

内容安排的基本逻辑



第七讲 短时傅里叶变换 与连续小波变换初步

简明扼要

学习要点

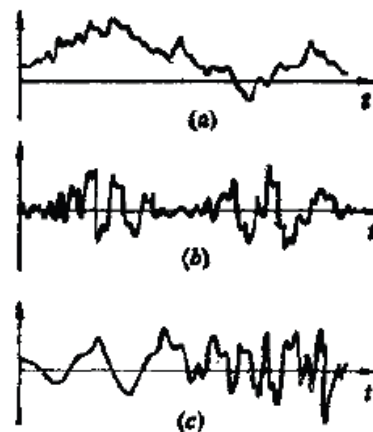
- 理解为什么需要做时频分析 - 理解非平稳随机信号分析的困难
- 理解时频分析的基本假设 - 近似平稳的概念
- 掌握短时傅里叶变换的原理和应用要点
- 掌握小波变换的概念及其相比STFT的优势

为什么需要时频分析

- 非平稳信号

- 均值、方差、自相关函数等统计特征在不同的时间区间有显著差异

- (a) 时变均值
- (b) 时变均方
- (c) 时变频率



- 生物医学信号常常为非平稳信号

- 反映生理系统的动态特性
- 心音、脉搏、即时血压、肌电、胃电等具有非平稳特征
- 不同感知刺激、认知任务、不同睡眠阶段过渡期，脑电信号不平稳

功率谱分析非平稳随机信号的困难

- 随机信号的平稳遍历性是功率谱分析的基本假设
 - 平均周期图法减少方差的原理是，假设每一个分段功率谱为实际功率谱与噪声之和，其中各段的实际功率谱为相同的确定性函数
- 非平稳信号不满足功率谱估计的基本条件
 - 信号幅度、方差、或频率随着时间变化，各分段的功率谱不一致，这些分段功率谱不应该做叠加平均
- 功率谱分析将时间域变换到频率域，完全丢失信号的时间信息，无法体现信号特性随时间的变化
- 某些非平稳随机信号经过预处理满足平稳性质
 - 去趋势项：信号减去其线性或者多项式拟合、高通滤波等，获得均值平稳
 - 去某些已知周期分量，减少等引起delta函数性质谱峰
- 并非所有场合都可以做上述处理
 - 信号不具备上述处理的性质，例如周期成分不确定
 - 如果需要体现信号的时变特性，则不能去趋势而丢失时变信息

举例：线性调频信号

- 正弦信号

- $\text{sineWave} = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \phi_0)$
- 信号的任意时刻频率 f_{inst} 恒定, 即 $f_{\text{inst}}(t) = f_0$

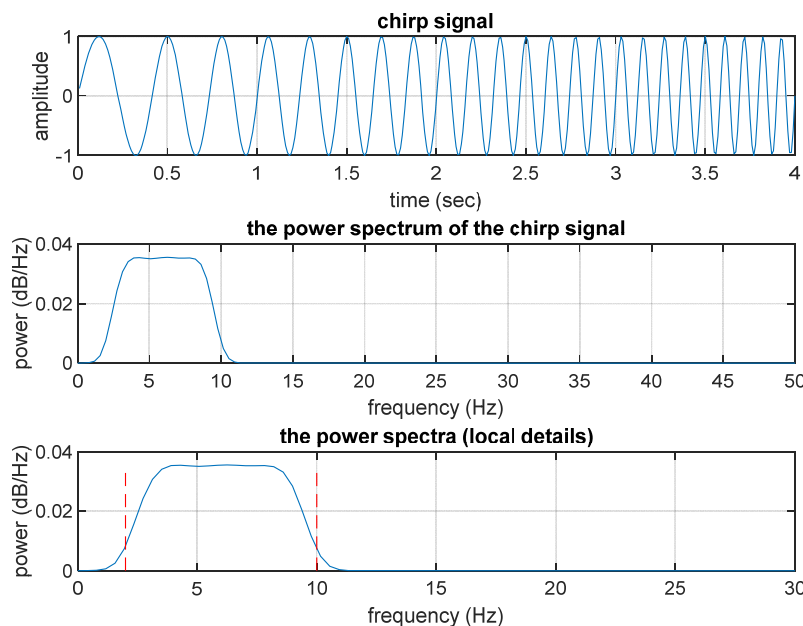
- 线性调频信号Chirp

- 信号的频率为时间的函数, 即 $f_{\text{inst}}(t) = (f_H - f_L) \cdot t + f_L$
- $\text{chirpWave} = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_{\text{inst}} \cdot t + \phi_0)$

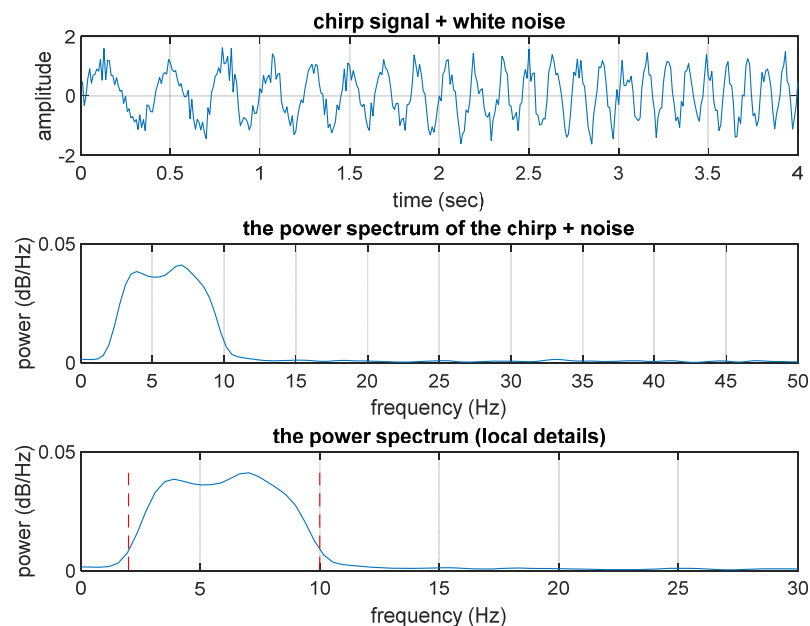
- 仿真

- 线性调频信号
- 线性调频信号 + 白噪声

线性调频信号的功率谱估计



Chirp信号的功率谱



Chirp+Noises的功率谱估计

- 问题——丢失了信号的频率随时间变化的关键信息
 - 无法从功率谱了解信号频率随时间的变化特性

时频分析的概念

- 时频分析
 - 能有效体现随机信号的频域特性随时间变化规律的信号分析方法
 - 例如，体现上述线性调频信号的频率随时间的变化规律
- 时频分析的种类
 - 线性时频分析方法: 短时傅里叶 / Gabor 变换/小波变换
 - 非线性时频分析方法: Wigner-Ville / Cohen类时频分析
 - 非本课程内容
- 不同的时频分析方法具有各自特点和局限性
 - 根据信号和分析需求，选择合适的时频分析方法

近似平稳与局部时频的概念

- 时频分析有赖于“近似平稳”的假设
- 近似平稳
 - 慢变的非平稳信号在较短时间内可以近似认为是平稳的，从而可以借助平稳信号的分析方法进行分析
- 局部频谱
 - 使用一个窄的时间窗口函数取出随机信号的一段，按照平稳随机信号的处理方法估计其频谱特性，由于剔除了窗口之外的信号，这种分析称为局部频谱

短时傅里叶变换

- 定义

- 对于慢变的非平稳信号 $x(t)$ ，使用沿着时间轴滑动的窗函数 $w(t)$ 进行加窗，加窗信号的傅里叶变换称为短时傅里叶变换(short time Fourier transform, STFT)

- 算法

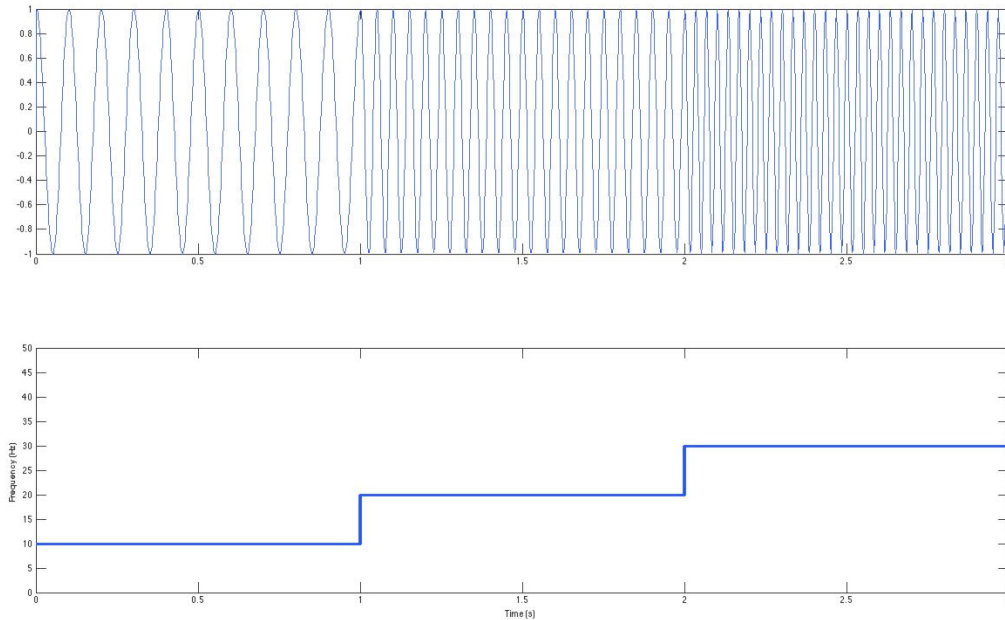
- (1) 选定窗口类型和窗口长度，设定窗口移动步长
- (2) 窗口与信号的开始时刻对齐，截取一段信号
- (3) 对截取的信号进行傅里叶变换
- (4) 按照设定的步长，延时间轴移动窗口，截取一段新的信号，进行傅里叶变换
- (5) 重复上述第三第四步，直到信号的结束

STFT的性质

- 短时傅里叶变换结果是一个时间的函数
 - 当窗函数 $w(t)$ 是一个无穷长时间的矩形窗，则短时傅里叶变换退化成傅里叶变换
- 信号 $x(t)$ 乘以窗函数 $w(t-\tau)$ 等价于取出信号在 τ 时刻附近的一个片段
 - 变换结果表明信号的时刻 τ 附近的频谱特性
 - 窗口沿着时间轴移动，获得一系列 τ 值，对应一系列时间的短时傅里叶结果
- 结果表示为时间位置 τ 和频率 f 的二维函数
 - 反映信号频谱随时间变化的特性

例：分段时变频率信号

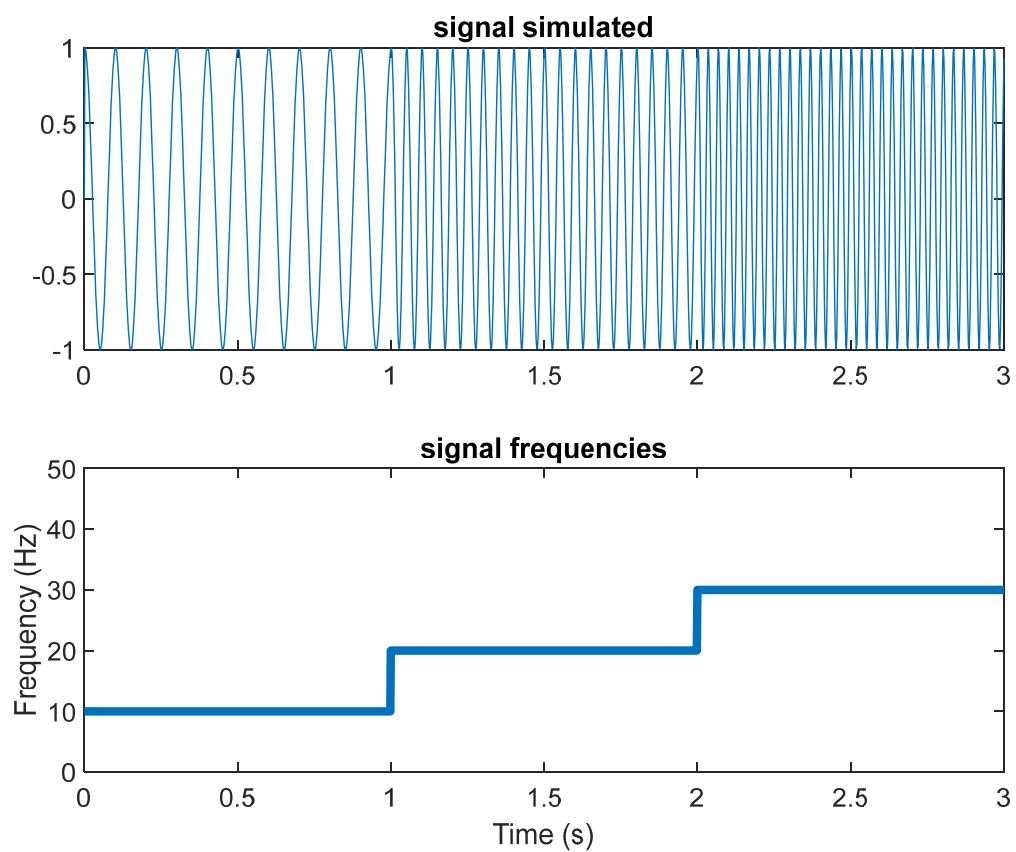
- 假设信号 $x(t)$ 由三段不同频率的余弦信号 $x(t)=\cos(2\pi f(t)t)$ 组成，其中 $f(t)$ 定义为
 - $f(t)=10, 0 \leq t < 1$; $f(t)=20, 1 \leq t < 2$; $f(t)=30, 2 \leq t \leq 3$



分段时变频率信号的仿真程序

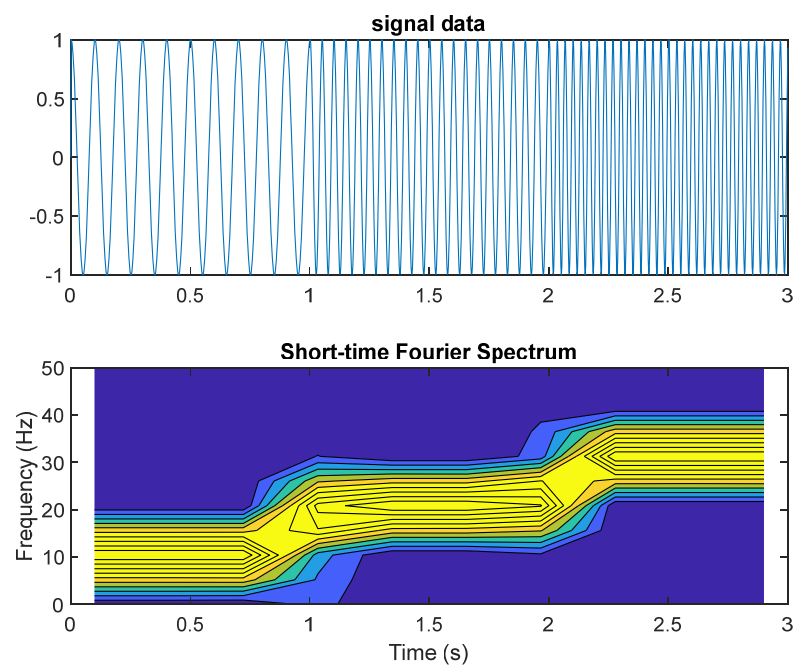
- `sampRate = 500; % Hz`
- `tTick = 0:1/sampRate:3; % total time 3 sec`
- `sigLen = length(tTick);`
- `freq = [10 20 30];`
- `tchunks = round(linspace(1,sigLen,length(freq)+1));`
-
- `%% simulate the signal`
- `sigData = 0;`
- `for i=1:length(freq)`
- `sigData = cat(2,sigData,...`
- `cos(2*pi*freq(i)*tTick(tchunks(i):tchunks(i+1)-1)));`
- `end`

分段时变频率信号仿真结果



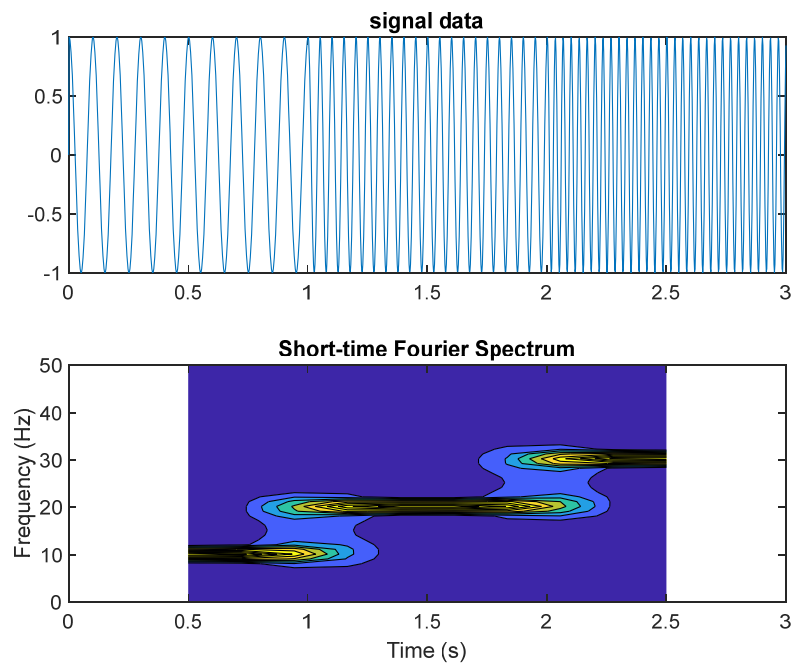
仿真信号的短时傅里叶变换

- 窗口宽度为0.2秒的汉宁窗
- 移动步长为10个采样点



窗口时长的变化对STFT的影响

- 窗口宽度为1秒的汉宁窗
- 移动步长为10个采样点



参考程序

- %% short-time Fourier analysis
- fftWidth_ms = 1000; % msec
- fftWidth = round(fftWidth_ms/(1000/sampRate)/2);
- Ntimesteps = 10; % step length in the number of data points
- centimes = round(linspace(fftWidth+1, sigLen-fftWidth, Ntimesteps));
- hz = linspace(0,sampRate/2,fftWidth-1);
- tf = zeros(length(hz),length(centimes));
- hwin = .5*(1-cos(2*pi*(1:fftWidth*2)/(fftWidth*2-1))); % Hann taper
-
- for ti=1:length(centimes)
- x = fft(hwin.*sigData(centimes(ti)-fftWidth:centimes(ti)+fftWidth-1))/fftWidth*2;
- tf(:,ti) = 2*abs(x(1:length(hz)));
- End

参考程序

- figure;
- subplot(211), plot(tTick, sigData);
- title('signal data');
-
- subplot(212), contourf(tTick(centimes), hz, tf, 10);
- set(gca,'ylim',[0 50],'clim',[0 1]);
- xlabel('Time (s)'), ylabel('Frequency (Hz)');
- title('Short-time Fourier Spectrum');
- xlim([0 max(tTick)]);

STFT时间和频率分辨率

- 对比STFT结果与仿真信号的设定频率
 - 关系如何?
 - 为什么?
- 对比不同时间窗口长度的选择
 - 0.2秒钟长度的时间窗口
 - 仅仅**比较接近**原信号的频率特性——频率分辨率差
 - 频率变化过渡区短, 大约0.2秒——时间分辨率高
 - 1秒钟长度的时间窗口
 - 更接近原信号的频率特性—— 频率分辨率较好
 - 频率变化过渡区长, 大约1秒钟——时间分辨率低

测不准（不相容）原理

- 测不准（不相容）原理

- 对于任意窗函数，其时间宽度 T_w 和频率带宽 B_w 的乘积大于等于 $1/2$ ，即：

$$T_w * B_w \geq 1/2$$

- 不相容原理表明时间分辨率和频率分辨率是一对矛盾的物理量，不能同时提高频率分辨率和时间分辨力

应用要点

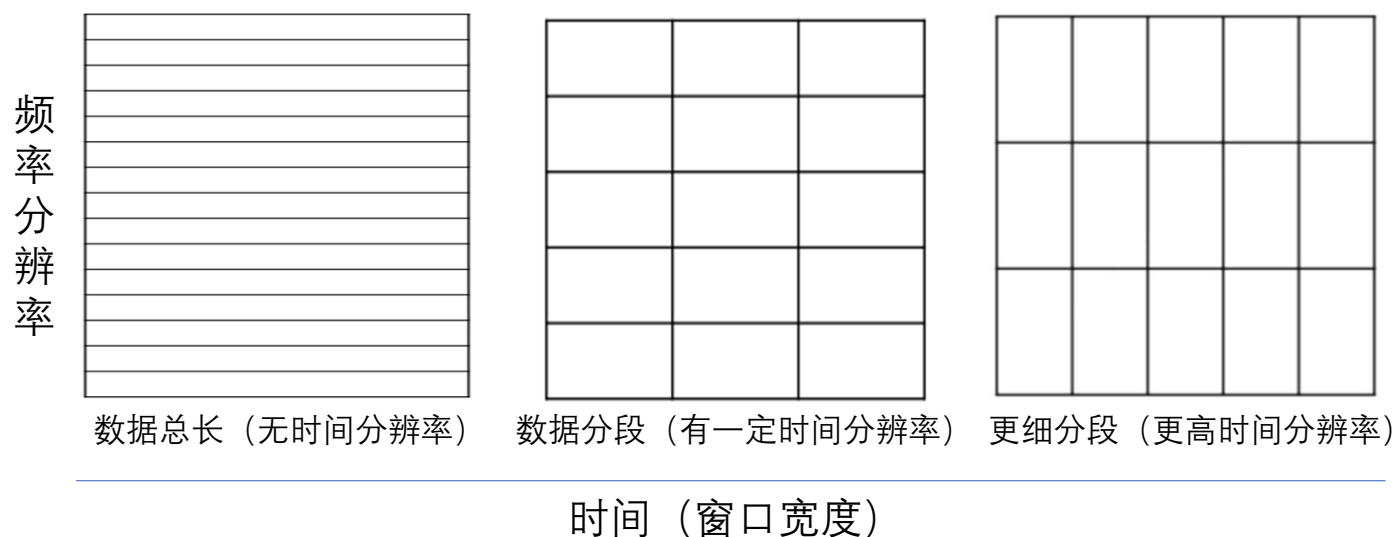
- 根据需求，在时间和频率分辨率之间做折中选择
 - 确定时间分辨率
 - 确定频率分辨率
- 时间宽度选择标准
 - 能尽量反应频谱的动态变化，理论上越短越好
 - 能满足频率分辨率的要求，理论上越长越好
- 选择合适的窗函数
 - 不同窗函数的频谱的主瓣和旁瓣的宽度和高度与窗口的时间长度有明确的数量关系

也要考虑时间分辨率

STFT不能同时兼顾时间-频率分辨率的困难

- 测不准（不相容）原理

- 对于任意窗函数，其时间宽度 T_w 和频率带宽 B_w 的乘积大于等于 $1/2$ ，即： $T_w * B_w \geq 1/2$
- 时间和频率分辨率是一对矛盾的物理量：获得高的频率分辨率，就无法获得高时间分辨率，反之亦然

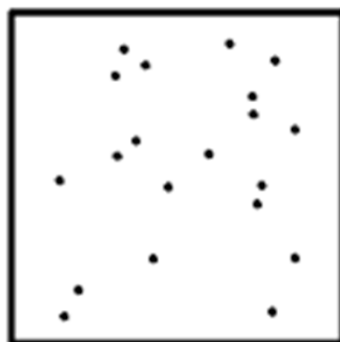
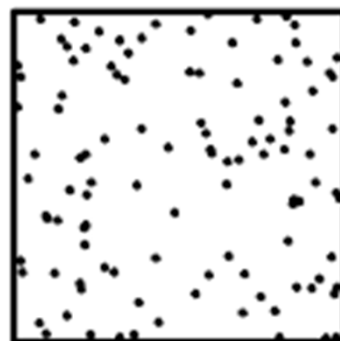
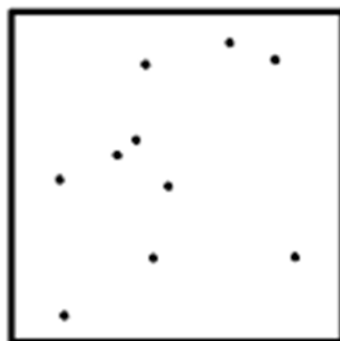


从时-频分辨率需求的角度缓解矛盾

- 慢变信号
 - 对时间分辨率要求低
 - 对频率分辨率要求高
- 快变信号
 - 对时间分辨率要求高
 - 对频率分辨率要求低
- 尝试用韦伯定律解释频率分辨率的需求

随机点数量比较实验

- 观察上下两幅图中的随机点，数量相等吗？

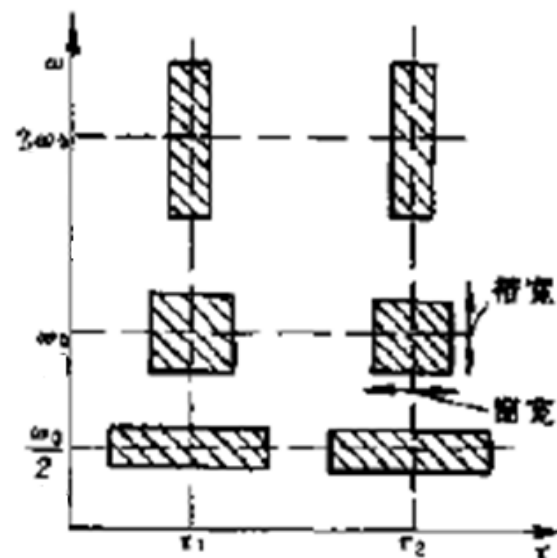


韦伯定律 Weber' s law

- 德国著名的生理学家与心理学家E.H. Weber发现，G.T. Fechner发展，也称为韦伯-费希纳定律
- Weber' s law 表明心理量和物理量之间关系的定律
 - 感觉的差别阈限 (just noticeable difference) 随刺激量的大小而变大变小，而且表现为一定的规律性，用公式来表示，就是 $\Delta\Phi/\Phi = C$ 为以常数
 - 其中 Φ 为原刺激量
 - $\Delta\Phi$ 为此时的差别阈限
 - C作为一个常数，又称为韦柏率
- 举例
 - 假如在100 Hz附近，人最多能区分100和101 Hz的声音，则 $C = (101-100)/100 = 0.01$
 - 那么在1000 Hz附近，无法区分1000和1001 Hz信号
 - 在上述假设条件下，根据韦伯定律，频率需要变化 $1000 \times C = 10$ Hz或者更多，人才会被感受到频率从1000 Hz发生了改变

理想变换算法

- 以时频分辨率需求为基础
提出理想的变换算法
- 对于信号的低频成分
 - 提高频率分辨率（减少带宽）
 - 放松时间分辨率（窗宽）的要求
- 对于信号的高频部分
 - 提高时间分辨率（减少窗宽）
 - 放松频率分辨率（带宽）的要求



自动调节时间-频率分辨率的时频变换

- 对于不同的信号频率
 - 低频：长时间窗口（低时间分辨率）-高频率分辨率
 - 高频：短时间窗口（高时间分辨率）-低频率分辨率
- 数学研究发现Gabor和其它小波函数可以帮助实现这种变换

Gabor函数 — 正弦函数与高斯函数的乘积

- 时域内，一个正弦函数与一个高斯函数的乘积对应一个Gabor函数

$$Gabor(x) = \underbrace{g(x)}_{\text{高斯函数}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\text{正弦函数}} = \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}}_{\text{高斯函数}} \cdot \underbrace{e^{i\omega_0 x}}_{\text{正弦函数}}$$

- 其中正弦函数

$$f(x) = e^{i\omega_0 x} = \cos(\omega_0 x) + i\sin(\omega_0 x)$$

- 高斯函数

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

高斯函数的傅里叶变换

- 高斯函数

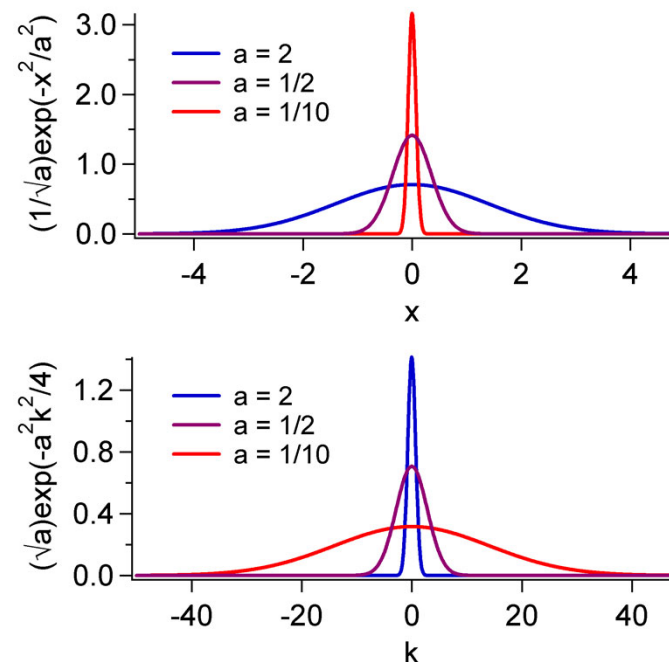
$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- σ 决定时间窗口的宽度

- 傅里叶变换

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}}$$

- σ 也决定频带的宽度



- 高斯函数的傅里叶变换仍然为高斯函数
- 高斯函数方差大，对应的傅里叶变换后的高斯函数方差小
- 注意：上图中公式与左边文字的公式稍有不同，可以根据文字的公式重新作图获得相似的对应关系

Gabor函数的傅里叶变换

- 根据卷积定理，Gabor函数的傅里叶变换就是高斯函数的傅里叶变换 $G(\omega)$ 与正弦函数傅里叶变换 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 的卷积

$$Gabor(\omega) = G(\omega) * F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} * 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$Gabor(\omega) = 2\pi e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \sigma^2}{2}}$$

- 频域内，Gabor函数是一个高斯函数形状的带通滤波器
- ω_0 决定带通滤波器的中心频率
- σ 决定带通滤波器的频带宽度

Gabor实现时-频分辨率自动调节

- 原理

$$Gabor(\omega) = 2\pi e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \sigma^2}{2}}$$

- 其中 ω_0 决定带通滤波器的中心频率， σ 决定频带宽度，也对应时域高斯窗口的宽度
- 如果确定时间窗口宽度 σ 与频率 ω_0 的反比关系，例如： $\sigma = C/\omega_0$ ，其中 C 是正常数，则随着频率 ω_0 增高，时间窗口宽度 σ 降低，从而实现时间-频率分辨率的自动调节
 - 低频信号：低时间分辨率-高频率分辨率
 - 高频信号：高时间分辨率-低频率分辨率

Morlet小波函数

- 时间窗口宽度 σ 与频率 ω_0 的反比关系，实现窗口宽度随频率自适应变化的Gabor函数又叫Morlet小波

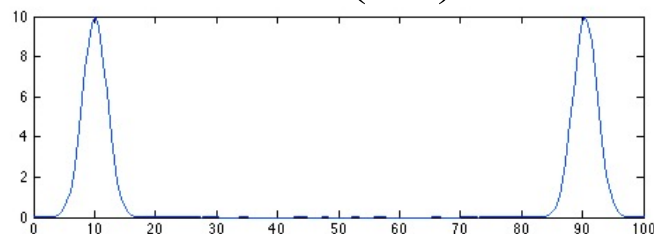
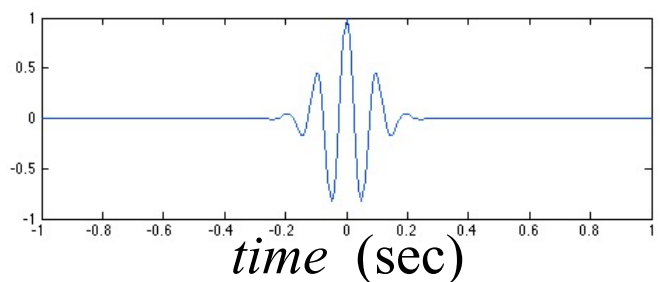
```
sinewave = cos(2*pi*f*t);  
w = 2*( 5/(2*pi*f) )^2; % the window width  
gaussian = exp( (-t.^2)/w );  
mwavelet = sinewave .* gaussian;
```


Morlet函数生成及其傅里叶变换

- `fs = 100;`
- `t = -1:1/fs:1; % the window width parameter`
- `f = 20;`
- % 计算Morlet 小波波形
- `sinewave = cos(2*pi*f*t);`
- **`w = 2*(5/(2*pi*f))^2;`** % the Gaussian width parameter **关键**
- `gaussian = exp((-t.^2)/w);`
- `mwavelet = sinewave .* gaussian;`
- % Morlet小波波形及其傅里叶变换结果显示
- `figure;`
- `subplot(2,1,1); plot(t,mwavelet);`
- `fTick = 0:1/(max(t)-min(t)):fs;`
- `subplot(2,1,2); plot(fTick, abs(fft(mwavelet)));`

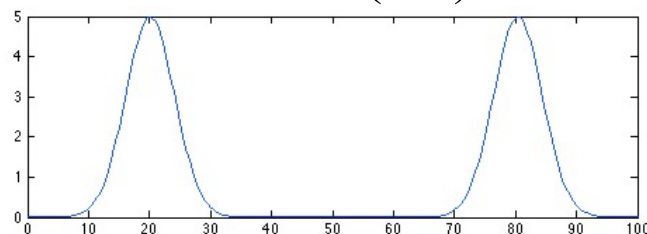
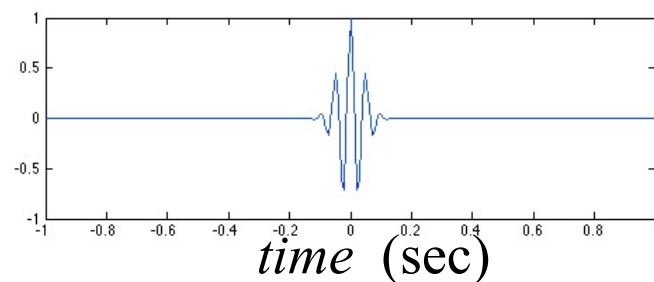
Morlet小波时域-频域仿真结果

$$w = 2 * (5 / (2 * \pi * f)) ^ 2;$$



$$f_0 = 10 \text{ Hz}$$

宽时间窗口, 高频率分辨率



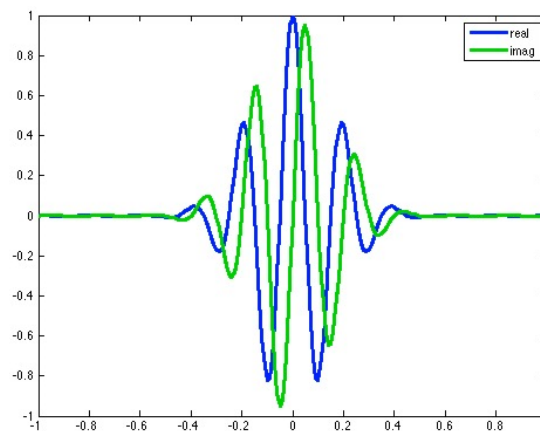
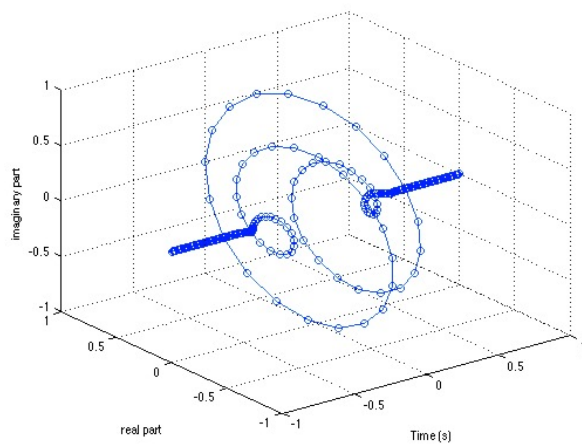
$$f_0 = 20 \text{ Hz}$$

窄时间窗口, 低频率分辨率

vs.

复Morlet小波函数

$$\psi(t) = \exp(i\omega_0 t) \exp(-t^2/2\sigma^2)$$



复Morlet小波函数的MATLAB程序

- `% Complex Morlet wavelet`
- `fs = 100; t = -1:1/fs:1; % the time window width`
- `f = 5;`
- `w = 2*(5/(2*pi*f))^2; % the Gaussian width parameter`
- `gaussian = exp((-t.^2)/w);`
- `csw = exp(1i*2*pi*f*t);`
- `mwavelet = csw .* gaussian;`

- `figure;`
- `plot3(t, real(mwavelet), imag(mwavelet), '-o');`
- `xlabel('Time (s)'), ylabel('real part');`
- `zlabel('imaginary part');`
- `rotate3d; % unnecessary in Octave`

- `figure;`
- `plot(t, [real(mwavelet); imag(mwavelet)]', 'linewidth', 2);`
- `legend('real', 'imag');`

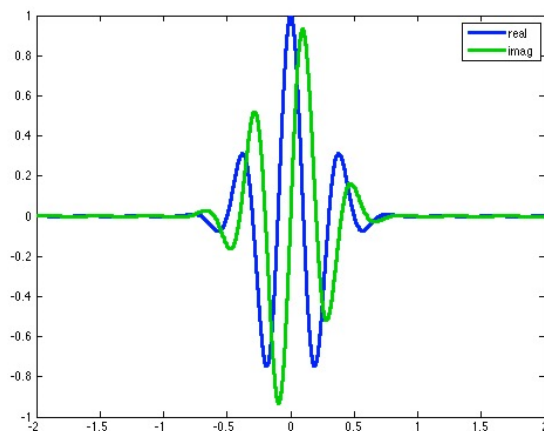
复Morlet小波函数与Chirp信号的卷积程序

- % 产生Chirp信号
- Srate = 1000; f = [0 10]; t = 0:1/srate:(max(f)-min(f)); n = length(t);
- chirpTS = sin(2*pi.* linspace(f(1),f(2)*mean(f)/f(2),n).*t);
- % 产生中心频率为f0的复Morlet小波
- f0 = **2.5**; w = 2*(4/(2*pi*f0))^2; wtime = -2:1/srate:2; % wavelet time
- cmw = exp(1i*2*pi*f0.*wtime) .* exp((-wtime.^2)/w);
- figure; plot(wtime, [real(cmw); imag(cmw)]', 'linewidth', 2); legend('real', 'imag');
- halfwavL = floor(length(wtime)/2); % half of the length of the wavelet
- chirpTSpad = [zeros(1,halfwavL) chirpTS zeros(1,halfwavL)]; % zero-pad chirp
- convres = zeros(size(chirpTSpad)); % run convolution
- for i = halfwavL+1:length(chirpTS)+halfwavL-1 % 逐点求卷积
- convres(i)=sum(chirpTSpad(i-halfwavL:i+halfwavL) .* cmw);
- end
- convres = convres(halfwavL:end-halfwavL-1); % 去除两端
- figure; subplot(211), plot(t,chirpTS); subplot(212), plot(t,abs(convres))

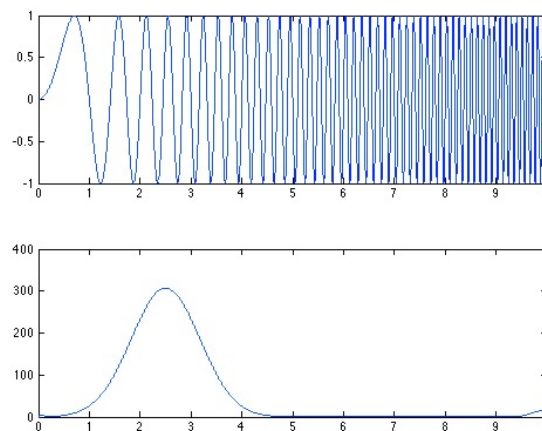
复Morlet小波函数与Chirp信号的卷积

- 时域内的卷积

- 复Morlet小波 $f_0 = 2.5\text{Hz}$;



Chirp信号的 $f = [0, 10]$

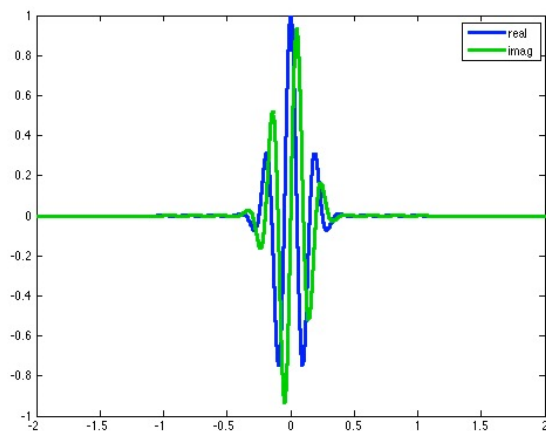


卷积输出

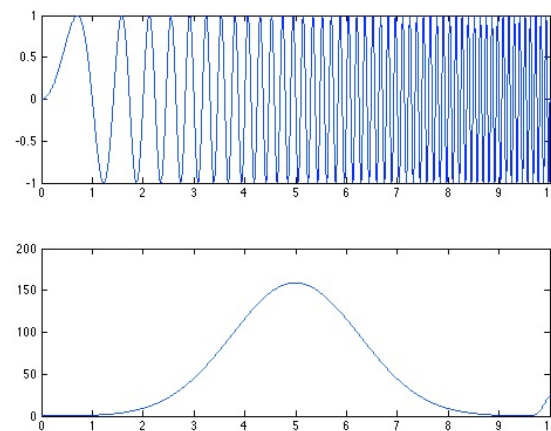
复Morlet小波与Chirp信号的卷积

- 时域内的卷积

- 复Morlet小波 $f_0 = 5\text{Hz}$;



Chirp信号的 $f = [0, 10]$

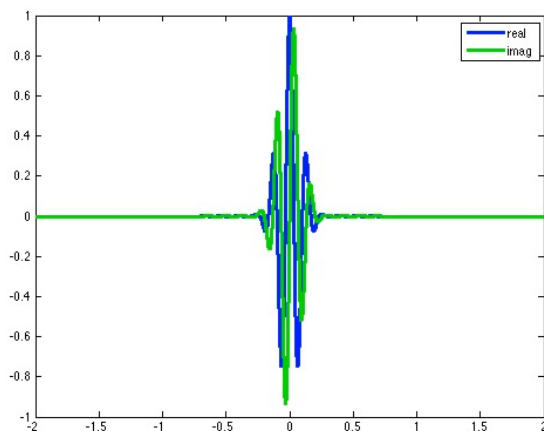


卷积输出

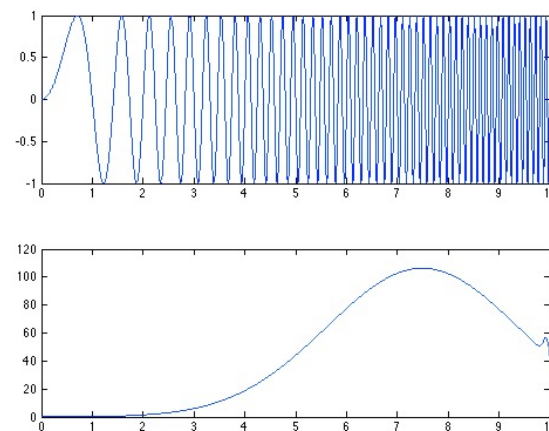
复Morlet小波与Chirp信号的卷积

- 时域内的卷积

- 复Morlet小波 $f_0 = 7.5\text{Hz}$;



Chirp信号的 $f = [0, 10]$



卷积输出

Gabor滤波（复Morlet小波与信号的卷积）

- Gabor滤波
 - 是复Morlet小波与信号的卷积在时域的一个卷积过程，实现时频分析
- Gabor滤波的本质
 - 从信号中找与复Morlet小波函数类似的频率特性成分
 - 是一个带通滤波器
- 时间窗口的长度与分析的频率相关
 - 构造复Morlet小波的正弦波频率越低，窗口越长，分析的频率越精细
 - 构造复Morlet小波的正弦波频率越高，窗口越短，分析的时间精度越高，但是分析的频率分辨率越低

小波变换

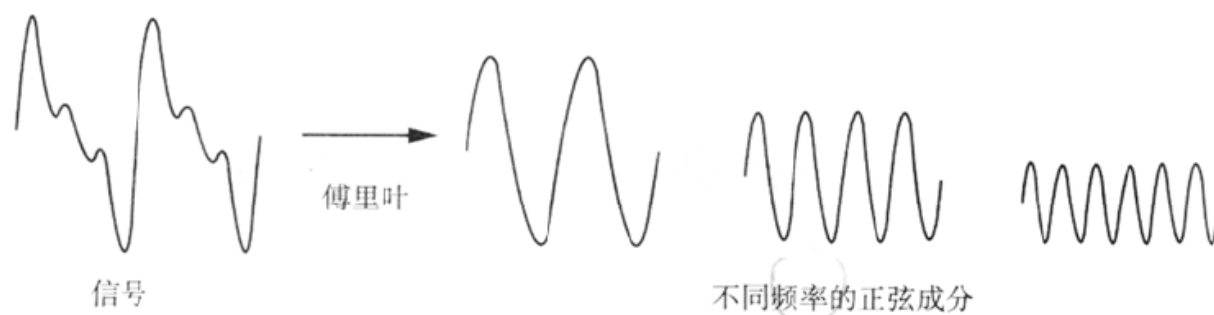


图 10.1 傅立叶变换的直观形式

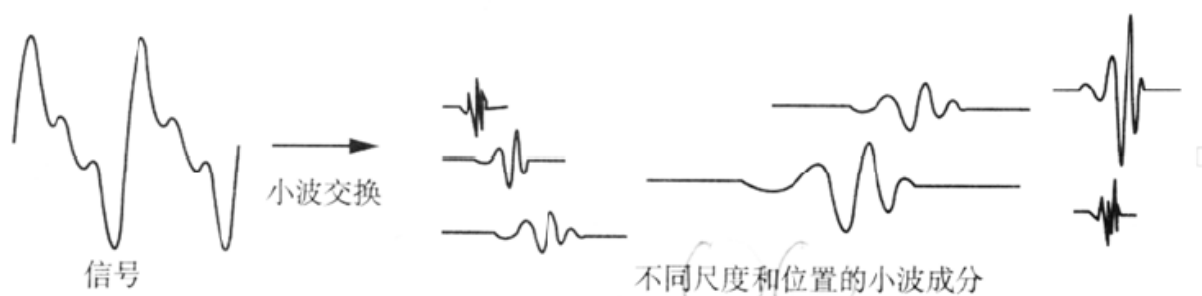


图 10.2 小波变换的直观形式

小波的定义

- 小波(wavelet)

- 是一类特殊的有限长度、正负交替、均值为零、两端衰减为零的波形函数
- 在频域也有衰减性质，例如前述Gabor函数，Morlet小波

- 小波变换没有固定的核函数

- 作为对比，傅里叶变换有特定的复正弦函数作为核函数

- 小波需要满足两个条件，才能有反变换

- 容许条件 (admissible condition)

- 小波函数的傅里叶变换

$$c_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

- 正规性条件 (regularity condition)

- 小波函数的前n阶原点矩等于0
- n越大越好

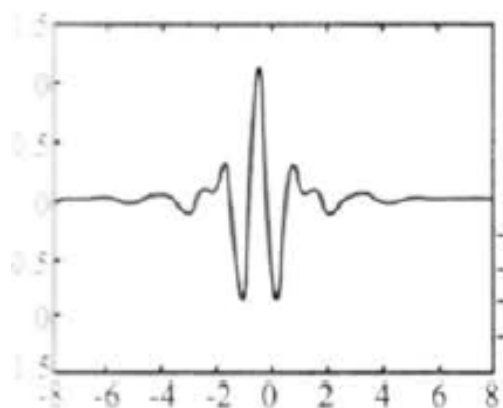
$$\int t^p \phi(t) dt = 0, \quad p = 1 \sim n$$

高斯窗

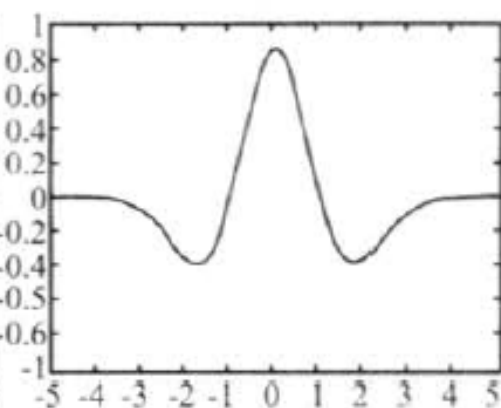
Wavelet

典型基本小波（核函数）

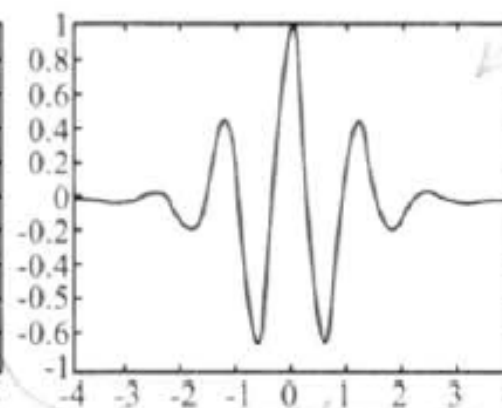
- Meyer 小波



Marr小波



Morlet 小波



基本小波与小波基函数

- 母小波

- 满足相容性和正规性条件的小波可以作为基本小波，该基本小波称为母小波 $\psi(t)$

- 小波基函数 – 小波基

- 母小波 $\psi(t)$ 经过伸缩平移得到的函数族 $\{\psi_{a,b}(t)\}$ 为小波基
 - $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$
 - 其中 a, b 是实数, $a > 0$
 - a 是尺度因子, $a > 1$ 时, 小波伸展; $0 < a < 1$ 时, 小波收缩
 - b 是平移因子, 调整小波的时域位置, 即时间窗口的中心
 - a, b 联合确定分析的时间窗口宽度和中心位置

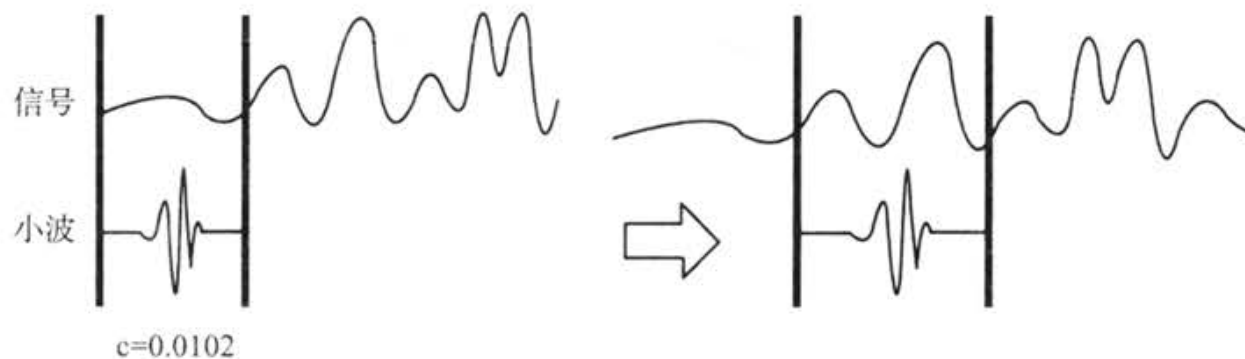
连续小波变换

- 设信号 $f(t) \in L^2(R)$, 母小波函数为 $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, 信号 $f(t)$ 的小波变换为

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt$$

- a 是尺度因子, 为正实数, b 是平移因子, 可是任意实数
- t , a 和 b 的取值均为连续变量, 上述变换成为连续小波变换 (continuous wavelet transform, CWT)
- 尺度系数 a 与窗口长度的关系
 - 记得高斯窗的数学形式即容易理解
 - 尺度系数 a 变小, 则时间上压缩, 获得高的时间分辨率, 有助于分析瞬时变化的时间细节
 - 尺度系数 a 变大, 则时间上拉伸, 获得高频率分辨率, 有助于分析低频细节

小波变换的关键步骤



(a) 小波与分析信号对齐

(b) 小波函数向右移动一个单位时间



(c) 小波函数进行尺度伸缩

连续小波变换的步骤

- (1) 选择一个小波函数，尺度系数为 a_1 ，将这个小波与待分析信号起点对齐
- (2) 计算小波函数与信号的卷积，获得小波变换系数 C ，小波系数越大，该段信号与小波函数波形越像
- (3) 将小波函数沿时间轴右移一个时间单位 b ，重复第2步，获得新的变换系数
- (4) 重复第2-3步，直到信号结束，获得尺度 a_1 下的所有小波系数
- (5) 改变小波尺度系数成 a_2 ，重复第1-4步，获得尺度系数 a_2 下的所有小波系数
- (6) 重复步骤1-5，获得所有感兴趣的尺度系数 a_i ($i=1, 2, \dots, N$) 对应的小波系数

小波的特点

- 能分析信号的局部时间频率特性
 - 例如能发现某个时间点附近的局部信号畸变
 - 这个畸变能体现在傅里叶谱上的某个尖峰，但傅里叶变换无法体现发生局部畸变的时间信息
 - 小波分析可以准确地显示什么时间段发生畸变
 - 因此小波变换也被称为信号分析的“数学显微镜”
- 小波变换在不违背不相容原理的基础上，根据需要实现可变分辨率

小结：傅里叶变换-STFT-Gabor-小波

- 傅里叶变换 – 固定唯一的时间窗口
- STFT – 移动时间窗口，但是窗口长度不变
- Gabor – 移动时间窗口，窗口长度随着频率自适应变化
- 小波 – 移动时间窗口，窗口长度随着频率自适应变化，可以根据需要选择特定的小波函数