# TE903 – Comunicação Digital

**Exercício de Simulação Nº 5**
**Estimação da BER de um Sistema 16-QAM com Equalização**
(devolver relatório em 10/06/2025)

---

26 de maio de 2025 Evelio M. G. Fernández

O trabalho consiste em estimar a taxa de erro de bits na recepção do equivalente em banda base de um sistema 16-QAM com equalização de canal como mostrado na Fig. 1, onde $P(z)$ representa a função de transferência do canal seletivo em frequência e $C(z)$ é a função de transferência do equalizador a ser implementado. Esse equalizador será do tipo forçamento a zero (ZF, *Zero Forcing*) usando-se o critério de erro médio quadrático para obtenção dos seus coeficientes.

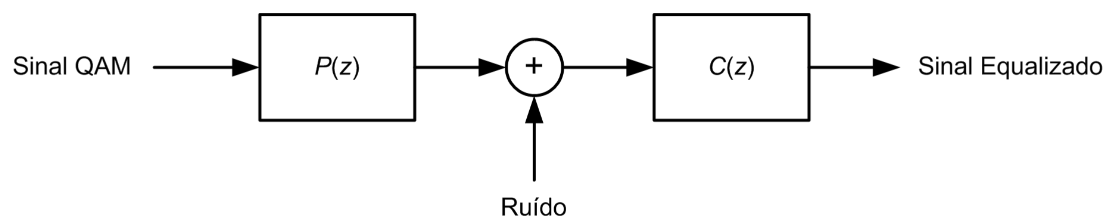


Figura 1: Equivalente em Banda Base do Sistema com Equalização.

Será utilizado o script *ber_ equivalenteBB_ 16QAM_ multipath.m*, disponível na pasta Simulação, como ponto de partida para o exercício de simulação. Nesse script, a resposta impulsiva correspondente a $P(z)$ é suposta como sendo conhecida pelo receptor e dada pela variável ISI_channel = $[0.19+0.56j \;\; 0.45-1.28j \;\; -0.14-0.53j \;\; -0.19+0.23j \;\; 0.33+0.51j]$. Para definir o número de derivações do equalizador considere inicialmente $N_1 = 2$ e $N_2 = 5$.

**O relatório deve conter:**

1. Código gerado para realizar a simulação;
2. Uma figura contendo a função de transferência do canal com distorção, a função de transferência do equalizador implementado e a função de transferência conjunta canal-equalizador;
3. Diagrama da constelação recebida para $E_b/N_0 = 15\,\text{dB}$;

4. Uma figura com as curvas de desempenho de erro (BER vs. $E_b/N_0$). No mesmo gráfico mostrar três curvas: considerando somente canal Gaussiano (fazendo ISI_channel = 1), considerando o canal com distorção sem equalização e por fim, considerando o canal com distorção com equalização.

Altere os valores de $N_1$ e/ou $N_2$ de modo a melhorar o desempenho do equalizador. Apresente novamente as figuras dos itens 2, 3 e 4 para os novos valores de $N_1$ e/ou $N_2$.

---

## Algumas Considerações sobre a Simulação da Equalização ZF

Na Fig. 1, o canal seletivo em frequência está representado pela função de transferência $P(z)$ de comprimento finito $(L_1 + L_2 + 1)$ dada por:

$$P(z) = \sum_{n=-L_1}^{L_2} p_n z^{-n} = p_{-L_1} z^{L_1} + \cdots + p_0 + \cdots + p_{L_2} z^{-L_2}, \tag{1}$$

onde $p_0$ é o coeficiente usado como referência na definição da ISI. Na prática $p_0$ representa a derivação de maior amplitude em $P(z)$. No script de simulação os coeficientes do canal são dados na variável ISI_channel:

`ISI_channel=[0.19+0.56j 0.45-1.28j -0.14-0.53j -0.19+0.23j 0.33+0.51j].` (2)

Note que neste caso $p_0 = 0{,}45 - 1{,}28j$, $L_1 = 1$ (um único coeficiente anterior a $p_0$) e $L_2 = 3$ (três coeficientes posteriores a $p_0$), de forma que a função de transferência do canal pode ser escrita como:

$$P(z) = p_{-1} z + p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}. \tag{3}$$

O equalizador será implementado através de um filtro FIR com função da transferência dada por:

$$C(z) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} c_n z^{-n} = c_{-N_1} z^{N_1} + \cdots + c_0 + \cdots + c_{N_2} z^{-N_2}. \tag{4}$$

Então, a função de transferência total do sistema equalizado será dada por:

$$C(z)P(z) = \left( \sum_{n=-N_1}^{N_2} c_n z^{-n} \right) \left( \sum_{n=-L_1}^{L_2} p_n z^{-n} \right), \tag{5}$$

e a resposta impulsiva correspondente será de comprimento $N_1+L_1+N_2+L_2+1$. Os coeficientes da resposta impulsiva podem ser convenientemente expressos por meio de um produto vetor-matriz. Por exemplo, para o caso do exercício de simulação, considerando $N_1 = 2$ e $N_2 = 5$, a função de transferência total do sistema equalizado será dada por:

$$C(z)P(z) = \left(c_{-2}z^2 + \cdots + c_0 + \cdots + c_5 z^{-5}\right)\left(p_{-1}z + p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}\right), \tag{6}$$

e a correspondente resposta impulsiva do sistema equalizado pode ser expressa através do produto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}}, \tag{7}$$

onde no vetor $\mathbf{c}$ são armazenados os coeficientes da resposta impulsiva do equalizador e $\mathbf{P}$ é uma matriz de convolução construída a partir de $P(z)$.

## Solução com mínimos quadrados (LS)

Agora, para tentar forçar a ISI a zero, devemos escolher os coeficientes do equalizador, $\mathbf{c}$, de modo que os coeficientes da resposta impulsiva total do sistema equalizado, escrita anteriormente na forma vetorial como $\mathbf{P} \cdot \mathbf{c}$, sejam todos iguais a zero, exceto o correspondente ao símbolo atual, isto é,

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 & p_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3
\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}
\cdot
\underbrace{\begin{bmatrix}
c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5
\end{bmatrix}}_{\mathbf{c}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{\text{zf}}}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} N_1 + L_1 \\
\vphantom{1} \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} N_2 + L_2
\end{array}
. \tag{8}
$$

Note que o sistema de equações mostrado em (8) possui mais equações do que incógnitas, portanto, em geral não pode ser resolvido de forma exata. Em vez disso, podemos adotar uma abordagem linear de mínimos quadrados para obter os coeficientes do equalizador $\mathbf{c}_{\text{LS}}$ de forma a minimizar o erro médio quadrático $\|\mathbf{P} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{u}_{\text{zf}}\|^2$. A solução deste problema é dada por:

$$
\mathbf{c}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{P}^H \mathbf{P}\right)^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{u}_{\text{zf}}, \tag{9}
$$

onde $(\cdot)^H$ denota a transposta conjugada e $(\cdot)^{-1}$ denota a matriz inversa.

No Matlab, a matriz de convolução $\mathbf{P}$ pode ser obtida usando-se a função *convmtx*. Uma vez determinados os coeficientes em $\mathbf{c}_{\text{LS}}$ sugere-se utilizar a função *filter* para realizar a equalização, descartando-se em seguida as primeiras $L_1 + N_1 + 1$ amostras do sinal de saída do equalizador (transitório do equalizador).