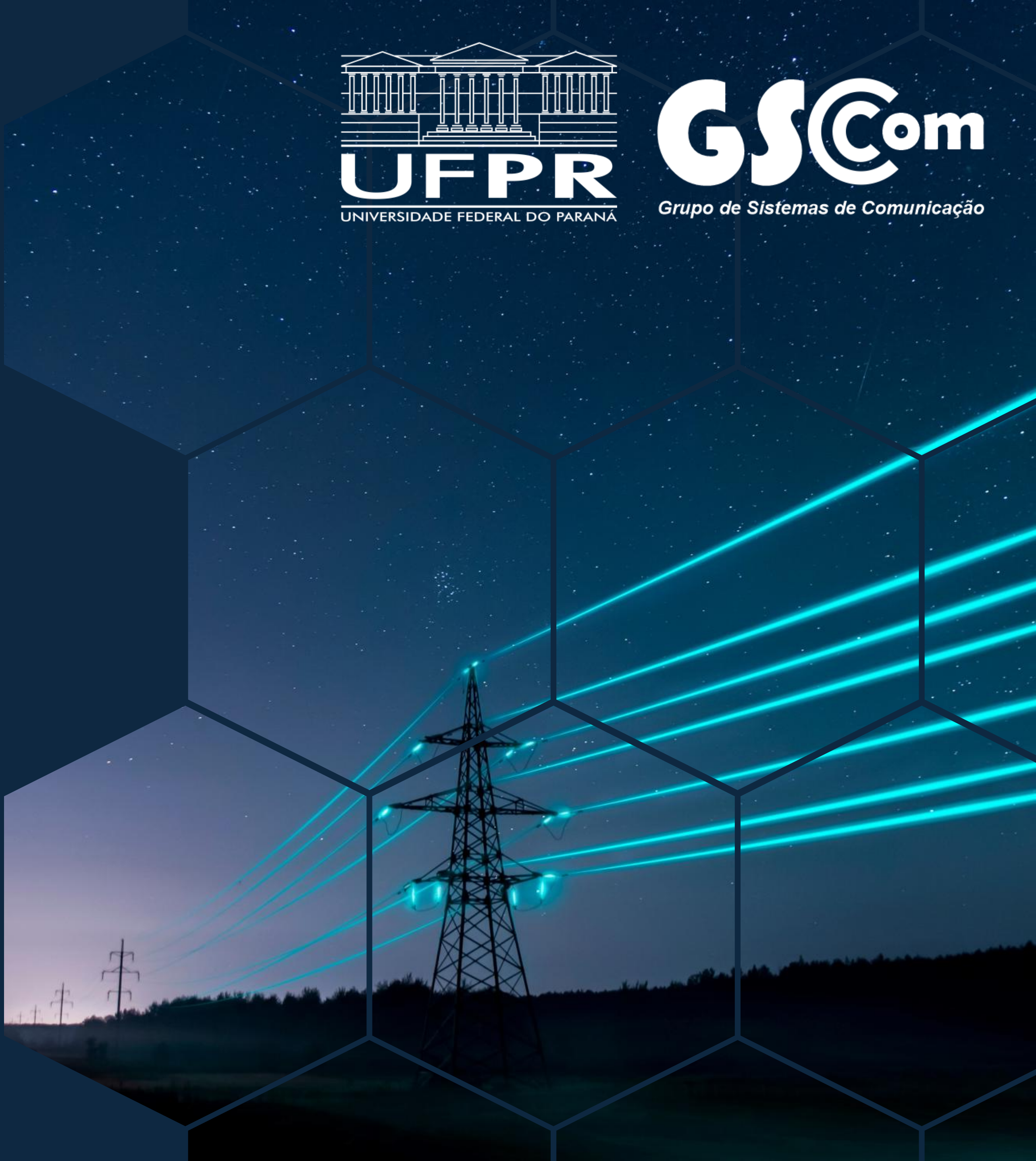
Comunicação através da Rede Energia Elétrica

Modulação Multiportadora

Ândrei Camponogara

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Departamento de Engenharia Elétrica

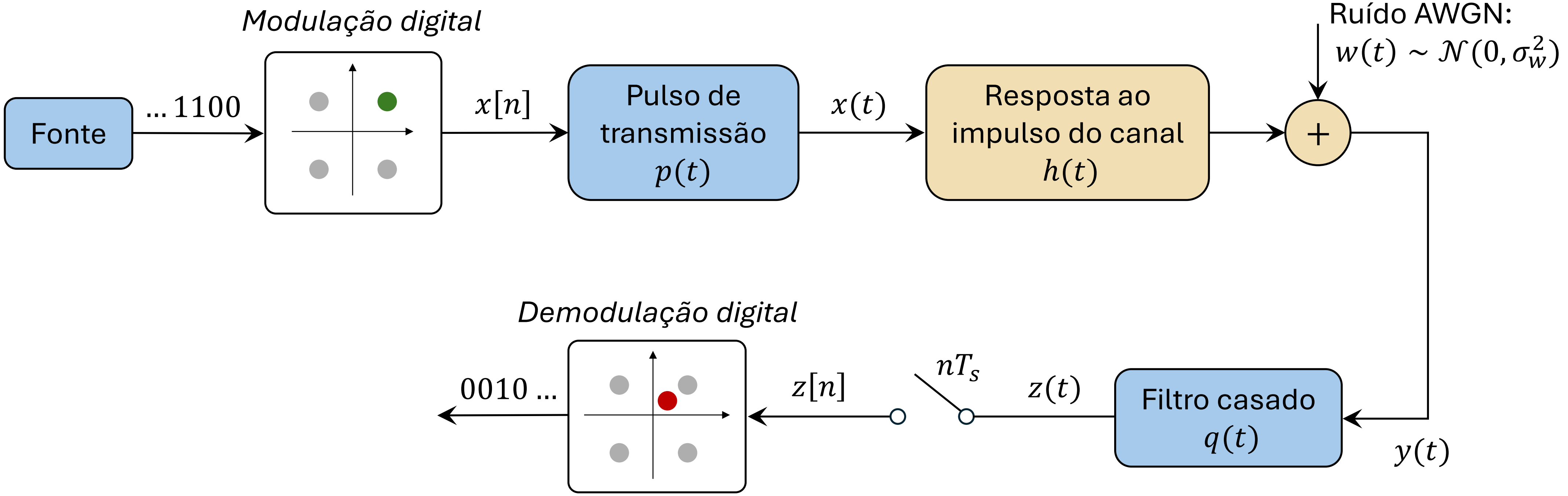


Sumário

- Revisão: modulação monoportadora
- Esquema OFDM
- Estimação de canal
- Esquema DMT

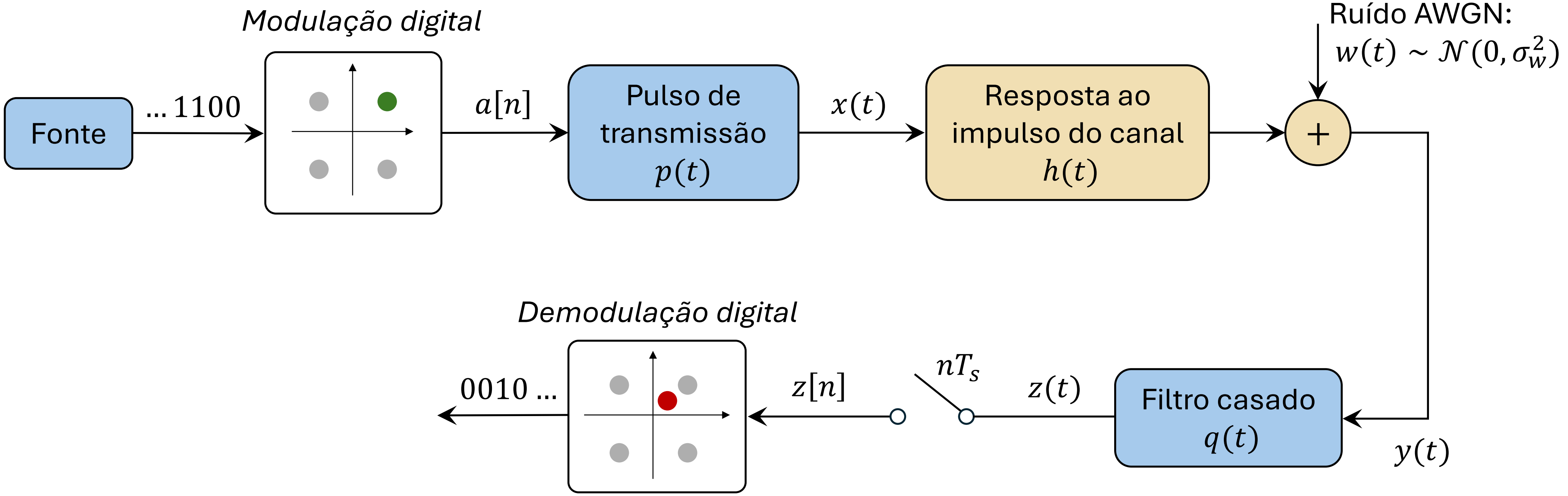
Revisão: Modulação Monoportadora

Revisão: modulação monoportadora



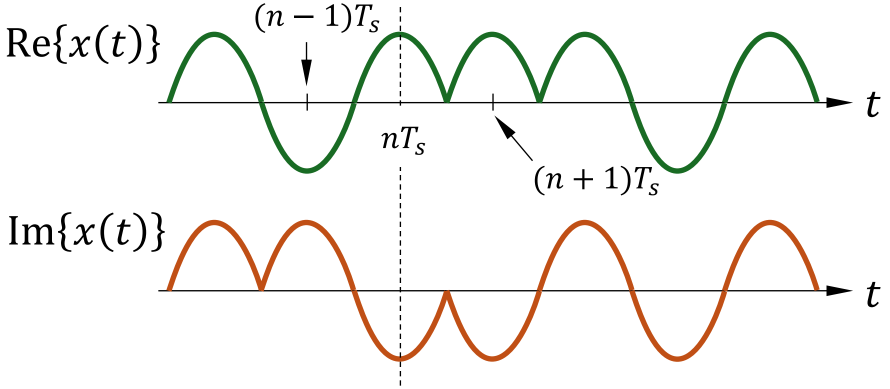
- Notação:
    - $x[n]$: n-ésimo símbolo de uma constelação M-ária
    - T_s: intervalo de símbolo

Revisão: modulação monoportadora

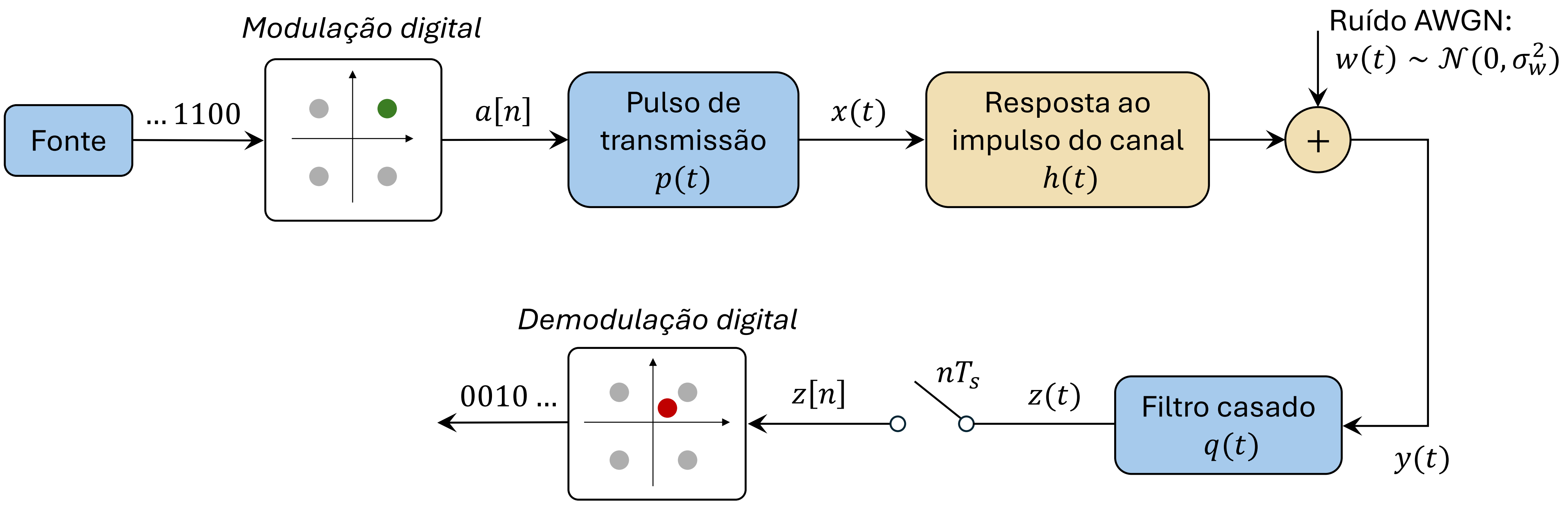


- Sinal de transmissão:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]p(t - nT_s)$$



Revisão: modulação monoportadora



- Sinal recebido na entrada do receptor:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \star h(t) + w(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau + w(t) \end{aligned}$$

Revisão: modulação monoportadora

- Assumindo $h(t) = 1,$ temos a saída do filtro casado:

$$z(t) = y(t) \star q(t)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]p(t - mT_s) \star p^*(-t) + w(t) \star q(t)$$

$q(t)$ é um filtro passa-baixas

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]p(t - mT_s) \star p^*(-t) + v(t)$$

Ruído AWGN banda limitada

- Amostragem em $t = nT_s$:

$$z(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot C \cdot \delta(nT_s - mT_s) + v(nT_s)$$

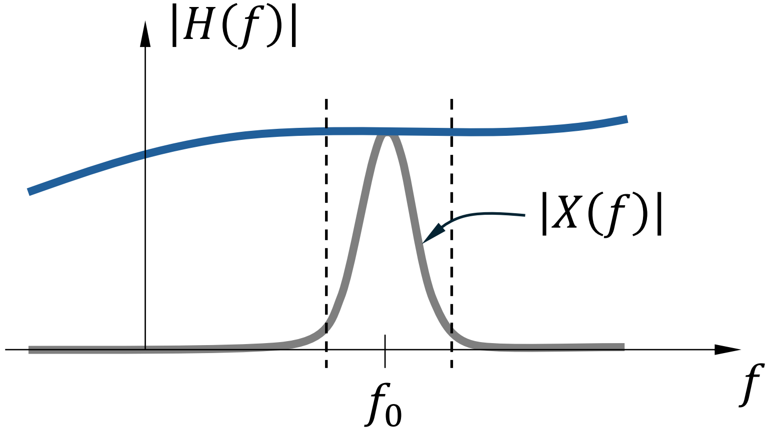
$$z[n] = C \cdot x[n] + v[n]$$

Se a energia de $p(t)$ e $q(t)$ são iguais a um, então $C = 1$

Comunicação Multiportadora

Canais sem Fio Banda Estreita

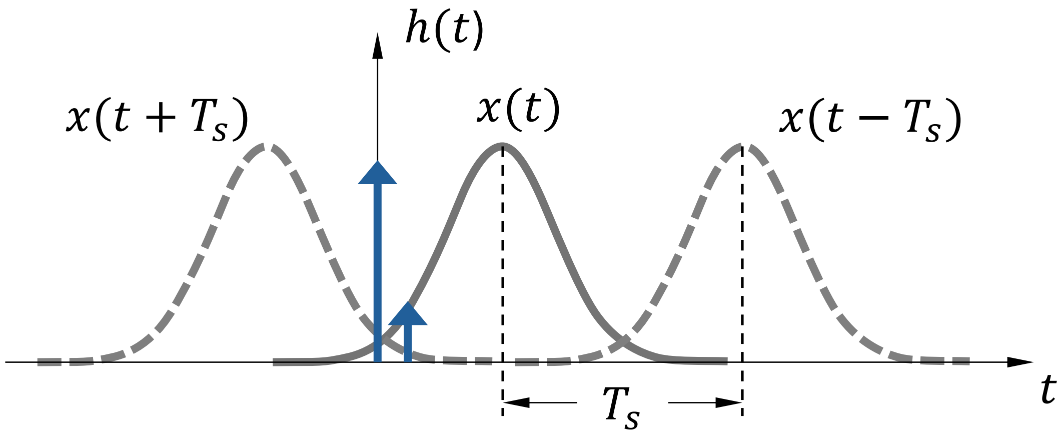
- Domínio da frequência



$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$
$$\approx H(f_0) \cdot X(f)$$

Plano em frequência

- Domínio do tempo:

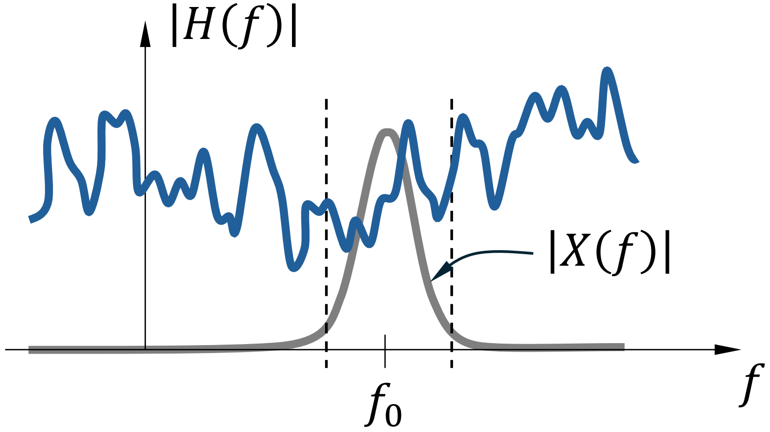


$$y(t) = h(t) \star x(t)$$
$$\approx h(t) \cdot x(t)$$

Sem ISI

Canais sem Fio Banda Larga

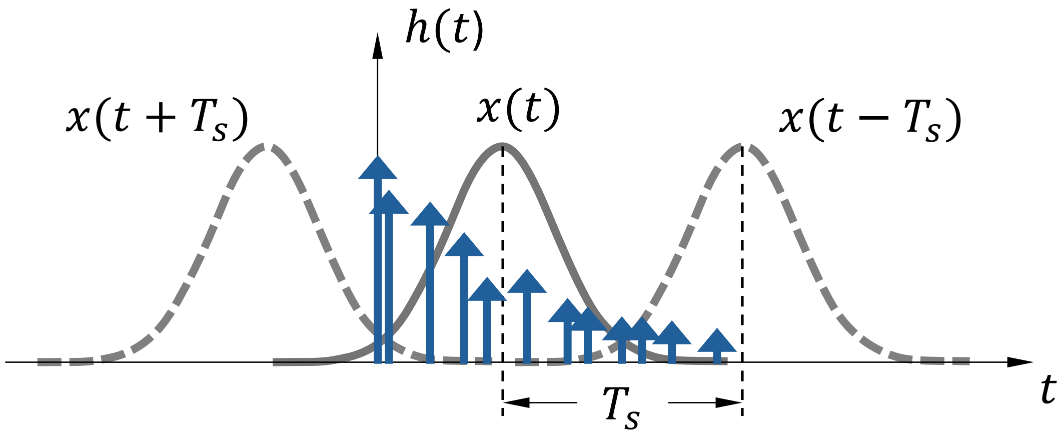
- Domínio da frequência



$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

Seletivo em frequência

- Domínio do tempo:

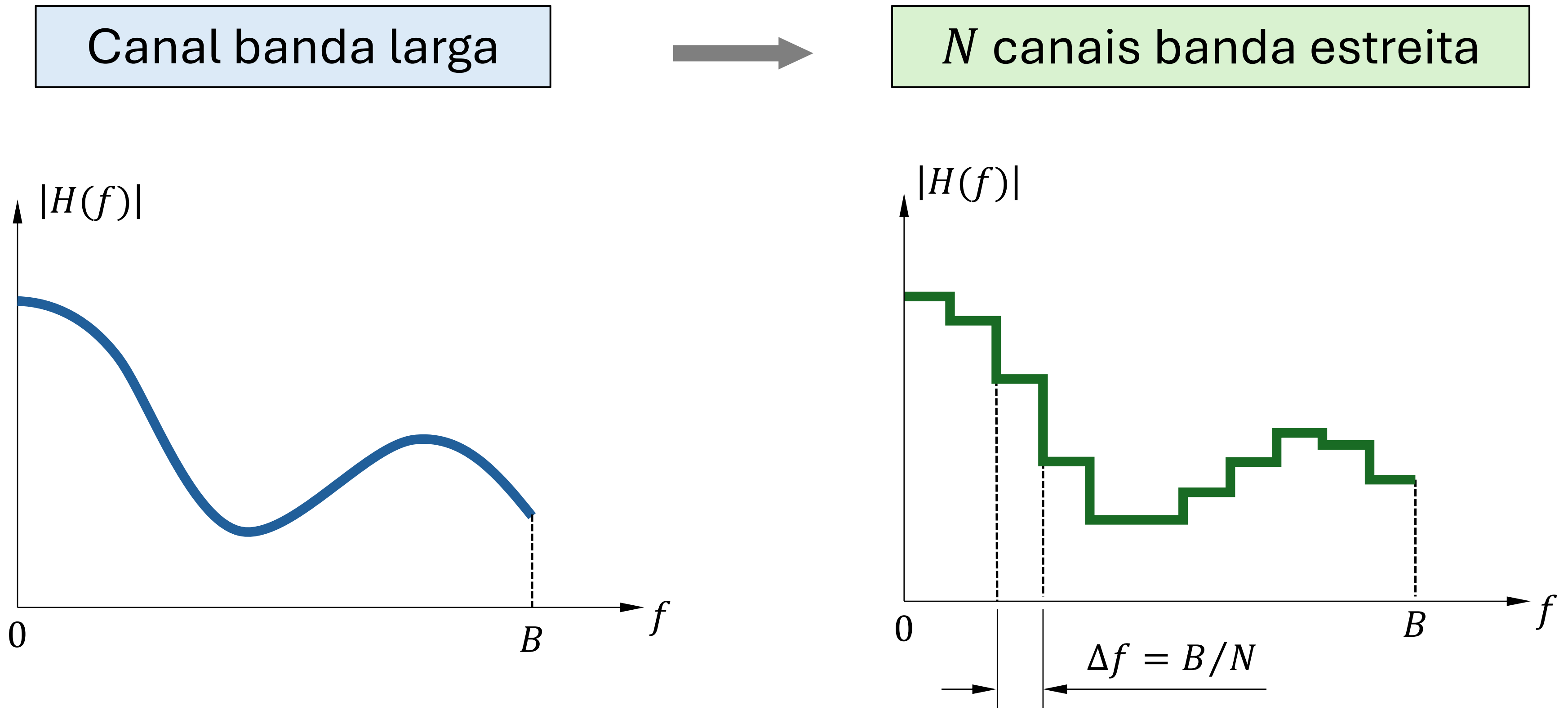


$$y(t) = h(t) \star x(t)$$

Os símbolos sucessivos vão se sobrepor $\Longrightarrow$ **ocorrerá ISI**

Comunicação digital multiportadora

- Transmissão multiportadora ideal:

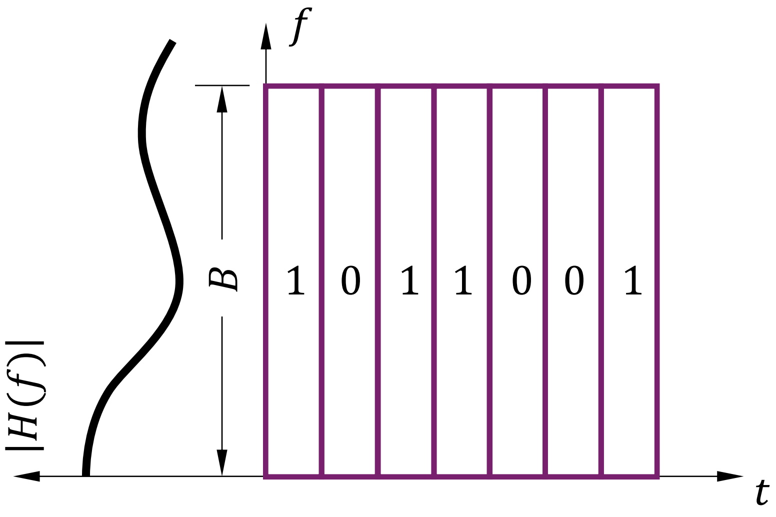


Canal seletivo em frequência e largura de banda B

Canal seletivo em frequência e largura de banda $\Delta f = B/N$

Comparação entre monoportadora e multiportadora

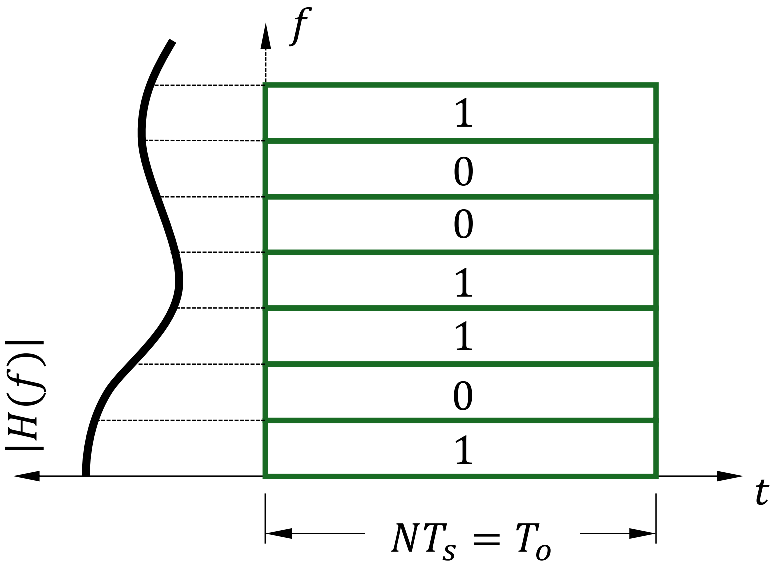
Monoportadora



Um único símbolo possui:

- Largura de banda: B
- Duração no tempo: T_s

Multiportadora



Um único símbolo possui:

- Largura de banda: $B/N = \Delta f$
- Duração no tempo: $NT_s = T_o$

Comunicação digital multiportadora

- As técnicas de modulação multicanal são as mais adequadas para lidar com canais de comunicação que apresentam moderada ou severa ISI porque elas facilitam a formatação espectral do sinal transmitido e o emprego de receptor de máxima verossimilhança
- Aumento considerável de desempenho é alcançável quando o sinal na saída do modulador é projetado em função das características do canal medido $\longrightarrow$ As técnicas de modulação multicanal permitem o modulador se adaptar ao canal
- A origem da modulação multicanal remonta o final da década de 40 do século XX. Em 1948, Claude Shannon publicou o artigo seminal sobre teoria da informação
- Nesse artigo, foram propostos limites de capacidade para transmissão de informações através de um canal AWGN com ISI, a partir do uso de modulação multicanal

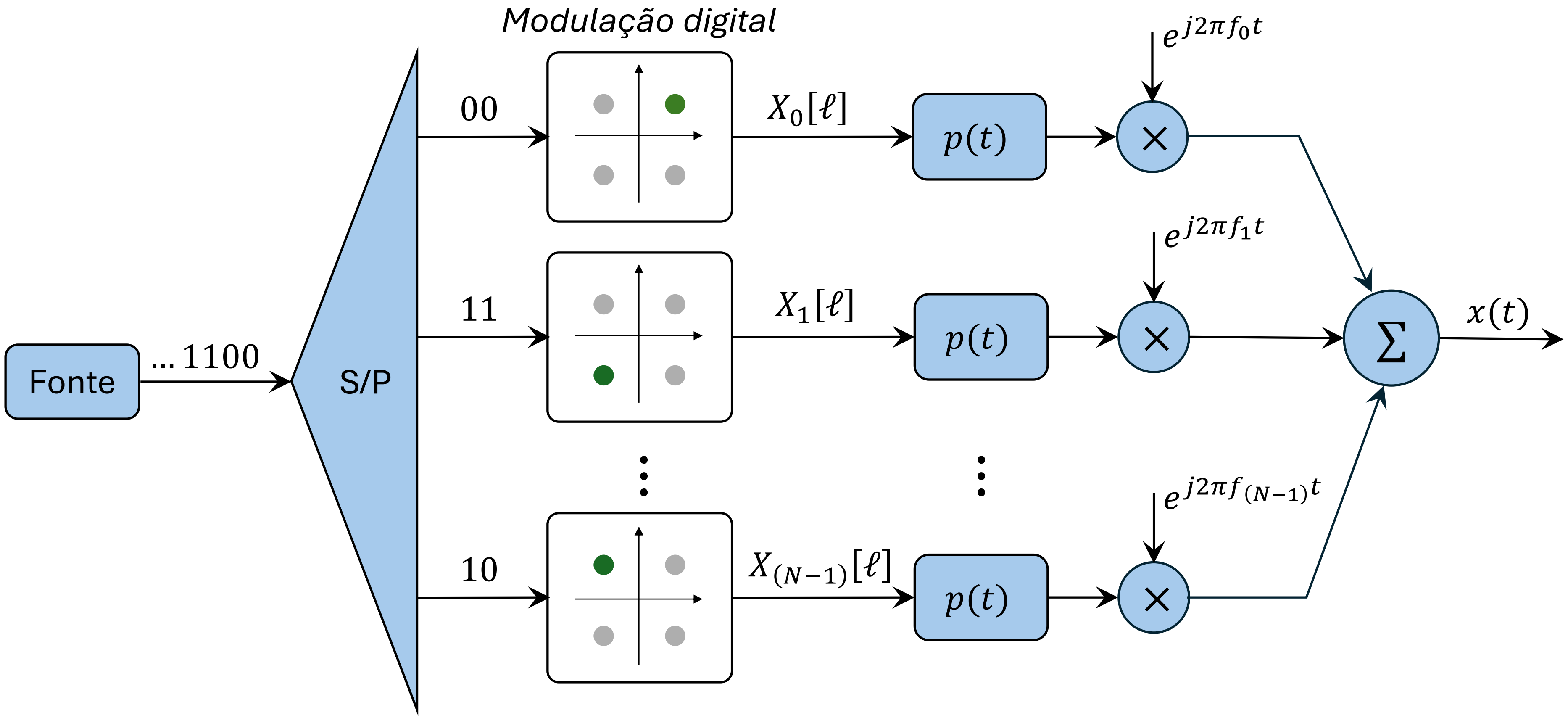
Comunicação digital multiportadora

- Em 1968, Prof. Gallager do MIT adicionou rigor matemático detalhado e popularizou o termo *waterfilling* como formatação otimizada do espectro de transmissão do sinal em função do canal de comunicação e do ruído aditivo

- Após a introdução sobre modulação multicanal e seus avanços teóricos, o grande desafio era introduzir implementações estáveis de múltiplos moduladores em *hardware*. Avanços nessa direção foram observados entre 1960 e 1990

- Apesar da modulação multicanal ser mostrar superior à monocanal, vários problemas de ordem prática tornavam a sua implementação complicada

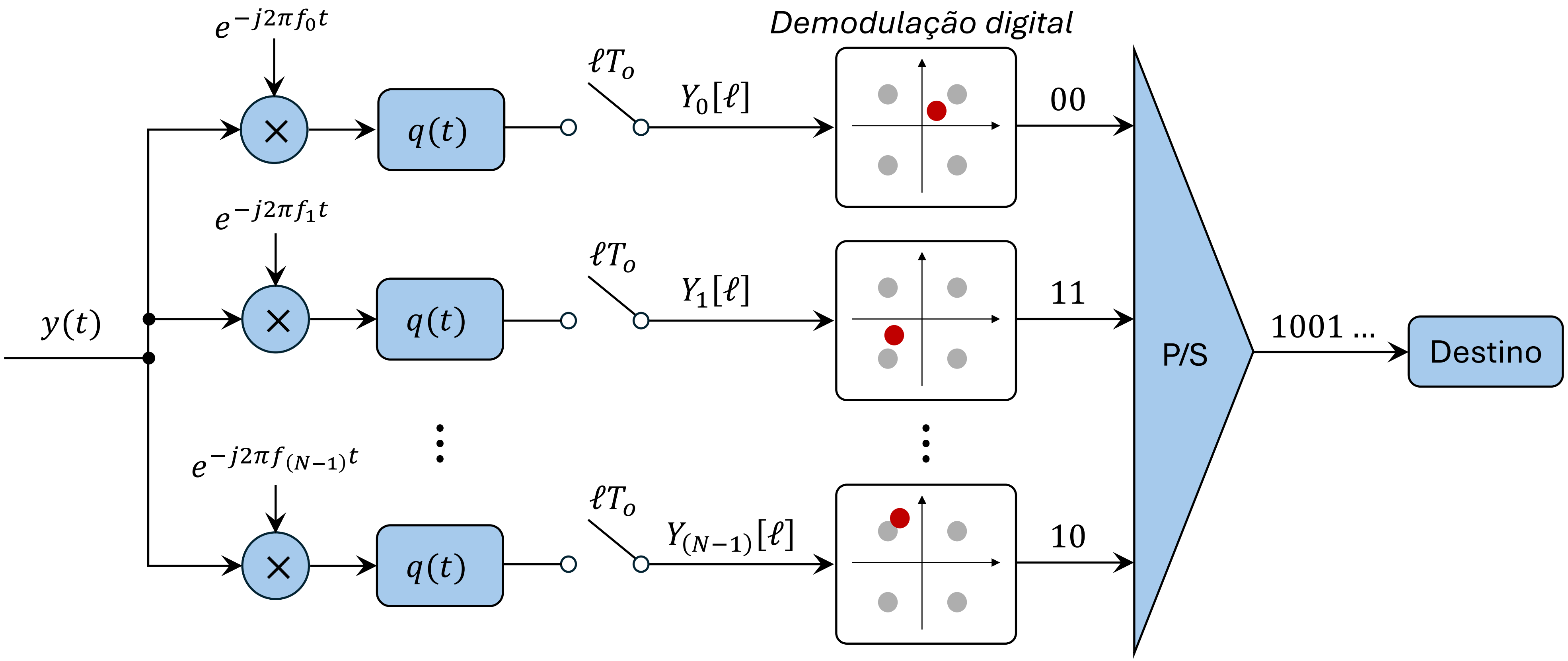
Diagrama de blocos do transmissor



Sinal de transmissão:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_k[\ell] p(t - \ell T_o) e^{j2\pi f_k t}$$

Diagrama de blocos do receptor



Sinal de recepção:

$$Y_k[\ell] = \left[y(t) \cdot e^{-j2\pi f_k t}\right] \star q(t) \Big|_{t=\ell T_o} \quad \text{com} \quad q(t) = p^*(T_o - t) \text{ e } T_o = NT_s$$

Esquema OFDM

Esquema OFDM

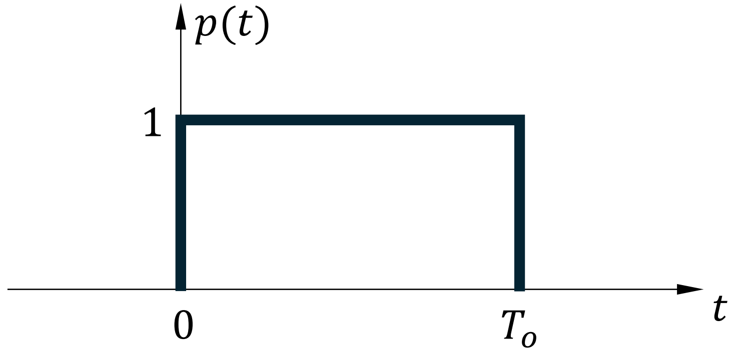
- Em 1993, grupo de pesquisadores liderados pelo Prof. John Cioffi apresentou uma implementação digital de um modulador multicanal, chamado de *Discrete Multitone* (DMT) e participou da competição chamada de *Bellcore Transmission Olympics* para DSL
- Competindo com moduladores monocanal, o DMT apresentou desempenho superior (entre 10 e 30 dB)
- O DMT foi vencedor da competição e, a partir de então, o emprego da modulação multiportadoras baseada na DMT popularizou-se em sistemas de comunicação cabeados e, a seguir, em comunicações sem fio
- A modulação multiportadoras é amplamente utilizadas nos sistemas de comunicação de dados, dentre os quais podemos citar padrões IEEE 802.11 (11n, 11ac, 11ax, 11ad e11ay), 4G/LTE, 5G

Esquema OFDM

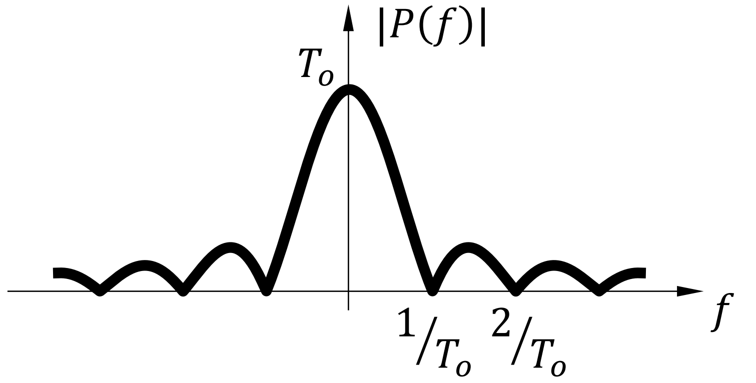
- Multiplexação por divisão de frequência ortogonal (*orthogonal frequency-division multiplexing*, OFDM)

- **Escolha especial do filtro de formatação de pulso**:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t - T_o/2}{T_o}\right)\Big|_{T_o = NT_s}$$



$$\begin{aligned} P(f) &= \mathcal{F}\{p(t)\} \\ &= T_o\,\mathrm{sinc}(fT_o)e^{j2\pi f\frac{T_o}{2}} \end{aligned}$$



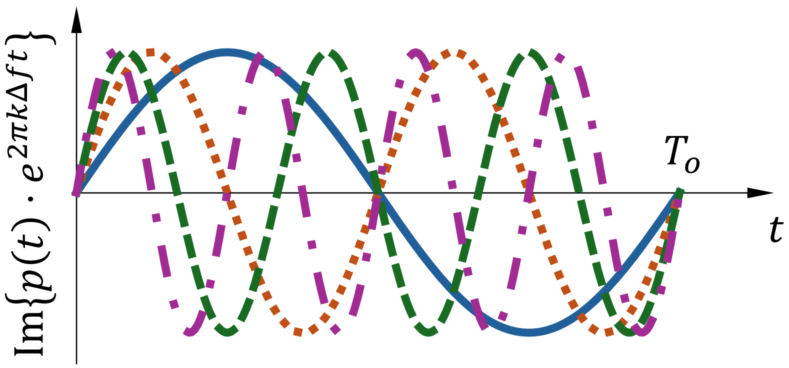
Esquema OFDM

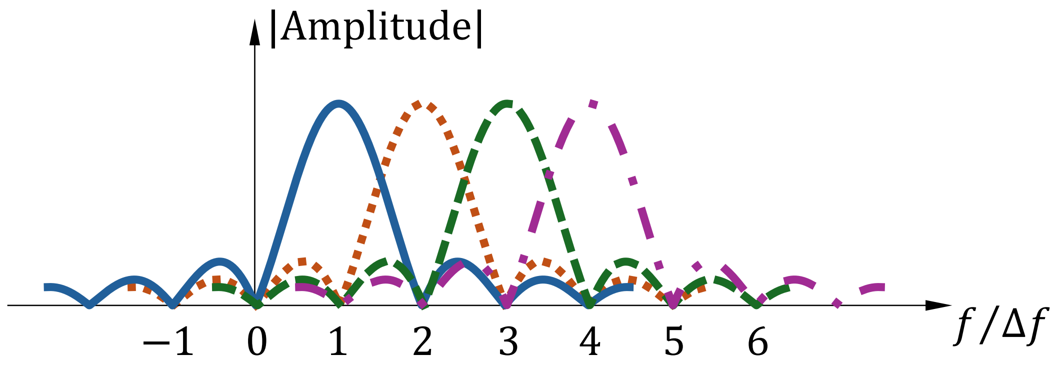
- **Escolha especial do espaço entre frequências:**

$$\boxed{f_k = k\frac{B}{N} = k\Delta f}$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_o}}$$

$$p(t) \cdot e^{2\pi k\Delta f t} \longleftrightarrow T_o \operatorname{sinc}\left(\frac{f - k\Delta f}{\Delta f}\right) e^{j\frac{\pi}{\Delta f}(f - k\Delta f)}$$





Esquema OFDM: representação no tempo discreto

- $x(t)$ é amostrado em $t = nT_s + \ell T_o = nT_s + \ell NT_s$

$$x_n[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell'=-\infty}^{\infty} X_k[\ell'] p(nT_s + \ell NT_s - \ell' NT_s) e^{j2\pi \frac{k}{NT_s}(nT_s + \ell NT_s)}, \qquad n = 0, \dots, N-1$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X_k[\ell] p(nT_s) e^{j2\pi \frac{k}{NT_s} nT_s} e^{j2\pi \frac{k}{NT_s} \ell NT_s}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X_k[\ell] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{j2\pi k\ell}$$

- ℓ-ésimo bloco OFDM de comprimento N no tempo discreto é dado por:

$$x_n[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} X_k[\ell] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$x_n[\ell]$ é **transformada discreta inversa de Fourier** de comprimento N da sequência $\{X_k[\ell]\}_{k=0}^{N-1}$

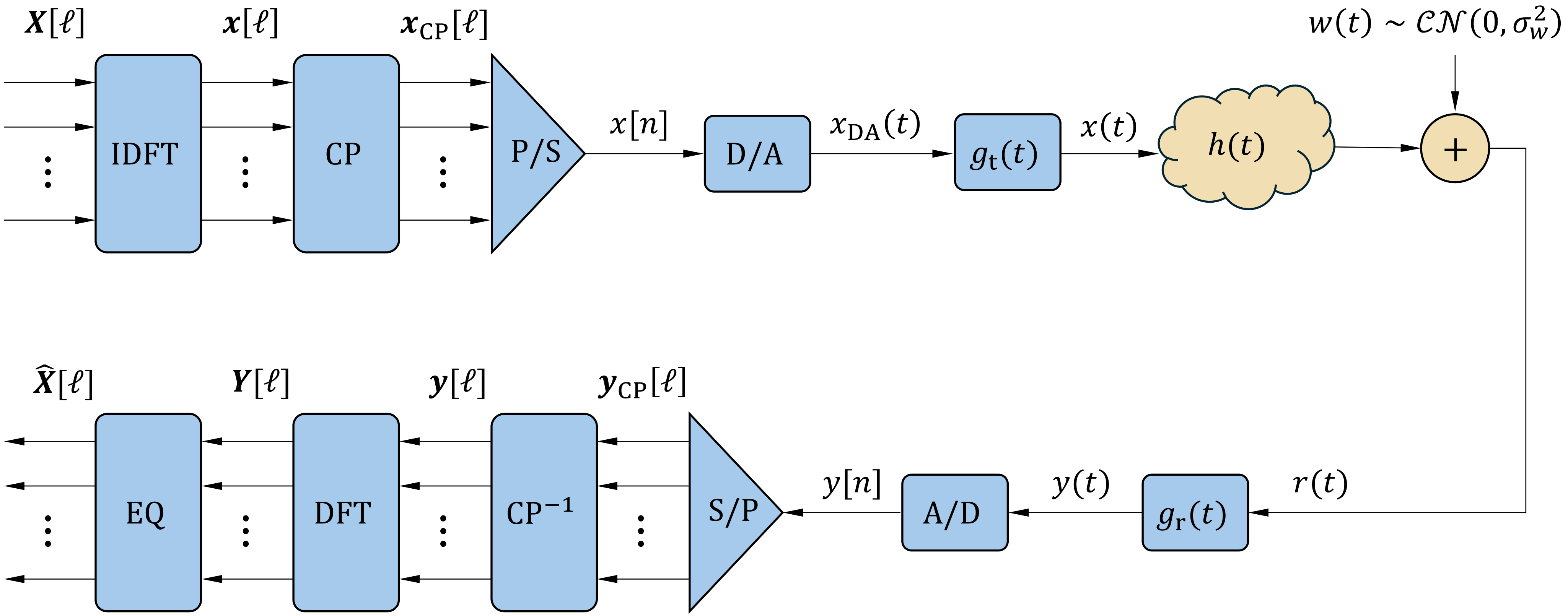
Esquema OFDM: representação no tempo discreto

- De forma semelhante ao slide anterior, é possível mostrar que o ℓ-ésimo bloco OFDM de comprimento N na frequência discreta é dado por

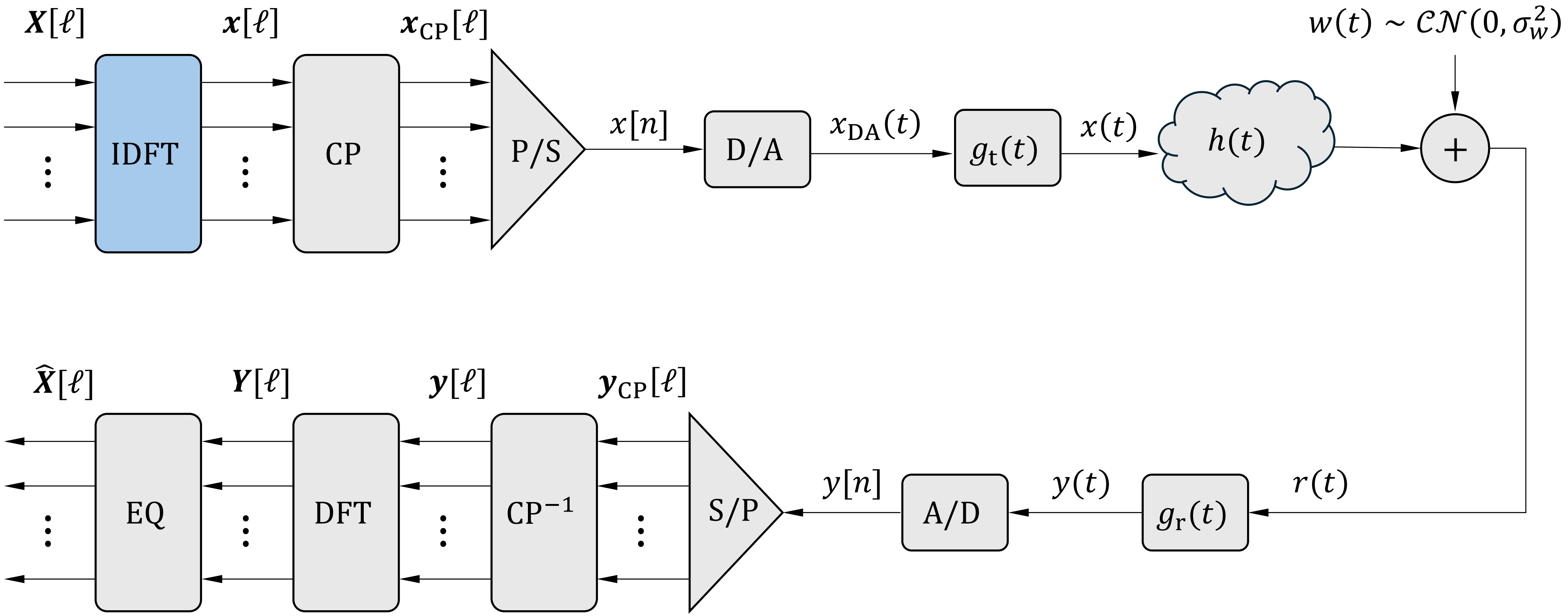
$$Y_k[\ell] = \sum_{n=0}^{N-1} y_n[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\{Y_k[\ell]\}_{k=0}^{N-1}$ é **transformada discreta de Fourier** de comprimento N da sequência $\{y_n[\ell]\}_{n=0}^{N-1}$

Implementação do esquema OFDM



Transformada discreta inversa de Fourier



Transformada discreta inversa de Fourier

- Sendo $\{x_n[\ell]\}_{n=0}^{N-1}$ uma sequência no tempo discreto, a sua transformada discreta de Fourier é dada por

$$X_k[\ell] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n[\ell] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

- A equação acima pode ser representada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X_0[\ell] \\ X_1[\ell] \\ \vdots \\ X_{(N-1)}[\ell] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 1\cdot 1} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 1\cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot (N-1)\cdot 1} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot (N-1)\cdot (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0[\ell] \\ x_1[\ell] \\ \vdots \\ x_{(N-1)}[\ell] \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}[\ell] = \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{W} \boldsymbol{x}[\ell]$$

Transformada discreta inversa de Fourier

- Sendo $\{X_\ell[k]\}_{k=0}^{N-1}$ uma sequência na frequência discreta, a sua transformada discreta inversa de Fourier é dada por

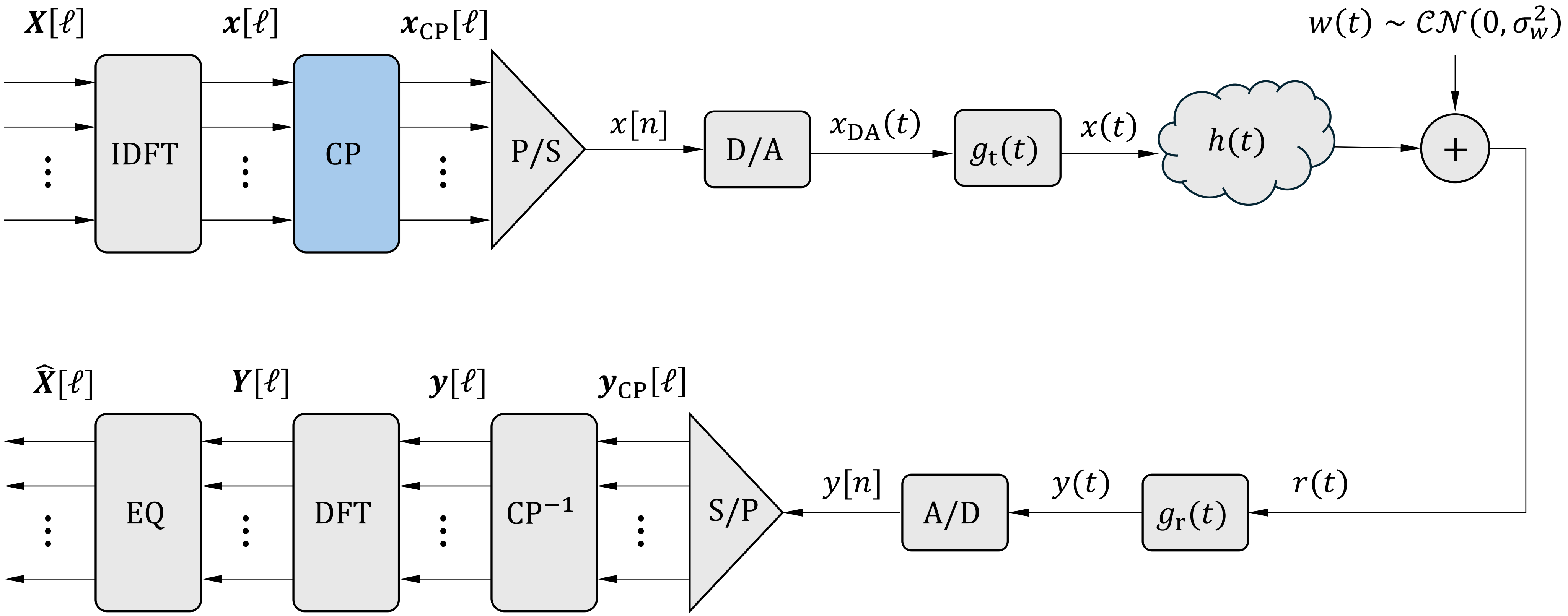
$$x_n[\ell] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k[\ell] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

- A equação acima pode ser representada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_0[\ell] \\ x_1[\ell] \\ \vdots \\ x_{(N-1)}[\ell] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 1\cdot 1} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(N-1)\cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 1\cdot(N-1)} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0[\ell] \\ X_1[\ell] \\ \vdots \\ X_{(N-1)}[\ell] \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}[\ell] = \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{W}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{X}[\ell]$$

Inserção do prefixo cíclico



Inserção do prefixo cíclico

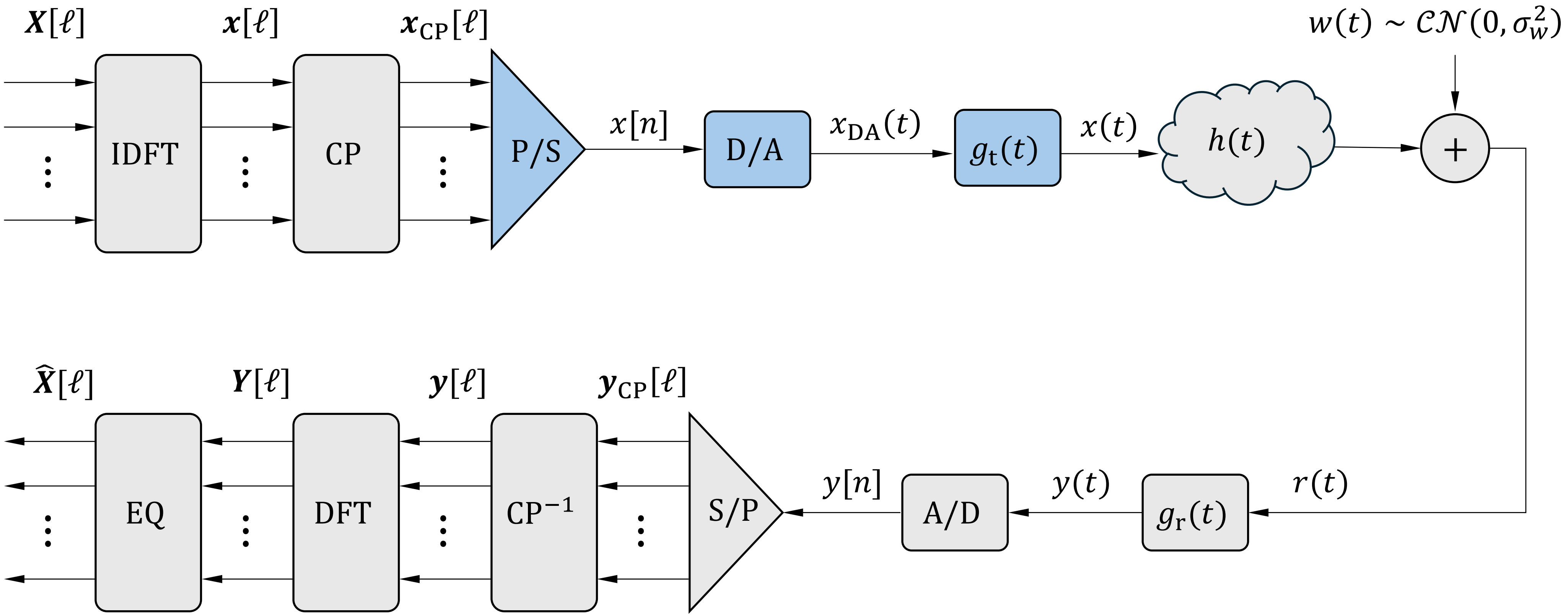
- A inserção do prefixo cíclico acontece da seguinte forma:

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{CP}}[\ell] = \boldsymbol{T}_{\mathrm{CP}}\boldsymbol{x}[\ell] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\mathrm{CP}}\times(N-N_{\mathrm{CP}})} & \boldsymbol{I}_{N_{\mathrm{CP}}} \\ \boldsymbol{I}_N & \end{bmatrix}\boldsymbol{x}[\ell],$$

ou seja, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{CP}}[\ell] = \left[x_{(N-N_{\mathrm{CP}})}[\ell], \cdots, x_{(N-1)}[\ell], x_0[\ell], x_1[\ell], \cdots, x_{(N-1)}[\ell]\right]^{\mathrm{T}}$, de forma que:

  - $\boldsymbol{x}_{\mathrm{CP}}[\ell] \in \mathbb{C}^{(N+N_{\mathrm{CP}})\times 1}$
  - $\mathbf{0}_{a\times b}$ é a matriz de zeros com dimensões $a \times b$
  - $\boldsymbol{I}_a$ é a matriz identidade com dimensões $a \times a$

Conversão paralelo/serial e conversão D/A



Conversão paralelo/serial e conversão D/A

- Sinal resultante da conversão paralelo/serial dos símbolos OFDM:

$$x[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\,\delta[n - m - \ell(N + N_{\mathrm{CP}})]$$

- Saída do conversor D/A:

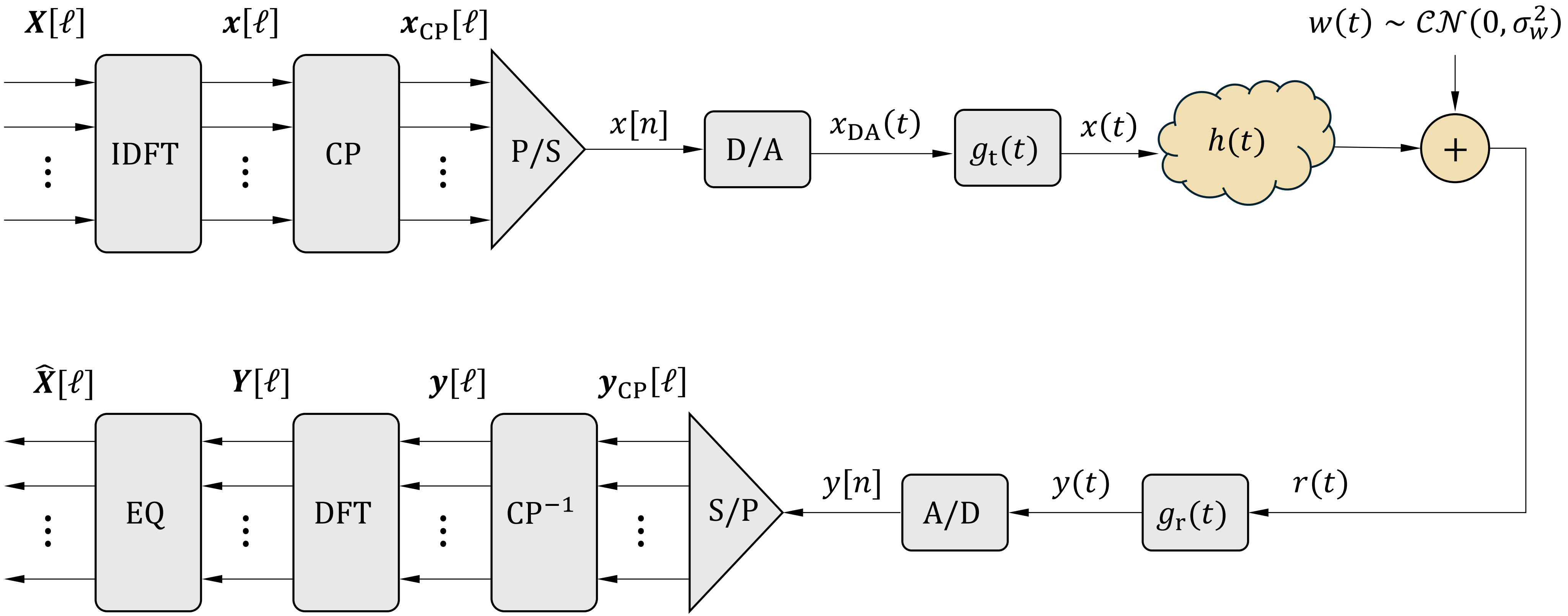
$$x_{\mathrm{DA}}(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\,\delta(t - mT_s - \ell(N + N_{\mathrm{CP}})T_s)$$

- **Sinal de transmissão em banda base** após o filtro de formatação de pulso:

$$x(t) = x_{\mathrm{DA}}(t) \star g_{\mathrm{t}}(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\,g_{\mathrm{t}}(t - mT_s - \ell(N + N_{\mathrm{CP}})T_s)$$

Observação: Por definição, $g_{\mathrm{t}}(t)$ é a raiz quadrada do cosseno elevado. Quando $\alpha = 0$ temos $g_{\mathrm{t}}(t) = \mathrm{sinc}(t/T_s)$, que é a expressão do filtro de reconstrução aplicado para obter um sinal analógico a partir de uma sequência.

Sinal recebido no receptor



Sinal recebido no receptor

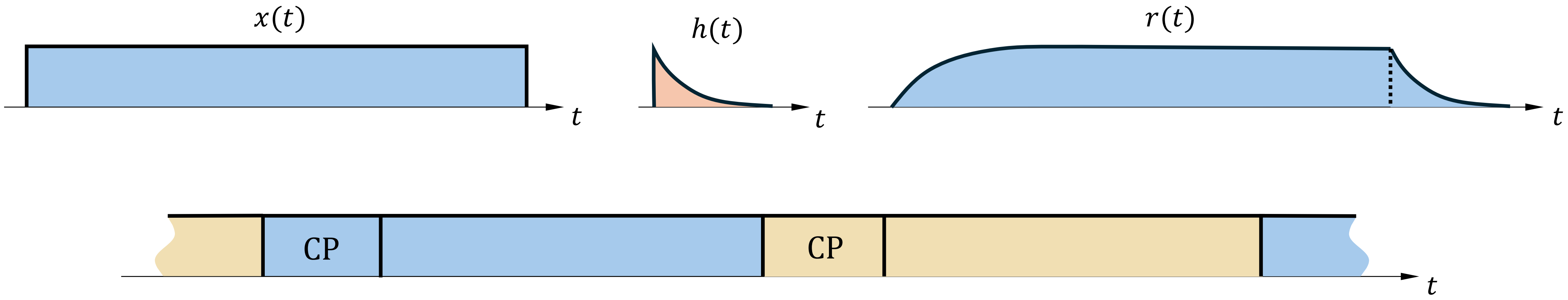
- Sinal na entrada do receptor:

$$
\begin{aligned}
r(t) &= x(t) \star h(t) + w(t) \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_\ell(t) \star h(t) + w(t) \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_\ell(\tau) h(t-\tau) d\tau + w(t)
\end{aligned}
$$

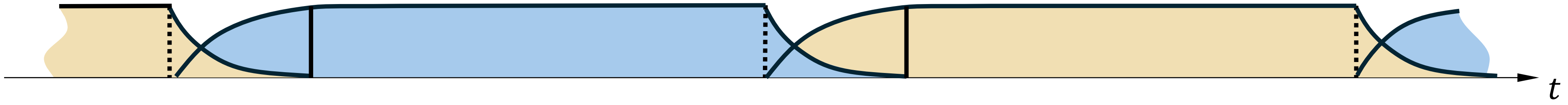
em que

$$
x(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_\ell(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\, g_{\mathrm{t}}(t - mT_s - \ell(N+N_{\mathrm{CP}})T_s)
$$

Efeito da ISI sobre os blocos de símbolo OFDM

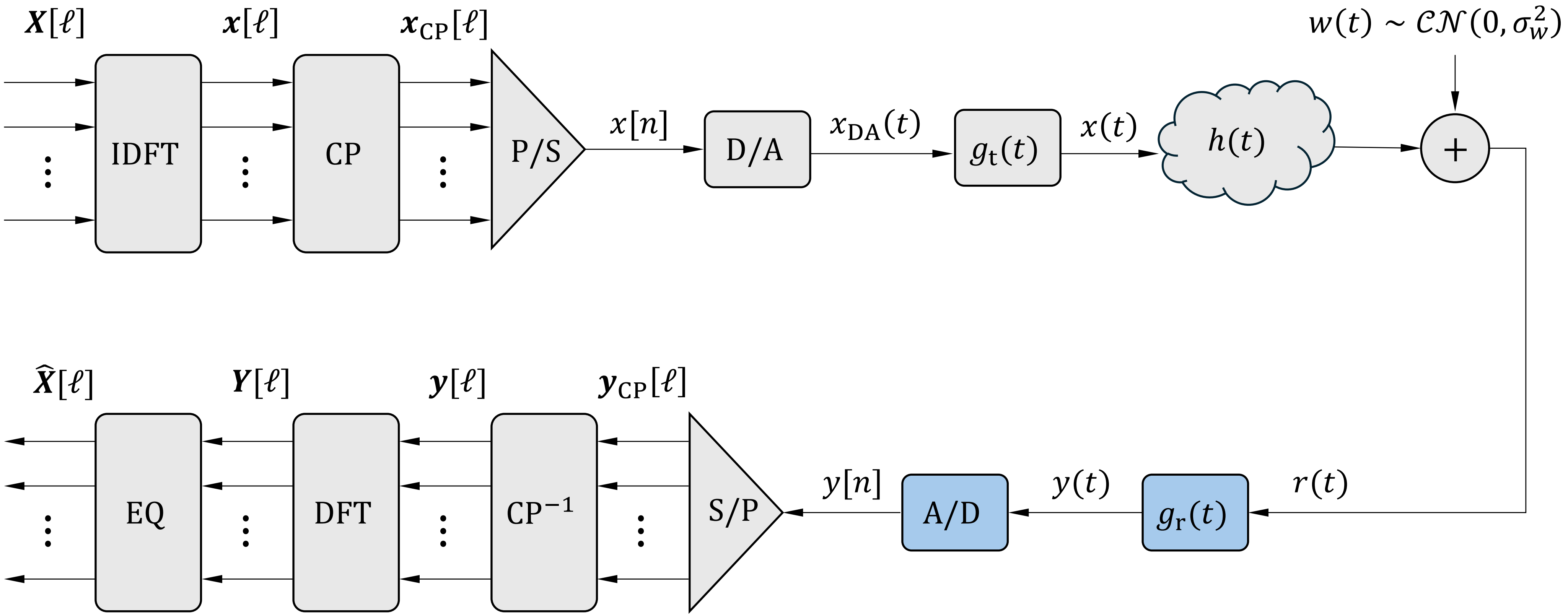


Blocos de símbolo adjacentes transmitidos



Blocos de símbolo adjacentes recebidos

Filtragem passa-baixas e conversão A/D



Filtragem passa-baixas e conversão A/D

- Saída na saída do filtro de recepção (filtro passa-baixas $g_\mathrm{r}(t)$):

$$
\begin{aligned}
y(t) &= r(t) \star g_\mathrm{r}(t) \\
&= x(t) \star h(t) \star g_\mathrm{r}(t) + \underbrace{w(t) \star g_\mathrm{r}(t)}_{v(t)} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_\ell(t) \star h(t) \star g_\mathrm{r}(t) + v(t)
\end{aligned}
$$

em que $v(t)$ é o ruído AWGN de banda limitada

Filtragem passa-baixas e conversão A/D

- Saída na saída do filtro de recepção (continuação):

$$y(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\, \delta(t - mT_s - \ell(N + N_{\mathrm{CP}})T_s) \star \underbrace{g_{\mathrm{t}}(t) \star h(t) \star g_{\mathrm{r}}(t)}_{h_{\mathrm{eq}}(t)} + v(t)$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\, h_{\mathrm{eq}}(t - mT_s - \ell(N + N_{\mathrm{CP}})T_s) + v(t)$$

$$y(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y_\ell(t) + v(t)$$

com $y_\ell(t)$ sendo a forma de onda no tempo contínuo do ℓ-ésimo bloco de símbolo OFDM recebido

Filtragem passa-baixas e conversão A/D

- Saída do conversor A/D:

$$y[n] = y(t)\Big|_{t=nT_s}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\, h_{\mathrm{eq}}[n-m-\ell(N+N_{\mathrm{CP}})] + v[n] \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y_{\mathrm{CP},n}[\ell] \end{aligned}$$

em que $y_{\mathrm{CP},n}[\ell]$ representa a versão no domínio do tempo discreto do ℓ-ésimo bloco de símbolo recebido

Filtragem passa-baixas e conversão A/D

- Se $g_{\mathrm{t}}[n] \star g_{\mathrm{r}}[n]$ é um pulso de Nyquist (ou seja, atende o 1º critério de Nyquist), então

$$h_{\mathrm{eq}}[n] = g_{\mathrm{t}}[n] \star h[n] \star g_{\mathrm{r}}[n] = \delta[n] \star h[n] = h[n]$$

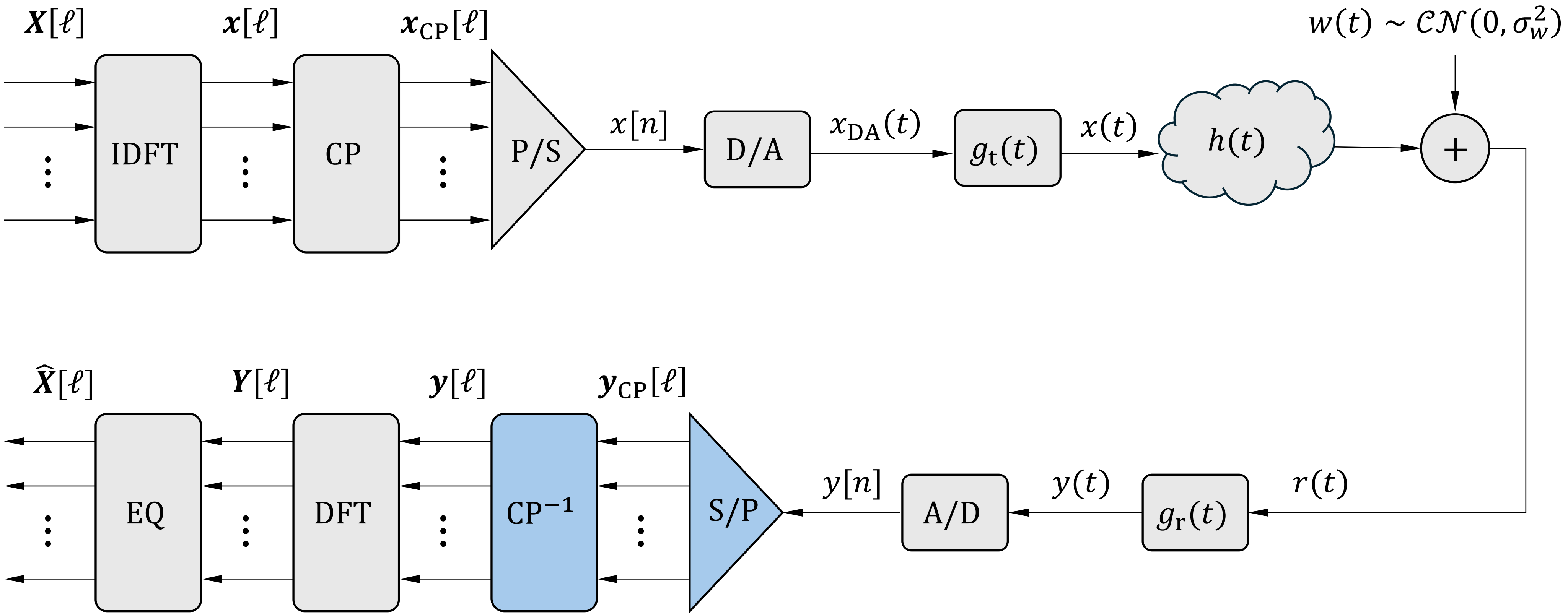
- Assim,

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N+N_{\mathrm{CP}}-1} x_{\mathrm{CP},m}[\ell]\, h[n-m-\ell(N+N_{\mathrm{CP}})] + v[n]$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y_{\mathrm{CP},n}[\ell]$$

em que $h[n] = h(t)|_{t=nT_s}, n = 0,1,\ldots,L-1$, e L é comprimento da resposta ao impulso do canal no tempo discreto

Conversão serial/paralelo e remoção do prefixo cíclico



Conversão serial/paralelo e remoção do prefixo cíclico

- Representação vetorial do ℓ-ésimo bloco de símbolo recebido na saída do conversor S/P:

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{CP}}[\ell] = \left[y[\ell(N+N_{\mathrm{CP}})], y[\ell(N+N_{\mathrm{CP}})+1], \cdots, y[\ell(N+N_{\mathrm{CP}})+N+N_{\mathrm{CP}}-1]\right]^{\mathrm{T}}$$

- $\boldsymbol{y}_{\mathrm{CP}}[\ell]$representa o vetor $\boldsymbol{x}_{\mathrm{CP}}[\ell]$ distorcido pelo canal e corrompido pelo ruído aditivo e pode ser representado matricialmente como

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{CP}}[\ell] = \boldsymbol{C}_{\mathrm{CP}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{CP}}[\ell] + \boldsymbol{v}_{\mathrm{CP}}[\ell]$$

em que $\boldsymbol{C}_{\mathrm{CP}}$ é a matriz de convolução do canal para o símbolo$\boldsymbol{x}_{\mathrm{CP}}[\ell]$ e $\boldsymbol{v}_{\mathrm{CP}}[\ell]$é a representação vetorial do ruído

- Remoção do prefixo cíclico:

$$\boldsymbol{y}[\ell] = \boldsymbol{R}_{\mathrm{CP}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{CP}}[\ell] = [\boldsymbol{0}_{N\times N_{\mathrm{CP}}} \quad \boldsymbol{I}_N]\boldsymbol{y}_{\mathrm{CP}}[\ell]$$

Conversão serial/paralelo e remoção do prefixo cíclico

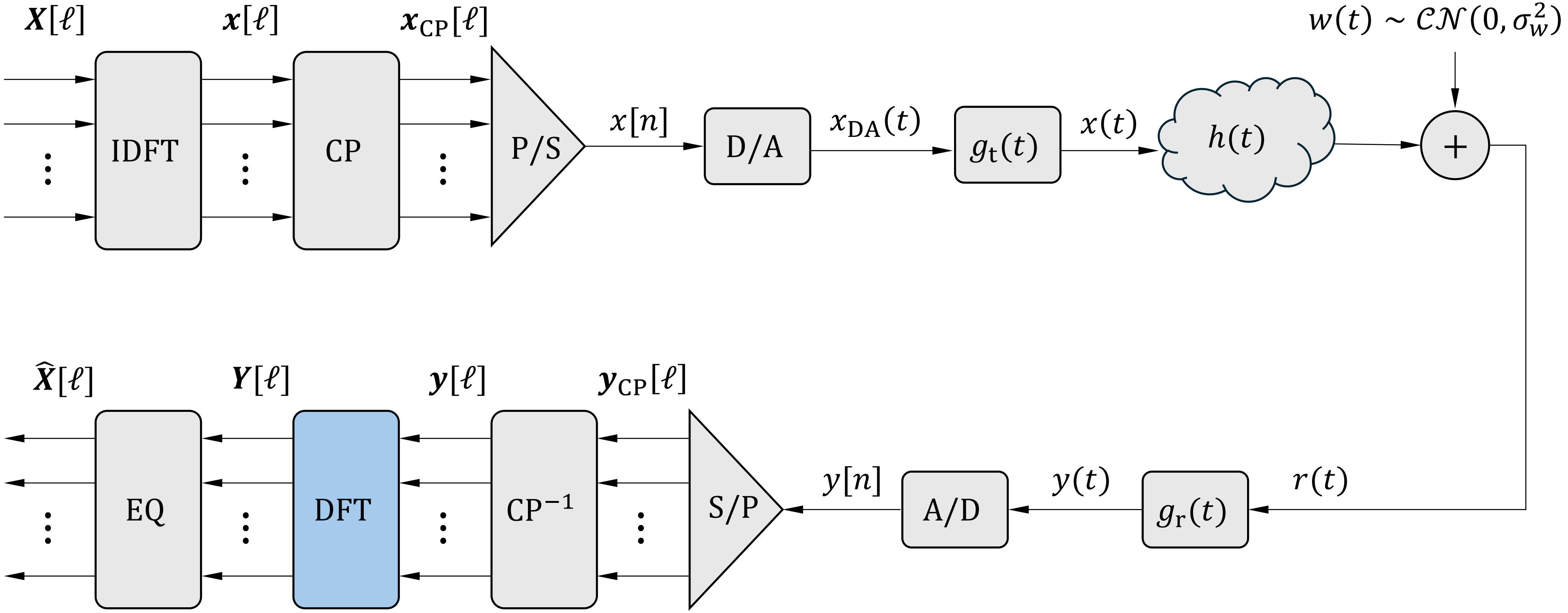
- Com $N_{\text{CP}} \geq L - 1$, temos que a matriz de convolução do canal $\boldsymbol{C}_{\text{CP}}$ torna-se **circulante** após a remoção do prefixo cíclico, ou seja,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_\ell &= \boldsymbol{R}_{\text{CP}}\boldsymbol{C}_{\text{CP}}\boldsymbol{T}_{\text{CP}}\boldsymbol{x}[\ell] + \boldsymbol{R}_{\text{CP}}\boldsymbol{v}_{\text{CP}}[\ell] \\ &= \boldsymbol{C}_h\boldsymbol{x}[\ell] + \boldsymbol{v}[\ell] \end{aligned}$$

em que

$$\boldsymbol{C}_h = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \cdots & 0 & h[L-1] & h[L-2] & \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] & \cdots & 0 & 0 & h[L-1] & \cdots & h[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[L-1] & h[L-2] & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h[L-1] & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h[L-1] & h[L-2] & h[L-3] & \cdots & h[0] \end{bmatrix}$$

Transformada discreta de Fourier



Transformada discreta de Fourier

- ℓ-ésimo bloco de símbolo recebido no domínio da frequência:

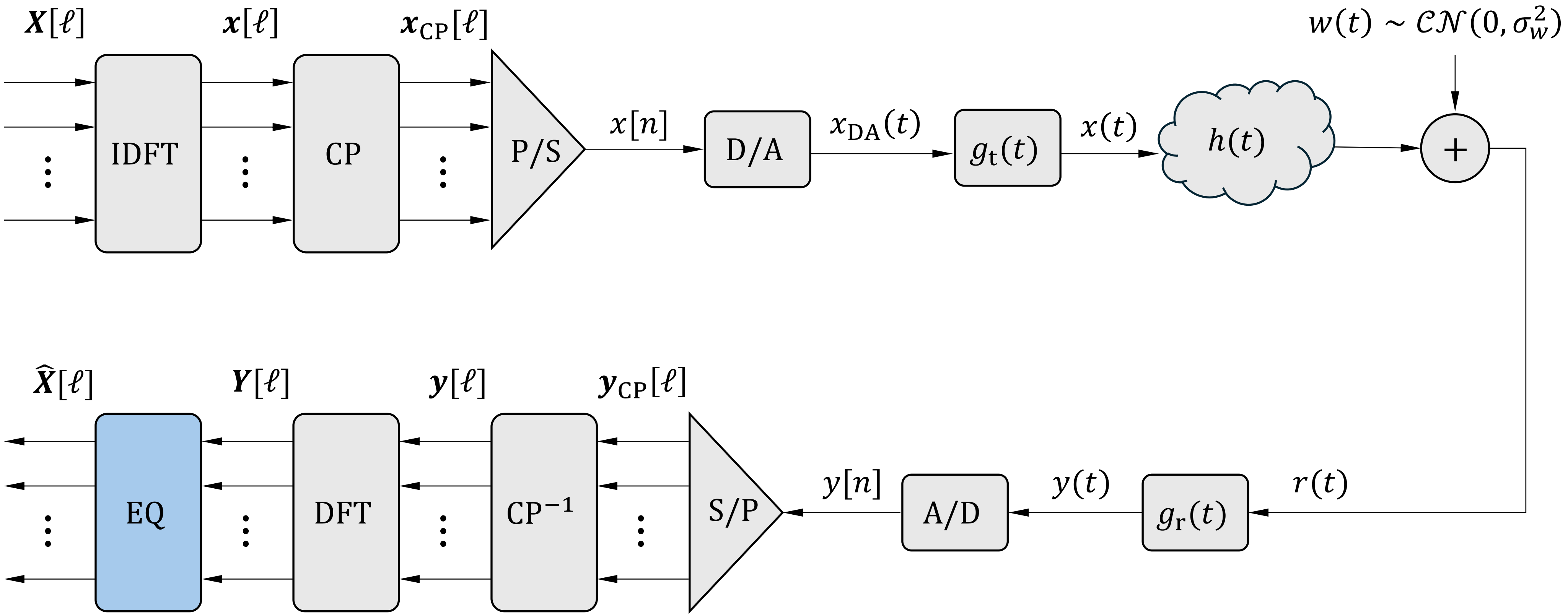
$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}[\ell] &= \boldsymbol{\mathcal{F}}\boldsymbol{y}[\ell] \\ &= \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{C}_h\boldsymbol{x}[\ell] + \boldsymbol{v}[\ell]) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{F}}\boldsymbol{C}_h\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}[\ell] + \boldsymbol{\mathcal{F}}\boldsymbol{v}[\ell] \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_H\boldsymbol{X}[\ell] + \boldsymbol{V}[\ell]\end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{\Lambda}_H = \mathrm{diag}\{H[0], H[1], \cdots, H[N-1]\}$, $H[k]$ é o k-ésimo coeficiente de

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{0}_{(N-L)\times 1}\end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix}h[0] & h[0] & \cdots & h[L-1]\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Equalização



Equalização

- Equalizador baseado no critério ***zero-forcing*** (ZF):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\Lambda}_H^{-1}$$

- Equalizador baseado no critério ***mininum mean square error*** (MMSE):

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\Lambda}_H^{\mathrm{H}}}{\boldsymbol{\Lambda}_H^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Lambda}_H + \frac{\boldsymbol{\Lambda}_{\sigma_V^2}}{\boldsymbol{\Lambda}_{\sigma_X^2}}}$$

em que:

- $\boldsymbol{\Lambda}_{\sigma_V^2} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^H\} = \mathrm{diag}\{\sigma_V^2[0], \sigma_V^2[1], \cdots, \sigma_V^2[N-1]\}$, pois $\mathbb{E}\{\boldsymbol{V}\} = \boldsymbol{0}_{N\times 1}$ e $\mathbb{E}\{V_j V_i\} = \mathbb{E}\{V_j\}\mathbb{E}\{V_i\}$ para $i \neq j$
- $\boldsymbol{\Lambda}_{\sigma_X^2} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^H\} = \sigma_X^2 \boldsymbol{I}_N,$ pois $\mathbb{E}\{\boldsymbol{X}\} = \boldsymbol{0}_{N\times 1}$ e $\mathbb{E}\{X_j X_i\} = \mathbb{E}\{X_j\}\mathbb{E}\{X_i\}$ para $i \neq j$

Equalização

- Aplicando o **equalizador ZF** no domínio da frequência discreta, a estimativa do ℓ-ésimo bloco de símbolo transmitido é

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{X}}[\ell] &= \boldsymbol{E}\boldsymbol{Y}[\ell] \\
&= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Lambda}_H \boldsymbol{X}[\ell] + \boldsymbol{V}[\ell]) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_H^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_H \boldsymbol{X}[\ell] + \boldsymbol{\Lambda}_H^{-1}\boldsymbol{V}[\ell] \\
&= \boldsymbol{X}[\ell] + \underbrace{\boldsymbol{\Lambda}_H^{-1}\boldsymbol{V}[\ell]}_{\text{Enriquecimento do ruído}}
\end{aligned}
$$

Estimação de Canal

Estimação de canal

- Podemos usar o esquema OFDM para estimar o canal de comunicação
- Para tanto, consideremos que o receptor conhece o símbolo transmitido $\boldsymbol{X}_\ell$ e, portanto, o objetivo é obter $\boldsymbol{\Lambda}_H$, a partir de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_\ell &= \boldsymbol{\Lambda}_H \boldsymbol{X}[\ell] + \boldsymbol{V}[\ell] \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{X}}[\ell]\boldsymbol{H} + \boldsymbol{V}[\ell]\end{aligned}$$

  em que $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{X}}[\ell] = \mathrm{diag}\{X_0[\ell], X_1[\ell], \cdots, X_{(N-1)}[\ell]\}$

- Estimativa da resposta em frequência do canal:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{H}} &= \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{X}}^{-1}[\ell]\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{X}}[\ell]\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{X}}^{-1}[\ell]\boldsymbol{V}[\ell] \\ &= \boldsymbol{H} + \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{X}}^{-1}[\ell]\boldsymbol{V}[\ell]\end{aligned}$$

Se $\sigma_X^2 = 1$, não ocorre a amplificação do ruído

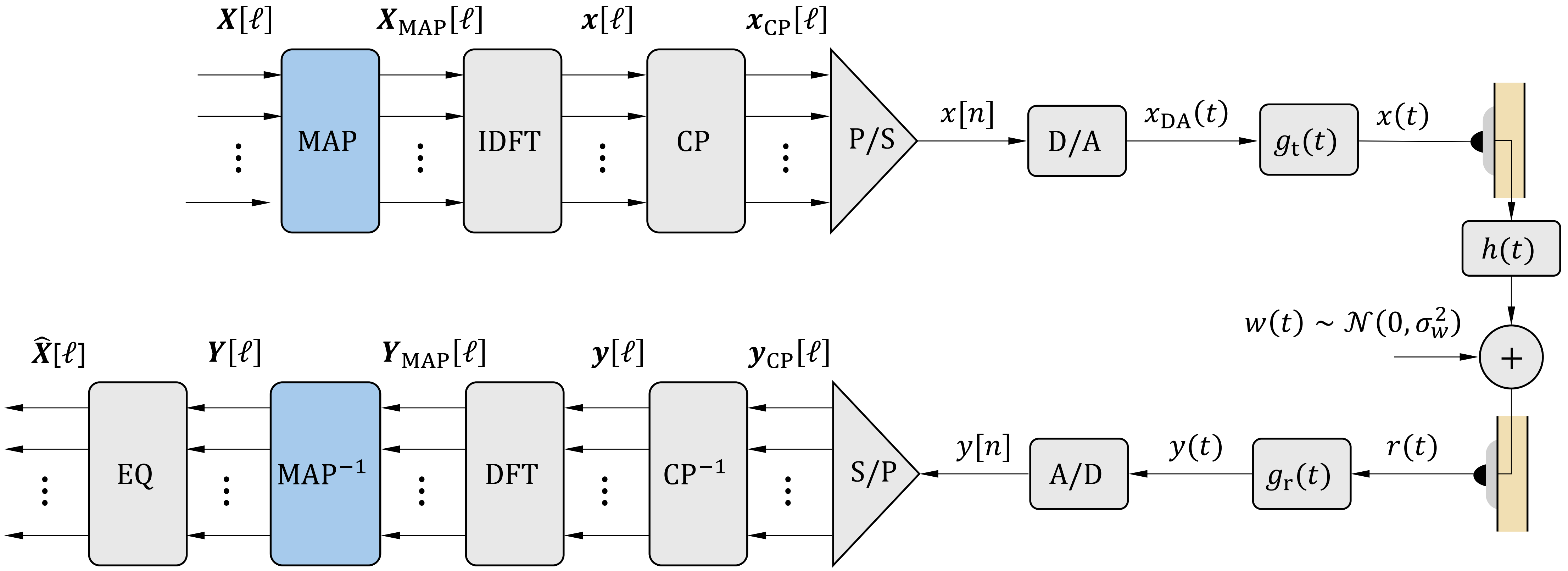
- Estimativa da resposta ao impulso:

$$\widehat{\boldsymbol{h}} = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\widehat{\boldsymbol{H}}$$

Esquema DMT

Esquema DMT

- Para que o esquema OFDM possa ser implementado em banda base, é necessário que $x(t) \in \mathbb{R}$ ($x(t) \in \mathbb{C}$ na transmissão banda passante)
- Para isso, basta adicionar os blocos MAP e MAP^{-1}, conforme destacado na figura



Mapeamento

- O bloco MAP tem por objetivo garantir que o bloco de símbolo OFDM seja real no domínio do tempo

- O mapeamento segue a seguinte regra:

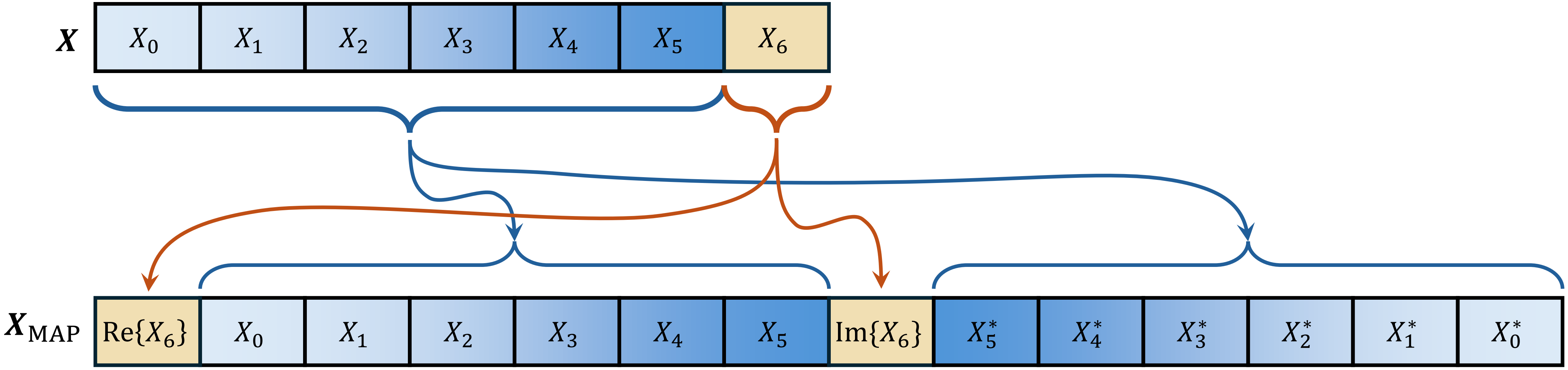
$$X_{\mathrm{MAP},k}[\ell] = \begin{cases} X_{(k-1)}[\ell], & k = 1, \dots, N-1 \\ \mathrm{Re}\{X_{(N-1)}[\ell]\}, & k = 0 \\ \mathrm{Im}\{X_{(N-1)}[\ell]\}, & k = N \\ X^*_{(2N-k-1)}[\ell], & k = N+1, \dots, 2N-1 \end{cases}$$

em que $\mathrm{Re}\{z\}$ e $\mathrm{Im}\{z\}$ denotam as partes real e imaginária de um número complexo z

- $\boldsymbol{X}[\ell] \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ e $\boldsymbol{X}_{\mathrm{MAP}}[\ell] \in \mathbb{C}^{2N\times 1}$ são os vetores de entrada e saída do bloco MAP, respectivamente

Exemplo

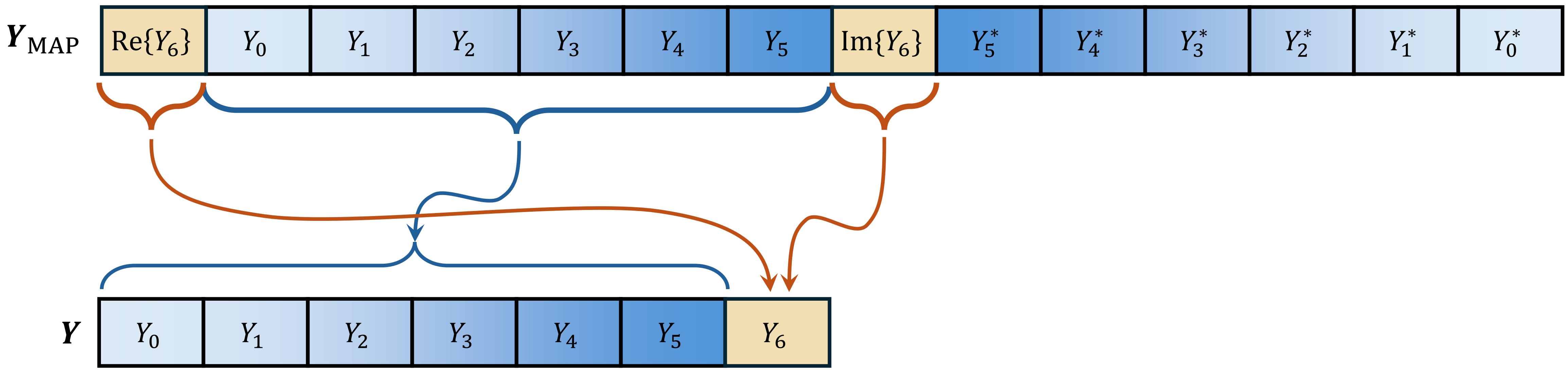
- Mapeamento de $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ dando origem a $\boldsymbol{X}_{\mathrm{MAP}} \in \mathbb{C}^{2N\times 1}$ com $N = 7$



Exemplo

- O processo de demapeamento pode ser expresso como
$$\boldsymbol{Y}[\ell] = \mathrm{MAP}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{MAP}}[\ell])$$
em que a $\boldsymbol{Y}[\ell] \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ e a $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{MAP}}[\ell] \in \mathbb{C}^{2N\times 1}$

- *Exemplo*: Demapeamento de $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{MAP}} \in \mathbb{C}^{2N\times 1}$ dando origem a $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ com $N = 7$



Exercícios

Exercícios

Considere a transmissão de um sinal de comunicação DMT através de uma canal AWGN. Realize uma simulação Monte Carlo para estimar a probabilidade de erro de bit em termos da SNR considerando os seguintes parâmetros de simulação:

- $N = 128$ e $N_{\mathrm{CP}} = 0$
- $\mathrm{SNR} = 0, 4, 8, 12, 16$ e 20 dB
- Modulação digital 4-QAM e 16-QAM

Ainda, usando a expressão da capacidade

$$C = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} \log_2\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_V^2[k]}\right)$$

gere o gráfico da capacidade em termos SNR para esse sistema

Referências

Referências

- J. Cioffi. Data Transmission Design. Notas de aula. Disponível em: https://cioffi-group.stanford.edu/ee379a/course_reader.html

- B. Sklar, Digital Communications: Fundamentals and Applications. 2ª Edição. Prentice - Hall, 2001