directa. Els límits inductius són la noció dual dels límits projectius, i per tant, informalment, es pot dir que tot és igual que amb aquests però canviant el sentit dels morfismes. De qualsevol manera, donarem les definicions explícitament, i els exemples que posarem no tindran res a veure, ja que la situació és realment diferent.

Definició 2.11. *Sigui I un sistema preordenat i $\mathfrak{C}$ una categoria. Un* sistema inductiu *de $\mathfrak{C}$ indexat per I és una família d'objectes $\{M_i\}_{i\in I}$ i morfismes $f_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ per cada parella d'índexos $i, j \in I$ amb $i \leq j$, de manera que per tota terna d'índexos $i, j, k \in I$ tals que $i \leq j \leq k$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_{ik}"] \arrow[dr, "f_{ij}"'] & M_j \arrow[d, "f_{jk}"] \\ & M_k \end{tikzcd}$$

sigui commutatiu, i a més $f_{ii} = 1_{M_i}$ per tot $i \in I$.

Exemples:

- Com abans, qualsevol familia indexada per un conjunt amb l'ordre trivial és un sistema inductiu, ja que no s'ha de donar cap morfisme.

- Sigui R un anell, M un R-mòdul i $S \subseteq R$ un sistema multiplicatiu. Considerem S ordenat per

$$f \leq g \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,|\, g^n = f \Longleftrightarrow \{1, f, f^2, f^3, \dots\} \subseteq \{1, g, g^2, g^3, \dots\}$$

  Aleshores el conjunt de mòduls localitzats $\{M_f | f \in S\}$ és un sistema inductiu amb els morfismes naturals $\phi_{fg} : M_f \longrightarrow M_g$, $m/f^n \mapsto m/f^n$ si $f \leq g$.

- Fem ara la versió geomètrica de l'anterior exemple. Sigui X un espai topològic i $P \in X$ un punt fixat. Aleshores el conjunt $\mathfrak{U}_P$ d'oberts de X contenint P, amb la relació

$$U \leq V \Longleftrightarrow U \supseteq V$$

  (inversa de la inclusió) és un conjunt ordenat. Si ara considerem un feix de grups abelians $\mathcal{F}$ en X, la familia de grups $\{\mathcal{F}(U) | U \in \mathfrak{U}_P\}$ amb els morfismes de restricció del feix formen un sistema inductiu.

Definició 2.12. *Sigui $(M_i, f_{ij})_{i,j \in I}$ un sistema inductiu de $\mathfrak{C}$ indexat per I. Un* límit inductiu *d'aquest sistema ve donat per un objecte M de $\mathfrak{C}$ i un morfisme $f_i : M_i \longrightarrow M$ per cada $i \in I$ de manera que*

i. si $i \leq j$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f_{ij}"'] & M \\ M_j \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

és commutatiu (i.e. $f_i = f_j \circ f_{ij}$)

ii. i per qualsevol objecte N de $\mathfrak{C}$ i qualsevol família de morfismes $\{g_i : M_i \longrightarrow N\}$ tals que $g_i = g_j \circ f_{ij}$ per $i \leq j$, existeix un únic morfisme $g : M \longrightarrow N$ tal que podem recuperar els g_i com $g \circ f_i$.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[dr, "f_i"] \arrow[drr, bend left, "g_i"] \arrow[dd, "f_{ij}"'] & & \\ & M \arrow[r, dashed] & N \\ M_j \arrow[ur, "f_j"] \arrow[urr, bend right, "g_j"'] & & \end{tikzcd}$$

Tal com passava en el cas dels límits projectius, no podem assegurar la seva existència en qualsevol categoria $\mathfrak{C}$, però si tenim garantida la unicitat llevat d'isomorfisme únic. Quan existeixi un límit inductiu, el denotarem per $\varinjlim (M_i, f_{ij})$ o simplement $\varinjlim M_i$.

Ara bé, com també passa amb els límits projectius, en les categories més habituals (com ara **Set**, **Ab**, **Ring**, **Mod**(R), feixos sobre un espai topològic,...) sempre existeixen límits inductius. Per exemple, a la categoria de conjunts **Set**, el límit projectiu és el conjunt quocient M de la unió disjunta dels M_i mòdul la relació d'equivalència $x_i \sim f_{ij}(x_i)$ si $i \leq j$, i els morfismes f_i són la composició de les inclusions $M_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} M_i$ i el pas al quocient $\coprod_{i \in I} M_i \longrightarrow M$.

Exemples:

- Quan la relació d'ordre és la trivial, el límit inductiu s'anomena *coproducte* o *suma directa*, es denota $\coprod_{i \in I} M_i$ o $\bigoplus_{i \in I} M_i$. A la categoria **Set** no és res més que la unió disjunta, i a les categories **Ab**, **Ring** i **Mod**(R) coincideix amb la suma directa habitual.

- Amb les notacions del bloc d'exemples anterior, el límit directe és exactament la localització de M per S, $S^{-1}M$.

- I quant a la versió geomètrica, el límit directe és justament la fibra del feix en el punt P. En el cas que X sigui una varietat algebraica i $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ el seu feix estructural, el límit directe és l'anell local al punt P, $\mathcal{O}_{X,P}$.

- Per últim, considerem el sistema inductiu donat pel diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \\ N & \end{tikzcd}$$

El límit inductiu corresponent es denota $M \coprod_P N$, i s'anomena *push-out*. Com en el cas del pull-back, és l'únic objecte (llevat d'isomorfisme) que omple el diagrama anterior a un quadrat de manera que per qualsevol altre objecte S i morfismes $p : M \longrightarrow S$, $q : N \longrightarrow X$ complint $p \circ f = q \circ g$ existeix un únic morfisme $M \coprod_P N \longrightarrow S$ fent commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "p"] & \\ N \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "q"'] & M \coprod_P N \arrow[dr, dashed] & \\ & & S \end{tikzcd}$$

Observem com, si canviem el sentit de les fletxes, obtenim la definició del pull-back.

I ja per terminar, esmentem el resultat anàleg a la proposició 2.10 per a límits inductius.

Proposició 2.13. *Sigui $(M_i, f_{ij})_{i,j\in I}$ un sistema inductiu d'una categoria $\mathfrak{C}$, i suposem que $(M, \{f_i\}_{i\in I})$ és un límit inductiu. Aleshores tenim:*

i. Per tot objecte N de $\mathfrak{C}$, el sistema $(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_i, N), \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(f_{ij}, N))_{i,j\in I}$ és un sistema projectiu en **Set** *(ja que el functor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, N)$ és contravariant).*

ii. Per qualsevol morfisme $g : M \longrightarrow N$, l'element $(g \circ f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_i, N)$ pertany al límit projectiu $\varprojlim \mathrm{Hom}_{fC}(M_i, N)$.

iii. L'aplicació $g \mapsto (g \circ f_i)_{i\in I}$ és una bijecció de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N)$ en $\varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_i, N)$ functorial en N.

La manera senzilla de recordar aquesta proposició és sota la forma

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\varinjlim M_i, N) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_i, N)$$

i en particular tenim

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\left(\coprod_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_i, N)$$

2.6 Categories abelianes.

Ara passem a definir la classe de categories en què estem interessats: les categories abelianes. Abans, però, tractarem amb una classe una mica més general (les categories additives) i definirem nuclis, conuclis e imatges de morfismes en la manera més general possible (que en les categories **Ab**, **Ring**,... coincidiran amb les nocions clàssiques).

Definició 2.14. *Direm que una categoria $\mathfrak{C}$ és additiva si verifica:*

i. Per cada parella d'objectes M, N, el conjunt de morfismes $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N)$ té estructura de grup abelià (que notarem additivament), de manera que la composició de morfismes és bilineal, i.e.

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g \qquad i \qquad f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$$

(sempre que aquestes expressions tinguin sentit).

ii. Existeix un objecte nul, que notarem O. Recordem que això vol dir que donat un objecte qualsevol M, els conjunts $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(O, M)$ i $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, 0)$ tenen un únic element.

iii. I per cada parella d'objectes M_1, M_2, existeix la suma directa $M_1 \oplus M_2$.

Notem que com a conseqüència de l'existència de suma directa de dos objectes M_1 i M_2, també tenim garantida l'existència de producte directe d'aquests dos objectes. En efecte, considerem la suma directa de M_1 i M_2: $(M = M_1 \oplus M_2, \alpha_1 : M_1 \longrightarrow M, \alpha_2 : M_2 \longrightarrow M)$. De la proposició 2.13 sabem que l'assignació $f \mapsto (f \circ \alpha_1, f \circ \alpha_2)$ és una bijecció de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, M_i)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_1, M_i) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_2, M_i)$, i per tant existeixen morfismes únics $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, M_i)$ tals que

$$p_i \circ \alpha_i = 1_{M_i} \qquad \text{i} \qquad p_i \circ \alpha_j = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M_j, M_i) \text{ per } i \neq j$$

Aquests morfismes p_i seràn les projeccions de M en els seus factors com a producte directe. Ara hem de comprovar que per tot objecte N i tota parella de morfismes $f_i : N \longrightarrow M_i$, existeix un únic morfisme $f : N \longrightarrow M$ tal que $f_i = p_i \circ f$. L'existència és immediata, prenent $f = \alpha_1 \circ f_1 + \alpha_2 \circ f_2$, ja que $p_i \circ f = p_i \circ \alpha_i \circ f_i = f_i$. Vegem per últim la unicitat. Com a conseqüència de les propietats de les α_i i les p_i tenim les igualtats

$$(\alpha_1 \circ p_1 + \alpha_2 \circ p_2) \circ \alpha_i = \alpha_i = 1_M \circ \alpha_i \text{ per } i = 1, 2$$

i per tant

$$1_M = \alpha_1 \circ p_1 + \alpha_2 \circ p_2$$

(per la propietat d'unicitat de morfismes associada a la suma directa). Aleshores, si f i $\tilde{f}$ són dos morfismes tals que $p_i \circ f = p_i \circ \tilde{f} = f_i$ per $i = 1, 2$, tenim

$$f = 1_M \circ f = (\alpha_1 \circ p_1 + \alpha_2 \circ p_2) \circ f = \alpha_1 \circ f_1 + \alpha_2 \circ f_2 = (\alpha_1 \circ p_1 + \alpha_2 \circ p_2) \circ \tilde{f} = \tilde{f}$$

i ja hem acabat.

Sigui ara $\mathfrak{C}$ una categoria additiva i $f : M \longrightarrow N$ un morfisme de $\mathfrak{C}$.

Definició 2.15. • *Un* nucli *per f és un objecte K i un morfisme $k : K \longrightarrow M$ tal que $f \circ k = 0$ i que qualsevol morfisme $h : H \longrightarrow M$ amb $f \circ h = 0$ factoritza de manera única per k, és a dir, existeix un únic morfisme $h' : H \longrightarrow K$ fent commutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "0"] & & \\ & M \arrow[r, "f"] & N \\ H \arrow[uu, "h'"] \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

• *Un* conucli *per f és un objecte C i un morfisme $c : N \longrightarrow C$ tal que $c \circ f = 0$ i que qualsevol morfisme $p : N \longrightarrow P$ amb $p \circ f = 0$ factoritza de manera única per c, és a dir, existeix un únic* *morfisme $p' : C \longrightarrow P$ fent commutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dd, "p'"] \\
M \arrow[urr, "0"] \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & N \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "p"'] & \\
 & & P
\end{tikzcd}$$

- *Una* imatge *per f és un nucli pel morfisme d'un conucli de f, i una* coimatge *per f és un conucli pel morfisme d'un nucli de f.*

Notem que, degut a les propietats universals amb què hem definit aquests objectes i morfismes, si existeixen són únics llevat d'isomorfismes únics dels objectes, i aquests es denoten (un qualsevol de la classe d'isomorfisme) com $\ker f$, $\operatorname{coker} f$, $\operatorname{im} f$ i $\operatorname{coim} f$ respectivament.

Notem també que si $k : K \longrightarrow M$ és un nucli de f i $g : L \longrightarrow K$ és tal que $k \circ g = 0$, aleshores $g = 0$. En efecte, es té $f \circ (k \circ g) = 0$, i per tant existeix un únic morfisme $h : L \longrightarrow K$ tal que $0 = k \circ g = k \circ h$. Ara bé, tant g com el morfisme 0 tenen aquesta propietat, i per tant $g = 0$. D'aquí podem deduir ràpidament que k és un morfisme mònic. Dualment, si $c : N \longrightarrow C$ és un conucli de f, la igualtat $g \circ c = 0$ implica $g = 0$, d'on resulta que c és èpic.

Suposem ara que existeixen $\ker f, \operatorname{coker} f, \operatorname{im} f$ i $\operatorname{coim} f$. Aleshores existeix un únic morfisme (anomenat *morfisme canònic*) $\overline{f} : \operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ fent commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "k"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "c"] & \operatorname{coker} f \\
 & \operatorname{coim} f \arrow[r, "\overline{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

on p i j són els morfismes associats a la coimatge i la imatge, respectivament. En efecte, com que $f \circ k = 0$ i $\operatorname{coim} f$ és un conucli de k, existeix un únic morfisme $f_1 : \operatorname{coim} f \longrightarrow N$ tal que $f = f_1 \circ p$. Per altra banda, com que $c \circ f_1 \circ p = c \circ f = 0$ i p és èpic, resulta que $c \circ f_1 = 0$. I com que $\operatorname{im} f$ és un nucli per c, resulta que existeix un únic morfisme $\overline{f} : \operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ tal que $j \circ \overline{f} = f_1$. Així doncs, ja hem demostrat l'existència però no la unicitat, ja que $\overline{f}$ és l'únic morfisme complint $f = j \circ \overline{f} \circ p$ i altres condicions, però si treiem aquestes últimes potser hi ha més morfismes. Així doncs suposem que $\overline{f}' : \operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ és un altre morfisme satisfent $f = j \circ \overline{f}' \circ p$. Aleshores tenim

$$j \circ \bar{f}' \circ p - j \circ \bar{f} \circ p = j \circ (\bar{f}' - \bar{f}) \circ p = 0$$

i com que j és mònic i p és èpic, es té $\bar{f}' - \bar{f} = 0$, d'on deduïm la unicitat de $\bar{f}$.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "k"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "c"] & \operatorname{coker} f \\
 & \operatorname{coim} f \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[ur, "f_1"] & \operatorname{im} f \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Ara ja tenim tots els ingredients per poder definir què és una categoria abeliana:

Definició 2.16. *Una categoria $\mathfrak{C}$ és* abeliana *si és additiva i a més*

i. tot morfisme admet un nucli i un conucli, i

ii. per qualsevol morfisme f, el morfisme canònic $\bar{f}$ és un isomorfisme.

Exemples:

- Totes les categories amb què treballarem en endavant (**Ab**, **Ring**, **Mod**(R), feixos de grups abelians sobre un espai topològic) són trivialment categories abelianes, on la suma directa, els nuclis i els conuclis són els definits a la manera usual. Notem que la segona condició per ser abelianes és el teorema d'isomorfia $M/\ker f \cong \operatorname{im} f$.
- Si $\mathfrak{C}$ és una categoria abeliana, aleshores la categoria oposada $\mathfrak{C}^0$ també ho és, ja que les sumes directes són els productes de $\mathfrak{C}$ (que ja hem vist que existeixen), i el nucli, conucli, imatge i coimatge d'un morfisme f de $\mathfrak{C}^0$ són el conucli, nucli, coimatge i imatge del morfisme corresponent en $\mathfrak{C}$.

2.7 Functors exactes.

Amb aquesta secció acabem el capítol introductori de categories, introduint el concepte de successió i functor exactes.

Definició 2.17. *Sigui $\mathfrak{C}$ una categoria abeliana. Una successió d'objectes i morfismes de $\mathfrak{C}$*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

és exacta a M *si un nucli de g és imatge de f.*

Com a casos particulars, tenim que $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ és exacta si i només si $\ker f = 0$ (i direm que f és un *monomorfisme*), i $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ és exacta si i només si $\operatorname{coker} f = 0$ (cas en què direm que f és un *epimorfisme*). Notem que tot monomorfisme (resp. epimorfisme) és un morfisme mònic (resp. èpic), i que tot nucli (resp. conucli) és un monomorfisme (resp. epimorfisme).

Un tipus de successions exactes molt importants, són les *successions exactes curtes*, que són les de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

De vegades, quan es presenta aquesta situació, diem que M és una extensió de M' per M''. En aquestes successions es tenen isomorfismes $\ker g \cong M'$ i $\operatorname{coker} f \cong M''$. La importància d'aquestes successions rau en què una successió qualsevol

$$\cdots M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \cdots$$

és exacta si i només si totes les successions

$$0 \longrightarrow \ker f_i \longrightarrow M_i \longrightarrow \operatorname{coker} f_i \longrightarrow 0$$

són exactes.

Dins de les successions exactes curtes tenim les *sucessions escindides*, que són aquelles que satisfan una de les següents condicions equivalents:

i. Existeix un morfisme $h : M'' \longrightarrow M$, anomenat *secció* de g, tal que $g \circ h = 1_{M''}$

ii. Existeix un morfisme $k : M \longrightarrow M'$, anomenat *retracció* de f, tal que $k \circ f = 1_{M'}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, bend left, "f"] & M \arrow[l, bend left, "k"] \arrow[r, bend left, "g"] & M'' \arrow[l, bend left, "h"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En tal cas, (M, f, h) és una suma directa per M_1 i M_2, i (M, k, g) és un producte directe.

Definim ara dues tipus importants de functors entre categories abelianes.

Definició 2.18. *Siguin $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$ dues categories additives (no necessàriament abelianes) i F un functor (covariant) de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$. Direm que F és* additiu *si per tota parella de morfismes $f_1, f_2 : M \longrightarrow N$ esté*

$$F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$$

Com a conseqüència de la definició, tenim que $F(0) = 0$. A més, si (M, α_1, α_2) és una suma directa de M_1 i M_2, aleshores $(F(M), F(\alpha_1), F(\alpha_2))$ és una suma directa per $F(M_1)$ i $F(M_2)$, i per tant F transforma successions escindides en successions escindides.

Definició 2.19. *Siguin $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C}'$ dues categories abelianes, i F un functor de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$.*

Direm que F és exacte per l'esquerra *(resp.* per la dreta*) si per tota successió exacta curta*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

de $\mathfrak{C}$, la successió imatge és exacta a llevat del zero de la dreta (resp. de l'esquerra). És a dir, en el cas covariant, si

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \quad (\textit{ resp.} \quad F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0)$$

de $\mathfrak{C}'$ és exacta, i en el cas contravariant, si

$$0 \longrightarrow F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M') \quad (\textit{ resp.} \quad F(M'') \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M') \longrightarrow 0)$$

de $\mathfrak{C}'$ és exacta. En resum, F és exacte per l'esquerra (resp. dreta) si a la successió imatge es preserva l'exactitud a l'esquerra (resp. dreta).

Direm que F és exacte *si és exacte tant per l'esquerra com per la dreta, és a dir, si transforma successions exactes curtes en successions exactes curtes. De fet, es pot demostrar que això és equivalent a que transformi qualsevol successió exacta en una altra, independentment de la seva longitud.*

Exemples:

- En la categoria de R-mòduls (on R és un anell commutatiu unitari), el functor $N \longrightarrow M \otimes_R N$ (per M un mòdul fixat) és exacte per l'esquerra, però no per la dreta. En cas que sigui exacte per la dreta direm que el mòdul M és *pla*.
- En la mateixa categoria, els functors $\mathrm{Hom}(N, -)$ i $\mathrm{Hom}(-, N)$ són exactes per l'esquerra, és a dir, si

  $$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

  és exacta, aleshores

  $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(N,f)} \mathrm{Hom}(N, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(N,g)} \mathrm{Hom}(N, M'')$$

  i

  $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,N)} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,N)} \mathrm{Hom}(M', N)$$

  també són exactes.
- El functor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ de la categoria de feixos de grups abelians (anells, mòduls,...) sobre X en la categoria **Ab** (**Ring**, **Mod**(R),...) és exacte per l'esquerra.

3 Mòduls lliures, projectius i injectius.

En aquesta secció estudiarem les categories que més ens interessen: les categories de mòduls sobre anells commutatius. En primer lloc recordarem les principals definicions i propietats d'aquestes categories (en particular veurem que són categories abelianes) i a continuació ens centrarem en tres tipus particulars de mòduls: lliures, projectius i injectius.

A partir d'ara, R denotará un anell commutatiu unitari fixat, i $\mathbf{Mod}(R)$ la categoria dels R-mòduls (que definirem a continuació).

3.1 Generalitats sobre mòduls.

Mòduls i morfismes

Com ja sabem, un R-mòdul M és un grup abelià sobre el que R actua linealment. Més concretament

Definició 3.1. *Un* R-mòdul *és un grup abelià M juntament amb una aplicació (producte per escalars) $R \times M \longrightarrow M$, $(a, x) \mapsto ax$ tal que*

- $a(x + y) = ax + ay \quad \forall a \in R, x, y \in M$
- $(a + b)x = ax + bx \quad \forall a, b \in R, x \in M$
- $a(bx) = (ab)x \quad \forall a, b \in R, x \in M$
- $1x = x \quad \forall x \in M$

Ja hem definit el que seran els objectes de la categoria $\mathbf{Mod}(R)$, però hem de definir els morfismes.

Definició 3.2. *Siguin M i N dos R-mòduls, i $f : M \longrightarrow N$ una aplicació (com a conjunts). Direm que f és un* morfisme d'R-mòduls *(o també que és* R-lineal *o simplement* lineal*) si és un morfisme de grups abelians i a més $f(ax) = af(x)$ per tot $a \in R, x \in M$.*

Una definició equivalent és que

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) \qquad \forall a, b \in R, x, y \in M$$

Notem que com a consequència de ser un morfisme de grups, es té $f(0_M) = 0_N$.

És immediat comprovar que si $f : M \longrightarrow N$ i $g : N \longrightarrow P$ són dues aplicacions R-lineals, aleshores la composició $g \circ f : M \longrightarrow P$ també ho és. Per altra banda, l'aplicació identitat $1_M : M \longrightarrow M$, $x \mapsto x$ també és un morfisme per tot R-mòdul M. Per tant, si definim $\mathrm{Hom}(M, N)$ com el conjunt de totes les aplicacions R-lineals $f : M \longrightarrow N$, tenim una categoria: la categoria $\mathbf{Mod}(R)$ dels R-mòduls.

Un morfisme $f : M \longrightarrow N$ és un *isomorfisme* si ho és en el sentit categòric, és a dir, si existeix un altre morfisme $g : N \longrightarrow M$ tal que $g \circ f = 1_M$ i $f \circ g = 1_N$. Això és equivalent a que f sigui bijectiu com a aplicació entre conjunts.

Més generalment, direm que un morfisme f és un *monomorfisme* (resp. *epimorfisme*) quan l'aplicació subjacent entre conjunts és injectiva (resp. exhaustiva). Aquesta situació es dóna justament quan f és un monomorfisme (resp. epimorfisme) en el sentit de categories abelianes (veurem que $\mathbf{Mod}(R)$ ho és), i per tant implica que f és un morfisme mònic (resp. èpic).

Els conjunts $\mathrm{Hom}(M, N)$ tenen una estructura natural de grup abelià: si $f, g : M \longrightarrow N$ són dos morfismes, el morfisme suma $f + g$ es defineix com

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in M$$

És immediat comprovar que $f + g$ també és un morfisme de M en N, i que aquesta operació defineix una estructura de grup abelià en $\mathrm{Hom}(M, N)$ amb neutre el morfisme $x \mapsto 0_N$ i oposat de f el morfisme

$-f : x \mapsto -f(x)$. Com a conseqüencia de la R-linealitat dels morfismes, la composició de morfismes és bilineal.

De fet, els conjunts $\mathrm{Hom}(M, N)$ es poden dotar d'estuctura d'R-mòdul definint $(af)(x) = a(f(x))$ per tot $a \in R, x \in M, f \in \mathrm{Hom}(M, N)$, i la composició de morfismes és R-bilineal. Això ens permet definir els functors $\mathrm{Hom}(M, -)$ i $\mathrm{Hom}(-, M)$ de la categoria d'R mòduls en ella mateixa (en general són simplement conjunts, o grups abelians si la categoria és abeliana), que jugaràn un paper important en les següents seccions.

Exemples:

- Qualsevol grup abelià G (notat additivament) té una estructura natural de $\mathbb{Z}$-mòdul. Només s'ha de definir $nx = x + \cdots + x$ (n vegades) si $n \geq 0$, i $nx = -((-n)x)$ si $n \leq 0$.
- Si $R = k$ és un cos, aleshores un k-mòdul és el mateix que un k-espai vectorial. Per tant, la noció de mòdul generalitza la d'espai vectorial. La principal diferència, però, és que un mòdul no té per què tenir base, i per tant tot resultat d'espais vectorials que necessiti de l'existència de base no serà vàlid (en general) per mòduls.
- Un ideal $\mathfrak{a}$ de R és naturalment un R-mòdul, on el producte per escalars és la restricció del producte de R. Per altra banda, el quocient $R/\mathfrak{a}$ també té una estructura natural d'R-mòdul donada per $a(b + \mathfrak{a}) = (ab) + \mathfrak{a}$.
- El grup abelià trivial $\mathbf{0} = \{0\}$ té una única estructura d'R-mòdul: la donada per $a0 = 0$, i és un objecte nul de $\mathbf{Mod}(R)$. En efecte, $\mathbf{0}$ és un objecte inicial ja que per tot mòdul M l'únic morfisme possible $\mathbf{0} \longrightarrow M$ és $0 \mapsto 0_M$, i és un objecte final perquè l'únic morfisme $M \longrightarrow \mathbf{0}$ possible (i de fet, la única aplicació com a conjunts) és $x \mapsto 0$.

Ara que hem definit una estructura, és natural definir les corresponents subestructures i quocients:

Definició 3.3. *Sigui M un R-mòdul. Diem que un subconjunt $N \subseteq M$ és un* submòdul *de M si és un subgrup del grup abelià subjacent, i a més és tancat pel producte per escalars, és a dir, per tot $a \in R$ i $x \in N$ es té $ax \in N$.*

Com és evident, un submòdul $N \subseteq M$ té una estructura natural de mòdul induïda per la de M, i la injecció canònica $j : N \longrightarrow M$ és un morfisme d'R-mòduls (de fet és un monomorfisme).

Definició 3.4. *Si N és un submòdul de M, el mòdul quocient M/N és el grup quocient M dotat de l'estructura d'R-mòdul donada per*

$$a(x + N) = ax + N \qquad a \in R, x \in M$$

La projecció canònica $\pi : M \longrightarrow M/N$ és un morfisme exhaustiu (epimorfisme) d'R-mòduls.

Exemples:

- Tot mòdul M té dos submòduls anomenats *impropis*: tot el mòdul M i el submòdul trivial $\{0_M\}$ (que poden ser el mateix, si $M = \{0_M\} = \mathbf{0}$ és el mòdul trivial). Qualsevol altre submòdul es diu que és *propi*.
- Ja hem vist que el propi anell R és un R-mòdul. En aquest cas la condició de ser submòdul és justament la condició de ser ideal, és a dir, els submòduls de R són justament els ideals de R.
- Si N és un submòdul de M, hi ha una correspondència bijectiva entre els submòduls de M/N i els submòduls de M contenint N, donada per $P \mapsto \pi^{-1}(P)$ (on π és la projecció canònica).
- Sigui M un R-mòdul i $\mathfrak{a} \subseteq R$ un ideal. Aleshores el conjunt

$$\mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \mid n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathfrak{a}, x_j \in M \right\}$$

és un submòdul de M (en el cas en què $M = \mathfrak{b}$ és un ideal de R, $\mathfrak{a}M$ es exactament l'ideal producte $\mathfrak{ab}$). Quan es té $\mathfrak{a}M = \{0\}$, M té de manera natural una estructura de $R/\mathfrak{a}$-mòdul donada per

$$(a + \mathfrak{a})x = ax \qquad \text{per } a \in R, x \in M$$

Mes generalment, $M/\mathfrak{a}M$ té una estructura natural de $R/\mathfrak{a}$-mòdul donada per

$$(a + \mathfrak{a})(x + \mathfrak{a}M) = ax + \mathfrak{a}M \qquad \text{per } a \in R, x \in M$$

- Siguin N_1, N_2 dos submòduls de M. El conjunt

$$N_1 + N_2 = \{x_1 + x_2 \,|\, x_i \in N_i\}$$

és un submòdul de M, anomenat *suma* de N_1 i N_2. Evidentment, és el mínim submòdul de M que conté N_1 i N_2. Anàlogament, si $\{N_i\}_{i \in I}$ és una família arbitrària de submòduls de M, el conjunt

$$\sum N_i = \left\{ \sum_{i \in I} \,|\, x_i \in N_i, x_i \neq 0 \text{ només per un nombre finit d'índexos} \right\}$$

s'anomena també *suma* dels N_i, i és el submòdul més petit que conté tots els N_i.

Per altra banda, el conjunt

$$\bigcap_{i \in I} N_i$$

també és un submòdul de M, la *intersecció* dels N_i, que és el màxim submòdul de M contingut en tots els N_i.

- Sigui ara $X \subseteq M$ un subconjunt qualsevol d'un mòdul M. El conjunt

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq N} N$$

on la intersecció es fa sobre tots els submòduls N contenint X, és un submòdul anomenat *submòdul generat* per X, i és el submòdul més petit que conté X. Una descripció explícita de $\langle X \rangle$ és

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \,|\, n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

En particular, el submòdul $\sum N_i$ definit abans és el submòdul generat per $X = \bigcup N_i$.

Direm que un mòdul M és *finitament generat* (abreujadament posarem *f.g.*) si existeix un subconjunt finit $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ tal que $M = \langle X \rangle = \langle x_1 \ldots x_n \rangle$. En cas que $M = \langle x \rangle$ per cert $x \in M$, direm que M és *cíclic*. A més es té $M \cong R/\mathrm{Ann}(x)$ (on $\mathrm{Ann}(x) = \{a \in R | ax = 0\}$ és l'ideal *annulador* de x).

Considerem ara un morfisme $f : M \longrightarrow N$. Els conjunts

$$\ker f = \{x \in M \,|\, f(x) = 0\} \qquad \operatorname{im} f = f(M) = \{y \in N \,|\, \exists x \in M \text{ tal que } y = f(x)\}$$

són submòduls de M i N respectivament, i s'anomenen *nucli* i *imatge* de f. Els corresponents quocients són $\operatorname{coim} f = M/\ker f$ i $\operatorname{coker} f = N/\operatorname{im} f$, i s'anomenen *coimatge* i *conucli* de f. És immediat veure que f és injectiu si i només si $\ker f = \{0_M\}$ (o equivalentment $\operatorname{coim} f = M$), i és exhaustiu si i només si $\operatorname{im} f = N$ (o també $\operatorname{coker} f \cong \{0\}$).

Exemples: Si N és un submòdul de M, la inclusió $i : N \hookrightarrow M$ és un morfisme amb nucli $\ker i = 0$ (és injectiu) i conucli $\operatorname{coker} i = M/N$. Per altra banda, la projecció $\pi : M \longrightarrow M/N$ és un morfisme amb nucli $\ker \pi = N$ i conucli $\operatorname{coker} \pi \cong \{0\}$.

Els noms d'aquests mòduls associats a un morfisme f no són casuals, sino que tenen la interpretació categòrica que correspon: $\ker f$ i la seva inclusió en M és un nucli per f, i $\operatorname{coker} f$ amb la seva projecció des de N n'és un conucli. Aleshores, per l'exemple d'abans, $\operatorname{im} f$ i la seva inclusió en N és un nucli pel conucli (i doncs una imatge), i anàlogament $\operatorname{coim} f$ amb la seva projecció des de M és un conucli pel nucli (i doncs una coimatge).

També tenim el següent resultat, que és clau per què $\mathbf{Mod}(R)$ sigui una categoria abeliana.

Teorema 3.5. Primer teorema d'isomorfisme. *Sigui $f : M \longrightarrow N$ un morfisme de mòduls. Aleshores l'aplicació induïda*

$$\bar{f} : \operatorname{coim} f = M/\ker f \longrightarrow \operatorname{im} f$$

és un isomorfisme.

Corol·lari 3.6. Segon teorema d'isomorfisme. *Si M_1 i M_2 són submòduls de M, aleshores l'aplicació $M_1 \longrightarrow (M_1 + M_2)/M_2, m_1 \mapsto m_1 + M_2$ està ben definida, té nucli $M_1 \cap M_2$ i és exhaustiva. Per tant indueix un isomorfisme*

$$M_1/(M_1 \cap M_2) \longrightarrow (M_1 + M_2)/M_2$$

Corol·lari 3.7. Tercer teorema d'isomorfisme. *Si $M_2 \subseteq M_1$ són submòduls de M, aleshores l'aplicació $M/M_2 \longrightarrow M/M_1, m + M_2 \mapsto m + M_1$ està ben definida, té nucli M_1/M_2 i és exhaustiva. Per tant indueix un isomorfisme*

$$M_1/(M_1 \cap M_2) \longrightarrow (M_1 + M_2)/M_2$$

Sumes, productes i límits.

Estudiem ara l'existència de sumes i productes directes (ja sabem que sempre tenim unicitat llevat d'isomorfisme únic).

Sigui $\{M_i\}_{i\in I}$ una família d'R-mòduls. El conjunt producte

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} | x_i \in M_i\}$$

admet una estructura d'R-mòdul, donada per

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I} \qquad \text{i} \qquad a(x_i)_{i\in I} = (ax_i)_{i\in I}$$

A més, les projeccions (com a conjunts) $p_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$ (donades per $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$) són (epi)morfismes de mòduls, i fan que $\prod_{i\in I} M_i$ sigui un producte directe dels $\{M_i\}$: si $f_i : N \longrightarrow M_i$ és una família de morfismes, tenim l'aplicació $f : N \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ per $x \longrightarrow (f_i(x))$, que és un morfisme i compleix $p_i \circ f = f_i$.

Per altra banda, considerem el submòdul de $\prod M_i$

$$\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} | x_i \neq 0 \text{ només per un nombre finit d'índexos}\}$$

i per cada $j \in I$ el (mono)morfisme $\lambda_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ donat per $(\lambda_j(x))_j = x$ i $(\lambda_j(x))_i = 0$ per $i \neq j$. Aquest mòdul amb els morfismes λ_i és una suma directa pels $\{M_i\}$, ja que si $f_i : M_i \longrightarrow N$ és una família de morfismes, el morfisme $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ donat per $f((x_i)) = \sum_{i\in I} f_i(x_i)$ està ben definit (aquí és essencial la condició de finitud imposada als elements de $\bigoplus_{i\in I} M_i$) i compleix $f \circ \lambda_i = f_i$. Per tant $\bigoplus_{i\in I} M_i$ amb els λ_i és una suma directa dels M_i.

Notem que si $\{M_i\}$ és una família finita, la suma directa i el producte directe són el mateix.

Exemple: Siguin M_1, M_2 dos submòduls de M tals que $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Aleshores el submòdul suma $M_1 + M_2$ és isomorf a la seva suma directa $M_1 \oplus M_2$, i de fet escriurem $M_1 + M_2 = M_1 \oplus M_2$. En aquesta situació direm que M' i M'' són *sumands* de M, i que M'' és un *complement* de M' en M

Els següents resultats són conseqüències directes de les proposicions 2.13 i 2.10:

Teorema 3.8. *Si $\lambda_j : M_j \longrightarrow \bigoplus M_i$ són les injeccions canòniques i N és un altre R-mòdul, aleshores l'aplicació*

$$\theta : \mathrm{Hom}(\bigoplus M_i, N) \longrightarrow \prod \mathrm{Hom}(M_i, N)$$

donada per $\varphi \mapsto (\varphi \circ \lambda_i)_{i\in I}$ és un isomorfisme.

Teorema 3.9. *Si $p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j$ són les projeccions canòniques i N és un altre R-mòdul, aleshores l'aplicació*

$$\theta : \mathrm{Hom}(N, \prod M_i) \longrightarrow \prod \mathrm{Hom}(N, M_i)$$

donada per $\varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i\in I}$ és un isomorfisme.

En termes functorials, podem dir que $\mathrm{Hom}(-, N)$ transforma sumes en productes i que $\mathrm{Hom}(N, -)$ transforma productes en productes. En particular, tots dos functors transformen sumes finites en sumes finites.

Però no només tenim assegurada l'existència de sumes i productes directes, sinò també la de límits injectius i projectius (i en particular de push-out's i de pull-back's). Comencem pels límits inductius:

Teorema 3.10. *Sigui I un conjunt parcialment preordenat, i $\{M_i, f_{ij}\}_{i,j\in I}$ un sistema directe d'R-mòduls i morfimes (i.e., per $i \leq j$ tenim un morfisme $f_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$, de manera que $f_{ii} = 1_{M_i}$ per tot $i \in I$, i $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ per tot $i \leq j \leq k$). Aleshores el límit inductiu $\varinjlim_{i\in I} M_i$ existeix (i per tant és únic llevat d'isomorfisme únic).*

Demostració. Per cada $i \in I$, sigui $\lambda_i : M_i \longrightarrow M = \bigoplus M_i$ la injecció canònica de M_i en la suma directa M. Considerem el submòdul S de M generat pels elements de la forma $\lambda_j(f_{ij}(a_i)) - \lambda_i(a_i)$ on $a_i \in M_i$ i $i \leq j$. Aleshores podem prendre

$$\varinjlim M_i = \left(\bigoplus M_i\right)/S$$

i definir les aplicacions $f_i : M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ com

$$f_i(a_i) = \lambda_i(a_i) + S$$

(és a dir, les injeccions en la suma composades amb el pas al quocient).

Ara és immediat comprovar que $\varinjlim M_i$ i les f_i així definits compleixen la propietat universal del límit inductiu, i ja hem acabat. □

I anàlogament pels límits projectius:

Teorema 3.11. *Sigui I un conjunt parcialment preordenat i $\{M_i, f_{ij}\}_{i,j\in I}$ un sistema projectiu de mòduls i morfismes (i.e., per $i \leq j$ tenim un morfisme $f_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$, de manera que $f_{ii} = 1_{M_i}$ per tot $i \in I$, i $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ per tot $i \leq j \leq k$). Aleshores el límit projectiu $\varprojlim_{i\in I} M_i$ existeix (i per tant és únic llevat d'isomorfisme únic).*

Demostració. Per cada $i \in I$, sigui $p_i : M = \prod M_i \longrightarrow M_i$ la projecció canònica del producte M en M_i. Considerem el submòdul de M

$$\varprojlim M_i = \{(a_i) \in M | a_i = f_{ij}(a_j) \text{ si } i \leq j\}$$

i definir les aplicacions $f_i : \varprojlim M_i \longrightarrow M_i$ com

$$f_i((a_i)_{i\in I}) = p_i((a_i)_{i\in I})$$

(és a dir, les restriccions de les projeccions p_i).

La comprovació de la propietat universal del límit projectiu és immediata. □

En particular tenim assegurada l'existència de push-outs i pull-backs. Vegem ara dues propietats que seran útils en seccions posteriors. La demostració de la segona és rutinària i l'ometem.

Lema 3.12. *Una construcció explícita del push-out és la següent: donats $g : A \longrightarrow B$ i $f : A \longrightarrow C$, el mòdul $D = (C \oplus B)/W$ (on $W = \{(f(a), -g(a)) | a \in A\}$) i els morfismes $f' : B \longrightarrow D, b \mapsto (0, b) + W$ i $g' : C \longrightarrow D, c \mapsto (c, 0) + W$ són un push-out per $\{A, B, C, f, g\}$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

Demostració. El que hem de comprovar és que per tot mòdul M i tota parella de morfismes $p : B \longrightarrow M$ i $q : C \longrightarrow M$ tals que $p \circ g = q \circ f$, existeix un únic morfisme $h : D \longrightarrow M$ fent commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "p"] & \\ C \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "q"'] & D \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & M \end{tikzcd}$$

Si imposem $p = h \circ f'$ i $q = h \circ g'$, resulta que

$$h((0, b) + W) = h(f'(b)) = p(b) \quad \forall b \in B \qquad \text{i} \qquad h((c, 0) + W) = h(g'(c)) = q(c) \quad \forall c \in C$$

A més, si volem que h sigui morfisme, la única manera de definir h és

$$h((c, b) + W) = p(b) + q(c)$$

Ara ja només hem de veure l'existència, és a dir, que h està ben definit. Però això és conseqüència de que

$$h((f(a), -g(a)) + W) = p(f(a)) + q(-g(a)) = p(f(a)) - q(g(a)) = 0$$

per tot $a \in A$. $\square$

Lema 3.13. *Al push-out anterior, si g és injectiu (resp. exhaustiu), aleshores g' també ho és. A més, morfismes paral·lels tenen conuclis isomorfs.*

Producte tensorial

Fins ara hem recordat les construccions que fan que $\mathbf{Mod}(R)$ sigui una categoria abeliana (sumes directes, nuclis i conuclis, etc.) i algunes altres relacionades (productes directes, límits inductius i projectius,...). Ens falta, però, una construcció que donarà lloc a un altre functor interessant: el producte tensorial, que està relacionada amb el concepte d'aplicació R-bilineal[1]:

Definició 3.14. *Siguin M, N, P tres R-mòduls. Una aplicació*

$$f : M \times N \longrightarrow P$$

*és R-*bilineal *(o simplement* bilineal*) si és R-lineal en cada variable, i.e. si compleix*

[1]De fet, es pot relacionar amb el concepte d'aplicació R-biadditiva, que és més general.

- $f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n) \quad \forall m, m' \in M, n \in N$
- $f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n') \quad \forall m \in M, n, n' \in N$
- $f(am,n) = af(m,n) = f(m,an) \quad \forall m \in M, n \in N, a \in R$

Exemple: Ja hem vist que els conjunts $\mathrm{Hom}(M,N)$ són R-mòduls, i la composició

$$\mathrm{Hom}(M,N) \times \mathrm{Hom}(N,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,P)$$

és R-bilineal.

Definició 3.15. *Siguin M, N dos R-mòduls. Un* producte tensorial *per M i N és un R-mòdul, denotat $M \otimes_R N$ (o simplement $M \otimes N$ si R es pot sobreentendre), juntament amb una aplicació R-bilineal $h : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ tal que per qualsevol aplicació bilineal $f : M \times N \longrightarrow P$ existeix una única aplicació lineal $f' : M \otimes_R N \longrightarrow P$ tal que $f = f' \circ h$, i.e. fent commutar el següent diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & M \otimes_R N \arrow[dl, dashed, "f'"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

El producte tensorial de dos mòduls existeix i és únic llevat d'isomorfisme únic (com és habitual en objectes definits per propietats universals).

Teorema 3.16. *Siguin M, N dos R-mòduls. Aleshores el seu producte tensorial existeix i és únic llevat d'isomorfisme.*

Demostració. Comencem veient l'existència. Sigui $F = R^{(M\times N)} = \sum_{(m,n)\in M\times N} R$ el mòdul suma de tantes components com elements en el producte $M \times N$, és a dir, el mòdul generat per totes les combinacions R-lineals de parells (m, n). considerem ara el submòdul S generat pels elements de la forma

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n), \quad (m, n + n') - (m, n) - (m, n')$$
$$(am, n) - a(m, n), \quad (m, an) - a(m, n)$$

i definim $M \otimes_R N = F/S$. Si denotem la classe d'equivalència $(m, n) + S$ per $m \otimes n$, aleshores l'aplicació $h : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ definida per $(m, n) \mapsto m \otimes n$ és R-bilineal per com hem definit S.

Per altra banda, sigui P és un altre R-mòdul i $f : M \times N \longrightarrow P$ una aplicació bilineal. Existeix un únic morfisme $\varphi : F \longrightarrow P$ definit per $\varphi((m, n)) = f(m, n)$ i estés per R-linealitat. A més, com que f és bilineal, es té $S \subseteq \ker \varphi$, i per tant existeix $f' : M \times_R N = F/S \longrightarrow G$ de manera que $f'(m \otimes n) = \varphi((m, n)) = f(m, n)$, és a dir $f' \circ h = f$. La unicitat de f' és conseqüència de que $M \otimes_R N$ està generat pels elements de la forma $m \otimes n$.

Per veure la unicitat, suposem que X és un altre producte tensorial, i sigui $k : M \times N \longrightarrow X$ la corresponent aplicació bilineal. Aleshores per la propietat universal del producte tensorial existeixen dos morfismes $h' : M \otimes_R N \longrightarrow X$ i $k' : X \longrightarrow M \otimes_R N$ fent commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"'] & & M \otimes_R N \arrow[dl, bend right, "k'"'] \\
& X \arrow[ur, bend right, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

Si ara apliquem la propietat universal amb $P = M \otimes_R N$ i $f = k$ obtenim el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & M \otimes_R N \arrow[dl, dashed] \\
& M \otimes_R N &
\end{tikzcd}$$

on el morfisme puntejat pot ser la identitat de $M \otimes_R N$ i també $h' \circ k'$ (ja que $h' \circ k' \circ h = h' \circ k = h$). Per unicitat resulta que $h' \circ k' = 1_{M \otimes_R N}$. Anàlogament tenim $k' \circ h = 1_X$, i per tant $X \cong M \otimes_R N$ (amb isomorfisme únic). $\square$

Observem que $M \otimes_R N$ està generat pels elements de la forma $m \otimes n$, i per tant un element qualsevol de $M \otimes_R N$ és de la forma $\sum m_i \otimes n_i$ (suma finita), però aquesta expressió no és única (en general). Per tant una aplicació definida pels seus valors en els elements $m \otimes n$ no té per què estar ni tan sols ben definida (pot no satisfer les relacions entre els $m \otimes n$). La manera més "segura" de definir un morfisme amb domini $M \otimes_R N$ és fent servir la propietat universal del producte tensorial, començant per una aplicació bilineal amb domini $M \times N$. Per exemple, vegem la demostració del següent resultat:

Teorema 3.17. *Siguin $f : M \longrightarrow M'$ i $g : N \longrightarrow N'$ dos morfismes d'R-mòduls. Aleshores existeix un únic morfisme $f \otimes g : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ tal que $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$.*

Si $f' : M' \longrightarrow M''$ i $g' : N' \longrightarrow N''$ són dos morfismes més, aleshores tenim

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \otimes g)$$

Demostració. L'aplicació $M \times N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ definida per $(m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$ és bilineal, i per tant existeix el morfisme que volem. La unicitat és conseqüència de que els $m \otimes n$ generen $M \otimes_R N$.

Per la segona part, només hem de considerar que tant $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ com $(f' \circ f) \otimes (g' \otimes g)$ són morfismes $M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N''$ complint $m \otimes n \mapsto f'(f(m)) \otimes g'(g(n))$, i aplicar la unicitat anterior. $\square$

Aquests resultats permeten demostrar que, fixat un R-mòdul N, l'aplicació $F : \mathbf{Mod}(R) \longrightarrow \mathbf{Mod}(R)$ donada per

$$F(M) = M \otimes_R N \qquad F(f) = f \otimes 1_N$$

és de fet un functor additiu, que denotarem per $- \otimes_R N$.

Abans de passar a estudiar successions exactes en $\mathbf{Mod}(R)$, recordem algunes propietats del producte tensorial.

Proposició 3.18.

- *Per tot R-mòdul M es té un isomorfisme (únic)*

$$R \otimes_R M \cong M \qquad a \otimes m \mapsto am$$

- *Per tota parella d'R-mòduls M i N es té un (únic) isomorfisme*

$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M \qquad m \otimes n \mapsto n \otimes m$$

- *Per tots tres R-mòduls M, N, P es té un isomorfisme (únic)*

$$(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P) \qquad (m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p)$$

  Per tant, la notació $M \otimes_R N \otimes_R P$ no porta a confusió.

- *Per tota família d'R-mòduls $\{M_i\}$ i tot R-mòdul N es té un (únic) isomorfisme*

$$\left(\bigoplus M_i\right) \otimes_R N \cong \bigoplus (M_i \otimes_R N) \qquad (m_i) \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)$$

- *Per tots tres R-mòduls M, N, P, es té una bijecció natural (de fet, un isomorfisme)*

$$\mathrm{Hom}(M \otimes_R N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

  definida com segueix. Sigui $f \in \mathrm{Hom}(M \otimes_R N, P)$. Fixant una variable $m \in M$ obtenim un morfisme $f_m : N \longrightarrow P$ donada per $f_m(n) = f(m \otimes n)$, i per les propietats del producte tensorial (de fet, per què f correspon a una aplicació bilineal $M \times N \longrightarrow P$) l'assignació $m \mapsto f_m$ és un morfisme de M en $\mathrm{Hom}(N, P)$. En resum, el functor $- \otimes_R N$ és adjunt per la dreta de $\mathrm{Hom}(N, -)$.

Successions exactes

Per acabar amb el recordatori de mòduls, repasem com són i quines propietats tenen les successions exactes, així com les propietats d'exactitud dels principals functors de $\mathbf{Mod}(R)$. Recordem la definició de successió exacta en una categoria abeliana:

Definició 3.19. *Sigui $\mathfrak{C}$ una categoria abeliana. Una successió d'objectes i morfismes de $\mathfrak{C}$*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

és exacta a M *si un nucli de g és imatge de f.*

En el cas $\mathfrak{C} = \mathbf{Mod}(R)$ és equivalent a que $\ker g = \operatorname{im} f$ com a submòduls de M. Evidentment, una successió (de longitud arbitrària)

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow$$

Les següents propietats són immediates:

- Les successions
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \qquad \text{i} \qquad M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
són exactes si i només si f és injectiu (resp. g és exhaustiu)

- Si la successió
$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$
és exacta amb f exhaustiu i g injectiu, aleshores $M = 0$. En particular, l'exactitud de $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ implica $M = 0$.

- Si la successió
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$
és exacta, aleshores $M' \cong i(M')$ i $M/i(M') \cong M''$.

- Si $f : M \longrightarrow N$ és un morfisme qualsevol, hi ha una successió exacta
$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$$

Una propietat que també ens serà útil més endavant és el següent

Lema 3.20. *Considerem el diagrama commutatiu següent, on les files són exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C'
\end{tikzcd}$$

Aleshores existeix un únic morfisme $f : A \longrightarrow A'$ fent commutar el diagrama.

Anàlogament, només hi ha una manera de completar el diagrama amb files exactes següent

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Recordem també que una successió exacta curta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

escindeix (és escindida) si es dóna una de les següents condicions (que són equivalents):

- Existeix un morfisme (secció) $j : M'' \longrightarrow M$ tal que $p \circ j = 1_{M''}$.
- Existeix un morfisme (retracció) $r : M \longrightarrow M'$ tal que $r \circ i = 1_{M'}$.
- Es té $M \cong M' \oplus M''$.

Ara passem a estudiar l'exactitud dels functors $\mathrm{Hom}(N, -)$, $\mathrm{Hom}(-, N)$ i $- \otimes_R N$.

Teorema 3.21. *Per qualsevol R-mòdul N, els functors $\mathrm{Hom}(N, -)$ i $\mathrm{Hom}(-, N)$ són exactes per l'esquerra, és a dir, si*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

és una successió exacta, les successions

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}(N, M) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(N, M'')$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(M', N)$$

són exactes.

Demostració. Fem la demostració per $\mathrm{Hom}(N, -)$, ja que la prova per $\mathrm{Hom}(-, N)$ és anàloga. Hem de veure $\ker \alpha_* = 0$ i $\ker \beta_* = \mathrm{im}\, \alpha_*$.

- α_* és injectiu: Sigui $f \in \mathrm{Hom}(N, M')$ tal que $\alpha_*(f) = \alpha \circ f = 0$. Aleshores $\alpha(f(n)) = 0$ per tot $n \in N$. Com que α és injectiu, tenim $f(n) = 0$ per tot $n \in N$, i.e. $f = 0$.
- $\mathrm{im}\, \alpha_* \subseteq \ker \beta_*$: Prenem $g \in \mathrm{im}\, \alpha_*$, i sigui $f \in \mathrm{Hom}(N, M')$ tal que $g = \alpha_*(f) = \alpha \circ f$. Aleshores $\beta_*(g) = \beta \circ g = \beta \circ \alpha \circ f = 0 \circ f = 0$, i per tant $g \in \ker \beta_*$.
- $\ker \beta_* \subseteq \mathrm{im}\, \alpha_*$: Sigui $g : N \longrightarrow M$ tal que $\beta \circ g = \beta_* g = 0$. Hem de veure que existeix $f : N \longrightarrow M'$ tal que $g = \alpha \circ f$. Si $n \in N$, aleshores $\beta(g(n)) = 0$, i per tant $g(n) \in \ker \beta = \mathrm{im}\, \alpha$, de manera que existeix $m' \in M'$ tal que $g(n) = \alpha(m')$, i aquest m' és únic per què α és injectiva. Definim $f : N \longrightarrow M'$ per $f(n) = \alpha^{-1}(g(n))$ (que té sentit perquè $\mathrm{im}\, g \subseteq \ker \beta = \mathrm{im}\, \alpha$), i clarament tenim $\alpha \circ f = g$.

□

En canvi, no podem esperar que aquests dos functors siguin exactes:

Exemples: Prenem $R = \mathbb{Z}$, i per tant treballarem amb grups abelians. Considerem ara la successió exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

- Prenem $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Aleshores $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}) = 0$ perquè si $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es un morfisme qualsevol, hem de tenir

  $$2f(\bar{1}) = f(\bar{2}) = f(\bar{0}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

  i per tant $f(\bar{1}) = 0$, és a dir, $f = 0$. Per altra banda, $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$, ja que tenim el morfisme donat per

  $$f(\bar{1}) = \overline{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

  Per tant, el morfisme $\beta_* : \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ no pot ser exhaustiu.

- Si ara prenem $N = \mathbb{Z}$, tenim que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ i $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq \emptyset$, i per tant

$$\alpha^* : \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

  no pot ser exhaustiu.

Quant al producte tensorial tenim

Teorema 3.22. *Per qualsevol R-mòdul N, el functor $- \otimes_R N$ és exacte per la dreta.*

Demostració. Sigui $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ una successió exacta d'R-mòduls. Volem veure que la successió

$$M' \otimes N \xrightarrow{\alpha \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{\beta \otimes 1} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

també és exacta (on $1 = 1_N$ és la identitat de N i tots els productes tensorials són sobre R).

- $\mathrm{im}\,(\alpha \otimes 1) \subseteq \ker(\beta \otimes 1)$: N'hi ha prou amb veure que $(\beta \otimes 1) \circ (\mathrm{im}\,\alpha \otimes 1) = 0$ Però pel teorema 3.17 tenim

$$(\beta \otimes 1) \circ (\mathrm{im}\,\alpha \otimes 1) = (\beta \circ \alpha) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$$

- $\ker(\beta \otimes 1) \subseteq \mathrm{im}\,(\alpha \otimes 1)$: Sigui $E = \mathrm{im}\,(\alpha \otimes 1)$. Aleshores, per l'apartat anterior, β indueix un morfisme

$$\bar{\beta} : (M \otimes N)/E \longrightarrow M' \otimes N \qquad (m \otimes n) + E \mapsto \beta(m) \otimes n$$

  És a dir, si π és la projecció $M \otimes N \longrightarrow (M \otimes N)/E$, tenim $\beta \otimes 1 = \bar{\beta} \circ \pi$ (ja que coincideixen sobre un conjunt de generadors de $M \otimes N$).

  Si vegem que $\bar{\beta}$ és un isomorfisme ja haurem acabat, ja que aleshores

$$\ker(\beta \otimes 1) = \ker(\bar{\beta} \circ \pi) = \ker \pi = E = \mathrm{im}\,(\alpha \otimes 1)$$

  Per veure que $\bar{\beta}$ és un isomorfisme, construirem un invers $M'' \otimes N \longrightarrow (M \otimes N)/E$. L'aplicació $f : M'' \times N \longrightarrow (M \otimes N)/E$ donada per

$$f(m'', n) = m \otimes n + E \qquad \text{on } m \text{ és tal que} \beta(m) = m''$$

  està ben definida: m existeix perquè β és exhaustiu, i si $m_1 \in M$ és un altre element tal que $\beta(m_1) = m''$, aleshores $m_1 - m \in \ker \beta = \mathrm{im}\,\alpha$, de manera que existeix un element $m' \in M'$ tal que $\alpha(m') = m_1 - m$, i per tant

$$m_1 \otimes n - m \otimes n = (m_1 - m) \otimes n = \alpha(m') \otimes n = (\alpha \otimes 1)(m' \otimes n) \in \mathrm{im}\,(\alpha \otimes 1) = E$$

  A més, f és bilineal, i per tant indueix $\bar{f} : M'' \otimes N \longrightarrow (M \otimes N)/E$ tal que $\bar{f}(m'' \otimes n) = m \otimes n + E$. Ara és immediat comprovar que $\bar{\beta}$ i $\bar{f}$ són morfismes inversos, i ja hem acabat.

- Per últim, hem de veure que $\beta \otimes 1$ és exhaustiu. Sigui $\sum m_i'' \otimes n_i \in M'' \otimes N$ un element qualsevol. Com que β és exhaustiu, existeixen $m_i \in M$ tals que $\beta(m_i) = m_i''$, de manera que

$$(\beta \otimes 1) \left(\sum m_i \otimes n_i \right) = \sum m_i'' \otimes n_i$$

  de manera que $\sum m_i'' \otimes n_i \in \mathrm{im}\,(\beta \otimes 1)$ i $\beta \otimes 1$ és exhaustiva.

□

Notem que el functor $N \otimes_R -$ és naturalment equivalent a $- \otimes_R N$ (via l'isomorfisme $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$), i per tant també és exacte per la dreta.

Com en el cas dels Hom, el functor $- \otimes_R N$ no té per què ser exacte a l'esquerra:

Exemple: Posem $R = \mathbb{Z}$ i $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i considerem la mateixa successió que abans

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Aleshores $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong N \neq 0$ (per la proposició 3.18) però $\mathbb{Q} \otimes N = 0$ (ja que per tot element de la forma $q \otimes n$ tenim $q \otimes n = \frac{q}{2} \otimes 2n = \frac{q}{2} \otimes 0 = 0$). Per tant, la successió

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$$

no és exacta.

3.2 Mòduls lliures.

En aquest apartat estudiarem els que potser són els mòduls més senzills: els mòduls lliures.

Definició 3.23. *Un R-mòdul F és* lliure *si és (isomorf a) una suma de còpies de R. Un conjunt $X = \{x_i\}_{i \in I} \subseteq F$ tal que $Rx_i \cong R$ i $F = \bigoplus_{i \in I} Rx_i$ s'anomena* base *de F.*

De la definició es dedueix que si $X = \{x_i\}$ és una bse de F, qualsevol element $m \in F$ s'escriu de manera única com

$$m = \sum a_i x_i$$

on els $a_i \in R$ son tots zero llevat d'un nombre finit. Aquesta propietat fa que els mòduls lliures siguin molt semblants als espais vectorials. Una altra propietat comuna (com mostra el següent resultat) és que tota aplicació lineal queda determinada per les imatges d'una base.

Teorema 3.24. *Sigui $X = \{x_i | i \in I\}$ una base d'un mòdul lliure F. Donat qualsevol mòdul N i qualsevol funció $f : X \longrightarrow N$, existeix un únic morfisme $\tilde{f} : F \longrightarrow N$ estenent f*

Demostració. Per un $i \in I$ fixat, definim $f_i : Rx_i \longrightarrow N$ per $ax_i \mapsto af(x_i)$. Com que $F = \bigoplus_{i \in I} Rx_i$, la propietat universal de la suma directa dóna un únic $\tilde{f} : F \longrightarrow N$ tal que $\tilde{f}(x_i) = f_i(x_i) = f(x_i)$. $\square$

Notem que en aquest cas es té $\tilde{f}\left(\sum a_i x_i\right) = \sum a_i f(x_i)$.

Com a conseqüència tenim el següent resultat sobre la exactitud del functor $\mathrm{Hom}(F, -)$:

Teorema 3.25. *Considerem el següent diagrama amb β exhaustiu:*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si F és lliure i $\alpha : F \longrightarrow N$ és qualsevol morfisme, aleshores existeix un morfisme $\gamma : F \longrightarrow M$ (no necessàriament únic) fent commutar el diagrama. Equivalentment, el functor $\mathrm{Hom}(F, -)$ *és exacte.*

Demostració. Sigui $X = \{x_i | i \in I\}$ una base de F. Com que β és exhaustiu, cada $\alpha(x_i)$ es pot aixecar a M, és a dir, existeix un $m_i \in M$ tal que $\beta(m_i) = \alpha(x_i)$. Per l'axioma de l'elecció, tenim una aplicació $\varphi : X \longrightarrow M$ tal que $\beta(\varphi(x_i)) = \alpha(x_i)$ per tot $i \in I$. Pel teorema 3.24 exiteix un morfisme $\gamma : F \longrightarrow M$ estenent φ. Ara, com que els x_i generen F i per tot i tenim

$$\beta(\gamma(x_i)) = \beta(\varphi(x_i)) = \alpha(x_i)$$

és a dir, $\alpha = \beta \circ \gamma$.

Per veure que $\mathrm{Hom}(F, -)$ és exacte, pel teorema 3.21 només hem de comprovar que sigui exacte per la dreta, és a dir, que envia epimorfismes a epimorfismes. Si $M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ és exacta, volem veure que $\mathrm{Hom}(F, M) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(F, N) \longrightarrow 0$ també és exacta, és a dir, que donat $g \in \mathrm{Hom}(F, N)$, existeix $f \in \mathrm{Hom}(F, M)$ tal que $g = \beta_*(f) = \beta \circ f$. Ara bé, això és el que acabem de demostrar. $\square$

Una de les propietats més interessants dels mòduls lliures és la següent:

Teorema 3.26. *Tot R-mòdul M és quocient d'un mòdul lliure.*

Demostració. Sigui F el mòdul lliure amb base M (considerat com a conjunt), és a dir, $F = \bigoplus_{m \in M} R$. Considerem l'aplicació $f : M \longrightarrow M$, $x \mapsto x$ (on el primer M és considerat com a conjunt i el segon com a R-mòdul). Pel teorema 3.24, existeix una única aplicació $\tilde{f} : F \longrightarrow M$ estenent f, i $\tilde{f}$ és exhaustiva per construcció. Per tant, $M \cong F/\ker \tilde{f}$. $\square$

Ara bé, el mòdul lliure construit a la demostració del teorema pot ser molt més gran del necessari, ja que pot haver-hi mòduls lliures més petits que s'apliquin exhaustivament sobre M. La interpretació que hem de fer és que tot mòdul M es pot escriure en termes de generadors i relacions: si F és lliure amb base X i $f : F \longrightarrow M$ és exhaustiva, el conjunt X (o pròpiament parlant, $f(X)$) s'anomena *conjunt de generadors* per M, i el submòdul $\ker f$ és el *submòdul de relacions.*

Abans de continuar, notem que dos bases d'un espai vectorial tenen el mateix nombre d'elements, i això també és cert pels mòduls lliures:

Teorema 3.27. *Siguin $X = \{x_i | i \in I\}$ i $X' = \{x'_j | j \in J\}$ dos bases d'un mateix mòdul lliure F. Aleshores X i X' tenen el mateix cardinal.*

Demostració. Sigui $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R (existeix pel Lema de Zorn), i $k = R/\mathfrak{m}$ el cos quocient. Aleshores, el mòdul quocient $F/\mathfrak{m}F$ té una estructura natural d'$R/\mathfrak{m}$-mòdul, és a dir, de k-espai vectorial. Com que $\mathfrak{m}F = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{m}x_i$, tenim que $F/\mathfrak{m}F \cong \bigoplus_{i \in I}(Rx_i/\mathfrak{m}x_i)$. Ara bé, $Rx_i/\mathfrak{m}x_i \cong Rx'_j/\mathfrak{m}x'_j \cong k$, i per tant $F/\mathfrak{m}F$ té dimensió $|I|$. Anàlogament, raonant amb els elements de X', resulta que $F/\mathfrak{m}F$ té dimensió $|J|$. Com que el resultat és cert per espais vectorials, resulta que $|I| = |J|$ i ja hem acabat. $\square$

El cardinal d'una base qualsevol d'un mòdul M s'anomena *rang* de M.

Suposem ara que M és de rang finit n. ¿En quines condicions n elements $x_1, \dots, x_n$ de M són base de M? Evidentment, és necessari que generin tot M, i de fet ara veurem que aquesta condició també és suficient. Abans, però, necessitem alguns lemes.

Lema 3.28. *Sigui M un R-mòdul finitament generat. Si $M = \mathfrak{a}M$ per algun ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$, aleshores $(1-a)M = 0$ per algun $a \in \mathfrak{a}$.*

Demostració. Sigui $\{x_1, \dots, x_n\}$ un sistema de generadors de M. Com que $M = \mathfrak{a}M$, existeixen escalars $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ tals que cada x_i es pot escriure com $x_i = \sum_j a_i j x_j$. En termes matricials, això es pot escriure com $BX = 0$, on X és la matriu columna formada pels x_i i $B = I_n - (a_{ij})$. Sigui B^* la matriu adjunta de B (la matriu de cofactors), de manera que $B^*B = (\det B)I_n$. Aleshores $0 = B^*BX = (\det B)X$, és a dir, $(\det B)x_i = 0$ per tot x_i, i per tant $(\det B)M = 0$. Per altra banda, com que els $a_{ij} \in \mathfrak{a}$, resulta que $\det B = 1 - a$, amb $a \in \mathfrak{a}$. $\square$

Teorema 3.29. *Sigui M un R-mòdul finitament generat. Si $\beta : M \longrightarrow M$ és un epimorfisme, aleshores és un isomorfisme.*

Demostració. Sigui $S = R[x]$ l'anell de polinomis en una variable amb coeficients a R. Posem en M l'estructura d'S-mòdul donada per $xm = \beta(m)$, és a dir, definint

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)m = a_n \beta^n(m) + \cdots + a_1 \beta(m) + a_0 m$$

Sigui $\mathfrak{a} = Sx$ l'ideal d'S generat per x. Com que β és exhaustiu, tenim $\mathfrak{a}M = M$. Pel lema 3.28, aplicat per $R = S$, resulta que existeix $a \in \mathfrak{a}$ tal que $(1-a)M = 0$. Si posem $a = \sum_{i=1}^{t} a_i\beta^i$ per certs $a_i \in R$, resulta que $\gamma = \sum_{i=1}^{t} a_i\beta^{i-1}$ és un invers per β. $\square$

Corol·lari 3.30. *Sigui F un R-mòdul lliure de rang finit n. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ genera F, aleshores és una base de F.*

Demostració. Sigui M lliure amb base $\{m_1, \dots, m_n\}$ i sigui $\varphi : M \longrightarrow F$ definida per $m_i \mapsto x_i$. N'hi ha prou amb veure que φ és un isomorfisme. Com que A està generat pels a_i, resulta que φ és exhaustiva, i per tant tenim una successió exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 0$$

on $K = \ker\varphi$. Vegem ara que aquesta successió és escindida. Sigui $\{y_1, \dots, y_n\}$ una base de F, i prenem $z_i \in M$ tals que $\varphi(z_i) = y_i$. Aleshores existeix una aplicació $\psi : F \longrightarrow M$ definida per $y_i \mapsto z_i$, i per construcció $\varphi(\psi(y_i)) = y_i$, de manera que $\varphi \circ \psi = 1_F$ i la successió escindeix. Per tant, $M = K \oplus F'$ on $F' \cong F \cong M$ (per què tots són lliures de rang n). Definim $\beta : M \longrightarrow M$ com la composició $M \xrightarrow{p} F' \longrightarrow M$ (on p és la projecció de nucli K sobre el sumand F'). És evident que β és exhaustiu amb nucli K, i pel teorema anterior (3.29) β és un isomorfisme. Per tant $K = 0$ i doncs $\varphi : M \longrightarrow F$ és un isomorfisme. $\square$

Recordem que pel teorema 3.26 tot mòdul M és quocient d'un lliure, és a dir, es pot posar com $M = F/S$ amb F un mòdul lliure i S un submòdul. És natural plantejar-se si de les propietats de F i S es poden deduïr propietats de M. En el cas de grups abelians finitament generats, sabem que F és finitament generat i que S també és lliure de rang finit. A més, podem trobar bases de F i S prou bé relacionades que permeten demostrar que tot grup abelià finitament generat és una suma (o producte) de grups cíclics (i a més, tenim informació sobre els seus ordres). Si ara considerem el cas d'R-mòduls, per R arbitrari, la situació no és tan bona, ja que F pot tenir submòduls que no siguin lliures (fins i tot en el cas finitament generat). Sí podrem, però, expressar S de nou com un quocient d'un mòdul lliure, i iterant aquesta construcció obtenim les anomenades resolucions lliures.

Definició 3.31. *Sigui M un R-mòdul. Una* resolució lliure *de M és una successió exacta*

$$\mathbf{F} = \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

on cada F_i és un mòdul lliure.

Teorema 3.32. *Tot mòdul M té una resolució lliure.*

Demostració. Pel teorema 3.26, existeix un mòdul lliure F_0 i una successió exacta

$$0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

De la mateixa manera, també hi ha un mòdul lliure F_1 i una successió exacta

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0$$

i per inducció, per tot n tenim un mòdul lliure F_n i una successió exacta

$$0 \longrightarrow S_n \longrightarrow F_n \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow 0$$

Si ara juntem totes aquestes successions en un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[rr, "\varepsilon"] & & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots & & S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
\cdots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

on les aplicacions d_n són les composicions corresponents. Ara només cal comprovar que la successió superior és exacta. Per cada n, $\ker d_n = S_n$ i $\operatorname{im} d_n = S_{n-1}$, de manera que $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$ i ja hem acabat. $\square$

Per tant, donat un mòdul qualsevol M, sempre té una resolució lliure, però en general aquesta no és única (veure per exemple [3], pàgina 514).

Ara bé, per alguns tipus concrets d'anells podem garantir la finitud i la unicitat de resolucions lliures *minimals* per mòduls finitament generats. Aquí ens centrarem en el cas que R sigui un anell local noetherià o bé un anell de polinomis sobre un cos $R = k[x_0, \dots, x_n]$ (que anomenarem *cas graduat*). Es poden trobar més detalls i les demostracions a [3] i [5].

Comencem pel cas R anell local noetherià, $\mathfrak{m}$ el seu únic ideal maximal i $k = R/\mathfrak{m}$ el cos residual.

Definició 3.33. *Una resolució lliure*

$$\mathbf{F} = \dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

d'un R-mòdul M és minimal *si per tot n es té $\varphi_n(F_n) \subseteq \mathfrak{m}F_{n-1}$.*

El següent teorema ens dóna les bones propietats que hem anunciat:

Teorema 3.34. *Sigui M un R-mòdul finitament generat. Aleshores M té una resolució lliure minimal $\mathbf{F}$ (on tots els mòduls F_i són finitament generats), i tota altra resolució lliure $\mathbf{G}$ és de la forma $\mathbf{F} \oplus \mathbf{H}$, on $\mathbf{H}$ és un complex trivial (és a dir, suma de complexes de la forma $0 \longrightarrow R \longrightarrow R \longrightarrow 0$). En particular, si $\mathbf{G}$ és una altra resolució lliure minimal, existeixen isomorfismes $F_i \cong G_i$ per tot $i \geq 0$, i una resolució lliure minimal té longitud mínima entre totes les resolucions lliures.*

D'aquest teorema resulta, en particular, que els rangs dels mòduls F_i d'una resolució lliure minimal de M són independents de la resolució, i per tant són invariants del mòdul. Es denoten $b_i(M)$ i s'anomenen *nombres de Betti* de M. Aquests nombres són el mínim nombre de generadors del i-èssim terme d'una resolució lliure qualsevol de M. A més, en termes de M, aquests nombres es poden calcular com

$$b_i(M) = \dim_k \left(\operatorname{Tor}_i^R(k, M)\right)$$

(on els Tor_i^R són uns (bi)functors que definirem en el següent capítol).

Estudiem ara el cas graduat, que resulta ser bastant semblant al cas local que ya hem estudiat. Com abans, ens limitarem a enunciar les definicions i resultats més rellevants, sense explicitar les proves. Comencem recordant generalitats de mòduls graduats sobre anells de polinomis:

Sigui $R = k[x_0, \dots, x_n]$ l'anell de polinomis en n variables sobre un cos k, i $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_n)$ el seu únic ideal homogeni maximal. Denotem per R_d el subespai vectorial de R format pels polinomis de grau d (és a dir, la part de grau d d'R com a anell graduat).

Definició 3.35. *Un R-mòdul M és* graduat *si admet una descomposició $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ tal que per tot $d, e \in \mathbb{Z}$ es té $R_d M_e \subseteq M_{d+e}$. Un element $m \in M$ es diu homogeni de grau d si es té $m \in M_d$.*

Un morfisme $\varphi : M \longrightarrow N$ entre dos R-mòduls graduats es diu graduat *(o de grau 0) si $\varphi(M_d) \subseteq N_d$ per tot d. En aquest cas denotem $\varphi_d = \varphi_{|M_d}$ la restricció al submòdul de grau d, i tenim $\varphi = \oplus_{d \in \mathbb{Z}} \varphi_d$.*

Si M és un R-mòdul graduat, denotem per $M(a)$ el mòdul *torsat* (o desplaçat) per a, que és el mateix mòdul M però canviant la graduació de manera que $M(a)_d = M_{a+d}$. Si M és un R-mòdul lliure, tenim $M = \oplus_{i \in I} R$ per un cert conjunt d'índexos I, i si volem tenir en compte la graduació podem posar $M = \oplus_{i \in I} R(a_i)$. En el cas finitament generat tenim un nombre finit de sumands, i podem agrupar tots els sumands amb el mateix desplaçament fins tenir una expressió $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} R(-i)^{\beta_i}$ on tots els β_i són tots nuls llevat d'un nombre finit.

Definició 3.36. *Una resolució graduada lliure (és a dir, on els morfismes φ_i són graduats)*

$$\mathbf{F} = \dots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

d'un R-mòdul M és minimal[2] *si per tot i es té $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$.*

En aquesta situació tenim el següent teorema de Hilbert:

Teorema 3.37. (Hilbert Syzygy Theorem.) *Qualsevol R-mòdul finitament generat M té una resolució lliure graduada minimal finita*

$$\mathbf{F} = 0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

A més, podem prendre $m \leq n+1$ (on n és el nombre de variables de R).

Notem que en aquest cas podem garantir que la resolució minimal és finita, la qual cosa és una millora respecte el cas local.

Com és d'esperar, tenim també

Teorema 3.38. *Dues resolucions lliures minimals d'un mateix R-mòdul finitament generat M són isomorfes (per un isomorfisme que preserva graus). A més, qualsevol resolució lliure de M conté com a sumand una resolució lliure minimal.*

Per tant, els rangs dels mòduls lliures d'una resolució lliure minimal només depenen del mòdul M, i s'anomenen *nombres de Betti* de M (com en el cas local). Ara bé, si tenim en compte la graduació, podem descomposar els nombres de Betti segons els graus dels sumands corresponents:

Definició 3.39. *Sigui $\mathbf{F} = \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ una resolució lliure minimal d'un R-mòdul finitament generat M. Aleshores cada F_i descomposa de manera única com $F_i = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{i,j}}$. Els nombres $\beta_{i,j}$ s'anomenen* nombres de Betti graduats *del mòdul M.*

El següent resultat dóna una caracterització d'aquests nombres en termes del functor Tor similar a la que hem donat en el cas local:

Proposició 3.40. *Si M és un R-mòdul finitament generat i $\mathbf{F} = \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ és una resolució lliure de M, aleshores qualsevol conjunt minimal de generadors de F_i conté exactament $\dim_k \operatorname{Tor}_i^S(k,M)_j$ generadors de grau j, és a dir*

$$\beta_{i,j} = \dim_k \operatorname{Tor}_i^S(k,M)_j$$

Un altre invariant de M relacionat amb les resolucions lliures minimals és la Regularitat de Castelunovo-Mumford.

Definició 3.41. *Sigui M un R-mòdul finitament generat i m un enter. Fixem una resolució lliure minimal de M*

$$\mathbf{F} = \cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

*i descomposem els termes com $F_i = \sum_j R(-a_{i,j})$. Direm que M és m-*regular *si per tot enter j tenim*

$$\max_i a_{i,j} - j \leq m$$

i definim la regularitat de M, $\operatorname{reg} M$, com el màxim dels m tals que M és m-regular.

Intuïtivament, la regularitat d'un mòdul és el grau màxim dels elements d'un sistema generador minimal.

La regularitat es pot caracteritzar en termes del functor Ext com segueix:

Proposició 3.42. *Un mòdul (graduat) finitament generat M és m-regular si i només si*

$$\operatorname{Ext}^j(M,R)_n = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \leq -m-j-1$$

[2] De fet, es pot definir resolució minimal com aquella que minimitza els rangs dels mòduls que apareixen, i aquesta definició és equivalent a la que hem donat.

El comportament de la regularitat amb les successions exactes curtes ve donat per el següent resultat:

Proposició 3.43. *Sigui* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *una successió exacta d'R-mòduls finitament generats. Aleshores*

i. $\operatorname{reg} A \leq \max(\operatorname{reg} B, \operatorname{reg} C + 1)$.

ii. $\operatorname{reg} B \leq \max(\operatorname{reg} A, \operatorname{reg} C)$, *amb igualtat si* A *és de longitud finita*[3].

iii. $\operatorname{reg} C \leq \max(\operatorname{reg} A - 1, \operatorname{reg} B)$.

3.3 Mòduls projectius.

Recordem la situació del teorema 3.25: si β és exhaustiu, donat qualsevol morfisme $\alpha : F \longrightarrow N$ existeix un morfisme $\gamma : F \longrightarrow M$ fent commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definició 3.44. *Un mòdul* P *és* projectiu *si i només si té aquesta propietat, és a dir, si per tot epimorfisme* $\beta : M \longrightarrow N$ *i tot* $\alpha : P \longrightarrow N$ *existeix un altre morfisme* $\gamma : P \longrightarrow M$ *tal que* $\alpha = \beta \circ \gamma$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Com en el teorema 3.25, podem caracteritzar aquesta propietat en termes del functor Hom:

Teorema 3.45. *Un mòdul* P *és projectiu si i només si el functor* $\operatorname{Hom}(P, -)$ *és exacte.*

Demostració. La prova de 3.25 serveix també per demostrar que si P és projectiu, aleshores $\operatorname{Hom}(P, -)$ és exacte.

Recíprocament, suposem que $\operatorname{Hom}(P, -)$ és exacte i considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

on β és exhaustiu. Com que $\operatorname{Hom}(P, -)$ és exacte, la successió

$$\operatorname{Hom}(P, M) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}(P, N) \longrightarrow 0$$

és exacta, i per tant β_* és exhaustiu. En particular, existeix $\gamma \in \operatorname{Hom}(P, M)$ tal que $\alpha = \beta_*(\gamma) = \beta \circ \gamma$, i per tant P és projectiu. $\square$

El següent resultat, que farem servir més endavant, és molt senzill de demostrar.

[3] La longitud d'un mòdul M es defineix com el suprem de les longituds n de totes les possibles cadenes de submòduls $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$. Notem que una cadena de longitud minimal per força ha de tenir tots els quocients M_i/M_{i-1} simples (és a dir, sense submòduls propis).

Teorema 3.46. *Si* $\{P_j\}_{j\in J}$ *és una família de mòduls projectius, aleshores la suma* $\bigoplus P_j$ *també és projectiu.*

És evident que tot mòdul lliure és projectiu (per definició), però el recíproc no és cert (donarem un exemple més endavant, quan tinguem més caracteritzacions dels mòduls projectius). Sí que hi ha, però algunes relacions bastant fortes entre els mòduls projectius i els lliures. Comencem amb un resultat auxiliar:

Teorema 3.47. *Si* P *és un mòdul projectiu i* $\beta : M \longrightarrow P$ *és un epimorfisme, aleshores* $M = \ker\beta \oplus P'$ *on* $P' \cong P$. *Equivalentment, si* N *és un submòdul de* M *amb* M/N *projectiu, aleshores* $M \cong N \oplus M/N$.

Demostració. Considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ 0 \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & M \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Com que P és projectiu, hi ha un morfisme $\gamma : P \longrightarrow M$ tal que $\beta \circ \gamma = 1_P$, és a dir, una secció de la successió escindida. Això equival a $M = \ker\beta \oplus \gamma(P)$, i $\gamma(P) \cong P$ per què γ és injectiu (com a conseqüència de $\beta \circ \gamma = 1_P$).

La segona afirmació és immediata prenent $\beta = \pi : M \longrightarrow M/N = P$ i tenint en compte que $\ker\beta = N$. □

Ara ja podem demostrar la principal caracterització que relaciona els mòduls projectius amb els lliures:

Teorema 3.48. *Un mòdul* P *és projectiu si i només si és sumand d'un mòdul lliure. És més, tot sumand d'un projectiu és també projectiu.*

Demostració. Com que tot mòdul és quocient d'un lliure, existeix un epimorfisme $\beta : F \longrightarrow P$ amb F lliure, i pel teorema anterior, P és (isomorf a) un sumand de F.

Per veure la implicació contrària, n'hi ha prou amb directament la segona afirmació, ja que tot mòdul lliure és projectiu. Sigui doncs P un sumand d'un projectiu Q, és a dir, $P \subseteq Q$ és un submòdul i $Q \cong P \oplus Q/P = P \times Q/P$. Siguin $i : P \longrightarrow Q$ i $p : Q \longrightarrow P$ la injecció i projecció canòniques (que verifiquen $p \circ i = 1_P$). Fixem $\beta : M \longrightarrow N$ un epimorfisme, $f : P \longrightarrow N$ un morfisme qualsevol, i considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, bend left, "p"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & P \arrow[l, bend left, "i"] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\beta"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Com que Q és projectiu, existeix una aplicació $\gamma : Q \longrightarrow M$ tal que $\beta \circ \gamma = f \circ p$. Definim $g : P \longrightarrow M$ com $g = \gamma \circ i$. Com que $\beta \circ g = \beta \circ \gamma \circ i = f \circ p \circ i = f \circ 1_P = f$, resulta que P és projectiu. □

El següent corol·lari dóna una caracterització que de vegades és útil:

Corol·lari 3.49. *Un mòdul* P *és projectiu si i només si tota successió exacta curta* $0 \to N \to M \to P \to 0$ *escindeix.*

Demostració. Si P és projectiu, pel teorema 3.47 la successió és escindida. Recíprocament, considerem $P = F/S$ com a quocient d'un mòdul lliure (i per tant projectiu) F. Aleshores tenim la successió exacta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow F \longrightarrow P = F/S \longrightarrow 0$$

que per hipòtesi escindeix. Per tant $F \cong S \oplus P$ i P és sumand d'un lliure. Aplicant ara el teorema anterior, resulta que P és projectiu. □

Exemple: Vegem ara que un mòdul projectiu no té per què ser lliure. Considerem l'anell $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, i els R-mòduls $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Aleshores tenim $R \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, i com que R és lliure, resulta que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ és projectiu. Ara bé, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ no pot ser lliure ja que un R-mòdul lliure ha de tenir com a mínim 6 elements.

Una altra caracterització dels mòduls projectius que també deixa patent la seva forta relació amb els mòduls lliures és la següent, on veiem que tot i no ser lliures, tot mòdul projectiu té una mena de "base" i "funcions coordenades".

Teorema 3.50. *Un R-mòdul M és projectiu si i només si existeixen elements $\{m_i | i \in I\} \subseteq M$ i morfismes $\{\varphi_i : M \longrightarrow R | i \in I\}$ tals que*

- *si $x \in M$, aleshores $\varphi_i(x) = 0$ per tot $i \in I$ llevat d'un nombre finit;*
- *si $x \in M$, aleshores podem escriure $x = \sum_{i \in I} (\varphi_i(x)) m_i$*

A més, M está generat pels m_i.

Demostració. Suposem en primer lloc que M és projectiu, i sigui $\psi : F \longrightarrow M$ un epimorfisme amb F lliure. Pel teorema 3.47 existeix una secció $\varphi : M \longrightarrow F$ tal que $\psi \circ \varphi = 1_M$. Sigui $\{e_i | i \in I\}$ una base de F. Si $x \in M$, aleshores $\varphi(x) \in F$ té una única expressió com

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I} a_i e_i$$

on els $a_i \in R$ són quasi tots nuls. Definim $\varphi_i : M \longrightarrow R$ com $\varphi_i(x) = a_i$, que són morfismes per què φ ho és: per tots $x, y \in M$ tenim

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(x+y) e_i = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) e_i + \sum_{i \in I} \varphi_i(y) e_i = \sum_{i \in I} (\varphi_i(x) + \varphi_i(y)) e_i$$

i per ser F lliure, $\varphi_i(x+y) = \varphi_i(x) + \varphi_i(y)$. A més, és evident que compleixen la primera condició (per definició de mòdul lliure com a suma directa). Si ara definim $m_i = \psi(e_i)$, aleshores els m_i generen M (per què ψ és exhaustiu), i per tot $x \in M$ tenim

$$x = \psi(\varphi(x)) = \psi\left(\sum_{i \in I} \varphi_i(x) e_i\right) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) \psi(e_i) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) m_i$$

Recíprocament, suposem que tenim tot el que diu l'enunciat. Sigui F el mòdul lliure amb base $\{e_i | i \in I\}$ i $\psi : F \longrightarrow M$ el morfisme definit per $\psi(e_i) = a_i$. Ara és suficient trobar un morfisme $\varphi : M \longrightarrow F$ tal que $\psi \circ \varphi = 1_M$, ja que això implica que M és un sumand de F lliure, i per tant projectiu. Definim $\varphi : M \longrightarrow F$ com $x \mapsto \sum_{i \in I} \varphi_i(x) e_i$, que està ben definit per què és una suma finita (per la primera condició en els φ_i). Ara, per la segona condició tenim

$$\psi(\varphi(x)) = \psi\left(\sum_{i \in I} \varphi_i(x) e_i\right) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) \psi(e_i) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) a_i = x$$

de manera que $\psi \circ \varphi = 1_A$ i ja hem acabat. $\square$

Per acabar amb les caracteritzacions dels mòduls projectius, esmentem sense demostrar el següent resultat, que és important tot i que ens hem de restringir als anells noetherians (que són, per altra banda, els més habituals).

Teorema 3.51. *Sigui M un mòdul finitament generat sobre un anell noetherià R. Són equivalents*

i. M és projectiu.

ii. El mòdul localitzat $M_{\mathfrak{p}}$ és lliure per tot ideal maximal $\mathfrak{p}$ de R (i per tant, per tot ideal $\mathfrak{p}$ primer).

iii. Existeix un conjunt finit d'elements $x_1, \ldots, x_n \in R$ que generen l'ideal unitat i tals que els localitzats $M[x_i^{-1}]$ són $R[x_i^{-1}]$-mòduls lliures per tot i.

Ja que hem pensat els mòduls projectius com una generalització dels lliures, podem pensar també en generalitzar les resolucions lliures:

Definició 3.52. *Sigui M un R-mòdul. Una* resolució projectiva *de M és una successió exacta*

$$\mathbf{P} = \cdots P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

on cada mòdul P_i és projectiu.

L'existència de resolucions lliures ens garantitza l'existència de resolucions projectives per qualsevol mòdul M.

El principal invariant d'un mòdul M relacionat amb les seves resolucions pojectives és la *dimensió projectiva*, $pd(M)$, que es defineix com el mínim de les longituds (nombre de mòduls no nuls) de les resolucions projectives de M. En el cas M finitament generat, la dimensió projectiva de M coincideix amb la longitud de la resolució lliure minimal de M (veure [4], pàg. 7).

3.4 Mòduls injectius.

Ara estudiarem els mòduls "duals" als projectius: els mòduls injectius.

Definició 3.53. *Un mòdul E és* injectiu *si per qualsevol mòdul M i submòdul $N \subseteq M$, qualsevol morfisme $f : N \longrightarrow E$ es pot estendre a un morfisme $g : M \longrightarrow E$.*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "f"] \arrow[r] & M \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Al contrari que en el cas dels mòduls projectius, en general no hi ha exemples evidents de mòduls injectius, però es pot demostrar que n'hi ha "suficients" (en un sentit que ja explicarem). Vegem ara les propietats elementals dels mòduls injectius, les quals, com es pot esperar, són similars a les dels projectius.

Teorema 3.54. *Un mòdul E és injectiu si i només si el functor* $\mathrm{Hom}(-, E)$ *és exacte.*

Demostració. La implicació directa és una conseqüència immediata de la definició de mòdul injectiu, i la recíproca és semblant a la demostració de 3.45. $\square$

Teorema 3.55. *Si $\{E_j\}_{j\in J}$ és una família de mòduls injectius, aleshores el producte $\prod E_j$ també és injectiu.*

Demostració. Siguin λ_j i p_j les injeccions i les projeccions del producte, i considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \prod E_j \arrow[r, bend left, "p_j"] & E_j \arrow[l, bend left, "\lambda_j"] \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, dashed, "g_j"'] \end{tikzcd}$$

Com que E_j és injectiu, existeix una aplicació $g_j : M \longrightarrow E_j$ tal que $g_j \circ \alpha = p_j \circ f$. Si ara definim $h : M \prod E_j$ com el producte de les g_j, aleshores per qualsevol $n \in N$ tenim

$$h(\alpha(n)) = (g_j(\alpha(n)))_j = (p_j(f(n)))_j = f(n)$$

de manera que $h \circ \alpha = f$ i per tant $\prod E_j$ és injectiu. $\square$

En canvi, la suma de mòduls injectius no és necessàriament injectiva.

Teorema 3.56. *Tot sumand D d'un mòdul injectiu E és també injectiu.*

Demostració. Considerem el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, bend left, "\lambda"] & E \arrow[l, bend left, "p"] \\
0 \arrow[r] & N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[u, dashed, "g"']
\end{tikzcd}
$$

on λ és la injecció de D en E i p és la projecció de E en D. Com que E és injectiu, existeix una aplicació $g : M \longrightarrow E$ tal que $g \circ \alpha = \lambda \circ f$. Aleshores $h = p \circ g : M \longrightarrow D$ compleix

$$h \circ \alpha = p \circ g \circ \alpha = p \circ \lambda \circ f = f$$

i doncs D és injectiu. $\square$

Teorema 3.57. *Un mòdul E és injectiu si i només si tota successió exacta curta $0 \to E \xrightarrow{i} M \to N \to 0$ escindeix. En particular, E és un sumand de M.*

Demostració. Suposem primer que E és injectiu, i considerem el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[u, "1_E"] \arrow[r, "i"'] & M \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Existeix una aplicació $g : M \longrightarrow E$ tal que $g \circ i = 1_E$ i per tant la successió escindeix.

Per l'altra implicació, considerem el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B
\end{tikzcd}
$$

i construim el push-out

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, "\alpha'"] & P \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, "f'"']
\end{tikzcd}
$$

Per la proposició 3.13, el morfisme $\alpha' : E \longrightarrow P$ és injectiu. Ara, per hipòtesi, tenim una aplicació $\beta : P \longrightarrow E$ tal que $\beta \circ \alpha' = 1_E$. Si ara definim $g = \beta \circ f' : B \longrightarrow E$ resulta

$$g \circ \alpha = \beta \circ f' \circ \alpha = \beta \circ \alpha' \circ f = f$$

i per tant E és injectiu. $\square$

Aquest teorema és dual del teorema 3.48, però les proves no són duals, ja que per ara no sabem que tot mòdul sigui submòdul d'un injectiu (que seria el dual a "tot mòdul és quocient d'un mòdul projectiu"). Aquest resultat és cert, i molt important, ja que serveix per assegurar l'existència de resolucions injectives (duals de les projectives), però demostrar-ho requereix més feina que veure que tot mòdul és quocient d'un lliure. Comencem amb una caracterització alternativa de ser injectiu:

Teorema 3.58. *(Criteri de Baer) Un R-mòdul E és injectiu si i només si tot morfisme $f : I \longrightarrow E$, on I és un ideal de R, es pot estendre a tot R (per tant, no cal comprovar la condició de ser injectiu sobre tots els mòduls i submóduls $N \subseteq M$, sinó només pels ideals $I \subseteq R$).*

Demostració. Si E és injectiu, és evident que tot morfisme $f : I \longrightarrow E$ estén a $g : R \longrightarrow E$, ja que un ideal I és un submòdul de R.

Per la implicació contrària, considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & M \end{tikzcd}$$

i volem trobar un morfisme $g : M \longrightarrow E$ que faci commutar el diagrama. Sigui $\mathcal{C}$ el conjunt de tots els parells (N', g') tals que $N \subseteq N' \subseteq M$ i $g' : N' \longrightarrow E$ és un morfisme tal que $g'_{|N} = f$. Notem que $(N, f) \in \mathcal{C}$, i per tant $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Si ara ordenem $\mathcal{C}$ parcialment per $(N', g') \leq (N'', g'')$ si i només si $N' \subseteq N''$ i $g''_{N'} = g'$. És evident que tot conjunt totalment ordenat de $\mathcal{C}$ té una fita superior (donada per la unió de tots els submòduls i el morfisme induit en ella). Per tant, pel lema de Zorn, existeix un element maximal $(N_0, g_0) \in \mathcal{C}$. Ara només hem de veure $N_0 = M$.

Suposem $N_0 \neq M$ i prenem $m \in M - N_0$. El conjunt $I = \{a \in R | am \in N_0\} \subseteq R$ és un ideal (de fet, és l'annulador de m en M/N_0). Definim el morfisme $h : I \longrightarrow E$ donat per $h(a) = g_0(am)$. Per hipòtesi, existeix una aplicació $h' : R \longrightarrow E$ estenent h. Sigui ara $N_1 = N_0 + Rm \subseteq M$. L'aplicació $g_1 : N_1 \longrightarrow M$ definida com $g_1(n_0 + am) = g_0(n_0) + ah'(1)$ està ben definida i és un morfisme $N_1 \longrightarrow E$ estenent g_0. Ara bé, això contradiu que (N_0, g_0) sigui maximal en $\mathcal{C}$, de manera que hem de tenir $N_0 = M$ i doncs E és injectiu. $\square$

Ara necessitem estudiar un altre tipus de mòduls, molt relacionats amb els mòduls injectius: els mòduls divisibles.

Definició 3.59. *Un R-mòdul M és* divisible *si per tot $m \in M$ i tot $a \in R$ no divisor de zero, existeix un element $m' \in M$ tal que $am' = m$.*

Exemple: El grup additiu dels racionals $\mathbb{Q}$ és un grup abelià ($\mathbb{Z}$-mòdul) divisible.

Teorema 3.60. *Tot mòdul injectiu E és divisible.*

Demostració. Sigui $m \in E$ i $a_0 \in R$ no divisor de zero. Definim $f : (a_0) = Ra_0 \longrightarrow E$ per $f(aa_0) = am$ (que està ben definit per què a_0 no és un divisor de zero). Ara, com que E és injectiu, existeix un morfisme $g : R \longrightarrow E$ estenent f, i en particular

$$m = f(a_0) = g(a_0) = a_0 g(1)$$

d'on resulta que m és divisible per a_0, i per tant E és divisible. $\square$

A continuació tenim algunes propietats dels mòduls divisibles, de demostració immediata a partir de les definicions.

Lema 3.61. *Tot quocient d'un mòdul divisible és també divisible.*

Lema 3.62. *Una suma de mòduls divisibles és divisible.*

No és cert, però, que tot mòdul divisible sigui injectiu, a menys que ens restringim a anells molt especials, com per exemple els dominis d'ideals principals (PID):

Teorema 3.63. *Si R és un domini d'ideals principals, un R-mòdul D és divisible si i només si és injectiu.*

Demostració. Pel teorema anterior, només cal demostrar que un R-mòdul divisible és injectiu. Pel teorema 3.58, només hem de provar que tot morfisme $f : I \longrightarrow D$ es pot estendre a tot R. Com que R és un PID, existeix $a_0 \in R$ tal que $I = Ra_0$. Podem suposar $a_0 \neq 0$ (si $a_0 = 0$, qualsevol aplicació $R \longrightarrow D$ serveix) i per tant no és un divisor de zero. Com que D és divisible, existeix $d \in D$ tal que $a_0 d = f(a_0)$, i definint $g(a) = ad$ ja tenim l'extensió que volem. $\square$

Ara ja ens apropem a veure que tot R-mòdul (per R qualsevol) és (isomorf a) un submòdul d'un mòdul injectiu. Vegem-ho en primer lloc per $\mathbb{Z}$-mòduls:

Teorema 3.64. *Tot grup abelià G es pot incloure en un grup abelià injectiu.*

Demostració. Posem $G = F/S$ com a quocient d'un $\mathbb{Z}$-mòdul lliure $F = \bigoplus \mathbb{Z}$. Si posem cada $\mathbb{Z}$ dins dels racionals $\mathbb{Q}$, tenim

$$G = F/S = \left(\bigoplus \mathbb{Z}\right)/S \subseteq \left(\bigoplus \mathbb{Q}\right)/S$$

Com que $\mathbb{Q}$ és divisible, també ho són $\bigoplus \mathbb{Q}$ i $\left(\bigoplus \mathbb{Q}\right)/S$ (lemes 3.62 i 3.61). Ara, com que $\mathbb{Z}$ és un PID, el teorema 3.63 ens diu que $\left(\bigoplus \mathbb{Q}\right)/S$ és un $\mathbb{Z}$-mòdul injectiu i ja hem acabat. $\square$

Generalitzem ara aquest resultat a mòduls sobre un anell qualsevol:

Teorema 3.65. *Si D és un grup abelià divisible, aleshores $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ és un R-mòdul injectiu.*

Demostració. En primer lloc, tot i que en principi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ és només un $\mathbb{Z}$-mòdul, podem definir una estructura d'R-mòdul posant $(af)(x) = f(ax)$ per $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ i $a, x \in R$.

Ara, per veure que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ és injectiu com a R-mòdul, hem de veure que el functor $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D))$ és exacte, és a dir, transforma morfismes injectius en exhaustius. Suposem doncs que tenim un monomorfisme

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

Generalitzant la construcció de la proposició 3.18, podem veure que tenim un isomorfisme

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R R, D) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D)$$

i anàlogament per N, i per tant tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{mZ}(N, D)
\end{tikzcd}$$

on els morfismes verticals són isomorfismes. Ara bé, com que D és divisible, és $\mathbb{Z}$-injectiu, i per tant el morfisme de sota és exhaustiu. Per la commutativitat del diagrama, f^* també és exhaustiu, i per tant $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ és R-injectiu, com voliem veure. $\square$

Ara ja tenim tots els ingredients per veure que tot R-mòdul és submòdul d'un injectiu:

Teorema 3.66. *Tot R-mòdul M es pot posar com a submòdul d'un mòdul injectiu.*

Demostració. Si veiem M només com un grup abelià, ja sabem (teorema 3.64) que hi ha un morfisme injectiu $0 \to M \xrightarrow{i} D$, per un grup abelià divisible D. Si $m \in M$ és un element qualsevol, definim $f_m : R \to M$ per $f_m(a) = am$. Aleshores l'assignació $m \mapsto f_m$ és un R-morfisme injectiu $M \to \mathrm{Hom}_Z(R, D)$, i ja hem acabat. $\square$

Definició 3.67. *En general, si $\mathfrak{A}$ és una categoria abeliana, es poden definir els objectes injectius (resp. projectius) de la mateixa manera, i diem que $\mathfrak{A}$* té suficients injectius (resp. projectius) *si per tot objecte A de $\mathfrak{A}$ existeix un objecte injectiu E (resp. projectiu P)i un monomorfisme $f : A \longrightarrow E$ (resp. epimorfisme $g : P \longrightarrow E$).*

El que hem vist doncs en el teorema anterior és que la categoria $\mathbf{Mod}(R)$ té suficients injectius. Per altra banda, el teorema 3.26 ens assegura que $\mathbf{Mod}(R)$ també té suficients projectius (ja que tot mòdul lliure és en particular projectiu).

Seguint amb el guió donat pels apartats de mòduls lliures i projectius, el següent pas és dualitzar el concepte de resolució:

Definició 3.68. *Donat un R-mòdul M, una* resolució injectiva *de M és una successió exacta*

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow E^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

on cada mòdul E^n és injectiu.

Com a conseqüència de 3.66, tenim

Teorema 3.69. *Tot R-mòdul M té una resolució injectiva.*

Demostració. La prova és dual a la del teorema 3.32, fent servir 3.66. □

Anàlogament al cas projectiu, podem definir la *dimensió injectiva*, $id(M)$ d'un mòdul M com el mínim de les longituds de les resolucions injectives de M.

Com en el cas lliure, és natural preguntar-se quin és el mòdul injectiu "més petit" que conté un mòdul M donat (si és que n'hi ha de "més petits"). La resposta és l'envolvent injectiva de M, que ara passem a construir.

Definició 3.70. *Una* extensió essencial *d'un mòdul M és un mòdul $E \supseteq M$ tal que qualsevol submòdul no nul $S \subseteq E$ talla M (i.e. $S \cap M \neq 0$). Si a més es té $M \subsetneq E$, es diu que E és una extensió essencial* pròpia *de M.*

Exemple: El grup additiu dels racionals $\mathbb{Q}$ és una extensió essencial de $\mathbb{Z}$. De fet, qualsevol subgrup intermig $\mathbb{Z} \subseteq G \subseteq \mathbb{Q}$ també és una extensió essencial de $\mathbb{Z}$.

Els següents resultats són immediats a partir de la definició, i per tant no els demostrarem.

Lema 3.71. *Suposem $M \subseteq E \subseteq E_1$. Si E és una extensió essencial de M i E_1 és una extensió de E, aleshores E_1 és una extensió essencial de M.*

Lema 3.72. *Sigui $M \subseteq E$. Aleshores E és una extensió essencial de M si i només si per tot $e \in E$, o bé $e = 0$, o bé existeix $r \in R$ tal que $re \in M$ i $re \neq 0$.*

Lema 3.73. *Sigui $M \subseteq E$, i sigui $\{E_i, i \in I\}$ una família totalment ordenada (per inclusió) de submòduls de E que són extensions essencials de M. Aleshores la unió $\bigcup_{i \in I} E_i$ també és essencial sobre M.*

Lema 3.74. *Si $M \subseteq E' \subseteq E$, i tant E' com E són extensions essencials de M, aleshores E és una extensió essencial de E'.*

Lema 3.75. *Si E és una extensió essencial de M i $\varphi : E \longrightarrow D$ és un morfisme tal que la restricció $\varphi_{|M}$ és injectiva, aleshores φ també és injectiu.*

Les extensions essencials proporcionen una caracterització alternativa dels mòduls injectius:

Teorema 3.76. *Un mòdul M és injectiu si i només si no té extensions essencials pròpies.*

Demostració. Suposem que M és injectiu i que $M \subsetneq E$, on E és una extensió essencial. Pel teorema 3.57, M és un sumand de E, és a dir $E = M \oplus N$ per cert submòdul $N \subseteq E$. Això implica $M \cap N = 0$, i per tant E no pot ser una extensió essencial.

Recíprocament, suposem que M no té extensions essencials pròpies, i sigui E un mòdul injectiu contenint M. Pel lema de Zorn, existeix un submòdul $N \subseteq E$ maximal entre els que compleixen $M \cap N = 0$. Aleshores la composició

$$M \hookrightarrow E \longrightarrow E/N$$

és injectiva (per què $M \cap N = 0$). De fet, E/N és una extensió essencial de M, ja que si S/N és un submòdul no nul de E/N, aleshores $N \subsetneq S$, i per maximalitat de N hem de tenir $S \cap M \neq 0$, i per tant $S/N \cap M \neq 0$. Com que M no té extensions essencials pròpies, la composició $M \longrightarrow E/N$ ha de ser un isomorfisme, i per tant $E = M + N$. Com que $M \cap N = 0$, resulta $E = M \oplus N$, de manera que M és un sumand de E, i per tant és injectiu. $\square$

I finalment tenim el resultat que buscàvem:

Teorema 3.77. *Sigui M un mòdul. Les següents condicions sobre un mòdul E contenint M són equivalents:*

i. E és una extensió essencial maximal de M (i.e. cap extensió de E és una extensió essencial de M),

ii. E és una extensió essencial de M i és injectiu,

iii. E és injectiu i no existeix cap mòdul injectiu E' tal que $M \subseteq E' \subsetneq E$.

És més, existeix un mòdul E amb aquestes propietats, anomenat envolvent injectiva *de M.*

Demostració. *i.* $\Rightarrow$ *ii.*: Com que "ser extensió essencial" és una relació transitiva (lema 3.71), l'hipòtesi es transforma en que E no té extensions essencials pròpies. Pel teorema 3.76, E és injectiu.

ii. $\Rightarrow$ *iii.*: Si existís un injectiu E' tal que $M \subseteq E' \subsetneq E$, aleshores E' seria un sumand de E. Posem doncs $E = E' \oplus E''$. Com que $M \subseteq E'$, la condició $E' \cap E'' = 0$ implica $M \cap E'' = 0$, i això contradiu que E sigui una extensió essencial de M.

iii. $\Rightarrow$ *i.*: Suposem només que E és un injectiu que conté M, i considerem la família de totes les extensions essencials de M contingudes en E. Pel lema 3.73, el lema de Zorn ens dóna un $E' \subseteq E$ maximal dins d'aquesta família. Ara provarem que E' és una extensió essencial maximal de M. Suposem que N és una extensió essencial de M que conté E'. Es té un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[u, "i"] \arrow[r] & N \arrow[ul, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Com que E és injectiu, existeix un morfisme $\varphi : N \longrightarrow E$ tal que $\varphi_{|E'} = i$ és la inclusió de E' en E. Per tant, φ deixa fix E element a element, i per tant també M. Pel lema 3.75 (aplicat a N extensió essencial de E' pel lema 3.74), φ és injectiu. Ara bé, aleshores $\varphi(N)$ és una extensió essencial de M continguda en E. La maximalitat de E' implica que $\varphi(N) = E'$, i per tant $N = E'$. Podem doncs concloure que E' és una extensió essencial maximal de M i que E no té extension essencials pròpies. Pel teorema anterior, resulta que E' és injectiu, i per la hipòtesi *iii.* completa resulta $E' = E$, que és el que voliem.

Quant a l'existència d'aquest E, n'hi ha prou amb posar M dins d'un injectiu qualsevol i prendre el mòdul E' que ens dóna el lema de Zorn. $\square$

Aquest teorema ens diu que una envolvent injectiva de M és un injectiu minimal que el conté (condició *iii.*), i que sempre n'existeix una. Vegem ara que dues envolupants injectives són isomorfes, de manera que podrem parlar de *l'*envolvent injectiva de M, que denotarem per $E_R(M)$.

Teorema 3.78. *Sigui E una envolvent injectiva d'un mòdul M.*

i. Si D és un injectiu que conté M, aleshores existeix un morfisme injectiu $\varphi : E \longrightarrow D$ que deixa fix M element a element.

ii. Dues envolupants injectives de M són isomorfes (per un isomorfisme que fixa M element a element).

Demostració. i. El fet que D sigui injectiu permet completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "i"] \arrow[r] & E \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

on i és la inclusió d'M en D. Com que E és una extensió essencial de M, el lema 3.75 diu que φ és injectiu. Com que de les definicions es desprén que φ fixa M element a element, ja hem acabat.

ii. Sigui ara D una altra envolvent injectiva de M. Amb la notació de l'apartat anterior, veurem que φ és un isomorfisme, és a dir, que també és exhaustiu. Si no ho fós, aleshores $\varphi(E)$ seria un sumand de D (per què $\varphi(E)$ és injectiu) i contindría M. Això contradiu que D sigui una extensió essencial de M, i per tant φ ha de ser un isomorfisme.

□

Per acabar amb l'analogia amb les resolucions lliures, estaría bé trobar uns invariants semblants als nombres de Betti, però per això necessitem estudiar l'estructura dels mòduls injectius i trobar un invariant semblant al rang. El primer que hem de fer, però, és restringir-nos al cas que R sigui un anell noetherià. El motiu principal d'aquesta limitació és el següent fet (que es pot trobar demostrat a [10]):

Teorema 3.79. *Sigui R un anell (commutatiu i unitari, com sempre). Les següents afirmacions són equivalents.*

i. R és noetherià.

ii. Tot límit directe dirigit de mòduls injectius és també injectiu.

iii. Tota suma directa de mòduls injectius és injectiva.

Ara és immediat comprovar que si $\{M_i\}_{i\in I}$ és una família arbitrària de R-mòduls i $\{E_R(M_i)\}_{i\in I}$ les seves envolvents injectives, aleshores $\bigoplus E_R(M_i)$ és una envolupant injectiva per $\bigoplus M_i$. De fet, cada $E_R(M_i)$ és injectiu, de manera que també ho és la seva suma. A més, com que cada $E_R(M_i)$ és extensió essencial de M_i, resulta que $\bigoplus E_R(M_i)$ és també extensió essencial de $\bigoplus M_i$, i aplicant 3.77 ja tenim el que voliem.

El primer pas en l'estudi de l'estructura dels mòduls injectius passa pels mòduls indescomposables:

Definició 3.80. *Un R-mòdul és* indescomposable *si no es pot posar com a suma directa de submòduls no trivials.*

I el resultat que anunciàvem és:

Proposició 3.81. *Sigui M un R-mòdul injectiu (on R és un anell noetherià, com ja hem dit). Aleshores M és suma directa de R-mòduls injectius indescomposables.*

Per tant, ara només hem d'estudiar l'estructura dels R-mòduls injectius indescomposables, que resulten tenir una estructura molt determinada:

Proposició 3.82. *Sigui R un anell qualsevol. Aleshores M és un R-mòdul injectiu indescomposable si i només si és $M = E_R(R/I)$, l'envolvent injectiva de R/I, on I és un ideal irreductible de R.*

En el cas R noetherià podem refinar aquest resultat:

Corol·lari 3.83. *Sigui R noetherià. Si I és un ideal irreductible (i per tant és primari), i $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$, aleshores $E_R(R/I) = E_R(R/\mathfrak{p})$. A més, $\mathfrak{p} \mapsto E_R(R/\mathfrak{p})$ dóna una correspondència bijectiva entre $\operatorname{Spec} R$ i el conjunt de classes d'isomorfisme de R-mòduls injectius indescomposables.*

Fins ara hem demostrat que tot R-mòdul injectiu es pot posar com a suma directa de mòduls injectius de la forma $E_R(R/\mathfrak{p})$ amb $\mathfrak{p}$ ideal primer. Quant a la unicitat d'aquestes descomposicions, és conseqüència del següent lema i del Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya.

Teorema 3.84. (Krull-Remak-Schmidt-Azumaya). *Sigui R un anell qualsevol. Si es té*

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \bigoplus_{j \in J} N_j$$

i tots els anells $\operatorname{End}_R(M_i), \operatorname{End}_R(N_j)$ són locals, aleshores existeix una bijecció $\sigma : I \longrightarrow J$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(I)}$.

Lema 3.85. *Sigui R un anell qualsevol i $M \neq 0$ un R-mòdul injectiu indescomposable. Aleshores $\operatorname{End}_R(M)$ és un anell local.*

En resum, podem escriure

Teorema 3.86. *Sigui R un anell noetherià. Tot R-mòdul injectiu M s'escriu de manera única com*

$$M = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Spec\, R} E_R(R/\mathfrak{p})^{c_\mathfrak{p}}$$

per certs cardinals $c_\mathfrak{p}$.

Ara que ja tenim classificats els mòduls injectius podem passar a estudiar quins invariants d'un mòdul podem obtenir a partir d'una resolució injectiva. Per començar, com en el cas lliure, dues resolucions injectives no tenen per què ser isomorfes, a menys que afegim alguna condició de *minimalitat*:

Definició 3.87. *Sigui R un anell qualsevol i M un R-mòdul. Diem que*

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

és una resolució injectiva minimal *si per tot $i \geq 0$ es té $E^i = E_R(\ker d^i) = E_R(\operatorname{im} d^{i-1})$.*

Aquesta condició de minimalitat també es tradueix en la minimalitat de la longitud. És a dir, la longitud d'una resolució injectiva minimal de M és justament $id(M)$, la dimensió injectiva de M.

A més, com en el cas lliure, la minimalitat garanteix la unicitat (llevat d'isomorfisme) de la resolució injectiva, així que els invariants que obtinguem de la resolució minimal són de fet invariants de M. Concretament, si

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

és una resolució injectiva minimal de M, podem escriure cada E^i com

$$E^i = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p})}$$

i els $\mu_i(\mathfrak{p})$ són invariants de M que anomenarem *nombres de Bass* de M (de fet, $\mu_i(\mathfrak{p})$ és l'i-èssim nombre de Bass de M respecte a $\mathfrak{p}$), que són la generalització dels nombres de Betti que buscàvem.

4 Derivació de functors.

En aquesta secció desenvoluparem una eina molt útil per estudiar propietats dels mòduls: els functors derivats. Aquests functors serveixen per estudiar la manca d'exactitud d'altres functors (aquells dels quals s'en deriven). En particular tenim dos casos molt importants als que dedicarem una atenció especial: el functor Ext (derivat dels Hom) i el functor Tor (derivat del producte tensorial).

Abans de tot, però, haurem d'estudiar els complexes d'R-mòduls (una categoria obtinguda a partir de $\mathbf{Mod}(R)$, i que en certa manera és una generalització) i els mòduls d'homologia associats. Totes aquestes construccions són anàlogues a les utilitzades en topologia algebraica per definir l'homologia singular d'un espai topològic, i és per això que la nomenclatura que es fa servir és la mateixa.

Fixem doncs, com a la secció anterior, un anell commutatiu R, i tots els mòduls i morfimes que considerem seran R-mòduls i morfismes d'R-mòduls. També, si no es diu res explícitament, tots els functors $F : \mathbf{Mod}(R) \longrightarrow \mathbf{Mod}(R)$ que considerem seran additius.

4.1 Complexes de mòduls.

Definició 4.1. *Un* complex homològic *(o* complex de cadenes*)* $\mathbf{A}$ *és una sequència de mòduls i morfismes*

$$\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \qquad n \in \mathbb{Z}$$

complint $d_n \circ d_{n+1} = 0$ *per tot* $n \in \mathbb{Z}$.

Un complex cohomològic *(o* complex de cocadenes*)* $\mathbf{A}$ *és una sequència*

$$\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots \qquad n \in \mathbb{Z}$$

complint $d^n \circ d^{n-1} = 0$ *per tot* $n \in \mathbb{Z}$.

Les aplicacions d_n *(o* d^n*, segons el cas) s'anomenen* diferencials *del complex, i si volem explicitar-les posarem* $(\mathbf{A}, d)$ *enlloc de només* $\mathbf{A}$.

La diferència entre complexes homològics i cohomològics és simplement l'ordre dels índexos (decreixent en el cas homològic i creixent en el cohomològic) i la seva posició (subíndexos / superíndexos). La diferència és, doncs, purament notacional. Per exemple, si

$$\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

és un complex cohomològic, podem transformar-lo en un complex homològic

$$\cdots \longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \xrightarrow{\Delta_n} B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

simplement posant $B_n = A^{-n}$ i $\Delta_n = d^{-n} : B_n = A^{-n} \longrightarrow B_{n-1} = A^{-n+1}$. Per tant, a partir d'ara suposarem que tots els complexes són homològics (llevat d'alguns casos concrets).

Exemples:

- Si X és un espai topològic, aleshores el complex de cadenes singulars

  $$\mathbf{S}(X) = \cdots \longrightarrow S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

  és un complex de grups abelians (si afegim infinits zeros a la dreta). Com ja hem dit, aquest exemple proporciona la nomenclatura (cadenes, cicles, vores,...) que es fa servir en general.

- Si A és un mòdul i $k \in \mathbb{Z}$ és un enter fixat, podem pensar que A és el k-èssim mòdul d'un complex on la resta de mòduls i les diferencials són zero. En aquest cas direm que $\mathbf{A}$ és un complex *concentrat* en grau k.

- Tota successió exacta és un complex (afegint zeros a les dues bandes, si cal). En particular, si A és un mòdul, qualsevol resolució projectiva

$$\mathbf{P} : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

de A és un complex (com sempre, afegint zeros a la dreta). Anàlogament, una resolució injectiva

$$\mathbf{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

també és un complex (cohomològic).

- Si $\mathbf{A}$ és un complex i F és un functor covariant (additiu), aleshores

$$F(\mathbf{A}) : \cdots \longrightarrow F(A_n) \overset{F(d_n)}{\longrightarrow} F(A_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

també és un complex (per què $F(d_n) \circ F(d_{n+1}) = F(d_n \circ d_{n+1}) = F(0) = 0$). Ara bé, si $\mathbf{A}$ és una successió exacta, $F(\mathbf{A})$ no té per què ser-ho (excepte, és clar, si F és un functor exacte).

- Si F és un functor contravariant, podem fer la mateixa construcció, però en invertir el sentit de les fletxes apareixen dos problemes notacionals:

$$F(\mathbf{A}) : \cdots \longrightarrow F(A_{n-1}) \overset{F(d_n)}{\longrightarrow} F(A_n) \longrightarrow \cdots$$

Per una banda, els índexos creixen, i això s'arregla (com ja hem fet abans) pujant-los i canviant-los el signe, és a dir, definint $B^{-n} = F(A_n)$. Però no només és això, ja que si ho fos només hauriem de dir que un functor contravariant transforma complexes homològics en cohomològics. L'altre problema és que el morfisme $F(d_n) : B^{-n+1} \longrightarrow B^{-n}$ ha de tenir índex $-n+1$, i per tant hem de definir $\Delta^{-n+1} = F(d_n)$. D'aquesta manera s'obté

$$F(\mathbf{A}) = \cdots \longrightarrow F(A_{n-1}) \overset{F(d_n)}{\longrightarrow} F(A_n) \longrightarrow \cdots = \cdots \longrightarrow B^{-n+1} \overset{\Delta^{-n+1}}{\longrightarrow} B^{-n} \longrightarrow \cdots$$

que també és un complex.

Ara ja hem definit els objectes de $\mathbf{Comp}(R)$, la categoria de complexes d'R-mòduls. Anem a definir els morfismes:

Definició 4.2. *Si* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{A}'$ *són dos complexes, un* morfisme de complexes de cadenes *(o simplement* morfisme de complexes*)* $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ *és un conjunt de morfismes* $f_n : A_n \longrightarrow A'_n$ *per cada enter* n*, de manera que commutin amb les diferencials, és a dir, que* $f_n \circ d_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1}$ *per tot* $n \in \mathbb{Z}$ *(abreujadament escriurem* $f \circ d = d' \circ f$*).*

En termes de diagrames, el que estem demanant és que

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & A'_n \arrow[r, "d'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

sigui commutatiu.

Amb aquestes definicions, es pot comprovar que $\mathbf{Comp}(R)$ és una categoria preadditiva, i.e., els conjunts de morfismes són grups abelians i la composició és distributiva.

Si volem entendre els complexes des d'un punt de vista més categòric, podem considerar $\mathbb{Z}$ com una categoria, on els objectes són els enters n, i es té un únic morfisme $n \longrightarrow n-1$. Aleshores un complex és simplement un functor $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{Mod}(R)$, i un morfisme de complexes és una transformació natural entre els dos functors.

La definició d'*isomorfisme de complexes* és la categòrica, però de fet és equivalent a que cada f_n sigui un isomorfisme de mòduls.

Continuant amb la concepció dels complexes com a generalització dels mòduls, podem definir

Definició 4.3. *Un complex* $(\mathbf{A}, d)$ *és un* subcomplex *de* $(\mathbf{A}', d')$ *si cada* A_n *és un submòdul de* A'_n *i a més* $d_n = d'_{n|A_n}$*. En aquest cas, existeix el* complex quocient

$$\mathbf{A}'/\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow A'_n/A_n \xrightarrow{\bar{d'_n}} A'_{n-1}/A_{n-1}$$

on les diferencials estan definides per $\overline{d'_n}([a'_n]) = [d'_n(a'_n)]$.

Notem que $\mathbf{A}$ és un subcomplex de $\mathbf{A}'$ quan les inclusions $i_n : A_n \longrightarrow A'_n$ constitueixen un morfisme de complexes, o equivalentment quan $A_n \subseteq A'_n$ i $d'_n(A_n) \subseteq A_{n-1}$.

A més, si $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ és un morfisme de complexes, es poden definir (de manera òbvia) els complexes $\mathbf{ker}\, f$, $\mathbf{im}\, f$ i $\mathbf{coker}\, f$, i es té també l'isomorfisme canònic

$$\mathbf{A}/\mathbf{ker}\, f \cong \mathbf{im}\, f$$

Aquests fets, juntament amb que es pot construir la suma directa d'una família arbitrària de complexes

$$\{\mathbf{A^k} = \cdots \longrightarrow A^k_n \xrightarrow{d^k_n} A^k_{n-1} \longrightarrow \cdots, k \in K\}$$

senzillament com el complex

$$\bigoplus \mathbf{A^k} = \cdots \longrightarrow \bigoplus A^k_n \xrightarrow{\oplus d^k_n} \bigoplus A^k_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

tenim que $\mathbf{Comp}(R)$ és una categoria abeliana.

Anàlogament al cas de mòduls, una successió

$$\mathbf{A}' \xrightarrow{f} \mathbf{A} \xrightarrow{g} \mathbf{A}''$$

es diu *exacta* si $\mathbf{ker}\, g = \mathbf{im}\, f$, o equivalentment si per tot $n \in \mathbb{Z}$ la successió de mòduls

$$A'_n \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{g_n} A''_n$$

és exacta.

Anem ara a definir l'homologia d'un complex. Per analogia amb els complexes de cadenes en un espai topològic, definim:

Definició 4.4. *Sigui* $\mathbf{A}$ *un complex homològic. Els elements de* A_n *s'anomenen* n-cadenes*, els elements de* $Z_n = Z_n(\mathbf{A}) = \ker d_n$ *són els* n-cicles *i els elements de* $B_n = B_n(\mathbf{A}) = \operatorname{im} d_{n+1}$ *són les* n-vores*.*

La condició $d_n \circ d_{n+1} = 0$ vol dir que $B_n(\mathbf{A}) \subseteq Z_n(\mathbf{A})$, i per tant té sentit definir

Definició 4.5. *El mòdul quocient*

$$H_n(\mathbf{A}) = Z_n(\mathbf{A})/B_n(\mathbf{A})$$

s'anomena mòdul d'homologia n-èssim *del complex* $\mathbf{A}$*.*

En el cas cohomològic la notació i la nomenclatura són diferents: $Z^n(\mathbf{A}) = \ker d^n$ és el submòdul de *n-cocicles* i $B^n(\mathbf{A}) = \operatorname{im} d^{n-1}$ el submòdul de *n-covores*. Anàlogament al cas homològic, la condició $d^n \circ d^{n-1} = 0$ equival a $B^n(\mathbf{A}) \subseteq Z^n(\mathbf{A})$, i per tant podem definir el mòdul

$$H^n(\mathbf{A}) = Z^n(\mathbf{A})/B^n(\mathbf{A})$$

que anomenarem mòdul de *cohomologia* n-èssim.

Volem que aquests H_n (i H^n) siguin realment functors de la categoria de complexes en la categoria de mòduls. Per això hem de definir la seva acció sobre els morfismes de complexes:

Definició 4.6. *Si $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ és un morfisme de complexes, definim*

$$H_n(f) : H_n(\mathbf{A}) \longrightarrow H_n(\mathbf{A}')$$

com

$$[z_n] \longrightarrow [f_n(z_n)]$$

Com assegura el següent teorema, aquest morfisme està ben definit (és independent del cicle z_n escollit en la seva classe d'equivalència), i s'anomena morfisme induït *per f. Sovint es denota simplement per f_*, oblidant el subíndex n.*

Amb aquesta definició tenim el següent resultat, que és el que voliem. No el demostrarem ja que és una comprovació rutinària però molt llarga.

Teorema 4.7. *Per cada n, l'aplicació $H_n : \mathbf{Comp}(R) \longrightarrow \mathbf{Mod}(R)$ és un functor additiu.*

El més natural ara mateix és estudiar l'exactitud d'aquests functors H_n. En general no són exactes per la dreta ni per l'esquerra, però com veuren més endavant, són exactes al mig, és a dir, si

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

és una successió exacta curta de complexes, aleshores

$$H_n(\mathbf{A}') \longrightarrow H_n(\mathbf{A}) \longrightarrow H_n(\mathbf{A}'')$$

és exacta. Per tant, l'interés d'aquests functors no és que tinguin bones propietats d'exactitud, però en canvi es té el següent resultat:

Teorema 4.8. (Morfisme de connexió). *Sigui $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A}' \xrightarrow{i} \mathbf{A} \xrightarrow{p} \mathbf{A}'' \longrightarrow \mathbf{0}$ una successió exacta de complexes. Per cada $n \in \mathbb{Z}$ existeix un morfisme de mòduls (anomenat* morfisme de connexió*)*

$$\partial_n : H_n(\mathbf{A}'') \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{A}')$$

definit per

$$[z''] \mapsto [i_{n-1}^{-1}(d_n(p_n^{-1}(z'')))]$$

Demostració. Considerem el diagrama commutatiu (amb files exactes)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & A_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & A_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] & A''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Prenem $z'' \in A''_n$ tal que $d''_n(z'') = 0$. Com que p_n és exhaustiu, existeix un element $a_n \in A_n$ tal que $p_n(a_n) = z''$. Aleshores tenim $d_n(a_n) \in A_{n-1}$, i per commutativitat del segon quadrat resulta $p_{n-1}(d_n(a_n)) = d''_n(p_n(a_n)) = d''_n(z'') = 0$, i.e. $d_n(a_n) \in \ker p_{n-1} = \operatorname{im} i_{n-1}$. Per tant, existeix un $a'_{n-1} \in A'_{n-1}$ tal que $i_{n-1}(a'_{n-1}) = d_n(a_n)$ (de fet aquest a'_{n-1} és únic, ja que i_{n-1} és injectiu).

Ara bé, si haguéssim triat una altra antiimatge $\bar{a}_n \in A_n$ de z'', haguéssim obtingut un altre $\bar{a}'_{n-1}$ tal que $i_{n-1}(\bar{a}'_{n-1}) = d_n(\bar{a}_n)$. Com que $p_n(a_n) = p_n(\bar{a}_n)$, resulta que $a_n - \bar{a}_n \in \ker p_n = \operatorname{im} i_n$, de manera que existeix $x'_n \in A'_n$ tal que $i_n(x'_n) = a_n - \bar{a}_n$. Com a conseqüència de la commutativitat del primer quadrat tenim

$$i_{n-1}(d'_n(x'_n)) = d_n(i_n(x'_n)) = d_n(a_n) - d_n(\bar{a}_n) = i_{n-1}(a_{n-1}) - i_{n-1}(\bar{a}_{n-1}) = i_{n-1}(a_{n-1} - \bar{a}_{n-1})$$

i com que i_{n-1} és injectiu resulta que $a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} = d'_n(x'_n)$. Per tant, la classe de a_{n-1} mòdul $B_{n-1}(\mathbf{A}')$ està ben definida.

Hem obtingut doncs una aplicació

$$Z_n(\mathbf{A}'') \longrightarrow A'_{n-1}/B_{n-1}(\mathbf{A}')$$

És immediat comprovar que és un morfisme de mòduls, que la imatge està continguda en $H_{n-1}(\mathbf{A}')$ (i.e. a'_{n-1} és un cicle) i que envia les $(n-1)$-vores $B_{n-1}(\mathbf{A}')$ a zero. Per tant, indueix un morfisme

$$\partial_n : H_n(\mathbf{A}'') \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{A}')$$

com voliem veure. $\square$

La utilitat d'aquests morfismes de connexió és la construcció de la successió exacta llarga d'homologia associada a una successió exacta curta de complexes:

Teorema 4.9. (Successió exacta llarga). *Si* $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A}' \xrightarrow{i} \mathbf{A} \xrightarrow{p} \mathbf{A}'' \longrightarrow \mathbf{0}$ *és una successió exacta curta de complexes, existeix una successió exacta de mòduls*

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathbf{A}') \xrightarrow{(i_*)_n} H_n(\mathbf{A}) \xrightarrow{(p_*)_n} H_n(\mathbf{A}'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathbf{A}') \xrightarrow{(i_*)_{n-1}} H_{n-1}(\mathbf{A}) \xrightarrow{(p_*)_{n-1}} H_{n-1}(\mathbf{A}'') \longrightarrow \cdots$$

Demostració. La demostració és semblant a la del teorema 4.8, "caçant" els elements que volem trobar dins del diagrama commutatiu.

S'han de demostrar sis inclusions:

- $\operatorname{im}(i_*)_n \subseteq \ker(p_*)_n$: Per functorialitat dels H_n, resulta que

  $$(p_*)_n \circ (i_*)_n = ((p \circ i)_*)_n = 0_* = 0$$

  d'on resulta el que volem veure.

- $\ker(p_*)_n \subseteq \operatorname{im}(i_*)_n$: Sigui $[z_n] \in H_n(\mathbf{A})$ tal que

  $$(p_*)_n([z_n]) = [p_n(z_n)] = [0] \in H_n(\mathbf{A}'')$$

  Aleshores $p_n(z_n) \in B_n(\mathbf{A}'')$, i.e. $p_n(z_n) = d''_{n+1}(a''_{n+1})$ per algun $a''_{n+1} \in A''_{n+1}$. Com que p_{n+1} és exhaustiu, resulta que $a''_{n+1} = p_{n+1}(a_{n+1})$ per algun $a_{n+1} \in A_{n+1}$, de manera que

  $$p_n(z_n) = d''_{n+1}(p_{n+1}(a_{n+1})) = p_n(d_{n+1}(a_{n+1}))$$

  és a dir $p_n(z_n - d_{n+1}(a_{n+1})) = 0$. Com que $\operatorname{im} i_n = \ker p_n$, resulta que

  $$z_n - d_{n+1}(a_{n+1}) = i_n(a'_n)$$

  per un únic $a'_n \in A'_n$. Aquest a'_n és un cicle, ja que

  $$i_{n-1}(d'_n(a'_n)) = d_n(i_n(a'_n)) = d_n(z_n) - d_n(d_{n+1}(a_{n+1})) = d_n(z_n) = 0$$

  (z_n és un cicle per la definició dels mòduls d'homologia) i el morfisme i_{n-1} és injectiu. Per últim tenim

  $$(i_*)_n([a'_n]) = [i_n(a'_n)] = [z_n - d_{n+1}(a_{n+1})] = [z_n] \in \operatorname{im}(i_*)_n$$

  i ja hem acabat.

- $\operatorname{im}(p_*)_n \subseteq \ker \partial_n$: Per una classe $[z_n] \in H_n(\mathbf{A})$ qualsevol, tenim

  $$\partial_n((p_*)_n([z_n])) = \partial_n[p_n(z_n)] = [x'_{n-1}]$$

  on x'_{n-1} és tal que

  $$i_{n-1}(x'_{n-1}) = d_n(p_n^{-1}(p_n(z_n))) = d_n(z_n) = 0$$

  Com que i_{n-1} és injectiu, resulta $x'_{n-1} = 0$, i per tant $\partial_n \circ (p_*)_n = 0$ com voliem veure.

- $\ker \partial_n \subseteq \operatorname{im}(p_*)_n$: Sigui $[z''_n] \in H_n(\mathbf{A}'')$ tal que $\partial_n([z''_n]) = 0$, és a dir, tal que

$$x'_{n-1} = i_{n-1}^{-1}(d_n(p_n^{-1}(z''_n))) \in B_{n-1}(\mathbf{A}')$$

  Per tant, $x'_{n-1} = d'_n(a'_n)$ per algun $a'_n \in A'_n$. Aleshores

$$i_{n-1}(x'_{n-1}) = i_{n-1}(d'_n(a'_n)) = d_n(i_n(a'_n)) = d_n(p_n^{-1}(z''_n))$$

  de manera que $d_n(p_n^{-1}(z''_n) - i_n(a'_n)) = 0$, és a dir

$$p_n^{-1}(z''_n) - i_n(a'_n) \in Z_n(\mathbf{A})$$

  Per tant

$$(p_*)_n([p_n^{-1}(z''_n) - i_n(a'_n)]) = [p_n(p_n^{-1}(z''_n)) - p_n(i_n(a'_n))] = [z''_n] \in \operatorname{im}(p_*)_n$$

  (ja que $p_n \circ i_n = 0$).

- $\operatorname{im} \partial_n \subseteq \ker(i_*)_{n-1}$: Per qualsevol $[z''_n] \in H_n(\mathbf{A}'')$ es té

$$(i_*)_{n-1}(\partial_n([z''_n])) = (i_*)_{n-1}[i_{n-1}^{-1}(d_n(p_n^{-1}(z''_n)))] = [d_n(p_n^{-1}(z''_n))] = [0] \in H_{n-1}(\mathbf{A})$$

  De manera que $(i_*)_{n-1} \circ \partial_n = 0$, que és el que voliem.

- $\ker(i_*)_{n-1} \subseteq \operatorname{im} \partial_n$: Sigui $[z'_{n-1}] \in H_{n-1}(\mathbf{A}')$ tal que $(i_*)_{n-1}([z'_{n-1}]) = 0$, de manera que $i_{n-1}(z'_{n-1}) = d_n(a_n)$ per algun $a_n \in A_n$. Aleshores

$$d''_n(p_n(a_n)) = p_{n-1}(d_n(a_n)) = p_{n-1}(i_{n-1}(z'_{n-1})) = 0$$

  és a dir $p_n(a_n) \in Z_n(\mathbf{A}'')$. Però $\partial_n([p_n(a_n)]) = [x'_{n-1}]$, on $i_{n-1}(x'_{n-1}) = d_n(p_n^{-1}(p_n(a_n)))$. Ara bé, de la demostració del teorema 4.8 sabem com que $\partial_n([z''_n])$ és independent de la tria de $p_n^{-1}(z''_n)$, i per tant podem prendre $i_{n-1}(x'_{n-1}) = d_n(a_n) = i_{n-1}(z'_{n-1})$, és a dir, $x'_{n-1} = z'_{n-1}$. Finalment resulta

$$\partial_n([p_n(a_n)]) = [z'_{n-1}] \in \operatorname{im} \partial_n$$

  i ja hem acabat.

$\square$

Aquest últim teorema el podem compactar dient que a partir d'una successió exacta curta de complexes $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{A}' \xrightarrow{i} \mathbf{A} \xrightarrow{p} \mathbf{A}'' \longrightarrow \mathbf{0}$ obtenim el següent "triangle exacte":

$$\begin{tikzcd} H(\mathbf{A}') \arrow[rr, "i_*"] & & H(\mathbf{A}) \arrow[dl, "p_*"] \\ & H(\mathbf{A}'') \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

La construcció del morfisme de connexió pot semblar una mica arbitrària (tot i que sigui coherent i proporcioni la successió exacta el teorema anterior). El següent resultat prova que la definició de ∂ és natural en cert sentit, ja que també connecta els morfismes induïts en homologia pels morfismes de complexes.

Teorema 4.10. (Naturalitat del morfisme de connexió.) *Considerem el diagrama commutatiu de complexes*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{A}' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{A}'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{C}' \arrow[r, "j"] & \mathbf{C} \arrow[r, "q"] & \mathbf{C}'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

on les files són exactes. Aleshores els morfismes induïts en les successions exactes llargues d'homologia dónen el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{A}') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g_*"'] & H_n(\mathbf{A}'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_*"] & H_{n-1}(\mathbf{A}') \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}') \arrow[r, "j_*"] & H_n(\mathbf{C}) \arrow[r, "q_*"] & H_n(\mathbf{C}'') \arrow[r, "\partial'"] & H_{n-1}(\mathbf{C}') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Demostració. Els dos primers quadrats són commutatius per què H_n és un functor. Per tant, només s'ha de demostrar que $f_* \circ \partial = \partial' \circ h_*$, que de nou és una llarga comprovació que ens estalviem. □

Una pregunta que no ens hem fet és quan dos morfismes de complexes indueixen el mateix morfismes en homologia. Mirant a la topologia algebraica, sabem que aquesta successió es produeix quan tenim dues aplicacions contínues *homòtopes*. Això motiva la següent definició:

Definició 4.11. *Un morfisme de complexes* $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ *és* homotòpicament nul *si existeixen morfismes de mòduls* $\{s_n : A_n \longrightarrow A'_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *(que es diu que formen una* homotopia *entre* f *i 0) tals que per tot* n *es té*

$$f_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & A'_n \arrow[r, "d'_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Més generalment, diem que dos morfismes de complexes $f, g : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ *són* homòtops *o* homotòpics *si* $f - g$ *és homotòpicament nul.*

La relació "ser homòtops" és una relació d'equivalència en el conjunt $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$ de tots els morfismes de complexes $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$.

Com a conseqüència immediata de la definició tenim el resultat que buscàvem:

Teorema 4.12. *Si* $f, g : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ *són morfismes de complexes homòtops, aleshores per tot* $n \in \mathbb{Z}$

$$(f_*)_n = (g_*)_n : H_n(\mathbf{A}) \longrightarrow H_n(\mathbf{A}')$$

Demostració. Sigui $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ una homotopia entre $f - g$ i 0.

Si $z_n \in Z_n(\mathbf{A})$ és un n-cicle, es té

$$f_*([z_n]) - g_*([z_n]) = [(f_n - g_n)(z_n)] = [d'_{n+1}(s_n(z_n)) + s_{n-1}(d_n(z_n))] = [0]$$

ja que $d_n(z_n) = 0$ i $d'_{n+1}(s_n(z_n)) \in B_n(\mathbf{A}')$. Per tant, $f_* = g_*$. □

Abans de passar al següent apartat i construir els functors derivats, enunciem tres lemes fonamentals de l'àlgebra homològica. Ometem les demostracions, ja que es fan amb la mateixa tècnica que els anteriors ("caçant" els elements pels diagrames).

Lema 4.13. (Lema dels cinc). *Considerem el diagrama commutatiu de mòduls amb files exactes*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "t_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "t_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "t_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "t_4"] & A_5 \arrow[d, "t_5"] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

i. Si t_2 i t_4 són exhaustius i t_5 és injectiu, aleshores t_3 és exhaustiu.

ii. Si t_2 i t_4 són injectius i t_1 és exhaustiu, aleshores t_3 és injectiu.

En particular, si t_1, t_2, t_4 i t_5 són isomorfismes, aleshores t_3 és també un isomorfisme.

Lema 4.14. (Lema de la serp). *Considerem el diagrama commutatiu de mòduls amb files exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"'] & C \arrow[r] & C'' &
\end{tikzcd}$$

Aleshores existeix una successió exacta

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$$

on ∂ ve donat per $a'' \mapsto [i^{-1}(\beta(p^{-1}(a'')))]$.

A més, si $A' \longrightarrow A$ és injectiu, aleshores $\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta$ també ho és; i si $C \longrightarrow C''$ és exhaustiu, $\operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$ també ho és.

Notem que aquest lema ens permetria fer una altra prova de l'existència del morfisme de connexió i la successió exacta llarga (teoremes 4.8 i 4.9).

Lema 4.15. (Lema dels nou). *Considerem el diagrama commumtatiu de mòduls amb columnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si les dos primeres (o últimes) files són exactes, aleshores la tercera (o primera) també ho és.

4.2 Functors derivats per la dreta i per l'esquerra.

En aquest apartat, donat un functor $T : \mathbf{Mod}(R) \longrightarrow \mathbf{Mod}(R)$, construirem una família de functors associats a ell: els seus functors derivats (per l'esquerra i per la dreta). Per avaluar-los en un mòdul M, bàsicament hem de triar una resolució de M (projectiva o injectiva, segons el cas), aplicar-hi el functor T i finalment prendre l'homologia del complex resultant. Per tal que aquesta definició sigui coherent, haurem de comparar diferents resolucions de M i comprovar que al final obtenim functors equivalents.

Abans, però, fixem una mica de notació:

Definició 4.16. *Sigui* $\mathbf{X}$ *un complex de la forma*

$$\mathbf{X} = \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

El complex obtingut eliminant M *és*

$$\mathbf{X}_M = \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$$

i s'anomena complex reduit *de* $\mathbf{X}$.

Anàlogament, el complex reduit de

$$\mathbf{Y} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow \cdots$$

és

$$\mathbf{Y}_M = 0 \longrightarrow Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow \cdots$$

A la pràctica, els complexes reduïts amb que treballarem provindran de resolucions projectives o injectives de M

$$\mathbf{P} = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

Notem que en aquests casos, esborrant M realment no perdem cap informació, ja que en el primer cas tenim $M = \operatorname{coker}(P_1 \longrightarrow P_0)$, i en el segon $M = \ker(E^0 \longrightarrow E^1)$.

El següent resultat és l'eina fonamental que ens permetrà comparar diferents resolucions d'un mòdul:

Teorema 4.17. (Teorema de Comparació.) *Considerem el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & X'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on les dues files són complexes. Si cada X_n *(a la fila de dalt) és projectiu i si la fila de sota és exacta, aleshores existeix un morfisme de complexes* $\bar{f} : \mathbf{X}_A \longrightarrow \mathbf{X'}_{A'}$ *(els morfismes puntejats) que fan commutar el diagrama. És més, dos morfismes de complexes amb aquestes propietats són homòtops.*

L'enunciat dual, canviant el sentit dels morfismes, i "projectiu" per "injectiu", també és cert.

Demostració. Farem només la prova en el cas projectiu, ja que el cas injectiu es demostra de manera dual.

En primer lloc provem l'existència del morfisme de complexes $\bar{f}$. Per tant, hem de construir morfismes $\bar{f}_n : X_n \longrightarrow X'_n$ per tot $n \geq 0$, de manera que $f \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ \bar{f}_0$ i $\bar{f}_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ \bar{f}_n$ per $n \geq 1$. Procedirem per inducció sobre n.

Si $n = 0$, tenim el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[dr, "f \circ \varepsilon"] & & \\
X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Com que ε' és exhaustiu (la fila de sota és exacta) i X_0 és projectiu, existeix un morfisme $\bar{f}_0 : X_0 \longrightarrow X'_0$ tal que $\varepsilon' \circ \bar{f}_0 = f \circ \varepsilon$.

Suposem ara que hem construit $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ i volem construir $\bar{f}_{n+1}$. Considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\bar{f}_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, "\bar{f}_{n-1}"] \\ X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & X'_n \arrow[r, "d'_n"'] & X'_{n-1} \end{tikzcd}$$

Per commutativitat del quadrat, tenim

$$d'_n \circ \bar{f}_n \circ d_{n+1} = \bar{f}_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0$$

de manera que

$$\operatorname{im}(\bar{f}_n \circ d_{n+1}) \subseteq \ker d'_n = \operatorname{im} d'_{n+1}$$

(la fila de sota és exacta). Per tant, podem escriure el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[dr, "\bar{f}_n \circ d_{n+1}"] & & \\ X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & \operatorname{im} d'_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

on la fila és exacta per construcció. Ara, fent servir que X_{n+1} és projectiu, obtenim una aplicació $\bar{f}_{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X'_{n+1}$ tal que $d'_{n+1} \circ \bar{f}_{n+1} = \bar{f}_n \circ d_{n+1}$, que és el que volíem.

Ara falta per provar la unicitat mòdul homotopia. Suposem que $h : \mathbf{X}_A \longrightarrow \mathbf{X'}_{A'}$ és un altre morfisme de complexes complint $\varepsilon' \circ h_0 = f \circ \varepsilon$. Hem de construir inductivament una homotopia s entre $\bar{f} - h$ i 0.

Per començar, com que $X_{-1} = 0$, hem de definir $s_{-1} : X_{-1} \longrightarrow X'_0$ com el morfisme 0. Ara suposem que hem determinat la homotopia fins $s_n : X_n \longrightarrow X'_{n+1}$ i volem determinar s_{n+1}. Considerem el diagrama (on només el quadrat central és commutatiu)

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}"'] & X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "h_n-\bar{f}_n"] & X_{n-1} \arrow[dl, "s_{n-1}"] \\ X'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"'] & X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & X'_n & \end{tikzcd}$$

Si calculem

$$d'_{n+1} \circ (h_{n+1} - \bar{f}_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) = d'_{n+1} \circ (h_{n+1} - \bar{f}_{n+1}) - d'_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1}$$

fent servir que s_n és una homotopia, el segon sumand queda

$$d'_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} = (h_n - \bar{f}_n - s_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} = (h_n - \bar{f}_n) \circ d_{n+1}$$

i per tant

$$d'_{n+1} \circ (h_{n+1} - \bar{f}_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) = (d'_{n+1} \circ h_{n+1} - h_n \circ d_{n+1}) - (d'_{n+1} \circ \bar{f}_{n+1} - \bar{f}_n \circ d_{n+1}) = 0$$

ja que tant h com $\bar{f}$ són morfismes de complexes.

Això vol dir que

$$\operatorname{im}(h_{n+1} - \bar{f}_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) \subseteq \ker d'_{n+1} = \operatorname{im} d'_{n+2}$$

(com sempre, per què la fila de sota és exacta) de manera que podem considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[d, "h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}-s_n\circ d_{n+1}"] & \\ X'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"] & \operatorname{im} d'_{n+2} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

i com que X_{n+1} és projectiu, existeix una aplicació $s_{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X'_{n+2}$ tal que

$$d'_{n+2} \circ s_{n+1} = h_{n+1} - \bar{f}_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}$$

que és justament la definició de ser una homotopia, i per tant ja hem acabat. □

Si $\bar{f} : \mathbf{X}_A \longrightarrow \mathbf{X'}_{A'}$ compleix les condicions del teorema anterior, diem que és un morfisme de complexes *sobre* $f : A \longrightarrow A'$.

Ara ja estem en condicions de construir els functors derivats d'un functor T (additiu covariant de $\mathbf{Mod}(R)$ en ella mateixa). D'ara en endavant, per cada mòdul A triem una resolució projectiva (resp. injectiva) i denotem per $\mathbf{P}_A$ (resp. $\mathbf{E}_A$) el corresponent complex reduït.

Definició 4.18. *Per cada enter $n \in \mathbb{Z}$, definim l'n-*èssim functor derivat per l'esquerra *de T, L_nT com*

$$L_nT(A) = H_n(T(\mathbf{P}_A)) = \ker T(d_n)/\operatorname{im} T(d_{n+1})$$

per cada mòdul A, i

$$L_nT(f) = H_n(T(\bar{f})) = (T(\bar{f}))_* : L_nT(A) \longrightarrow L_nT(B)$$

per cada morfisme $f : A \longrightarrow B$ (on $\bar{f} : \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}_B$ és un morfisme de complexes sobre f).

Més explícitament, per calcular $L_nT(A)$, prenem la resolució projectiva de A que hem triat

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

Esborrem A i apliquem T per obtenir un complex (en general, si T no és exacte, no será una successió exacta)

$$T(\mathbf{P}_A) = \cdots \longrightarrow T(P_n) \xrightarrow{T(d_n)} T(P_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_0) \longrightarrow 0$$

Per últim, calculem l'homologia n-èssima d'aquest complex i tenim $L_nT(A)$.

Quant als morfismes, per calcular $L_nT(f)$ (on $f : A \longrightarrow B$), en primer lloc posem les dues resolucions projectives triades per A i B, i omplim el diagrama (les fletxes puntejades) amb un morfisme de complexes $\bar{f}$ sobre f

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{f}_2"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{f}_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{f}_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A continuació esborrem la última columna i apliquem T, de manera que obtenim un morfisme de complexes $T(\bar{f}) : T(\mathbf{P}_A) \longrightarrow T(\mathbf{P}_B)$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & T(P_2) \arrow[r] \arrow[d, "T(\bar{f}_2)"'] & T(P_1) \arrow[r] \arrow[d, "T(\bar{f}_1)"'] & T(P_0) \arrow[r] \arrow[d, "T(\bar{f}_0)"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & T(P'_2) \arrow[r] & T(P'_1) \arrow[r] & T(P'_0) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Finalment, prenem $L_nT(f)$ com l'n-èssim morfisme induït en homologia.

Notem que $L_nT(f)$ és independent del morfisme de complexes $\bar{f}$ triat, ja que pel teorema de comparació, dos qualsevols seran homòtops. És immediat comprovar que tot functor additiu T transforma morfismes homòtops en morfismes homòtops, i per tant indueixen el mateix morfisme $L_nT(f)$ en homologia.

És fàcil (tot i que no immediat) comprovar que els L_nT així obtinguts són en efecte functors additius de $\mathbf{Mod}(R)$ en sí mateixa.

Notem també que, donat que els termes dels complexes $\mathbf{P}_A$ són 0 per índexos negatius, tenim $L_nT = 0$ per tot $n \leq -1$.

Ara bé, la construcció dels L_nT l'hem fet fixant una resolució projectiva per cada mòdul A. Però, i si haguéssim triat una altra resolució? Haguéssim obtingut els mateixos functors?

Suposem que per cada A haguéssim triat una altra resolució projectiva

$$\cdots \hat{P}_2 \longrightarrow \hat{P}_1 \longrightarrow \hat{P}_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

i denotem per $\hat{L}_nT$ els functors derivats obtinguts fent servir aquestes resolucions. Ara veurem que L_nT i $\hat{L}_nT$ són essencialment el mateix:

Teorema 4.19. *Per qualsevol functor T, els functors derivats L_nT i $\hat{L}_nT$ són naturalment equivalents. En particular, per cada mòdul A tenim*

$$L_nT(A) \cong \hat{L}_nT(A)$$

i.e., aquests mòduls són independents de la resolució projectiva triada.

Demostració. Considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \hat{P}_2 \arrow[r] & \hat{P}_1 \arrow[r] & \hat{P}_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pel Teorema de Comparació, existeix un morfisme de complexes $i : \mathbf{P}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_A$ sobre 1_A (únic llevat d'homotopia). Aplicant el functor T obtenim un morfisme de complexes $T(i) : T(\mathbf{P}_A) \longrightarrow T(\hat{\mathbf{P}}_A)$ sobre $T(1_A) = 1_{T(A)}$, i aquest morfisme indueix morfismes en homologia

$$\tau_A = (T(i))_* : L_nT(A) \longrightarrow \hat{L}_nT(A)A$$

Vegem que aquests τ_A són isomorfismes. Per obtenir els inversos, simplement hem de girar el diagrama anterior. El Teorema de Comparació dóna un morfisme de complexes $j : \hat{\mathbf{P}}_A \longrightarrow \mathbf{P}_A$ tal que la composició $j \circ i : \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}_A$ és un morfisme de complexes sobre 1_A. Com que $1_\mathbf{P} : \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}_A$ també és un morfisme de complexes sobre 1_A, el Teorema de Comparació diu que $j \circ i$ i $1_\mathbf{P}$ són homòtops, i per tant $1 = j_* \circ i_*$. Anàlogament podem obtenir $i_* \circ j_* = 1$, de manera que i_* és un isomorfisme, i per tant $\tau_A = (T(i))_*$ també és un isomorfisme.

Ara només falta veure que els τ_A formen una transformació natural: si $f : A \longrightarrow B$ és un morfisme, hem de veure que el diagrama següent és commutatiu.

$$\begin{tikzcd}
L_nT(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "L_nT(f)"'] & \hat{L}_nT(A) \arrow[d, "\hat{L}_nT(f)"] \\
L_nT(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & \hat{L}_nT(B)
\end{tikzcd}$$

Per calcular la composició $\hat{L}_nT(f) \circ \tau_A$ considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \hat{P}_1 \arrow[r] & \hat{P}_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \hat{Q}_1 \arrow[r] & \hat{Q}_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El Teorema de comparació dóna un morfisme de complexes $\mathbf{P}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{Q}}_B$ sobre $f \circ 1_A = f$. Anàlogament, per l'altra composició tenim el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \hat{Q}_1 \arrow[r] & \hat{Q}_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

i el Teorema de Comparació dóna un morfisme de complexes $\mathbf{P}_A \longrightarrow \hat{\mathbf{Q}}_B$ sobre $1_B \circ f = f$. De nou pel Teorema de Comparació, aquests dos morfismes de complexes són homòtops, així com els seus transformats per T, i per tant en homologia obtenim els mateixos morfismes, és a dir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L_nT(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "L_nT(f)"'] & \hat{L}_nT(A) \arrow[d, "\hat{L}_nT(f)"] \\
L_nT(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & \hat{L}_nT(B)
\end{tikzcd}$$

és en efecte commutatiu. $\square$

Per tant, a partir d'ara no ens haurem de preocupar per quina resolució projectiva prenem per calcular els L_nT, ja que amb totes obtindrem el mateix resultat.

El següent corol·lari ens dóna una manera de calcular $L_nT(A)$.

Corol·lari 4.20. *Sigui*

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

una resolució projectiva d'A. Siguin $K_0 = \ker \varepsilon$ *i* $K_n = \ker d_n$ *per* $n \geq 1$. *Aleshores (si* T *és covariant)*

$$L_{n+1}T(A) \cong L_nT(K_0) \cong L_{n-1}T(K_1) \cong \cdots \cong L_1T(K_{n-1})$$

Demostració. És evident que

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow 0$$

és una resolució projectiva de K_0. Com que els índexos no són els correctes, posem $Q_{n-1} = P_n$ i $\Delta_{n-1} = d_n$ per $n \geq 1$. Ara la resolució és

$$\cdots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{\Delta_2} Q_1 \xrightarrow{\Delta_1} Q_0 \xrightarrow{d_1} D_0 \longrightarrow 0$$

Per definició,

$$L_nT(K_0) \cong H_n(T(\mathbf{Q}_{K_0})) = \ker T(\Delta_n)/\operatorname{im} T(\Delta_{n+1}) = \ker T(d_{n+1})/\operatorname{im} T(d_{n+2}) = H_{n+1}(T(\mathbf{P}_A)) = L_{n+1}T(A)$$

i la resta d'isomorfismes s'obtenen iterant aquest. $\square$

Estudiem ara les propietats generals dels functors derivats. La primera és un resultat senzill però molt útil:

Teorema 4.21. *Si T és un functor (covariant) exacte per la dreta, aleshores L_0T és naturalment equivalent a T. En particular, per tot mòdul A tenim*

$$L_0T(A) \cong T(A)$$

Demostració. Sigui

$$\mathbf{P} = \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

una resolució projectiva de A. Com que T és exacte a la dreta, resulta que

$$T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_0) \xrightarrow{T(\varepsilon)} T(A) \longrightarrow 0$$

és exacta.

Per definició,

$$L_0T(A) = \ker(T(P_0) \longrightarrow 0)/\operatorname{im} T(d_1) = T(P_0)/\operatorname{im} T(d_1) = \operatorname{coker} T(d_1) \overset{\tau_A}{\cong} T(A)$$

on l'últim isomorfisme és conseqüència de l'exactitud d'abans.

Ara només queda comprovar que aquests isomorfismes realment dónen una equivalència functorial, és a dir, que són compatibles amb les accions sobre els morfismes. Sigui doncs $f : A \longrightarrow B$ un morfisme, i volem veure que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L_0T(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "L_0T(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\
L_0T(B) \arrow[r, "\tau_B"] & T(B)
\end{tikzcd}$$

és commutatiu.

Prenem les resolucions projectives de A i B

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\bar{f}_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\bar{f}_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d_1'"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

amb un morfisme de complexes $\bar{f}$ sobre f. Aplicant el functor T obtenim un diagrama commutatiu amb files exactes

$$\begin{tikzcd}
T(P_1) \arrow[r, "T(d_1)"] \arrow[d, "T(\bar{f}_1)"'] & T(P_0) \arrow[r, "T(\varepsilon)"] \arrow[d, "T(\bar{f}_0)"] & T(A) \arrow[r] \arrow[d, "T(f)"] & 0 \\
T(Q_1) \arrow[r, "T(d_1')"] & T(Q_0) \arrow[r, "T(\varepsilon')"] & T(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ara bé, $L_0T(f)$ és el morfisme induït per $T(\bar{f}_0)$ entre els conuclis de $T(d_1)$ i $T(d_1')$, que són isomorfs a A i B via τ_A i τ_B. Aplicant aquests isomorfismes al diagrama anterior resulta el que volíem. □

La propietat fonamental dels functors derivats és que proporcionen una successió exacta llarga de mòduls a partir d'una successió exacta curta (també de mòduls)

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

Això és conseqüència del teorema 4.9, però per aplicar-ho necessitem una successió exacta curta de complexes sobre la successió curta. A més, si volem obtenir una successió exacta amb els functors derivats, aquests complexes haurien de ser resolucions projectives de A, A' i A''. Ho podem fer? El següent lema ens dóna la resposta

Lema 4.22. (Lema de la ferradura). *Considerem el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & P'_1 \arrow[d, "d'_1"'] & & P''_1 \arrow[d, "d''_1"'] & \\
 & P'_0 \arrow[d, "\varepsilon'"'] & & P''_0 \arrow[d, "\varepsilon''"'] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

on les columnes són resolucions projectives i la fila és exacta. Aleshores existeix una resolució projectiva $\mathbf{P}$ *de* A *i morfismes de complexes* $\bar{i} : \mathbf{P}'_{A'} \longrightarrow \mathbf{P}_A$ *sobre* i *i* $\bar{p} : \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}''_{A''}$ *sobre* p

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, dashed] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, dashed] & P'_1 \arrow[r, dashed, "i_1"] \arrow[d, "d'_1"'] & P_1 \arrow[r, dashed, "p_1"] \arrow[d, dashed, "d_1"'] & P''_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "d''_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & P'_0 \arrow[r, dashed, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P_0 \arrow[r, dashed, "p_0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & P''_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varepsilon''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

de manera que les columnes formen una successió exacta de complexes.

L'enunciat dual, canviant les resolucions projectives per injectives, també és cert.

Demostració. Per inducció, és suficient completar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & K_0' \arrow[d] & & K_0'' \arrow[d] & \\
 & P_0' \arrow[d, "\varepsilon'"'] & & P_0'' \arrow[d, "\varepsilon''"'] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

on les columnes i la fila són exactes, i P_0' i P_0'' són projectius.

Definim $P_0 = P_0' \oplus P_0''$, $i_0 : P_0' \longrightarrow P_0$ per $x' \mapsto (x', 0)$ i $p_0 : P_0 \longrightarrow P_0''$ per $(x', x'') \mapsto x''$. Pel teorema 3.46, P_0 és projectiu, i per construcció

$$0 \longrightarrow P_0' \xrightarrow{i_0} P_0 \xrightarrow{p_0} P_0'' \longrightarrow 0$$

és exacta.

Ara, com que P_0'' és projectiu, existeix un morfisme $\sigma : P_0'' \longrightarrow A$ tal que $p \circ \sigma = \varepsilon'$. Definim $\varepsilon : P_0 \longrightarrow A$ com

$$\varepsilon(x', x'') = i(\varepsilon'(x')) + \sigma(x'')$$

i posem $K_0 = \ker \varepsilon$. Aleshores tenim un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & K_0' \arrow[d] & K_0 \arrow[d] & K_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

El diagrama és commutatiu, ja que

$$\varepsilon(i_0(x')) = \varepsilon(x', 0) = i(\varepsilon'(x')) + \sigma(0) = i(\varepsilon'(x')) \quad \forall x' \in P_0'$$

i per altra banda

$$p(\varepsilon(x', x'')) = p(i(\varepsilon'(x'))) + p(\sigma(x'')) = 0 + \varepsilon'(x'') = \varepsilon'(p_0(x', x'')) \quad \forall (x', x'') \in P_0$$

A més, totes les files i columnes són exactes.

Per últim, com a conseqüència de la commutativitat, tenim les inclusions $i_0(K_0') \subseteq K_0$ i $p_0(K_0) \subseteq K_0''$, de manera que podem omplir la fila de dalt amb les restriccions de i_0 i p_0, obtenint el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0' \arrow[r] \arrow[d] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

on la fila nova és exacta (pel Lema dels nou), i així ja hem acabat. $\square$

Ara tenim la principal utilitat dels functors derivats:

Teorema 4.23. *Sigui* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *una successió exacta curta de mòduls. Si* T *és un functor covariant, existeix una successió exacta llarga*

$$\cdots \to L_nT(A') \to L_nT(A) \to L_nT(A'') \xrightarrow{\partial} L_{n-1}T(A') \to \cdots \to L_0T(A') \to L_0T(A) \to L_0T(A'') \to 0$$

Demostració. Siguin $\mathbf{P}' = \cdots \longrightarrow P_1' \longrightarrow P_0' \longrightarrow A' \longrightarrow 0$ i $\mathbf{P}'' = \cdots \longrightarrow P_1'' \longrightarrow P_0'' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ les resolucions projectives triades per A' i A''. Aplicant el Lema de la ferradura, obtenim una resolució projectiva de A, $\hat{\mathbf{P}} = \cdots \longrightarrow \hat{P}_1 \longrightarrow \hat{P}_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ que podem posar al mig. Esborrant els A's, obtenim una successió exacta curta de complexes

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{P}'_{A'} \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_A \longrightarrow \mathbf{P}''_{A''} \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{P}'_{A'} \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_A \longrightarrow \mathbf{P}''_{A''} \longrightarrow \mathbf{0}$$

Aplicant T obtenim una nova successió de complexes

$$\mathbf{0} \longrightarrow T(\mathbf{P}'_{A'}) \longrightarrow T(\hat{\mathbf{P}}_A) \longrightarrow T(\mathbf{P}''_{A''}) \longrightarrow \mathbf{0}$$

Aquesta successió també és exacta, ja que cada fila $0 \longrightarrow P_n' \longrightarrow \hat{P}_n \longrightarrow P_n'' \longrightarrow 0$ és de fet escindida, i per tant $0 \longrightarrow T(P_n') \longrightarrow T(\hat{P}_n) \longrightarrow T(P_n'') \longrightarrow 0$ també escindeix.

Aplicant ara el teorema de la successió exacta llarga 4.9, obtenim una successió exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(T(\mathbf{P}'_{A'})) \longrightarrow H_n(T(\hat{\mathbf{P}}_A)) \longrightarrow H_n(T(\mathbf{P}''_{A''})) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(T(\mathbf{P}'_{A'})) \longrightarrow \cdots$$

és a dir, una successió exacta

$$\cdots \longrightarrow L_nT(A') \longrightarrow \hat{L}_nT(A) \longrightarrow L_nT(A'') \xrightarrow{\partial} L_{n-1}T(A') \longrightarrow \cdots$$

Ara només cal canviar els $\hat{L}_nT(A)$ per $L_nT(A)$ fent servir els isomorfismes del teorema 4.19.

Per últim, notem que la successió acaba amb $n = 0$, ja que $L_nT = 0$ per $n \leq -1$ (per què P_n, i per tant $T(P_n)$ també són zero per $n \leq -1$). $\square$

De manera immediata obtenim:

Corol·lari 4.24. *Per tot functor covariant T, el functor derivat L_0T és exacte per la dreta.*

Demostració. Pel teorema anterior, si partim d'una successió exacta $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ obtenim una successió exacta que acaba amb

$$L_0T(A') \longrightarrow L_0T(A) \longrightarrow L_0T(A'') \longrightarrow 0$$

□

Per acabar amb l'estudi general dels functors derivats (per l'esquerra de functors covariants), tractarem com es comporta la successió exacta llarga que acabem de construir amb els morfismes de successions exactes curtes. Ens limitarem a exposar els resultats sense demostracions, ja que són molt semblants a totes les anteriors, però més llargues.

En primer lloc tenim un petit lema tècnic.

Lema 4.25. *Considerem el següent diagrama commutatiu on les files són exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & C \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& 0 \arrow[r] & L \arrow[rr] \arrow[dd, dashed] & & D \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd] \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & C' \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dr] & \\
& 0 \arrow[r] & L' \arrow[rr] & & D' \arrow[rr] & & B'
\end{tikzcd}$$

Aleshores els morfismes puntejats existeixen i el diagrama resultant també és commutatiu.

Com sempre, el resultat dual també és cert.

Iterant aquest resultat podem demostrar el següent lema, que és una generalització del lema de la ferradura, en el sentit que també dóna una manera de construir resolucions projectives sobre certs diagrames commutatius.

Lema 4.26. *Suposem ara que tenim un diagrama commutatiu de mòduls amb files exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "t"'] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Suposem també que $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, $\mathbf{Q}'$ i $\mathbf{Q}''$ són resolucions projectives de A', A'', B' i B'' respectivament, i que $F' : \mathbf{P}' \longrightarrow \mathbf{Q}'$ i $F'' : \mathbf{P}'' \longrightarrow \mathbf{Q}''$ són dos morfismes de complexes sobre f' i f'' respectivament.

Aleshores, existeixen resolucions projectives $\mathbf{P}$ de A i $\mathbf{Q}$ de B, i un morfisme de complexes $F : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Q}$ sobre f tal que el diagrama de complexes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{P}' \arrow[r] \arrow[d, "F'"'] & \mathbf{P} \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & \mathbf{P}'' \arrow[r] \arrow[d, "F''"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{Q}' \arrow[r] & \mathbf{Q} \arrow[r] & \mathbf{Q}'' \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

és commutatiu i té files exactes.

A més, el teorema dual amb resolucions injectives també és cert.

I ara el resultat final:

Teorema 4.27. *Els morfismes de connexió són naturals, és a dir, donat un diagrama commutatiu amb files exactes*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "t"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

aleshores el següent diagrama commuta per tot $n \geq 1$:

$$\begin{tikzcd} L_nT(A'') \arrow[r] \arrow[d] & L_{n-1}T(A') \arrow[d] \\ L_nT(B'') \arrow[r] & L_{n-1}T(B') \end{tikzcd}$$

Ara construirem els functors derivats per la dreta (de functors covariants):

Definició 4.28. *Per cada enter $n \in \mathbb{Z}$, definim l'n-*èssim functor derivat per la dreta *de T, R^nT com*

$$R^nT(A) = H^n(T(\mathbf{E}_A)) = \ker T(d^n)/\operatorname{im} T(d^{n+1})$$

per cada mòdul A, i

$$R^nT(f) = H^n(T(\bar{f})) = (T(\bar{f}))^* : R^nT(A) \longrightarrow R^nT(B)$$

per cada morfisme $f : A \longrightarrow B$ (on $\bar{f} : \mathbf{E}_A \longrightarrow \mathbf{E}_B$ és un morfisme de complexes sobre f).

És a dir, la construcció és la mateixa que en el cas dels functors derivats per l'esquerra, però fent servir resolucions injectives enlloc de projectives, i per tant els complexes que surten creixen cap a la dreta (això explica el nom).

Notem que tots els índexos són superíndexos, ja que les resolucions injectives les hem indexat així (per tal que els complexes amb subíndexos sempre estiguin ordenats decreixentment).

Com en el cas dels derivats per l'esquerra, els R^nT són functors additius de $\mathbf{Mod}(R)$ en si mateixa, i són zero per $n < 0$. A més, són independents (llevat d'isomorfisme únic) de la resolució injectiva triada per calcular-los.

El següent resultat és una manera de calcular els R^nT:

Corol·lari 4.29. *Sigui*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \cdots$$

una resolució injectiva d'A. Siguin $L^0 = \operatorname{im} \varepsilon$ i $L^n = \operatorname{im} d^{n-1}$ per $n \geq 1$. Aleshores (si T és covariant)

$$R^{n+1}T(A) \cong R^nT(L^0) \cong R^{n-1}T(L^1) \cong \cdots \cong R^1T(L^{n-1})$$

També tenim la següent propietat, anàloga a 4.21.

Teorema 4.30. *Si T és un functor (covariant) exacte per l'esquerra, aleshores R^0T és naturalment equivalent a T. En particular, per tot mòdul A tenim*

$$R^0T(A) \cong T(A)$$

I com és natural, també tenim una successió exacta llarga:

Teorema 4.31. *Sigui $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ una successió exacta curta de mòduls. Si T és un functor covariant, existeix una successió exacta llarga*

$$0 \to R^0T(A') \to R^0T(A) \to R^0T(A'') \to \cdots \to R^{n-1}T(A'') \xrightarrow{\partial} R^nT(A') \to R^nT(A) \to R^nT(A'') \to \cdots$$

I el corol·lari anàleg:

Corol·lari 4.32. *Per tot functor covariant T, el functor derivat R^0T és exacte per l'esquerra.*

Per últim, com es podia esperar, el morfisme de connexió ∂ de la successió exacta llarga també és natural:

Teorema 4.33. *Donat un diagrama commutatiu amb files exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"'] & B \arrow[r, "t"'] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

aleshores el següent diagrama commuta per tot $n \geq 1$:

$$\begin{tikzcd}
R^nT(A'') \arrow[r] \arrow[d] & R^{n+1}T(A') \arrow[d] \\
R^nT(B'') \arrow[r] & R^{n+1}T(B')
\end{tikzcd}$$

Per acabar, hem de definir els functors derivats de functors contravariants. La diferència és que, com que es canvia el sentit dels morfismes, si per exemple comencem prenent resolucions projectives obtindrem complexes cap a la dreta, i per tant els functors derivats per la dreta.

Explícitament, sigui T un functor additiu contravariant. Aleshores:

Definició 4.34. *Per cada enter $n \in \mathbb{Z}$, definim l'n-*èssim functor derivat per la dreta *de T, R^nT com*

$$R^nT(A) = H^n(T(\mathbf{P}_A)) = \ker T(d_{n+1})/\operatorname{im} T(d_n)$$

per cada mòdul A, i

$$R^nT(f) = H^n(T(\bar{f})) = (T(\bar{f}))^* : R^nT(B) \longrightarrow R^nT(A)$$

per cada morfisme $f : A \longrightarrow B$ (on $\bar{f} : \mathbf{P}_A \longrightarrow \mathbf{P}_B$ és un morfisme de complexes sobre f).

Notem que ara els R^nT són functors additius contravariants, però com abans, s'anul·len per $n < 0$. També hi ha una manera de calcular-los semblant a 4.29

Corol·lari 4.35. *Sigui*

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

una resolució projectiva d'A. Siguin $K_0 = \ker \varepsilon$ i $K_n = \ker d^{n-1}$ per $n \geq 1$. Aleshores, si T és contravariant,

$$R^{n+1}T(A) \cong R^nT(K_0) \cong R^{n-1}T(K_1) \cong \cdots \cong R^1T(K_{n-1})$$

I com és natural

Teorema 4.36. *Si T és un functor contravariant exacte per l'esquerra, aleshores R^0T és naturalment equivalent a T. En particular, per tot mòdul A tenim*

$$R^0T(A) \cong T(A)$$

La successió exacta llarga no por faltar:

Teorema 4.37. *Sigui $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ una successió exacta curta de mòduls. Si T és un functor covariant, existeix una successió exacta llarga*

$$0 \to R^0T(A'') \to R^0T(A) \to R^0T(A') \to \cdots \to R^{n-1}T(A') \xrightarrow{\partial} R^nT(A'') \to R^nT(A) \to L_nT(A') \to \cdots$$

I la conseqüent exactitud de R^0T:

Corol·lari 4.38. *Per tot functor contravariant T, el functor derivat R^0T és exacte per l'esquerra.*

Ara faltaria el cas dels functors derivats per l'esquerra de functors covariants, que és completament anàleg als altres tres casos ja estudiats, i que no exposarem amb detall per què no ho necessitarem.

4.3 El functor Ext.

En aquest apartat definirem els functors Ext^n i donarem les seves propietats i aplicacions bàsiques.

Siguin A i B dos R-mòduls fixats. El functor $T = \mathrm{Hom}_R(A, -)$ és un functor covariant additiu exacte per l'esquerra. Té sentit doncs considerar els seus derivats per la dreta, que denotarem

$$R^nT = \mathrm{Ext}^n_R(A, -)$$

Els valors que prenen en B són doncs

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}_R(A, \mathbf{E}_B))$$

on $\mathbf{E}_B$ és una resolució injectiva de B. Per altra banda, podem considerar el functor $T = \mathrm{Hom}_R(-, B)$. Aquest és additiu contravariant i exacte també per l'esquerra, de manera que també té sentit considerar els seus derivats per la dreta:

$$R^nT = \mathrm{Ext}^n_R(-, B)$$

D'aquesta manera tindrem

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_A, B))$$

amb $\mathbf{P}_A$ una resolució projectiva de A.

Ara mateix tenim un problema de notació: $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ pot denotar el valor en B de $R^n\mathrm{Hom}_R(A, -)$ o el valor en A de $R^n\mathrm{Hom}_R(-, B)$. Fins que veiem que això no és cap problema per què les dues construccions dónen lloc a mòduls isomorfs, les distingirem posant la segona en minúscula, és a dir, posarem

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, -) = R^n\mathrm{Hom}_R(A, -) \qquad \text{i} \qquad \mathrm{ext}^n_R(-, B) = R^n\mathrm{Hom}_R(-, B)$$

Abans de demostrar la igualtat Ext = ext, recopilem algunes de les seves propietats més senzilles, que són casos particulars de propietats generals dels functors derivats.

Proposició 4.39. *Siguin A i B dos R-mòduls. Aleshores:*

- *Si n és negatiu, aleshores $\mathrm{Ext}^n_R(A, B) = \mathrm{ext}^n_R(A, B) = 0$.*
- *$\mathrm{Ext}^0_R(A, -)$ és naturalment equivalent a $\mathrm{Hom}_R(A, -)$, i $\mathrm{ext}^0_R(-, B)$ és naturalment equivalent a $\mathrm{Hom}_R(-, B)$.*
- *Si $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ és una successió exacta curta de R-mòduls, aleshores tenim successions exactes llargues, amb morfismes de connexió naturals*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, C'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(A, C') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A, C) \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C'', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C', B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{ext}^1_R(C'', B) \longrightarrow \mathrm{ext}^1_R(C, B) \longrightarrow \cdots$$

Els següents resultats mereixen una atenció especial:

Teorema 4.40. *Si B és un mòdul injectiu, aleshores $\mathrm{Ext}^n_R(A, B) = 0$ per tot mòdul A i tot $n \geq 1$.*

Demostració. Si B és injectiu,

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\text{id}} B \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

és una resolució injectiva de B. Si esborrem el primer B i apliquem $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ obtenim el complex

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots$$

que té homologia $H^0 = \mathrm{Ext}^0_R(A, B) = \mathrm{Hom}_R(A, B)$ (com ja sabiem) i $H^n = \mathrm{Ext}^n_R(A, B) = 0$ per $n \geq 1$. $\square$

Teorema 4.41. *Si A és un mòdul projectiu, aleshores $\mathrm{ext}^n_R(A, B) = 0$ per tot mòdul B i tot $n \geq 1$.*

Demostració. La demostració és completament anàloga a l'anterior:

Si A és projectiu,

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\text{id}} A \longrightarrow 0$$

és una resolució projectiva de A. Si esborrem l'últim A i apliquem $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ obtenim el complex

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots$$

que té homologia $H^0 = \mathrm{ext}^0_R(A, B) = \mathrm{Hom}_R(A, B)$ (com ja sabiem) i $H^n = \mathrm{ext}^n_R(A, B) = 0$ per $n \geq 1$. $\square$

Anem ara a demostrar que en efecte $\mathrm{Ext} = \mathrm{ext}$. Notem abans que sempre que tinguem dos morfismes de R-mòduls $A \longrightarrow A'$ i $B \longrightarrow B'$, aplicant $\mathrm{Hom}_R(-, -)$ obtenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(A', B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(A', B') \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(A, B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A, B')
\end{tikzcd}$$

Aquest fet l'expressem abreujadament dient que $\mathrm{Hom}_R(-, -)$ és un *bifunctor*, contravariant en la primera variable i covariant en la segona.

Teorema 4.42. *Siguin A i B dos R-mòduls, $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ una resolució projectiva de A, i $0 \longrightarrow B \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$ una resolució injectiva de B. Aleshores per tot $n \geq 0$ tenim*

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_A, B)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(A, \mathbf{E}_B)$$

és a dir, $\mathrm{Ext}^n_R(A, B) \cong \mathrm{ext}^n_R(A, B)$.

Demostració. Separem les resolucions en successions exactes curtes:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[rr] & & A \arrow[r] & 0 \\
& & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & B \arrow[rr] & & E^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & E^1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & E^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & & L^1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & L^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Aplicant ara $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ a les successions $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ i $0 \longrightarrow B \longrightarrow E^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow 0$ obtenim el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(A,E^0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(A,L^1) \arrow[r] \arrow[d] & W \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0,B) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_R(P_0,E^0) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Hom}_R(P_0,L^1) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K_0,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(K_0,E^0) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(K_0,L^1) \arrow[r] \arrow[d] & X \\
 & V & 0 & Y &
\end{tikzcd}$$

Els tres zeros de dalt i els tres de l'esquerra són conseqüència de l'exactitud a l'esquerra de $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ i $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ per tot mòdul M. El zero al final de la fila central és per què P_0 és projectiu (i per tant $\mathrm{Hom}_R(P_0,-)$ és exacte), i anàlogament, l'últim zero de la columna central el tenim per què E^0 és injectiu. Per últim, V, W, X, Y són per definició els conuclis dels morfismes corresponents.

Aplicant el lema de la serp a α, β i γ, obtenim la successió exacta

$$\ker\beta = \mathrm{Hom}_R(A,E^0) \longrightarrow \ker\gamma = \mathrm{Hom}_R(A,L^1) \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha = V \longrightarrow \operatorname{coker}\beta = 0$$

però també $W = \operatorname{coker}(\mathrm{Hom}_R(A,E^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,L^1))$, de manera que $V \cong W$.

Ara bé, la successió exacta llarga pels derivats de $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ aplicada a la successió exacta curta $0 \longrightarrow B \longrightarrow E^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow 0$ comença com

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,E^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,L^1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A,E^0) = 0$$

(per què E^0 és injectiu) de manera que

$$W = \operatorname{coker}(\mathrm{Hom}_R(A,E^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,L^1)) \cong \mathrm{Ext}^1_R(A,B)$$

Anàlogament podem demostrar $V \cong \mathrm{ext}^1_R(A,B)$, i com que $V \cong W$, resulta

$$\mathrm{Ext}^1_R(A,B) \cong \mathrm{ext}^1_R(A,B)$$

Per tant, hem provat el cas $n = 1$, és a dir $\mathrm{Ext}^1_R \cong \mathrm{ext}^1_R$, i per tant a partir d'ara només usarem Ext^1_R.

De la mateixa manera, podem veure que $X \cong \mathrm{Ext}^1_R(K_0,B)$ i $Y \cong \mathrm{Ext}^1_R(A,L^1)$. A més, com que σ i β són exhaustives, tenim

$$\mathrm{Ext}^1_R(K_0,B) \cong \operatorname{coker}\gamma = \operatorname{coker}(\gamma\circ\sigma) = \operatorname{coker}(\tau\circ\beta) = \operatorname{coker}\tau \cong \mathrm{Ext}^1_R(A,L^1)$$

Si ara repetim el procés amb les successions $0 \to K_j \to P_j \to K_{j-1} \to 0$ i $0 \to L^i \to E^i \to L^{i+1} \to 0$, podem concloure

$$\mathrm{Ext}^1_R(K_j,L^i) \cong \mathrm{Ext}^1_R(K_{j-1},L^{i+1})$$

Aplicant els corol·laris 4.29 i 4.35 finalment obtenim

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_R(A,B) \cong \mathrm{Ext}^1_R(A,L^{n-1}) \cong \mathrm{Ext}^1_R(K_0,L^{n-2}) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^1_R(K_{n-1},B) \cong \mathrm{ext}^1_R(K_{n-1},B) \cong \mathrm{ext}^{n+1}(A,B)$$

i ja hem acabat. $\square$

Ara que hem comprovat que les dues definicions de $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$ són compatibles, estudiem com es comporten aquests functors amb les sumes i els productes directes. Els resultats seran semblants als que ja tenim per Hom_R (3.8 i 3.9), la qual cosa és molt natural ja que els Ext_R^n són una generalització de l'Hom_R.

Teorema 4.43. *Sigui $\{A_k\}$ una família arbitrària de R-mòduls i B un altre mòdul qualsevol. Aleshores per tot $n \geq 1$ es té*

$$\mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus A_k, B) \cong \prod \mathrm{Ext}_R^n(A_k, B)$$

Demostració. Per cada k podem construir una successió exacta curta

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow P_k \longrightarrow A_k \longrightarrow 0$$

amb P_k projectiu, i per tant tenim una successió exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A_k,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_k,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L_k,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(A_k,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(P_k,B) = 0$$

per què P_k és projectiu. Prenent el producte de totes tenim la successió exacta

$$0 \to \prod \mathrm{Hom}_R(A_k,B) \to \prod \mathrm{Hom}_R(P_k,B) \to \prod \mathrm{Hom}_R(L_k,B) \to \prod \mathrm{Ext}_R^1(A_k,B) \to \prod \mathrm{Ext}_R^1(P_k,B) = 0$$

Per altra banda, sumant totes les successions curtes directament obtenim una successió exacta

$$0 \longrightarrow \bigoplus L_k \longrightarrow \bigoplus P_k \longrightarrow \bigoplus A_k \longrightarrow 0$$

i $\bigoplus P_k$ és projectiu (teorema 3.46) de manera que

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(\bigoplus A_k,B) \to \mathrm{Hom}_R(\bigoplus P_k,B) \to \mathrm{Hom}_R(\bigoplus L_k,B) \to \mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus A_k,B) \to \mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus P_k,B) = 0$$

també és exacta.

El teorema 3.8 ens dóna un diagrama commutatiu (on les files ja hem vist que són exactes)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(\bigoplus P_k,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(\bigoplus L_k,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus A_k,B) \arrow[r] & 0 \\
\prod \mathrm{Hom}_R(P_k,B) \arrow[r] & \prod \mathrm{Hom}_R(L_k,B) \arrow[r] & \prod \mathrm{Ext}_R^1(A_k,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on els morfismes verticals són isomorfismes.

El lema 3.20 ens diu que hi ha un únic morfisme

$$\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus A_k,B) \longrightarrow \prod \mathrm{Ext}_R^1(A_k,B)$$

que fa commutar el diagrama anterior, i que pel lema dels cinc ha de ser un isomorfisme.

Per tant el teorema és cert per $n = 1$. Per $n > 1$, considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Ext}_R^{n-1}(\bigoplus P_k,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_R^{n-1}(\bigoplus L_k,B) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\psi"] & \mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus A_k,B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus P_k,B) = 0 \\
0 = \prod \mathrm{Ext}_R^{n-1}(P_k,B) \arrow[r] & \prod \mathrm{Ext}_R^{n-1}(L_k,B) \arrow[r, "\partial"] & \prod \mathrm{Ext}_R^n(A_k,B) \arrow[r] & \prod \mathrm{Ext}_R^n(P_k,B) = 0
\end{tikzcd}$$

on les files són exactes (són parts de successions exactes llargues de functors derivats). Per tant, els morfismes de connexió ∂ són isomorfismes i ψ també ho és per hipòtesi d'inducció, de manera que

$$\partial \circ \psi \circ \partial^{-1} : \mathrm{Ext}_R^n(\bigoplus A_k,B) \longrightarrow \prod \mathrm{Ext}_R^n(A_k,B)$$

també és un isomorfisme, i ja hem acabat. □

Anàlogament es pot demostrar també el següent resultat:

Teorema 4.44. *Si A és un R-mòdul i $\{B_k\}$ és una família arbitrària de mòduls, per tot $n \geq 1$ es tenen isomorfismes*

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, \prod B_k) \cong \prod \mathrm{Ext}^n_R(A, B_k)$$

Ara que ja hem definit i establert les propietats bàsiques dels functors Ext^n_R, farem algun càlcul explícit. En primer lloc ens plantegem com són els endomorfismes induïts en $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ per endomorfismes de A. Concretament estudiarem les multiplicacions per elements $r \in R$:

Teorema 4.45. *Siguin A i B dos R-mòduls, $r \in R$ un element fixat i $\mu : A \longrightarrow A$ la multiplicació per r (i.e., $\mu(a) = ra$). Aleshores l'aplicació induïda $\mu^* : \mathrm{Ext}^n_R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ també és la multiplicació per r.*

Demostració. Considerem el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on les dues files són una mateixa resolució projectiva de A. Per construir μ^*, primer hem d'omplir tot un morfisme de complexes $g_n : P_n \longrightarrow P_n$ sobre μ, desprès aplicar el functor (en aquest cas és $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ i després prendre l'aplicació induïda en homologia. Com que el resultat és independent del morfisme de complexes que triem, podem triar g_n com la multiplicació per r en P_n. En aplicar $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ seguim tenint multiplicacions per r, i per tant després de prendre homologia també ens queden multiplicacions per r, que és el que voliem. $\square$

En el cas de grups abelians tenim un resultat força interessant:

Teorema 4.46. *Si B és un grup abelià i m és un enter positiu, aleshores*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong B/mB$$

Demostració. Aplicant $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$ a

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

on el primer morfisme és la multiplicació per m, resulta la successió exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \xrightarrow{m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B)$$

com que $\mathbb{Z}$ és projectiu (lliure, de fet), l'últim Ext és zero. A més, el primer morfisme segueix sent la multiplicació per m i $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \cong B$ de manera natural. Per tant, aquesta successió s'escriu

$$B \xrightarrow{m} B \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, B) \longrightarrow 0$$

d'on resulta finalment l'isomorfisme que voliem. $\square$

Per acabar amb l'estudi dels functors Ext^n_R, donarem una explicació al seu nom relacionant-lo amb les extensions de mòduls.

Definició 4.47. *Siguin A i C dos R-mòduls. Una* extensió *de A per C és una successió exacta*

$$\xi : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Com és obvi, sempre podem prendre $B = A \oplus C$ i obtenir una extensió "trivial". El següent resultat comença a donar una idea del que volem fer:

Teorema 4.48. *Si* $\mathrm{Ext}^1_R(C,A) = 0$*, tota extensió de* A *per* C *és escindida.*

Demostració. Sigui $\xi : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una extensió. Aplicant $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ obtenim una successió exacta

$$\mathrm{Hom}_R(B,A) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(A,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C,A) = 0$$

de manera que i^* és exhaustiva. En particular, existeix $g \in \mathrm{Hom}_R(B,A)$ tal que $i^*(g) = g \circ i = 1_A$, cosa que ens diu que l'extensió escindeix. □

La idea que volem acabar demostrant és que $\mathrm{Ext}^1_R(C,A)$ parametritza d'alguna manera el conjunt d'extensions d'A per C.

Definició 4.49. *Dues extensions* ξ, ξ' *d'*A *per* C *són* equivalents *si hi ha un diagrama commutatiu*

$$\begin{tikzcd}
\xi: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
\xi': & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Com a conseqüència del lema dels cinc, φ ha de ser un isomorfisme, i per tant és immediat veure que en efecte hem definit una relació d'equivalència. La classe d'equivalència de ξ la denotarem per $[\xi]$, i el conjunt de totes les classes d'equivalència d'extensions d'A per C el denotarem $e(C,A)$.

Per altra banda, no és cert que dues extensions amb mòdul central isomorfs hagin de ser equivalents:

Exemple:

Considerem $R = \mathbb{Z}$ i $A = C = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, amb p un primer senar. Qualsevol extensió

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ha de ser un grup abelià de cardinal p^2, i per tant de la forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (que correspondria a la extensió escindida) o de la forma $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Ara construirem dues extensions de les últimes que no siguin equivalents. Considerem $i, j : A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow E = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ definits per $i(1) = p$ i $j(1) = 2p$. Suposem que indueixen extensions equivalents, i que per tant tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1"'] & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, "j"] & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Notem que hem posat la mateixa projecció en les dues files, i això ho podem fer per què i i j tenen la mateixa imatge en $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Ara la commutativitat del primer quadrat ens diu que φ ha de ser la multiplicació per 2, però això no és compatible amb la commutativitat del segon quadrat. Per tant, les extensions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ induïdes per i i j no són equivalents, tot i que els grups intermigs són isomorfs.

Ara veurem com construir una aplicació bijectiva $\psi : e(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C,A)$. Per fer-ho, tractarem $\mathrm{Ext}^1_R(C,A)$ definit com functor derivat del $\mathrm{Hom}_R(-,A)$, fent servir resolucions projectives de C. Tot es podria fer també amb l'altra definició, mitjançant resolucions injectives de A, i obtindriem els mateixos resultats.

Suposem doncs que $\xi : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ és una exensió. Dinada una resolució projectiva de C, pel Teorema de Comparació 4.17, podem omplir el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En particular, tenim $\alpha : P_1 \longrightarrow A$ tal que $\alpha \circ d_2 = 0$. Per definició, $\mathrm{Ext}^1_R(C, A) = \ker d_2^* / \mathrm{im}\, d_1^*$, on $d_2^* = \mathrm{Hom}_R(d_2, A)$. Com que $\alpha \circ d_2 = d_2^*(\alpha) = 0$, resulta que $\alpha \in \ker d_2^*$ i per tant defineix un element de $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$, que denotarem $\psi[\xi]$.

Per altra banda, sabem que α és única mòdul homotopia, per tant, si $\alpha' : P_1 \longrightarrow A$ és un altre possible morfisme, existeixen dos morfismes s_0, s_1

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & P_0 \arrow[dl, "s_0"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

tals que

$$\alpha - \alpha' = 0 \circ s_1 + s_0 \circ d_1 = s_0 \circ d_1$$

és a dir, $\alpha - \alpha' \in \mathrm{im}\, d_1^*$, de manera que l'element d'$\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ determinat no depèn d'α, sino només de l'extensió ξ.

Amb aquesta construcció, es pot veure fàcilment que si ξ és una extensió escindida, aleshores $\psi[\xi] = 0$, la qual cosa és consistent amb que les extensions escindides facin el paper d'extensions trivials. En efecte, si

$$\xi : 0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

és l'extensió escindida d'A per C, anem omplint el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \oplus C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

intentant aconseguir $\alpha = 0$. En primer lloc, posem $\beta : P_0 \longrightarrow A \oplus C$ donada per $\beta(x) = (0, \varepsilon(x))$, que evidentment fa commutatiu l'últim quadrat. Ara vegem que efectivament $\alpha = 0$ fa commutat l'altre quadrat. Sigui $x \in P_1$ un element qualsevol, i calculem

$$\beta(d_1(x)) = (0, \varepsilon(d_1(x))) = (0, 0)$$

de manera que $\beta \circ d_1 = 0$ i per tant $\alpha = 0$ funciona, que és el que volíem veure.

Ara ja només queda demostrar que $\psi : e(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ és una bijecció. Per fer-ho necessitem un lema auxiliar:

Lema 4.50. *Considerem el diagrama amb fila exacta*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
 & A & & C &
\end{tikzcd}$$

i. Existeix una extensió d'A per C fent commutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ii. En qualsevol cas, el primer quadrat és un push-out.

iii. Dues extensions qualssevol completant el diagrama són equivalents.

Demostració. i. En primer lloc, afegim el push-out dels morfismes sortint d'X_1, de manera que i és injectiu pel lema 3.13. Pel lema 3.12, podem asumir que el push-out ve donat per $B = (A \oplus X_0)/W$, amb $W = \{(\alpha(x_1), -j(x_1)) | x_1 \in X_1\}$, $\beta(x_0) = (0, x_0) + W$ i $i(a) = (a, 0) + W$. Definim $P \longrightarrow C$ per $(e, b) + W \mapsto \beta(b)$. Ara ja és immediat veure que aquest morfisme està ben definit i que la fila de sota és exacta.

ii. El morfisme $\sigma : A \oplus X_0 \longrightarrow B$ definit per $\sigma(a, x_0) = i(a) + \beta(x_0)$ és exhaustiu, i té nucli $\{(\alpha(x_1), -j(x_1)) : x_1 \in X_1\}$ Però aquesta és la construcció del push-out del lema 3.12.

iii. Per l'apartat anterior, com que el mòdul intermig es pot construir com un push-out, la propietat universal ens proporciona l'isomorfisme entre els dos mòduls intermigs.

□

L'extensió d'A per C així construida es denota $\alpha\xi$.

Vegem ara el resultat que voliem, amb el que tancarem aquesta secció.

Teorema 4.51. *L'aplicació $\psi : e(C, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ és una aplicació bijectiva.*

Demostració. Construirem una aplicació $\theta : \mathrm{Ext}^1_R(C, A) \longrightarrow e(C, A)$ inversa a ψ. Sigui

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

la resolució projectiva de C triada per la definició de $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$. Si $\alpha : P_1 \longrightarrow A$ és un 1-cocicle, aleshores $\alpha \circ d_2 = d_2^*(\alpha) = 0$, de manera que α indueix un morfisme

$$\overline{\alpha} : P_1/\mathrm{im}\, d_2 \longrightarrow A \qquad x + \mathrm{im}\, d_2 \mapsto \alpha(x)$$

Si Ξ és l'extensió

$$\Xi : 0 \longrightarrow P_1/\mathrm{im}\, d_2 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

definim θ com

$$\alpha + \mathrm{im}\, d_1^* \mapsto [\overline{\alpha}\Xi]$$

és a dir, donat un representant d'un element de $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$, li assignem l'extensió que és la segona fila del diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{im}\, d_2 \arrow[r, "\overline{d_1}"] \arrow[d, "\overline{\alpha}"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vegem primer que θ és independent de la tria del representant α. Suposem $\alpha' = \alpha + s \circ d_1$, on $s : P_0 \longrightarrow A$ és un morfisme qualsevol. El següent diagrama commuta

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha'"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta + i \circ s"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

i indueix un altre diagrama ommutatiu

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1/\operatorname{im} d_2 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\alpha'}"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta + i \circ s"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La unicitat de l'extensió de sota (de la seva classe d'equivalència) prové del lema anterior.

Vegem ara que $\psi \circ \theta = 1$. Començant amb $\alpha + \operatorname{im} d_1^*$, construim el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1/\operatorname{im} d_2 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\alpha}"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

i es veu clar que ψ de la fila de sota és justament $\alpha + \operatorname{im} d_1^*$

Per últim, per veure que $\theta \circ \psi = 1$, prenem una extensió ξ, i pel mateix raonament que abans, resulta que $\psi[\xi] = \alpha + \operatorname{im} d_1^*$. Ara

$$\theta(\alpha + \operatorname{im} d_1^*) = [\overline{\alpha}\Xi] = [\xi]$$

per la unicitat del lema 4.50. $\square$

Ara reforçarem el teorema 4.48:

Corol·lari 4.52. $\operatorname{Ext}_R^1(C, A) = 0$ *si i només si qualsevol extensió d'A per C és escindida.*

Demostració. Després del teorema 4.48, només queda demostrar la implicació recíproca. És evident que dues extensions escindides són equivalents, ja que són equivalents a

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Aleshores, si totes les extensions són escindides, $e(C, A)$ només té un element (la classe d'aquestes extensions), i per tant $\operatorname{Ext}_R^1(C, A)$ també té un únic element, cosa que implica clarament $\operatorname{Ext}_R^1(C, A) = 0$. $\square$

Per acabar amb la secció farem un parell de comentaris. Per començar, acabem d'establir una bijecció $e(C, A) \leftrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(C, A)$, i el segon conjunt té estructura de grup (de fet, d'R-mòdul). És raonable doncs preguntar-se si $e(C, A)$ pot tenir alguna operació "natural" que li doni estructura de grup, de manera que la bijecció anterior sigui un isomorfisme? La resposta és afirmativa: la suma de Baer. Verue [10].

I per altra banda, això que hem fet per Ext_R^1 es pot generalitzar a tots els Ext_R^n? La resposta torna a ser afirmativa, ja que es pot assignar a cada element de $\operatorname{Ext}_R^n(C, A)$ una classe d'equivalència de successions exactes de la forma

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Per més detalls, veure [8]

4.4 El functor Tor.

En aquest apartat definirem els functors Tor_n^R i donarem les seves propietats i aplicacions bàsiques.

Definició 4.53. *Sigui B és un R-mòdul fixat i $T = - \otimes_R B$. Aleshores definim els functors*

$$\mathrm{Tor}_n^R(-, B) = L_n T$$

és a dir,

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(\mathbf{P}_A \otimes B) = \ker(d_n \otimes 1)/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1)$$

(on d_n són els morfismes d'una resolució projectiva d'A).

Anàlogament, podem definir $\mathrm{Tor}_n^R(A, -)$ com l'n-èssim functor derivat per l'esquerra de $A \otimes_R -$. Com en el cas dels functors Ext_R^n, això en principi suposa un problema de notació: quan posem $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$, ens estem referint a $H_n(\mathbf{P}_A \otimes B)$ o a $H_n(A \otimes \mathbf{P}_B)$? Però al igual que en el cas anterior, en realitat no hi ha cap problema, ja que, com també veurem més endavant, aquests dos últims mòduls són isomorfs.

Abans, però, listem algunes de les propietats més bàsiques d'aquests functors, que són conseqüència directa de la seva definició com a functors derivats.

Proposició 4.54. *i. Si n és negatiu, aleshores $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = 0$ per tota parella d'R-mòduls A, B.*

ii. $\mathrm{Tor}_0^R(A, -)$ és naturalment equivalent a $A \otimes_R -$, i $\mathrm{Tor}_0^R(-, B)$ és naturalment equivalent a $- \otimes_R B$.

iii. Si $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ és una successió exacta curta, aleshores hi ha successions exactes llargues (amb morfismes de connexió naturals)

$$\cdots \mathrm{Tor}_1^R(A, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, C'') \xrightarrow{\partial} A \otimes_R C' \longrightarrow A \otimes_R C \longrightarrow A \otimes_R C'' \longrightarrow 0$$

$$\cdots \mathrm{Tor}_1^R(C, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(C'', B) \xrightarrow{\partial} C' \otimes_R B \longrightarrow C \otimes_R B \longrightarrow C'' \otimes_R B \longrightarrow 0$$

Així com els Ext_R^n s'anul·len quan la primera variable és projectiva o la segona és injectiva, també tenim un parell de resultats semblants pels Tor_n^R:

Teorema 4.55. *Si P és projectiu, aleshores $\mathrm{Tor}_n^R(P, B) = 0$ per tot B i tot $n \geq 1$, i anàlogament en l'altra variable.*

Demostració. Com a la demostració de 4.40 i 4.41,

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

és una resolució projectiva de P. Esborrant l'últim P i aplicant $- \otimes_R B$ obtenim

$$\mathbf{P}_P \otimes_R B = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \otimes_R B \longrightarrow 0$$

i com que tots els mòduls són zero per $n \geq 1$, també s'anul·la l'homologia n-èssima, que és per definició $\mathrm{Tor}_n^R(P, B)$. Pel teorema anterior, tenim el mateix resultat girant les variables. □

Teorema 4.56. *Si F és un R-mòdul pla, aleshores $\mathrm{Tor}_n(F, B) = 0$ per tot $n \geq 1$ i tot B.*

Demostració. Sigui $\mathbf{P}_B = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ una resolució projectiva de B. Com que F és pla, el functor $F \otimes_R -$ és exacte (per definició), de manera que $F \otimes_R \mathbf{P}_B$ és exacta a tots els punts llevat de $F \otimes_R P_0$, de manera que tots els grups d'homologia s'anul·len per $n \geq 1$. □

Ara ja podem demostrar que els Tor_n^R estan ben definits de qualsevol de les dues maneres:

Teorema 4.57. *Si* $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ *i* $\cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *són resolucions projectives, aleshores per tot* $n \geq 0$ *es té*

$$H_n(\mathbf{P}_A \otimes_R B) \cong H_n(A \otimes_R \mathbf{Q}_B)$$

de manera que les dues definicions $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ *coincideixen.*

Demostració. La demostració és completament anàloga a la de 4.42, aplicant 4.55 per asegurar l'anul·lació dels Tor en els projectius. □

A més a més, 4.56 ens dóna una altra manera de calcular els Tor_n^R:

Corol·lari 4.58. *Podem calcular* $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ *triant resolucions* planes *de qualsevol de les dues variables.*

Demostració. En el teorema 4.57, la projectivitat es necessita només per l'anul·lació dels Tor_1^R, que també es dóna si els mòduls són plans. □

El teorema 4.56 té un recíproc molt fort:

Teorema 4.59. *Si* $\mathrm{Tor}_1^R(F, B) = 0$ *per tot* R*-mòdul* B*, aleshores* F *és pla.*

Demostració. Sigui $0 \longrightarrow B' \stackrel{i}{\longrightarrow} B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ una successió exacta. Aleshores tenim una successió exacta

$$0 = \mathrm{Tor}_1(F, B'') \longrightarrow F \otimes_R B' \stackrel{1_F \otimes i}{\longrightarrow} F \otimes B$$

de manera que $1 \otimes i$ és injectiu i per tant F és pla. □

Seguint amb les semblances entre els Tor i els Ext, tenim el seu comportament amb les sumes directes (que en aquest cas és conseqüència de que el Tor és una generalització del producte tensorial):

Teorema 4.60. *Si* B *és un* R*-mòdul i* $\{A_k\}$ *és una família arbitrària d'*R*-mòduls, aleshores per tot* $n \geq 0$

$$\mathrm{Tor}_n^R(\bigoplus A_k, B) \cong \bigoplus \mathrm{Tor}_n^R(A_k, B)$$

Demostració. Completament anàloga a la demostració de 4.43. □

També tenim un anàleg al teorema 4.45:

Teorema 4.61. *Si* $r \in R$ *és un element qualsevol,* A *i* B *són dos* R*-mòduls, i* $\mu : A \longrightarrow A$ *és la multiplicació per* r*, aleshores*

$$\mu_* : \mathrm{Tor}_n^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A, B)$$

també és la multiplicació per r*.*

Una propietat nova dels Tor respecte dels Ext és la seva simetria en les dues variables (recordem que sempre prenem R anell *commutatiu*). Per tant, tots els resultats anteriors segueixen sent certs si canviem l'ordre de les variables.

Teorema 4.62. *Per tot* $n \geq 0$ *i tots mòduls* A, B*, es té*

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \cong \mathrm{Tor}_n^R(B, A)$$

Demostració. Si $\mathbf{P}_A = \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ és la resolució projectiva d'A, aleshores és immediat (3.18) que

$$t_n : P_n \otimes_R B \longrightarrow B \otimes_R P_n \qquad x_n \otimes b \mapsto b \otimes x_n$$

són isomorfismes que formen un isomorfisme de complexes

$$t : \mathbf{P}_A \otimes_R B \longrightarrow B \otimes_R \mathbf{P}_A$$

i per tant tenim un isomorfisme en homologia

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(\mathbf{P}_A \otimes_R B) \overset{t}{\cong} H_n(B \otimes_R \mathbf{P}_A) = \mathrm{Tor}_n^R(B, A)$$

□

En el cas R no commutatiu, aquesta demostració dóna isomorfismes

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \cong \mathrm{Tor}_n^{R_{op}}(B, A)$$

Ara donarem les principals aplicacions dels functors Tor. Per una banda, tenim totes les relacions amb els submòduls de torsió (de aquí el seu nom), i per altra banda estan els teoremes de coeficients universals.

Comencem per la primera. A partir d'ara suposarem que R és un domini d'integritat, Q és el seu cos de fraccions, i K és l'R-mòdul Q/R.

Definició 4.63. *Donat un R-mòdul A, el seu* submòdul de torsió *és*

$$t(A) = \{a \in A | \exists r \in R, r \neq 0, ra = 0\}$$

(R ha de ser un domini per tal que $t(A)$ sigui un submòdul). A és un mòdul de torsió *si $t(A) = A$, i és* lliure de torsió *si $t(A) = 0$.*

És fàcil veure que el mòdul $A/t(A)$ sempre és lliure de torsió, de manera que tot mòdul (sempre sobre un domini R) és una extensió d'un mòdul de torsiò per un mòdul lliure de torsió.

Per altra banda, t realment defineix un functor: si $f : A \longrightarrow B$ és un morfisme, definim el morfisme $t(f) = f_{|t(A)} : t(A) \longrightarrow t(B)$. La raó principal pel nom Tor és que $t \cong \mathrm{Tor}_1^R(K, -)$. Ho començarem provant pels mòduls de torsió i pels lliures de torsió, i després en el cas general.

Lema 4.64. *Si A és un mòdul de torsió (i.e., $t(A) = A$), hi ha un isomorfisme natural*

$$\mathrm{Tor}_1^R(K, A) \cong A$$

Demostració. L'exactitud de $0 \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow 0$ dóna exactitud de

$$\mathrm{Tor}_1^R(Q, A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, A) \xrightarrow{\partial} R \otimes_R A \longrightarrow Q \otimes_R A$$

El primer terme és zero per què Q és pla ([10] Corol·lari 3.48), i $Q \otimes_R A = 0$ per què A és de torsió: sigui $q \otimes a$ un element generador de $Q \otimes_R A$, i $r \in R \subseteq Q$ no nul tal que $ra = 0$. Aleshores

$$q \otimes a = \frac{q}{r} r \otimes a = \frac{q}{r} \otimes ra = 0$$

.

Per tant ∂ és un isomorfisme, i és natural per 4.54. □

Lema 4.65. $\mathrm{Tor}_n(K, A) = 0$ *per tot A i $n \geq 2$.*

Demostració. Com abans, l'exactitud de $0 \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow 0$ dóna exactitud de

$$\mathrm{Tor}_n^R(Q,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(K,A) \longrightarrow Tor_{n-1}^R(R,A)$$

i els dos termes extrems són 0 ja que $n, n-1 \geq 1$ i Q i R són plans. □

Lema 4.66. *Si A és lliure de torsió, aleshores* $\mathrm{Tor}_1^R(K,A) = 0$.

Demostració. A es pot posar com a submòdul d'un Q-espai vectorial E ([10] lema 4.31). Com que E és una suma directa de còpies de Q i Q és pla, deduïm que E és pla. Per altra banda, l'exactitud de $0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow E/A \longrightarrow 0$ dóna exactitud de

$$\mathrm{Tor}_2^R(K,E/A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K,E)$$

on el primer terme és zero pel lema anterior, i l'últim també per què E és pla. □

Teorema 4.67. *Els functors* $\mathrm{Tor}_1^R(K,-)$ *i t són naturalment equivalents.*

Demostració. L'exactitud de $0 \longrightarrow t(A) \xrightarrow{i} A \longrightarrow A/t(A) \longrightarrow 0$ dóna exactitud de

$$\mathrm{Tor}_2^R(K,A/t(A)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K,t(A)) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Tor}_1^R(K,A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K,A/t(A))$$

Els termes extrems són zero pels lemas 4.65 i 4.66, de manera que i_* és un isomorfisme. Per tant

$$\sigma_A = i_* \circ \partial^{-1} : t(A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K,A)$$

és un isomorfisme, i ara és immediat comprovar que els σ_A formen una transformació natural de functors. □

I com a conseqüència d'aquest resultat tenim:

Corol·lari 4.68. *Per tot R-mòdul A hi ha una successió exacta*

$$0 \longrightarrow t(A) \longrightarrow A \longrightarrow Q \otimes_R A \longrightarrow K \otimes_R A \longrightarrow 0$$

Corol·lari 4.69. *Un R-mòdul A és de torsió si i només si $Q \otimes_R A = 0$.*

Un altre motiu pel nom Tor és que sempre és un mòdul de torsió.

Lema 4.70. *Si B és de torsió, aleshores* $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ *és de torsió per tot A i tot $n \geq 0$.*

Demostració. Utilitzarem una tècnica anomenada "dimension shifting" (inducció sobre n combinada amb l'anul·lació de certs termes d'una successió exacta).

Per $n = 0$, cada generador $a \otimes b$ és de torsió, i per tant $\mathrm{Tor}_0^R(A,B) = A \otimes_R B$ és de torsió.

Per $n = 1$, prenem una successió exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ amb P projectiu, que dóna exactitud de

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(P,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A,B) \longrightarrow N \otimes_R B$$

Com que $N \otimes_R B$ és de torsió pel cas $n = 0$, també ho és el seu submòdul $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$.

Pel pas inductiu, mirem més endavant en la successió exacta llarga:

$$0 = \mathrm{Tor}_{n+1}^R(P,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(N,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(P,B) = 0$$

i com que $\mathrm{Tor}_n^R(N,B)$ és de torsió per hipòtesi d'inducció, $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A,B)$ és de torsió. □

Teorema 4.71. $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ *és de torsió per tot A, B i $n \geq 1$.*

Demostració. Fixem $n = 1$ i considerem primer el cas B lliure de torsió. Pel corol·lari 4.68, hi ha una successió exacta

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

on E és un Q-espai vectorial ($E = Q \otimes_R B$) i $X = E/B$ és de torsió. D'aquí surt la successió exacta

$$\mathrm{Tor}_2^R(A, X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, E)$$

Ara $\mathrm{Tor}_2(A, X)$ és de torsió pel lema anterior, mentre que $\mathrm{Tor}_1(A, E) = 0$ ja que E és pla. Així doncs, $\mathrm{Tor}_1(A, B)$ és un quocient d'un mòdul de torsió, i per tant $\mathrm{Tor}_1(A, B)$ també és de torsió.

Ara provem-ho per B arbitrari. L'exactitud de $0 \longrightarrow t(B) \longrightarrow B \longrightarrow B/t(B) \longrightarrow 0$ dóna exactitud de

$$\mathrm{Tor}_1^R(A, t(B)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(A, B/t(B))$$

on els dos termes externs són de torsió ($t(B)$ és de torsió i $B/t(B)$ és lliure de torsió). D'aquí resulta que $\mathrm{Tor}_1^R(A, B)$ també és de torsió.

Per $n \geq 2$, prenem $0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow B \longrightarrow 0$ exacta amb P projectiu. Això dóna la successió exacta

$$0 = \mathrm{Tor}_n^R(A, P) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(P, B) = 0$$

on $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(N, B)$ és de torsió per hipòtesi d'inducció, i per tant $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ és de torsió. $\square$

Com és evident, aquest teorema no és cert per $n = 0$, ja que $A \otimes_R B$ pot no ser de torsió.

Passem ara als teoremes de coeficients universals. Recordem que els grups d'homologia $H_n(X)$ d'un espai topològic X es defineixen com els grups d'homologia $H_n(\mathbf{S}(X))$ del complex de cadenes singulars $\mathbf{S}(X)$ de X. Una modificació d'aquesta construcció permetent coeficients en un grup abelià G dóna els *grups d'homologia amb coeficients*

$$H_n(X; G) = H_n(\mathbf{S}(X) \otimes_Z G)$$

que milloren substancialment la teoria. Ara seria natural preguntar-se si podem calcular $H_n(X; G)$ a partir dels simples $H_n(X)$. Hom podria esperar tenir simplement

$$H_n(X; G) \cong H_n(X) \otimes_Z G$$

però no és així (almenys en general). Ara bé, sota certes condicions en el complex inicial, el següent teorema dóna la resposta a la pregunta que ens hem plantejat.

Teorema 4.72. *(Coeficients universals per homologia.) Sigui R un anell hereditari (on qualsevol submòdul d'un projectiu és també projectiu), A un R-mòdul, i $(\mathbf{K}, d)$ un complex d'R-mòduls projectius. Aleshores hi ha una successió exacta escindida*

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbf{K}) \otimes_R A \xrightarrow{\lambda} H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \xrightarrow{\mu} \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) \longrightarrow 0$$

on λ i μ són naturals. En particular es té

$$H_n(\mathbf{K} \otimes_R A) \cong (H_n(\mathbf{K}) \otimes_R A) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A)$$

Demostració. Per cada n tenim les successions exactes

$$0 \longrightarrow Z_n(\mathbf{K}) \xrightarrow{i_n} K_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(\mathbf{K}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_{n-1}(\mathbf{K}) \longrightarrow Z_{n-1}(\mathbf{K}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{K}) \longrightarrow 0$$

Juntant-les obtenim la successió

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, "i_n"] & K_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr] & & Z_{n-1} \arrow[r] & H_{n-1} \arrow[r] & 0 \\ & & & B_{n-1} \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Ara bé, com que cada K_n és projectiu, cada Z_n i B_n també són projectius. Això implica que la primera successió exacta és escindida i que l'última és una resolució projectiva de H_{n-1}. Sigui $\mathbf{L}$ el complex

$$\mathbf{L} = 0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{i_n} K_n \xrightarrow{d_n} Z_{n-1} \longrightarrow 0$$

Aleshores

$$\mathbf{L} \otimes_R A = 0 \longrightarrow Z_n \otimes_R A \xrightarrow{i_n \otimes 1} K_n \otimes_R A \xrightarrow{d_n \otimes 1} Z_{n-1} \otimes_R A \longrightarrow 0$$

és un complex que té homologia

$$H_j(\mathbf{L} \otimes_R A) = \mathrm{Tor}_j^R(H_{n-1}, A)$$

(per definició dels Tor).

Com que $0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow K_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$ és escindida, també ho és

$$0 \longrightarrow Z_n \otimes_R A \xrightarrow{i_n \otimes 1} K_n \otimes_R A \longrightarrow B_{n-1} \otimes_R A \longrightarrow 0$$

i per tant $i_n \otimes 1$ és injectiva, de manera que

$$\mathrm{Tor}_2^R(H_{n-1}, A) = \ker i_n \otimes 1 = 0$$

Els altres dos termes a calcular són

$$\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}, A) = H_1(\mathbf{L} \otimes_R A) = (\ker d_n \otimes 1)/(Z_n \otimes_R A)$$

$$H_{n-1} \otimes_R A = \mathrm{Tor}_0^R(H_{n-1}, A) = H_0(\mathbf{L} \otimes_R A) = (Z_{n-1} \otimes_R A)/\mathrm{im}\,(d_n \otimes 1)$$

Considerem ara el tros de complex $K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1}$. D'aqui surten inclusions

$$\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1) \subseteq Z_n \otimes_R A \subseteq \ker(d_n \otimes 1) \subseteq K_n \otimes_R A$$

i pel tercer teorema d'isomorfia tenim

$$(\ker(d_n \otimes 1)/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1))/((Z_n \otimes_R A)/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1)) \cong \ker(d_n \otimes 1)/(Z_n \otimes_R A)$$

que es pot escriure com una successió exacta

$$0 \longrightarrow (Z_n \otimes_R A)/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1) \xrightarrow{\lambda} \ker(d_n \otimes 1)/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1) \xrightarrow{\mu} \ker(d_n \otimes 1)/(Z_n \otimes_R A) \longrightarrow 0$$

El terme central és justament $H_n(\mathbf{K} \otimes_R A)$, i pel que hem dit abans, el primer terme és $H_n(\mathbf{K}) \otimes_R A$ i l'últim és $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A)$.

Ara només falta veure que aquesta successió escindeix. Per una banda, com que Z_n és un sumand de K_n, i per tant $Z_n \otimes_R A$ és un sumand de $K_n \otimes_R A$, i per tant també de $\ker(d_n \otimes 1)$. Finalment això implica que $Z_n \otimes_R A/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1)$ és un sumand de $\ker(d_n \otimes 1)/\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1)$, que és el que voliem. □

Notem que en cap moment hem demostrat que l'escissió sigui natural.

Com que $\mathbb{Z}$ és hereditari i els grups de cadenes d'un espai topològic són lliures (i per tant projectius), tenim de manera immediata el següent resultat:

Corol·lari 4.73. *Si X és un espai topològic i G un grup abelià, aleshores per tot n es té*

$$H_n(X; G) \cong (H_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), G)$$

En general, qualsevol hipòtesi sobre R o $\mathbf{K}$ que impliqui R hereditari i $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}, A) = 0$, dóna una versió simplificada de 4.72. Per exemple tenim:

Corol·lari 4.74. *Si* $\mathbf{K}$ *és un complex d'espais vectorials sobre un cos* R *i* V *és un espai vectorial sobre* R*, aleshores per tot* n *es té*

$$H_n(\mathbf{K} \otimes_R V) \cong H_n(\mathbf{K}) \otimes_R V$$

Corol·lari 4.75. *Sigui* $\mathbf{K}$ *un complex de grups abelians lliures. Si un dels grups* $H_{n-1}(\mathbf{K})$ *o* A *és lliure de torsió, aleshores*

$$H_n(\mathbf{K} \otimes_{\mathbb{Z}} A) \cong H_n(\mathbf{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

Passem ara a considerar cohomologia amb coeficients. Recordem que l'n-èssim grup de cohomologia amb coeficients en un grup abelià A es defineix com

$$H^n(X; A) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{S}(X), A))$$

El següent teorema és en certa manera equivalent a 4.72, però com que apliquem $\mathrm{Hom}(-, A)$ enlloc de $- \otimes G$ apareix el functor Ext.

Teorema 4.76. *Sigui* R *un anell hereditari,* A *un* R*-mòdul qualsevol, i* $(\mathbf{K}, d)$ *un complex d'*R*-mòduls projectius. Aleshores hi ha una successió exacta escindida*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) \xrightarrow{\lambda} H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{K}, A)) \xrightarrow{\mu} \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{K}), A) \longrightarrow 0$$

on λ *i* μ *són naturals. Per tant es té*

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{K}, A)) \cong \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{K}), A) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A)$$

I els corresponents corol·laris:

Corol·lari 4.77. *Si* X *és un espai topològic i* G *és un grup abelià, aleshores per tot* n *es té*

$$H^n(X; G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), G) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), G)$$

Corol·lari 4.78. *Sigui* $\mathbf{K}$ *un complex de grups abelians lliures. Si* $H_{n-1}(\mathbf{K})$ *és lliure o bé* A *és divisible, aleshores*

$$H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{K}, A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(\mathbf{K}), A)$$

Demostració. Qualsevol de les dues hipòtesis implica $\mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{K}), A) = 0$. □

Corol·lari 4.79. *Si* $\mathbf{K}$ *és un complex d'espais vectorials sobre un cos* R*, i si* V *és un* R*-espai vectorial, aleshores per tot* n *es té*

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{K}, V)) \cong \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{K}), V)$$

i en particular

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{K}, R)) \cong \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{K}), V) = H_n(\mathbf{K})^*$$

5 Successions espectrals.

En aquesta secció desenvoluparem una eina que va inventar Jean Leray per calcular l'homologia d'un complex. Començarem donant les definicions bàsiques: successió espectral i convergència. Després veurem dues situacions on les successions espectrals apareixen de manera natural (filtracions de complexes de mòduls i bicomplexes) i per acabar estudiarem el cas concret de la successió espectral de Grothendieck, donant-ne un parell d'aplicacions.

Tot això es pot fer en qualsevol categoria abeliana, però com hem fet a la resta del treball, ens restringirem a la categoria $\mathbf{Mod}(R)$ de mòduls sobre un anell commutatiu R fixat.

5.1 Definició.

Definició 5.1. *Una* successió espectral (homològica) començant en la pàgina *a consisteix en:*

i. Una família d'R-mòduls $\{E^r_{p,q}\}$ per $p,q,r \in \mathbb{Z}$, p i q enters qualssevol, i $r \geq a$. Per cada $r \geq a$, podem representar $E^r_{*,*}$ com un reticle d'R-mòduls situats en el pla (p,q).

ii. Per cada p,q,r, un morfisme d'R-mòduls

$$d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E_{p-r,q+r+1}$$

que són "diferencials", en el sentit que

$$d^r_{p,q} \circ d^r_{p+r,q-r+1} = 0$$

(abreujadament posarem $d^r \circ d^r = 0$). És a dir, les rectes de pendent $-(r-1)/r$ en el reticle $E^r_{*,*}$ formen complexes de cadenes. Si definim $Z^{r+1}(E^r_{p,q}) = \ker d^r_{p,q}$ i $B^{r+1}(E^r_{p,q}) = \operatorname{im} d^r_{p+r,q-r+1}$, aquesta condició equival a

$$B^{r+1}(E^r_{p,q}) \subseteq Z^{r+1}(E^r_{p,q}) \subseteq E^r_{p,q}$$

iii. Per cada p,q,r, un isomorfisme entre $E^{r+1}_{p,q}$ i l'homologia de $E^r_{*,*}$ en el mòdul $E^r_{p,q}$, és a dir

$$E^{r+1}_{p,q} \cong Z^{r+1}(E^r_{p,q})/B^{r+1}(E^r_{p,q})$$

Notem que $E^{r+1}_{p,q}$ és un subquocient de $E^r_{p,q}$ (i.e., un submòdul d'un quocient, o equivalentment, un quocient d'un submòdul), i que de fet tota la successió espectral queda determinada per la primera pàgina $E^a_{p,q}$ i les primeres diferencials $d^a_{p,q}$.

Es defineix el *grau total* del terme $E^r_{p,q}$ com $n = p+q$, de manera que les diferencials $d^r_{p,q}$ disminueixen el grau total en una unitat.

Com en el cas dels complexes de cadenes, es poden definir també morfismes de successions espectrals $f : E' \longrightarrow E$, que no són més que una família de morfismes $f^r_{p,q} : E'^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p,q}$ per r prou gran, de manera que $d^r \circ f^r = f^r \circ d^r$ i que f^{r+1} és el morfisme induit per f^r en homologia. D'aquesta manera s'obté la categoria de successions espectrals.

També com en el cas dels complexes de mòduls, hi ha la definició de *successió espectral cohomològica.* Consisteix en una família de mòduls $E^{p,q}_r$, una família de morfismes $d^{p,q}_r : E^{p,q}_r \longrightarrow E^{p+r,q-r+1}_r$ complint $d_r \circ d_r = 0$, i isomorfismes entre $E^{*,*}_{r+1}$ i l'homologia de $E^{*,*}_r$. Com en el cas dels complexes, si posem $E'^r_{-p,-q} = E^{p,q}_r$ i $d'^r_{-p,-q} = d^{p,q}_r$, obtenim una successió espectral homològica. Per tant, tots dos són conceptes equivalents, i per simplicitat només desenvoluparem la teoria en el cas homològic (tot i que alguns exemples posteriors seran cohomològics).

Exemples:

- Una successió espectral es diu que és *del primer quadrant* si $E^r_{p,q} = 0$ excepte si $p,q \geq 0$ (és a dir, $E^r_{p,q} \neq 0$ si i només si el punt (p,q) pertany al primer quadrant). És evident que si aquesta condició es satisfà per $r = a$, també es satisfà per tot $r \geq a$. A més, si fixem p, q, aleshores $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$ per r prou gran (per exemple, $r > \max(p, q+1)$), ja que la diferencial que arriba a $E^r_{p,q}$ és zero per què ve del quart quadrant, i la diferencial que surt de $E^r_{p,q}$ també és zero per què arriba al segon quadrant. Per tant $B^{r+1}(E^r_{p,q}) = 0$ i $Z^{r+1}(E^r_{p,q}) = E^r_{p,q}$, de manera que

$$E^{r+1}_{p,q} \cong Z^{r+1}(E^r_{p,q})/B^{r+1}(E^r_{p,q}) = E^r_{p,q}$$

En aquest cas posarem $E^\infty_{p,q}$ per aquest valor "estacionari".

- Més generalment, diem que una successió espectral és *fitada* si per cada n hi ha només un nombre finit de mòduls de grau n no nuls. En aquest cas, per cada p, q també hi ha un r_0 tal que $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$ per tot $r \geq r_0$, i també definim $E^\infty_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$.

En general, si $E^r_{p,q}$ és una successió espectral qualsevol, ja hem vist que cada $E^{r+1}_{p,q}$ és un subquocient de $E^r_{p,q}$, de manera que per inducció tenim una família de subobjectes de $E^a_{p,q}$

$$0 = B^a_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq B^r_{p,q} \subseteq B^{r+1}_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z^{r+1}_{p,q} \subseteq Z^r_{p,q} \subseteq Z^a_{p,q} = E^a_{p,q}$$

tals que $E^r_{p,q} \cong Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$. Aleshores podem definir els submòduls

$$B^\infty_{p,q} = \bigcup_{r=a}^{\infty} B^r_{p,q} \qquad \text{i} \qquad Z^\infty_{p,q} = \bigcap_{r=a}^{\infty} Z^r_{p,q}$$

i el mòdul

$$E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$$

En el cas que $E^r_{p,q}$ sigui fitada, tant la unió com la intersecció són finites, i per tant $B^\infty_{p,q} = B^r_{p,q}$ i $Z^\infty_{p,q} = Z^r_{p,q}$ per r prou gran, de manera que $E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q}$ a partir de cert r, i recuperem la definició què hem fet en l'exemple anterior.

Notem que $B^\infty_{p,q}$ i $Z^\infty_{p,q}$ sempre existeixen en la categoria d'R-mòduls, però no té per què ser així en una categoria abeliana qualsevol.

Per poder definir la convergència de successions espectrals, que és el concepte pel qual aquestes són útils, necessitem una definició bàsica:

Definició 5.2. *Sigui X un R-mòdul o un complex d'R-mòduls. Una* filtració *de X és una successió de submòduls (o subcomplexes)*

$$\cdots \subseteq F_{-1}(X) \subseteq F_0(X) \subseteq F_1(X) \subseteq \cdots \subseteq F_k(X) \subseteq \cdots$$

Com a casos particulars, direm que una filtració és

- *finita* si existeixen $s, t \in \mathbb{Z}$ tals que $F_s(X) = 0$ i $F_t(X) = X$.
- *exhaustiva* si $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} F_k(X) = X$.
- *Hausdorff (o separada)* si $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} F_k(X) = 0$.

Ara ja podem definir la convergència. Hi ha vàries nocions d'aquest concepte, i no totes tenen les mateixes propietats, però en el cas que la successió espectral sigui fitada, totes són equivalents:

Definició 5.3. *Siguin $E^r_{p,q}$ una sucessió espectral fitada, i $H_* = \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una família d'R-mòduls (que podem pensar com un complex amb totes les diferencials nul·les, o com un mòdul graduat $H_* = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n$). Diem que $E^r_{p,q}$* convergeix *a H_* (i ho escriurem $E^a_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$) si per cada $n \in \mathbb{Z}$ tenim una filtració finita d'H_n*

$$0 = F_s(H_n) \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}(H_n) \subseteq F_p(H_n) \subseteq F_{p+1}(H_n) \subseteq \cdots \subseteq F_t(H_n) = H_n$$

tal que

$$E^\infty_{p,q} \cong F_p(H_{p+q})/F_{p-1}(H_{p+q})$$

La idea és que si una successió espectral $E^r_{p,q}$ convergeix a H_*, potser no podem conèixer tots els mòduls H_n, però si tindrem els quocients d'una filtració, que ja és informació prou útil.

Exemple:

Si una successió espectral del primer quadrant $E^r_{p,q}$ convergeix a H_*, aleshores cada H_n té una filtració de longitud $n+1$

$$0 = F_{-1}(H_n) \subseteq F_0(H_n) \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1}(H_n) \subseteq F_n(H_n) = H_n$$

El submòdul més petit $F_0(H_n) \cong E^\infty_{0,n}$ es troba en l'eix de les q, i el quocient més alt $H_n/F_{n-1}(H_n) \cong E^\infty_{n,0}$ es troba en l'eix de les p. Notem que tant els morfismes que arriben a l'eix de les p com els que surten de l'eix de les q són zero, de manera que $E^\infty_{n,0}$ és un submòdul de $E^a_{n,0}$ i $E^\infty_{0,n}$ és un quocient de $E^a_{0,n}$. Els morfismes naturals induïts

$$E^a_{0,n} \longrightarrow E^\infty_{0,n} \subseteq H_n \qquad \text{i} \qquad H_n \longrightarrow E^\infty_{n,0} \subseteq E^a_{n,0}$$

s'anomenen *morfismes de les arestes.*

Com a casos pràctics d'aquesta convergència tenim el següent:

Definició 5.4. *Diem que una successió espectral $E^r_{p,q}$* col·lapsa *a la pàgina $r \geq 2$ si en el reticle $E^r_{p,q}$ hi ha exactament una fila (o columna) no nul·la.*

Si una successió espectral que convergeix a H_* col·lapsa a la pàgina r, podem saber molt fàcilment els H_n: són els únics mòduls no nuls $E^r_{p,q}$ amb $p+q=n$. La utilitat d'aquestes successions és que la majoria de les aplicacions que trobarem a les successions espectrals dónen successions que col·lapsen per $r=2$.

Uns casos una mica més complicats (tot i que encara són senzills) són els següents:

Proposició 5.5. 2 columnes. *Suposem que una successió espectral convergeix a H_* i té $E^2_{p,q} = 0$ per $p \neq 0, 1$. Aleshores es tenen successions exactes*

$$0 \longrightarrow E^2_{0,n} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^2_{1,n-1} \longrightarrow 0$$

Demostració. Una successió espectral amb $E^2_{p,q} = 0$ si $p \neq 0, 1$ té el següent aspecte, (on les fletxes són les diferencials d^2)

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & E^2_{0,q+1} & E^2_{1,q+1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & E^2_{0,q} \arrow[ull] & E^2_{1,q} \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] \\
0 & 0 & E^2_{0,q-1} \arrow[ull] & E^2_{1,q-1} \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

En primer lloc, és immediat comprovar que la successió és estable ja en la pàgina 2, és a dir, $E^\infty_{p,q} = E^2_{p,q}$ per tot p, q, ja que totes les diferencials són zero.

Per altra banda, si $E^r_{p,q} \Rightarrow H_*$, per cada enter n tenim una filtració

$$0 = F_{s(n)}(H_n) \subseteq \cdots \subseteq F_k(H_n) \subseteq \cdots \subseteq F_{t(n)}(H_n) = H_n$$

tal que

$$E^{\infty}_{p,q} \cong F_p(H_{p+q})/F_{p-1}(H_{p+q})$$

Com que $E^{\infty}_{p,q} = 0$ per $p \neq 0, 1$, resulta que $F_p(H_n) = F_{p-1}(H_n)$ per tot $p \neq 0, 1$, de manera que per qualsevol n tenim $s(n) = -1$ i $t(n) = 1$.

Aleshores per cada n tenim una filtració

$$0 \subseteq F_0(H_n) \subseteq H_n$$

tal que

$$E^2_{0,q} \cong F_0(H_q) \qquad \text{i} \qquad E^2_{1,q} \cong H_{q+1}/F_0(H_{q+1})$$

De les inclusions $F_0(H_n) \subseteq H_n$ obtenim les successions exactes

$$0 \longrightarrow F_0(H_n) \longrightarrow H_n \longrightarrow H_n/F_0(H_n) \longrightarrow 0$$

que tenint en comte els isomorfismes donats per la convergència es pot escriure com

$$0 \longrightarrow E^2_{0,n} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^2_{1,q-1} \longrightarrow 0$$

que és justament el que voliem. $\square$

Proposició 5.6. 2 files. *Suposem que una successió espectral convergeix a H_* i té $E^2_{p,q} = 0$ per $q \neq 0, 1$. Aleshores hi ha una successió exacta llarga*

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1} \longrightarrow E^2_{p+1,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-1,1} \longrightarrow H_p \longrightarrow E^2_{p,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{p-2,1} \longrightarrow H_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

Demostració. La pàgina 2 d'aquesta successió espectral té l'aspecte

$$\begin{tikzcd}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & E^2_{p-2,1} & E^2_{p-1,1} & E^2_{p,1} \arrow[ull] & E^2_{p+1,1} \arrow[ull] & E^2_{p+2,1} \arrow[ull] & \cdots \\
\cdots & E^2_{p-2,0} & E^2_{p-1,0} & E^2_{p,0} \arrow[ull] & E^2_{p+1,0} \arrow[ull] & E^2_{p+2,0} \arrow[ull] & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & \cdots
\end{tikzcd}$$

i la pàgina 3 és

$$\begin{tikzcd}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & E^3_{p-2,1} & E^3_{p-1,1} & E^3_{p,1} & E^3_{p+1,1} & E^3_{p+2,1} & \cdots \\
\cdots & E^3_{p-2,0} & E^3_{p-1,0} & E^3_{p,0} & E^3_{p+1,0} \arrow[uulll] & E^3_{p+2,0} \arrow[uulll] & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \arrow[uulll] & 0 \arrow[uulll] & \cdots
\end{tikzcd}$$

on

$$E^3_{n,0} = \ker d^2_{n,0} \qquad \text{i} \qquad E^3_{n,1} = E^2_{n,1}/\operatorname{im} d^2_{n-2,0}$$

A partir d'aqui la successió estabilitza, ja que totes les diferencials són zero. Per tant tenim

$$E^\infty_{p,0} = \ker d^2_{p,0}, \qquad E^\infty_{p,1} = E^2_{p,1}/\operatorname{im} d^2_{p-2,0} \qquad \text{i} \qquad E^\infty_{p,q} = 0 \text{ per } q \neq 0,1$$

Per definició de convergència, per cada n tenim una filtració

$$0 = F_{s(n)}(H_n) \subseteq \cdots \subseteq F_k(H_n) \subseteq \cdots \subseteq F_{t(n)}(H_n) = H_n$$

tal que

$$E^\infty_{p,q} \cong F_p(H_{p+q})/F_{p-1}(H_{p+q})$$

Com que $E^\infty_{p,q} = 0$ per $q \neq 0,1$, resulta que

$$F_p(H_{p+q}) = F_{p-1}(H_{p+q}) \qquad \text{per } q \neq 0,1$$

o equivalentment

$$F_p(H_n) = F_{p-1}(H_n) \qquad \text{per } p \neq n-1, n$$

de manera que $s(n) = n-2$, $t(n) = n$, i les filtracions són en realitat

$$0 \subseteq F_{n-1}(H_n) \subseteq H_n$$

complint

$$F_{n-1}(H_n) \cong E^3_{n-1,1} = E^2_{n-1,1}/\operatorname{im} d^2_{n+1,0} \qquad \text{i} \qquad H_n/F_{n-1}(H_n) \cong E^3_{n,0} = \ker d^2_{n,0}$$

Com abans, les inclusions $F_{n-1}(H_n) \subseteq H_n$ dónen successions exactes

$$0 \longrightarrow F_{n-1}(H_n) \cong E^2_{n-1,1}/\operatorname{im} d^2_{n+1,0} \longrightarrow H_n \longrightarrow H_n/F_{n-1}(H_n) \cong \ker d^2_{n,0} \longrightarrow 0$$

mentre que de les diferencials $d^2_{n,0}$ obtenim les successions exactes

$$0 \longrightarrow \ker d^2_{n,0} \longrightarrow E^2_{n,0} \xrightarrow{d^2_{n,0}} E^2_{n-2,1} \longrightarrow E^2_{n-2,1}/\operatorname{im} d^2_{n,0} \longrightarrow 0$$

Enganxant convenientment aquestes dues famílies de successions exactes obtenim la successió que buscàvem. □

I un resultat molt important és el següent:

Teorema 5.7. *(Successió de 5 termes). Sigui $E^2_{p,q}$ una successió espectral del primer quadrant que convergeix a H_*. Aleshores es té una successió exacta*

$$H_2 \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,1} \longrightarrow H_1 \longrightarrow E^2_{1,0} \longrightarrow 0$$

Demostració. Tenim una successió exacta

$$0 \longrightarrow \ker d^2_{2,0} \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,1} \longrightarrow \operatorname{coker} d^2_{2,0} \longrightarrow 0$$

Ara bé, com que $d^2_{4,-1} = 0$ ja que la successió és del primer quadrant, resulta que

$$\ker d^2_{2,0} = \ker d^2_{2,0}/\operatorname{im} d^2_{4,-1} = E^3_{2,0}$$

i iterant l'argument resulta que $E^\infty_{2,0} = \ker d^2_{2,0}$.

Per altra banda, com que $d^2_{0,1} = 0$ ja que acaba fora del primer quadrant, resulta que

$$\operatorname{coker} d^2_{2,0} = E^2_{0,1}/\operatorname{im} d^2_{2,0} = \ker d^2_{0,1}/\operatorname{im} d^2_{2,0} = E^3_{0,1}$$

i de la mateixa manera que abans, $E^\infty_{2,0} = \operatorname{coker} d^2_{2,0}$.

Per tant, en realitat tenim la successió exacta

$$0 \longrightarrow E^\infty_{2,0} \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,1} \longrightarrow E^\infty_{0,1} \longrightarrow 0$$

Com ja hem dit abans en un exemple, per una successió del primer quadrant, $E^\infty_{2,0}$ és un quocient de H_2, i per tant podem enganxar la successió amberior amb $H_2 \longrightarrow E^\infty_{2,0} \longrightarrow 0$ i obtenir que

$$H_2 \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,1} \longrightarrow E^\infty_{0,1} \longrightarrow 0$$

és exacta.

Raonant com en les proposicions anteriors, la convergència implica que tenim una filtració

$$0 \subseteq F_0(H_1) \subseteq H_1$$

tal que $E^\infty_{0,1} \cong F_0(H_1)$ i $E^\infty_{1,0} \cong H_1/F_0(H_1)$. Per tant tenim la successió exacta

$$0 \longrightarrow E^\infty_{0,1} \longrightarrow H_1 \longrightarrow E^\infty_{1,0} \longrightarrow 0$$

Unint les dues successions exactes obtenim el que volem. □

En el cas que la successió espectral no sigui fitada, la cosa es complica molt, i de fet no hi ha una terminologia unificada. Nosaltres seguirem principalment la notació de [1], tot i que en alguns casos seguirem les notes [9].

Definició 5.8. *Diem que una successió $E^r_{p,q}$* convergeix feblement *a H_* (i ho denotarem $E^r_{p,q} \longrightarrow H_*$) si existeixen filtracions*

$$\cdots \subseteq F_{p-1}(H_n) \subseteq F_p(H_n) \subseteq F_{p+1}(H_n) \subseteq \cdots \subseteq H_n$$

tals que

$$E^\infty_{p,q} \cong F_p(H_{p+q})/F_{p-1}(H_{p+q})$$

Ara bé, aquesta definició és poc útil, ja que, per exemple, tots els mòduls $E^\infty_{p,q}$ poden ser zero, i per tant tindriem $E^r_{p,q} \longrightarrow H_*$ per qualsevol H_*, prenent tots els $F_p(H_n)$ iguals. En general, el problema rau en què una successió espectral feblement convergent a H_* no detecta els elements de les interseccions $\cap_{p\in\mathbb{Z}} F_p(H_n)$ ni els que no hi són a $\cup_{p\in\mathbb{Z}} F_p(H_n)$.

Això es pot evitar de la següent manera:

Definició 5.9. *Diem que la successió espectral $E^r_{p,q}$* s'apropa *a H_* si hi convergeix feblement i a més $H_n = \cup_{p\in\mathbb{Z}} F_p(H_n)$ i $\cap_{p\in\mathbb{Z}} F_p(H_n) = 0$ per tot n (és a dir, si les filtracions dels H_n són exhaustives i Haussdorff).*

Notem que tota successió $E^r_{p,q}$ convergent feblement a H_* s'apropa a $\cup_{p\in\mathbb{Z}} F_p(H_*)/\cap_{p\in\mathbb{Z}} F_p(H_*)$.

Però encara aquesta condició no és prou bona, ja que voldriem poder recuperar els H_n a partir dels quocients $F_p(H_n)/F_{p-1}(H_n)$ (en el cas fitat aquestes filtracions són finites i ja ens conformem). El que farem és restringir les successions espectrals amb condicions que les fan més tractables.

Definició 5.10. *Diem que una successió espectral $E^r_{p,q}$ és* fitada per sota *si per cada n existeix un enter $s = s(n)$ tal que $E^a_{p,n-p} = 0$ per $p < s$. Diem que $E^a_{p,q}$ és* regular *si per cada p, q, les diferencials $d^r_{p,q}$ són zero per r prou gran.*

Exemples:

- Tota successió fitada és fitada per sota.

- Una successió espectral $E^a_{p,q}$ es diu que és *del semiplà dret* si $E^a_{p,q} = 0$ per $p < 0$. Aquestes successions són fitades per sota, però no són fitades.

- Tota successió fitada per sota és regular.

Definició 5.11. *Diem que una successió espectral $E^r_{p,q}$* convergeix *a H_* si és regular, s'apropa a H_* i a més tenim $H_n = \varprojlim (H_n/F_p(H_n))$ per cada n.*

Una successió fitada per sota convergeix a H_* si i només si s'apropa a H_*. Per tant les successions fitades per sota són particularment bones.

Com a confirmació de que aquesta definició de convergència és la bona, enunciem un teorema de comparació per a successions espectrals convergents i tanquem l'apartat. Si $E^r_{p,q}$ i $E'^r_{p,q}$ són dues successions espectrals convergents a H_* i H'_* respectivament, diem que un morfisme $h : H_* \longrightarrow H'_*$ és *compatible* amb un morfisme de successions espectrals $E \longrightarrow E'$, si h envia $F_p(H_n)$ a $F_p(H'_n)$ i les aplicacions induïdes

$$F_p(H_n)/F_{p-1}(H_n) \cong E^\infty_{p,n-p} \longrightarrow F_p(H'_n)/F_{p-1}(H'_n) \cong E'^\infty_{p,n-p}$$

coincideixen amb $f^\infty_{p,q} : E^\infty_{p,q} \longrightarrow E'^\infty_{p,q}$

Teorema 5.12. *Siguin $E^r_{p,q}$ i $E'^r_{p,q}$ dues successions espectrals convergents a H_* i H'_* respectivament. Suposem que tenim una aplicació $h : H_* \longrightarrow H'_*$ compatible amb $f : E \longrightarrow E'$. Aleshores si $f^r_{p,q}$ és un isomorfisme per tot p, q i algun r, h també és un isomorfisme.*

5.2 Les successions espectrals associades a una filtració i a un complex doble.

En aquest apartat veurem com podem obtenir una successió espectral a partir d'una filtració d'un complex d'R-mòduls, i estudiarem algunes propietats de convergència. L'objectiu serà que la successió espectral convergeixi a l'homologia del complex.

A continuació veurem com podem definir filtracions associades a un complex doble, i estudiarem també les propietats de convergència de les successions espectrals que indueixen.

Comencem amb alguns comentaris sobre la definició de filtració d'un complex de mòduls.

Si tenim un complex

$$\mathbf{C} = \cdots C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \cdots$$

una filtració és una família de subcomplexes

$$F_k(\mathbf{C}) = \cdots F_k(C_n) \xrightarrow{F_k(\partial_n)} F_k(C_{n-1}) \cdots$$

tals que

$$\cdots \subseteq F_{-1}(\mathbf{C}) \subseteq F_0(\mathbf{C}) \subseteq F_1(\mathbf{C}) \subseteq \cdots \subseteq F_k(\mathbf{C}) \subseteq \cdots$$

Per una banda, la definició de subcomplex implica que $F_k(C_n)$ és un submòdul de C_n i que $F_k(\partial_n)$ és la restricció de ∂_n a $F_k(C_n)$, la qual cosa implica que $\partial_n(F_k(C_n)) \subseteq F_k(C_{n-1})$. Per altra banda, tenim inclusions $F_k(C_n) \subseteq F_{k+1}(C_n)$ per tot n i k, de manera que una filtració d'un complex indueix una filtració en cada mòdul del complex.

Com a casos particulars, diem que una filtració d'un complex és

- *fitada* si per cada n existeixen enters (depenents de n) $s = s(n) < t = t(n)$ tals que

  $$F_s(C_n) = 0 \qquad \text{i} \qquad F_t(C_n) = C_n$$

  És a dir, una filtració d'un complex és fitada si en cada grau indueix una filtració finita de R-mòduls (no necessàriament amb els mateixos extrems). En el cas particular que $s(n) = -1$ i $t(n) = n$ direm que la filtració és *canònicament fitada*.

- *fitada per sota* si per cada n hi ha un enter $s = s(n)$ tal que $F_s(C_n) = 0$, i *fitada per sobre* si per cada n existeix un $t = t(n)$ tal que $F_t(C_n) = C_n$. És evident que una filtració és fitada si i només si és fitada per sobre i per sota.
- *exhaustiva* si $C_n = \bigcup_k F_k(C_n)$ per tot n.
- *Hausdorff* si $\bigcap_k F_k(C_n) = 0$ per tot n.
- *completa* si $C_n = \varprojlim C_n/F_p(C_n)$ per tot n (on el límit es pren sobre p).

La condició de ser fitada per sobre és una manera d'assegurar que la filtració és exhaustiva. Tota filtració completa és Hausdorff.

A partir d'una filtració qualsevol $F_k(\mathbf{C})$ es poden construir una filtració Hausdorff i una de completa:

- El *quocient Hausdorff*, que consisteix en prendre el complex
$$\mathbf{C}^h = \mathbf{C}/\cap_k F_k(\mathbf{C})$$
amb la filtració induïda per la de $\mathbf{C}$. És evident que aquesta filtració és Hausdorff per construcció.
- La *completació*, que és el complex
$$\hat{\mathbf{C}} = \varprojlim \mathbf{C}/F_k(\mathbf{C})$$
amb la filtració donada per $F_n(\hat{\mathbf{C}}) = \varprojlim F_n(\mathbf{C})/F_k(\mathbf{C})$.

Sigui ara $\mathbf{C} = \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$ un complex d'R-mòduls, i sigui $\{F_p(\mathbf{C})\}$ una filtració de $\mathbf{C}$. Aquesta filtració determina una successió espectral començant en pàgina 0 definida com
$$E^0_{p,q} = F_p(C_{p+q})/F_{p-1}(C_{p+q})$$
on les diferencials
$$d^0_{p,q} : F_p(C_{p+q})/F_{p-1}(C_{p+q}) \longrightarrow F_(C_{p+q-1})/F_{p-1}(C_{p+q-1})$$
venen induides per les diferencials ∂_{p+q} del complex (notem que estan ben definides ja que per definició de filtració d'un subcomplex, tenim $\partial_n(F_p(C_n)) \subseteq F_p(C_{n-1})$ per tot p).

Notem que una filtració canònicament fitada dóna lloc a una successió espectral del primer quadrant.

És immediat comprovar que la pàgina 1 d'aquesta successió espectral ve donada per
$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^0_{p,*})$$
l'homologia en el mòdul $p+q$-èssim de la columna p-èssima.

Hi ha molts complexes que donen lloc a la mateixa successsió espectral que $\mathbf{C}$, per exemple el complex $\cup_k F_k(\mathbf{C})$ i el quocient Hausdorff $\mathbf{C}^h$, ja que al definir $E^0_{p,q} = F_p(C_{p+q})/F_{p-1}(C_{p+q})$ només fem servir els elements de $\cup_k F_k(\mathbf{C})$ i mai tenim en compte els elements de $\cap_k F_k(\mathbf{C})$. El que no és tan immediat és que la completació $\hat{\mathbf{C}}$ també dóna lloc a la mateixa successió espectral.

Les propietats de convergència d'aquestes successions espectrals venen donades pels següents teoremes (que no demostrarem, ja que necessitem una construcció explícita de la pàgina r de la successió que resulta enormement complicada de notació i que no aporta res més).

Notem abans que una filtració en un complex $\mathbf{C}$ indueix una filtració en la seva homologia: $F_k(H_n(\mathbf{C}))$ és la imatge de l'aplicació $H_n(F_k(\mathbf{C})) \longrightarrow H_n(\mathbf{C})$. Si la filtració de $\mathbf{C}$ és exhaustiva, també ho és la filtració de $H_n = H_n(\mathbf{C})$, ja que tot element de H_n està representat per un element d d'algun $F_k(C_n)$ tal que $\partial(c) = 0$. Per altra banda, si la filtració de $\mathbf{C}$ és fitada per sota, també ho és la filtració en cada H_n, ja que $F_s(C_n) = 0$ implica $F_s(H_n) = 0$. En canvi, la filtració de H_n pot no ser Hausdorff tot i que la filtració de $\mathbf{C}$ ho sigui:

Exemple: Considerem el complex $\mathbf{C} = 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ i la filtració donada per $F_{-k}(\mathbf{C}) = 2^k\mathbf{C}$, és a dir,

$$F_{-k}(\mathbf{C}) = 0 \longrightarrow 2^k\mathbb{Z} \xrightarrow{3} 2^k\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

És evident que aquesta filtració és Hausdorff, ja que $\cap_{k\geq 0} 2^k\mathbb{Z} = \{0\}$. En canvi, l'homologia de $\mathbf{C}$ és el complex

$$H_* = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

i la filtració induïda és $F_{-k}(H_*) = H_*$ per tot $k \geq 0$. El problema d'aquesta filtració és que no és fitada per sota.

El següent teorema dóna els dos criteris bàsics per garantir convergència de la successió espectral associada a la filtració d'un complex:

Teorema 5.13. *(Teorema clàssic de convergència.)*

i. Suposem que la filtració de $\mathbf{C}$ *és fitada. Aleshores la successió espectral és fitada i convergeix a* $H_*(\mathbf{C})$*, l'homologia del complex:*

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_p(\mathbf{C})/F_{p-1}(\mathbf{C})) \Rightarrow H_{p+q}(\mathbf{C})$$

ii. Suposem que la filtració de $\mathbf{C}$ *és fitada per sota i exhaustiva. Aleshores la successió espectral és fitada per sota i també convergeix a* $H_*(\mathbf{C})$*. És més, la convergència és natural en el sentit que si* $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ *és un morfisme de complexos filtrats, aleshore l'aplicació* $f_* : H_*(\mathbf{C}) \longrightarrow H_*(\mathbf{C}')$ *és compatible amb l'aplicació induïda per* f *en les successions espectrals.*

Exemple: Tornem ara a l'exemple anterior, on teniem

$$\mathbf{C} = 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

i filtració

$$F_{-k}(\mathbf{C}) = 0 \longrightarrow 2^k\mathbb{Z} \xrightarrow{3} 2^k\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

que no és fitada per sota. Ja hem vist que la filtració de $H_*(\mathbf{C})$ no és Hausdorff, ja que és constant

$$F_{-k}(H_*(\mathbf{C})) = H_*(\mathbf{C}) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Vegem ara que la successió espectral tampoc no convergeix a l'homologia de $\mathbf{C}$. Cada columna de la pàgina 0 és

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{3=1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

i per tant la successió col·lapsa a la pàgina 1. De fet, com que les columnes són exactes, tenim $E^1_{p,q} = 0$ per tot p, q, de manera que la successió convergeix a zero, que és pot comprovar que és l'homologia de $\hat{\mathbf{C}}$.

Un altre teorema de convergència (i l'últim que enunciarem) és el següent:

Teorema 5.14. *(Teorema de convergència per filtracions completes.) Suposem que la filtració de* $\mathbf{C}$ *és completa i exhaustiva, i que la successió espectral que indueix és regular. Aleshores:*

i. La successió espectral convergeix feblement a $H_*(\mathbf{C})$*.*

ii. Si la successió espectral és fitada per sobre, convergeix a $H_*(\mathbf{C})$*.*

Passem ara a estudiar les successions espectrals associades a un complex doble. Començarem amb les definicions i resultats bàsics:

Definició 5.15. *Un* complex doble *(o bicomplex) homològic* $\mathbf{M}_{*,*}$ *és una família d'R-mòduls* $M_{p,q}$ *amb morfismes (*diferencials*)*

$$d'_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p-1,q} \qquad d''_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p,q-1}$$

(que per simplificar escriurem simplement com d' *i* d''*) tals que*

$$d' \circ d' = 0 \qquad d'' \circ d'' = 0 \qquad i \qquad d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$$

Els dos asteriscs de $\mathbf{M}_{*,*}$ serveixen per deixar clar que $\mathbf{M}$ és una família de mòduls que depèn de dos índexos i que no és simplement un complex. Ara bé, quan sigui clar que ens estem referint a un bicomplex, ometrem els asteriscs i escriurem simplement $\mathbf{M}$.

El *grau total* del mòdul $M_{p,q}$ és per definició $n = p+q$. Així doncs, les diferencials d' i d'' disminueixen el grau en una unitat.

Un bicomplex el podem representar en el pla (p, q), de manera que les diferencials vagin cap a l'esquerra i cap avall

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d''"] & \vdots \arrow[d, "d''"] & \\
\cdots & M_{p-1,q} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & M_{p,q} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[l, "d'"'] \\
\cdots & M_{p-1,q-1} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & M_{p,q-1} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[l, "d'"'] \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Moltes vegades escriurem les diferencials com $d' = d^h$ i $d'' = d^v$, deixant clar si són les horitzontals o les verticals.

Com que $d' \circ d' = 0$ i $d'' \circ d'' = 0$, les files i les columnes d'un bicomplex formen complexes (per això el nom *complex doble*). Ara bé, un bicomplex no és un diagrama commutatiu, ja que la condició sobre els quadrats és $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$, enlloc de $d' \circ d'' = d'' \circ d'$. El motiu d'aquesta condició és la següent definició:

Definició 5.16. *Si* $\mathbf{M}$ *és un bicomplex, el seu* complex total $\mathrm{Tot}(\mathbf{M})$ *és el complex definit com*

$$\mathrm{Tot}(\mathbf{M}) = \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$

amb diferencial (total) $d_n : \mathrm{Tot}(\mathbf{M}_{*,*})_n \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathbf{M})_{n-1}$ *donada per*

$$d_n = \sum_{p+q=n} = d'_{p,q} + d''_{p,q}$$

És a dir, donat un bicomplex, el seu complex total s'obté sumant tots els mòduls del mateix grau. Notem que les diferencials totals d_n estan ben definides i realment tenen imatge continguda en $\mathrm{Tot}(\mathbf{M})_{n-1}$. A més, és immediat comprovar que com a conseqüència de $d' \circ d'' + d'' \circ d'$ tenim $d \circ d = 0$. En resum, tenim el següent resultat:

Lema 5.17. *Si* M *és un bicomplex,* $\mathrm{Tot}(\mathbf{M})$ *és en efecte un complex.*

Com en el cas de complexes de mòduls, es pot definir un complex doble cohomològic $\mathbf{M}^{*,*}$ de la mateixa manera, només canviant que les diferencials d' i d'' facin créixer un dels índexos. Ara bé, com en el cas dels complexes, es pot transformar un complex cohomològic en un d'homològic definint $M_{p,q} = M^{-p,-q}$.

La definició de complex total també es pot fer en el cas cohomològic, i el que s'obté és un complex també cohomològic. A més, aquesta construcció commuta amb el canvi de cohomològic a homològic.

En vista de tot això, ens centrarem en els complexes homològics (com sempre), ja que amb aquests ja estem estudiant tots dos tipus de complexes.

Ja hem dit que un bicomplex no és un diagrama commutatiu. Sí que hi ha, però, una manera molt senzilla d'obtenir un bicomplex a partir d'un diagrama commutatiu:

Lema 5.18. *Sigui $\{M_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ una família de mòduls, amb morfismes (diferencials) $d'_{p,q} : M_{p,q} \to M_{p-1,q}$ i $d''_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p,q-1}$ tals que $d' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$ i $d' \circ d'' = d'' \circ d'$ (i.e., el següent diagrama és commutatiu.)*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d''"] & \vdots \arrow[d, "d''"] & \\
\cdots & M_{p-1,q} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & M_{p,q} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[l, "d'"'] \\
\cdots & M_{p-1,q-1} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & M_{p,q-1} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[l, "d'"'] \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Aleshores, si canviem $d''_{p,q}$ per $\Delta''_{p,q} = (-1)^p d''_{p,q}$, obtenim un bicomplex.

Demostració. Com que el canvi de signe no canvia els nuclis ni les imatges, es compleix trivialment que $\Delta'' \circ \Delta'' = 0$. Per altra banda, falta demostrar que $d' \circ \Delta'' + \Delta'' \circ d' = 0$. Però això és senzill:

$$d'_{p,q-1} \circ \Delta''_{p,q} = (-1)^p d'_{p,q-1} \circ d''_{p,q} = -(-1)^{p-1} d''_{p-1,q} \circ d'_{p,q} = -\Delta''_{p-1,1} \circ d'_{p,q}$$

□

Per tant, d'ara en endavant no distingirem entre un bicomplex i un diagrama commutatiu com el de l'enunciat, sobreentenent el canvi de signte de les diferencials verticals quan sigui necessari.

Posem ara un exemple que després seguirem desenvolupant:

Exemple: Siguin $\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\partial'_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$ i $\mathbf{B} = \cdots \longrightarrow B_m \xrightarrow{\partial''_m} B_{m-1} \longrightarrow \cdots$ dos complexes de mòduls. Construïm un bicomplex $\mathbf{M}$ posant

$$M_{p,q} = A_p \otimes B_q, \qquad d'_{p,q} = \partial'_p \otimes 1_{B_q} \qquad \text{i} \qquad d''_{p,q} = (-1)^p 1_{A_p} \otimes \partial''_q$$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d''"] & \vdots \arrow[d, "d''"] & \\
\cdots & A_{p-1} \otimes B_q \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & A_p \otimes B_q \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[l, "d'"'] \\
\cdots & A_{p-1} \otimes B_{q-1} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & A_p \otimes B_{q-1} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[l, "d'"'] \\
 & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

i definim $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathrm{Tot}(\mathbf{M})$, de manera que

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_n = \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q$$

i la diferencial total $d_n : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_n \longrightarrow (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{n-1}$ ve donada per

$$d_n(a_p \otimes b_q) = \partial'_p(a_p) \otimes b_q + (-1)^p a_p \otimes \partial''_q(b_q)$$

Ara definirem dues filtracions en el complex total d'un bicomplex $\mathbf{M}$ i estudiarem les propietats de convergència de les successions espectrals que indueixen:

Definició 5.19. *Donat un bicomplex* $\mathbf{M}$*, es definexen la* primera filtració *(o* filtració per columnas*)* ${}^I F$ *de* $\mathrm{Tot}(\mathbf{M})$ *com*

$${}^I F_p(\mathrm{Tot}(\mathbf{M})) = \bigoplus_{i \leq p} M_{i,n-i}$$

i la segona filtració *(o* filtració per files*)* ${}^{II} F$ *com*

$${}^I F_p(\mathrm{Tot}(\mathbf{M})) = \bigoplus_{j \leq p} M_{n-j,j}$$

És a dir, el terme de grau n de ${}^I F_p(\mathrm{Tot}(\mathbf{M}))$ és la suma de tots els $M_{p,q}$ en la recta $p + q = n$ que queden a l'esquerra de la p-èssima columna, i el terme de grau n de ${}^{II} F_p(\mathrm{Tot}(\mathbf{M}))$ és la suma dels $M_{p,q}$ que queden per sota de la p-èssima fila (notem que ara p limita el segon subíndex).

Aquestes dues filtracions indueixen dues successions espectrals que en molts casos tenen bones propietats de convergència cap a l'homologia del complex total. Estudiem-les més detingudament.

La primera filtració dóna lloc a una successió espectral ${}^I E^r_{p,q}$ començant a la pàgina 0 com

$${}^I E^0_{p,q} = M_{p,q}$$

i amb $d^0 = d'' = d^v$.

Per tant, la pàgina 1 ve donada per

$${}^I E^1_{p,q} = H_q(M_{p,*})$$

amb diferencials $d^1_{p,q} : H_q(M_{p,*}) \longrightarrow H_q(M_{p-1,*})$ induides per les diferencials horitzontals $d'_{p,q} = d^h_{p,q}$. També escriurem $H^v_q(M_{p,*})$ per denotar els mòduls d'homologia $H_q(M_{p,*})$, deixant clar que calculem l'homologia dels complexes verticals.

Quant a la segona pàgina de la successió espectral, el mòdul ${}^I E^2_{p,q}$ és el p-èssim mòdul d'homologia de la q-èssima fila de ${}^I E^1 = H^v(\mathbf{M})$. Seguint amb la notació que hem introduït abans, podem posar

$${}^I E^2_{p,q} = H^h_p H^v_q(\mathbf{M})$$

Notem que si $\mathbf{M}$ és tal que $M_{p,q} = 0$ si $p < 0$ i $q > 0$, aquesta filtració de $\mathrm{Tot}(\mathbf{M}_{*,*})$ és fitada per sota i exhaustiva, de manera que pel teorema 5.13 tenim convergència cap a l'homologia de $\mathrm{Tot}(\mathbf{M})$

$${}^I E^2_{p,q} = H^h_p H^v_q(\mathbf{M}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(\mathbf{M}))$$

Quant a la segona filtració ${}^{II} F_p(\mathrm{Tot}(\mathbf{M}))$, simplement hem de tenir en compte el canvi de rol del subíndexos p i q, i arribem a que

$${}^{II} E^0_{p,q} = M_{q,p} \qquad {}^{II} E^1_{p,q} = H^h_q(bfM_{*,p}) \qquad \text{i} \qquad {}^{II} E^2_{p,q} = H^v_p H^h_q(\mathbf{M})$$

on $d^0 = d^h = d'$ és la diferencial horitzontal i d^1 és la diferencial induïda en homologia per la diferencial vertical $d^v = d''$.

Anàlogament al cas anterior, si $\mathbf{M}$ és tal que $M_{p,q} = 0$ si $p > 0$ i $q < 0$, aquesta filtració de $\mathrm{Tot}(\mathbf{M}_{*,*})$ és fitada per sota i exhaustiva, de manera que pel teorema 5.13 tenim convergència cap a l'homologia de $\mathrm{Tot}(\mathbf{M})$

$$^{II}E^2_{p,q} = H^h_p H^v_q(\mathbf{M}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(\mathbf{M}))$$

Notem que si $\mathbf{M}$ és un bicomplex del primer o del tercer quadrant, totes dues successions espectrals convergeixen a l'homologia del complex total. Aquesta coincidència ens permetrà provar d'una altra manera que el valor de $\mathrm{Tor}^R_n(A, B)$ no depèn de quina variable es consideri fixa (teorema 4.57):

Siguin $\mathbf{P}_A$ i $\mathbf{Q}_B$ resolucions projectives de dos R-mòduls A, B, i considerem el bicomplex del primer quadrant donat per $M_{p,q} = P_p \otimes Q_q$, de manera que $\mathrm{Tot}(\mathbf{M}) = \mathbf{P}_A \otimes \mathbf{Q}_B$.

La primera filtració dóna una successió espectral amb

$$^{I}E^2_{p,q} = H^h_p H^v_q(\mathbf{M})$$

Com que P_p és projectiu, és pla (per 4.55 i 4.59), de manera que el complex $P_p \otimes \mathbf{Q}_B$ és exacte excepte a l'últim terme (ja que $\mathbf{Q}_B$ ho és). Per tant, per tot $p \geq 0$ tenim

$$(H^v_0(\mathbf{M}))_p = \mathrm{coker}\,(P_p \otimes Q_1 \longrightarrow P_p \otimes Q_0) = P_p \otimes B \qquad \text{i} \qquad (H^v_q(\mathbf{M}))_p = 0 \quad \forall q < 0$$

És a dir, $^{I}E^1 = H^v(\mathbf{M})$ només té la fila $q = 0$, i és justament $\mathbf{P}_A \otimes B$. Per tant

$$^{I}E^2_{p,0} = H^h_p H^v_0(\mathbf{M}) = H_p(\mathbf{P}_A \otimes B) \qquad \text{i} \qquad ^{I}E^2_{p,q} = H^h_p H^v_q(\mathbf{M}) = H_p(\mathbf{P}_A \otimes B) \quad \text{si} \quad q > 0$$

i aquesta successió col·lapsa a la pàgina 2, de manera que

$$H_n(\mathbf{P}_A \otimes \mathbf{Q}_B) \cong {}^{I}E^\infty_{n,0} = {}^{I}E^2_{n,0} = H_n(\mathbf{P}_A \otimes B)$$

Anàlogament per la segona filtració, obtenim

$$H_n(\mathbf{P}_A \otimes \mathbf{Q}_B) \cong {}^{II}E^\infty_{0,n} = {}^{II}E^2_{0,n} = H_n(A \otimes \mathbf{Q}_B)$$

En resum, $H_n(\mathbf{P}_A \otimes B) \cong H_n(A \otimes \mathbf{Q}_B)$ i per tant les dues definicions de $\mathrm{Tor}^R_n(A, B)$ coincideixen.

Es podria demostrar de manera anàloga que la definició dels functors $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ també és independent de quina variable es considera fixa (teorema 4.42). Només hem de definir el bicomplex del tercer quadrant $M_{p,q} = \mathrm{Hom}_R(P_{-p}, E^{-q})$ (on $\mathbf{P}_A$ és una resolució projectiva de A i $\mathbf{E}_B$ és una resolució injectiva de B), i fer un raonament semblant.

5.3 La successió espectral de Grothendieck.

Per acabar amb la secció de successions espectrals, tractarem la successió espectral de Grothendieck, que s'obté de considerar la composició de dos functors F i G amb certes condicions. Els termes de la pàgina 2 depenen dels functors derivats de F i G, i convergeix cap als functors derivats de la composició $F \circ G$.

Com que a les dues aplicacions que donarem els functors seran covariants exactes per l'esquerra, i per tant els functors derivats que apareixeran són derivats per la dreta, farem tota la construcció i les demostracions en el cas cohomològic (que recordem que és igual al homològic però canviant el signe dels índexos). A més, les categories que apareixen en aquestes aplicacions no són únicament la de mòduls sobre un anell, de manera que farem la construcció per functors additius entre categories abelianes qualssevol.

Comencem amb les definicions i els resultats tècnics que necessitarem:

Definició 5.20. *Sigui $\mathfrak{A}$ una categoria abeliana qualsevol, i $\mathbf{C}$ un complex (cohomològic) en $\mathfrak{A}$ (la definició és la mateixa que per complexes de mòduls). Una* resolució injectiva *de $\mathbf{C}$ és un diagrama commutatiu*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & E^{p,1} \arrow[r] \arrow[u] & E^{p+1,1} \arrow[r] \arrow[u] & E^{p+2,1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E^{p,0} \arrow[r] \arrow[u] & E^{p+1,0} \arrow[r] \arrow[u] & E^{p+2,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p} \arrow[r] \arrow[u] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[u] & C^{p+2} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

on les files cón complexes en $\mathfrak{A}$ i per cada p, la columna $C^p \longrightarrow E^{p,*}$ és una resolució injectiva en $\mathfrak{A}$.

Més concretament, la resolució injectiva de $\mathbf{C}$ és el bicomplex format només pels mòduls injectius $\mathbf{E}^{*,*}$, juntament amb el morfisme de complexes $\mathbf{C} \longrightarrow E^{*,0}$.

Per cada p tenim els complexes induïts de cocicles, covores i cohomologia

$$0 \longrightarrow Z^p(\mathbf{C}) \longrightarrow Z^p(E^{*,0}) \longrightarrow Z^p(E^{*,1}) \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow B^p(\mathbf{C}) \longrightarrow B^p(E^{*,0}) \longrightarrow B^p(E^{*,1}) \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow H^p(\mathbf{C}) \longrightarrow H^p(E^{*,0}) \longrightarrow H^p(E^{*,1}) \longrightarrow \cdots$$

La resolució injectiva $\mathbf{E}$ es diu *pròpia* si tots aquests complexes són resolucions injectives.

El següent lema ens garanteix que si la categoria $\mathbf{A}$ té suficients injectius sempre podem assumir l'existència d'aquestes resolucions:

Lema 5.21. *Sigui $\mathfrak{A}$ una categoria abeliana amb suficients injectius. Aleshores tot complex $\mathbf{C}$ en $\mathfrak{A}$ té una successió injectiva pròpia.*

Demostració. Per cada $n \in \mathbb{Z}$ tenim successions exactes

$$0 \longrightarrow Z^n(\mathbf{C}) \longrightarrow C^n \longrightarrow B^{n+1}(\mathbf{C}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B^n(\mathbf{C}) \longrightarrow Z^n(\mathbf{C}) \longrightarrow H^n(\mathbf{C}) \longrightarrow 0$$

Si per cada n fixem resolucions injectives de $H^n(\mathbf{C})$ i $B^n(\mathbf{C})$ (que existeixen per què $\mathfrak{A}$ té suficients injectius), pel lema de la ferradura 4.22 existeix una resolució injectiva de $Z^n(\mathbf{C})$ que es pot posar entre les dues fixades. Pel mateix motiu, però mirant ara la primera successió curta, existeix una resolució injectiva de C^n amb les mateixes propietats.

És evident que posant juntes totes aquestes resolucions injectives obtenim la resolució injectiva pròpia que voliem. □

Notem que si per algun n tenim $C^n = 0$, podem prendre com a resolució injectiva el complex nul $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$.

Les resolucions injectives pròpies obtingudes segons la demostració del lema anterior s'anomenen *normals* o *de Cartan-Eilenberg*.

Una altra definició que necessitem és

Definició 5.22. *Sigui $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un functor (covariant o contravariant) additiu entre dues categories abelianes. Diem que un objecte B de $\mathfrak{B}$ és F-*acíclic per la dreta (resp. esquerra) *si $R^pF(B) = 0$ (resp. $L_pF(B) = 0$) per tot $p > 0$.*

Ara ja tenim els ingredients necessaris per enunciar i demostrar el teorema de la successió espectral de Grothendieck:

Teorema 5.23. *Siguin $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ categories abelianes tals que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ tenen suficients injectius. Siguin $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ i $G : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ dos functors additius tals que G és exacte per l'esquerra i F envia injectius a G-acíclics per la dreta. Aleshores per cada objecte $A \in \mathfrak{A}$ existeix una successió espectral del tercer quadrant (del primer quadrant si la pensem com cohomològica) tal que*

$$E_2^{p,q} = R^pG(R^qF(A)) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(A)$$

Demostració. Triem una resolució injectiva $0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$ i apliquem-la el functor F per obtenir un complex

$$F(\mathbf{E}_A) = 0 \longrightarrow F(E^0) \longrightarrow F(E^1) \longrightarrow F(E^2) \longrightarrow \cdots$$

Pel lema 5.21 existeix una resolució injectiva pròpia de $F(\mathbf{E}_A)$:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & I^{0,1} \arrow[r] \arrow[u] & I^{1,1} \arrow[r] \arrow[u] & I^{2,1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & I^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & I^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & I^{2,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & F(E^0) \arrow[r] \arrow[u] & F(E^1) \arrow[r] \arrow[u] & F(E^2) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Ara apliquem el functor F al bicomplex $\mathbf{I}^{*,*}$, considerem el seu complex total $\mathrm{Tot}(F(\mathbf{I}))$ i calculem les successions espectrals associades a les dues filtracions.

Per una banda, la p-èssima columna $\mathbf{I}^{p,*}$ de $\mathbf{I}$ és una resolució injectiva esborrada de $F(E^p)$, i per tant, per definició de functor derivat, $G(\mathbf{I}^{p,*})$ és un complex amb homologia

$$(H_v^q(\mathbf{I}))^p = R^qG(F(E^p))$$

Però com que E^p és injectiu, per hipòtesi tenim que $F(E^p)$ és G-acíclic per la dreta, i per tant $R^qG(F(E^p)) = 0$ per $q > 0$. Per altra banda, com que G és exacte per l'esquerra, tenim $R^0G = G$ i per tant $R^0G(F(E^p)) = (G \circ F)(E^p)$.

En resum, la pàgina 1 de la successió espectral associada a la primera filtració només té la fila $q = 0$, que és

$$0 \longrightarrow (G \circ F)(E^0) \longrightarrow (G \circ F)(E^1) \longrightarrow (G \circ F)(E^2) \longrightarrow \cdots$$

Prenent ara homologia horitzontal obtenim la segona pàgina de la successió espectral, que ve donada per

$${}^IE_2^{p,0} = R^p(G \circ F)(A) \qquad \text{i} \qquad {}^IE_2^{p,q} = 0 \quad \forall q \neq 0$$

Per tant, la primera successió espectral col·lapsa a la pàgina 2, i doncs tenim

$$H^n(\mathrm{Tot}(F(\mathbf{I}))) \cong R^n(G \circ F)(A)$$

Quant a la segona filtració, la cosa es complica una mica. Com que la resolució de $F(\mathbf{E}_A)$ és pròpia, tenim resolucions injectives

$$0 \longrightarrow Z^p(F(\mathbf{E}_A)) \longrightarrow Z^{p,0} \longrightarrow Z^{p,1} \cdots$$

$$0 \longrightarrow B^p(F(\mathbf{E}_A)) \longrightarrow B^{p,0} \longrightarrow B^{p,1} \cdots$$
$$0 \longrightarrow H^p(F(\mathbf{E}_A)) \longrightarrow H_h^{p,0}(\mathbf{I}) \longrightarrow H_h^{p,1}(\mathbf{I}) \cdots$$

i successions exactes curtes

$$0 \longrightarrow Z^{p,q} \longrightarrow I^{p,q} \longrightarrow B^{p+1,q} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow B^{p,q} \longrightarrow Z^{p,q} \longrightarrow H^{p,q} \longrightarrow 0$$

que són escindides ja que tots els termes són injectius (i en particular el primer). Per tant, les imatges per G d'aquestes successions són exactes, de manera que

$$Z^{p,q}(G(\mathbf{I})) = G(Z^{p,q}), \qquad B^{p,q}(G(\mathbf{I})) = G(B^{p,q}) \qquad \text{i} \qquad H_h^{p,q}(G(\mathbf{I})) \cong G(H_h^{p,q}(\mathbf{I}))$$

De fet, aquesta última és un isomorfisme de complexes $H_h^{p,*}(G(\mathbf{I})) \cong G(H_h^{p,*}(\mathbf{I}))$ per tot p.

Prenent ara homologia vertical obtenim

$${}^{II}E_2^{p,q} = H_v^p(H_h^{q,*}(G(\mathbf{I}))) = H_v^p(G(H_h^{q,*}(\mathbf{I})))$$

però $H_h^{q,*}(\mathbf{I})$ són resolucions injectives de $H^q(F(\mathbf{E}_A)) = R^qF(A)$, i per tant tenim

$${}^{II}E_2^{p,q} = H_v^p(G(H_h^{q,*}(\mathbf{I}))) = R^pG(R^qF(A))$$

Posant $E = {}^{II}E$ tenim una successió espectral començant a la pàgina 0 on la segona pàgina és $E_2^{p,q} = R^pG(R^qF(A))$ que convergeix al mateix que ${}^IE$, és a dir, a

$$H^{p+q}(\mathrm{Tot}(G(\mathbf{I}))) \cong R^{p+q}(G \circ F)(A)$$

i ja hem acabat. □

Com a primera aplicació d'aquest teorema tenim el següent corol·lari, que resulta de combinar-lo amb la versió cohomològica (dual) del teorema 5.7:

Corol·lari 5.24. *Suposem les hipòtesi del teorema anterior i que F és exacte per l'esquerra. Aleshores existeix una successió exacta*

$$0 \longrightarrow R^1G(F(A)) \longrightarrow R^1(G \circ F)(A) \longrightarrow G(R^1F(A)) \longrightarrow R^2G(F(A)) \longrightarrow R^2(G \circ F)(A)$$

Per acabar amb la secció i també amb tot el treball, donarem dues aplicacions de la successió espectral de Grothendieck a la topologia i la geometria algebraica.

La primera serveix per estudiar la cohomologia d'un feix de grups abelians $\mathcal{F}$ sobre un espai topològic X en termes de la cohomologia de les seves imatges directes $R^nf_*(\mathcal{F})$ sobre un altre espai topològic Y.

Corol·lari 5.25. *(La sucessió espectral de Leray.) Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua entre espais topològics, i sigui $\mathcal{F}$ un feix de grups abelians en X. Aleshores existeix una successió espectral cohomològica del primer quadrant*

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^qf_*(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

Demostració. Al teorema 5.23, prenem $\mathfrak{A} = \mathbf{Ab}(X)$ la categoria de feixos de grups abelians sobre X, $\mathfrak{B} = \mathbf{Ab}(Y)$ la de feixos de grups abelians sobre Y, i $\mathfrak{C} = \mathbf{Ab}$ la categoria de grups abelians. El functor F és el functor *imatge directa* f_*, i G és el functor de seccions globals $\Gamma(Y, -)$. Aleshores F envia feixos injectius a feixos flascos, que són acíclics per G (veure per exemple [6], capítol 3).

Aleshores, com que $G \circ F = \Gamma(X, -)$ és el functor de seccions globals sobre X, i els derivats per la dreta de Γ són els functors de cohomologia H^i, ja hem acabat. □

La segona i última dóna una relació entre els functors Ext locals $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}$ i els globals Ext^n_X en un espai anellat $(X, \mathcal{O}_X)$. Els detalls de la demostració estan provats també al capítol 3 de [6].

Corol·lari 5.26. *(La successió de pas de l'Ext local a l'Ext global). Sigui* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espai anellat, i* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *feixos de* $\mathcal{O}_X$*-mòduls. Aleshores existeix una successió espectral cohomològica del primer quadrant començant a la pàgina 0 tal que*

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Demostració. Al teorema 5.23 prenem $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathbf{Mod}(X)$ la categoria de feixos de $\mathcal{O}_X$-mòduls i $\mathfrak{C} = \mathbf{Ab}$ la categoria de grups abelians. Prenem també $F = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -)$ el functor de morfismes locals, i $G = \Gamma(X, -)$ el functor de seccions globals.

Aleshores F envia injectius a G-acíclics (i.e., si $\mathcal{E}$ és un feix injectiu, aleshores els grups de cohomologia $H^i(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}))$ s'anul·len per tot $i > 0$). I com que $H^n(X, -)$ i $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -)$ són per definició els derivats de $\Gamma(X, -)$ i $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -)$, ja hem acabat. $\square$

Referències

[1] *(Fotocòpies que em vas donar, que no sé la referència.).*

[2] Atiyah-MacDonald. *Introducción al Álgebra Conmutativa.*

[3] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, 1995.

[4] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies*, volume 229 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2005.

[5] G. Greuel, Gert-Martin Pfister. *A Singular Introduction to Commutative Algebra.*

[6] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.*

[7] J.-P. Lafon. *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative.*

[8] MacLane. *Homology*, volume 229. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1963.

[9] D. Murfet. *Spectral Sequences (notes).*

[10] J. J. Rotman. *An introduction to homological algebra.*