

ชื่อ-สกุล: Solutions

โจทย์ปัญหามีทั้งหมด 6 ข้อ ไม่ได้เรียงตามความยากง่าย สามารถเลือกทำข้อไหนก็ได้

1. ให้ $f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ a, b , และ c เป็นจำนวนเต็ม หากกำหนดให้ $f(1) = 0, 50 < f(7) < 60, 70 < f(8) < 80$ และ $5000k < f(100) < 5000(k+1)$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางจำนวน ข้อใดคือค่าของ k

Solution:

$$\begin{aligned} f(1) &= a+b+c = 0 \\ 50 < f(7) = 49a+7b+c &< 60 \Rightarrow 50 < (48a+6b)+(a+b+c) < 60 & \text{หัก } a+b+c \\ 50 < 48a+6b &< 60 \Rightarrow 50/6 < 8a+b < 10 \therefore 8a+b = 9 \\ 70 < f(8) = 64a+8b+c &< 80 \Rightarrow 70 < (63a+7b)+(a+b+c) < 80 \\ 70 < 63a+7b &< 80 \Rightarrow 10 < 9a+b < 80/7 \therefore 9a+b = 11 \\ 5000k < f(100) = 10000a+100b+c &< 5000(k+1) & \text{หัก } a+b+c \\ 5000k < 19305 &< 5000k+5000 \\ \therefore k = 3 \end{aligned}$$

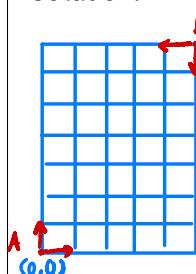
2. ค่าเฉลี่ยของจำนวนนับสามจำนวนมากกว่าจำนวนที่น้อยที่สุดอยู่ 10 และน้อยกว่าจำนวนที่มากที่สุดอยู่ 15 ถ้าค่ามัธยฐานของทั้งสามจำนวนเท่ากับ 5 และผลรวมของทั้งสามจำนวนเท่ากับเท่าไร

Solution: ให้จำนวนนับสามจำนวน เป็น a, b, c โดยที่ $a \leq b \leq c$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{a+b+c}{3} - a &= 10 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} - a = 10 \Rightarrow c - 2a = 20 \\ \cdot c - \frac{a+b+c}{3} &= 5 \Rightarrow c - \frac{a+b+c}{3} = 5 \Rightarrow 2c - a = 20 \\ \cdot \text{มัธยฐาน} &= b = 5 \quad \downarrow \\ a &= -10, c = 5 \\ a+b+c &= -10+5+5 = 0 \end{aligned}$$

3. วัตถุ A และ B เคลื่อนที่พร้อมๆ กันในระบบแกนพิกัดฉาก โดยการเคลื่อนที่แต่ละครั้งจะมีความยาว 1 หน่วย วัตถุ A เริ่มที่ $(0, 0)$ และสามารถเคลื่อนไปในทิศบนและขวาเท่านั้น โดยที่แต่ละทิศมีความน่าจะเป็นเท่าๆ กัน ส่วนวัตถุ B เริ่มที่ $(5, 7)$ และสามารถเคลื่อนไปในทิศลงและซ้ายเท่านั้น โดยที่แต่ละทิศมีความน่าจะเป็นเท่าๆ กันเช่นกัน ข้อใดคือการประมาณค่าที่ใกล้เคียงที่สุดของความน่าจะเป็นที่วัตถุทั้งสองจะเคลื่อนมาเจอกัน

Solution:



ถ้า A และ B เดินกันไปในทิศทางเดียวกัน ให้ A ไปได้ $\binom{12}{5}$ ครั้ง \rightarrow กับ \uparrow B ไปได้ $\binom{12}{7}$ ครั้ง \leftarrow กับ \downarrow
เส้นทางที่เดินจาก A ไป B จะมี 5 ขั้นตอนด้วย หมายความ 5 ครั้ง[↑] และ 7 ครั้ง[→] ($\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ 1111111)
 \therefore จำนวนวิธี = $\frac{12!}{5!7!} = n(E)$

$n(S)$: จำนวนวิธีที่ A และ B เดินได้ความยาวรวม = 12 หน่วย
(แต่อาจไม่พบกัน)

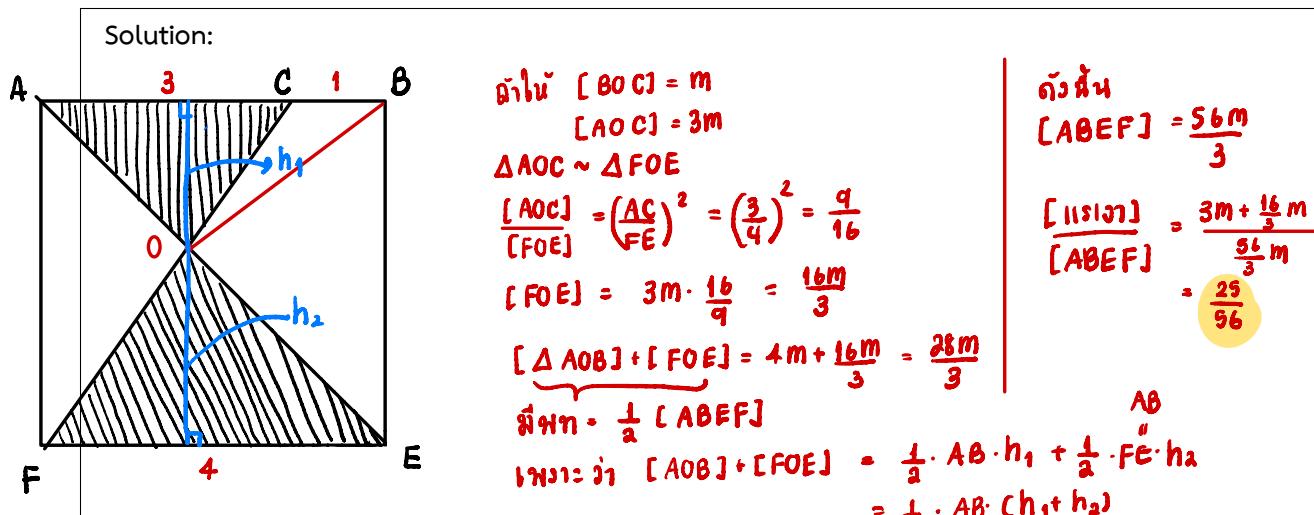
จำนวนวิธี = $2^6 \cdot 2^6$ (แต่ละคนเดิน 6 หน่วย)

จำนวนวิธี = $2^6 \cdot 2^6$ (แต่ละคนเดิน 2 หน่วย)

$$\therefore P(E) = \frac{\frac{12!}{5!7!}}{2^6 \cdot 2^6} \approx 0.20$$

$$= n(S)$$

4. จากรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มี $AC : BC = 3 : 1$ จงหาสัดส่วนของพื้นที่แรเงาต่อพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่นี้



5. จำนวนจริงบวกสี่จำนวน a, b, c และ d มีผลคูณเท่ากับ $8!$ และทั้งสี่จำนวนสอดคล้องกับระบบสมการ

$$ab + a + b = 524$$

$$bc + b + c = 146$$

$$cd + c + d = 104$$

จงหาค่าของ $a + b + c + d$

Solution:

$$ab + a + b + 1 = 525 \rightarrow (a+1)(b+1) = 525 = 5^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad -(1)$$

$$bc + b + c + 1 = 147 \rightarrow (b+1)(c+1) = 147 = 3 \cdot 7^2 \quad -(2)$$

$$cd + c + d + 1 = 105 \rightarrow (c+1)(d+1) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad -(3)$$

$$abcd = 8!$$

$$\text{จาก } (1) \text{ และ } (2) : (b+1) | 21 \Rightarrow b+1 = \begin{matrix} X, 3, 7, 21 \\ b > 0 \end{matrix}$$

$$\textcircled{1} \quad b+1=3 \rightarrow a+1=175 \rightarrow c+1=49 \rightarrow d+1=2 \quad \text{ปปมค}$$

$$\textcircled{2} \quad b+1=7 \rightarrow a+1=75 \rightarrow c+1=21 \rightarrow d+1=5 \quad \text{ปปมค}$$

$$b=6 \quad a=74 \quad c=20 \quad d=4$$

$74 \nmid 8!$

$$\textcircled{3} \quad b+1=21 \rightarrow a+1=25 \rightarrow c+1=7 \rightarrow d+1=15 \quad \Rightarrow a+b+c+d = 64$$

Notes: check: $abcd = 8!$