

Kisitli Boltzmann Makinalari (Restricted Boltzmann Machines -RBM-)

Bir RBM icinde ikisel (binary) degerler tasiyan gizli (hidden) h degiskenler, ve yine ikisel gorunen (visible) degiskenler v vardir. Z aynen once gordugumuz Boltzman Makinalarinda (BM) oldugu gibi normalizasyon sabitidir.

$$p(x, h; W) = \exp(-E(x, h))/Z$$

E tanimina “enerji” olarak atif yapildigini da gorebilirsiniz bazen.

$$E(x, h) = -h^T W x - c^T x - b^T h$$

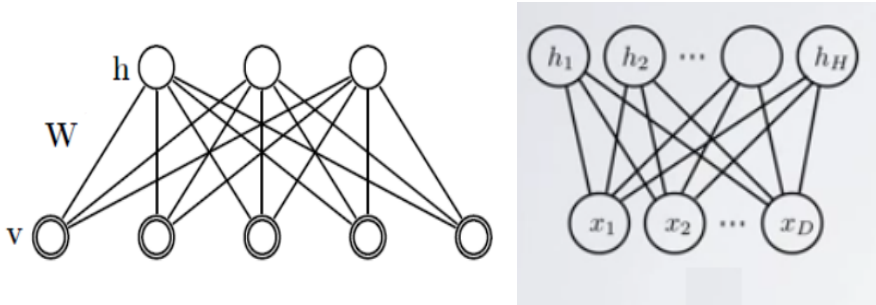
Dikkat edilirse, BM’lerden farkli olarak RBM taniminda c, b degiskenleri var. Bu degiskenler yanlilik (bias) icindir, yani veri icindeki genel egilimi saptamaları için modele konulmustur. Ayrica $h^T W x$ terimi var, bu BM’deki $x^T W x$ biraz farkli, simdi gizli degiskenler, h üzerinden x ’ler arasinda baglanti yapıyor. Bir baska ilginç farklılık BM ile tüm x ’ ogeleri birbirine baglanabiliyordu, RBM ile daha az (ya da fazla) olabilecek h katmanında baglantılar paylasiliyor. Özellikle azaltma durumunda RBM ozellik alanini azaltarak bir tur genelleme eylemini beceriyor.

Ustteki formül alttaki gibi acilabilir,

$$= - \sum_j \sum_k W_{j,k} h_j x_k - \sum_k c_k x_k - \sum_j b_j h_j$$

Dikkat: h, x degiskenleri olasilik teorisinden bilinen rasgele degiskenlerdir, yani hem x ’e hem de h ’e “zar attirabiliriz” / bu degiskenler üzerinden orneklem toplayabiliriz. Bu kritik bir konu. Ayrica, ustteki tanimlardan net sekilde anlasiliyor ama bir daha vurgulayalım; RBM’ler aynen BM’ler gibi bir olasilik dagilimi üzerinden tanimlanirlar. Tüm mumkun degerleri üzerinden entegralleri (ya da toplamlari) alinince sonuc 1 olur, vs.

RBM’lerin alttaki gibi resmedildigini gorebilirsiniz.



RBM’lerin “kisitli” olarak tanimlanmalarinin sebebi, gizli degiskenlerin kendi aralarinda, ve gorunen degiskenlerin kendi aralarinda direk baglantiya izin verilmiş olmasidir, bu bakimdan “kisitlanmislardır”. Baglantılara, W üzerinden

sadece gizli ve gorunen degiskenler (tabakalar) arasinda izin verilmistir. Bu tabii ki matematiksel olarak bazi kolayliklar sagliyor.

Devam edelim, ana formulden hareketle cebirsel olarak sunlar da dogrudur,

$$\begin{aligned} p(x, h; W) &= \exp(-E(x, h))/Z \\ &= \exp(h^T W x + c^T x + b^T h)/Z \\ &= \exp(h^T W x) \exp(c^T x) \exp(b^T h)/Z \end{aligned}$$

cunku bir toplam uzerindeki exp, ayri ayri exp'lerin carpimi olur. Ayni mantikla, eger ana formulu matris / vektor yerine ayri degiskenler olarak gormek istersek,

$$p(x, h; W) = \frac{1}{Z} \prod_j \prod_k \exp(W_{jk} h_j x_k) \prod_k \exp(c_k x_k) \prod_j \exp(b_j h_j)$$

Notasyonu kolaylastirmak amaciyla b, c terimlerini W icine absorbe edebiliriz, $x_0 = 1$ ve $h_0 = 1$ degerlerini mecbur tutarsak ve $w_{0,:} = c$ ve $w_{:,0} = b$ dersek, yani W 'nin sifirinci satirinin tamamini c 'ye set edip, sifirinci kolonunun tamamini b 'ye set edersek, RBM ana formulunu tekrar elde etmis oluruz, fakat artik

$$\begin{aligned} E(x, h) &= -h^T W x \\ &= - \sum_j \sum_k W_{j,k} h_j x_k \end{aligned}$$

ve

$$p(x, h; W) = \exp(h^T W x)/Z$$

Eger $y \equiv (x, h)$ olarak alirsak,

$$P(x, h; W) = \frac{1}{Z(W)} \exp \left[\frac{1}{2} y^T W y \right]$$

h uzerinden marjinalize edersek,

$$\begin{aligned} P(x; W) &= \sum_h \frac{1}{Z(W)} \exp \left[\frac{1}{2} y^T W y \right] \\ &= \frac{1}{Z(W)} \sum_h \exp \left[\frac{1}{2} y^T W y \right] \end{aligned} \tag{1}$$

And $Z(W)$ itself is

$$Z(W) = \sum_{h,x} \exp \left[\frac{1}{2} y^T W y \right]$$

(1) denkleminde bolumunden sonraki kisma $Z_x(W)$ dersek, sanki ayni exp denkleminin “farkli bir sekilde marjinalize edilmiş hali” olarak gostermiss oluruz onu, ve boylece daha kısa bir formül kullanabiliriz,

$$= \frac{1}{Z(W)} \underbrace{\sum_h \exp \left[\frac{1}{2} y^T W y \right]}_{Z_x(W)}$$

O zaman

$$P(x; W) = \frac{Z_x(W)}{Z(W)}$$

elde ederiz. Veri uzerinden maksimum olurluk icin, yine log uzerinden bir hesap yapariz, BM icin yapmistik bunu,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \ln \left(\prod_{n=1}^N P(x^n; W) \right) = \sum_{n=1}^N \ln P(x^n; W) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln \frac{Z_{x^{(n)}}(W)}{Z(W)} = \sum_{n=1}^N (\ln Z_{x^{(n)}} - \ln Z) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \ln Z_{x^{(n)}}}{\partial w_{ij}} - \frac{\partial \ln Z}{\partial w_{ij}} \right) \end{aligned}$$

Parantez icindeki ilk turevi alalim,

$$\frac{\partial \ln Z_{x^{(n)}}}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \ln \left[\sum_h \exp \left(\frac{1}{2} y^T W y \right) \right]$$