Taylor Serisi

Formul

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

Bu formule nasil ulasirim? Su sekildeki bir seri olsun

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Usttekinin turevini alalim. Tabii ki sabit a_0 yokolacak, x'in onundeki katsayi kalacak, vs. Sonuc

$$f' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ..$$

Birkac kez daha

$$f'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + ..$$

$$f''' = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + ...$$

Eger son formule sifir verirsem, 3. terimi cimbizla cekip alabilirim

$$f'''(0) = 3 \cdot 2a_3$$

Cunku geri kalan her sey sifir olup yokoldu, geriye sabitler kaldi. O zaman a_3'u elde etmek istiyorsam,

$$\frac{f'''(0)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = a_3$$

Bir kalip ortaya cikmistir herhalde, genel olarak

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)...1$$

Bu katsayilar Taylor formulunde x_n onune gelecek katsayilardir.

O zaman

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''\frac{x^2}{2!} + ...$$

Daha genel olarak 0 yerine a alirsak, a yakinindaki fonksiyonun acilimini temsil edebiliriz

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''\frac{(x-a)^2}{2!} + ...$$

Alternatif Turetim

Taylor serilerinin arkasindaki fikir, surekli ve sonsuz defa turevi alinabilen turden bir fonksiyon $f(x)$'i bir x_0 noktasinin (burada a sembolu de kullanilabilir) "cevresinde", yakin bolgesinde yaklasiksal olarak temsil edebilmektir.

Turetmek icin

Calculus'un Temel Teorisi der ki:

$$\int_a^x f'(t)\ dt = f(x) - f(a)$$

Bu formulu tekrar duzenlersek, alttakini elde ederiz:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

Bunun uzerinde Parcali Entegral yontemini uygulariz. Parcali Entegral teknigi genel olarak soyledir:

$$\int_a^b u\ dv = u\,v - \int_a^b v\ du$$

Simdi iki ustteki formulun entegral icindeki kismini parcali entegrale uyacak sekilde bolusturelim

$u = f'(t)$ ve $dv = dt$

O zaman acilim

$$f(a) + xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\ dt$$

Alttaki formulu kullanarak

$$\int_a^x xf''(t)\ dt = xf'(x) - xf'(a)$$

iki ustteki formulu su hale getiririz

$$f(a) + \int_a^x xf''(t)\ dt + xf'(a) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\ dt$$

Bazi ortak terimleri disari cekersek

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\ dt$$

Ayni teknigi bir daha uygulayinca

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)\ dt$$

Tum bunlari daha genel olarak kurallastirmamiz gerekirse, tumevarim (induction) teknigini kullanalim, varsayiyoruz ki Taylor'un Teorisi bir n icin gecerli ve

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt$$

Sonuncu entegrali parcali entegral teknigi ile tekrar yazmamiz mumkundur. $(x-t)^n$'in anti-turevi (anti-derivative) $\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}$ ile verilir, o zaman

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt$$

$$= -\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)n!}(x-t)^{n+1}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)n!}(x-t)^{n+1}\ dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\ dt$$

Son entegral hemen cozulebilir

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Alternatif Form

Hesapsal Bilim derslerinde bu serinin alternatif bir formu daha cok karsimiza cikabilir. f'i t yakininda ufak bir h adimi atildigini farzederek Taylor serileri uzerinden $f(t+h)$'i gelistirmek suretiyle temsil edebiliriz. Eger $x = t + h$ ve $a = t$ alirsak alttaki orijinal Taylor serisini

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(x) + ...$$

donusturebiliriz. Baslayalim,

$$x = t + h \Rightarrow h = x - t$$

$$t = a$$

Once $a = t$ gecisini yapalim

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)(x-t) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + ...$$

Simdi $h = x - t$ gecisi

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + f''(t)\frac{(h)^2}{2!} + ...$$

Boylece

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{1}{2}h^2 f''(t) + ...$$

Bu tanimin, birinci turevin formuluyle olan alakasini gormek icin

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ifadesini hatirlamak yararli olabilir, yaklasiksal isareti $\approx$ kullanildi, cunku bu ifade sadece $h \to 0$ iken dogrudur (turevlerin limit olarak tanimindan hareketle). Biraz cebirsel manipulasyon yaparsak

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

$$f(x+h) \approx f'(x)h + f(x)$$

En son formulun Taylor serisi 1. derece acilimiyla ayni oldugu goruluyor.

Iki Boyutlu f(x,y) Fonksiyonunun Taylor Acilimi

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun Taylor acilimini yapmak icin, daha onceden gordugumuz tek boyutlu fonksiyon acilimindan faydalanabiliriz.

Once iki boyutlu fonksiyonu tek boyutlu olarak gostermek gerekir. Tek boyutta isleyen bir fonksiyon F dusunelim ve bu F, arka planda iki boyutlu $f(x,y)$'i kullaniyor olsun

Eger

$$ f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y) $$

fonksiyonun acilimini elde etmek istiyorsak, onu

$$ F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_o + t\Delta y) $$

uzerinden $t = 1$ oldugu durumda hayal edebiliriz. x, y parametrize oldugu icin $f(x(t), y(t))$, yani

$$ x(t) = x_0 + t\Delta x $$

$$ y(t) = y_0 + t\Delta y $$

$F(t)$ baglaminda $x_o, y_o, \Delta x, \Delta y$ sabit olarak kabul edilecekler. Simdi bildigimiz tek boyutlu Taylor acilimini bu fonksiyon uzerinde, bir t_0 noktasi yakininda yaparsak,

$$ F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}F''(t_0)(t - t_0)^2 + ... $$

Eger $t = 1, t_0 = 0$ dersek

$$ F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + ... $$

olurdu. Bu iki degeri, yani $t = 1, t_0 = 0$'i kullanmamizin sebepleri $t = 1$ ile mesela $x_0 + t\Delta x$'in $x_0 + \Delta x$ olmasi, diger yandan $t = 0$ ile ustteki formulde t'nin yokolmasi, basit bir tek boyutlu acilim elde etmek.

Simdi bize gereken F', F'' ifadelerini x, y baglaminda elde edelim, ki bu diferansiyeller F'in t'ye gore birinci ve ikinci diferansiyelleri. Ama F'in icinde x, y oldugu icin acilimin Zincirleme Kanunu ile yapilmasi lazim.

$$ \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} $$

Ayrica

$$\frac{d}{dt}x(t) = \Delta x$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \Delta y$$

olduguna gore, tam diferansiyel daha da basitlesir

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y$$

Simdi bu ifadenin bir tam diferansiyelini alacagiz. Ama ondan once sunu anlayalim ki ustteki ifade icinde mesela birinci terim de aslinda bir fonksiyon, ve asil hali

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F(x(t), y(t))}{\partial x}\Delta x + ...$$

seklinde. O zaman, bu terim uzerinde tam diferansiyel islemini bir daha uyguladigimizda, Zincirleme Kanunu yine isleyecek, mesela ustte $dx(t)/dt$'nin bir daha disari cikmasi gerekecek. O zaman

$$\frac{d^2F}{dt} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt} + \right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dx}{dt} + \right)\Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Delta y \right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Delta y \right)\Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Delta y \Delta x \right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Delta y^2 \right)$$

Calculus'tan biliyoruz ki

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Daha kisa notasyonla

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Yani kismi turevin alinma sirasi farketmiyor. O zaman, ve her seyi daha kisa notasyonla bir daha yazarsak

$$= (f_{xx}\Delta x^2 + f_{xy}\Delta y \Delta x) + (f_{xy}\Delta x \Delta y + f_{yy}\Delta y^2)$$

$$\frac{d^2F}{dt} = (f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta y \Delta x + f_{yy}\Delta y^2)$$

Artik elimizde F ve F' var, bunlari

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + ...$$

icine yerlestirebiliriz. En son su kaldi, $F(0)$ nedir? F'in $t = 0$ oldugu anda degeridir,

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_o + t\Delta y)$$

$$F(0) = f(x_0 + 0 \cdot \Delta x, y_o + 0 \cdot \Delta y)$$

$$= f(x_0, y_o)$$

Benzer sekilde, tum turevler de $t = 0$ noktasinda kullanilacaktir, o zaman onlar da

$$F'(0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2$$

seklinde olurlar. Tamam. Simdi ana formulde yerlerine koyalim,

$$\begin{aligned} F(1) &= f(x_0, y_o) + \\ &\quad f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \\ &\quad \tfrac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2] + ... \end{aligned}$$

Ve

$$F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$$

olduguna gore, Taylor 2D acilimimiz tamamlanmis demektir.

Kaynak

MIT OCW 18.01 Ders 38

http://www.proofwiki.org/wiki/Taylor's_Theorem http://www.math.ubc.ca/ feldman/m200/taylor2dSlides.pdf

http://math.uc.edu/ halpern/Calc.4/Handouts/Taylorseries.pdf