

Bir Coklu Ikisel Dagilim (Multivar. Binary Distribution) ve Boltzmann Dagilimi

$$P(\mathbf{x}; W) = \frac{1}{Z(W)} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \right] \quad (3)$$

ki W simetrik ve caprazinda (diagonal) sifir iceren bir matristir.

Olurluk (likelihood)

$$\prod_{n=1}^N P(\mathbf{x}^{(n)}; W) = \frac{1}{Z(W)^N} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}^{(n)T} W \mathbf{x}^{(n)} \right]$$

Log olurluk

$$\mathcal{L} = \ln \left(\prod_{n=1}^N P(\mathbf{x}^{(n)}; W) \right) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^{(n)T} W \mathbf{x}^{(n)} - \ln Z(W) \right] \quad (1)$$

Birazdan $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}}$ turevini alacagiz, o sirada $\ln Z(W)$ 'nin turevi lazim, daha dogrusu $Z(W)$ 'yi nasıl turevi alinir hale getiririz?

$Z(W)$ normalizasyon sabiti olduguna gore, dagilimin geri kalaninin sonsuzlar uzerinden entegrali (ya da toplami) normalizasyon sabitine esittir,

$$Z(W) = \sum_{\mathbf{x}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \right]$$

$$\ln Z(W) = \ln \left[\sum_{\mathbf{x}} \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \right) \right]$$

Log bazli turev alinca log icindeki hersey oldugu gibi bolume gider, ve log icindeki turevi alinirak bolume koyulur. Fakat log icine dikkatli bakarsak bu zaten $Z(W)$ 'nin tanimidir, boylece denklemi temizleme sansi dogdu, bolume hemen $Z(W)$ deriz, ve turevi log'un icine uygulariz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \ln Z(W) &= \frac{1}{Z(W)} \left[\sum_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \right) &= \frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \right) \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2)$$

(2)'in icindeki bolumu acalim,

$$\frac{\partial}{\partial w_{ij}} \mathbf{x}^T W \mathbf{x} = x_i x_j$$

Simdi (2)'ye geri koyalim,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} \right) x_i x_j \\
\frac{\partial}{\partial w_{ij}} \ln Z(\mathbf{W}) &= \frac{1}{Z(\mathbf{W})} \left[\sum_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} \right) x_i x_j \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \frac{1}{Z(\mathbf{W})} \exp \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} \right) x_i x_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}; \mathbf{W}) x_i x_j
\end{aligned}$$

Ustteki son ifadede bir kisaltma kullanalim,

$$\sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}; \mathbf{W}) x_i x_j = \langle x_i, x_j \rangle_{P(\mathbf{x}; \mathbf{W})}$$

Artik $\ln Z(\mathbf{W})$ 'nin turevini biliyoruz. O zaman tum log olurlugun turevine (1) donebiliriz,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial w_{ij}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^{(n)T} \mathbf{W} \mathbf{x}^{(n)} - \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \ln Z(\mathbf{W}) \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} x_i^{(n)} x_j^{(n)} - \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \ln Z(\mathbf{W}) \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} x_i^{(n)} x_j^{(n)} - \frac{1}{2} \langle x_i x_j \rangle_{P(\mathbf{x}; \mathbf{W})} \right]
\end{aligned}$$

1/2 sabitlerini atalim,

$$= \sum_{n=1}^N \left[x_i^{(n)} x_j^{(n)} - \langle x_i x_j \rangle_{P(\mathbf{x}; \mathbf{W})} \right]$$

Eger

$$\langle x_i x_j \rangle_{\text{Data}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_i^{(n)} x_j^{(n)}$$

olarak alırsak, esitligin sag tarafi verisel kovaryansi (empirical covariance) temsil eder. Duzenleyince,

$$N \cdot \langle x_i x_j \rangle_{\text{Data}} = \sum_{n=1}^N x_i^{(n)} x_j^{(n)}$$

simdi esitligin sag tarafi uc ustteki formule geri koyulabilir,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} = N \left[\langle x_i x_j \rangle_{\text{Data}} - \langle x_i x_j \rangle_{P(x;W)} \right]$$

Bu bir gradyan guncelleme formulu olarak gorulebilir, ve N yerine bir guncelleme sabiti alınabilir.

Ana dagilim fonksiyonu baz alinarak, yeni veri x uzerinde o x uzerinde biri haric tum ogelerin bilindigi durumda bilinmeyen tek hucre i icin 1 olma olasilik degeri,

$$P(x_i = 1 | x_j, j \neq i) = \frac{1}{1 + e^{-a_i}}$$

ve,

$$a_i = \sum_j w_{ij} x_j$$

Bu kosulsal olasiligin ne kadar temiz oldugu onemli, ustteki gorulen bir sigmoid fonksiyonu. Bu fonksiyonlar hakkında daha fazla bilgi *Lojistik Regresyon* yazisinda bulunabilir. Ana formül (3)'ten bu noktaya nasil eristik?

x vektörü icinde sadece x_i ogesinin 1 olmasini x^b olarak alalım. Once kosulsal dagilimda “verili” olan kısmi elde etmek lazim. O zaman

$$P(x_j, j \neq i) = P(x^0) + P(x^1)$$

Bu bir marjinalizasyon ifadesi, tum olasi i degerleri uzerinde bir toplam alinca geri kalan j degerlerinin dagilimini elde etmis oluruz.

$$P(x_i = 1 | x_j, j \neq i) = \frac{P(x^1)}{P(x^0) + P(x^1)}$$

cunku $P(A|B) = P(A, B)/P(B)$ bilindigi gibi, ve $P(x^1)$ icinde $x_1 = 1$ setini iceren tum veriler uzerinden.

Esitligin sag tarafinda $P(x^1)$ 'i bolen olarak gormek daha iyi, ayrica ulasmak istedigimiz $1/(1 + e^{-a_i})$ ifadesinde $+1$ 'den kurtulmak iyi olur, boylece sadece e^{-a_i} olan esitligi ispatlariz. Bunun her iki denklemde ters ceviri 1 cikartabiliriz,

$$\begin{aligned} 1/P(x_i = 1|x_j, j \neq i) &= \frac{P(x^0) + P(x^1)}{P(x^1)} \\ &= 1 + \frac{P(x^0)}{P(x^1)} \end{aligned}$$

Bir cikartirsak, $\frac{P(x^0)}{P(x^1)}$ kalir. Bu bize ulasmak istedigimiz denklemde $e^{-\alpha_i}$ ibaresini birakir. Artik sadece $\frac{P(x^0)}{P(x^1)}$ 'in $e^{-\alpha_i}$ 'e esit oldugunu gostermek yeterli.

$$\frac{P(x^0)}{P(x^1)} = \exp(x^{0T} W x^0 - x^{1T} W x^1)$$

Simdi $x^T W x$ gibi bir ifadeyi indisler bazinda acmak icin sunlari yapalim,

$$x^T W x = \sum_{k,j} x_k x_j w_{kj}$$

Ustteki cok iyi bilinen bir acilim. Eger

$$\sum_{k,j} \underbrace{x_k x_j w_{ij}}_{Y_{kj}} = \sum_{k,j} Y_{kj}$$

alirsak birazdan yapacagimiz islemler daha iyi gorulebilir. Mesela $k = i$ olan durumu dis toplamdan disari cekebiliriz

$$= \sum_{k \neq i} \sum_j Y_{kj} + \sum_j Y_{ij}$$

Daha sonra $j = i$ olan durumu ic toplamdan disari cekebiliriz,

$$= \sum_{k \neq i} (\sum_{j \neq i} Y_{kj} + Y_{ki}) + \sum_j Y_{ij}$$

Ic dis toplamlari birlestirelim,

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \neq i, j \neq i} Y_{kj} + \sum_{k \neq i} Y_{ki} + \sum_j Y_{ij} \\ &= \sum_{k \neq i, j \neq i} Y_{kj} + \sum_k Y_{ki} + \sum_j Y_{ij} + Y_{ii} \end{aligned}$$

Ustteki ifadeyi $\exp(x^{0T} W x^0 - x^{1T} W x^1)$ icin kullanirsak,

$$\exp \left(\sum_k Y_{ki}^0 + \sum_j Y_{ij}^0 + Y_{ii}^0 - \left(\sum_k Y_{ki}^1 + \sum_j Y_{ij}^1 + Y_{ii}^1 \right) \right)$$

$\sum_{k \neq i, j \neq i} Y_{kj}$ teriminin nereye gittiği merak edilirse, bu ifade i'ye dayanmadığı için bir eksi bir artı olarak iki defa dahil edilip iptal olacaktı.

$$= \exp \left(0 - \left(\sum_k Y_{ki}^1 + \sum_j Y_{ij}^1 + Y_{ii}^1 \right) \right)$$

W 'nin simetrik matris olduğunu düşünürsek, $\sum_k Y_{ki}^1$ ile $\sum_j Y_{ij}^1$ aynı ifadedir,

$$= \exp \left(- \left(2 \sum_j Y_{ij}^1 + Y_{ii}^1 \right) \right)$$

W sıfır caprazlı bir matristir, o zaman $Y_{ii}^1 = 0$,

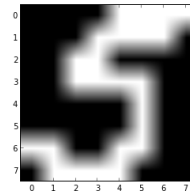
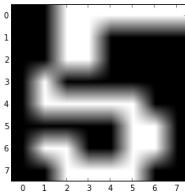
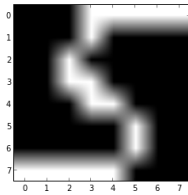
$$= \exp \left(2 \sum_j Y_{ij}^1 \right) = \exp(-2a_i)$$

Orijinal dağılım denkleminde $1/2$ ifadesi vardı, onu basta işlemlere dahil etmemistik, edilseydi sonuç $\exp(-a_i)$ olacaktı.

```
Y = np.loadtxt('../stat/stat_mixbern/binarydigits.txt')
label = np.ravel(np.loadtxt('../stat/stat_mixbern/bindigitlabels.txt'))
Y5 = Y[label==5]
plt.imshow(Y5[0,:].reshape((8,8),order='C'), cmap=plt.cm.gray)
plt.savefig('boltzmann_01.png')

plt.imshow(Y5[1,:].reshape((8,8),order='C'), cmap=plt.cm.gray)
plt.savefig('boltzmann_02.png')

plt.imshow(Y5[2,:].reshape((8,8),order='C'), cmap=plt.cm.gray)
plt.savefig('boltzmann_03.png')
```



Information Theory, Inference and Learning Algorithms, D. MacKay

<http://nbviewer.ipython.org/gist/aflaxman/7d946762ee99daf739f1>