

# Teoría de Estructuras

## Simulación de flexión simétrica mediante FEM

Estudiante: Pedro López Sancha

Profesor: José Ramón Martínez Piñol

Ingeniería en Tecnologías Aeroespaciales

Escuela Superior de Ingenierías Industrial, Aeroespacial y Audiovisual de Terrassa

Universidad Politécnica de Cataluña

12 de marzo de 2022



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**  
**BARCELONATECH**

---

**Escola Superior d'Enginyeries Industrial,  
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa**



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Método de los Elementos Finitos . . . . .	2
1.2. Planteamiento . . . . .	2
<b>2. Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>3. Metodología</b>	<b>3</b>
<b>4. Análisis de resultados</b>	<b>4</b>
4.1. Tensión en la galga . . . . .	4
4.2. Deformación en la galga . . . . .	7
4.3. Desplazamiento en $z$ en el punto de aplicación de la carga . . . . .	10
4.4. Carga máxima aplicable y coeficiente de seguridad . . . . .	11
4.5. Estudio de la malla . . . . .	13
4.5.1. Efecto en los errores relativos . . . . .	13
4.5.2. Efecto en los tiempos de mallado y cálculo . . . . .	17
<b>5. Conclusiones</b>	<b>19</b>

# 1. Introducció

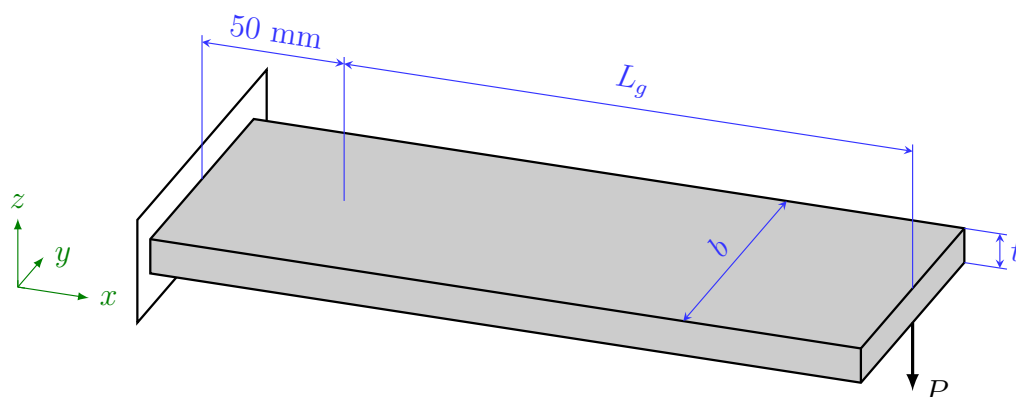
## 1.1. Mètode de los Elementos Finitos

Una gran cantidad de los problemas que se plantean en física y en ingeniería están escritos en términos de ecuaciones diferenciales. En algunos casos es posible demostrar teoremas de existencia y unicidad de solución a la ecuación diferencial, ya sea una solución clásica o una solución llamada “débil”. Es más, muchas herramientas actualmente esenciales, como las transformadas de Fourier y de Laplace, tuvieron un desarrollo inicial fuertemente ligado a las ecuaciones diferenciales y a la representación de sus soluciones. Sin embargo, las soluciones analíticas solamente pueden obtenerse, de forma general, en casos ideales, e.g. en dominios que tienen muchas simetrías, con fronteras suaves, etc.

Para resolver estos problemas es necesario recurrir a métodos numéricos. En términos generales, estos son algoritmos que reciben el problema y producen una solución cercana a la realidad. Un ejemplo es el Método de los Volúmenes Finitos (FVM – *Finite Volume Method*), usado especialmente en mecánica de fluidos, que se basa en discretizar el espacio en volúmenes de control y aplicar las leyes de conservación y constitutivas en cada uno para así transformar el sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas. El método numérico que concierne a esta práctica es el Método de los Elementos Finitos (FEM – *Finite Element Method*). En términos generales, este método se basa en el hecho que, dadas unas condiciones de contorno, el problema intentará adoptar la configuración de mínima energía posible. Así pues, el método puede verse como “minimizar la energía respetando las leyes constitutivas y las condiciones de contorno” [1]. Este método es usado en gran diversidad de campos, a saber, mecánica de fluidos, transferencia de calor, análisis estructural, etc.

## 1.2. Planteamiento

En la Figura 1 se representa la probeta que se estudiará. Esta es de longitud  $L_g + 50$  mm, ancho  $b$  y grosor  $t$ . Se encuentra empotrada en el extremo izquierdo, mientras que en el extremo derecho se aplica una carga  $P$ , de manera que la pieza funciona como una ménsula.



**Figura 1.** Esquema de la probeta, dimensiones, lugar de aplicación de la carga  $P$  y sistema de ejes.

A 50 mm del empotramiento, se encuentra una galga que permite medir la deformación. La probeta está fabricada en Aluminio 6061-T6. En la Tabla 1 se recogen los datos de geometría

y el módulo de Young del material.

$L_g$	$b$	$t$	$P$	$E$
190 mm	42 mm	3,5 mm	26 N	69 GPa

**Tabla 1.** Datos de geometría y del material.

Usando el método de los elementos finitos, se desea estudiar la flexión simple de la probeta provocada por la carga  $P$  y extraer datos sobre tensiones, deformaciones y desplazamientos.

## 2. Objetivos

Los objetivos que se proponen son los siguientes:

1. Simular la flexión simétrica de la probeta representada en la Figura 1 mediante el método de los elementos finitos. A partir de los resultados, obtener las tensiones y deformaciones en la posición de la galga, así como el desplazamiento en  $z$  en el punto de aplicación de la carga, de forma analítica y numérica, y determinar el error relativo.
2. Calcular analíticamente la carga máxima aplicable dados un límite elástico y un coeficiente de seguridad. Asimismo, determinar el coeficiente de seguridad con el que opera la probeta en la posición de la galga y en toda la pieza.
3. Estudiar cómo afecta el tamaño del mallado al tiempo de cálculo y a los errores relativos previamente calculados.

## 3. Metodología

Para simular la flexión simple de la probeta con el método de los elementos finitos, previamente es necesario definir la geometría y discretizarla. Posteriormente se definen las condiciones de contorno, las cargas aplicadas y finalmente se resuelve el problema. El programa de libre distribución FreeCAD permite diseñar la pieza que debe simularse. Además integra un modo FEM, que permite llevar a cabo todas las tareas del método de los elementos finitos propiamente dicho. Más precisamente, con el mallador Gmesh se discretiza la pieza, posteriormente se aplican las condiciones de contorno, cargas y materiales, y finalmente con el *solver* Calculix se resuelve el problema.

La metodología detallada paso por paso puede consultarse en la referencia [2].

## 4. Análisis de resultados

En esta sección se muestran y estudian los resultados tras la resolución de la flexión simple propuesta. En particular, tras la deformación, se determinan la tensión y deformación en el plano de la galga, el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga, la carga máxima aplicable y los coeficientes de seguridad. Finalmente se hace un estudio de malla, donde se comparan los resultados de la simulación inicial con los resultados obtenidos para una malla más burda y para una malla más fina. En las Secciones 4.1 a 4.4 se utiliza una malla con 2,0 mm de tamaño máximo de elemento de malla.

### 4.1. Tensión en la galga

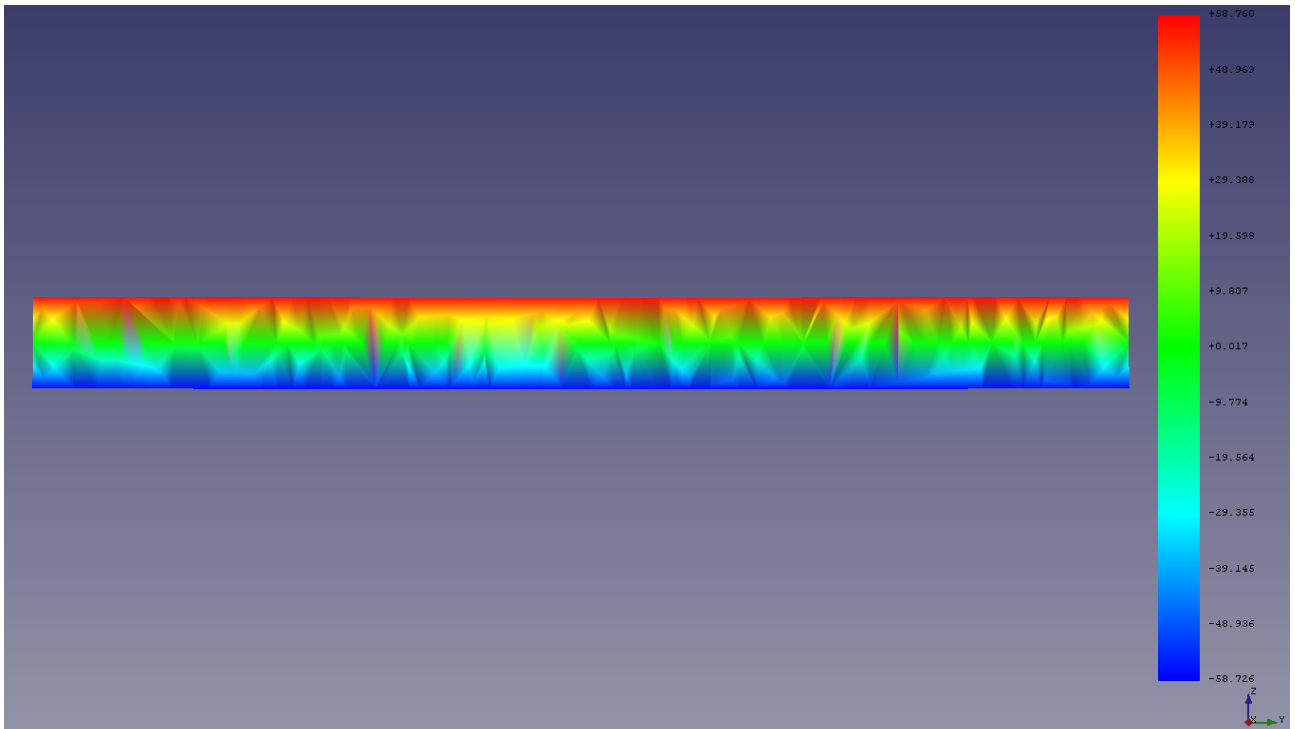
En la situación representada en la Figura 1, la tensión analítica viene dada por [2]:

$$\sigma_g = 6 \frac{PL_g}{bt^2} \quad (1)$$

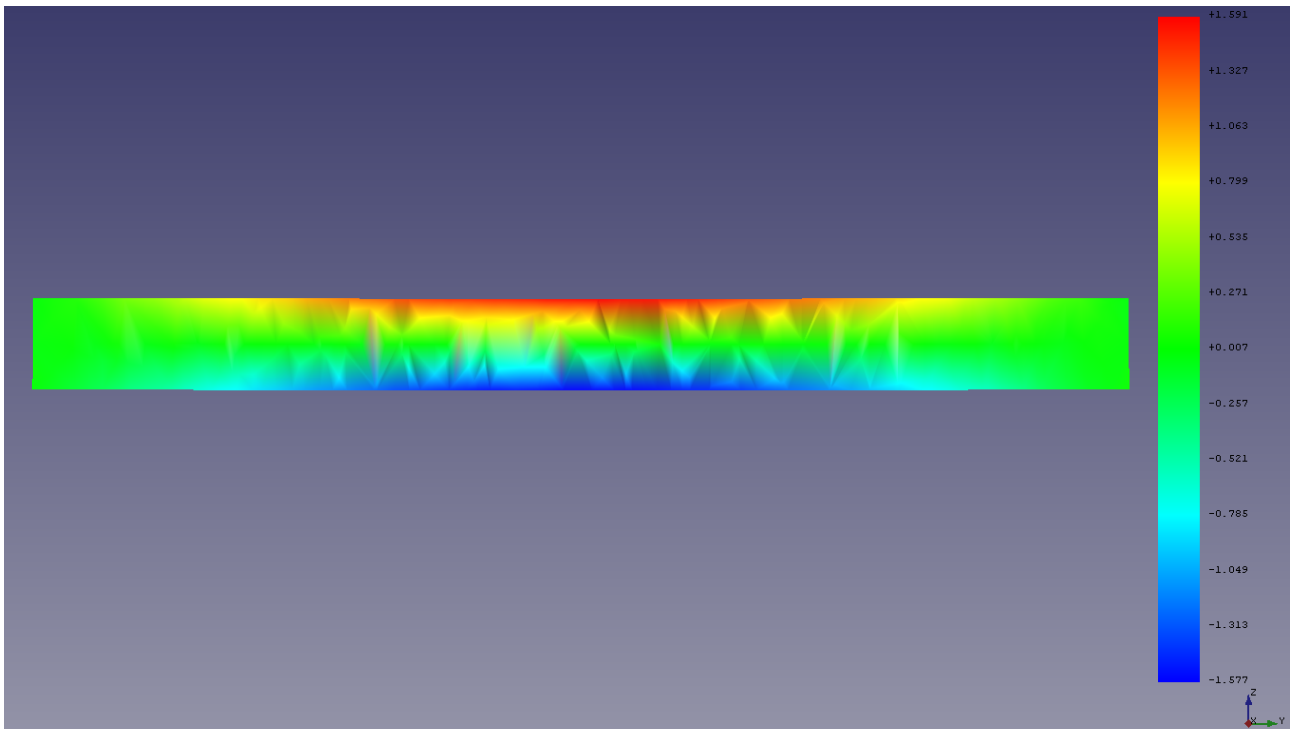
Sustituyendo por los valores recogidos en la Tabla 1, se obtiene la siguiente tensión:

$$\sigma_{g,analítica} = 6 \frac{26 \text{ N} \cdot 190 \text{ mm}}{42 \text{ mm} \cdot (3,5 \text{ mm})^2} = 57,609 \text{ MPa}$$

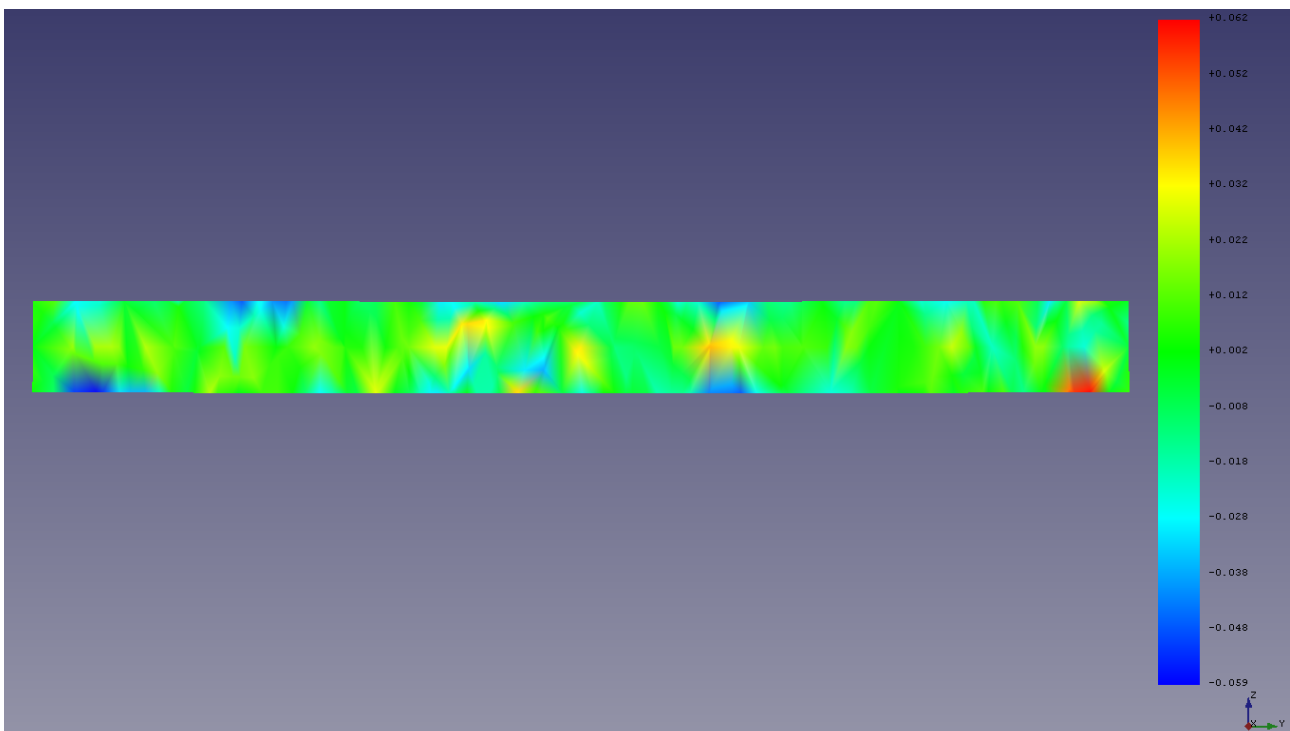
A fin de determinar las tensiones numéricamente, se corta la probeta con el plano de vector normal  $\hat{n} = (1, 0, 0)$  que pasa por la galga en  $x = 50 \text{ mm}$ , a saber, el plano de ecuación  $\Pi: x = 50 \text{ mm}$ . En las Figuras 2, 3 y 4 se muestran las distribuciones de tensiones en la sección resultante del corte en las direcciones normal  $xx$  ( $\sigma_{11}$ ), y en las dos direcciones tangenciales  $xy$  ( $\sigma_{12}$ ) y  $xz$  ( $\sigma_{13}$ ), respectivamente. Asimismo, en la Figura 5 se representa la norma del vector tensión asociado al plano de corte ( $\underline{\sigma}_{e_1}$ ).



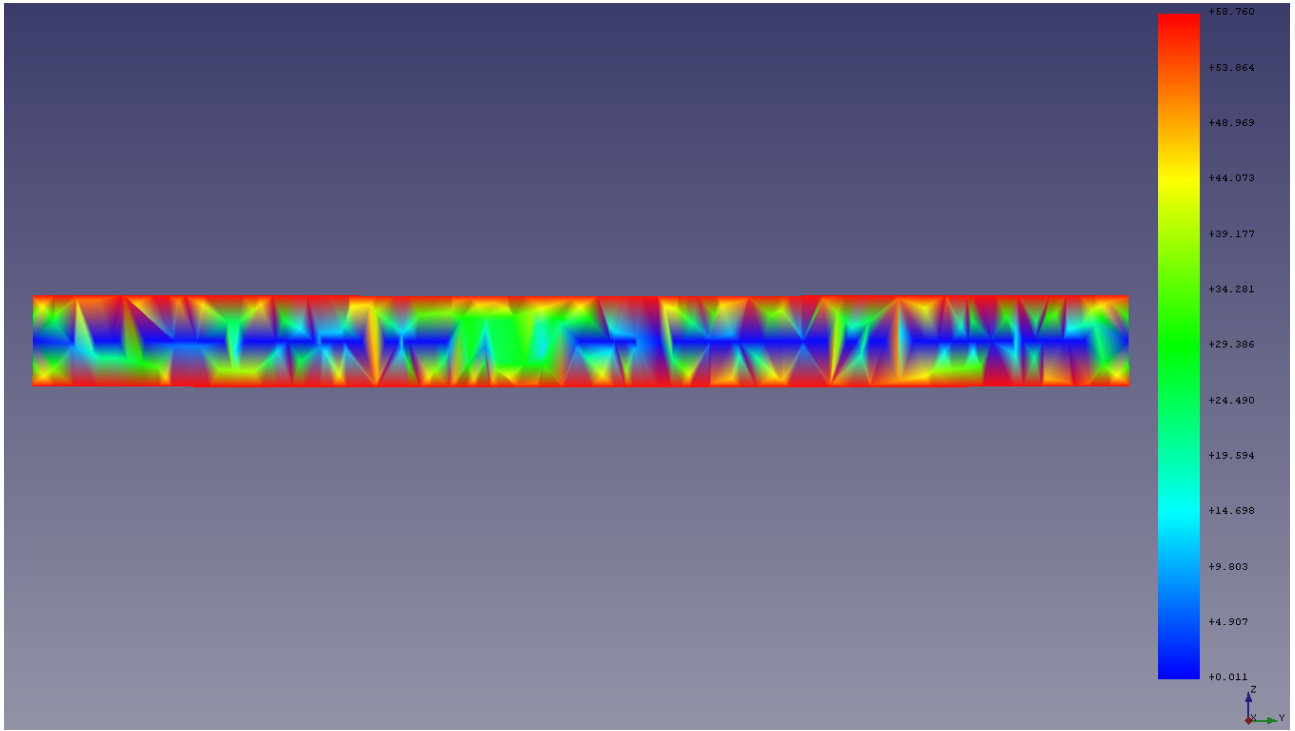
**Figura 2.** Distribución de tensión normal  $xx$  ( $\sigma_{11}$ ) en el plano de corte  $\Pi$ . Rango de la escala:  $[-58,726, 58,760]$  MPa. Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.



**Figura 3.** Distribución de tensión tangencial  $xy$  ( $\sigma_{12}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-1,577, 1,591]$  MPa. Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.



**Figura 4.** Distribución de tensión tangencial  $xz$  ( $\sigma_{13}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-0,059, 0,062]$  MPa. Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.



**Figura 5.** Distribución de la norma de la tensión ( $\|\underline{\sigma}_{e1}\|$ ) en el plano de corte  $\Pi$ . Rango de la escala:  $[0,011, 58,760]$  MPa. Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.

Como puede observarse, los máximos de las componentes tangenciales  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{13}$  en valor absoluto son uno y dos órdenes de magnitud menores, respectivamente, al valor máximo de la componente normal  $\sigma_{11}$  en valor absoluto. Por este motivo,  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{13}$  solamente son relevantes para el cálculo de  $\|\underline{\sigma}_{e1}\|$  en la zona central de la sección, es decir, cuando  $z \approx t/2$ ; mientras que cuando  $z = 0$  o  $z = t$ , se puede aproximar por la componente normal, es decir,  $\|\underline{\sigma}_{e1}\| \approx |\sigma_{11}|$ .

Para reducir errores, el valor de la tensión en la posición de la galga se promediará con los valores de la cara superior e inferior:

$$\sigma_{g,numérica} = \frac{|\sigma_{superior}| + |\sigma_{inferior}|}{2} \quad (2)$$

La tensión en la cara superior es  $\sigma_{superior} = 57,760$  MPa y en la inferior  $\sigma_{inferior} = -58,726$  MPa, de modo que

$$\sigma_{g,numérica} = \frac{58,760 \text{ MPa} + 58,726 \text{ MPa}}{2} = 58,743 \text{ MPa}$$

El error relativo entre los valores analítico y numérico se obtiene comparando la diferencia entre ambos con el valor analítico:

$$\text{error}[\%] = 100 \frac{||\sigma_{g,analítica}| - |\sigma_{g,numérica}||}{|\sigma_{g,analítica}|} \quad (3)$$

Sustituyendo en (3), se obtiene el siguiente error relativo:

$$\text{error}[\%] = 100 \frac{|57,609 \text{ MPa} - 58,743 \text{ MPa}|}{57,609 \text{ MPa}} = 1,968 \%$$



El error relativo máximo aceptable no está establecido uniformemente. Por ejemplo, en el campo de la economía, si se resuelve numéricamente la ecuación de Black–Scholes [3], que modela los precios de derivados financieros, un error relativo del 1 % comparando con la solución analítica puede considerarse inaceptable. No obstante, para la flexión simple, puede fijarse un error relativo máximo del 5 %. En consecuencia, el error obtenido de 1,968 % es aceptable, es decir, la solución analítica y la numérica concuerdan.

## 4.2. Deformación en la galga

Para el cálculo analítico de la deformación nominal se emplea la ley de Hooke para estados tensionales unidireccionales [2],

$$\varepsilon_g = \frac{\sigma_g}{E} \quad (4)$$

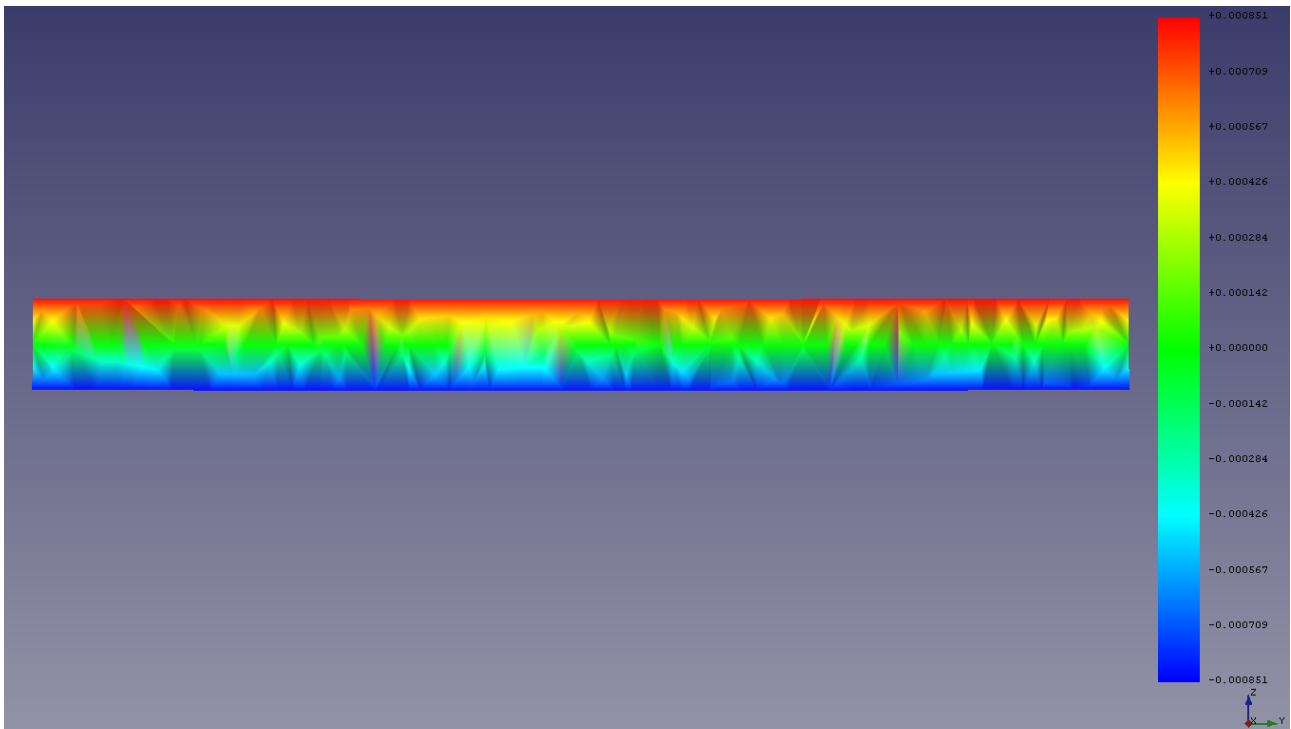
donde  $\sigma_g$  es la tensión dada por (1) y  $E$  es el módulo de Young del material. Sustituyendo por la tensión analítica previamente encontrada, se tiene que:

$$\varepsilon_{g,\text{analítica}} = \frac{57,609 \text{ MPa}}{69 \text{ GPa}} = 8,3491 \times 10^{-4}$$

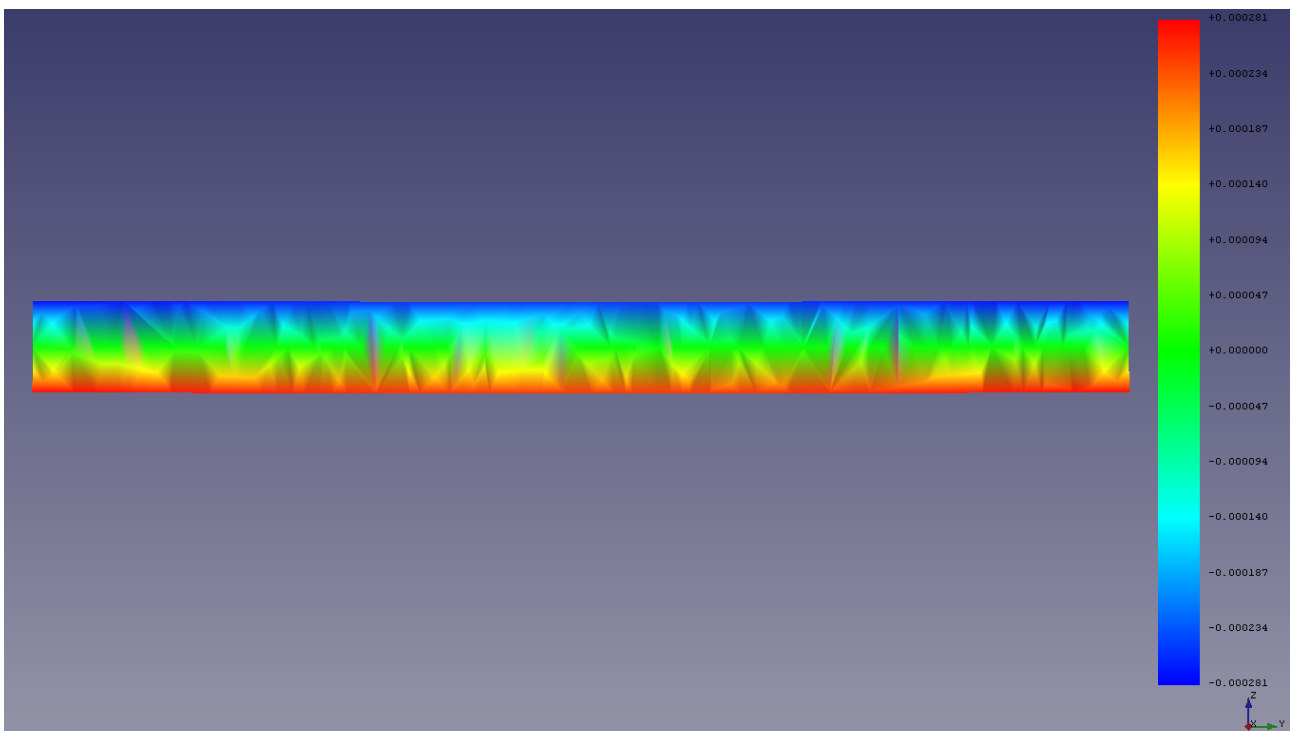
En cuanto a las deformaciones numéricas, nuevamente se corta la probeta con el plano de ecuación  $\Pi$ :  $x = 50 \text{ mm}$ . En las Figuras 6, 7 y 8 se representan las deformaciones en la sección resultante del corte en las direcciones normal  $xx$  ( $\varepsilon_{11}$ ) y en las dos direcciones tangenciales  $xy$  ( $\varepsilon_{12}$ ) y  $xz$  ( $\varepsilon_{13}$ ). En la Figura 9 se representa la norma del vector deformación asociado al plano de corte ( $\underline{\varepsilon}_{e_1}$ ).

Se observa cómo, en la cara superior, la componente de deformación  $\varepsilon_{11}$  es positiva, mientras que en la cara inferior es negativa. Por el contrario, las componentes  $\varepsilon_{12}$  y  $\varepsilon_{13}$  son negativas en la cara superior y positivas en la inferior. Esto implica que la sección resultante del corte, la cara superior se “alarga” en dirección  $x$  y “contrae” en direcciones  $y$  y  $z$ ; en tanto que la cara inferior se “contrae” en dirección  $x$  y “alarga” en direcciones  $y$  y  $z$ .

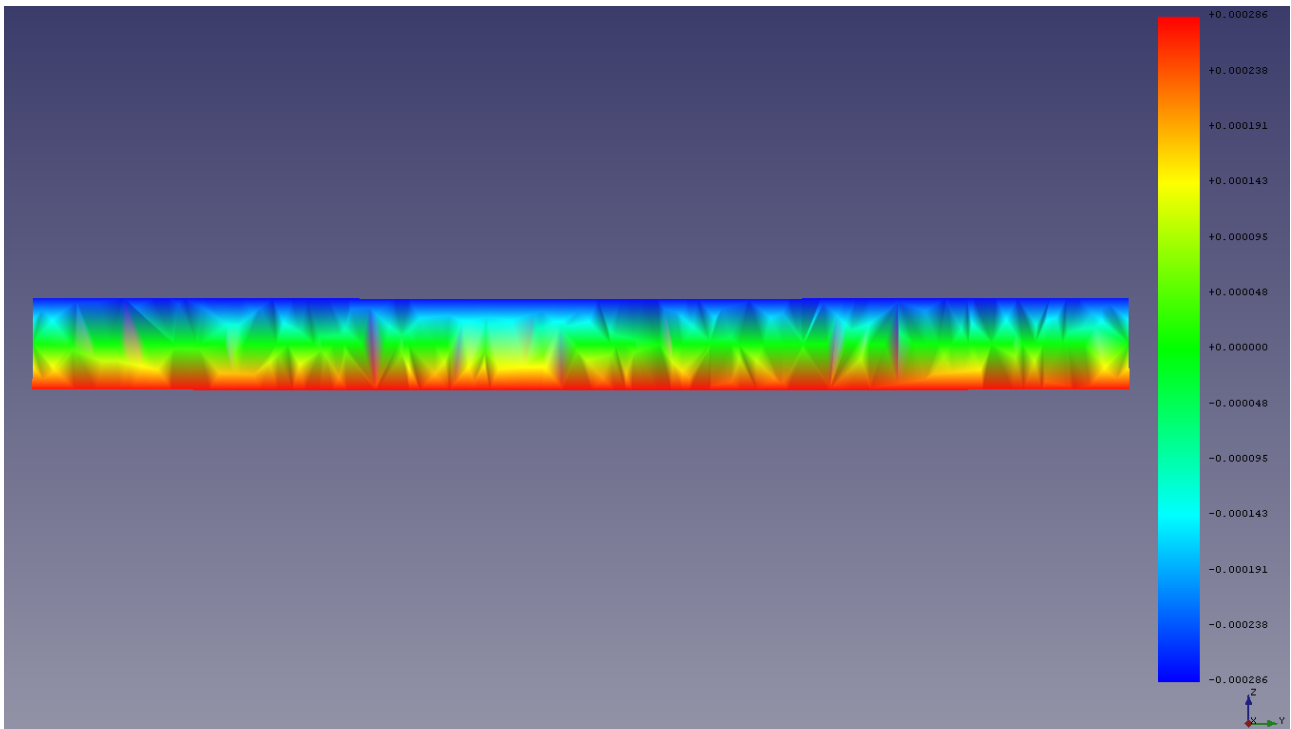
En las caras superior e inferior de la sección se tiene que  $|\varepsilon_{11}/\varepsilon_{12}| \approx 3$  y  $|\varepsilon_{11}/\varepsilon_{13}| \approx 3$ , por lo que las tres componentes del vector  $\underline{\varepsilon}_{e_1}$  están en el mismo orden de magnitud. Así pues, la aproximación  $\|\underline{\varepsilon}_{e_1}\| \approx |\varepsilon_{11}|$  no es buena, a diferencia de con las tensiones.



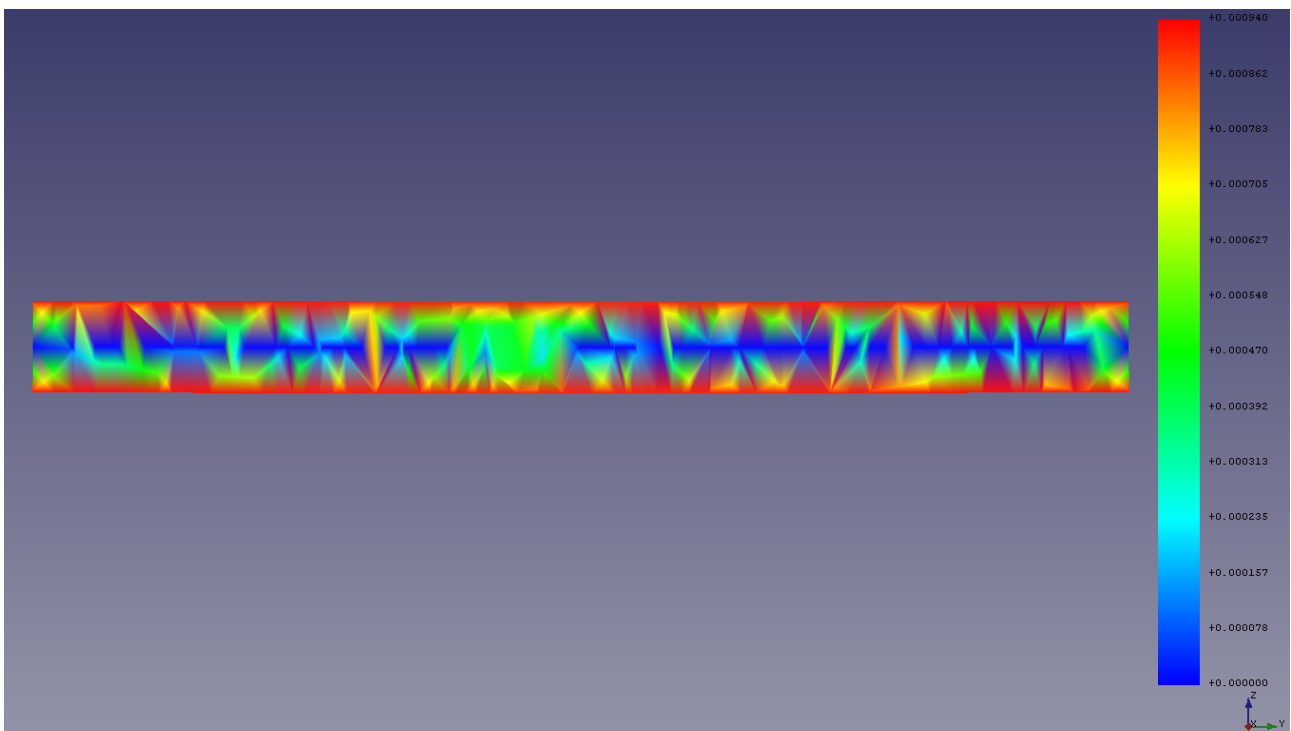
**Figura 6.** Distribución de la deformación normal  $xx$  ( $\varepsilon_{11}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-8,51, 8,51] \times 10^{-3}$ . Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.



**Figura 7.** Distribución de la deformación tangencial  $xy$  ( $\varepsilon_{12}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-2,81, 2,81] \times 10^{-3}$ . Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.



**Figura 8.** Distribución de la deformación tangencial  $xz$  ( $\varepsilon_{13}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-2,86, 2,86] \times 10^{-3}$ . Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.



**Figura 9.** Distribución de la norma de la deformación ( $\|\varepsilon_{e1}\|$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[0,000, 9,40] \times 10^{-3}$ . Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.

Tal como sugiere [2] en la realización de la práctica, solamente se tendrá en cuenta la componente  $\varepsilon_{11}$  para el cálculo de la deformación nominal. De igual forma que con la tensión, se promedian los valores de la cara superior e inferior para minimizar el error. Se tiene que  $\varepsilon_{\text{superior}} = 8,51 \times 10^{-4}$  y  $\varepsilon_{\text{inferior}} = -8,51 \times 10^{-4}$ , por lo tanto,

$$\varepsilon_{g,\text{numérica}} = \frac{|\varepsilon_{\text{superior}}| + |\varepsilon_{\text{inferior}}|}{2} = \frac{8,51 \times 10^{-4} + 8,51 \times 10^{-4}}{2} = 8,51 \times 10^{-4}$$

El error relativo entre deformación analítica y numérica se obtiene con la expresión análoga de (3), sustituyendo tensiones por deformaciones,

$$\text{error}[\%] = 100 \frac{||\varepsilon_{g,\text{analítica}}| - |\varepsilon_{g,\text{numérica}}||}{|\varepsilon_{g,\text{analítica}}|} = 100 \left| \frac{8,3491 \times 10^{-4} - 8,51 \times 10^{-4}}{8,3491 \times 10^{-4}} \right| = 1,927\%$$

que es menor que 5 %, por lo que se toma como aceptable.

### 4.3. Desplazamiento en $z$ en el punto de aplicación de la carga

El desplazamiento en  $Z$  en el punto de aplicación de la carga se obtiene analíticamente mediante

$$f = \frac{1}{3} \frac{PL_{\text{total}}^3}{EI} \quad (5)$$

donde  $L_{\text{total}} = L_g + 50$  mm es la longitud total de la pieza e  $I$  es el segundo momento de área de la sección transversal, dado por

$$I = \frac{1}{12} bt^3 \quad (6)$$

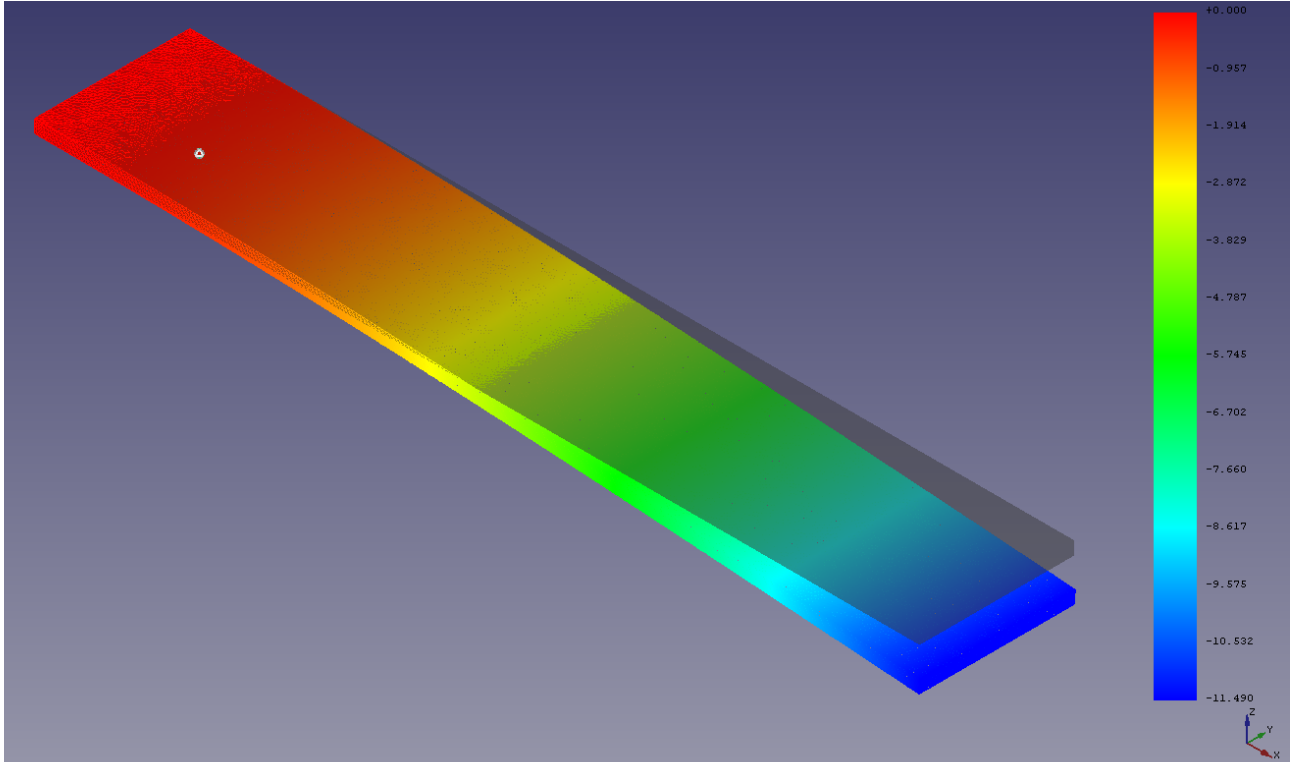
Sustituyendo en (6) con los datos de geometría de la Tabla 1, se tiene

$$I = \frac{1}{12} 42 \text{ mm} \cdot (3,5 \text{ mm})^3 = 150,0625 \text{ mm}^4$$

y el desplazamiento analítico,

$$f_{\text{analítico}} = \frac{1}{3} \frac{26 \text{ N} \cdot (190 \text{ mm} + 50 \text{ mm})^3}{69 \times 10^3 \text{ MPa} \cdot 150,0625 \text{ mm}^4} = 11,571 \text{ mm}$$

En la Figura 10 se representa el desplazamiento en  $z$  a lo largo de la probeta. Como resulta intuitivo, el mayor desplazamiento se produce en el extremo libre, mientras que cerca del empotramiento, a causa de la condición de contorno, el desplazamiento es nulo.



**Figura 10.** Distribución de los desplazamientos en  $z$ . Warp Factor = 1. Rango de la escala:  $[-11,490, 0,000]$  mm. Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.

En el extremo libre se tiene un desplazamiento numérico de

$$f_{\text{numérico}} = 11,490 \text{ mm}$$

por lo tanto el error relativo es

$$\text{error}[\%] = 100 \frac{||f_{\text{analítico}}| - |f_{\text{numérico}}||}{|f_{\text{analítico}}|} = 0,691 \%$$

Dado que es menor al 1 %, la solución numérica y analítica están muy cerca.

#### 4.4. Carga máxima aplicable y coeficiente de seguridad

Supóngase que el límite elástico del material es  $\sigma_e = 176 \text{ MPa}$  y que se desea trabajar con un coeficiente de seguridad de 2, a saber,

$$\text{Coeficiente de seguridad} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{máx}}} = 2 \quad (7)$$

Para hallar la carga máxima aplicable  $P_{\text{máx}}$ , se opera con las Expresiones (1) y (7) para obtener:

$$P_{\text{máx}} = \frac{1}{12} \frac{bt^2}{L_g} \sigma_e \quad (8)$$

Como sugiere la Ecuación (8), resulta intuitivo que a mayor ancho o grosor de probeta, mayor sea la carga máxima aplicable, pues más difícil será provocar la flexión. En cambio, a mayor

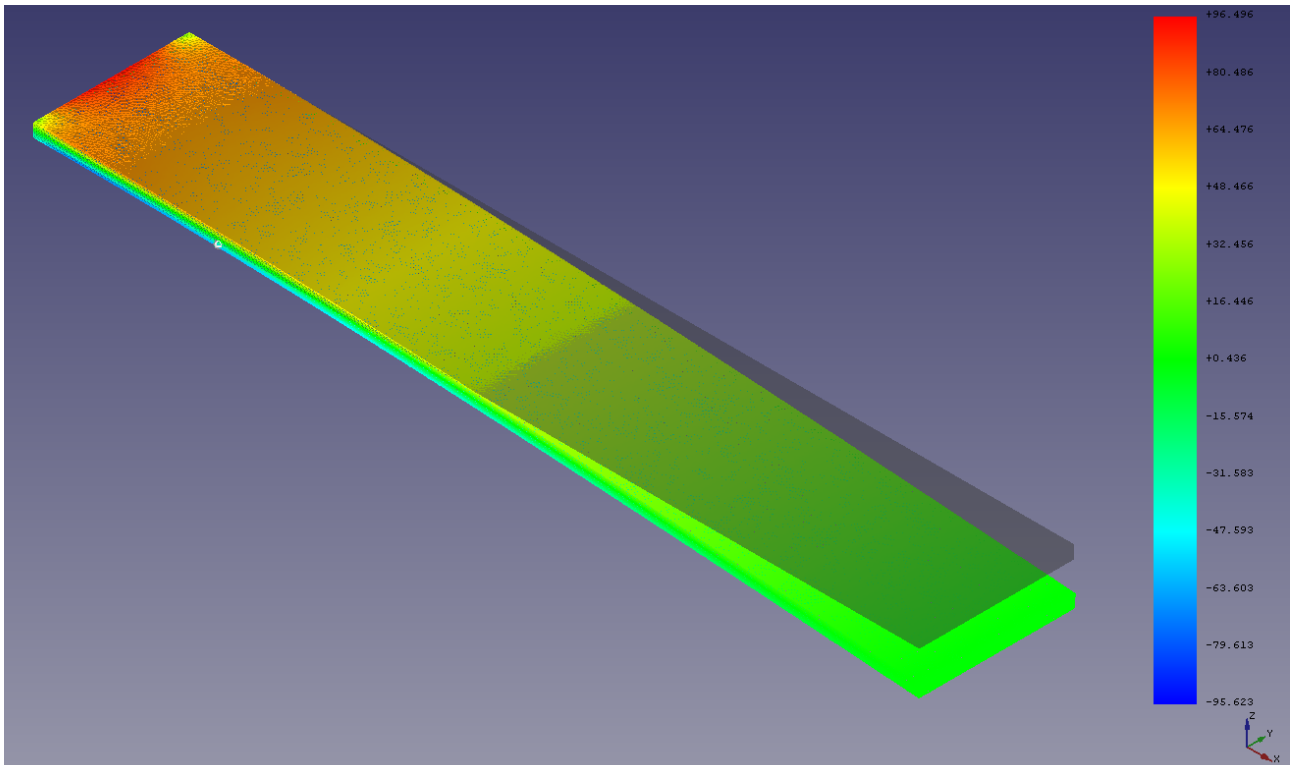
longitud de probeta, menor es la carga máxima, dada la mayor facilidad para deformarla. Sustituyendo en (8) por los valores conocidos se tiene

$$P_{\text{máx}} = \frac{1}{12} \frac{42 \text{ mm} \cdot (3,5 \text{ mm})^2}{190 \text{ mm}} 176 \text{ MPa} = 39,72 \text{ N}$$

Una vez obtenida la carga máxima aplicable, se desea calcular con qué coeficiente de seguridad real está operando la pieza en la galga y en toda la pieza. Como tensiones “reales” se toman las obtenidas numéricamente. Recuérdese que en la galga  $\sigma_{g,\text{numérica}} = 58,743 \text{ MPa}$ , de modo que el coeficiente de seguridad es

$$\text{Coeficiente de seguridad}_{\text{galga}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{g,\text{numérica}}} = \frac{176 \text{ MPa}}{58,743 \text{ MPa}} = 2,996$$

que es mayor a 2, por lo que se encuentra en la región aceptable. A fin de obtener la tensión máxima en toda la pieza, se calcula la componente  $x$  del vector tensión, tal como se muestra en la Figura 11.



**Figura 11.** Distribución de la componente  $x$  del vector tensión en toda la probeta. Rango de la escala:  $[-95,623, 96,496] \text{ MPa}$ . Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,0 mm.

Se obtienen una tensión mínima de  $\sigma_{\text{inferior}} = -95,623 \text{ MPa}$ , que se da en la cara inferior, y una tensión máxima de  $\sigma_{\text{superior}} = 96,496 \text{ MPa}$ , que se da en la cara superior. Para obtener la tensión máxima en toda la pieza se promedian los valores anteriores:

$$\sigma_{\text{pieza,máxima}} = \frac{|\sigma_{\text{inferior}}| + |\sigma_{\text{superior}}|}{2} = \frac{95,623 \text{ MPa} + 96,496 \text{ MPa}}{2} = 96,060 \text{ MPa}$$

De esta forma, el coeficiente de seguridad con el que opera la pieza es

$$\text{Coeficiente de seguridad}_{\text{pieza}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{pieza,máxima}}} = \frac{176 \text{ MPa}}{96,060 \text{ MPa}} = 1,832$$

que está muy por debajo de 2, por lo que es inadmisibile. Para conseguir un coeficiente de seguridad mayor a 2 es necesario reducir la carga  $P$  en el extremo o bien modificar las dimensiones de la probeta.

## 4.5. Estudio de la malla

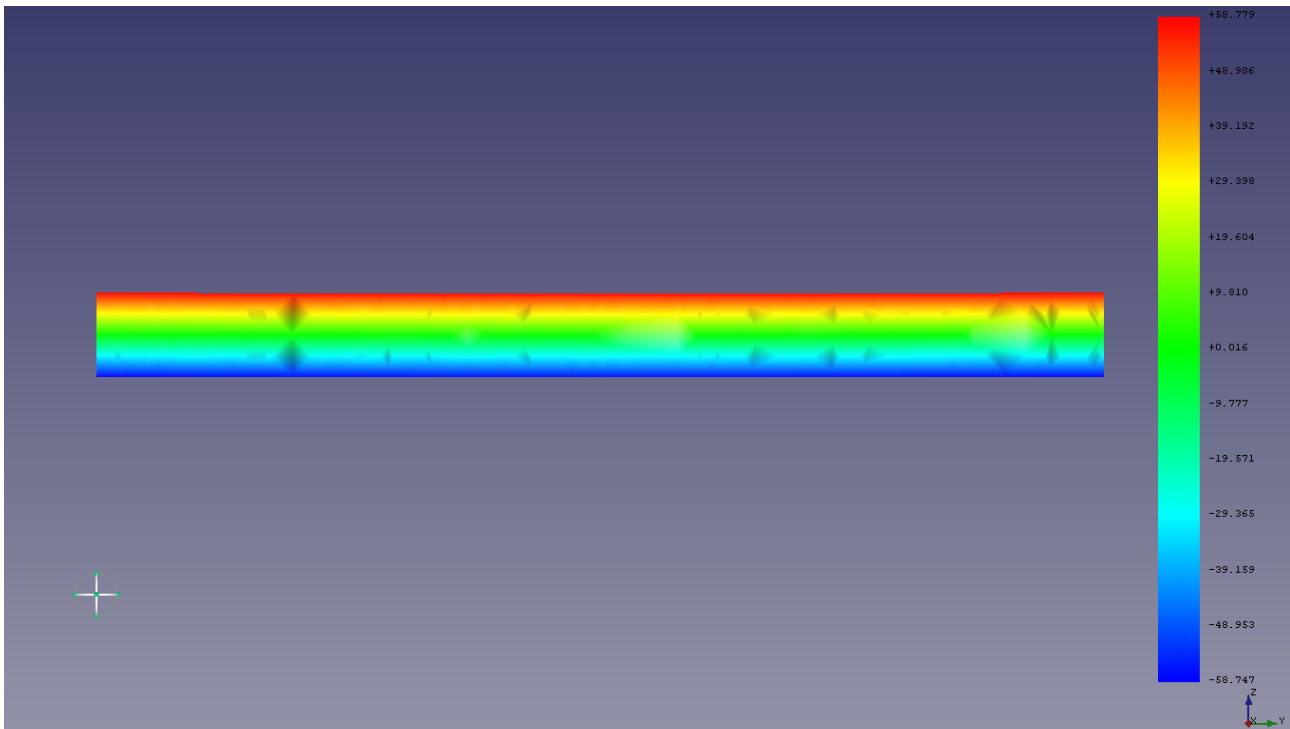
En todo problema resuelto de manera numérica es necesario estudiar cómo afectan los parámetros del método a la solución. En algunas situaciones este estudio es sencillo y directo. Por ejemplo, es evidente que al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$  con un método de Runge–Kutta de orden 5, los errores local y global serán mucho menores que al resolverlo con el método de Euler de orden 1, aunque ambos utilicen el mismo paso de tiempo  $h$ . En otras situaciones, por el contrario, esta relación no es tan directa o clara. Por ejemplo, si se resuelve la ecuación del calor en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  complicado, una malla no estructurada puede ser más adecuada que una estructurada.

En el caso de estudio, el parámetro que puede modificarse y por lo tanto afectar a la solución es el tamaño máximo de un elemento de la malla. A continuación se lleva a cabo cómo afecta a los errores relativos y a los tiempos de resolución usando tamaños máximos de elementos de malla de 1,8 mm y 2,2 mm.

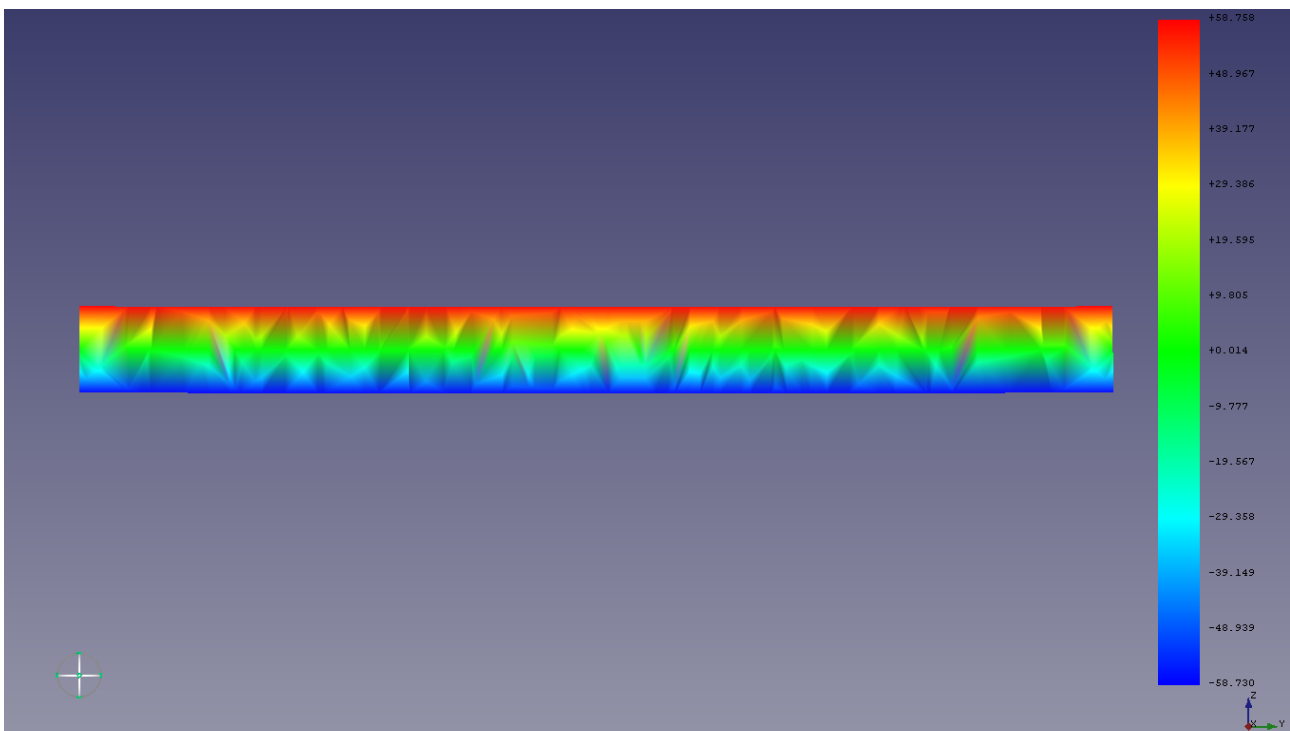
### 4.5.1. Efecto en los errores relativos

En las siguientes figuras se muestran por pares las variables de estudio para los tamaños máximos de elementos de malla considerados. El procedimiento seguido para obtenerlos es el mismo que el seguido en las secciones anteriores, es decir, se corta la pieza deformada con el plano  $\Pi$ :  $x = 50$  mm, y en la sección resultante se representan la tensión normal  $\sigma_{11}$  y la deformación normal  $\varepsilon_{11}$ . Más precisamente:

- En las Figuras 12 y 13 se representan las distribuciones de tensión normal en el plano de corte  $\Pi$ , para tamaños máximos de 1,8 mm y 2,2 mm, respectivamente.
- En las Figuras 14 y 15 se representan las distribuciones de deformación normal en el plano de corte  $\Pi$ , para tamaños máximos de 1,8 mm y 2,2 mm, respectivamente.
- En las Figuras 16 y 17 se representan las distribuciones de desplazamiento en  $z$  en toda la pieza, para tamaños máximos de 1,8 mm y 2,2 mm, respectivamente.

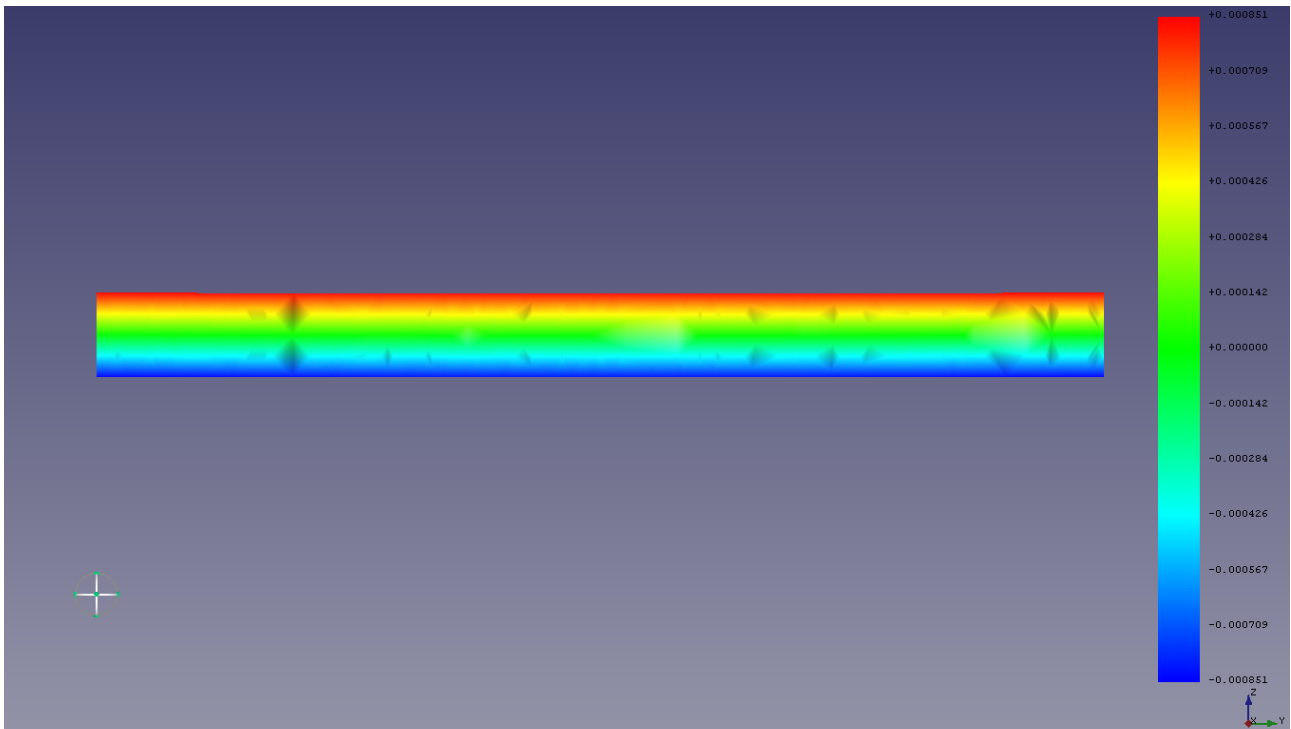


**Figura 12.** Distribución de tensión normal  $xx$  ( $\sigma_{11}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-58,747, 58,779]$  MPa. Tamaño máximo de un elemento de malla: 1,8 mm.

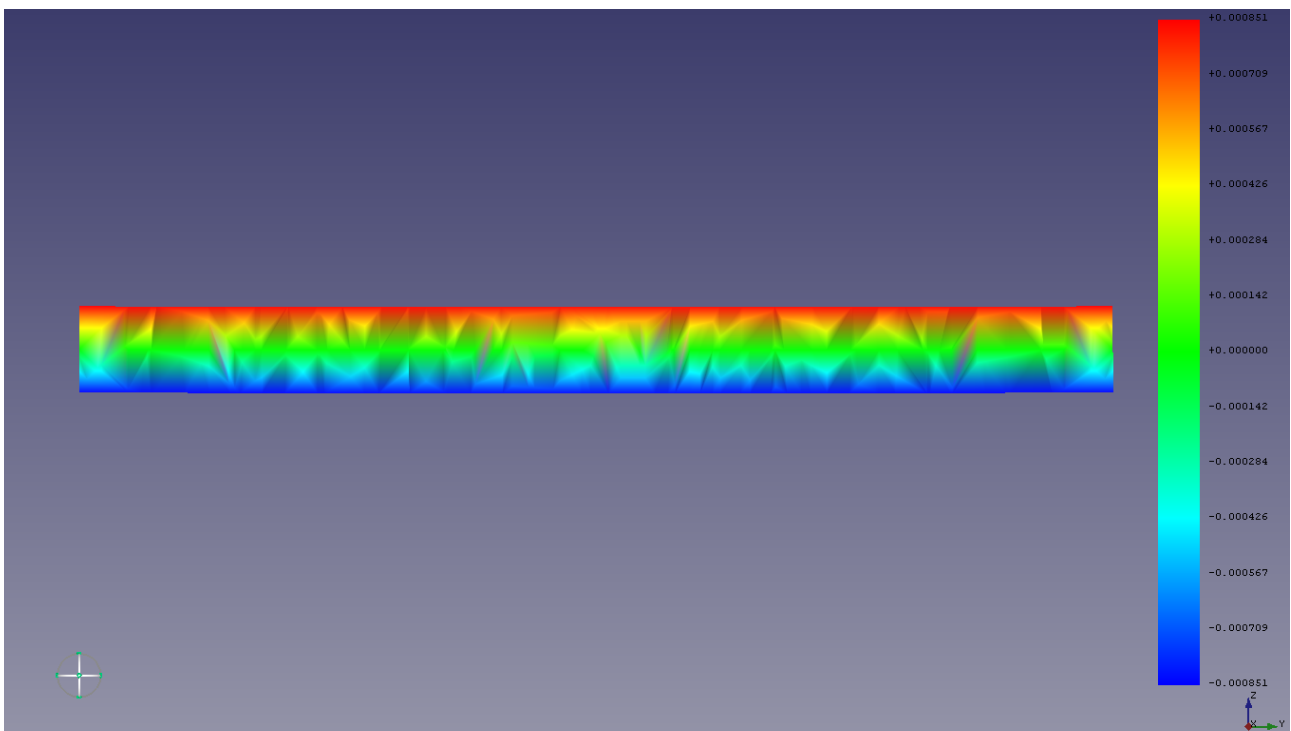


**Figura 13.** Distribución de tensión normal  $xx$  ( $\sigma_{11}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-58,730, 58,758]$  MPa. Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,2 mm.

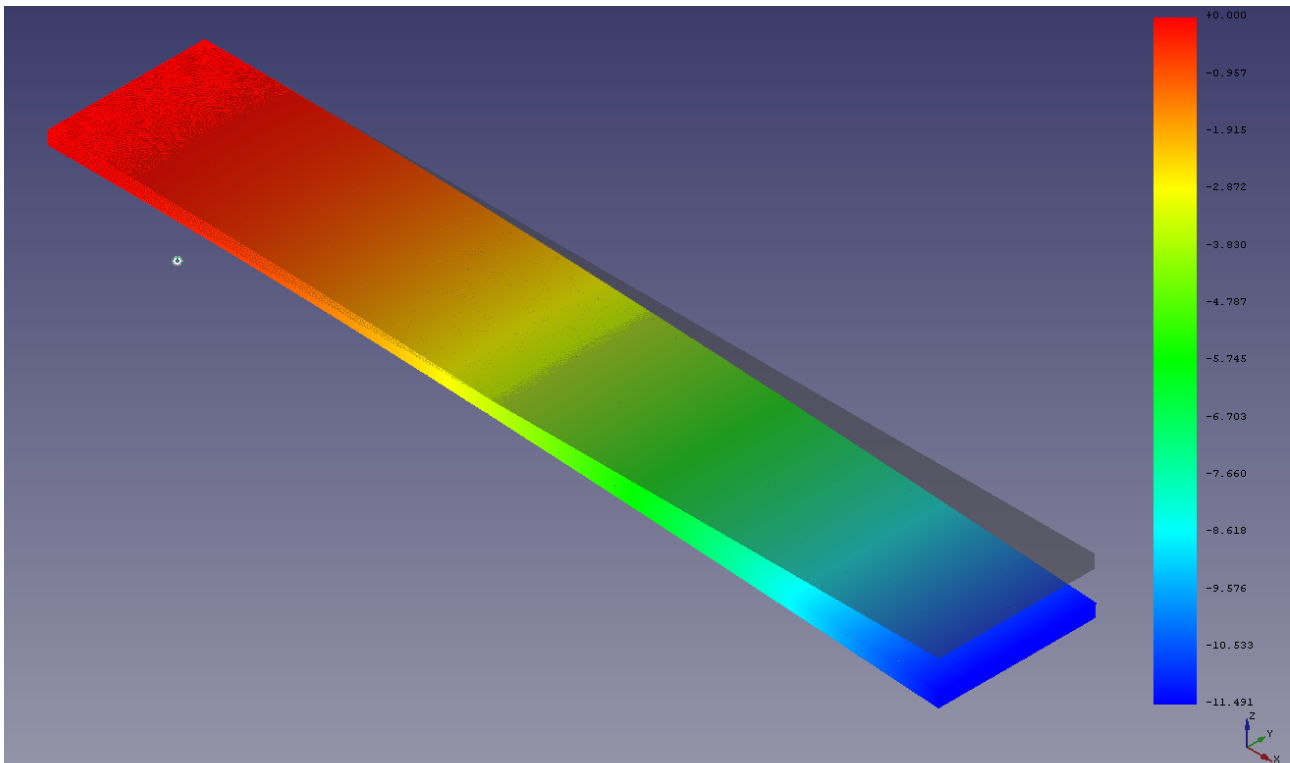




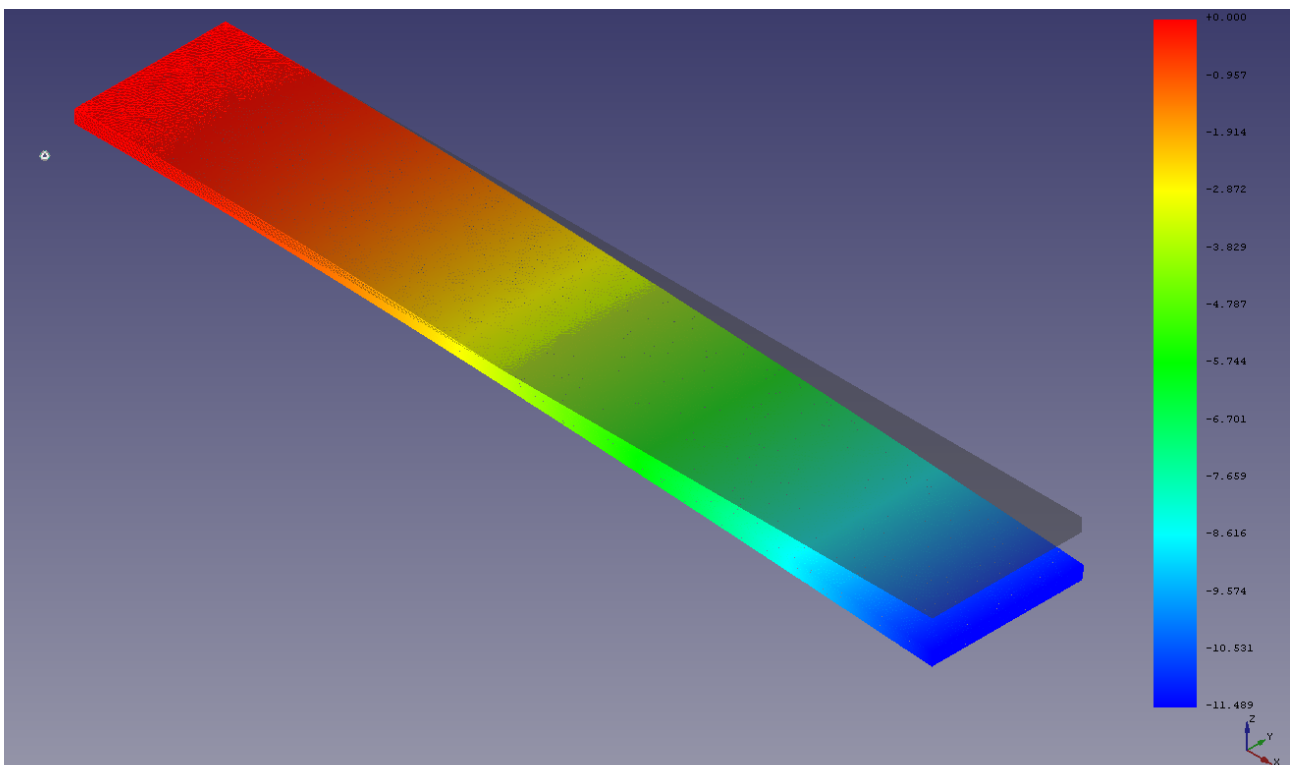
**Figura 14.** Distribución de la deformación normal  $xx$  ( $\varepsilon_{11}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-8,51, 8,51] \times 10^{-3}$ . Tamaño máximo de un elemento de malla: 1,8 mm.



**Figura 15.** Distribución de la deformación normal  $xx$  ( $\varepsilon_{11}$ ) en el plano de corte II. Rango de la escala:  $[-8,51, 8,51] \times 10^{-3}$ . Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,2 mm.



**Figura 16.** Distribución de los desplazamientos en  $z$ . Warp Factor = 1. Rango de la escala:  $[-11,491, 0,000]$  mm. Tamaño máximo de un elemento de malla: 1,8 mm.



**Figura 17.** Distribución de los desplazamientos en  $z$ . Warp Factor = 1. Rango de la escala:  $[-11,489, 0,000]$  mm. Tamaño máximo de un elemento de malla: 2,2 mm.

Las distribuciones en todos los casos son similares. La única diferencia notable al cambiar el tamaño de máximo de elemento de malla es la “suavidad” en la transición de color. Las tensiones, deformaciones y desplazamientos, juntamente con los errores relativos para los tres tamaños de malla estudiados, se recogen en la Tabla 2.

Variable	Malla 1,8 mm	Malla 2,0 mm	Malla 2,2 mm
Tensión superior [MPa]	58,779	58,760	58,758
Tensión inferior [MPa]	−58,747	−58,726	−58,730
Tensión [MPa]	58,763	58,743	58,744
Err. rel. tensión	2,003 %	1,968 %	1,970 %
Deformación superior	$8,51 \times 10^{-4}$	$8,51 \times 10^{-4}$	$8,51 \times 10^{-4}$
Deformación inferior	$-8,51 \times 10^{-4}$	$-8,51 \times 10^{-4}$	$-8,51 \times 10^{-4}$
Deformación	$8,51 \times 10^{-4}$	$8,51 \times 10^{-4}$	$8,51 \times 10^{-4}$
Err. rel. deformación	1,927 %	1,927 %	1,927 %
Desplazamiento en $z$ [mm]	11,491	11,490	11,489
Err. rel. desplazamiento en $z$	0,691 %	0,700 %	0,709 %

**Tabla 2.** Variables de estudio y errores relativos para cada tamaño máximo de malla considerado.

En lo que a tensiones se refiere, estas difieren ligeramente según el tamaño máximo de malla, siendo la máxima diferencia de errores relativos de 0,035 %. De manera intuitiva, una malla más fina debería dar errores relativos menores, es decir, la solución numérica debería estar más cerca a la solución analítica. No obstante, recuérdese que en la solución analítica es necesario hacer suposiciones y aproximaciones, por lo que esta última no es la solución real. En consecuencia, no es de extrañar que la solución con tamaño máximo de 1,8 mm esté más alejada de la analítica que la solución con tamaño máximo de 2,0 mm.

En cuanto a deformaciones, los errores relativos son iguales en todos los casos. Con toda seguridad las deformaciones difieren en algún punto a partir del sexto decimal. Sin embargo, esto no puede comprobarse, pues FreeCAD muestra como mucho seis decimales.

Finalmente, en cuanto a desplazamientos, los errores relativos son similares, aunque crecen ligeramente a medida que aumenta el tamaño máximo de malla.

#### 4.5.2. Efecto en los tiempos de mallado y cálculo

La discretización del dominio de estudio y cuán fina es afecta, por lo general, al tiempo de resolución. A fin de estudiar el efecto del tamaño máximo del elemento de malla en el tiempo de mallado y en el tiempo de cálculo, para cada tamaño se ha mallado y resuelto el problema diez veces. Posteriormente se ha calculado el promedio de tiempos. En las Tablas 3 y 4 se recogen los tiempos de mallado y de cálculo, respectivamente.

El tiempo de mallado crece rápidamente a medida que se reduce el tamaño máximo del elemento de malla. Es intuitivo que, a cuando crece el tamaño máximo del elemento de malla, el tiempo de mallado disminuye. Por consiguiente, si  $\Delta x$  denota el tamaño máximo, el tiempo de mallado

Malla	Tiempo de mallado [s]										Promedio [s]
1,8 mm	9,0	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0	9,0	9,1	9,0
2,0 mm	7,1	7,1	7,1	7,1	7,1	7,0	7,1	7,0	7,0	7,0	7,1
2,2 mm	6,3	6,2	6,3	6,4	6,3	6,2	6,4	6,4	6,4	6,4	6,3

**Tabla 3.** Tiempos de mallado y promedio de tiempos según el tamaño máximo de elemento de malla.

Malla	Tiempo de cálculo [s]										Promedio [s]
1,8 mm	26,0	25,9	26,0	26,0	26,2	26,1	26,2	26,0	26,1	26,1	26,1
2,0 mm	13,9	14,0	14,0	14,1	14,3	14,2	14,3	14,3	14,4	14,4	14,2
2,2 mm	10,6	10,6	10,7	10,7	10,8	10,9	10,9	11,0	11,1	11,1	10,8

**Tabla 4.** Tiempos de cálculo y promedio de tiempos según el tamaño máximo de elemento de malla.

podría seguir una ley  $t \propto 1/(\Delta x)^\alpha$  para algún  $\alpha > 0$ . Para contrastar esto, no obstante, son necesarios más datos.

El comportamiento del tiempo de cálculo es similar al del tiempo de mallado, aunque en este caso el crecimiento al reducir el tamaño de malla es más acusado.

El motivo por el que los tiempos crecen cuando  $\Delta x$  disminuye es sencillo. Sea  $V$  el volumen del dominio a mallar. Se puede asumir que el volumen del elemento de malla  $V_e$  es proporcional al cubo del tamaño máximo, es decir,  $V_e = k(\Delta x)^3$ , para algún  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ . El número total de elementos en los que se discretiza el dominio es  $N = V/(k(\Delta x)^3)$ . Sea  $c$  el número de variables asociadas a cada elemento de malla, de manera que en total se tienen  $n = cV/(k(\Delta x)^3)$  variables. Supóngase que se quiere afinar la malla tomando  $\Delta x' = \lambda \Delta x$  para  $\lambda \in (0, 1)$ . El número de variables para el problema con malla más fina es

$$n' = \frac{cV}{k(\Delta x')^3} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{cV}{k(\Delta x)^3} = \frac{n}{\lambda^3}$$

de donde se deduce que el número de variables total aumenta con el cubo de  $\lambda^{-1}$ . Si debe resolverse un sistema lineal, puede usarse, por ejemplo, la factorización LU. El número de operaciones que lleva a cabo este algoritmo es  $\mathcal{O}(m^3)$ , donde  $m$  es la dimensión del sistema lineal a resolver. Para la malla de tamaño  $\Delta x$  el número de operaciones es  $\mathcal{O}(n^3)$ , mientras que para la malla más fina de tamaño  $\Delta x'$  este número crece a  $\mathcal{O}(\lambda^{-9}n^3)$ . En consecuencia, reducir a la mitad el tamaño de malla es prohibitivo en algunos casos. Todo y con esto, algunas propiedades de la matriz del sistema pueden aprovecharse para aplicar algoritmos más eficientes en número de operaciones, e.g. si la matriz es simétrica.

## 5. Conclusiones

Tras la realización de la práctica, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. El problema propuesto en la Sección 1.2 se ha resuelto numéricamente mediante el método de los elementos finitos. De la simulación se han obtenido tensiones, deformaciones y desplazamiento, que han sido contrastados con los valores analíticos. En todos los casos los errores relativos son inferiores al 5 %, por lo que los valores analíticos y numéricos son muy cercanos.
2. Asumiendo un coeficiente de seguridad de 2 y un límite elástico de 176 MPa, se ha calculado analíticamente la carga máxima que puede aplicarse en el extremo libre. Asimismo, tomando como reales los valores de tensión máxima en la galga y en toda la pieza, se han calculado con qué coeficientes de seguridad opera la galga y la pieza en general. Si bien en la sección de la galga el coeficiente de seguridad es cercano a 3, la tensión máxima en la pieza provoca que el coeficiente de seguridad esté en torno a 1,8. Para conseguir que la tensión máxima en la pieza disminuya, debe reducirse la carga aplicada o bien modificar la geometría de la probeta, reduciendo su longitud o aumentando su espesor y/o grosor.
3. Utilizando tres mallas de distinto tamaño máximo de elemento, se han recalculado los errores relativos en tensión, deformación y desplazamiento máximo. En todos los casos los errores relativos son inferiores al 3 %. De igual forma, se ha estudiado el efecto del tamaño máximo de elemento de malla en los tiempos de mallado y cálculo. Una pequeña reducción en el tamaño de elemento de malla implica un aumento considerable de ambos tiempos. En consecuencia, en este caso no está justificado emplear la malla más fina, dado que el aumento en los tiempos de mallado y cálculo no acarrea una variación significativa de los resultados del método.

## Referencias

- [1] SimScale. *Finite Element Method – What Is It? FEM and FEA Explained*. 2022. URL: <https://www.simscale.com/blog/2016/10/what-is-finite-element-method/> (visitado 12-03-2022).
- [2] Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria. «PRÁCTICAS. Simulación de flexión simétrica mediante FEM». Guión de prácticas de laboratorio de la asignatura de Teoría de Estructuras. Feb. de 2022.
- [3] Sandro Salsa. *Partial differential equations in action: from modelling to theory*. Vol. 99. Springer, 2016.