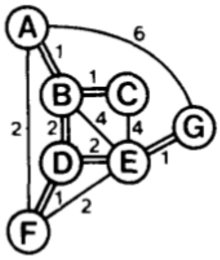
Minimum Kapsamli Agac (Minimum Spanning Tree -MST-)

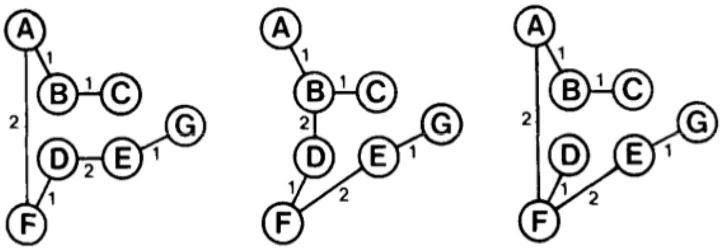
MST algorithmasi kenar agirliklarina (weights) sahip olan bir cizit (graph) yapisi icinde minimal ve kapsayan agaci (MST) bulan algoritmaya verilen isimdir. Mesela alttaki cizit icinde



MST oyle bir baglanti yapisidir ki bastan sona, herhangi bir noktadan (node) bir digerine gecis yapilabilsin, ve bu tum yollarin toplami en minimal olsun. Dikkat, herhangi bir noktadan digerine giden yol en az olsun demiyoruz, bu durumda problem en kisa yol (shortest path) problemi olurdu, ki bu problemi *Dinamik Programlama* yazisinda gorduk. Burada gorecegimiz kapsayan agacin *toplaminin* minimal olmasidir.

Kapsayan agac (spanning tree) kavramini tanimlamak gerekirse, bir cizitin kapsayan agaci orijinal cizitin tum noktalarina sahip olmalidir, agac icinde hicbir dongu (cycle) olmamalidir. Dongu derken bir noktadan digerine atlaya atlaya giderken bizi donup tekrar ayni yere getirebilecek turden "kapali devre" tur bir donguden bahsediyoruz - bu mumkun olmamalidir. Ayrica cizit baglantili olmalidir, yani bir kismi diger kismindan kopuk bir cizit uzerinde MST bulunamaz.

Minimum kapsayici agac ise bu tur pek cok alternatif agaclarin icinde en az agirlikli olanidir. Not, bir cizitin MST cozumu tekil (unique) olmayabilir, ayni agirlikta birden fazla degisik agac mumkundur. Mesela ustteki cizit icin mumkun MST'ler altta goruluyor,



Kontrol edilebilir, ustteki her agacin kenar toplami 8'dir. Bu agaclarin her biri bir MST olarak kabul edilebilir.

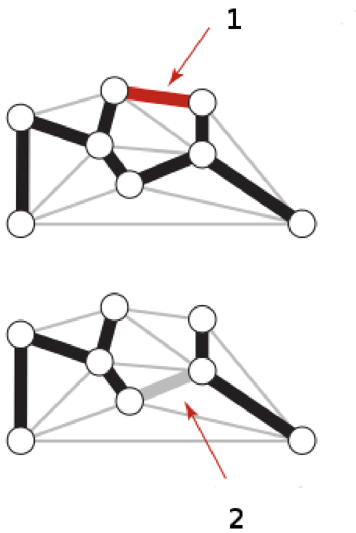
Uygulama baglaminda MST bulma algoritmasinin ne kadar kullanisli olacagi goruluyor herhalde; mesela elektrik hatlari, telefon iletisim hatlari tasarlarken MST kullanilabilir, toplam baglantisi en az olan bir ag yapisi her iki durumda da kullanisli olur. Biyolojik, kimyasal aglarin analizinde bile MST kullanilmaktadir.

Agaclarin Ozellikleri (Properties of Trees)

Baslamadan once bir agaci agac yapan iki onemli ozelligi belirtelim

1) Tanim itibariyle agac olan bir seye, arasinda baglanti olmayan iki noktayi birlestiren bir kenar koyarsak bu agacta bir dongu yaratmis oluruz.

2) Elde olan bir agacin herhangi bir kenarini cikartirsak bu agaci "kopartmis" oluruz, birbiriyle baglantisiz iki alt-agac ortaya cikar.



Resimde her iki durumu goruyoruz. Bu iki ozellik cok onemli, cunku onlari MST'lerin cok temel ozelliklerini ispatlamak icin kullanacagiz. Ondan once bazi tanimlar,

Tanim

Kesik (cut): Bir cizit uzerindeki yapilan kesik, o ciziti birbiriyle alakasiz, baglantisiz iki parcaya / kumeye boler. *Not*: Bir kesik birden fazla kenarin uzerinden gecebilir / kapsayabilir, cunku bir ciziti tamamen ikiye ayirmaktan bahsediyoruz. Bir agactan bahsediyor olsaydik, yukarida belirttigimiz gibi, tek bir kenari kesmek yeterli olurdu.

Birlestiren kenar (crossing edge): birbirinden baglantisiz iki kumedeki herhangi bir noktayi diger kumedeki herhangi bir diger noktayla birlestiren bir kenardir.

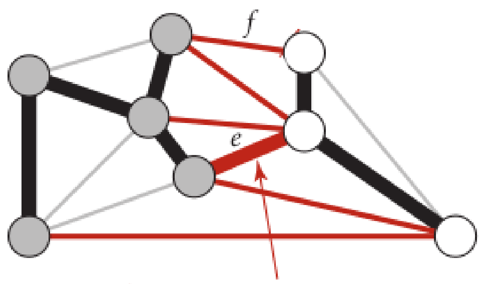
Onerme (Proposition)

Herhangi bir ciziti alalim, ve bu cizitteki bir kesik icindeki (yani kopardigi tum kenarlar) icindeki minimum birlestiren kenara bakalim. Bu kenar o cizitin MST'sinde *kesinlikle* olmalidir.

Ispat

Bu ispat tersini yanlislama (proof by contradiction) yontemini kullanacak. Diyelim ki bir kesik var, ve o kesikteki e minimum birlestiren kenar. Bu cizitin MST'si T olsun. Simdi e'nin T'nin icinde olmadigi durumu dusunelim (yani onermenin dediginin tersi), ve diyelim ki simdi e'yi alip T'ye ekliyoruz. Yeni bir cizit ortaya cikardi, fakat daha once dedigimiz gibi, T'ye bir kenar eklemek ona ayni zamanda bir dongu eklemek demektir, ki bu dongunun icinde en az bir diger kenar f olacaktir (cunku e MST'de olmadigina gore orada baska bir sey var), ki bu f, e'den buyuktur. Fakat o zaman f'yi kesip onun yerine daha az agirlikta olan e'yi ekleyince MST'yi, hem de daha az agirlikla elde etmis olmaz miydik? Evet. Demek ki e'nin MST icinde olmamasi imkansizdir cunku MST tanim itibariyle en minimal agirliga sahip olmalidir.

Alttaki resimde gri ve beyaz ile gosterilen ayri kumelerdeki noktalari bir kesik ile ayrilmislar ve bu kumelerin arasindaki birlestiren kenarlar kirmizi ile gosteriliyor. Burada e ile gosterilen kenar MST icinde olmalidir.



Ustteki kavramlar Kruskal'in MST bulan algoritmasinin temelini olusturmaktadir (bu algoritmaya kisaca Kruskal diyecegiz). Kruskal (ilk basta) birbirinden bagimsiz agaclari yavas yavas yaratir, onlari buyutur. Ayni anda surekli o agaclari minimal bir kenar ile birlestirip onlari daha buyuk bir agac yapma firsatina bakar.

Ufak ufak agaclar ustteki durumda gri ve beyaz noktalari kapsayan agaclar gibi gorulebilir, bunlar cizitin farkli bolgelerinde ayri ayri buyurler. Eger bu ayri ayri bolgelerde, onlara ait MST'ler olusturabilmissek, Onlari minimal sekilde birlestirmek (ustte e ile) bize daha buyuk bir MST saglar.

Kruskal kenarlari teker teker isler, once onlari agirliklarina gore siralar, ve en kucuk kenarlari once alir. Bu yuzden agaclari baglanayan "birlestiren kenarin" minimal kalmasi, ve once alinmasi da saglanir.

Birlesim-Bulus (Union-Find)

Kruskal'in kodlama baglaminda onemli bir puf noktasi, sirayla bakilan bir kenarin mevcut alt-agaclardan birine eklenme durumunda dongu olusturup olusturmadigini hizli bir sekilde anlayabilmesidir. Bunun icin su diger soruyu cevaplamak yeterlidir: bir kenara baktigimizda, bu kenarin iki ucundaki iki noktayi aliriz, ve bu iki noktanin herhangi bir alt-agac icinde, yani ayni alt-agac icinde, olup olmadigina bakariz (hatirlarsak pek cok alt-agac olabiliyor). Eger bu iki nokta herhangi bir alt-agac icinde bulunursa, bu kenari cope atabiliriz, cunku bu noktalar baska bir sekilde bir alt-MST olusturmustur, ve bu alt-MST optimaldir (bkz ustteki ispat).

"Iki noktanin ayni alt agac icinde olup olmadigini anlamak" ise su alt-agaclarin surekli bir "temsili noktaya" isaret etmesiyle halledilebilir (bu isaret, kenarlardan farkli). Eger iki nokta, ayni, temsili noktaya isaret ediyorsa, onlar ayni agac icindedir, vep dolayli olarak bu demektir ki bu noktalar bir sekilde "baglanmistirlar" cunku her alt-agac ayni zamanda ufak bir MST'dir. Bu durumda yeni kenari eklemek tanim itibariyle bir dongu olusturur, ve gereksizdir. Eger noktalar farkli agaclarda iseler, bu agaclari birlestirmek iki temsili noktadan birinin bir digerine isaret etmesiyle halolabilir. Evet birlestirme sonrasi bazi uyeler yeni temsili noktaya isaret etmiyor olabilirler, bu durum, noktadan noktaya atlanip temsili noktaya erismek ile halolur. Bu arada, arama sirasinda, yeni temsili noktaya olan isaretler degistirilir, ki bu "duzeltme" islemi yol sikistirma (path compression) olarak aniliyor.

Alttaki kod tum bu numaralari kullaniyor. Ornek olarak yazinin basinda verilen ciziti kodladik ve MST'sini bulduk. Cizit formati iki yonlu kenar bilgisi gerektirmez, iki nokta arasindaki gecisi bir kere belirtmek yeterlidir.

```
G1 = {
  'a': {'b':1, 'f':2, 'g': 6},
  'b': {'c':1},
  'c': set(),
  'd': {'f':1, 'e':2},
  'e': {'g':1},
  'f': set(),
  'g': set()
}

def find(C, u):
    if C[u] != u:
        C[u] = find(C, C[u])                     # Path compression
    return C[u]

def union(C, R, u, v):
    u, v = find(C, u), find(C, v)
    if R[u] > R[v]:                              # Union by rank
        C[v] = u
    else:
        C[u] = v
    if R[u] == R[v]:                             # A tie: Move v up a level
        R[v] += 1

def kruskal(G):
    E = [(G[u][v],u,v) for u in G for v in G[u]]
    T = set()
    C, R = {u:u for u in G}, {u:0 for u in G}    # Comp. reps and ranks
    print list(sorted(E))
    for _, u, v in sorted(E):
        if find(C, u) != find(C, v):
```

```
            T.add((u, v))
            print (u, v)
            union(C, R, u, v)
    return T

mst = list(kruskal(G1))
print 'MST', mst

[(1, 'a', 'b'), (1, 'b', 'c'), (1, 'd', 'f'), (1, 'e', 'g'), (2, 'a', 'f'), (2, 'd', '
('a', 'b')
('b', 'c')
('d', 'f')
('e', 'g')
('a', 'f')
('d', 'e')
MST [('d', 'e'), ('e', 'g'), ('d', 'f'), ('b', 'c'), ('a', 'f'), ('a', 'b')]
```

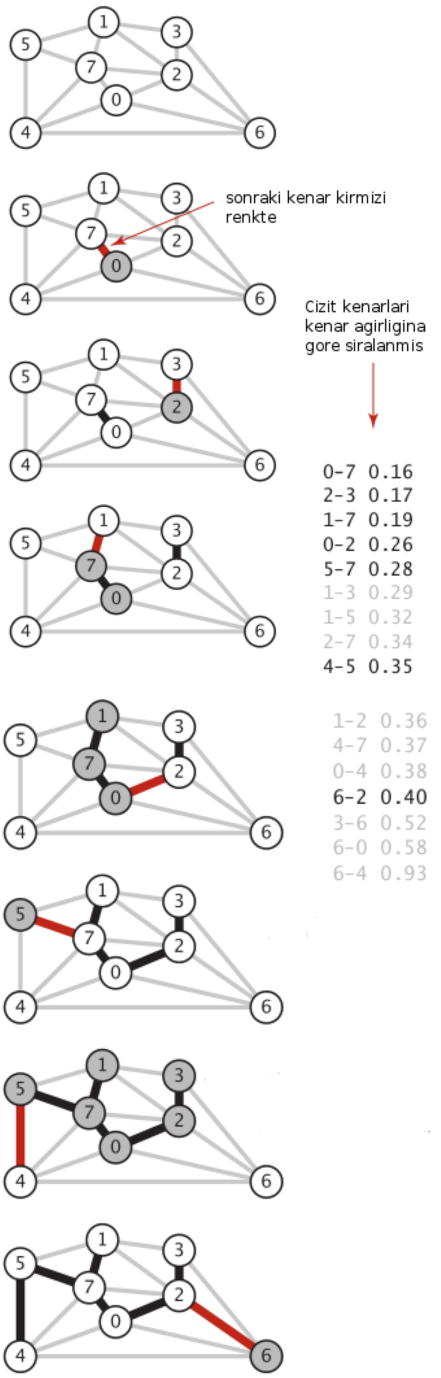
Bu isleyis (yine basta gosterdigimiz) alternatif MST'lerden birincisini buldu (`a-f` bagli, `e-f` bagli degil). Guzel! Kruskal'in isleyis hizi $O(E \log E)$ seviyesindedir, E kenar sayisidir. Bu cok iyi bir performanstir, bu performansin mesela $O(N^2)$'den farkini gostermek icin alttaki hesaba bakalim, eger 100,000 tane kenar olsaydi,

```
e = 100 * 1000
print 'n^2', e**2
print 'log', np.log(e)
print 'kruskal', e*np.log(e)

n^2 10000000000
log 11.512925465
kruskal 1151292.5465
```

Kruskal 1 milyon kusur operasyona orantili bir sonuc verirdi, kiyasla $O(N^2)$ 10 milyar operasyon ortaya cikartiyor!

Bir diger ornek: Altta MST'nin adim adim olusturulmasini da gorecegiz. Kirmizi ile isaretlenen kenar o adimda secilen kenari gosteriyor, siyah olanlar mevcut MST(lerde) olan kenarlari.




```
G2 = {
  0: {7: 0.16, 4: 0.38, 2: 0.26, 6: 0.58},
  1: {5: 0.32, 2: 0.36, 3: 0.29, 7: 0.19},
  2: {3: 0.17, 6: 0.40, 7: 0.34},
  3: {6: 0.52},
  4: {5: 0.35, 7: 0.37, 6: 0.93},
  5: {7: 0.28},
  6: set(),
  7: set()
}
```

```
mst = list(kruskal(G2))
print 'MST', mst
```

```
[(0.16, 0, 7), (0.17, 2, 3), (0.19, 1, 7), (0.26, 0, 2), (0.28, 5, 7), (0.29, 1, 3),
(0, 7)
(2, 3)
(1, 7)
(0, 2)
(5, 7)
(4, 5)
(2, 6)
MST [(2, 6), (4, 5), (5, 7), (0, 7), (2, 3), (1, 7), (0, 2)]
```

Sekilde `5-7`'yi birbirine baglayan 6. adim sonrasi `1-3`'un cozume dahil edilmedigine dikkat edelim. Bu noktada 1 ve 3 dugumleri artik ayni agac icindedirler, ve bu kenari eklemek bir dongu olusturacaktir.

Kruskal algoritmasi, ve ona benzer Prim, ya da "bir sonraki adimda hep en yakini isleyen" algoritmalar acgozlu (greedy) algoritmalar olarak bilinirler. Mesela *Dinamik Programlama* yazisinda gordugumuz uzere, acgozlu yontem en kisa yolu vermeyebiliyordu. MST durumunda acgozluluk faydalidir, acgozlulugun faydali oldugu mutlu orneklerden biridir diyelim!

Not: Bazilarina tanidik gelebilecek bilgisayar bilimin demirbas problemlerinden Seyahat Eden Satis Gorevlisi (Traveling Salesman Problemi -TSP-) NP-Tam olarak bilinir. MST, ki cok hizli isleyen bir algoritma, yaklasiksal olarak TSP'yi cozmekte kullanilabilmektedir.

Sedgewick, R. *Algorithms*, sf. 409

Sedgewick, R. *Algorithms, 4rd Edition*, sf. 624

Heatland, *Python Algorithms*