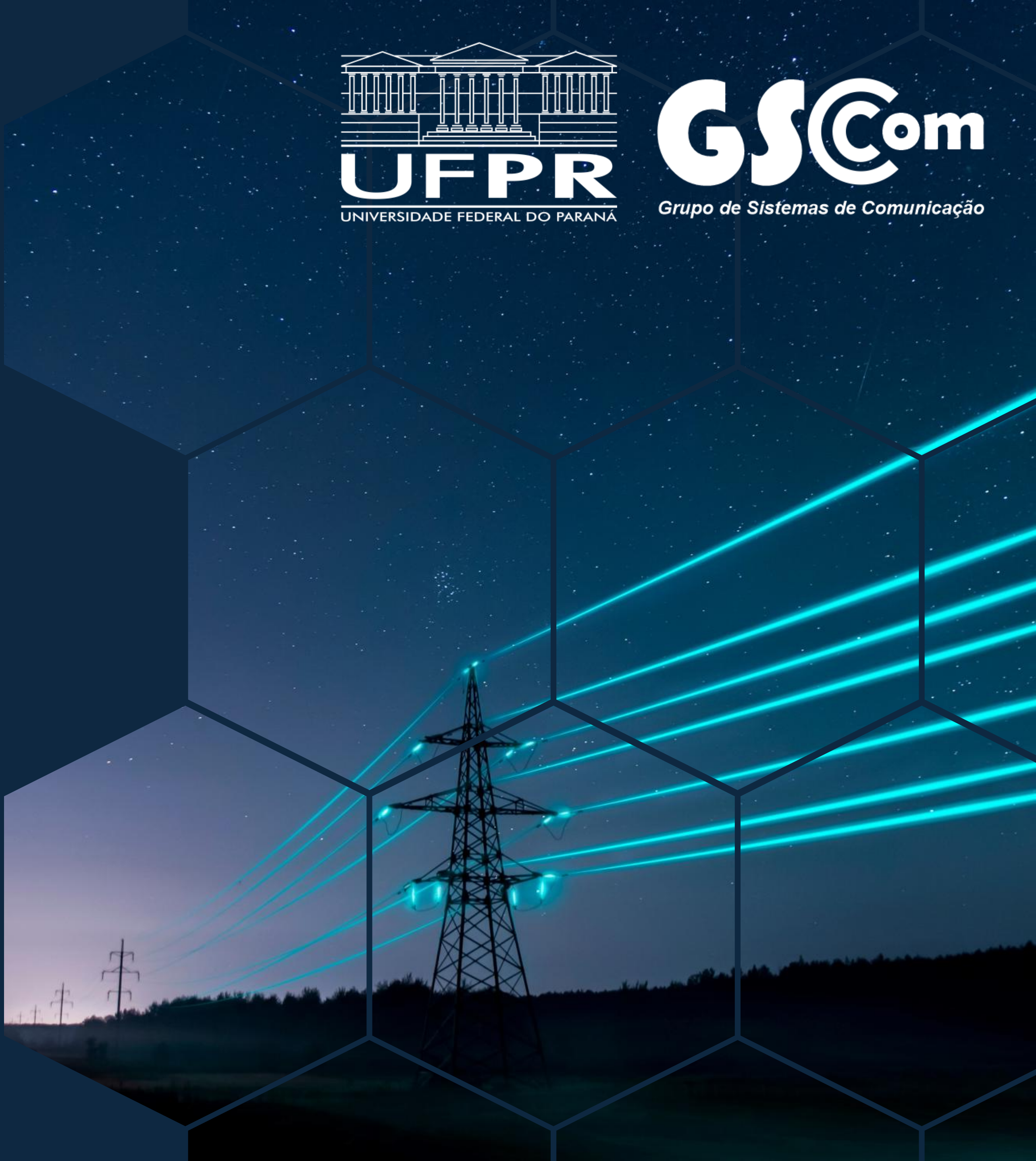
Comunicação através da Rede de Energia Elétrica

Desempenho em Sistemas de Comunicação: Detector Ótimo para Sinalização Polar Binária

Ândrei Camponogara

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica



Introdução

- **Comunicação analógica**:
  - Transmite um número infinito de formas de onda
  - Objetiva elevada fidelidade na reprodução da forma de onda transmitida no receptor
  - O critério usual de avaliação de desempenho é a **SNR** no receptor

- **Comunicação digital**:
  - Transmite um número finito de formas de onda ou símbolos
  - O objetivo do receptor é identificar quais os símbolos foram transmitidos
  - O critério apropriado de avaliação de desempenho é a **probabilidade de erro de símbolo ou bit**

Sumário

- Limiar de detecção binária
- Filtro receptor ótimo: Filtro casado

Detector Ótimo para Sinalização Polar Binária

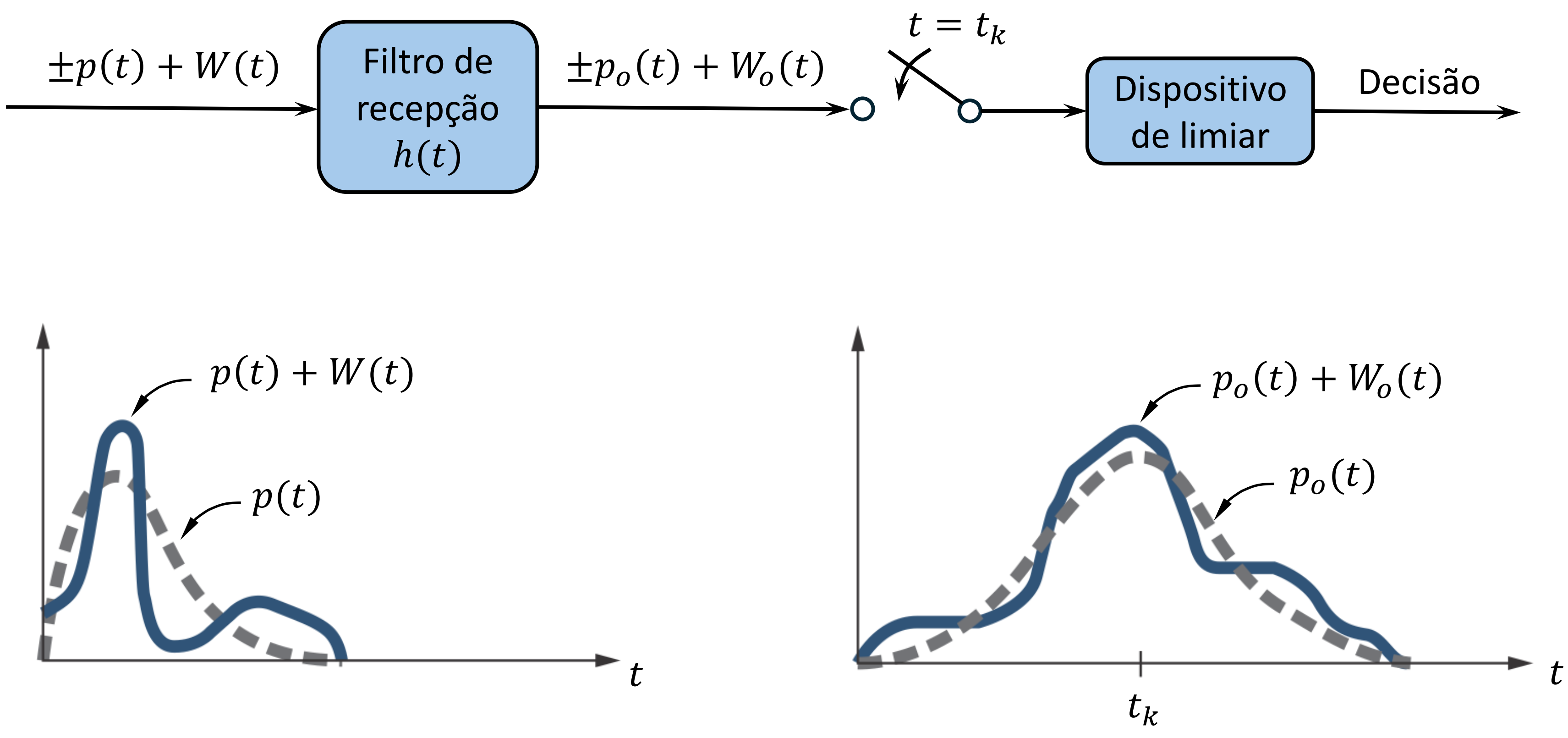
Detector Ótimo para Sinalização Polar Binária

- **Notação**:
  - T_o: Intervalo de símbolo
  - $W(t)$: Ruído aditivo gaussiano branco (*additive white gaussian noise*, AWGN)
  - $h(t), H(f)$: Filtro de recepção

- **Sinal polar binário na saída de um canal AWGN**:

$$Y(t) = \pm p(t) + W(t), \qquad 0 \leq t < T_o$$

Detector Ótimo para Sinalização Polar Binária



Limiar de Deteção Binária

Limiar de Deteção Binária

- Saída do filtro de recepção:

$$Z(t) = \pm p(t) \star h(t) + W(t) \star h(t) = \pm p_o(t) + W_o(t)$$

- **Variável de decisão**:

$$Z(t_k) = \pm p_o(t_k) + W_o(t_k)$$

- Como a entrada do filtro LTI é um processo gaussiano de média zero, a saída

$$W_o(t) = \int_0^t W(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

é também um processo gaussiano de média zero

Limiar de Deteção Binária

- **Definições**:
  - $A_p = p_o(t_k)$: Amplitude de símbolo na saída do filtro de recepção
  - $\sigma_W^2 = \mathbb{E}\{W_o^2(t_k)\}$: Variância (potência, pois $\mathbb{E}\{W_o\} = 0$) do ruído
  - $\rho = A_p/\sigma_W$

- **Decisão de limiar ótima**:

$$\mathrm{dec}\{Z(t_k)\} = \begin{cases} 1, & Z(t_k) \geq 0 \\ 0, & Z(t_k) < 0 \end{cases}$$

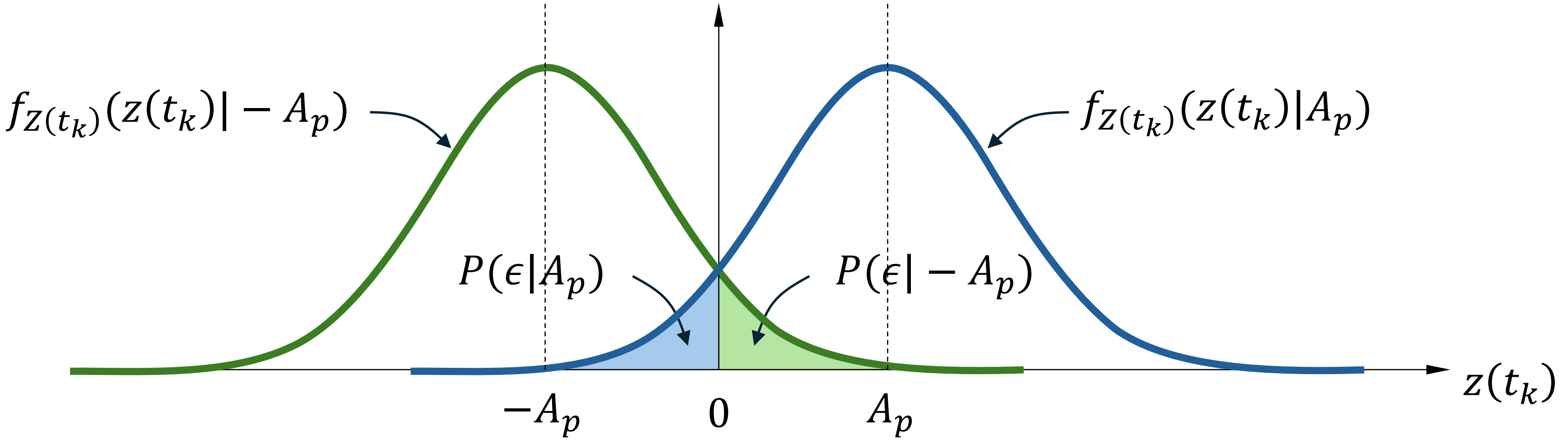
- **Probabilidade de erro de símbolo**:

$$P_e = Q(\rho)$$

Para **minimizar** P_e devemos **maximizar** ρ, pois $Q(\rho)$ decai monotonamente conforme ρ aumenta

Limiar de Deteção Binária

- **Variável de decisão**: $Z(t_k) = \pm A_p + W_o(t_k)$



- **Probabilidade de erro**:

$$P_e = P(\epsilon, A_p) + P(\epsilon, -A_p) = P(\epsilon|A_p)P(A_p) + P(\epsilon|-A_p)P(-A_p)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - Q\left(\frac{0 - A_p}{\sigma_W}\right)\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{0-(-A_p)}{\sigma_W}\right) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{A_p}{\sigma_W}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{A_p}{\sigma_W}\right) = Q(\rho)$$

Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- Relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio*, SNR) na saída do filtro:

$$\rho^2 = \frac{p_o^2(t_k)}{\mathbb{E}\{W_o^2(t_k)\}} = \frac{p_o^2(t_k)}{\sigma_W^2}$$

- Pulso de transmissão no instante t_k:

$$p_o(t_k) = \mathcal{F}^{-1}\{(P(f)H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t_k} df$$

- Média do ruído filtrado:

$$\mathbb{E}\{W_o(t)\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^t W(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^t \mathbb{E}\{W(\tau)\}h(t-\tau)d\tau = 0$$

- Variância do ruído filtrado:

$$\sigma_W^2 = \mathbb{E}\{W_o^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_W(f)|H(f)|^2 df$$

Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- SNR no domínio da frequência:

$$\rho^2 = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t_k} df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_W(f)\left|H(f)\right|^2 df}$$

- Definição:

$$F(f) = H(f)\sqrt{S_W(f)}, \qquad G(f) = \frac{P(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t_k}}{\sqrt{S_W(f)}}$$

- Aplicação da **desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$\rho^2 = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(f)G(f)df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|G(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^2 df}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|P(f)|^2}{S_W(f)}df$$

Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- A igualdade ocorre se e somente se $F(f) = C \cdot G^*(f)$, ou seja

$$H(f)\sqrt{S_W(f)} = C\left(\frac{P(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t_k}}{\sqrt{S_W(f)}}\right)^* = C\,\frac{P(-f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_k}}{\sqrt{S_W(f)}}$$

- A SNR é maximizada se e somente se

$$H(f) = C\,\frac{P(-f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_k}}{S_W(f)}$$

em que C é uma constante arbitrária

- Note que o filtro casado $H(f)$ (resultado ótimo) depende de vários fatores importantes:
    - A PSD do ruído, $S_W(f)$
    - O instante de amostragem t_k
    - A forma do pulso $P(f)$

Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- SNR maximizada:

$$\rho^2 \leq \rho^2_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_W(f)} df$$
$$= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df \; = \frac{2E_p}{N_0}$$

em que $S_W(f) = N_0/2$ para o canal de ruído branco e E_p é a energia de $p(t)$

Filtro casado:

$$H(f) = C'P(-f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_k}, \qquad C' = 2C/N_0$$

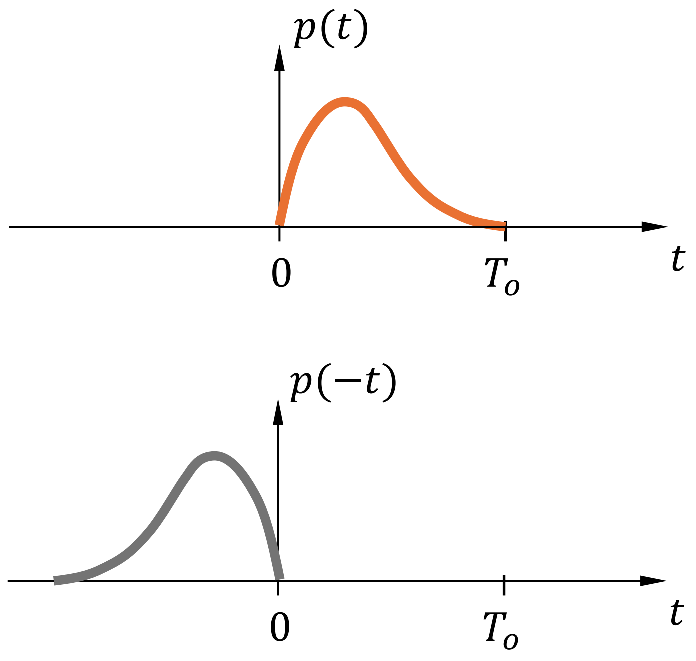
- Resposta ao impulso unitário:

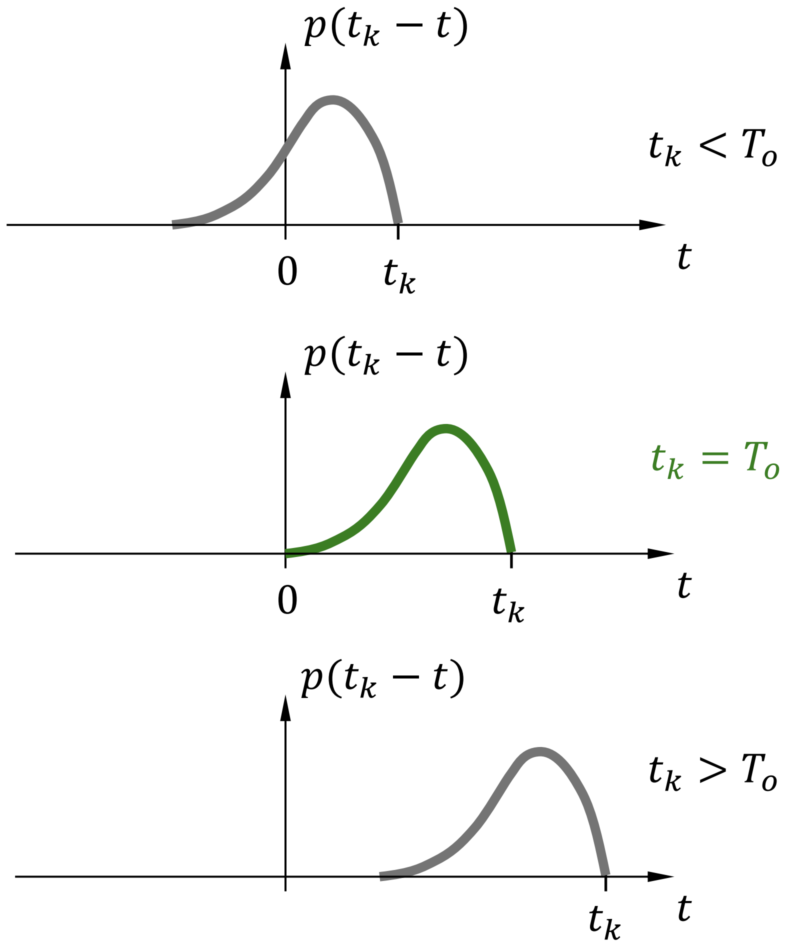
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{C'P(-f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_k}\right\} = C'p(t_k - t)$$

em que $p(-t) \leftrightarrow P(-f)$ e $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t_k}$ representa o atraso temporal t_k

Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- Por que a melhor escolha do tempo de amostragem é $t_k = T_o$?

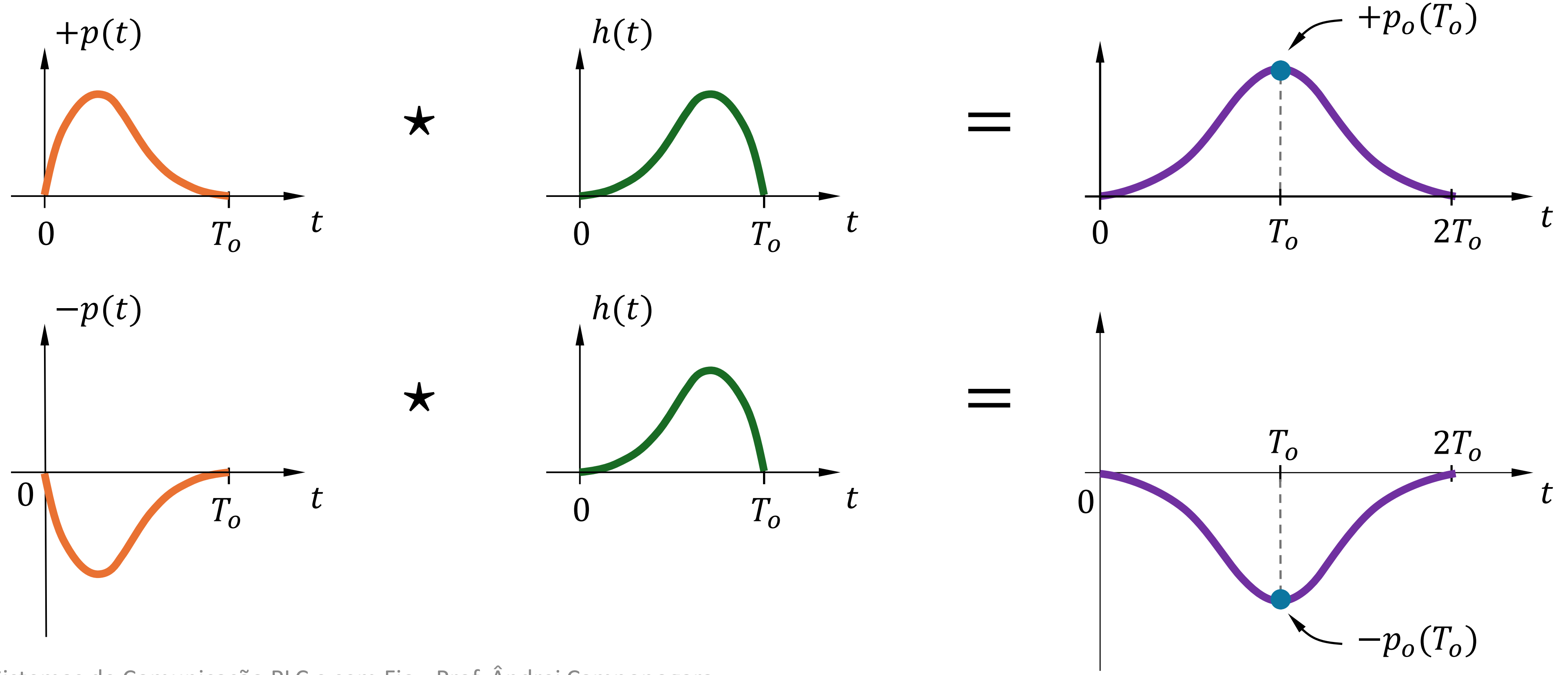




Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- Como o ganho C' não afeta a SNR ρ, escolhe-se $C' = 1$ e, como resultado, tem-se o seguinte filtro casado:

$$h(t) = p(T_o - t) \leftrightarrow H(f) = P(-f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T_o}$$



Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- Saída do filtro casado:

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= \pm p(t) \star h(t) + W(t) \star h(t) \\
&= \underbrace{\pm \int_0^{T_o} p(\tau) h(t-\tau) d\tau}_{\text{Convolução}} + \int_0^{T_o} W(\tau) h(t-\tau) d\tau \\
&= \underbrace{\pm \int_0^{T_o} p(\tau) p(T_o - t + \tau) d\tau}_{\text{Correlação}} + \int_0^{T_o} W(\tau) p(T_o - t + \tau) d\tau
\end{aligned}
$$

- Amostrando $Z(t)$ com período $t_k = T_o$, tem-se

$$
\begin{aligned}
Z(T_o) &= \pm \int_0^{T_o} p^2(\tau) d\tau + \int_0^{T_o} W(\tau) p(\tau) d\tau \\
&= \pm E_p + W_o(T_o)
\end{aligned}
$$

Filtro Receptor Ótimo: Filtro Casado

- Note que:
  - $h(t) = p(T_o - t) \longrightarrow h(t-\tau) = p\big(T_o - (t-\tau)\big) = p(T_o - t + \tau)$
  - $p_o(T_o) = \int_0^{T_o} p(\tau)p(\tau)d\tau = \int_0^{T_o} p(\tau)^2 d\tau = E_p$ é a energia de $p(t)$
  - **A correlação entre duas funções é máxima quando essas funções são iguais!**

- O filtro casado leva a $\rho_{\max}$, assim como à **mínima probabilidade de erro**

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right)$$

Exemplo: Modulação 2-PAM

Importante: A alteração da potência de transmissão é normalmente feita na constelação e, portanto, os *pulsos de transmissão e recepção tem energia unitária*

- Energia média do símbolo (assumindo equiprobabilidade) na saída do filtro casado:

$$\mathcal{E}_s = E_p \mathbb{E}\{X^2\} = E_p \sum_{m=1}^{2} x_m^2 P(X = x_m) = E_p \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} x_m^2$$

$$= \frac{E_p}{2} \cdot \left[\left(-\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right] = E_p \frac{d^2}{4}$$

- SNR:

$$\rho_{\max}^2 = \frac{\mathcal{E}_s}{\sigma_W^2} = \frac{2\mathcal{E}_s}{N_0} = \frac{2E_p(d^2/4)}{N_0}\bigg|_{E_p} = \frac{d^2}{2N_0}$$

Leitura Complementar

Leitura Complementar

- B. P. Lathi e Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos*, 4ª Edição, LTC, 2019, p. 467 − 472