2025 年高考全国一卷数学真题

一、单选题

1．$(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}$的虚部为（　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．6

【答案】C

【解析】因为$(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}=\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2=-5+\mathrm{i}$，所以其虚部为 1，

故选：C.

2．设全集$U=\{x|x$是小于 9 的正整数$\}$，集合$A=\{1,3,5\}$，则$\complement_U A$中元素个数为（　）

A．0　　B．3　　C．5　　D．8

【答案】C

【解析】因为$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，所以$\complement_U A=\{2,4,6,7,8\}$，　$\complement_U A$中的元素个数为5，

故选：C.

3．若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的$\sqrt{7}$倍，则 C 的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{7}$　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】设双曲线的实轴，虚轴，焦距分别为$2a,2b,2c$，

由题知，$b=\sqrt{7}a$，

于是$a^2+b^2=c^2=a^2+7a^2=8a^2$，则$c=2\sqrt{2}a$，

即$e=\frac{c}{a}=2\sqrt{2}$.

故选：D

4．若点$(a,0)(a>0)$是函数$y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{4\pi}{3}$

【答案】B

【解析】根据正切函数的性质，$y=2\tan(x-\frac{\pi}{3})$的对称中心横坐标满足$x-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in Z$，

即$y=2\tan(x-\frac{\pi}{3})$的对称中心是$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},0\right),k\in Z$，

即$a=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，

又$a>0$，则$k=0$时a最小，最小值是$\frac{\pi}{3}$，

即$a=\frac{\pi}{3}$.

故选：B

5．设$f(x)$是定义在R上且周期为 2 的偶函数，当$2\le x\le 3$时，$f(x)=5-2x$，则$f\left(-\frac{3}{4}\right)=$（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】根据题知$f(x)=f(-x),f(x+2)=f(x)$对一切$x\in R$成立，

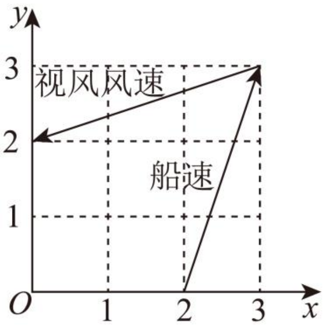
于是$f(-\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4})=f(\frac{11}{4})=5-2\times\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$.

故选：A

6．帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速，视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和，其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相

等，方向相反.图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系.已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2（风速的大小和向量的大小相同），单位（m/s），则真风为（　）

等级	风速大小 m/s	名称
2	1.1~3.3	轻风
3	3.4~5.4	微风
4	5.5~7.9	和风
5	8.0~10.1	劲风



A．轻风　　B．微风　　C．和风　　D．劲风

【答案】A

【解析】由题意及图得，

视风风速对应的向量为：$\vec{n}=(0,2)-(3,3)=(-3,-1)$，

视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和，

船速方向和船行风速的向量方向相反，

设真风风速对应的向量为$\overrightarrow{n_1}$，船行风速对应的向量为$\overrightarrow{n_2}$，

$\therefore \vec{n}=\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}$，船行风速：$\overrightarrow{n_2}=-[(3,3)-(2,0)]=(-1,-3)$，

$\therefore \overrightarrow{n_1}=\vec{n}-\overrightarrow{n_2}=(-3,-1)-(-1,-3)=(-2,2)$，

$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}\approx 2.828$，

∴由表得，真风风速为轻风，

故选：A.

7．若圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是（　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,3)$　　C．$(3,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

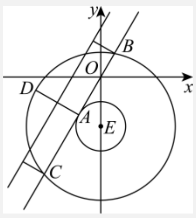
【答案】B

【解析】由题意，

在圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$中，圆心$E(0,-2)$，半径为r，

到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为1的点有且仅有 2个，

$\because$圆心$E(0,-2)$到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为：$d=\frac{|0\times\sqrt{3}-(-2)\times 1+2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=2$，



故由图可知，

当$r=1$时，

圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上有且仅有一个点（A点）到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离等于1；

当$r=3$时，

圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上有且仅有三个点（B,C,D点）到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离等于1；

当则r的取值范围为$(1,3)$时，
圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上有且仅有两个点到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离等于1.
故选：B.

8．若实数 x，y，z 满足$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x，y，z 的大小关系不可能是（　）

A．$x>y>z$　　　　B．$x>z>y$

C．$y>x>z$　　　　D．$y>z>x$

【答案】B

【分析】法一：设$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=m$，对$m$讨论赋值求出$x,y,z$，即可得出大小关系，利用排除法求出；

法二：根据数形结合解出.

【解析】法一：设$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=m$，所以

令$m=2$，则$x=1,y=3^{-1}=\frac{1}{3},z=5^{-3}=\frac{1}{125}$，此时$x>y>z$，A 有可能；

令$m=5$，则$x=8,y=9,z=1$，此时$y>x>z$，C 有可能；

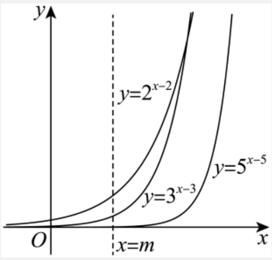
令$m=8$，则$x=2^6=64,y=3^5=243,z=5^3=125$，此时$y>z>x$，D 有可能；

故选：B.

法二：设$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=m$，所以，$x=2^{m-2},y=3^{m-3},z=5^{m-5}$

根据指数函数的单调性，易知各方程只有唯一的根，

作出函数$y=2^{x-2},y=3^{x-3},y=5^{x-5}$的图象，以上方程的根分别是函数$y=2^{x-2},y=3^{x-3},y=5^{x-5}$的图象与直线$x=m$的交点纵坐标，如图所示：



易知，随着m的变化可能出现：$x>y>z$，$y>x>z$，$y>z>x$，$z>y>x$，

故选：B.

二、多选题

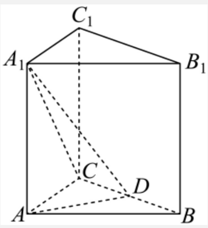
9．在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D 为 BC 中点，则（　）

A．$AD\perp A_1C$　　　　B．$BC\perp$平面AA_1D

C．$AD//A_1B_1$　　　　D．$CC_1//$平面AA_1D

【答案】BD

【解析】法一：对于 A，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面ABC，



又$AD\subset$平面ABC，则$AA_1\perp AD$，则$\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

因为$\triangle ABC$是正三角形，D为BC中点，则$AD\perp BC$，则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

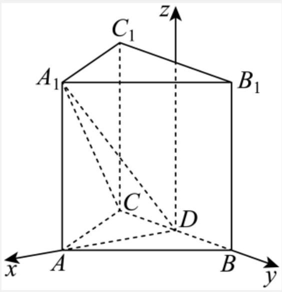
又$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$，

所以$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2\neq 0$，

则$AD\perp A_1C$不成立，A 错误；

对于 B，因为在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面ABC，

又$BC \subset$平面ABC，则$AA_1 \perp BC$，
因为$\triangle ABC$是正三角形，D为BC中点，则$AD \perp BC$，
又$AA_1 \cap AD = A, AA_1, AD \subset$平面$AA_1D$，
所以$BC \perp$平面AA_1D，B 正确；
对于 D，因为在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1 // AA_1$
又$AA_1 \subset$平面$AA_1D, CC_1 \not\subset$平面AA_1D，所以$CC_1 //$平面AA_1D，D 正确；
对于 C，因为在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1B_1 // AB$，
假设$AD // A_1B_1$，则$AD // AB$，这与$AD \cap AB = A$矛盾，
所以$AD // A_1B_1$不成立，C 错误；
故选：BD.
法二：如图，建立空间直角坐标系，设该正三棱柱的底边为2，高为h，



则$D(0,0,0), A\left(\sqrt{3},0,0\right), A_1\left(\sqrt{3},0,h\right), C(0,-1,0), C_1(0,-1,h), B(0,1,0), B_1(0,1,h)$，
对于 A，$\overrightarrow{AD} = \left(-\sqrt{3},0,0\right), \overrightarrow{A_1C} = \left(-\sqrt{3},-1,-h\right)$，
则$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = \left(-\sqrt{3}\right) \times \left(-\sqrt{3}\right) + 0 = 3 \neq 0$，
则$AD \perp A_1C$不成立，A 错误；
对于 BD，$\overrightarrow{BC} = (0,-2,0), \overrightarrow{CC_1} = (0,0,h), \overrightarrow{AA_1} = (0,0,h), \overrightarrow{AD} = \left(-\sqrt{3},0,0\right)$，
设平面AA_1D的法向量为$\vec{n} = (x,y,z)$，
则$\begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{n} = hz = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}x = 0 \end{cases}$，得$x = z = 0$，令$y = 1$，则$\vec{n} = (0,1,0)$，
所以$\overrightarrow{BC} = (0,-2,0) = -2\vec{n}$，$\overrightarrow{CC_1} \cdot \vec{n} = 0$，
则$BC \perp$平面AA_1D，$CC_1 //$平面AA_1D，BD 正确；
对于 C，$\overrightarrow{AD} = \left(-\sqrt{3},0,0\right), \overrightarrow{A_1B_1} = \left(-\sqrt{3},1,0\right)$，
则$\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \neq \frac{0}{1}$，显然$AD // A_1B_1$不成立，C 错误；
故选：BD.

10．设抛物线$C: y^2 = 6x$的焦点为F，过F的直线交C于A、B，过F且垂直于AB的直线交$l: x = -\frac{3}{2}$于E，过点A作准线l的垂线，垂足为D，则（　）

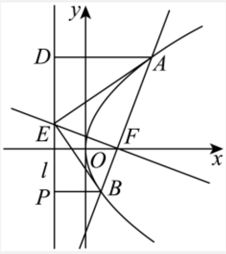
A．$|AD| = |AF|$　　B．$|AE| = |AB|$

C．$|AB| \geq 6$　　D．$|AE| \cdot |BE| \geq 18$

【答案】ACD

【分析】对于 A，先判断得直线$l: x = -\frac{3}{2}$为抛物线的准线，再利用抛物线的定义即可判断；对于 B，利用三角形相似证得$\angle AEB = 90°$，进而得以判断；对于 C，利用直线的反设法（法一）与正设法（法二），联立直线AB与抛物线方程，结合韦达定理与焦点弦公式可判断 C；利用利用三角形相似证得$|AE|^2 = |AF| \cdot |AB|$，$|BE|^2 = |BF| \cdot |AB|$，结合焦半径公式可判断 D.

【解析】法一：A，对于抛物线$C: y^2 = 6x$，
则$p = 3$，其准线方程为$x = -\frac{3}{2}$，焦点$F\left(\frac{3}{2},0\right)$，
则$|AD|$为抛物线上点到准线的距离，$|AF|$为抛物线上点到焦点的距离，



由抛物线的定义可知，$|AD| = |AF|$，故 A 正确；
B，过点B作准线l的垂线，交于点P，
由题意可知$AD \perp l, EF \perp AB$，则$\angle ADE = \angle AFE = 90°$，
又$|AD| = |AF|$，$|AE| = |AE|$，所以$\triangle ADE \cong \triangle AFE$，
所以$\angle AED = \angle AEF$，同理$\angle BEP = \angle BEF$，
又$\angle AED + \angle AEF + \angle BEP + \angle BEF = 180°$，
所以$\angle AEF + \angle BEF = 90°$，即$\angle AEB = 90°$，
显然AB为$\triangle ABE$的斜边，则$|AE| < |AB|$，故 B 错误；
C，易知直线AB的斜率不为0，

设直线AB的方程为$x = my + \frac{3}{2}$，$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，

联立$\begin{cases} x = my + \frac{3}{2} \\ y^2 = 6x \end{cases}$，得$y^2 - 6my - 9 = 0$，

易知$\Delta > 0$，则$y_1 + y_2 = 6m, y_1 y_2 = -9$，

又$x_1 = my_1 + \frac{3}{2}$，$x_2 = my_2 + \frac{3}{2}$，

所以$|AB| = x_1 + x_2 + p \ = m(y_1 + y_2) + 3 + 3 = 6m^2 + 6 \geq 6$，
当且仅当$m = 0$时取等号，故 C 正确；
D，在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$与$\mathrm{Rt}\triangle AEF$中，$\angle BAE = \angle EAF$，

所以$\mathrm{Rt}\triangle ABE \sim \mathrm{Rt}\triangle AEF$，则$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AF|}{|AE|}$，即$|AE|^2 = |AF| \cdot |AB|$，

同理$|BE|^2 = |BF| \cdot |AB|$，

又$|AF| \cdot |BF| = \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) = (my_1 + 3)(my_2 + 3)$

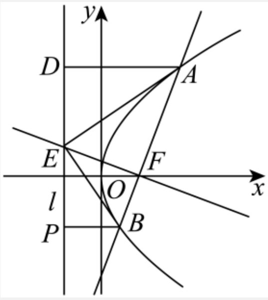
$= m^2 y_1 y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9 = -9m^2 + 18m^2 + 9 = 9(m^2 + 1)$，
$|AB| = 6m^2 + 6 = 6(m^2 + 1)$，
所以$|AE|^2 \cdot |BE|^2 = |BF| \cdot |AF| \cdot |AB|^2 = 9(m^2 + 1) \times 36(m^2 + 1)^2$，

则$|AE| \cdot |BE| = 3(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \times 6(m^2 + 1) = 18(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \geq 18$，D 正确.

故选：ACD.
法二：对于 A，对于抛物线$C: y^2 = 6x$，

则$p = 3$，其准线方程为$x = -\frac{3}{2}$，焦点$F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，

则$|AD|$为抛物线上点到准线的距离，$|AF|$为抛物线上点到焦点的距离，



由抛物线的定义可知，$|AD|=|AF|$，A 正确；
对于 B，过点B作准线l的垂线，交于点P，
由题意可知$AD\perp l,EF\perp AB$，则$\angle ADE=\angle AFE=90°$，
又$|AD|=|AF|$，$|AE|=|AE|$，所以$\triangle ADE\cong\triangle AFE$，
所以$\angle AED=\angle AEF$，同理$\angle BEP=\angle BEF$，
又$\angle AED+\angle AEF+\angle BEP+\angle BEF=180°$，
所以$\angle AEF+\angle BEF=90°$，即$\angle AEB=90°$，
显然AB为$\triangle ABE$的斜边，则$|AE|<|AB|$，B 错误；
对于 C，当直线AB的斜率不存在时，$|AB|=2p=6$；
当直线AB的斜率存在时，设直线AB方程为$y=k\left(x-\frac{3}{2}\right)$，

联立$\begin{cases}y=k\left(x-\frac{3}{2}\right)\\ y^2=6x\end{cases}$，消去$y$，得$k^2x^2-(3k^2+6)x+\frac{9}{4}k^2=0$，

易知$\Delta>0$，则$x_1+x_2=3+\frac{6}{k^2},x_1x_2=\frac{9}{4}$，
所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$
$=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{\left(3+\frac{6}{k^2}\right)^2-9}=6\left(1+\frac{1}{k^2}\right)>6$，
综上，$|AB|\geq 6$，C 正确；
对于 D，在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$与$\mathrm{Rt}\triangle AEF$中，$\angle BAE=\angle EAF$，
所以$\mathrm{Rt}\triangle ABE\sim\mathrm{Rt}\triangle AEF$，则$\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{|AF|}{|AE|}$，即$|AE|^2=|AF|\cdot|AB|$，
同理$|BE|^2=|BF|\cdot|AB|$，
当直线AB的斜率不存在时，$|AB|=6$，$|AF|=|BF|=\frac{1}{2}|AB|=3$；
所以$|AE|^2\cdot|BE|^2=|BF|\cdot|AF|\cdot|AB|^2=3\times3\times6^2$，即$|AE|\cdot|BE|=18$；
当直线AB的斜率存在时，$|AB|=6\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$，

$$|AF|\cdot|BF|=\left(x_1+\frac{3}{2}\right)\left(x_2+\frac{3}{2}\right)=x_1x_2+\frac{3}{2}(x_1+x_2)+\frac{9}{4}$$

$=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\left(3+\frac{6}{k^2}\right)+\frac{9}{4}=9\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$，

所以$|AE|^2\cdot|BE|^2=|BF|\cdot|AF|\cdot|AB|^2=9\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\times36\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^2$，

则$|AE|\cdot|BE|=3\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times6\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=18\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}>18$；
综上，$|AE|\cdot|BE|\geq 18$，D 正确.
故选：ACD.

11．已知$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{4}$，若$\cos2A+\cos2B+2\sin C=2,\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$，则（　）

A．$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$　　B．$AB=\sqrt{2}$

C．$\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$AC^2+BC^2=3$

【答案】ABC

【分析】对$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$由二倍角公式先可推知 A 选项正确，方法一分情况比较$A+B$和$\frac{\pi}{2}$的大小，方法二亦可使用正余弦定理讨论解决，方法三可结合射影定理解决，方法四可在法三的基础上，利用和差化积公式，回避讨论过程；，然后利用$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$算出$A,B$取值，最后利用三角形面积求出三边长，即可判断每个选项.

【解析】$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，由二倍角公式，$1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 B+2\sin C=2$，
整理可得，$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$，A 选项正确；
由诱导公式，$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，
展开可得$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin^2 A+\sin^2 B$，
即$\sin A(\sin A-\cos B)+\sin B(\sin B-\cos A)=0$，

下证$C=\frac{\pi}{2}$.

方法一：分类讨论

若$A+B=\frac{\pi}{2}$，则$\sin A=\cos B,\sin B=\cos A$可知等式成立；

若$A+B<\frac{\pi}{2}$，即$A<\frac{\pi}{2}-B$，由诱导公式和正弦函数的单调性可知，$\sin A<\cos B$，同理$\sin B<\cos A$，

又$\sin A>0,\sin B>0$，于是$\sin A(\sin A-\cos B)+\sin B(\sin B-\cos A)<0$，

与条件不符，则$A+B<\frac{\pi}{2}$不成立；

若$A+B>\frac{\pi}{2}$，类似可推导出$\sin A(\sin A-\cos B)+\sin B(\sin B-\cos A)>0$，则$A+B>\frac{\pi}{2}$不成立.

综上讨论可知，$A+B=\frac{\pi}{2}$，即$C=\frac{\pi}{2}$.

方法二：边角转化

$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$时，由$C\in(0,\pi)$，则$\sin C\in(0,1]$，
于是$1\times\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B\geq\sin^2 C$，
由正弦定理，$a^2+b^2\geq c^2$，

由余弦定理可知，$\cos C\geq 0$，则$C\in(0,\frac{\pi}{2}]$，

若$C\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$A+B>\frac{\pi}{2}$，注意到$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$，则$\cos A\cos B>0$，

于是$\cos A>0,\cos B>0$（两者同负会有两个钝角，不成立），于是$A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

结合$A+B>\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow A>\frac{\pi}{2}-B$，而$A,\frac{\pi}{2}-B$都是锐角，则$\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B>0$，

于是$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B>\cos^2 B+\sin^2 B=1$，这和$\sin C\leq 1$相矛盾，

故$C\in(0,\frac{\pi}{2})$不成立，则$C=\frac{\pi}{2}$

方法三：结合射影定理（方法一改进）

由$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$，结合正弦定理可得，$c=a\sin A+b\sin B$，由射影定理可得$c=a\cos B+b\cos A$，于是$a\sin A+b\sin B=a\cos B+b\cos A$，

则$a(\sin A-\cos B)+b(\sin B-\cos A)=0$，可同方法一种讨论的角度，推出$A+B=\frac{\pi}{2}$，

方法四：和差化积（方法一改进）

续法三：
$a(\sin A-\cos B)+b(\sin B-\cos A)=0$，可知$\sin A-\cos B,\sin B-\cos A$同时为0或者异号，即$(\sin A-\cos B)(\sin B-\cos A)\le 0$，展开可得，
$\sin A\sin B-\sin A\cos A-\cos B\sin B+\cos A\cos B\le 0$，
即$\cos(A-B)-\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)\le 0$，结合和差化积，$\cos(A-B)(1-\sin(A+B))\le 0$，由上述分析，$A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则$A-B\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则$\cos(A-B)\ge 0$，则$1-\sin(A+B)\le 0$，即$\sin C\ge 1$，于是$\sin C=1$，可知$C=\frac{\pi}{2}$.

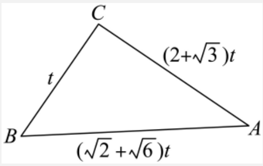
由$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}=\cos A\cos B$，由$A+B=\frac{\pi}{2}$，则$\cos B=\sin A$，即$\sin A\cos A=\frac{1}{4}$，

则$\sin 2A=\frac{1}{2}$，同理$\sin 2B=\frac{1}{2}$，由上述推导，$A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$2A,2B\in(0,\pi)$，

不妨设$A<B$，则$2A=\frac{\pi}{6},2B=\frac{5\pi}{6}$，即$A=\frac{\pi}{12},B=\frac{5\pi}{12}$，

由两角和差的正弦公式可知$\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，C 正确

由两角和的正切公式可得，$\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$，
设$BC=t,AC=\left(2+\sqrt{3}\right)t$，则$AB=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)t$，
由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})t^2=\frac{1}{4}$，则$t^2=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$，则$t=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，
于是$AB=(\sqrt{6}+\sqrt{2})t=\sqrt{2}$，B 正确，由勾股定理可知，$AC^2+BC^2=2$，D 错误.



故选：ABC

三、填空题
12．若直线$y=2x+5$是曲线$y=\mathrm{e}^x+x+a$的切线，则$a=$________.
【答案】4
【解析】法一：对于$y=\mathrm{e}^x+x+a$，其导数为$y'=\mathrm{e}^x+1$，
因为直线$y=2x+5$是曲线的切线，直线的斜率为 2，
令$y'=\mathrm{e}^x+1=2$，即$\mathrm{e}^x=1$，解得$x=0$，
将$x=0$代入切线方程$y=2x+5$，可得$y=2\times 0+5=5$，
所以切点坐标为$(0,5)$，
因为切点$(0,5)$在曲线$y=\mathrm{e}^x+x+a$上，
所以$5=\mathrm{e}^0+0+a$，即$5=1+a$，解得$a=4$.
故答案为：4.
法二：对于$y=\mathrm{e}^x+x+a$，其导数为$y'=\mathrm{e}^x+1$，
假设$y=2x+5$与$y=\mathrm{e}^x+x+a$的切点为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}\mathrm{e}^{x_0}+1=2\\ y_0=2x_0+5\\ y_0=\mathrm{e}^{x_0}+x_0+a\end{cases}$，解得$a=4$.

故答案为：4.
13．若一个等比数列的各项均为正数，且前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为________.
【答案】2
【解析】法一：设该等比数列为$\{a_n\}$，S_n是其前n项和，则$S_4=4,S_8=68$，

设$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，
当$q=1$时，$S_4=4a_1=4$，即$a_1=1$，则$S_8=8a_1=8\neq 68$，显然不成立，舍去；
当$q\neq 1$时，则$S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=4, S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=68$，
两式相除得$\frac{1-q^8}{1-q^4}=\frac{68}{4}$，即$\frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4}=17$，
则$1+q^4=17$，所以$q=2$，
所以该等比数列公比为 2.
故答案为：2.
法二：设该等比数列为$\{a_n\}$，S_n是其前n项和，则$S_4=4, S_8=68$，
设$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，
所以$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4$，
$S_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$
$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_1q^4+a_2q^4+a_3q^4+a_4q^4$
$=(a_1+a_2+a_3+a_4)(1+q^4)=68$，
所以$4(1+q^4)=68$，则$1+q^4=17$，所以$q=2$，
所以该等比数列公比为 2.
故答案为：2.
法三：设该等比数列为$\{a_n\}$，S_n是其前n项和，则$S_4=4, S_8=68$，
设$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，
因为$S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=(a_1+a_2+a_3+a_4)q^4=68-4=64$，
又$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4$，
所以$\frac{S_8-S_4}{S_4}=q^4=\frac{64}{4}=16$，所以$q=2$，
所以该等比数列公比为2.
故答案为：2.

14．一个箱子里有 5 个相同的球，分别以 1~5 标号，若每次取一颗，有放回地取三次，记至少取出一次的球的个数X，则数学期望$E(X)=$________.

【答案】$\frac{61}{25}$/2.44
【解析】法一：依题意，X的可能取值为 1、2、3，
总的选取可能数为$5^3=125$，
其中$X=1$：三次抽取同一球，选择球的编号有 5 种方式，
故$P(X=1)=\frac{5}{125}=\frac{1}{25}$,
$X=2$：恰好两种不同球被取出（即一球出现两次，另一球出现一次），
选取出现两次的球有 5 种方式，选取出现一次的球有 4 种方式，
其中选取出现一次球的位置有 3 种可能，故事件$X=2$的可能情况有$5\times 4\times 3=60$种，
故$P(X=2)=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$,
$X=3$：三种不同球被取出，
由排列数可知事件$X=3$的可能情有况$5\times 4\times 3=60$种，
故$P(X=3)=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$,
所以$E(X)=1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)$
$=1\times\frac{5}{125}+2\times\frac{12}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{61}{25}$.
故答案为：$\frac{61}{25}$.

法二：依题意，假设随机变量X_i，其中$i=1,2,3,4,5$：

其中$X_i=\begin{cases}1,\text{这 3 次选取中,球}i\text{至少被取出一次}\\0,\text{这 3 次选取中,球}i\text{一次都没被取出}\end{cases}$，则$X=\sum_{i=1}^{5}X_i$，

由于球的对称性，易知所有$E[X_i]$相等，
则由期望的线性性质，得$E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{5}X_i\right]=\sum_{i=1}^{5}\quad E[X_i]=5E[X_i]$，

由题意可知，球i在单次抽取中未被取出的概率为$\frac{4}{5}$，

由于抽取独立，三次均未取出球i的概率为$P(X_i=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$，

因此球i至少被取出一次的概率为：$P(X_i=1)=1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$，

故$E[X_i]=\frac{61}{125}$，

所以$E[X]=5E[X_i]=5\times\frac{61}{125}=\frac{61}{25}$.

故答案为：$\frac{61}{25}$.

四、解答题

15．为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表：

超声波检查结果组别	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1)记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 P，求 P 的估计值；
(2)根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(x^2\geqslant k)$	0.005	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】(1)$\frac{9}{10}$

(2)有关

【解析】（1）根据表格可知，检查结果不正常的200人中有180人患病，所以p的估计值为$\frac{180}{200}=\frac{9}{10}$;

（2）零假设为H_0：超声波检查结果与患病无关，

根据表中数据可得，$\chi^2=\frac{1000\times(20\times20-780\times180)^2}{800\times200\times800\times200}=765.625>10.828=x_{0.001}$，

根据小概率值$\alpha=0.001$的χ^2独立性检验，我们推断H_0不成立，即认为超声波检查结果与患该病有关，该推断犯错误的概率不超过0.001.

16．设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$

(1)证明：$\{na_n\}$为等差数列；

(2)设$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求$f'(-2)$.

【答案】(1)见解析；

(2)$f'(-2)=\frac{7}{9}-\frac{(3m+7)(-2)^m}{9}$

【分析】（1）根据题目所给条件$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$化简，即可证明结论；

（2）先求出$\{a_n\}$的通项公式，代入函数并求导，函数两边同乘以x，作差并利用等比数列前n项和得出导函数表达式，即可得出结论.

【】（1）由题意证明如下，$n\in N^*$，

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$，

$\therefore(n+1)a_{n+1}=na_n+1$，即$(n+1)a_{n+1}-na_n=1$，

$\therefore\{na_n\}$是以$a_1=3$为首项，1 为公差的等差数列.

（2）由题意及（1）得，$n\in N^*$，

在数列$\{na_n\}$中，首项为 3，公差为 1，

$\therefore na_n=3+1\times(n-1)$，即$a_n=1+\frac{2}{n}$，

在$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$中，

$f(x)=3x+2x^2+\cdots+\left(1+\frac{2}{m}\right)x^m$，$f'(x)=3+4x+\cdots+(m+2)x^{m-1}$

$\therefore\begin{cases}f'(x)=3+4x+\cdots+(m+2)x^{m-1}\\xf'(x)=3x+4x^2+\cdots+(m+2)x^m\end{cases}$，

当$x\neq1$且$x\neq0$时，

$\therefore(1-x)f'(x)=3+x+x^2+\cdots+x^{m-1}-(m+2)x^m=3+\frac{x(1-x^{m-1})}{1-x}-(m+2)x^m$，

$\therefore f'(x)=\frac{3}{1-x}+\frac{x(1-x^{m-1})}{(1-x)^2}-\frac{(m+2)x^m}{1-x}$

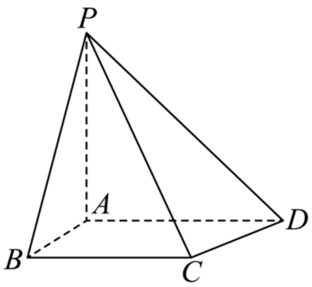
$\therefore f'(-2)=\frac{3}{1-(-2)}+\frac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{[1-(-2)]^2}-\frac{(m+2)(-2)^m}{1-(-2)}$

$=1+\frac{(-2)[1-(-2)^{m-1}]}{9}-\frac{(m+2)(-2)^m}{3}$

$=1-\frac{2}{9}-\frac{(-2)^m}{9}-\frac{(m+2)(-2)^m}{3}$

$=\frac{7}{9}-\frac{(3m+7)(-2)^m}{9}$.

17．如图所示的四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$BC\parallel AD,AB\perp AD$.



(1)证明：平面$PAB\perp$平面PAD；

(2)$PA=AB=\sqrt{2},AD=1+\sqrt{3},BC=2$，$P$，$B$，$C$，$D$在同一个球面上，设该球面的球心为$O$.

（i）证明：O在平面$ABCD$上；

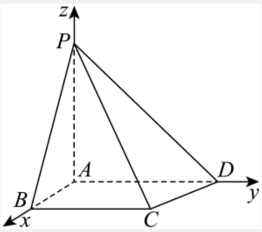
（ii）求直线AC与直线PO所成角的余弦值.

【答案】(1)见解析；

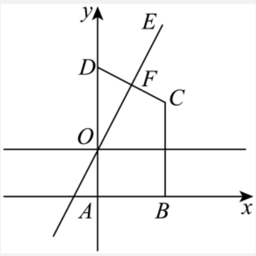
(2)（i）见解析；

（ii）$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【分析】(1) 通过证明$AP \perp AB$，$AP \perp AD$，得出$AB \perp$平面PAD，即可证明面面垂直；
（2）(i) 法一：建立空间直角坐标系并表达出各点的坐标，假设P,B,C,D在同一球面O上，在平面xAy中，得出点O坐标，进而得出点O在空间中的坐标，计算出$|OP| = |OB| = |OC| = |OD|$，即可证明结论；
法二：作出$\triangle BCD$的边BC和CD的垂直平分线，找到三角形的外心O_1，求出PO_1，求出出外心O_1到P，B，C，D的距离相等，得出外心O_1即为P，B，C，D所在球的球心，即可证明结论；
（ii）法一：写出直线AC和PO的方向向量，即可求出余弦值.
法二：求出AC的长，过点O作AC的平行线，交BC的延长线为C_1，连接AC_1，PC_1，利用勾股定理求出AC_1的长，进而得出PC_1的长，在$\triangle POC_1$中由余弦定理求出$\cos\angle POC_1$，即可求出直线AC与直线PO所成角的余弦值.
【解析】(1) 由题意证明如下，
在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB \perp AD$，
$AB \subset$平面$ABCD$，$AD \subset$平面$ABCD$，
$\therefore AP \perp AB$，$AP \perp AD$，
$\because AP \subset$平面PAD，$AD \subset$平面PAD，$AP \cap AD = A$，
$\therefore AB \perp$平面PAD，
$\because AB \subset$平面PAB，
$\therefore$平面$PAB \perp$平面PAD.
（2）(i) 由题意及（1）证明如下，
法一：
在四棱锥$P-ABCD$中，$AP \perp AB$，$AP \perp AD$，$AB \perp AD$，$BC \parallel AD$，
$PA = AB = \sqrt{2}$，$AD = 1+\sqrt{3}$，
建立空间直角坐标系如下图所示，



$\therefore A(0,0,0), B(\sqrt{2},0,0), C(\sqrt{2},2,0), D(0,1+\sqrt{3},0), P(0,0,\sqrt{2})$，
若P，B，C，D在同一个球面上，
则$|OP| = |OB| = |OC| = |OD|$，
在平面xAy中，



$\therefore A(0,0), B(\sqrt{2},0), C(\sqrt{2},2), D(0,1+\sqrt{3})$，

$\therefore$线段CD中点坐标$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$，

直线CD的斜率：$k_1 = \frac{1+\sqrt{3}-2}{0-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$，

直线CD的垂直平分线EF斜率：$k_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$直线CD的方程：$y - \frac{\sqrt{3}+3}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

即$y=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}+3}{2}$，

当$y=1$时，$1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\left(x_O-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}+3}{2}$，解得：$x_O=0$，

$\therefore O(0,1)$

在立体几何中，$O(0,1,0)$，

$$\because\begin{cases}|OP|=\sqrt{0^2+1^2+\left(0-\sqrt{2}\right)^2}\\|OB|=\sqrt{\left(0-\sqrt{2}\right)^2+1^2+0^2}\\|OC|=\sqrt{\left(0-\sqrt{2}\right)^2+(1-2)^2+0^2}\\|OD|=\sqrt{0^2+\left(1-1-\sqrt{3}\right)^2+0^2}\end{cases}$$

解得：$|OP|=|OB|=|OC|=|OD|=\sqrt{3}$，

$\therefore$点O在平面$ABCD$上.

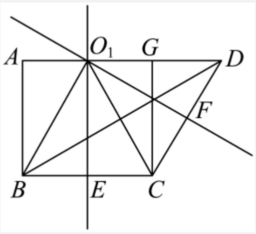
法二：

$\because P$，B，C，D在同一个球面上，

$\therefore$球心到四个点的距离相等

在$\triangle BCD$中，到三角形三点距离相等的点是该三角形的外心，

作出BC和CD的垂直平分线，如下图所示，



由几何知识得，

$O_1E=AB=\sqrt{2}$，$BE=CE=AO_1=GO_1=\frac{1}{2}BC=1$，$O_1D=AD-AO_1=\sqrt{3}$

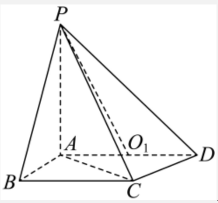
$BO_1=CO_1=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore O_1D=BO_1=CO_1$，

$\therefore$点O_1是$\triangle BCD$的外心，

在 Rt$\triangle AOP$中，$AP\perp AD$，$AP=\sqrt{2}$，

由勾股定理得，



$PO_1=\sqrt{AP^2+AO_1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$

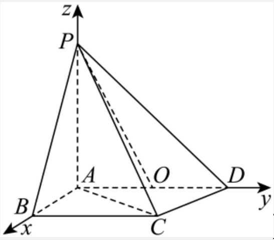
$\therefore PO_1=BO_1=CO_1=O_1D=\sqrt{3}$，

$\therefore$点O_1即为点P，B，C，D所在球的球心O，

此时点O在线段AD上，$AD\subset$平面$ABCD$，

$\therefore$点O在平面$ABCD$上.

（ii）由题意，（1）（2）（ii）及图得，



$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0),\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$，

设直线AC与直线PO所成角为θ，

$\therefore\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PO}|}=\frac{|0+2\times1+0|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2+0}\times\sqrt{0+1^2+(-\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

法 2：

由几何知识得，$PO=\sqrt{3}$，

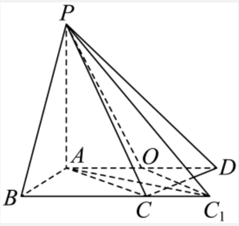
$AB\perp AD$，$BC\parallel AD$，

$\therefore AB\perp BC$，

在 Rt△ABC中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，由勾股定理得，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$，

过点O作AC的平行线，交BC的延长线为C_1，连接AC_1，PC_1，



则$OC_1=AC=\sqrt{6}$，直线AC与直线PO所成角即为△POC_1中$\angle POC_1$或其补角.

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$AC_1\subset$平面$ABCD$，$PA\cap AC_1=A$，

$\therefore PA\perp AC_1$，

在 Rt△ABC_1中，$AB=\sqrt{2}$，$BC_1=BC+CC_1=2+1=3$，由勾股定理得，

$AC_1=\sqrt{AB^2+BC_1^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{11}$，

在 Rt△APC_1中，$PA=\sqrt{2}$，由勾股定理得，

$PC_1=\sqrt{PA^2+AC_1^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{11})^2}=\sqrt{13}$，

在△POC_1中，由余弦定理得，

$PC_1^2=PO^2+OC_1^2-2PO\cdot OC_1\cos\angle POC_1$，

即：$(\sqrt{13})^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{6}\cos\angle POC_1$

解得：$\cos\angle POC_1=-\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$直线AC与直线PO所成角的余弦值为：$|\cos\angle POC_1|=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

18．设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，下顶点为$A$，右顶点为$B$，$|AB|=\sqrt{10}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足$|AR|\cdot|AP|=3$.

（i）设$P(m,n)$，求点R的坐标（用 m，n 表示）；

（ii）设 O 为坐标原点，Q是椭圆上的动点，直线 OR 的斜率为直线OP的斜率的 3 倍，求$|PQ|$的最大值.

【答案】(1)$\frac{x^2}{9}+y^2=1$

(2)(i) $\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}\right)$ (ii) $3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

【分析】(1) 根据题意列出a,b,c的关系式,解方程求出a,b,c,即可得到椭圆的标准方程;

(2) (i)设$R(x_0,y_0)$,根据斜率相等以及题目条件列式,化简即可求出或者利用数乘向量求出;

(ii) 根据斜率关系可得到点P的轨迹为圆（除去两点），再根据点与圆的最值求法结合三角换元或者直接运算即可解出.

【解析】(1) 根据题可知,$A(0,-b),B(a,0)$，所以$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}\\ e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$，解得$a^2=9,b^2=1,c^2=8$，

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$;

(2) (i)设$R(x_0,y_0)$，易知$m\neq 0$，

法一：所以$k_{AP}=\frac{n+1}{m}$，故$\frac{y_0+1}{x_0}=\frac{n+1}{m}$，且$mx_0>0$.

因为$A(0,-1)$，$|AR||AP|=3$，所以$\sqrt{x_0^2+(y_0+1)^2}\times\sqrt{m^2+(n+1)^2}=3$，

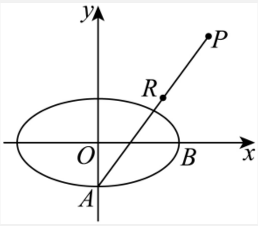
即$\left[1+\left(\frac{n+1}{m}\right)^2\right]x_0m=3$，解得$x_0=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，所以$y_0=\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}$,

所以点R的坐标为$\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}\right)$.

法二：设$\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AP},\lambda>0$，则$|AR||AP|=3\Rightarrow\lambda[m^2+(n+1)^2]=3$，所以

$\lambda=\frac{3}{m^2+(n+1)^2}$，$\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AP}=\lambda(m,n+1)=\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}\right)$，故

点R的坐标为$\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}\right)$.



(ii)因为$k_{OR}=\frac{\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}}{\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}}=\frac{n+2-m^2-n^2}{3m}$,$k_{OP}=\frac{n}{m}$,由$k_{OR}=3k_{OP}$,可得

$\frac{3n}{m}=\frac{n+2-m^2-n^2}{3m}$,化简得$m^2+n^2+8n-2=0$,即$m^2+(n+4)^2=18(m\neq 0)$,

所以点P在以$N(0,-4)$为圆心,$3\sqrt{2}$为半径的圆上（除去两个点）,

$|PQ|_{\max}$为Q到圆心N的距离加上半径,

法一：设$Q(3\cos\theta,\sin\theta)$,所以

$|QN|^2=(3\cos\theta)^2+(\sin\theta+4)^2=9\cos^2\theta+\sin^2\theta+8\sin\theta+16$

$=8\cos^2\theta+1+8\sin\theta+16$

$=8(1-\sin^2\theta)+8\sin\theta+17$

$=-8\sin^2\theta+8\sin\theta+25$

$=-8\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+27\leq 27$,当且仅当$\sin\theta=\frac{1}{2}$时取等号,

所以$|PQ|_{\max}=\sqrt{27}+3\sqrt{2}=3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

法二：设$Q\left(x_Q,y_Q\right)$，则$\frac{x_Q^2}{9}+y_Q^2=1$，

$|QN|^2=x_Q^2+\left(y_Q+4\right)^2=9-9y_Q^2+y_Q^2+8y_Q+16=-8y_Q^2+8y_Q+25$

$= -8\left(y_Q-\frac{1}{2}\right)^2+27 \le 27$，当且仅当$y_Q=\frac{1}{2}$时取等号，

故$|PQ|_{\max}=\sqrt{27}+3\sqrt{2}=3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

19.（1）设函数$f(x)=5\cos x-\cos 5x$,求$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$的最大值；

（2）给定$\theta\in(0,\pi)$，设 a 为实数，证明：存在$y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得$\cos y\le\cos\theta$；

（3）若存在φ使得对任意 x，都有$5\cos x-\cos(5x+\varphi)\le b$，求 b 的最小值.

【答案】(1)$3\sqrt{3}$

(2)见解析

(3)$3\sqrt{3}$

【分析】（1）利用导数结合三角变换得导数零点，讨论导数的符号后得单调性，从而可求最大值；或者利用均值不等式可求最大值.

（2）利用反证法可证三角不等式有解；

（3）先考虑$\varphi=0,\pi$时b的范围，对于$\varphi\in(0,\pi)$时，可利用（2）中的结论结合特值法求得$b\ge3\sqrt{3}$，从而可得b的最小值；或者先根据函数解析特征得$b\ge0$，再结合特值法可得$b\ge3\sqrt{3}$，结合（1）的结果可得b的最小值.

【解析】（1）法 1：$f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=10\cos 3x\sin 2x$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，故$2x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故$\sin 2x\ge0$，

当$0<x<\frac{\pi}{6}$时，$\cos 3x>0$即$f'(x)>0$，

当$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$时，$\cos 3x<0$即$f'(x)<0$，

故$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上为增函数，在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$为减函数，

故$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=5\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}=3\sqrt{3}$.

法 2：我们有$\cos 5x=\cos(x+4x)=\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x$

$=\cos x(2\cos^2 2x-1)-\sin x\cdot 2\sin 2x\cos 2x$

$=\cos x(2(2\cos^2 x-1)^2-1)-\sin x\cdot 2\cdot 2\sin x\cos x\cos 2x$

$=\cos x(8\cos^4 x-8\cos^2 x+1)-4\cos x\cos 2x\sin^2 x$

$=8\cos^5 x-8\cos^3 x+\cos x-4\cos x(2\cos^2 x-1)(1-\cos^2 x)$

$=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$.

所以：

$f(x)=5\cos x-\cos 5x=5\cos x-(16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x)=20\cos^3 x-16\cos^5 x$

$=4\cos^3 x(5-4\cos^2 x)\le4|\cos x|^3(5-4|\cos x|^2)=4|\cos x|^3(\sqrt{5}-2|\cos x|)(\sqrt{5}+2|\cos x|)$

$$=\frac{32}{3}\left(|\cos x|\cdot|\cos x|\cdot|\cos x|\cdot\frac{\sqrt{15}+3}{4}(\sqrt{5}-2|\cos x|)\cdot\frac{\sqrt{15}-3}{4}(\sqrt{5}+2|\cos x|)\right)$$

$$\le\frac{32}{3}\left(\frac{1}{5}\left(|\cos x|+|\cos x|+|\cos x|+\frac{\sqrt{15}+3}{4}(\sqrt{5}-2|\cos x|)+\frac{\sqrt{15}-3}{4}(\sqrt{5}+2|\cos x|)\right)\right)^5$$

$=\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5=3\sqrt{3}$.

这得到$f(x)\le3\sqrt{3}$，同时又有$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=5\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}=3\sqrt{3}$，

故$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$3\sqrt{3}$，在$R$上的最大值也是$3\sqrt{3}$.

（2）法 1：由余弦函数的性质得$\cos x\le\cos\theta$的解为$[2k\pi+\theta,2k\pi+2\pi-\theta]$，$k\in Z$，

若任意$[2k\pi+\theta,2k\pi+2\pi-\theta],k\in\mathrm{Z}$与$[a-\theta,a+\theta]$交集为空，
则$a-\theta>2k\pi+2\pi-\theta$且$a+\theta<2k\pi+2\pi+\theta$，此时$a$无解，
矛盾，故无解；故存在$k\in\mathrm{Z}$，使得$[2k\pi-\theta,2k\pi+\theta]\cap(a-\theta,a+\theta)\neq\emptyset$，
法 2：由余弦函数的性质知$\cos y\leq\cos\theta$的解为$[2k\pi+\theta,2(k+1)\pi-\theta](k\in Z)$，
若每个$[2k\pi+\theta,2(k+1)\pi-\theta]$与$[a-\theta,a+\theta]$交集都为空，
则对每个$k\in Z$，必有$2(k+1)\pi-\theta<a-\theta$或$2k\pi+\theta>a+\theta$之一成立.

此即$k<\frac{a}{2\pi}-1$或$k>\frac{a}{2\pi}$，但长度为1的闭区间$\left[\frac{a}{2\pi}-1,\frac{a}{2\pi}\right]$上必有一整数$k$，该整数$k$不满足条件，矛盾.

故存在$y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得$\cos y\leq\cos\theta$成立.
（3）法 1：记$h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，
因为$h(x+2\pi)=5\cos(x+2\pi)-\cos(5x+10\pi+\varphi)=h(x)$，
故$h(x)$为周期函数且周期为2π,故只需讨论$x\in[0,2\pi],\varphi\in[0,\pi]$的情况.
当$\varphi=\pi$时，$h(x)=5\cos x-\cos(5x+\pi)=5\cos x+\cos 5x\leq 6$，
当$\varphi=0$时，$h(x)=5\cos x-\cos 5x$，
此时$h'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=10\cos 3x\sin 2x,x\in(0,2\pi)$，

令$h'(x)=0$，则$x=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\pi,\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}$,

而$h(\frac{\pi}{6})=h(\frac{11\pi}{6})=3\sqrt{3},h(\frac{\pi}{2})=h(\frac{3\pi}{2})=0,h(\frac{5\pi}{6})=h(\frac{7\pi}{6})=-3\sqrt{3},h(\pi)=-4$，

$h(0)=h(2\pi)=4$，故$h(x)_{\max}=h(\frac{\pi}{6})=h(\frac{11\pi}{6})=3\sqrt{3}$，

当$\varphi\in(0,\pi)$，在（2）中取$\varphi=t$，则存在$y\in[\varphi-\theta,\varphi+\theta]$，使得$\cos y\leq\cos\theta$，

取$\theta=\frac{5\pi}{6}$，则$\cos y\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$，取$x=\frac{y-\varphi}{5}\in\left(-\frac{\theta}{5},\frac{\theta}{5}\right)$即$x=\frac{y-\varphi}{5}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$,

故$5\cos x\geq\frac{5\sqrt{3}}{2}$，故$5\cos x-\cos(5x+\varphi)\geq 3\sqrt{3}$，

综上$b\geq 3\sqrt{3}$，可取$x=\frac{\pi}{6}$，$\varphi=0$使得等号成立.

综上，$b_{\min}=3\sqrt{3}$.
法 2：设$g_{\varphi}(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$.
①一方面，若存在φ，使得$g_{\varphi}(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leq b$对任意$x$恒成立，则对这样的$\varphi$，同样有$g_{\varphi}(x)=-g_{\varphi}(x+\pi)\geq -b$.
所以$\left|g_{\varphi}(x)\right|\leq b$对任意$x$恒成立，这直接得到$b\geq 0$.

设$\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{6}=m$，则根据$\left|g_{\varphi}(x)\right|\leq b$恒成立，有

$$b\geq\left|g_{\varphi}\left(-\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|5\cos\left(-\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\varphi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)\right|=\left|5\cos\left(\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|6\cos\left(\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=6|\cos m|$$

$$b\geq\left|g_{\varphi}\left(-\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|5\cos\left(-\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\varphi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)\right|=\left|5\cos\left(\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|6\cos\left(\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

$$=6\left|\cos\left(m+\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$b\geq\left|g_{\varphi}\left(-\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|5\cos\left(-\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\varphi}{6}+\frac{5\pi}{2}\right)\right|=\left|5\cos\left(\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|6\cos\left(\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$=6\left|\cos\left(m-\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

所以$|\cos m|,\left|\cos\left(m+\frac{\pi}{3}\right)\right|,\left|\cos\left(m-\frac{\pi}{3}\right)\right|$均不超过$\frac{b}{6}$,

再结合$\cos 2x=2|\cos x|^2-1$，

就得到$\cos 2m, \cos\left(2m+\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)$均不超过$2\left(\frac{b}{6}\right)^2-1=\frac{b^2}{18}-1$.

假设$b<3\sqrt{3}$，则$\frac{b^2}{18}-1<\frac{(3\sqrt{3})^2}{18}-1=\frac{1}{2}$,

故$\cos 2m, \cos\left(2m+\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$.

但这是不可能的，因为三个角$2m, 2m+\frac{2\pi}{3}, 2m-\frac{2\pi}{3}$和单位圆的交点将单位圆三等分，这三个点不可能都在直线$x=\frac{1}{2}$左侧.

所以假设不成立，这意味着$b\geq 3\sqrt{3}$.

②另一方面，若$b=3\sqrt{3}$，则由（1）中已经证明$f(x)\leq 3\sqrt{3}$，

知存在$\varphi=0$，使得

$5\cos x-\cos(5x+\varphi)=5\cos x-\cos 5x=f(x)\leq 3\sqrt{3}=b$.

从而$b=3\sqrt{3}$满足题目要求.

根据上述两个方面，可知b的最小值是$3\sqrt{3}$.