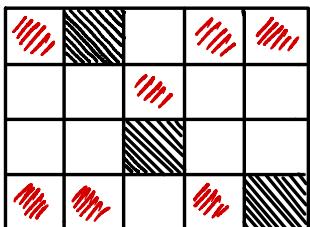


ชื่อ-สกุล: Solutions

Theme: Combinatorics หลักการนับเบื้องต้น, โจทย์ปัญหาเชาว์ – การนับ การจัดกลุ่ม, หลักรังนกพิราบ (pigeon hole principle), หลักเพิ่มเข้าตัวออก (principle of inclusion and exclusion)

- พิจารณาตารางด้านล่าง มีช่องสามซี่ของที่ถูกแรเงาไว้แล้วดังรูป จะหาว่าต้องแรเงาอย่างน้อยที่สุดอีกกี่ช่อง ตารางนี้จะมีแกนสมมาตร 2 แกน

Solution:



สูตรคิดง่ายๆ (ในชั้นเรียน) ที่ 2 แกน สมมาตร
เพียง 2 แกน ก็ 2 แนว แนวตั้ง แนวแนวนอน
เราสามารถหักลบได้ 2 ช่อง

- มีนาเก็บเมษาเล่นเกมกัน โดยกฎติกาของเกมมีดังนี้ มีนาจะเลือกจำนวนนับหนึ่งจำนวนในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง 999 คูณจำนวนนั้นด้วย 2 และส่งต่อให้เมษา เมื่อเมษาได้รับ เมษาจะบวกจำนวนที่ได้รับด้วย 50 แล้วส่งกลับไปให้มีนา ทั้งสองคนทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ คนที่ชนะคือคนสุดท้ายที่ผลิตตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่า 1000 ถ้าให้ N เป็นจำนวนเริ่มต้นที่น้อยที่สุดที่ทำให้มีนาเป็นผู้ชนะ จงหาผลบวกเลขโดดของ N

Solution:

$$\begin{aligned}
 N &\rightarrow 2N \rightarrow 2N+50 \rightarrow 4N+100 \rightarrow 4N+150 \rightarrow 8N+300 \rightarrow 8N+350 \rightarrow 16N+700 \\
 &\text{หมายเหตุ: } N \text{ ที่น้อยที่สุด } \Rightarrow 16N+700 \geq 1000 \\
 &\text{หมายเหตุ: } 16N+700 \geq 1000 \Rightarrow 16N \geq 300 \Rightarrow N \geq 18.75 \\
 &\therefore N = 19 \quad \text{โดย } 16N+700 = 16 \times 19 + 700 = 300 + 16 \times 19 = 300 + 304 = 604
 \end{aligned}$$

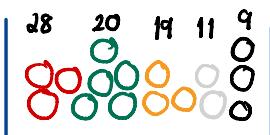
- ให้ $X = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ จงหาจำนวนสับเซ็ต $\{a, b\}$ ของ X โดยที่ $a < b$ และ $a \cdot b$ เป็นพหุคูณของ 5

Solution:

$$\begin{aligned}
 X &= \{1, 2, 3, \dots, 1000\} \\
 &\text{จำนวน subsets } \{a, b\} \text{ ที่ } 5 \mid ab \\
 &= \text{จำนวน subsets } \{a, b\} \text{ ที่ } 5 \nmid ab - \text{จำนวน subsets } \{a, b\} \text{ ที่ } 5 \nmid ab \\
 &= \binom{1000}{2} - \binom{800}{2} \\
 &= \frac{1000 \cdot 999}{2} - \frac{800 \cdot 799}{2} \\
 &= 500 \cdot 999 - 400 \cdot 799 \\
 &= 499,500 - 319,600 \\
 &= 179,900 \quad \#
 \end{aligned}$$

4. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 28 ลูก สีเขียว 20 ลูก สีเหลือง 19 ลูก สีขาว 11 ลูก และสีดำ 9 ลูก จงหาจำนวนลูกบอลที่น้อยที่สุดที่ต้องหยิบออกมากที่ทำให้เรามั่นใจว่าจะมีได้ลูกบอลอย่างน้อย 15 ลูก ที่มีสีเหมือนกันหมด

Solution:

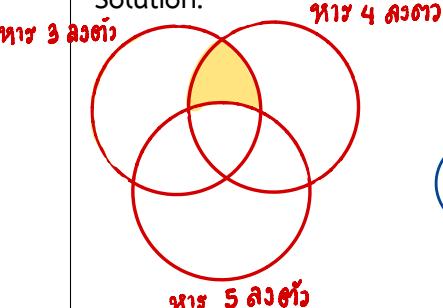


คิดถึง Worse-case scenario (กรณีที่ใช้คร่าวๆ ก็ได้)

- หยิบสีดำได้ก็ 9 ลูก + สีขาว 11 ลูก
 - สีแดง 14 ลูก
 - สีเขียว 14 ลูก
 - สีเหลือง 14 ลูก
- $\left. \begin{array}{l} 9+11+14+14+14+1 \\ = 63 \text{ ลูก} \end{array} \right\}$
- + 1 ลูก ซึ่งมาจาก
แดง/เขียว/เหลือง

5. มีจำนวนนับที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 2022 ทั้งหมดกี่จำนวนที่หารด้วย 3 และ 4 ลงตัวแต่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

Solution:



$$\left\lfloor \frac{2022}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{60} \right\rfloor = 168 - 33 = 135$$



6. (Challenging) พ้าเล่นเกมไทยวันเกิดของส้มในเดือนกันยายนซึ่งเป็นเดือนเกิดของส้มพอดี ถ้าพ้าไทยวันที่เกิดของส้มถูกส้มจะให้ข้อมูลกับพ้า ซึ่งในเดือนกันยายน ส้มจะพูดความจริงในวันที่ตรงกับวันเกิดของเท่านั้น และโกหกในวันอื่นๆ ทั้งหมด โดยสัมพูดกับพ้าในช่วง 3 วันที่ติดต่อกันในเดือนกันยายน ดังนี้
- \downarrow
แปลงวันเดียวกับส้มพูดจริง

- (1) – • วันแรก สัมพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 7, 11, 14, 18, 20, 23, 26 และ 29”
- (2) – • วันต่อมา สัมพูดว่า “วันนี้เป็นวันที่ 6, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 28 หรือ 29”
- (3) – • และวันสุดท้าย สัมพูดว่า “ฉันพูดโกหกในวันที่ 5, 10, 13, 16, 17, 22, 25 และ 28”

จากข้อมูลที่ให้มา วันเกิดของส้มคือวันที่เท่าไหร่ในเดือนกันยายน

Solution: เราต้องพิจารณา เป็น กันๆ ไป

- case1 • สัมภิงค์ทั้ง 3 วัน $\rightarrow (1) \text{ และ } (3)$ นอกจาก ส้มพูดจริง วันนั้นใน set $\{7, 11, 14, 18, 20, 23, 26, 29\}$
- case2 • สัมภิงค์ วันที่ 1 และ 3 \rightarrow เนตผลเดียว กับกราฟเรอกำไรใน $\cap \{5, 10, 13, 16, 17, 22, 25, 28\}$
กราฟนี้ เป็นไปได้ $= \emptyset$ ซึ่ง เป็นไปได้
- Case 3 • สัมภิงค์ วันที่ 1 และ 2 \rightarrow
 - (1) แปลงว่า วันเกิดสัมภิงค์ใน set $\{7, 11, 14, 18, 20, 23, 26, 29\}$
 - (2) แปลงว่า วันที่ไม่ใช่ $6, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 28$ \Rightarrow 29
เพื่องจากวันถัดไป เป็นวันเกิดสัมภิงค์ (หาร: สัมภิงค์จริง)
ทำให้เรารู้ว่า วันเกิดสัมภิงค์ไม่ใช่ $7, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 23, 24, 26, 27, 29$
 $\therefore \text{สัมภิงค์ } 29$
 - (3) แปลงว่า วันเกิดสัมภิงค์ไม่ใช่ $5, 10, 13, 16, 17, 22, 25$ หรือ 28
เพื่องานน้ำหนัก: ได้ว่า สัมภิงค์ $= 20$

Notes:

- case4 • สัมภิงค์ วันที่ 2 และ 3 \rightarrow เป็นไปไม่ได้, ลองคิด แบบกรณีที่ 3 ดู !!