Kisitli Boltzmann Makinalari (Restricted Boltzmann Machines -RBM-)

Bir RBM icinde ikisel (binary) degerler tasiyan gizli (hidden) h degiskenler, ve yine ikisel gorunen (visible) degiskenler v vardir. Z aynen once gordugumuz Boltzman Makinalarinda (BM) oldugu gibi normalizasyon sabitidir.

$$p(x, h; W) = \exp(-E(x, h))/Z$$

E tanimina "enerji" olarak ta atif yapilabiliyor.

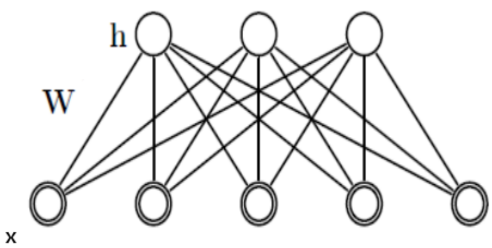
$$E(x, h) = -h^T W x - c^T x - b^T h$$

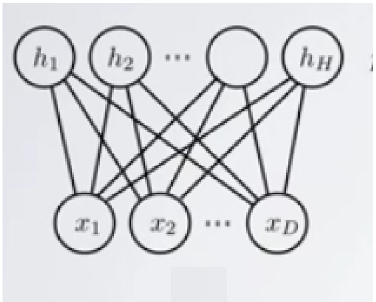
BM'lerden farkli olarak RBM taniminda c, b degiskenleri var. Bu degiskenler yanlilik (bias) icin, yani veri icindeki genel egilimi saptamalari icin modele konulmustur. Ayrica $h^T W x$ terimi var, bu BM'deki $x^T W x$ biraz farkli, gizli degiskenler, h uzerinden x'ler arasinda baglanti yapiyor. Bir baska ilginc farklilik BM ile tum x ogeleri birbirine baglanabiliyordu, RBM ile daha az (ya da fazla) olabilecek h katmaninda baglantilar paylasiliyor. Ozellikle azaltma durumunda RBM ozellik alanini azaltarak bir tur genellemeyi gerceklestirebiliyor.

Formul alttaki gibi de acilabilir,

$$= -\sum_j \sum_k W_{j,k} h_j x_k - \sum_k c_k x_k - \sum_j b_j h_j$$

RBM'lerin alttaki gibi resmedildigini gorebilirsiniz.





h, x degiskenleri olasilik teorisinden bilinen rasgele degiskenlerdir, yani hem x'e hem de h'e "zar attirabiliriz" / bu degiskenler uzerinden orneklem toplayabiliriz.

Ayrica, RBM'ler aynen BM'ler gibi bir olasilik yogunluk fonksiyonu uzerinden tanimlanirlar, onceki formulde gordugumuz gibi, tum mumkun degerleri uzerinden entegralleri (ya da toplamlari) alininca sonuc 1 olur, vs.

RBM'lerin "kisitli" olarak tanimlanmalarinin sebebi gizli degiskenlerin kendi aralarinda, ve gorunen degiskenlerin kendi aralarinda direk baglantiya izin verilmemis olmasidir, bu bakimdan "kisitlanmislardir". Baglantilara, W uzerinden sadece gizli ve gorunen degiskenler (tabakalar) arasinda izin verilmistir. Bu tabii ki matematiksel olarak bazi kolayliklar sagliyor.

Devam edelim, ana formulden hareketle cebirsel olarak sunlar da dogrudur,

$$p(x, h; W) = \exp(-E(x, h))/Z$$

$$= \exp(h^T W x + c^T x + b^T h)/Z$$

$$= \exp(h^T W x) \exp(c^T x) \exp(b^T h)/Z$$

cunku bir toplam uzerindeki exp, ayri ayri exp'lerin carpimi olur. Ayni mantikla, eger ana formulu matris / vektor yerine ayri degiskenler olarak gormek istersek,

$$p(x, h; W) = \frac{1}{Z} \prod_j \prod_k \exp(W_{jk} h_j x_k) \prod_k \exp(c_k x_k) \prod_j \exp(b_j h_j)$$

Notasyonu kolaylastirmak amaciyla b, c terimlerini W icine absorbe edebiliriz, $x_0 = 1$ ve $h_0 = 1$ degerlerini mecbur tutarsak ve $w_{0,:} = c$ ve $w_{:,0} = b$ dersek, yani W'nin sifirinci satirinin tamamini c'ye set edip, sifirinci kolonunun tamamini b'ye set edersek, RBM ana formulunu tekrar elde etmis oluruz, fakat artik

$$E(x, h) = -h^T W x$$

$$= -\sum_j \sum_k W_{j,k} h_j x_k$$

ve

$$p(x, h; W) = \exp(h^T W x)/Z$$

yeterli olacaktir. Bir diger kolaylik x, h yerine tek degisken kullanmak,

Eger $y \equiv (x, h)$ olarak alirsak,

$$P(x, h; W) = \frac{1}{Z(W)} \exp\left[\frac{1}{2} y^T W y\right]$$

h uzerinden marjinalize edersek,

$$P(x; W) = \sum_h \frac{1}{Z(W)} \exp\left[\frac{1}{2} y^T W y\right]$$

$$= \frac{1}{Z(W)} \sum_h \exp\left[\frac{1}{2} y^T W y\right] \tag{1}$$

And $Z(W)$ itself is

$$Z(W) = \sum_{h,x} \exp\left[\frac{1}{2} y^T W y\right]$$

(1) denkleminde bolumunden sonraki kisma $Z_x(W)$ dersek, sanki ayni exp denkleminin "farkli bir sekilde marjinalize edilmis hali" olarak gostermis oluruz onu, ve boylece daha kisa bir formul kullanabiliriz,

$$= \frac{1}{Z(W)} \underbrace{\sum_h \exp\left[\frac{1}{2} y^T W y\right]}_{Z_x(W)}$$

O zaman

$$P(x;W) = \frac{Z_x(W)}{Z(W)}$$

elde ederiz. Veri uzerinden maksimum olurluk icin, yine log uzerinden bir hesap yapariz, BM icin yapmistik bunu,

$$\mathcal{L} = \ln\big(\prod_{n=1}^{N} P(x^n;W)\big) = \sum_{n=1}^{N} \ln P(x^n;W)\big)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{Z_{x^{(n)}}(W)}{Z(W)} = \sum_{n=1}^{N} \big(\ln Z_{x^{(n)}} - \ln Z\big)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} = \sum_{n=1}^{N} \big(\frac{\partial \ln Z_{x^{(n)}}}{\partial w_{ij}} - \frac{\partial \ln Z}{\partial w_{ij}}\big)$$

Parantez icindeki ilk turevi alalim,

$$\frac{\partial \ln Z_{x^{(n)}}}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \ln\left[\sum_h \exp\big(\frac{1}{2} y^T W y\big)\right]$$