



國立臺灣大學工學院機械工程學系

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

一個不限制平面平行的 LED-PD 室內三維定位系統最
佳化考量硬體指向與朗博次方參數

The optimal design of a three-dimensional LED-PD
indoor positioning system considering variable hardware
orientation and lambertian order without parallel planes
assumptions.

李亭宜

Ting-I Lee

指導教授：詹魁元博士

Advisor: Kuei-Yuan Chan, Ph.D.

中華民國 111 年 8 月

August, 2022

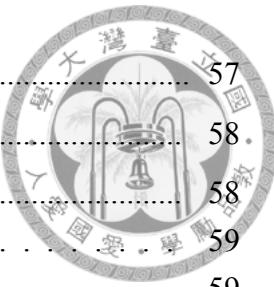


目錄

目錄	i
圖目錄	iv
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 目標情境	2
1.2.1 室內定位考量的面向	3
1.3 研究目的	5
1.4 論文架構	6
第二章 室內定位相關文獻探討	8
2.1 相對定位定義	8
2.2 後處理方法分類	9
2.2.1 資訊種類	10
2.2.2 定位演算法	10
2.2.3 小結	13
2.3 定位技術分類	13
2.3.1 無線電波段定位	14
2.3.2 光波段定位	16
2.3.2.1 波段分類	18
2.3.2.2 接收子類型：PD 與影像感測器	19
2.3.3 小結：本研究使用技術的選擇	22



2.4 LED 與 PD 的定位方法	22
2.4.1 LED 與 PD 定位架構與流程	23.
2.4.2 光學常用單位介紹	25
2.4.3 LED 與 PD 的輻射特性	26
2.4.3.1 LED 與 PD 的組態	27
2.4.3.2 朗博輻射模型	28
2.4.3.3 LED 特性	30
2.4.3.4 PD 特性	32
2.4.4 光傳遞模型	33
2.4.4.1 單 LED 對單 PD 光傳遞模型	33
2.4.4.2 多 LED 對多 PD 光傳遞模型	33
2.4.4.3 以座標系呈現光傳遞模型	34
2.4.5 LED 與 PD 定位系統現況	37
2.4.5.1 常見的 LED 與 PD 定位系統限制	38
2.4.5.2 LED 與 PD 定位系統實例	41
2.4.6 LED 與 PD 定位系統所遇困難	44
2.5 結論	45
第三章 以 LED 與 PD 建立三維相對位置之演算法	46
3.1 系統的限制	47
3.2 訊號過濾	48
3.3 定位演算法	48
3.3.1 求解方位	49
3.3.1.1 獲得兩 PD 對同一 LED 的入射角餘弦比值	49
3.3.1.2 滿足入射角餘弦比值的方位解位於一通過原點之平面	51
3.3.1.3 兩平面交軸為方位	52
3.3.1.4 平均方位	53
3.3.1.5 小結	53
3.3.2 求解距離	53
3.3.2.1 解 LED 座標系中 PD 座標系所在方位	53
3.3.2.2 解出 LED 與 PD 的出入射角	54
3.3.2.3 利用光傳遞模型取得距離並平均	54
3.3.2.4 小結	55
3.4 演算法優點與缺點	55



第四章 模擬與評估系統表現	57
4.1 模擬方法	58.
4.1.1 系統設計模擬	58.
4.1.1.1 硬體數量	59
4.1.1.2 硬體參數	59
4.1.1.3 硬體組態	59
4.1.2 兩硬體單位擺放位置的模擬	60
4.1.3 光通訊訊號模擬	61
4.1.3.1 模擬硬體誤差	61
4.2 計算定位結果	62
4.2.1 參考市售硬體規格	63
4.2.2 模擬結果	63
4.2.3 小結	64
4.3 系統評估	64
4.3.0.1 使用情境與樣本點	65
4.3.1 量化系統表現	65
4.3.1.1 量化系統表現	65
4.3.2 系統設計對系統表現的影響	65
4.3.2.1 硬體指向對系統表現的影響	65
4.3.2.2 朗博次方對系統表現的影響	65
4.3.2.3 硬體數量對系統表現的影響	65
4.3.3 不同使用情境的系統表現	65
4.4 結論	65
第五章 針對不同使用情境進行最佳化	66
5.1 最佳化流程	66
5.1.1 目標函數	66
5.1.2 最佳化變數	68
5.2 案例	68
5.2.1 室內空間的案例	68
5.3 結論	68
第六章 結論	70
6.1 研究總結	70
6.2 未來目標	70



圖目錄

1 符號小標解釋	ix
1.1 物聯網應用的領域 [?]	1
1.2 想像使用情境	2
2.1 LED 座標系與 PD 座標系及相對關係	8
2.2 常見的室內定位流程與分類	10
2.3 資訊種類與演算法之間的關聯（參考 [?] ）	10
2.4 多點定位法 [?]	11
2.5 三角測量法 [?]	11
2.6 指紋法流程圖 [?]	12
2.7 影像辨識示意圖 [?]	12
2.8 ArUco 標記例子 [?]	13
2.9 電磁波頻譜度 [?]	14
2.10 以電磁波頻率分類定位技術	14
2.11 RFID 定位系統示意 [?]	15
2.12 LANDMARC 系統 [?]	15
2.13 例用三角法定位的 RFID 系統 [?](a) 系統架構 (b) 載具實驗	16
2.14 光通訊流程圖 [?]	17
2.15 無線電波段與光波段的比較	17
2.16 太陽輻射波譜 [?]	19
2.17 光波段中的波段特性比較	19
2.18 滾動式快門效應的成因 [?]	20
2.19 滾動式快門效應產生的條紋樣式 [?]	20
2.20 多重路徑傳輸 [?]	21
2.21 多 PD 進行光通訊解碼 [?]	22
2.22 使用指紋法的系統環境 [?]	23
2.23 使用幾何方法的系統環境 [?]	24
2.24 影像感測器與 PD 的特性比較	24
2.25 LED 與 PD 定位系統架構	25



2.26 [?] 研究的硬體組態設計	26
2.27 LED 與 PD 定位系統流程	27
2.28 輻射測量學與光度測量學的物理量比較	28
2.29 角度與立體角	28
2.30 輻射強度與輻照度	29
2.31 三維空間中的向量	29
2.32 LED 在座標系中的擺放自由度	30
2.33 輻射強度與出入射角的關係	30
2.34 LED 與 PD 於三維空間中的入射角	31
2.35 朗博次方為一時空間中輻射強度與出入射角方位的關係	31
2.36 LED 與 PD 的硬體參數	32
2.37 輻射強度與總輻射通量比值	32
2.38 單 LED 與單 PD 的交互關係	34
2.39 多 LED 與多 PD 的交互關係	34
2.40 LED 與 PD 之間的關係以座標系之間的關係表示	35
2.41 光傳遞模型與相對定位統整的流程	36
2.42 常見限制擺放於同點位置 PD 組態示意圖 [?]	39
2.43 常見的 LED 與 PD 定位系統架設 [?]	40
2.44 [?] 的 PD 組態	41
2.45 [?] 的系統架構	41
2.46 [?] 利用兩個 LED 達到三維定位	42
2.47 地面上 PD 電流強度比值 (a) 第一與第二個 PD(b) 第二與第三個 PD(c) 第一與第三個 PD [?]	42
2.48 [?] 將量測空間切為多層	43
2.49 [?] 研究的 (a) 系統架構 (b)PD 組態	44
3.1 第三章章節與定位流程對應	46
3.2 PD 與 LED 組態皆限制擺放於原點的系統組態	47
3.3 訊號過濾後各 LED 與各 PD 所剩的訊號數量示意圖	48
3.4 本研究所提出的定位演算法流程	49
3.5 本研究定位演算法中解方位的流程	50
3.6 同一 LED 與多個 PD 之間的幾何關係	50
3.7 滿足入射角餘弦比值 R_a 的方位為通過原點之平面	52
3.8 兩平面交於一軸	52
3.9 多 LED 對同一 PD 之間的幾何關係	54
4.1 多 LED 對多 PD 定位系統以硬體驗證與軟體模擬的流程圖	58
4.2 評估系統流程圖	64
5.1 最佳化流程圖	67

5.2	最优化變數
5.3	最优化結果





符號列表

座標系

\mathbf{P} 座標點

x, y, z 座標點 \mathbf{P} 的 x, y, z 分量

\mathbf{V} 單位向量

u, v, w 單位向量 \mathbf{V} 的 x, y, z 分量

d, α, β 單位向量 \mathbf{V} 在球座標系中的天頂角 (Zenith Angle)、方位角 (Azimuth Angle)、距離分量

座標系轉換

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ro} & \mathbf{T} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{齊次轉換矩陣 Homogeneous Transformation Matrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T \quad \text{平移向量 Transfer Vector}$$

$$\mathbf{T}^{sph} = \begin{bmatrix} t_d & t_\alpha & t_\beta \end{bmatrix}^T \quad \text{平移向量以球座標系表示}$$

$$\mathbf{Ro} = \{\gamma_{ij}\} \quad \text{旋轉矩陣 Rotation Matrix}$$

硬體參數

符號 LED 硬體參數

$M\ell$ LED 的朗伯次方 (Lambertian Order)

Pt 總輻射通量 (Total Radiation Flux)

符號 PD 硬體參數

Mp PD 的朗伯次方 (Lambertian Order)

A 有效面積

Re 響應率 (Responsivity)

s 飽和電流

LED 與 PD 的交互關係

- ϕ PD 入射角
 θ LED 出射角
 D 距離



光學領域單位

符號	中文	英文	單位符號	國際單位制
Ω	立體角	Solid Angle	sr	球面度 (Steradian)
ω	角度	Angle	rad	弧度 (radian)
r	半徑	Radius	m	公尺
Φ	輻射通量	Radiation Flux	W	瓦特 (Watt)
I	輻射強度	Radiation Intensity	$W \cdot sr^{-1}$	瓦特每球面度
E	輻照度	Irradiance	$W \cdot m^{-2}$	瓦特每平方公尺

系統與演算法

t_d	兩座標系之間距離
Tv	兩座標系中對方所在方位
L, P	LED 與 PD 總數
ℓ, p	LED 與 PD 編號
$F\ell, Fp$	過濾後的 LED 與 PD 數量
Ra	餘弦比值
r_c	取作餘弦比值參考值的硬體編號
r_s	參考平面由 r_c 與 r_s 編號的硬體資訊獲得
N	平面法向量
Kb	波茲曼常數 (Boltzmann constant)
Te	溫度
B	頻寬 (Bandwidth)
q	電子電荷
Rs	分路電阻 (Shunt Resistance)
k, K	樣本點編號以及樣本點總數

小標解釋

論文中由於座標系、硬體數量、樣本數量眾多，為了區分不同上下小標的意義，以圖1呈現各小標意思，左上標表示座標系，左下標顯示是哪個樣本，而右下

標則依照物理量代表著 LED 或 PD 的編號，在 LED 與 PD 交互關係的物理量中右下標同時包含兩者的編號。

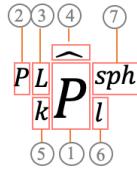


圖 1: 符號小標解釋

(1) 符號

(2) 投影至的座標系：(P : PD 座標系； L : LED 座標系)

(3) 定義於哪個座標系：(P : PD 座標系； L : LED 座標系)

(4) 量測訊號：($\hat{\cdot}$) 代表該物理量為量測所得或處理量測所得訊號而得

(5) 樣本點： 第 k 個樣本點 ($k = 1, 2, \dots, K$)

(6) 硬體編號： 第 p 個 PD ($p = 1, 2, \dots, P$) 或第 l 個 LED ($l = 1, 2, \dots, L$)；LED 與 PD 交互關係物理量的 (6) 小標為 lp 兩者的交互關係

(7) 使用的座標系統： 以何種座標系呈現 (無：卡氏座標系； sph ：球座標系)

以下舉例解釋：

- ${}_k^{PL}\hat{T}$ ： 第 k 個樣本點中，模擬量測方式所得到的 PD 座標系指向 LED 座標系的平移向量。

- ${}^L P_l, {}^{PL} P_l$ ： ${}^L P_l$ 為第 l 個 LED 於 LED 座標系上的位置座標， ${}^{PL} P_l$ 則是將其投影到 PD 座標系上

- ${}_k D_{lp}$ ： 第 k 個樣本點中，第 l 個 LED 與第 p 個 PD 的距離 $M\ell_l$ ：第 l 個 LED 的朗博次方



緒論

1.1 前言

隨著工業 4.0 的發展，著重於自動化、互連性，機器、人與環境之間的交互互動愈發頻繁，藉著物聯網（IoT）的能力，各領域對於量測資訊的需求大量增加，其中物聯網所包含的應用領域包含智慧工廠、智慧病房、智慧城市等參考圖 1.1 [?]



圖 1.1: 物聯網應用的領域 [?]

在萬物互連的背景之下，感測器就像是人類的感官，透過不同種類的探測器量測各式各樣所需的資訊，例如位置、溫度、濕度、電壓、電流、轉速、流速、振動、影像等，各物體之間交換資訊，再透過電腦或是人為操作，下達任務與決策。各項量測資訊之中，相對位置為一重要量測資訊，缺乏位置資訊時，則像是失去地圖的駕駛，或是蒙住眼睛的人們，對於無論是移動、導航、一指令的下達與否，各項決策行為都會難以判斷。除此之外，定位在實務上也充滿挑戰，由於沒有任何一種感測器可以直接量測到相對位置，定位僅能透過多個感測器量測到



的距離、角度、影像等資訊，透過校正、運算以獲得定位資訊，並不像量測距離、溫度等感測器得以直接獲得的物理量一樣簡單。

室外場域中，相對位置需求最常見於載具，例如無人機之間的相互定位，以及自駕車之間的跟隨與溝通；除了載具以外，相對定位的量測在搜救、目標跟隨監視等情況下都有需求 [?]。現今室外定位主要仰賴全球衛星定位系統（Global Positioning System，以下簡稱 GPS）[?]，其原理是利用接收來自三個以上的衛星訊號，透過訊號傳輸時間判斷與各衛星的距離，進而獲得接收者的位置。即使現今的 GPS 既容易取得又有相較高精度 [?]，然而礙於衛星訊號受建築物體遮蔽的特性，GPS 仍然無法在市區、室內等障礙物較多的場域取得較高精度的定位 [?]，

隨著工業 4.0 的發展，室內應用物聯網技術的場域愈發多樣，例如圖1.1內提到的智慧工廠、智慧病房、智慧建築等場域，也因此帶動了室內定位的需求。然而，由於室內定位無法使用 GPS 技術，且室內定位的精度要求大多較室外定位高，因此發展一有效的室內定位方法仍在現今之研究社群中被廣泛的討論 [?]。

室內定位主要面對的困難與室外不同，室內定位需面對較多的障礙物、牆壁、人員物體的密集度使多重路徑傳輸（Multipath propagation）影響大，也使訊號衰減與散射較為嚴重，以上議題都會增加誤差與難度。眾多文獻中，[?][?][?][?][?]皆提到相較可利用 GPS 系統的室外定位，室內定位的難度更高，且使用的硬體、演算法百百種，各自有優缺點，至今仍沒有一個領先群雄的解法。因此，我們於於1.2章釐清本研究的研究目標情境，再於1.2.1章了解室內定位需考量的面向，並以便挑選出最合適的系統。

1.2 目標情境

我們想像的目標情境如圖1.2，希望可以利用兩個可攜式單位，當兩單位於空間中自由移動時，其中一單位可量測到與另一單位之間的三維相對定位。然而，現今大多系統皆是針對特定場域與地點、需大量事先校正與設置，但凡更換環境該系統則失效，難以廣泛應用。因此，我們的主要目標是為了提供一彈性、能夠廣泛應用的設計，以彌補現今定位系統缺少的靈活度。

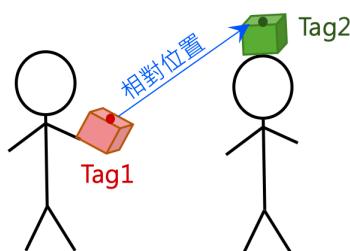


圖 1.2: 想像使用情境

為了達到以上情境，我們希望系統有以下的特點：



1. 感測器與訊號發射器可包裝成可攜式的單位，因此需選擇大小適中、能耗低的硬體。
2. 兩量測單位皆需有易安裝、易移動的特性，得以靈活的將兩單位各自安裝在量測物與目標物上。
3. 能夠在不同環境與場域中進行三維的相對定位量測。
4. 定位為兩單位之間的定位，不得使用多個參考點。

我們認為若能達到上述目標，在應用上將具有很大潛力，以下舉實例描述以更具體呈現：

- 智慧工廠

隨著工業 4.0 與 5.0 的發展，人機互動以其機器間的互動越加頻繁，且工廠內也會從同品項大量製造，變成變化度高的製程，因此擁有靈活的量測單位實為重要，可以隨時安裝在需定位的人、機械手臂、載具等上面，根據工作不同改變。

- 智慧病房

隨著輔具、病床智慧化，擁有靈活安裝的定位系統，能夠幫助機器與患者之間的定位，也能夠不受患者移動或是更動醫療器具影響。

- 其他

智能載具與服務目標的定位、輔助視障者理解目標方向、機場內針對各種載具與行李運送的量測、展場內的偵測引導等。

1.2.1 室內定位考量的面向

室內定位的方法非常多樣化，本論文參考 [?]，將室內定位依照技術（Technology）與方法（Technique）分類：技術所針對的是目標與量測者傳送訊號所使用的硬體種類，常見的技術包含相機、紅外線、可見光定位、無線網路（以下簡稱 WiFi）、藍芽、無線射頻辨識（Radio Frequency Identification，以下簡稱 RFID）等不同技術，於2.3章中會更詳盡的介紹。

而方法則是探討不同訊號皆收與處理的方式，從接收訊號資訊的種類可分為訊號強度、時間、與角度；如何利用所接收到的資訊，進一步解出相對位置則於定位演算法分類，常見的包含多點定位（Multilateration）、三角測量（Triangulation）、指紋法（Fingerprinting）、以及利用幾何關係求解的演算法，於2.2章中會進一步介紹。

在選擇合適的技術與方法以設計室內定位系統時，需考量許多面向，以下介紹室內定位需考量的因素，以及各面向與不同技術（詳述於2.3章）、方法（詳述於2.2章）的關聯：



1. 精度

量測精度為量測所得的位置與目標物真實位置之間的歐幾里德距離 (Euclidean Distance，以下簡稱歐式距離)，多以公尺表示 [?]，普遍精度最高的技術為相機、紅外光 [?]，精度大多會在公分量級上下；相較精度較低的則為 WiFi 與藍芽，精度常會在公尺量級上下 [?]。然而為了達到高精度，需要與大多面向做取捨 [?]，例如欲達到較高的量測範圍、低成本、高靈活度等，都需要捨棄部分精度，難以同時兼顧。

2. 量測範圍

相機、紅外光、可見光量測範圍大多會限制在五米內，超出此範圍後定位精度會快速下降；而 WiFi、藍芽、RFID 等覆蓋範圍則較廣，能夠達到十米以上的定位 [?]。

3. 成本

系統成本包含硬體設備成本與系統能耗等，成本與使用的技術種類關係較大，硬體成本屬於中高價位的有相機、紅外線、RFID，而 WiFi、藍芽、可見光定位則屬於建設成本較低的選項；能耗的部分則每篇論文皆有不同的看法，如 [?] 中認為 WiFi 為低能耗相較 [?] 認為其為高能耗，各篇論文中並沒有共識。

4. 環境或是單點對單點的定位

常見的系統架構包含兩種，第一種需在環境中的多個位置放置接收器或是發射器建立多個參考點，利用多個參考點的訊號來進行定位分析，此種類型的系統固定於特定環境中，呈現「環境對單點」的定位；另一種為兩個硬體單位之間的定位，呈現「單點對單點」的定位。這邊指的「單點」並不是限制硬體數量，而是指硬體架設的範圍，若量測者與目標物兩個硬體單位，皆能封裝成兩可移動單位，則屬於單點對單點的定位；而空間中固定多個參考點，不能將其視為一個單位的則屬於環境對單點的定位；而兩者主要取決於方法中的演算法類型。

舉例來說，方法中的指紋法需在空間中建立多個參考點，事先蒐集大量數據建立數據庫，定位時再利用數據庫中的資料做交叉比對，此方法便屬於環境對單點的定位，需花大量時間事先校正，且不能適應環境的改變，但凡環境與系統異動則原數據庫失效，大大限制了靈活度。環境對單點的定位中，系統大多能透過提高錨點的數量來提升精度與量測範圍，眾多技術中，訊號精度較低的技術如 WiFi、藍芽、RFID 較侷限在這種大規模的系統，靈活度低。反之，相機使用的視覺辨識方法，大多是利用單個相機擷取目標物的影像，透過辨識目標物的形狀等來判斷定位，無論是相機單位還是目標物單位都是一個個體，屬於單點對單點的定位。

5. 是否定位可視範圍外

非可視範圍（Non-Line-of-Sight，以下簡稱 NLoS）的定位，會擴大量測範圍，即可不受到環境障礙物的影響，即便是格著牆壁也可以進行定位。然而此舉也同時會造成訊號來源混亂，無法分辨此訊號強度為 LoS 傳遞而來的，還是穿透何種障礙物之後造成衰減的訊號，進而犧牲精度。而能夠穿透障礙物的多屬於使用低頻率電磁波的硬體技術，如 WiFi、藍芽、RFID，此特性也反應較低的精度上。

6. 即時應用性

需進行即時應用的情境下，量測數據處理速度需夠快，以避免訊號延遲，因此經常犧牲訊號處理的複雜度及其附加的精度，或是提高成本增加硬體運算能力。訊號處理複雜度高最易聯想到的便是相機，為了進行視覺辨識的高運算，該類型的系統多配備較好的演算單位 [?]；除此之外，主要影響因素則是該系統的演算法速度，各項技術與方法皆有演算法快與慢的方法，如何設計便是精度、功能與運算速度之間的取捨。

7. 目標物是否為特定物

定位技術大多指目標物為特定某物體的情況，因此系統需有分辨訊號發送者的能力，例如 WiFi、藍芽、RFID 都具有傳送訊息的能力且發展成熟 [?]，可見光與紅外線則是利用近年來發展的光通訊方法進行訊號傳輸，而相機則是利用視覺辨識判斷目標物；反之，超聲波與光達僅有分辨訊號的有無，難以進行目標物辨識，因此大多應用在判斷障礙物存在與否的情境，較少在定位系統上出現。

8. 場域限制

特別需要注意的是機場與醫院，這兩種場域有可能會限制無線電波的使用 [?]，因此使用無線電波段的技術如 WiFi、藍芽、RFID 則需特別注意。

礙於如此多的特性與面向，一個面面俱到的方案是不存在的。因此在設計系統時，了解不同做法的優缺點，並了解系統目標情境與需求，進而對不同面向做出取捨，是完成有效室內定位系統的關鍵之一 [?]。

1.3 研究目的

根據1.2章中提到的使用情境，我們的目標是建立一系統，其中觀察者與目標物皆可封裝為兩硬體單位，具有可攜式、易於安裝的特性，以達到單點對單點的定位。因此，在1.2.1章中提出的多個面向，我們需著重在4. 中的單點對單點的定位，希望硬體系統可封裝成兩單位，以及3. 成本中的低能耗特性。

雖然室內定位這個領域已經有許多文獻探討，然而針對單點對單點的定位與低能耗這兩個特性，仍待一個更合適的方案。因此以這幾個面向為重點，於2.2章與2.3章中逐漸聚焦於發光二極體（Light Emitting Diode，以下簡稱 LED）與光電



二極體（Photodiode，以下簡稱 PD）的近紅外光定位。針對此種技術與方法，設計一不限制應用場域，且目標物能夠自由移動的定位演算法，主要改善現今定位系統的侷限度，並將 LED 與 PD 定位系統中經常被忽略的硬體參數以及組態完整性加入考慮。除了提出演算法外，針對不同使用情境進行最佳化，藉由挑選合適的硬體參數與組態，以提升系統定位精度與量測範圍。

- 聚焦於光波段定位：為了發展一靈活度高，能夠套用在不同場域與情境的室內定位方法，由不同方法與技術所著重的面向切入，將研究聚焦在光波段定位上。
- 完整模擬：光波段定位的領域中，朗博次方常被忽略，並不符合實際硬體挑選的狀況，因此本研究將其納入考量。
- 提出靈活的演算法：光波段定位的領域中，為了降低系統的複雜度，經常限制使用情境，例如限制目標物與觀察者需為平行，因此本論文提出一不限制情境的三維定位演算法，並以模擬分析誤差。
- 針對情境最佳化：將提出的演算法套用在不同的使用情境上，發展一套完整流程，針對其進行組態與硬體參數的最佳化。

1.4 論文架構

本研究分為六個章節，論文架構如下：

第一章 緒論

介紹研究主題，並描述本研究欲解決的問題與研究目的。

第二章 文獻回顧

介紹室內定位的不同技術與方法，並聚焦在利用 LED 與 PD 的光定位方法，提出此技術現今研究所不足面向。

第三章 LED 與 PD 定位演算法

詳細說明本研究利用 LED 與 PD 的相對定位演算法。

第四章 誤差分析

將第三章所提出的演算法進行誤差分析。

第五章 最佳化

建立針對組態與硬體參數的最機化問題，並提出一流程以針對不同量測情境與工況進行最佳化。



第六章 案例

針對不同情境進行最佳化，提出最佳解並探討成效。

第七章 結論

整理本研究之結果討論，並敘述後續研究之方向。



第二章

室內定位相關文獻探討

統整本研究探討的情境（參考1.2章）有以下需求：硬體系統需為低能耗，可封裝成量測單位與目標物單位，進行單點對單點的定位。本章節將介紹定位領域中的不同技術與方法，於2.1章先定義相對定位，依照圖2.2中的分類，依序介紹定位方法2.2章與定位技術2.3章，比較各自的優缺點，根據上述需求聚焦在「LED與PD定位技術」，2.4章便針對「LED與PD定位技術」進行深入探討，敘述此領域研究現況與困難。

2.1 相對定位定義

在開始進入文獻探討之前，需先以數學定義何謂本論文所欲量測之「相對定位」。我們將取得相對位置的一方稱為量測者，如案例中的機械手臂；而量測者所欲取得相對位置的特定物體稱為目標物，如案例中的移動載具；兩者皆為剛體。

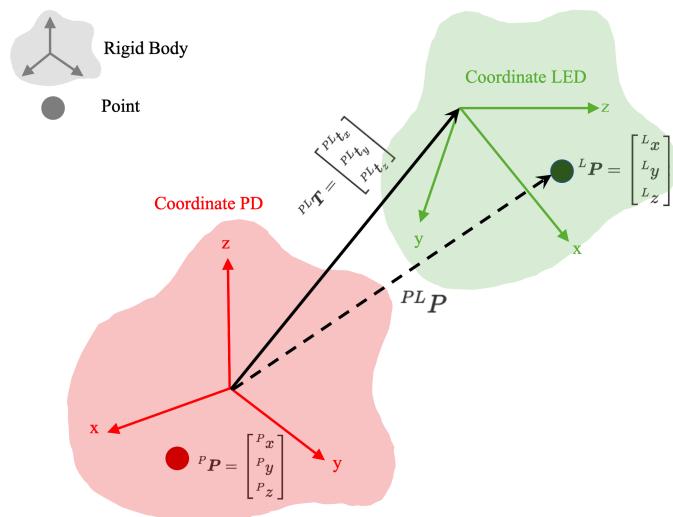


圖 2.1: LED 座標系與 PD 座標系及相對關係

因此，可以將量測者與目標物各自視為兩移動座標系如圖2.1，兩者在空間中各自有位置、旋轉的六個自由度，可以利用齊次座標轉換（Homogeneous Transformation）表示座標系之間的平移與旋轉（式2.1），其中 ${}^L\mathbf{P}$ 為LED的位置，而 ${}^{PL}\mathbf{P}$ 為投影至PD座標系上的LED位置，描述投影的矩陣為齊次轉換矩陣 ${}^{PL}\mathbf{H}$ ，左上標 PL 表示將LED座標系轉換至PD座標系，而 ${}^{PL}\mathbf{T}$ 與 ${}^{PL}\mathbf{Ro}$ 各自代表平移與旋轉的轉換矩陣，符號可參考符號列表（第vii頁）。

$$\begin{bmatrix} {}^{PL}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{PL}\mathbf{H} \begin{bmatrix} {}^L\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{PL}\mathbf{Ro} & {}^{PL}\mathbf{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^L\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} {}^{PL}\gamma_{11} & {}^{PL}\gamma_{12} & {}^{PL}\gamma_{13} & {}^{PL}t_x \\ {}^{PL}\gamma_{21} & {}^{PL}\gamma_{22} & {}^{PL}\gamma_{23} & {}^{PL}t_y \\ {}^{PL}\gamma_{31} & {}^{PL}\gamma_{32} & {}^{PL}\gamma_{33} & {}^{PL}t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^Lx \\ {}^Ly \\ {}^Lz \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

其中，兩座標系之間的平移關係 ${}^{PL}\mathbf{T}$ 即為欲得到的相對位置資訊，共有三個自由度。以上皆以卡氏座標系（Cartesian Coordinate）表示，然而在定位中也常使用球座標系表示，讓定位以「距離 d 」與「方位 (α, β) 」呈現，較為直觀，可將方位想像成「看哪裡」，而距離則為「看多遠」。兩座標系之間的換算如式2.2，球座標系中的位置 \mathbf{P}^{sph} 透過公式轉換為卡式座標系表示的 \mathbf{P} ：

$$\mathbf{P}^{sph} = \begin{bmatrix} d \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \sin \alpha \cos \beta \\ d \sin \alpha \sin \beta \\ d \cos \alpha \end{bmatrix}$$

在此需特別注意的是，LED座標系與PD座標系指的是「兩空間中移動的座標系」，而卡氏座標系與球座標系則是座標系的呈現方式；LED座標系可以用卡式座標系的 $[x, y, z]^T$ 表達，也可以用球座標系的 $[d, \alpha, \beta]^T$ 表示，PD座標系亦然。

2.2 後處理方法分類

從定位流程圖2.2來看，目標物會主動或是被動的將訊號傳送至量測者硬體，量測者接收到訊號之後再以不同的方法進行後處理，計算出目標物與觀察者之間的相對關係。

後處理方法可以分成兩部分：室內定位所使用的硬體在接收訊號時，首先會根據量測者所接收的資訊種類有所不同；接收資訊後，如何利用資訊計算出相對位置，則是屬於定位演算法的部分。

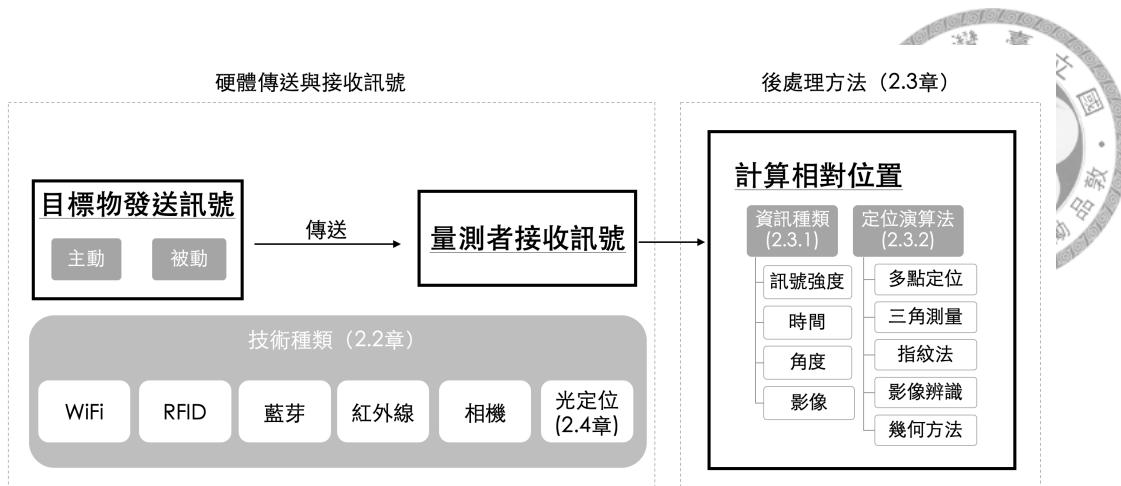


圖 2.2: 常見的室內定位流程與分類

2.2.1 資訊種類

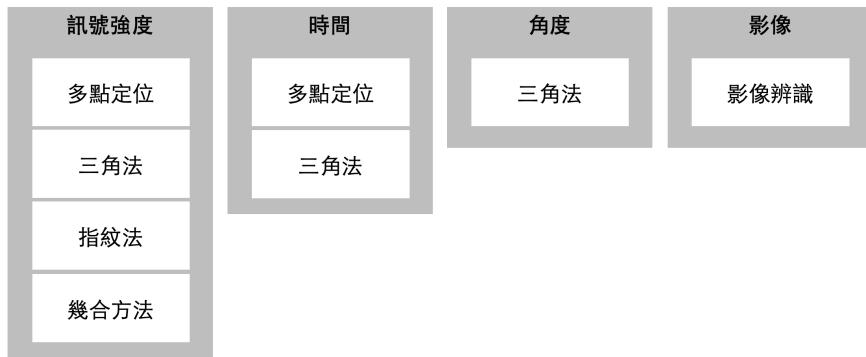


圖 2.3: 資訊種類與演算法之間的關聯 (參考 [?])

訊號強度 (Received Signal Strength, 簡寫 RSS) 為最常見的資訊種類 [?], 使用的是該硬體所接收到的訊號強度，而利用訊號強度的演算法也十分多樣，包含多點定位、三角法、指紋法等，可參考 2.2.2 章。

時間資訊種類則是硬體利用訊號之間的時間差，量測距離的方法，常見使用的技術為紅外線，紅外線可以利用訊號傳送到不同接收子的時間差，判斷出之間的距離。若要利用時間資訊，在各硬體之間則需要將時間同步，在實作上為一大挑戰 [?].

若獲取的是角度資訊，基本上演算法便會搭配三角法，綜合多個接收子的角度獲得相對位置。影像則屬於相機獨有，且搭配的定位演算法為影像辨識。

2.2.2 定位演算法

常見的演算法種類如下：



- 多點定位 (Multilateration)

多點定位如圖2.4所示，需在環境中建立多個參考點並固定位置，量測目標物與多個參考點之間的距離，進而以各參考點為中心、距離為半徑畫圓求交點。

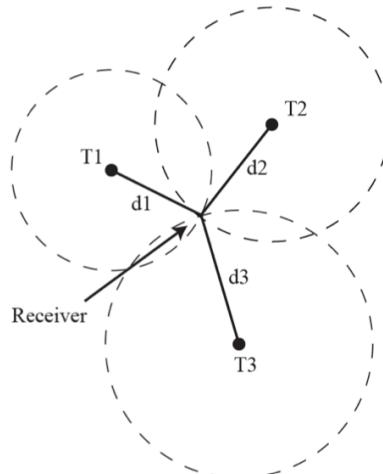


圖 2.4: 多點定位法 [?]

- 三角測量 (Triangulation)

三角測量法如圖2.5所示，需要在環境中建立多個參考點，藉由量測目標物與各參考點之間的角度關係，推算目標物位置。

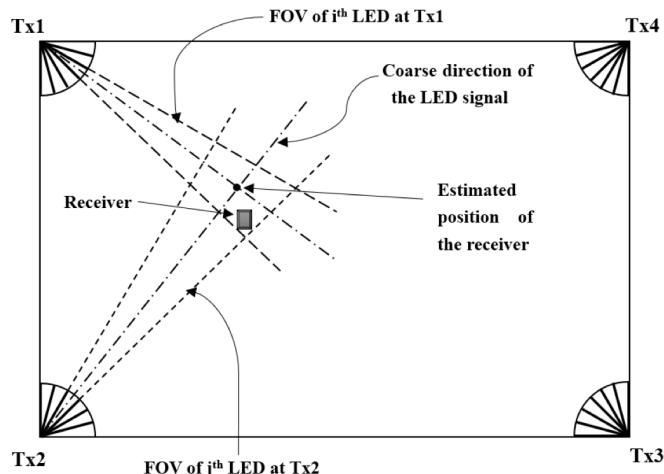


圖 2.5: 三角測量法 [?]

- 指紋法 (Fingerprinting)

指紋法在環境中建立多個參考點，在實際進行測量前，需進行事先測量訓練的階段。在訓練階段時需將目標物在環境中移動，蒐集大量訊號數據

庫，量測階段則藉由接收訊號與訓練階段所建立的數據庫參照，尋找最有可能存在的位置 [?]，近年則是有許多以機器學習方法增加此演算法的精確度。

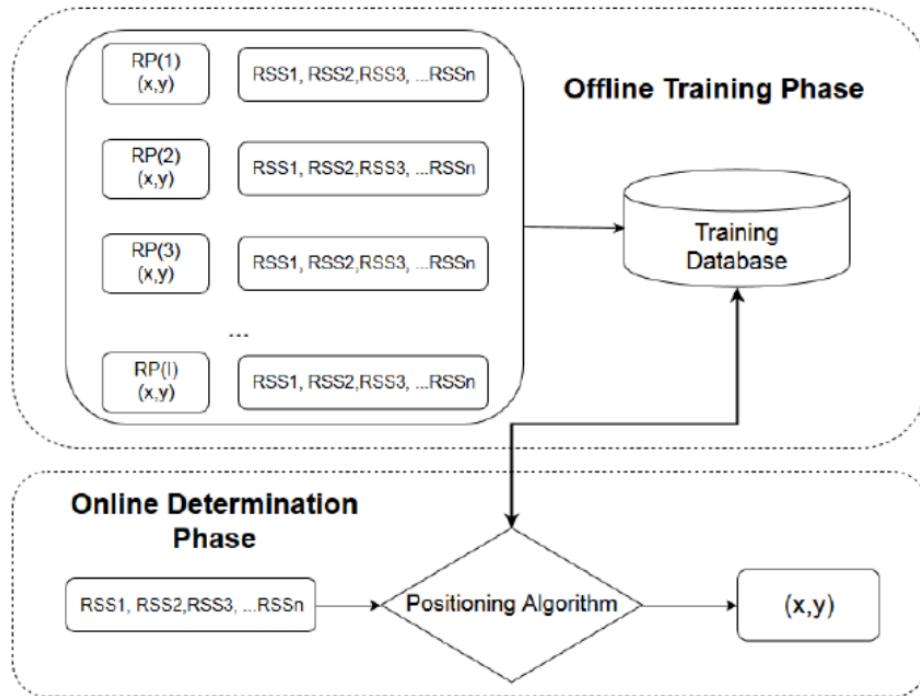


圖 2.6: 指紋法流程圖 [?]

- 影像辨識

三維空間中的物體，透過相機拍攝成為二維的影像時，為三維空間投影至二維影像平面上的幾何轉換。利用影像辨識求解相對位置時，則是試圖將二維影像中的特徵點比對、轉換回三維空間中，利用 PnP 演算法 (Perspective-n-Point) 解出目標物相對相機座標系的位置與方位 [?] 。

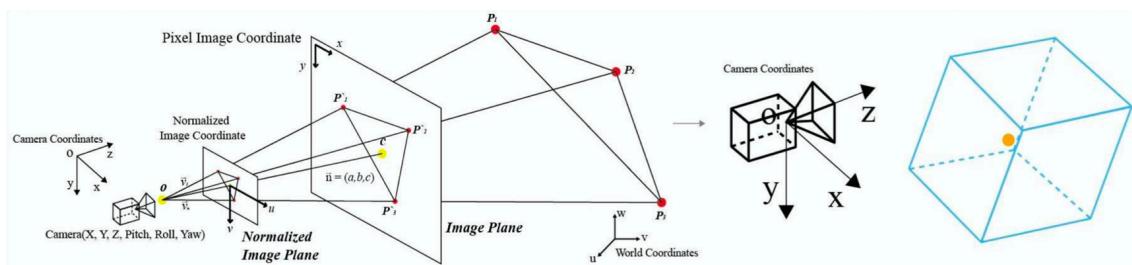


圖 2.7: 影像辨識示意圖 [?]

為了使辨識過程中，辨識特徵點的難度降低，通常會設計特徵明顯的標記，例如常見 OpenCV 中的 ArUco 標記，利用其快速的辨識 ID 以及距離、方位等資訊。

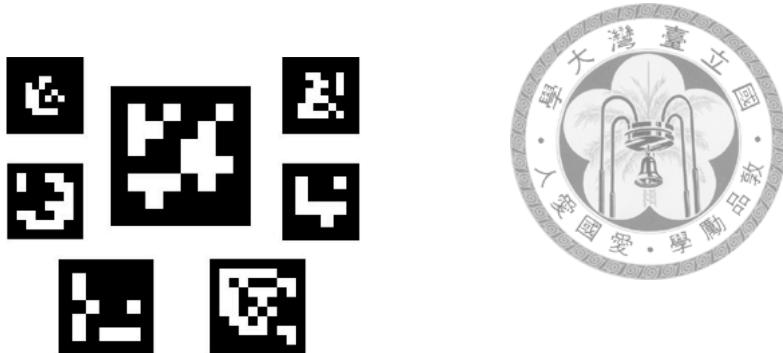


圖 2.8: ArUco 標記例子 [?]

- 幾何方法

此類方法常見於 LED 與 PD 的定位方法，並沒有一通用的分類名稱，其接收的訊號強度與距離與角度皆有關，因此需綜合多點定位與三角定位，透過訊號強度與相對位置之間的幾何關係推算相對位置 [?]。

- 其他

常見的其他種類演算法多會使用混合系統 (Hybrid System) [?]，除了使用量測距離、角度等位置資訊的感測器，多與其他量測姿態、速度的感測器結合使用，如動作捕捉 (Motion Capture) 領域中使用慣性量測單元 (Inertial Measurement Unit，簡稱 IMU) 量測點的移動軌跡。

2.2.3 小結

根據1.2章所總結對靈活度等的需求，演算法的影響較為顯著，而其中幾何方法是最合適的，因為此方法主要利用的為「兩者之間的幾何關係」，較能夠適應不同環境、不同擺放位置的改變，做到「一對一的定位」。相較起來，多點定位、三角法、指紋法都需要多個固定點的參考點的量測環境，無法符合易於安裝單元的需求，可以想像成「環境對一點的定位」。

2.3 定位技術分類

室內定位所使用的技術 (Technique) 一樣十分多樣，非電磁波段的定位主要為超聲波，應用訊號發射與接收之間的時間差，推算與目標物之間的距離。然而該技術受溫度影響，且對目標物的辨識能力不佳，因此目前著重在自駕車與載具中障礙物的有無偵測上 [?]，並不符合研究目標，所以以下章節聚焦在電磁波段內的定位進行分析。

電磁波段內有許多不同現今受到關注的量測技術，電磁波段內常見的技術於1.2.1章內有簡單介紹，而電磁波以光速傳播，擁有高傳播速度與不受介質溫度與濕度影響的特性，減少可能對量測訊號造成影響的因素。

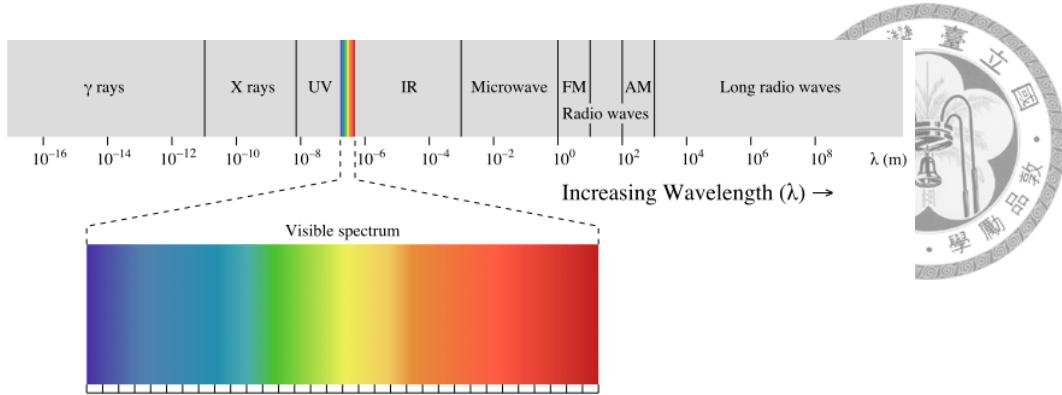


圖 2.9: 電磁波頻譜度 [?]

我們由電磁波的頻率切入進行分類，頻譜圖如圖2.9，能夠用於定位的波段為頻率低於約 790THz 的波段，因為高於此波段的電磁波具有過高能量，電磁波頻率越高所含能量越高使高頻波段對人體有害，因此此波段中的 X 光、紫外線、伽瑪射線無法使用於日常應用，不予考慮。

對人體無害的波段則分為兩部分探討：2.3.1章探討頻率低於 300GHz 的低頻波段 [?]，使用此波段的技術包含 WiFi、藍芽、RFID；而在2.3.2章介紹頻率介於 790THz 與 300GHz 之間的光波段，此波段的技術包含紅外線、可見光定位以及相機定位。以下章節便以圖2.10為架構依序介紹。

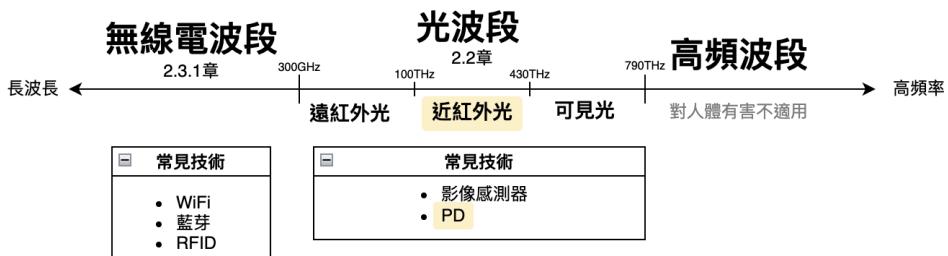


圖 2.10: 以電磁波頻率分類定位技術

2.3.1 無線電波段定位

低頻波段也就是俗稱的無線電波 (Radio Waves)，應用發展歷史長，對於可使用的頻率有嚴格規範，台灣由國家通訊委員會訂定嚴格的可使用頻率波段 [?]，保證軍警、醫療、廣播等的傳播需求。常見的定位技術包含室內與多數裝置既有的 WiFi 與藍芽裝置，或是較新的 RFID 定位技術。

無線電波的主要特色包含可穿透大多障礙物，因此可用於跨房間非可視範圍 (NLoS) 的定位 [?]，增加了應用場域，然而也大大提升了訊號處理的難度，感測器難以辨別訊號衰減原因為距離、角度、亦或是障礙物，因此選擇非可視範圍內定位即捨棄精度。除此之外，無線電波的傳遞距離很長，定位範圍較廣，WiFi 甚



至可達距離 50 公尺的定位 [?]。所需面對的誤差處理包含電磁干擾、同頻道干擾 (Co-channel Interference)、受障礙物與金屬影響的穿透效果等。

至於無線電波段所使用的定位演算法，大多系統皆是利用指紋法、多點定位、三角法的方式，共通點是都需要多個參考點，事先的安裝複雜，應用場域著重在固定場域，而精度多為公尺量級。

舉例來說，此波段大多應用在固定的場域中，方法包含指紋法的建立數據庫，或是利用大量的感測器與訊號發射器來判斷定位 [?]，系統設置皆與圖2.11相似，差異於感測器擺放的方法以及演算法。其中，最經典的 LANDMARC 例子 [?] 的環境如圖2.12所示，也是將感測器散布於環境中。

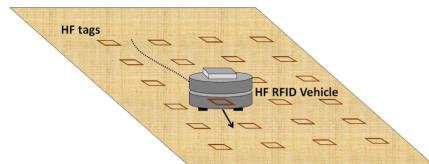


圖 2.11: RFID 定位系統示意 [?]

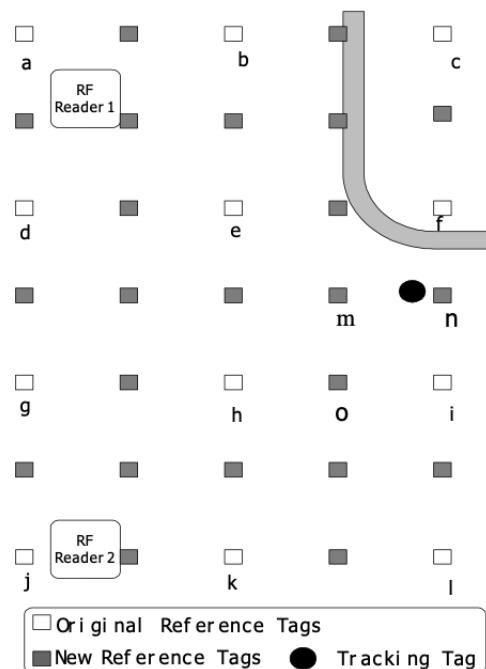


圖 2.12: LANDMARC 系統 [?]

無線電波段也有少數例用2.2.2章中所提到的三角法，如 [?] 研究（圖2.13），例用 RFID 天線所接收到的訊號強度與入射角度的關係，在載具上放置兩天線，而擺放角度有 90 度的差異，藉由 RFID 發射器傳送訊號至天線的入射角度不同，計算出目標物的方位。此文獻提出了一種一對一定位的方法，然而其只能解出目標物的方位，也就是二維定位中的角度，並不包含距離。除此之外，由於可穿透



障礙物的特色，隨著測試環境中添加障礙物、人、移動物品，皆會影響到訊號，造成誤差。

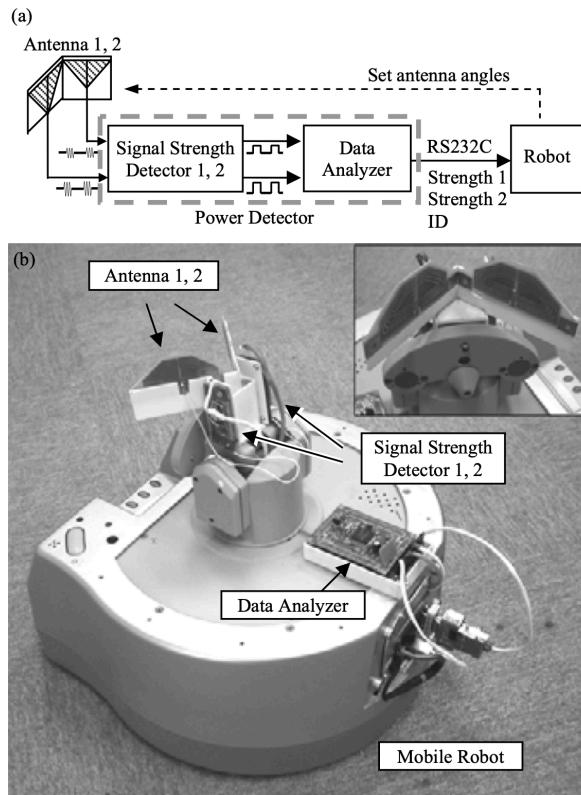


圖 2.13: 例用三角法定位的 RFID 系統 [?](a) 系統架構 (b) 載具實驗

最後總結無線電波段的特色：此波段常使用於傳輸訊號的功能上，因此有成熟的編碼與解碼技術，能夠輕易達到辨識目標物的功能；而能夠穿透障礙物的特性，以及傳輸距離廣，使得應用範圍大又不受視線範圍拘束；然而精度相較低，因此大多仰賴多個參考點或是事前建立數據庫的指紋法，應用的靈活度降低，較不符合本研究目標，因此著重在2.3.2章中的光波段定位。

2.3.2 光波段定位

光波段的定位發展近幾年來十分顯著，主要原因為光學硬體上的進步，促使光通訊 (Light Communication) 的發展，使發光與感光元件具有傳播 ID、訊息等資訊的能力，因此光通訊與光定位便於近年得到研究關注 [?]。光通訊流程如圖2.14所示，利用驅動器調控光源的閃爍頻率、發光強度，來達到編碼的效果，最常見的編碼方式即為關閉調控 (On-Off Keying，以下簡稱 OOK)，藉由開關光源傳送一段二進制訊號；感測器多以 PD 接收，接收後透過解碼取得資訊 [?]。

光波段在應用場域有一優勢，其可應用於無線電波限制的場域，如機場與醫院等特殊醫療場域 [?]，且在如今無線電波訊號充斥環境的狀況下，即使無線電波擁有很多頻率選擇，然而隨著現進通訊需求的提升，無線電波段已被證實有塞

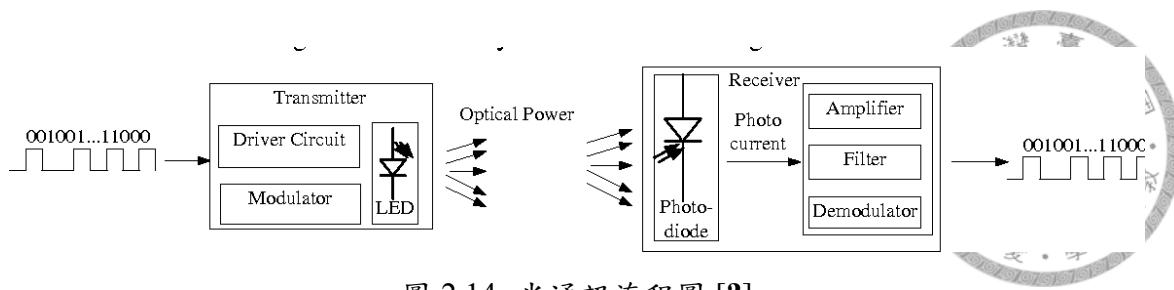


圖 2.14: 光通訊流程圖 [?]

車的狀況出現，而光波段即提供一替代方案，應對此困境。

再來，光波段無法穿透障礙物，僅能進行可視範圍內（Line-of-Sight，以下簡稱 LoS）的定位，捨棄廣域的定位，獲得較為單純的量測數據。此特性同時增加光通訊的安全性以及穩定度，著重針對可視範圍進行通訊與定位，不必考量其他訊號，也不受多餘訊號的干擾[?]。例如載具運行時，僅需著重分析於身旁的其他物體，位於隔壁房間的物體毫不重要，因此可忽略不重要的資訊，增加處理速度與有用訊號穩定度。即便如此，僅能進行 LoS 定位也限制了能夠量測的範圍，在環境阻擋物較為複雜的環境會擋住光訊號的傳輸，使其無法進行定位。

除此之外，電磁波有一特性為：波長愈短可達到的量測精度愈高，且感測器與訊號發射器的硬體大小也愈小，例如市售便宜常見的光波段感測器如 PD 感光二極體尺寸量級為 mm 或以下[?] 且能耗低，而使用低頻波段的 RFID 感測器常見量級為 cm[?]。因此，選擇波長較短的光波段相較無線電波段具有硬體上的優勢。

	無線電波段	光波段
通訊能力	較強	較弱
視線範圍外的定位	可以	無法
精度	較低	較高
量測範圍	較大	較小
安全性	較低	較高
醫院與機場的使用	無法	可以
硬體大小	較大	較小
常用演算法	多點定位 指紋法	多點定位 指紋法 幾何方法

圖 2.15: 無線電波段與光波段的比較

光波段定位也分為許多種類（參考圖2.10），以下分別於2.3.2.1章探討使用波段的差異，以及於2.3.2.2章介紹感測器硬體技術的選擇。



2.3.2.1 波段分類

參考圖2.10，光波段依照人眼可視與否分成可見光與紅外光兩類，而其中紅外光內由於硬體特性不同，又分為近紅外光與遠紅外光。以下依照不同面向條列討論：

- 人眼可視與否

依照人眼可視區分為可見光與紅外光波段，而紅外光頻率低、能量較小，且於視網膜成像的難度也大，因此較為安全。而可見光的優勢於其可以照明，因此大多可見光定位會應用於需照明的場域，配合照明用的光線進行定位。但凡使用情境不想影響人們的感知，亦或是光源需移動，有直射眼鏡造成人眼不適的可能時，便會選擇使用紅外光波段。

本研究目標需應用於移動物體上，因此紅外光呈現優勢，紅外光無法在視網膜成像的特性讓使用者並不會感受到不適

- 成本

光波段的光感測器常見的材料有矽 (Si)、鍺 (Ge) 與 III 或 V 族元素，價格最便宜的是矽材料，而矽感測器的感光波段約在 400-1000nm，也就是可見光與近紅外光 (NIR) 波段。但凡波長較長的紅外光在硬體材料便需要使用到昂貴的鍺或其他三五族元素 [?]，這也是為什麼普遍紅外光波段的硬體的印象都較為昂貴，然而近紅外光波段的感測器與可見光價格接近。

除了硬體本身的成本以外，系統架設難易度也需納入考量。常見可見光定位的文獻會強調系統架設難易度低，因為可以利用室內常見的照明光源，不需額外添置訊號發射器 [?]。然而需注意的是，可見光定位需利用光通訊分辨 ID 時，進行編碼需要在光源硬體加裝驅動器，即代表需要將原有燈具改成能夠進行編碼的硬體、加裝驅動器等，所需付出的成本不得被忽視。因此，在架設成本上，我認為波段的無論影響不大。

因此，僅考量成本時，無論是 PD 還是影像感測器，挑選可見光與近紅外光波段較為合適。

- 環境光源的影響

光波段的誤差來源主要包含多重路徑傳輸 (Multipath effect) 與環境光源 (Ambious Light Source) [?]，其中多路徑傳輸無關波段，影響程度皆相同。而環境光源的部分，強度過高可造成訊號偏移，甚至硬體飽和導致訊號失真，因此需有效的降低環境光源的強度以保持定位的準確度。

環境光源包含了室內的光源以及太陽光源，室內的光源使用交流電的頻率約在 120hz，可以針對頻率進行濾波。而太陽光源的強度與電磁波頻率有關，可以由太陽輻射波譜 (Solar Irradiance Spectrum) 觀察強度與波長的關係。太陽光照射至地球時，傳送至地表的能量與大氣層的吸收度有關，

高峰即為可見光波段，低谷則出現在 760nm 左右的氧氣吸收帶（Oxygen A-band）、與 940nm 和 1550nm 附近被水蒸氣吸收之波段 [?]。

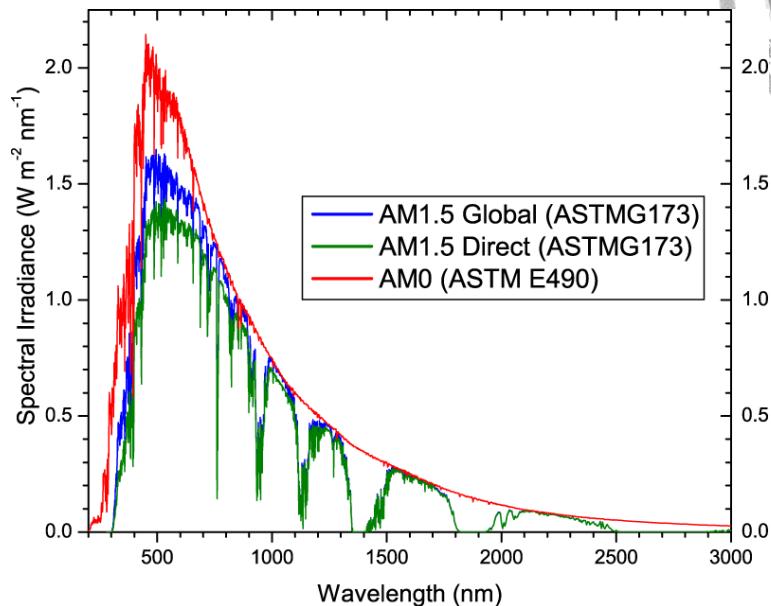


圖 2.16: 太陽輻射波譜 [?]

由於利用光波段定位最大誤差來源之一就是要克服其他光所造成的雜訊，因此在選擇工作波長時，需挑選太陽光能量較低的波段，也就是於近紅外光波段中的 760nm 與 940nm，以及遠紅外光波段內的 1550nm。

綜上所述，根據本研究的需求，最適合選擇使用近紅外光波段中的太陽能量低谷波段，簡單整理於圖 2.17，可以同時節省硬體成本、降低環境光源的影響，也能夠不造成使用者的眼經不適。

	可見光波段	近紅外光波段	遠紅外光波段
硬體成本		較低	較高
人眼可視與否	同時提供照明需求		人眼不可視
太陽光能量	較高	較低 (低谷於 760nm、940nm 附近)	較低 (低谷於 1550nm 附近)

圖 2.17: 光波段中的波段特性比較

2.3.2.2 接收子類型：PD 與影像感測器

2.3.2.1 章中討論了光波段中不同波段的優缺點，而本小節中將討論光波段中常使用的兩種硬體差別，其分別為 PD 與影像感測器。



- 影像感測器

影像感測器包含常見的相機，運作原理為每次取樣時，獲得多個像素的強度資訊，資訊量極多，是眾多定位技術中最消耗運算資源的。其定位方式是利用辨識已知的特徵圖案，進而將圖片中圖案的大小與變形與特徵進行比對，利用 PnP 眼算法推算目標物的距離以及姿態（參考2.2.2章）。其中，若量測範圍要廣，由於隨距離增加，投射於影像平面上的圖案大小衰減快速，因此特徵圖案則需要越大越好。然而其取樣頻率大多在百赫茲內，且視覺辨識所需要的運算資源多，因此成本高，且運算速度也較慢。

影像感測器所辨識的特徵點又可分為主動與被動傳送訊號的，被動傳送訊號的包含 ArUco 標誌（參考圖2.8），其需透過環境光源照設可見光波，讓影像感測器得以看到標誌，若室內光源未開，則無法定位。反之，主動傳送訊號的標誌便是光源，大多室內定位會使用半徑 15 公分以上的崁燈，利用相機的滾動式快門效應（ Rolling Shutter Effect ），將條紋圖案視為特徵辨識。其中，滾動式快門效應會造成條紋圖樣的原因可參考圖2.18，因為 CMOS 感測器並非同時進行所有像素的成像，而是輪流一列一列的成像，搭配光源的閃爍，各列成像時便會各自呈現亮暗，因此產生條紋樣式。除此之外，透過調整光源的閃爍頻率，可以調整條紋的粗細，進而達到編碼與解碼的效果，如圖2.19。

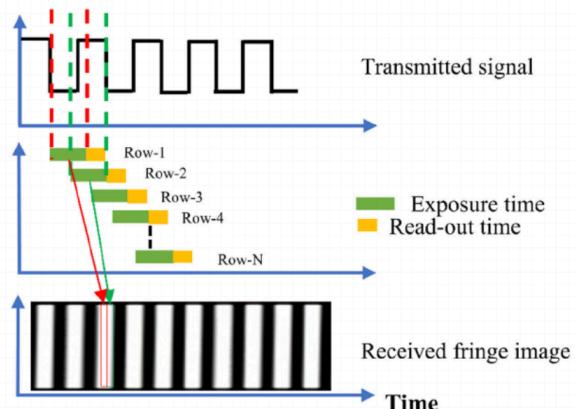


圖 2.18: 滾動式快門效應的成因 [?]

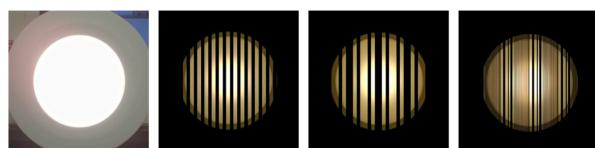


圖 2.19: 滾動式快門效應產生的條紋樣式 [?]

光波段中除了環境光源會造成誤差以外，誤差主要來源於多重路徑傳輸，如圖2.20所示，訊號在傳送至感測器之前，由於障礙物造成訊號反射，



使得感測器接收的訊號除了 LoS 路徑以外，還包含了透過反射傳送而來的訊號。除了 LoS 訊號以外，感測器量測到的 NLoS 訊號，便會造成誤差。而相機使用的為影像中的特徵點，因此較不受多重路徑傳輸的影響，在此相誤差上具有優勢。

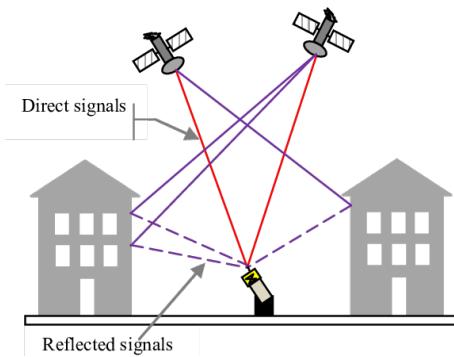


圖 2.20: 多重路徑傳輸 [?]

- Photodiode(PD)

光電二極體 (Photodiode，以下簡稱 PD) 能感測到資訊僅有強度資訊，而強度資訊受 LED 出射角度、PD 入射角度、距離影響 (詳細參考2.4.3章)，相較大多無線電波技術主要僅受距離影響，PD 的變數較多，使得獲得相對定位的演算法較複雜，也需要多個 PD 或多個 LED 以進行定位。然而 PD 優勢為具有極高的取樣頻率，可高達千赫茲甚至萬赫茲，高取樣頻率即可使用光通訊進行編碼與解碼，且硬體成本相較影像感測器來說非常低。

PD 定位系統的架構如圖2.14所示，訊號發送是利用驅動器與 LED 進行光通訊，PD 接收訊號後進行解碼、取得 LED 的 ID 與光強度，再利用光強度以不同演算法解出相對位置。而 LED 與 PD 的定位系統中，包含單 LED 對多 PD、多 LED 對多 PD、或是多 LED 對多 PD，其中，當系統內包含多個 LED 對多 PD 時，PD 會同時接收到來自多個 LED 的編碼訊號，參考圖2.21，PD 會將訊號轉換至頻域，以獲得各頻率下的強度，也就是各 LED 傳送至各 PD 的強度。

利用光通訊獲得各 LED 傳送至各 PD 的強度後，解出定位的演算法分成兩類，一類型為使用指紋法或多點定位，這種類型的系統需在環境中放置多個參考點 (如圖2.22)，為「環境對一點的定位」。除此之外，大多使用2.2.2章中提到的幾何方法，如 [?] (參考圖2.23)，透過多 PD 量測強度後，利用多個 PD 強度與幾何之間的關係取得定位，此類型方法詳述於2.4.6章。

影像感測器與 PD 進行定位的方法差異非常大，前者演算法為影像辨識，利用特殊圖案分辨光源，以影像中的變形計算位置；PD 常見的定位演算法則包含多點定位、指紋法、幾何方法，利用光通訊分辨光源。在兩者之間權衡時，本研究主

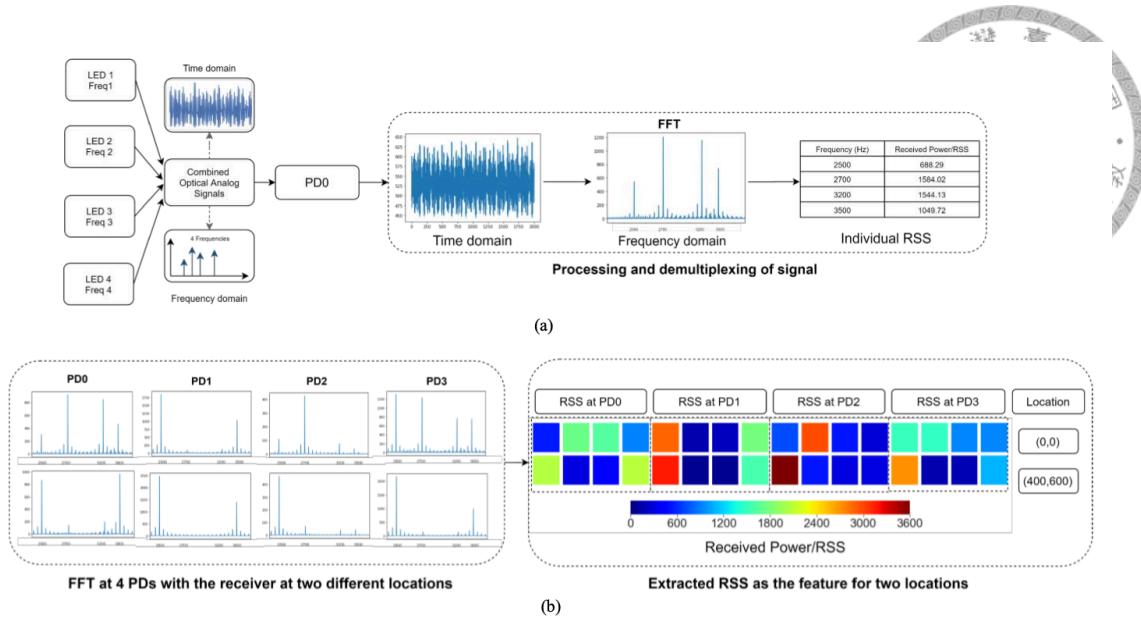


圖 2.21: 多 PD 進行光通訊解碼 [?]

要考量到成本以及硬體大小，為了能夠達到靈活、廣泛運用，取捨掉影像感測器具有高精度可能性的優勢。

2.3.3 小結：本研究使用技術的選擇

在2.3章中，由電磁波頻率分類為無線電波段與光波段，分別於2.3.1章與2.3.2章中介紹無線電波與光波段的定位，並於圖2.15中比較兩者，其中光波段較高的精度、較小的硬體、以及能夠零或應用的幾何方法演算法，使光波段定位為更適合的選擇。

光波段中，又依照使用波段與使用的硬體分類。使用波段於2.3.2.1章中討論，分為可見光、近紅外光與遠紅外光，參考圖2.17，近紅外光兼具低成本低干擾的特色，因此選用近紅外光波段中，位於輻射光譜低谷的760nm與940nm波段最為合適。硬體選擇則於2.3.2.2章中討論，參考圖2.24，權衡之下選擇PD，雖然捨棄精度，但得以換取較低的成本與較小的體積；另外，PD所使用的定位演算法需為具有靈活度的幾何方法。

綜上所述，本論文將使用LED與PD的定位方法，於後續的2.4章中更深入的討論，分別介紹LED與PD的特性、光傳遞模型，以及現今文獻所遇困難與限制。

2.4 LED 與 PD 的定位方法

於2.3章中，我們將定位方法聚焦在LED與PD的定位方法上，而此種系統是將單個或多個LED安裝在目標物上，各LED藉由編碼來區別各自的訊號，而PD安裝於觀察物上，將每個PD所接收的訊號分別解碼，得到各LED的訊號強度。

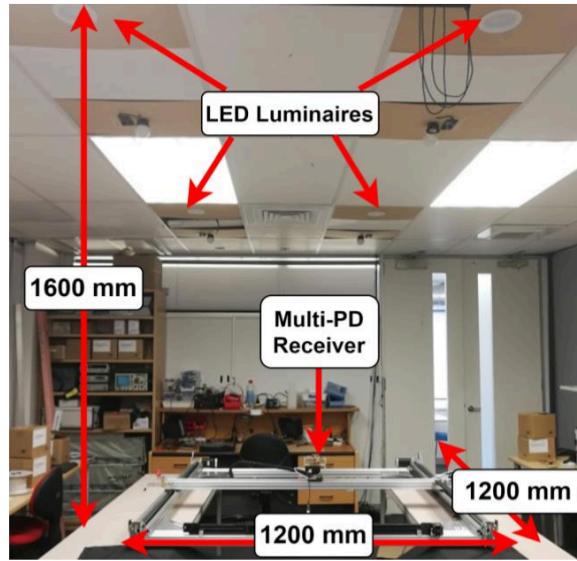


圖 2.22: 使用指紋法的系統環境 [?]

為深入了解 LED 與 PD 定位系統的運作方式，我們先於2.4.1介紹 LED 與 PD 定位系統的流程，並於2.4.2章介紹常用的光學單位；有基本了解後，於2.4.3介紹 LED 與 PD 的輻射特性，再於2.4.4章中介紹完整的光傳遞模型，最後再進入2.4.6章介紹現今文獻的作法，並整理所遇困難與限制。

2.4.1 LED 與 PD 定位架構與流程

LED 與 PD 的定位系統，是由 L 個 LED 與 P 個 PD 組成， L 與 P 的數量可為一也可為多個。根據1.2章中提到的使用情境，我們希望將 LED 與 PD 各自封裝成兩硬體單位，因此可用兩座標系表示兩硬體單位。其中，多個 LED 固定於 LED 座標系上，PD 則是固定在 PD 座標系上，而兩座標系的相對關係可以自由的改變，參考2.1章。實際的系統架構，可以參考圖2.22，其為 [?] 中的系統架構，而圖2.26則為該研究中的 PD 量測單位。

下圖則是系統的定位流程，為了能夠辨識是哪個 LED 發出的訊號，需要透過光通訊技術，由 LED 進行編碼，透過光傳遞到 PD 後。各個 PD 進行光通訊解碼，綜合所有資訊，我們可以得到一個 L 個 LED 對應 P 個 PD 的電流強度表格；在利用此表格進行定位的計算。

首先，我們來介紹現今 LED 與 PD 定位的系統流程：參考圖2.25，前置作業需設計系統，包含挑選硬體與設計硬體組態。在這之中，LED 與 PD 挑選時需注意的硬體特性分別於2.4.3.3章與2.4.3.4章中介紹，硬體組態的自由度則於2.4.3.1章中介紹。

完成系統的設計與搭建後，系統運作的流程可以分為兩部分：光通訊與計算定位，以下條列介紹。

- 光通訊

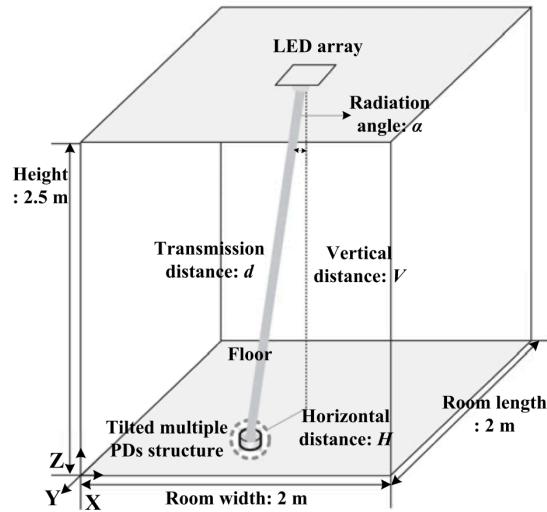


圖 2.23: 使用幾何方法的系統環境 [?]

	影像感測器	PD
成本	較高	較低
精度	較高	較低
演算法複雜度	較高	較低
辨識ID方法	視覺辨識	光通訊
多重路徑傳輸	影響小	影響大
硬體大小	辨識標誌需足夠大	PD本身體積小

圖 2.24: 影像感測器與 PD 的特性比較

光通訊可參考圖2.14，各 LED 通過編碼，傳輸特定模式的訊號，在定位上最常使用的編碼系統為 OOK，僅利用開關頻率將 LED 的 ID 傳輸。LED 發出的光訊號透過光傳遞至 PD，每個 PD 將所收到的訊號進行光通訊解碼，將訊號拆成訊號來自哪個 LED 以及該 LED 所造成的電流大小，綜合 P 個 PD 解碼後的資訊，即可獲得一 $L \times P$ 的表格，顯示各 PD 對應各 LED 的電流。

- 定位計算

定位計算著重在如何透過 $L \times P$ 各 PD 對應各 LED 的電流，回推出兩座標系的相對位置，如同2.2.2章敘述，PD 能使用的定位演算法種類包含多點定位、三角法、指紋法與幾何類型，前三種都為多點對一目標物的定位，系統環境與架構可參考圖2.22，並不符合本研究目標欲達到的兩單位之間的

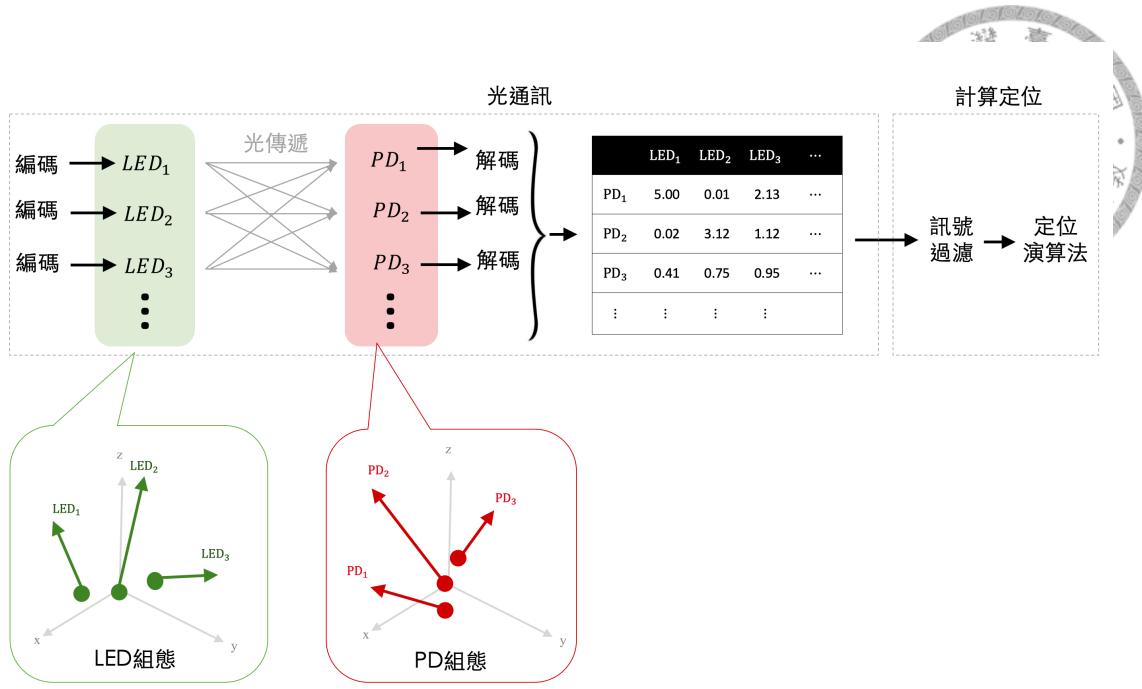


圖 2.25: LED 與 PD 定位系統架構

互相定位，參考圖2.23；因此，以下針對幾何類型介紹。

使用幾何方法的演算法，主要是仰賴光傳播模型中（式2.11），PD 的電流與距離、出入射角相關，利用多個 LED 與 PD 之間的交互關係，得到相對位置。光傳遞模型中，變數除了距離以外，還包含出入射角，使得 PD 比起僅能得到距離資訊的感測器，靈活度更高，例如 PD 得以透過特殊的限制與組態，得到目標物的姿態 [?]，是除了相機以外能得到姿態資訊的方法。然而也因為變數較多，使得模型較為複雜，如同式2.17呈現，因此需透過適當的限制簡化模型複雜度，常見的限制於2.4.5.1章中介紹。

2.4.2 光學常用單位介紹

由於光領域所使用的單位與機械領域差距較大，且單位與術語經常有口語或混用的情況，令人感到困惑，因此在進入 PD 與 LED 定位的探討之前，先對光領域的一些術語與單位進行介紹，方便2.4.3.2章以及2.4.4章中敘述朗博輻射模型與光傳播模型。

首先，描述光照的單位分為兩種系統，輻射測量學 (Radiometry) 與光度測量學 (Photometry)，兩領域以不同單位描述光源，其中輻射測量學著重在電磁波輻射的量測，描述通量單位為瓦特 (Watt)；而光度測量學著重在人眼可見之可見光波段的研究，通量單位為流明 (Lumen)，同樣物理量下單位定義不同 [?]。

本研究聚焦在近紅外光波段，因此本論文會使用輻射測量學的系統，然而文獻上可見光定位數量較多，因此在單位的換算上需特別注意，以下針對光領域常用物理量分項簡單介紹。

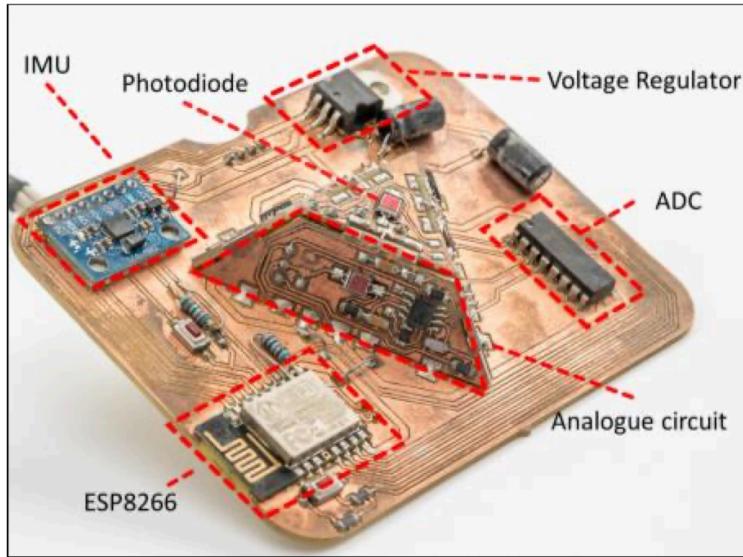


圖 2.26: [?] 研究的硬體組態設計

- 立體角 Solid Angle Ω

描述二維空間中的角度單位為弧度，代表夾角內的弧長與半徑比例，而單位弧度的定義是半徑與圓弧長度相等時的圓心角。

然而光源存在於立體空間中，而空間中描述角度的物理量即為立體角 Ω (Solid Angle)，該物理量代表一光束投影於單位球面上時，表面積與半徑平方的比例，如圖2.29所示。立體角的單位為球面度 (steradians, 簡寫 sr) 代表在半徑為 r 的球體中，立體角投射出的表面積為 r^2 。

- 輻射通量 Radiant Flux Φ

描述光照功率的物理量為通量 (Flux) 或稱輻射功率 (Power)，用符號 Φ 表示，代表每單位時間的輻射能量，單位為瓦特，而大多 LED 規格表上以此物理量來描述 LED 在指定電流下可產生的最大光功率。

- 輻射強度 Radiation Intensity I

每單位立體角所含的通量稱為輻射強度 I ，此物理量常用於描述光與立體角之關係，在同一光束內，輻射強度僅與立體角有關，與距離無關。

- 輻照度 Irradiance E

每單位面積所含的通量稱為輻照度 (參考圖2.30)，其中照射面積隨著距離 D 增加而平方遞增。

2.4.3 LED 與 PD 的輻射特性

LED 與 PD 硬體有許多種類，最常見的市面上 LED 與 PD 為軸對稱並滿足朗博輻射模式 (Lambertian Radiation Pattern)，本論文僅考慮此類硬體，其中軸對稱

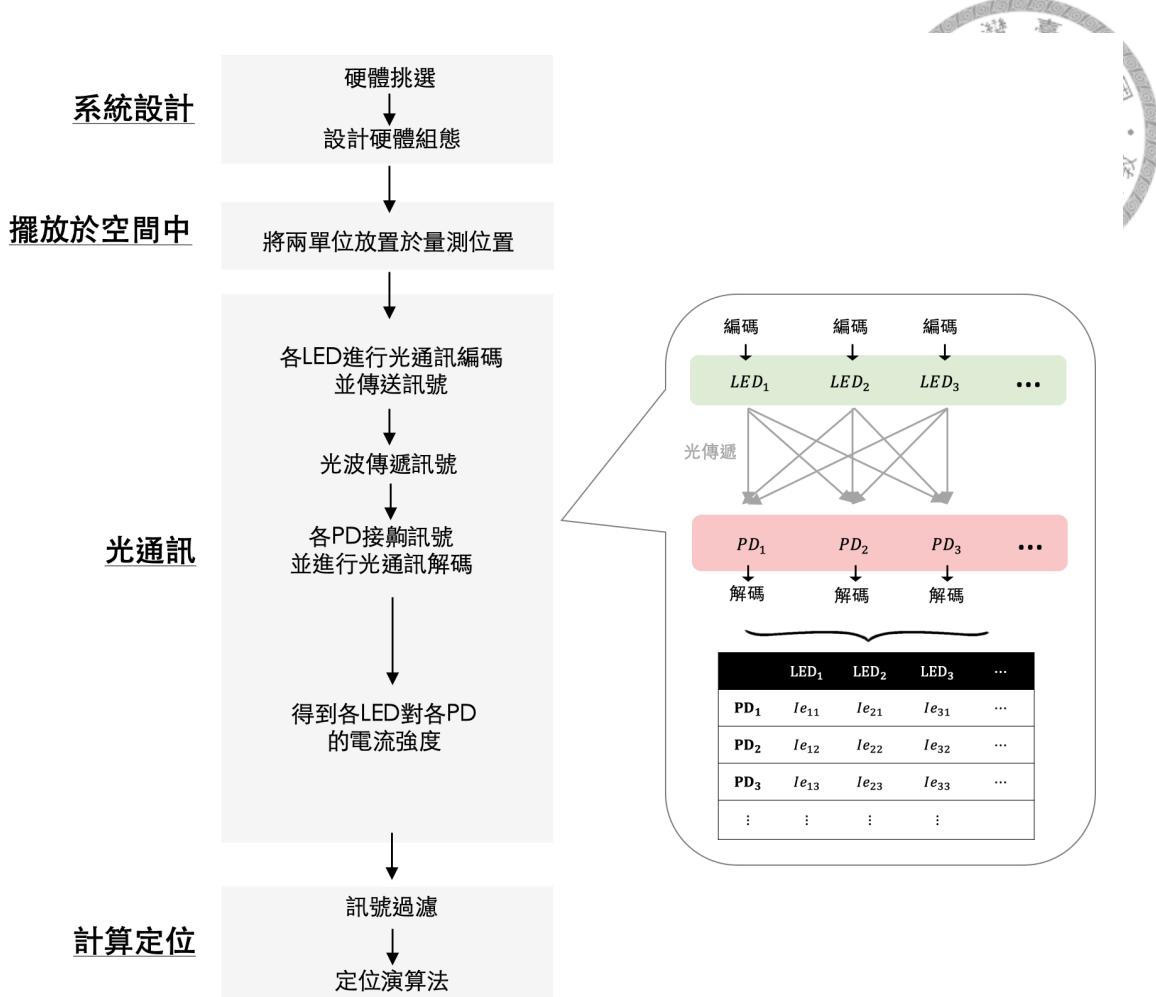


圖 2.27: LED 與 PD 定位系統流程

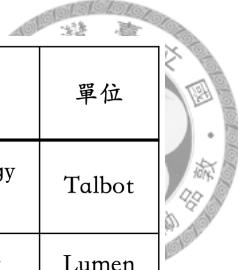
代表輻射強度並不隨方位角改變。

以下章節依序從2.4.3.1章中，定義軸對稱的LED與PD組態，介紹硬體組態的自由度，於2.4.3.2章介紹LED與PD皆遵守的朗博輻射模型（Lambertian Radiation Pattern），再於2.4.3.3與2.4.3.4章分別介紹LED與PD兩者各自的硬體特性。

2.4.3.1 LED 與 PD 的組態

在描述三維空間中的LED與PD時，需要描述硬體的擺放位置，而由於LED與PD皆有中心軸，因此需要用向量表示指向。如圖2.31，圓點代表硬體位置，而向量表示硬體指向，其中位置以 \mathbf{P} 表示，包含三個自由度 $[x, y, z]^T$ ，指相則由 \mathbf{V} 表示，自由度包含 $[u, v, w]^T$ ，而由於LED與PD指向只在乎方位不在乎距離，因此可將指向向量定義為單位向量： $\|\mathbf{P}\| = 1$ 。指向也常以球座標系表示 \mathbf{V}^{sph} ，三個分量為 $[d, \alpha, \beta]^T$ ，其中指向的距離分量 d 為一，而球座標系與卡氏座標系之間的換算可參考式2.2。

以LED為例（參考圖2.32），我們需要定義LED硬體於LED座標系中的位置 ${}^L\mathbf{P}$ 與指向 ${}^L\mathbf{V}$ ，左上標 L 代表其定義於LED座標系中。一個LED的組態一



符號	定義	輻射測量學	單位	光度測量學	單位
Q		Radiant Energy 輻射能量	Joule(J)	Luminous Energy 光能	Talbot
Φ	$\Phi = \frac{dQ}{dt}$	Radiant Flux 輻射通量(功率)	Watt(W)	Luminous Flux 光通量	Lumen (lm)
I	$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$	Radiant Intensity 輻射強度	W/sr	Luminous Intensity 光度	Candela (cd)
E	$E = \frac{d\Phi}{dm^2}$	Irradiance 輻照度	W/m^2	Luminance 輝度	cd/m^2

圖 2.28: 輻射測量學與光度測量學的物理量比較

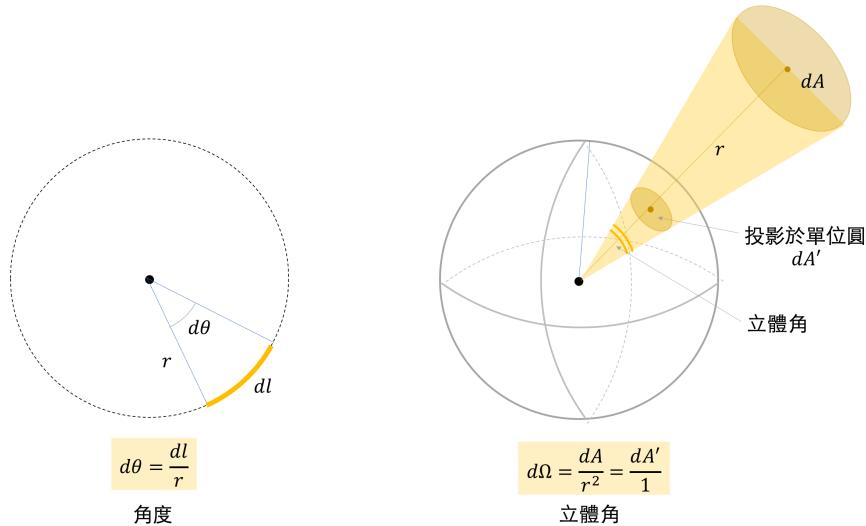


圖 2.29: 角度與立體角

共有五個自由度，包含擺放位置 ${}^L\mathbf{P}$ 的三個自由度 $[{}^Lx, {}^Ly, {}^Lz]^T$ ，以及定義指向的單位向量 ${}^L\mathbf{V}$ 所含兩個自由度：天頂角 ${}^L\alpha$ 與方位角 ${}^L\beta$ ，換算至卡氏座標系則為 $[{}^Lu, {}^Lv, {}^Lw]^T$ 。

而 PD 的擺放自由度相同，唯一差別為定義的座標系為 PD 座標系，因此左上標為 P ，如擺放位置為 ${}^P\mathbf{P} = [{}^Px, {}^Py, {}^Pz]^T$ ，定義指向的單位向量 ${}^P\mathbf{V}^{sph} = [1, {}^P\alpha, {}^P\beta]^T$ 。

2.4.3.2 朗博輻射模型

LED 與 PD 的照射與接收模式 (Pattern) 皆可以用朗博輻射模式描述 (圖2.33)，其代表感 (發) 光強度隨著 LED 出射角 (PD 入射角) 的增加而衰減，如式2.3描述，感 (發) 光強度於中心軸時最大，其衰減模式可用餘弦函數 (cosine) 的 M 次

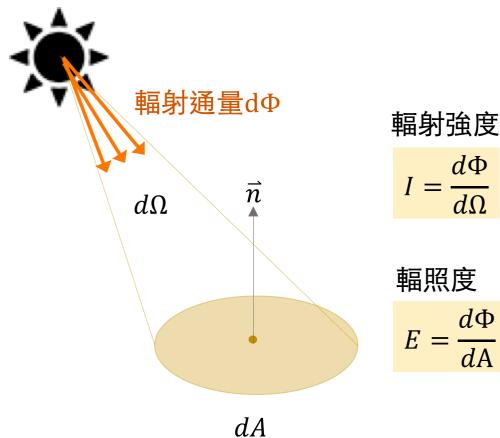


圖 2.30: 輻射強度與輻照度

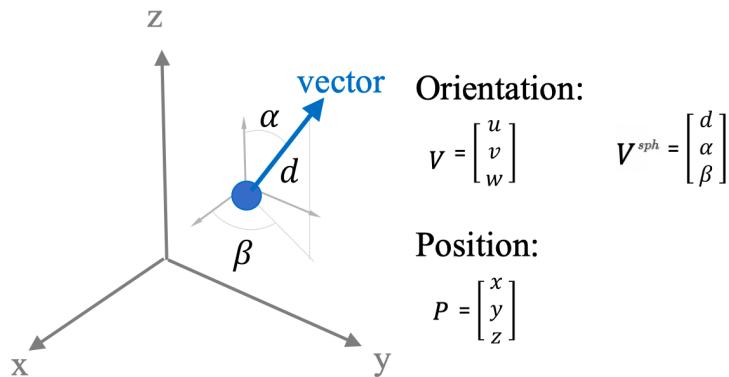


圖 2.31: 三維空間中的向量

方 (power) 表示， M 代表的是朗博次方 (Lambertian Order)，需注意的是輻射強度與距離無關 (參考2.4.2章)。

$$I(\omega) = I(\omega = 0) \times \cos(\omega)^M \quad (2.3)$$

上述為輻射強度與出入射角的關係，為了呈現出入射角於空間中的關係，我們以一向量描述 LED 與 PD 的中心軸方位，而由於 LED 與 PD 最大的可視範圍不會超過出射角 90° ，因此用半球體描述 LED 與 PD 的可視範圍，呈現於圖2.34。如圖所示，出入射角在空間中僅與球座標系中的天頂角 α 相關，在同樣天頂角時出入射角皆相同。

以圖2.34作延伸，空間中的 LED 與 PD，朗博輻射模式在朗博次方為一時如圖2.35，在同樣出射角下，光輻射強度相同，呈現軸對稱，愈接近中心軸的輻射強度愈大。

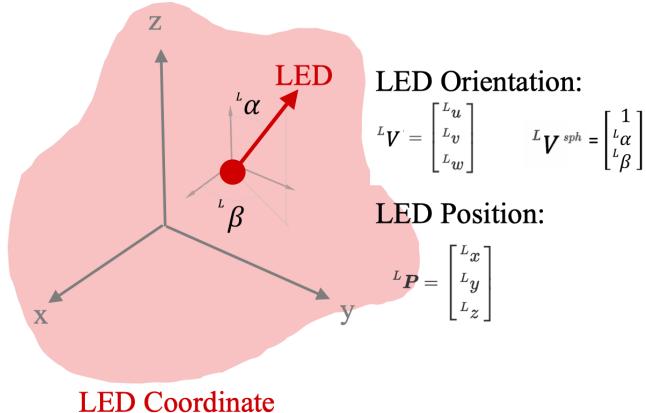


圖 2.32: LED 在座標系中的擺放自由度

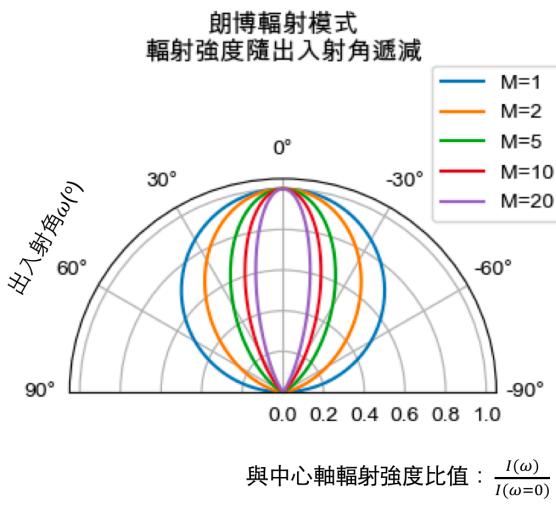


圖 2.33: 輻射強度與出入射角的關係

而朗博次方所代表的意義，可視為在敏感度與照射範圍中的取捨：朗博次方較小時，其照射範圍較大，最大可以覆蓋接近半個球面，光強度隨出射角度衰減的速度不大，也就是對不同入射角度的敏感度則不高。反之，朗博次方較大的硬體雖然覆蓋範圍較小，但對覆蓋範圍內的角度變化敏感度高（如圖2.33）。

2.4.3.3 LED 特性

LED 與 PD 在選購時，除了挑選朗博次方以外，也需注意其他特性以及影響發收光能力的硬體參數，在此將硬體參數整理於圖2.36，這些硬體參數會陸續於2.4.3.3章與2.4.3.4章中介紹。

LED 發出的輻射強度 $I\ell$ ，會遵守式2.3描述的朗博輻射模式，其提供了 LED 光輻射強度 $I\ell$ 與不同出射角 θ 的關係。而由於描述 LED 特性時，多以總輻射通量 P_t 描述，而總輻射通量為半球面空間中的輻射強度 $I\ell$ 積分，如式2.4。

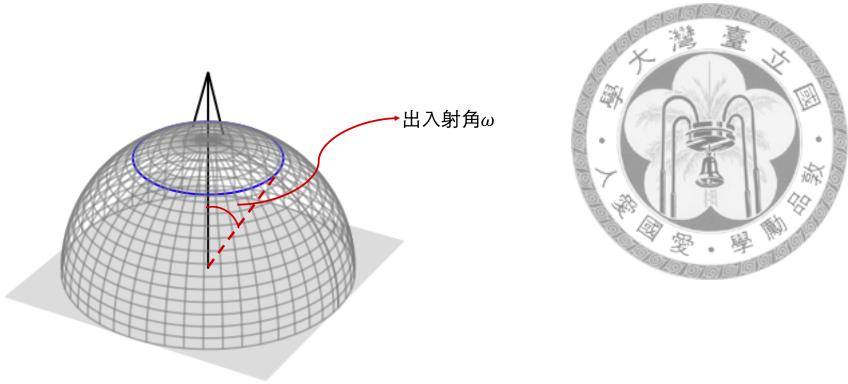


圖 2.34: LED 與 PD 於三維空間中的入射角

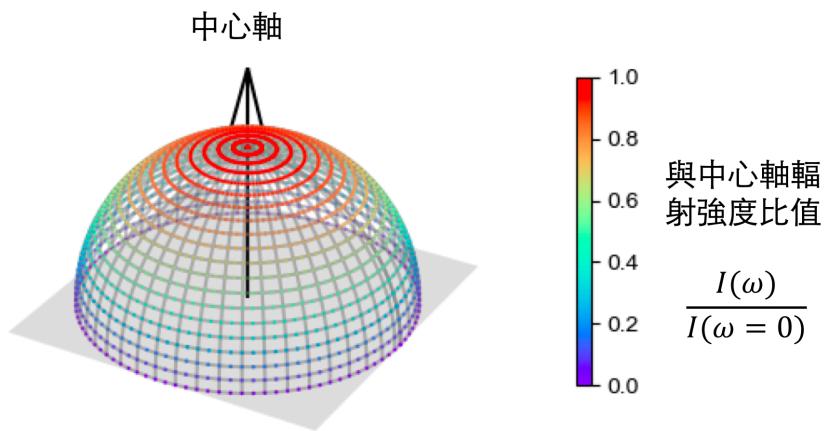


圖 2.35: 朗博次方為一時空間中輻射強度與出入射角方位的關係

$$Pt = I\ell(0)(M\ell + 1)/2\pi \quad (2.4)$$

透過式2.4移項與式2.3，即可完成式2.5，描述 LED 輻射強度 $I\ell$ 與出射角度 θ 、LED 總輻射功率 Pt 以及朗博次方 $M\ell$ 的關係。

$$I\ell(\theta) = Pt \frac{(M\ell + 1)}{2\pi} \cos \theta^{M\ell} \quad (2.5)$$

圖2.37呈現了LED在總輻射通量 Pt 相同的情況下，輻射強度 $I\ell$ 與出射角 θ 的關係。圖中呈現了式2.4積分的影響，在朗博次方較大時，中心軸的輻射強度比值突出，其原因為朗博輻射模式於半球面上積分的影響。擁有固定輻射總通量時，我們將輻射強度分配給小的入射角度，來分總通量的立體角不多；反之當我們將輻射強度分配給大的入射角度時，入射角大所包含的立體角較多。因此，朗博次方較小時，隨著出入射角度增加，輻射強度衰減速度緩慢，出射角於 45 度仍有中心軸 0.7071 倍的強度，因此總通量需分配不少於大角度的部分；而朗博次方



	LED參數	PD參數
影響發/收光模式 (Pattern)	LED朗博次方 Ml	PD朗博次方 Mp
影響發/收光強度	總輻射通量 Pt	有效面積 A 響應率 Re 飽和電流 s

圖 2.36: LED 與 PD 的硬體參數

較大時，大出射角的輻射強度極小，僅用將總輻射通量分配給小出射角的部分，因此輻射強度對總輻射強度的比值較大。

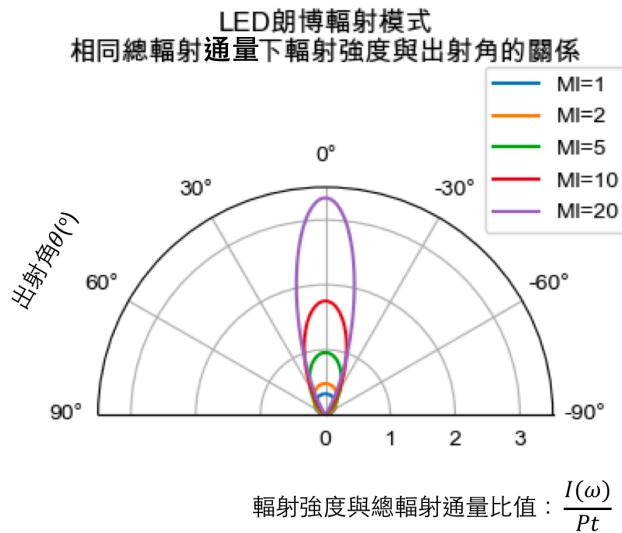


圖 2.37: 輻射強度與總輻射通量比值

2.4.3.4 PD 特性

首先，PD 得到的輻射強度 I_p 也遵守朗博輻射模式，式2.6描述輻射強度與入射角度 ϕ 以及 PD 朗博次方 M_p 的關係。

$$I_p(\phi) = Il \cos \phi^{M_p} \quad (2.6)$$

而 PD 所量測到的為輻射通量 Φ_p ，再將輻射通量轉換為電流輸出（式2.8）。PD 量測到的輻射通量呈現於式2.7，藉由圖2.30中輻射通量 Φ 與輻射強度 I 的關係以及立體角 Ω 的定義，將式2.6的光強度轉換為 PD 接收的輻射通量 Φ_p 。其中， A 為 PD 的硬體參有效面積， D 為 LED 與 PD 之間的距離。



$$\Phi p = \frac{Ip}{\Omega} = \frac{IpA}{D^2} \quad (2.7)$$

而 PD 最終輸出電流 Ie 與輻射通量 Φp 的關係由式2.8描述， s 為 PD 的飽和電流，也就是該 PD 能夠輸出的最大電流：在未達飽和之前，輸出電流 Ie 與輻射通量 Φp 成正比，比值為響應率 Re 。

$$Ie = \begin{cases} \Phi \times Re, & \text{if } Ie < s \\ s, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.8)$$

綜合式2.6、式2.7、式2.8，PD 輸出的電流 Ie 與 LED 的輻射強度 Il 統整於式2.9，式中的硬體參數可參考圖2.36：

$$Ie = \begin{cases} Re \frac{A}{D^2} Il(\theta) \cos \phi^{Mp}, & \text{if } Ie < s \\ s, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.9)$$

2.4.4 光傳遞模型

本章節將綜合2.4.3.3章與2.4.3.4章中呈現的LED與PD模型，於2.4.4.1章中，呈現由LED光源將光波傳送至PD並轉換成電流的完整模型；接著於2.4.4.2章中，將LED與PD的數量提升為多個；最後於2.4.4.3章中將光傳播模型中的距離 D 、出入射角 $\theta\phi$ 變數轉換為用LED與PD的座標系表示，呈現出LED與PD在不限制條件的情況下模型非常複雜。

2.4.4.1 單 LED 對單 PD 光傳遞模型

光傳遞模型需建立由LED至PD的過程，LED與PD各自的輻射與接收特性分別於2.4.3.3章與2.4.3.4章中介紹，綜合描述LED發光強度 Il 的式2.5，以及描述PD輸出電流 Ie 的式2.9，即可獲得一LED對一PD的光傳遞模型（式2.10）。

$$Ie = \begin{cases} Re \cdot A \cdot Pt \frac{M\ell+1}{2\pi} \frac{\cos \phi^{Mp} \cos \theta^{M\ell}}{D^2}, & \text{if } Ie < s \\ s, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.10)$$

在光傳遞模型中，與定位相關的變數包含三個：距離 D 、PD入射角 ϕ 、LED出射角 θ ，他們便是幾何方法演算法要使用的變數。其中出入射角如圖2.38，分別為硬體中心軸與距離向量之間的夾角。

2.4.4.2 多 LED 對多 PD 光傳遞模型

由於LED與PD定位時數量通常不只一個，因此描述多LED對多PD的光傳遞模型時，需註明清楚（可參考第vii頁）。在此設定LED總數為 L 、PD總數為 P ，描述第 l 個LED與第 p 個PD的硬體參數時，於硬體參數的右下標加註，如

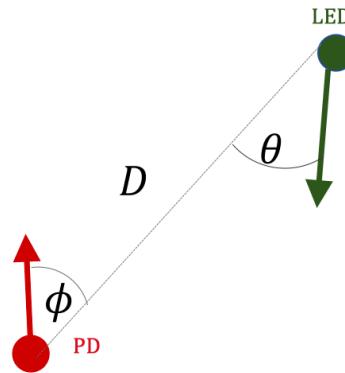


圖 2.38: 單 LED 與單 PD 的交互關係

A_2 為第二個 PD 的有效面積；再來，描述第 l 個 LED 與第 p 個 PD 之間的關係時，則將 LED 與 PD 的編號 lp 同樣加註於右下標，例如 D_{34} 為第三個 LED 與第四個 PD 之間的距離，參考圖 2.39。

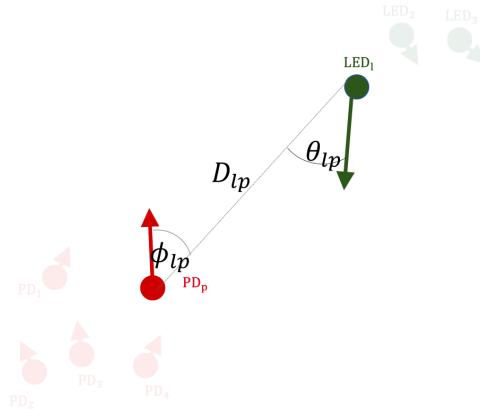


圖 2.39: 多 LED 與多 PD 的交互關係

而完整的多 LED 對多 PD 的模型如式 2.11， Ie_{lp} 代表著第 p 個 PD 收到來自第 l 個 LED 所產生的電流大小。

$$Ie_{lp} = \begin{cases} Re_p \frac{A_p \cos \phi_{lp}^{Mpp}}{D_{lp}^2} \times Pt_l \frac{(M\ell_l+1)}{2\pi} \cos \theta_{lp}^{M\ell_l}, & \text{if } Ie_{lp} < s_p \\ s_p, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.11)$$

2.4.4.3 以座標系呈現光傳遞模型

雖然式 2.11 已呈現了多 LED 對多 PD 的光傳遞模型，然而式子中的變數為距離 D 與出入射角 θ, ϕ ，而這些變數為各 LED 與各 PD 之間的幾何交互關係，並沒有將 LED 與 PD 定義於各自的座標系中，參考圖 2.40，呈現 2.1 章中描述的兩座標



系各自移動的情境。我們需要得到「相對位置與 PD 輸出電流大小」的關係，才能夠利用電流關係得到相對位置關係，因此需要將式2.11中的幾何交互關係，改以兩座標系轉換關係與組態來表示。

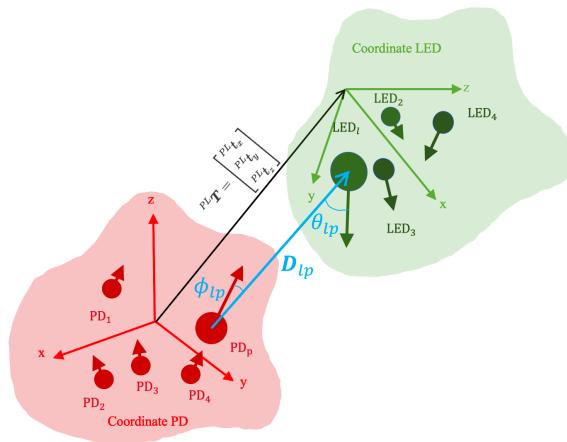


圖 2.40: LED 與 PD 之間的關係以座標系之間的關係表示

為了達到此目的，首先，如同2.4.3.1章中所描述，LED 與 PD 的組態各自定義於 LED 與 PD 座標系中，需定義的包含位置 P 與指向 V 。2.1章中則定義了兩座標系之間的齊次座標轉換矩陣為 ${}^{PL}H$ ，左上標的 PL 代表將 LED 座標系投影至 PD 座標系上，而要得到的相對位置資訊即為平移矩陣 ${}^{PL}T$ 。

我們為了要計算出兩座標系上硬體的幾何關係，需將 LED 座標系上的所有 LED 位置與指向，透過齊次座標轉換矩陣 ${}^{PL}H$ ，投影到 PD 座標系，再於 PD 座標系中計算交互關係，流程圖如圖2.41。

- 將 LED 投影到 PD 座標系上

LED 由 ${}^L P$ 代表 LED 位置、 ${}^L V$ 代表朝向，於式2.12呈現出 ${}^L P$ 經過齊次座標轉換至 PD 座標系上 ${}^{PL} P$ 。而 ${}^L V$ 為單位項量，由於朝向不需經過平移，可以僅用旋轉矩陣 Ro 換算，由式2.13轉換至 PD 座標系上為 ${}^{PL} V$ 。

$$\begin{bmatrix} {}^{PL} P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{PL} H \begin{bmatrix} {}^L P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{PL} Ro & {}^{PL} T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^L P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$${}^{PL} V = {}^{PL} Ro {}^L V \quad (2.13)$$

- 於 PD 座標系中計算距離、出入射角

首先，我們在 PD 座標系中計算第 l 個 LED 與第 p 個 PD 之間的距離，距離大小以 D_{lp} 表示，而 PD 指向 LED 位置的距離向量則以粗體表示： D_{lp} ，於式2.14呈現。

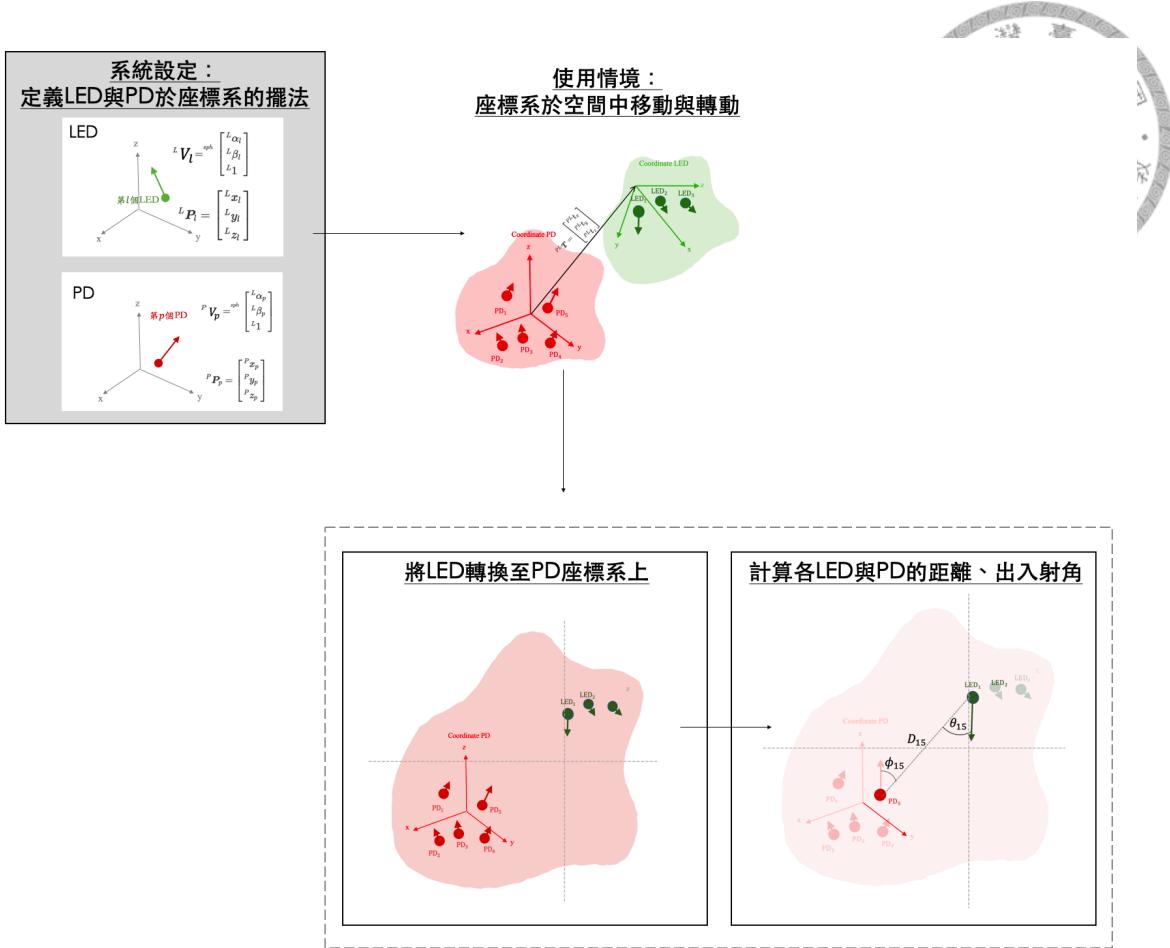


圖 2.41: 光傳遞模型與相對定位統整的流程

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{lp} &= {}^{PL} \mathbf{P}_l - {}^P \mathbf{P}_p \\ D_{lp} &= \|\mathbf{D}_{lp}\| \end{aligned} \quad (2.14)$$

再來，第 l 個 LED 對第 p 個 PD 出射角 θ_{lp} 與入射角 ϕ_{lp} ，可透過餘弦與內積的關係求得，於式 2.15 表示。

$$\begin{aligned} \theta_{lp} &= \arccos\left(-\frac{{}^{PL} \mathbf{V}_l \cdot \mathbf{D}_{lp}}{D_{lp}}\right) \\ \phi_{lp} &= \arccos\left(\frac{{}^P \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{D}_{lp}}{D_{lp}}\right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

將距離、出入射角都以 PD 座標系表示後，於式 2.16 將整個光傳播模型（式 2.11）以組態與座標系轉換表示：



if $Ie_{lp} < s_p$

$$Ie_{lp} = \frac{Re_p A_p Pt_l (M\ell_l + 1)}{2\pi} \frac{\cos \phi_{lp}^{M p_p} \times \cos \theta_{lp}^{M \ell_l}}{D_{lp}^2}$$

$$= \frac{Re_p A_p Pt_l (M\ell_l + 1)}{2\pi} \frac{(^P \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{D}_{lp})^{M p_p} (-^{PL} \mathbf{V}_l \cdot \mathbf{D}_{lp})^{M \ell_l}}{\|\mathbf{D}_{lp}\|^{2+M\ell_l+M p_p}} \quad (2.16)$$

其中， \mathbf{D}_{lp} 、 $\|\mathbf{D}_{lp}\|$ 、 $^{PL} \mathbf{V}_l$ 都還未完全展開，我們將其完全展開呈現於式2.17，進而得出結論：無論是硬體擺設方式 \mathbf{P} 或 \mathbf{V} 更換，或是兩座標系相對關係 $^{PL} \mathbf{H}$ 改變，皆會影響到輸出電流，是一個牽一髮動全身的模型，我們難以輕易透過輸出電流，獲得相對位置 $^{PL} \mathbf{T}$ 。因此，所有的研究皆需利用不同的限制方式，使式2.16簡化，以取得相對位置資訊。

if $Ie_{lp} < s_p$

$$Ie_{lp}$$

$$= \frac{Re_p A_p Pt_l (M\ell_l + 1)}{2\pi}$$

$$\times \frac{(^P \mathbf{V}_p \cdot (^{PL} \mathbf{P}_l - ^P \mathbf{P}_p))^{M p_p} \times (-^{PL} \mathbf{R} \mathbf{o}^L \mathbf{V}_l \cdot (^{PL} \mathbf{P}_l - ^P \mathbf{P}_p))^{M \ell_l}}{\|^{PL} \mathbf{P}_l - ^P \mathbf{P}_p\|^{2+M\ell_l+M p_p}} \quad (2.17)$$

$$= \frac{Re_p A_p Pt_l (M\ell_l + 1)}{2\pi}$$

$$\times (^P \mathbf{V}_p \cdot ((^{PL} \mathbf{R} \mathbf{o}^P \mathbf{P}_l + ^{PL} \mathbf{T}) - ^P \mathbf{P}_p))^{M p_p}$$

$$\times (-^{PL} \mathbf{R} \mathbf{o}^L \mathbf{V}_l \cdot ((^{PL} \mathbf{R} \mathbf{o}^P \mathbf{P}_l + ^{PL} \mathbf{T}) - ^P \mathbf{P}_p))^{M \ell_l}$$

$$\times \frac{1}{\|(^{PL} \mathbf{R} \mathbf{o}^P \mathbf{P}_l + ^{PL} \mathbf{T}) - ^P \mathbf{P}_p\|^{2+M\ell_l+M p_p}}$$

2.4.5 LED 與 PD 定位系統現況

簡單統整一下前面敘述的 LED 與 PD 定位系統資訊：首先，LED 與 PD 皆為軸對稱，定義一空間中的 LED 或 PD 共有五個自由度（參考2.4.3.1章），且 LED 與 PD 皆遵守朗博輻射模式，藉由挑選朗博次方，可對出入射角敏感度與輻射範圍之間取捨（參考2.4.3.2章）。接著，2.4.3.3章中介紹了 LED 的特性，而2.4.3.4章中介紹了 PD 接收光輻射的特性，綜合便可獲得2.4.4章中完整的光傳遞模型，並於2.4.4.3章將光傳遞模型，以 LED 與 PD 座標系的座標轉換呈現。

由於2.4.4.3章中呈現的光傳遞模型，在完整考慮硬體組態的自由度、硬體種類的選擇等，會使模型非常複雜（如式2.17），難以從中獲得 PD 電流強度與相對位置的關係，因此文獻上透過適當限制自由度以簡化模型，而常見限制於2.4.5.1章中介紹，而在2.4.5.2章中介紹幾個與本研究較相近的文獻，最後於2.4.6章中統整



現今 LED 與 PD 定位文獻上所不足的地方。

2.4.5.1 常見的 LED 與 PD 定位系統限制

現今文獻需加諸系統限制以求得定位，而常見的限制以下條列呈現：

- 忽略朗博次方

朗博次方是一個影響輻射模式的重要參數（參考2.4.3.2章），LED 與 PD 兩者皆有各自的朗博次方，代表著訊號對角度敏感度與覆蓋範位的取捨。大多文獻將 LED 與 PD 的朗博次方皆假設為一，降低系統複雜度，使式2.17簡化於式2.18。

然而，假設朗博次方為一在實際上是不符合現實的，因為實際上在挑選硬體時朗博次方時有許多選擇，如 [?] 的朗博次方便為約 5.57。為了降低複雜度而省略朗博次方，會侷限了能夠使用的硬體，也限制了系統的自由度 [?]。即便如此，大多研究仍將其省略，其中將 PD 的朗博次方納入考量的文獻極少 [?]，相較起來，LED 朗博次方有部分研究有將其納入計算，如 [?] [?]。

- 硬體種類限制

文獻上，挑選 LED 時 L 個 LED 皆會選擇同一種，同一系統下，並不會同時出現多種 LED，PD 亦然。因此，LED 與 PD 的硬體參數（參考圖2.36）並不會隨 LED 與 PD 的編號改變，綜合此限制與朗博次方為一的限制，將式2.17簡化為式2.18。

$$\text{Let } \begin{cases} M_{p_p} = M_p \\ M_{\ell_l} = M_\ell \\ R_{e_p} = R_e & \text{for } \begin{cases} p = 1, 2, \dots, P \\ l = 1, 2, \dots, L \end{cases} \\ A_p = A \\ P_{t_l} = P_t \\ s_p = s \end{cases} \quad (2.18)$$

When $I_{elp} < s$,

$$\begin{aligned} I_{elp} &= \frac{R_e A P_t}{\pi} ({}^P \mathbf{V}_p \cdot (({}^{PL} \mathbf{R} {}^O \mathbf{P}_l + {}^{PL} \mathbf{T}) - {}^P \mathbf{P}_p)) \\ &\times \frac{(-{}^{PL} \mathbf{R} {}^O \mathbf{V}_l \cdot (({}^{PL} \mathbf{R} {}^O \mathbf{P}_l + {}^{PL} \mathbf{T}) - {}^P \mathbf{P}_p))}{||({}^{PL} \mathbf{R} {}^O \mathbf{P}_l + {}^{PL} \mathbf{T}) - {}^P \mathbf{P}_p||^4} \end{aligned}$$

- 限制 PD 組態

最常見的硬體組態限制，為限制所有 PD 的擺放位置於同一點： ${}^P\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ，則組態僅剩下朝向 ${}^P\mathbf{V}_p^{sph} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix}^T$ 的兩個自由度，擺法可參考圖2.42。現今幾乎所有幾何方法的 PD 組態都是此種類型 [?1]。通過此限制，式2.18可進一步簡化為式2.19。

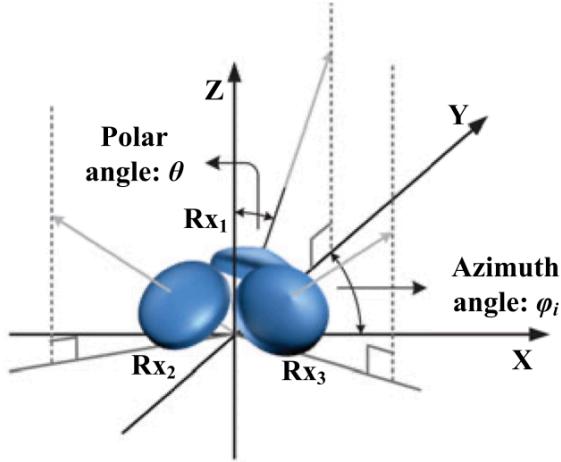


圖 2.42: 常見限制擺放於同點位置 PD 組態示意圖 [?]

Let ${}^P\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ for $p = 1, 2, \dots, P$

If $I_{elp} < s$, then I_{elp}

$$= \frac{ReAPt}{\pi} \frac{({}^P\mathbf{V}_p \cdot ({}^{PL}\mathbf{R}\mathbf{o}^P\mathbf{P}_l + {}^{PL}\mathbf{T}))(-{}^{PL}\mathbf{R}\mathbf{o}^L\mathbf{V}_l \cdot ({}^{PL}\mathbf{R}\mathbf{o}^P\mathbf{P}_l + {}^{PL}\mathbf{T}))}{||{}^{PL}\mathbf{R}\mathbf{o}^P\mathbf{P}_l + {}^{PL}\mathbf{T}||^4} \quad (2.19)$$

除了位置的限制，PD 指向在文獻中也常將兩自由度降至一個自由度，也就是將 ${}^P\mathbf{V}_p^{sph}$ 的方位角平均分配： $\beta_p = 1\pi/P$ ，而各 PD 的天頂角則限制為相同： $\alpha_p = \alpha$ ，因此 PD 唯一的組態變數指剩下 α 天頂角，如 [?] [?] [?]。另外一種限制，則是利用多面體，將 PD 朝向限制於多面體的頂點，如 [?]。

· 限制定位維度

現今使用幾何方法的 LED 與 PD 系統，大多定位維度僅到二維 [?]，將欲解的相對位置 ${}^{PL}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ 中的 z 限制為已知，也就是將目標物與觀察者的垂直距離固定，參考圖2.43。由於大多 LED 與 PD 的定位系統應用室內原有的光源，因此此限制代表的意義，便是目標物僅能於室內地面上的水平高度移動，無法定位不在地面上的目標物。透過此限制，在方程式上的意義，則是將變數由三個減少為兩個。

少數達到三維定位的 LED 與 PD 定位系統，大多是利用指紋法 [?]，然而指紋法為環境對單點的定位，不符合本研究需求。而利用幾何方法達到三

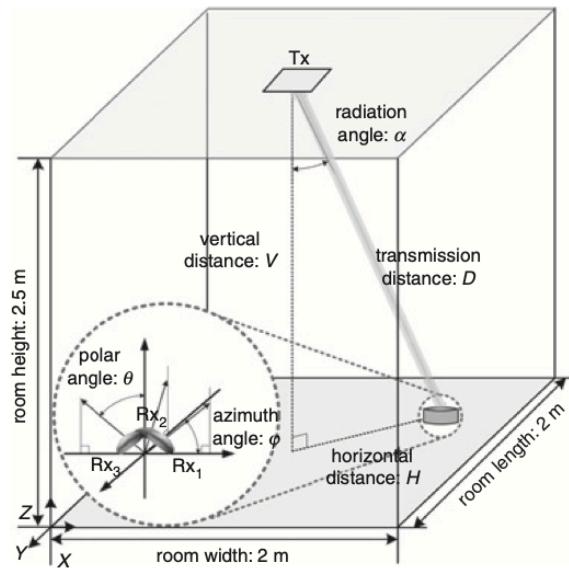


圖 2.43: 常見的 LED 與 PD 定位系統架設 [?]

維定位的研究較少，[?] 透過一已知 x, y 位置的參考點，來進行垂直距離的計算；[?] 則是使用複雜的演算法，獲得目標物方位後，利用迭代計算垂直距離；[?] 則需使用兩平行且之間有距離的 LED，利用 PD 兩兩比較電流大小，計算出三維相對位置；以上三篇研究皆有限制使用情境，而這些研究於 2.4.5.2 章詳述。

· 限制使用情境

在使用幾何類型演算法的研究中，最常見的使用情境限制為：目標平面與量測者平面需平行，如圖 2.43。舉例來說，展場內的光源中心軸朝地面，此時利用手機前鏡頭進行定位的使用者，便需將手機平放，以使其中心軸垂直地面朝上達到平行。

透過此限制，光傳遞模型中的出射角 θ 必與入射角 ϕ 相等，即可將光傳播模型的變數降低至兩個，利用 $\cos \theta = \cos \phi$ 可將式 2.19 簡化至式 2.20，其中的 ${}^{PL}Ro$ 也僅剩一個自由度，大大的簡化了模型複雜度。

$$\begin{aligned} & \text{If } Ie_{lp} < s, \text{ then } Ie_{lp} \\ &= \frac{ReAPt}{\pi} \frac{\left({}^P\mathbf{V}_p \cdot ({}^{PL}\mathbf{Ro}^P \mathbf{P}_l + {}^{PL}\mathbf{T}) \right)^2}{\| {}^{PL}\mathbf{Ro}^P \mathbf{P}_l + {}^{PL}\mathbf{T} \|^4} \end{aligned} \quad (2.20)$$

雖然此限制常見，但是也造成很大的使用不便，除了室內光源搭配於地面上不改變垂直距離的移動載具以外，基本上沒有其他應用場域，大幅度限制了使用的情境，難以達到具有靈活度的應用，因此本研究的主要目標之一便是去除此限制。



2.4.5.2 LED 與 PD 定位系統實例

[?]：使用紅外光且易於攜帶但量測範圍小的案例

[?] 研究利用 2 個 LED 與 3 個 PD 進行光通訊，光通訊流程如圖 2.14，其將朗博次方假設為一，使用與圖 2.42 相同的 PD 組態，實體圖為圖 2.44，為達到三維定位而限制目標物與量測者需為平行。

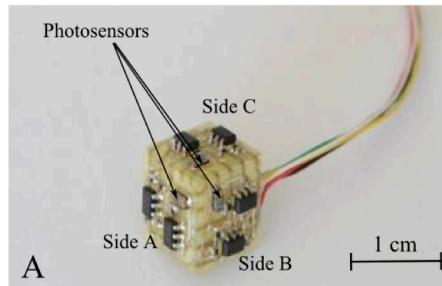


圖 2.44: [?] 的 PD 組態

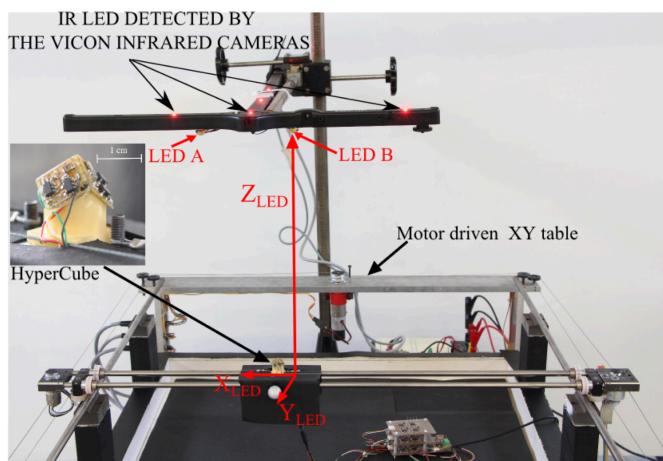


圖 2.45: [?] 的系統架構

簡單介紹此研究使用的演算法：首先，三個 PD 指向分別為 ${}^P\mathbf{V}_1 = [1, 0, 0]^T$, ${}^P\mathbf{V}_2 = [0, 1, 0]^T$, ${}^P\mathbf{V}_3 = [0, 0, 1]^T$ ，因此入射角餘弦分別為 $\cos \phi_{l1} = t_x/t_d$, $\cos \phi_{l2} = t_y/t_d$, $\cos \phi_{l3} = t_z/t_d$ ，而方位角 $t_\beta = \arctan(t_y/t_x) = \arctan(\cos \phi_{l2}/\cos \phi_{l1}) = Ie_{l2}/Ie_{l1}$ 。至於天頂角，此論文則是利用多項假設，例如假設 $\cos \omega = \omega$ 以及 $\cos(\omega + \pi/4) + \cos(\omega - \pi/4) = 1$ 等條件，來使天頂角可透過 Ie_{l3} 獲得。有了出入射角之後，三維定位的部分是透過兩個放置距離已知的 LED，如圖 2.46，利用 AOA 方式距離 t_d ，值得注意的是，兩 LED 距離越大可提高精度，但也同時會變成環境對單點的定位，不符合本研究目的。

此研究針對僅有 $50 \times 50\text{mm}$ 的範圍，垂直距離也僅有 300mm 的範圍，非常小；而實驗中二維定位可達到平均誤差為 1.6mm 的精度，垂直距離的

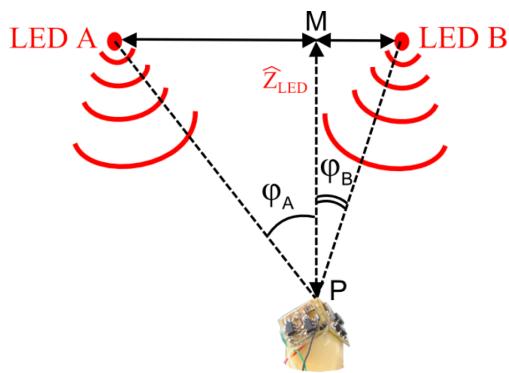


圖 2.46: [?] 利用兩個 LED 達到三維定位

誤差最大來到 50mm。該研究值得注意的是，他將 PD 封裝成一非常小的單位，完全符合易攜帶又成本低的特色，且其利用的波段並非紅外光，為少數不利用室內現成光源的 LED 與 PD 系統，使 LED 與 PD 定位不侷限於室內照明光源的應用上。

[?]：迭代獲得三維相對定位的案例

本研究的系統架構如圖2.23，測試範圍為 $2 \times 2 \times 2.5m$ ，利用單個 LED 與三個 PD 達到三維定位，其中 PD 組態如圖2.42，與 [?] 的限制類似，一樣假設朗博次方為一、目標平面與量測平面需平行。

定位方法是將 PD 電流兩兩相除為入射角的餘弦比值，如式2.21，於特定垂直距離的水平面上，餘弦比值呈現於圖2.47。因此，兩兩比較訊號強度可得比值，透過比值由圖2.47可取得三條線，三條線交點即為二維定位的解 t_x, t_y ，實驗中平均誤差小於 3cm。三維定位的部分，則是將量測空間垂直距離每十公分切為一層如圖2.48，每層皆利用二維定位的方法計算一次 t_x, t_y ，再將該位置 t_x, t_y 以光傳遞模型計算出各 PD 理論上該得到的電流值，將計算出的電流與實際 PD 電流比對，最接近的該層則為三維定位的垂直距離。

$$\frac{Ie_{11}}{Ie_{12}} = \frac{(^P\mathbf{V}_1 \cdot ^P\mathbf{L} \mathbf{T})}{(^P\mathbf{V}_2 \cdot ^P\mathbf{L} \mathbf{T})} = \frac{\cos \phi_{11}}{\cos \phi_{12}} \quad (2.21)$$

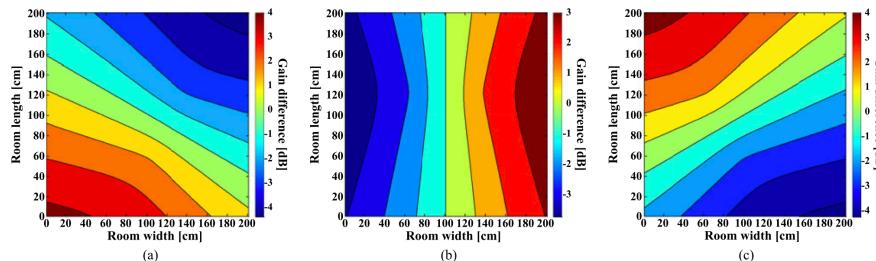


圖 2.47: 地面上 PD 電流強度比值 (a) 第一與第二個 PD(b) 第二與第三個 PD(c) 第一與第三個 PD [?]

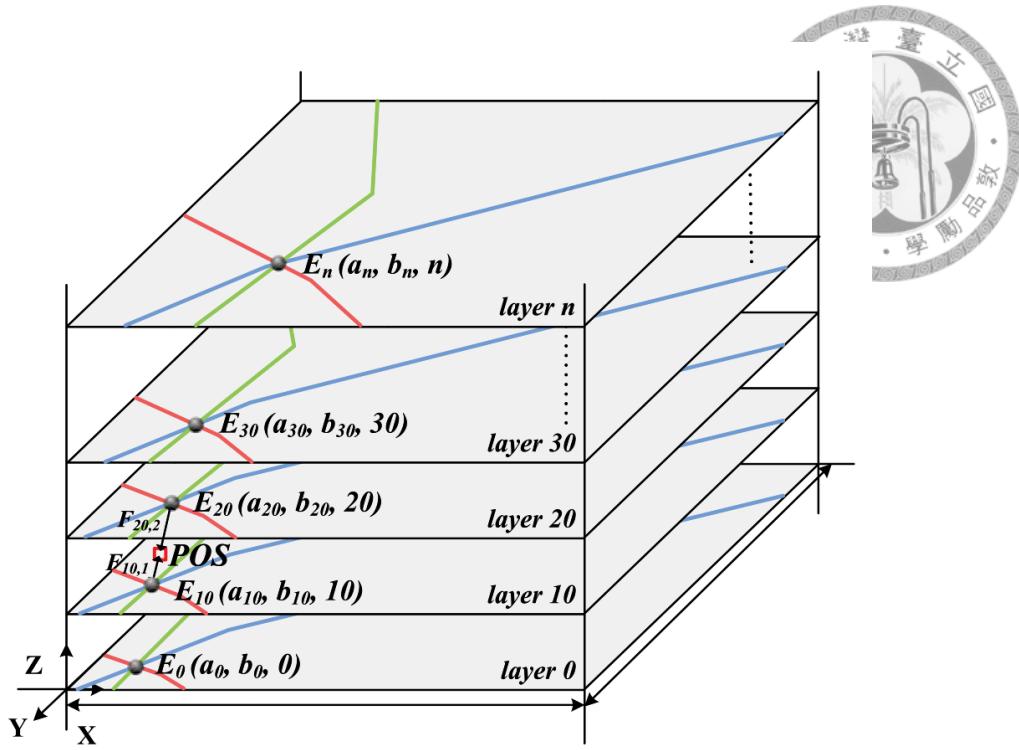


圖 2.48: [?] 將量測空間切為多層

此方法特殊在其利用與絕大多數研究相同的系統架構，卻透過特殊的演算法，利用迭代各層計算與實際量測的電流大小差異，進行三維定位，且有進行實驗驗證。然而，該方法在垂直距離的定位，解析度為 10cm，若要達到更高的解析度則需要切更多層，而迭代且取最小值的演算法已經十分耗時，切更多層更會加大運算負擔。

[?]：事先校正參考點以獲得三維定位的案例

本研究架構與 PD 組態於圖 2.49，其利用單 LED 與五個 PD，量測範圍為 $1 \times 1 \times 1.5m$ ，限制則一樣是目標平面與觀察平面需平行，雖然 PD 朗博次方仍假設為一，但 LED 的朗博次方有被考慮。二維定位的方法也是利用兩兩 PD 的電流比值，透過已知的 PD 組態回推目標物的方位，實驗達到平均 2.32cm 的經度。垂直距離則需要透過一參考點，該參考點需與目標物的垂直距離相同且已知方位，實驗達到平均 5.08cm 的精度。

該研究特色之一為其考慮了 LED 的朗博次方，而演算法則相較簡單，透過幾何關係計算且具有實驗驗證。雖然該研究成功獲得三維定位，但卻需要有一同樣垂直距離的參考點，使得應用情境仍受限制；若移動、改變垂直距離則參考點作廢，需重新量測參考點，使用情境上受限。

以上介紹了 LED 與 PD 系統中，三篇利用單點對單點，達到三維定位的方法。各自使用的限制與演算法不同，共同的限制為 PD 朗博次方皆簡化為一，且目標平面與量測平面需平行。

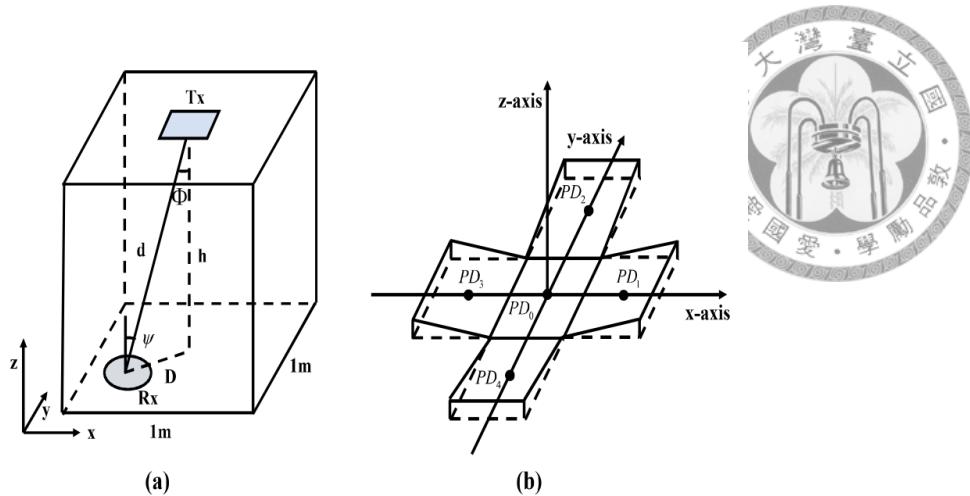


圖 2.49: [?] 研究的 (a) 系統架構 (b)PD 組態

2.4.6 LED 與 PD 定位系統所遇困難

綜合2.4.5.1章中敘述的限制與案例，以下統整，分項探討此領域所欠缺的面向。

- 系統限制多

參考2.4.5.1章，常見的限制包含忽略朗博次方的影響、限制硬體選擇、限制 PD 組態、限制定位維度、限制使用情境等。當一次使用所有限制，即可得到式2.20中簡單的模型，能夠輕易的取得相對定位。然而如2.4.5.1章所述，忽略朗博次方不符合實際情況，而其他的限制都會限制系統靈活度，也就是本論文最主要的目標，因此提出一限制較少的定位演算法有其必要性。

- 較少硬體實驗驗證

在 LED 與 PD 系統中的研究，大多僅使用模型模擬，實際架設硬體進行實驗的案例較少，於[?] 中整理的 35 個研究中，僅有不到一半的研究有進行實驗，其中[?][?] 為有進行硬體實驗的少數研究。大多研究不進行實驗驗證的原因，其中之一為光通訊相較無線電波為較新的技術，LED 光通訊在 2000 年被提出[?]，因此光通訊的硬體搭建並不像發展超過百年的無線電波技術完全，光通訊使用的驅動器與 LED 尚未被組合並商品化[?]，相較無線電播技術中觸手可及的硬體，系統架設難度較高。因此大多研究先透過模擬，探索演算法與不同系統組態的可能性，具有架設完整光通訊系統能力的實驗室才會進一步進行實驗。

- 忽略誤差

首先，最常被忽略的是多重路徑傳輸（圖2.20）所產生的誤差，因為多重路徑傳輸與環境、障礙物的位置與材質皆相關，十分複雜，而該誤差於障礙物附近最為嚴重，如室內的角落。實驗上，經常將測試範圍選擇於一空曠



廣大的室內中心，將測試範圍與牆壁的距離拉開，減少多重路徑傳輸效應。而僅進行模擬的研究中，模擬多重路徑誤差的難度很高 [?]，三維空間中要判斷透過多次反彈能夠到達 PD 的光束，計算非常複雜，且針對具有障礙物等較為複雜的環境，多重誤差的模擬則更為複雜，

再來，光定位中另一個造成誤差主要原因為環境光源，實際上在光通訊系統中，由於環境光源並不會閃爍，因此可透過將偏差（Bias）去除，以此處理環境光源。然而環境光源仍有可能使 PD 電流超過飽和，因此常見處理方式為將系統架設於無窗戶之室內，模擬上則常常直接將其忽略。

2.5 結論

利用 LED 與 PD 的技術且使用幾何方法類型演算法的文獻，由於光傳遞模型變數除了距離還有出入射角，具有靈活應用的潛力，近年來開始被討論。然而，此領域有以下不足：常見的系統限制多、較少硬體實驗驗證、以及忽略誤差。本研究目標為靈活應用，因此主要著重於減少系統限制，2.4.5.1章中敘述的限制中，本論文目標將朗博次方完整考慮，並解決使用情境與定位維度的限制。

因此，本研究主要針對部分缺點進行改進：首先，本研究將考量 LED 與 PD 的朗博次方，完整將硬體不同的輻射模式納入模型；另外，本研究於3章中提出一能夠達到三維定位，且不需限制目標物與量測者平行的演算法，以提升使用上的靈活度，達到兩單位自由移動且能定位的目標情境。



以 LED 與 PD 建立三維相對位置之演算法

如2.4.6章所述，現今LED與PD的定位方法雖具有靈活應用的潛力，然而在單點對單點的定位中，仍未有可以進行三維定位，且不限制目標平面與量測平面平行的方法。因此，本章節將提出一定位演算法，利用 $L \times P$ 個LED對PD的電流大小資訊，計算出三維相對定位，且不需限制目標平面與使用者平面平行，並在模型中將LED與PD的朗博次方考慮進去。

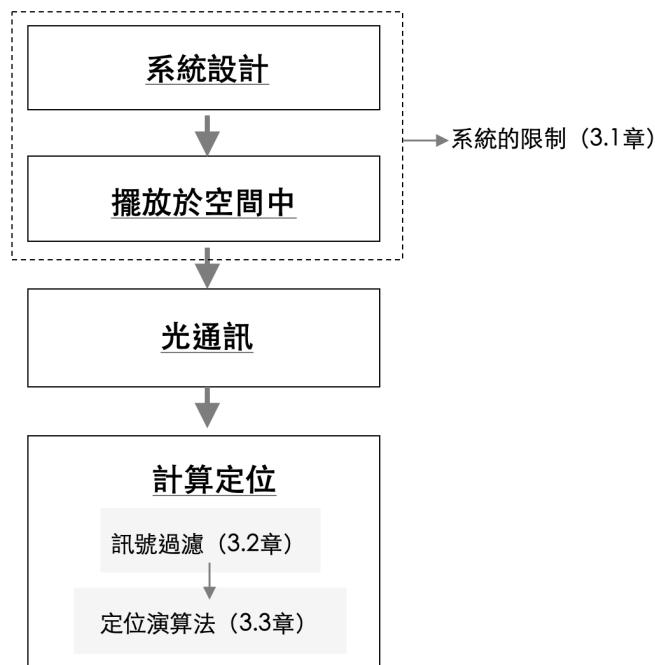


圖 3.1: 第三章章節與定位流程對應

本章節的論述順序可以參考圖3.1，根據LED與PD定位系統流程圖（圖2.27）



重新整理，著重在計算定位的方法上。首先，3.1章定義本方法對系統設計的拘束條件，再於3.2章中針對電流資訊進行過濾，於3.3章中解釋如何由過濾過的訊號，計算出三維相對定位，最後於3.4章中整理此演算法的優缺點。

3.1 系統的限制

根據2.4.6章中的論述，我們知道現今文獻上需要透過對系統限制，以將光傳遞模型進行簡化，來求解相對位置。本段落將條列式列出本研究的定位演算法中，使用的系統限制：

1. 硬體選用限制： 系統使用的 LED 皆為同款式，PD 亦然。

2. PD 擺放位置限制： PD 擺放位置相同並於 PD 座標系原點， ${}^P P_p = [0 \ 0 \ 0]^T$

3. LED 擺放位置限制： LED 擺放位置相同並於 LED 座標系原點， ${}^L P_l = [0 \ 0 \ 0]^T$

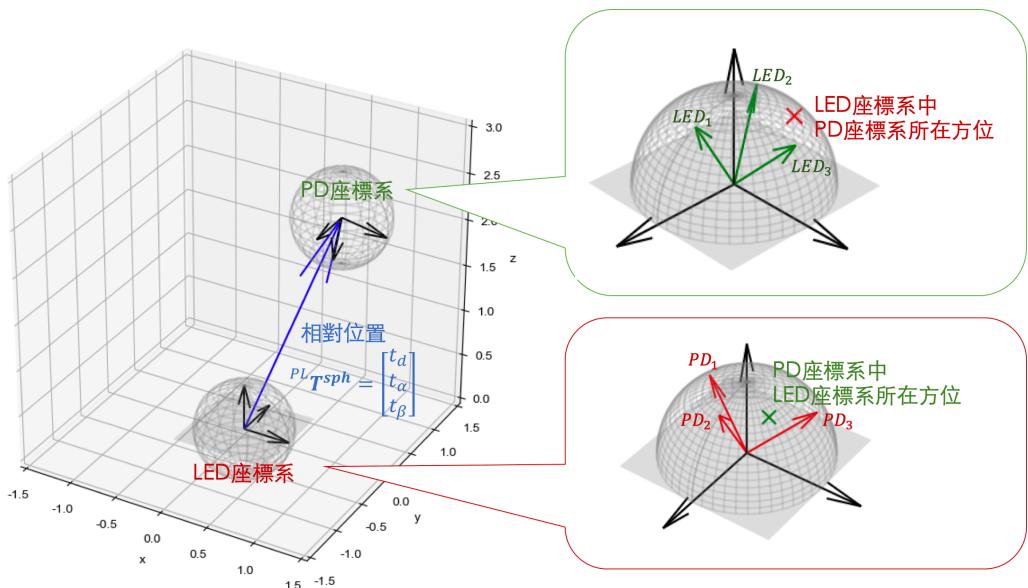


圖 3.2: PD 與 LED 組態皆限制擺放於原點的系統組態

根據以上限制，LED 與 PD 的定位系統可以呈現於圖3.2，LED 與 PD 座標系中的硬體皆固定於各自的座標系原點，指向則並無特別限制。在將 LED 與 PD 組態設計完成後，座標系放置於空間中兩個點進行定位，其中，各 LED 到各 PD 的距離 D_{lp} 皆相同，都是兩座標系之間的距離 ${}^{PL} t_d$ ，我們便將光傳遞模型2.11簡化為3.1。

$$Ie_{lp} = \begin{cases} Re \frac{PtA(Ml+1)}{2\pi} \frac{\cos \phi_{lp}^{M_p} \cos \theta_{lp}^{M_l}}{D^2}, & \text{if } Ie_{lp} < s \\ s, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.1)$$

然而，大多文獻在討論三維定位時是以卡氏座標系定義相對位置 ${}^{PL}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^{PL}t_x & {}^{PL}t_y & {}^{PL}t_z \end{bmatrix}^T$ ，而我們提出的演算法則是以球座標系定義 ${}^{PL}\mathbf{T}^{sph} = \begin{bmatrix} {}^{PL}t_d & {}^{PL}t_\alpha & {}^{PL}t_\beta \end{bmatrix}^T$ ，因此我們需求出的三個未知數為 ${}^{PL}t_d, {}^{PL}t_\alpha, {}^{PL}t_\beta$ 三項， ${}^{PL}t_d$ 即為兩座標系之間的距離，而 ${}^{PL}t_\alpha, {}^{PL}t_\beta$ 則為 LED 座標系所在「方位」。



3.2 訊號過濾

由於 PD 電流會飽和的特性，已飽和的電流與距離與出入射角無關了，無法用來獲得相對定位，因此我們需將已飽和的電流 $Ie_{lp} > s$ 訊號忽略。除此之外，過小的電流也有可能為雜訊，因此也需設定一閥值 Th ，將小於閥值的電流訊號也忽略，剩餘的訊號則為可運用於計算三維定位的資訊。在訊號過濾後，第 l 個 LED 中還剩下 Fp_l 個 PD 電流數值可使用，而第 p 個 PD 中則剩下 Fl_p 個 LED 對應的電流數值可使用，參考圖3.3。

	LED ₁	LED ₂	LED ₃	...
PD ₁	Ie_{11}	Ie_{21}	-	...
PD ₂	Ie_{12}	-	Ie_{32}	...
PD ₃	Ie_{13}	Ie_{23}	-	...
:	:	:	:	

→ Fl_p : 第 p 個 PD 接收到幾個 LED 訊號

\downarrow

Fp_l : 第 l 個 LED 訊號被幾個 PD 接收到

圖 3.3: 訊號過濾後各 LED 與各 PD 所剩的訊號數量示意圖

3.3 定位演算法

本章結提出的定位演算法，為 LED 與 PD 系統流程圖3.1中的定位演算法步驟，定位演算法的步驟則呈現於圖3.4，依序從3.3.1章解出 PD 座標系中，LED 座標系所在方位；3.3.2綜合 LED 與 PD 方位資訊，解出距離。

為了方便表示，將方位以符號表示 ${}^{PL}\mathbf{T}v^{sph} = \begin{bmatrix} 1 & {}^{PL}t_\alpha & {}^{PL}t_\beta \end{bmatrix}^T$ ，方位為單位向量，可用單位圓表示方位的可行解範圍。

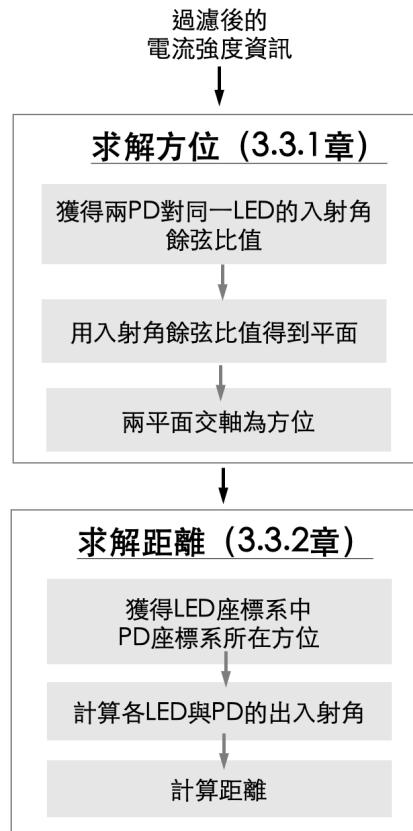


圖 3.4: 本研究所提出的定位演算法流程

3.3.1 求解方位

首先，過濾後的訊號即不需考慮過飽和的狀況，因此式3.1可改寫為式3.2。

$$\begin{aligned}
 Ie_{lp}(D_{lp}, \theta_{lp}, \phi_{lp}) &= Re \frac{PtA(Ml + 1)}{2\pi} \frac{\cos \phi^{Mp} \cos \theta^{Ml}}{D^2} \\
 &= Re \frac{PtA(Ml + 1)}{2\pi} \frac{(^P\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{D})^{Mp} (-{}^{PL}\mathbf{V}_l \cdot \mathbf{D})^{Ml}}{D^4}
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

解方位的流程詳細如圖3.5，於3.3.1.1章到3.3.1.4章詳細介紹取得方位 ${}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v}^{sph} = [1 \ t_\alpha \ t_\beta]^T$ 的過程。

3.3.1.1 獲得兩 PD 對同一 LED 的入射角餘弦比值

當我們僅考慮第 l 個 LED 的資訊時，如圖3.6所示，各 PD 與該 LED 之間的 LED 出射角 θ_{lp} 以及距離 D_{lp} 都一樣；因此，式3.2中的三個變數只剩下 PD 入射角 ϕ_{lp} ，而我們於式3.3中，將不同 PD 對同樣第 l 個 LED 的強度訊號相除，可得到入射角餘弦比值的朗博次方。藉由將其開朗博次方根，我們得到編號 p_1 與 p_2 的 PD，對第 l 個 LED 入射角餘弦比值 $Ra_{p_1 p_2}$ 。

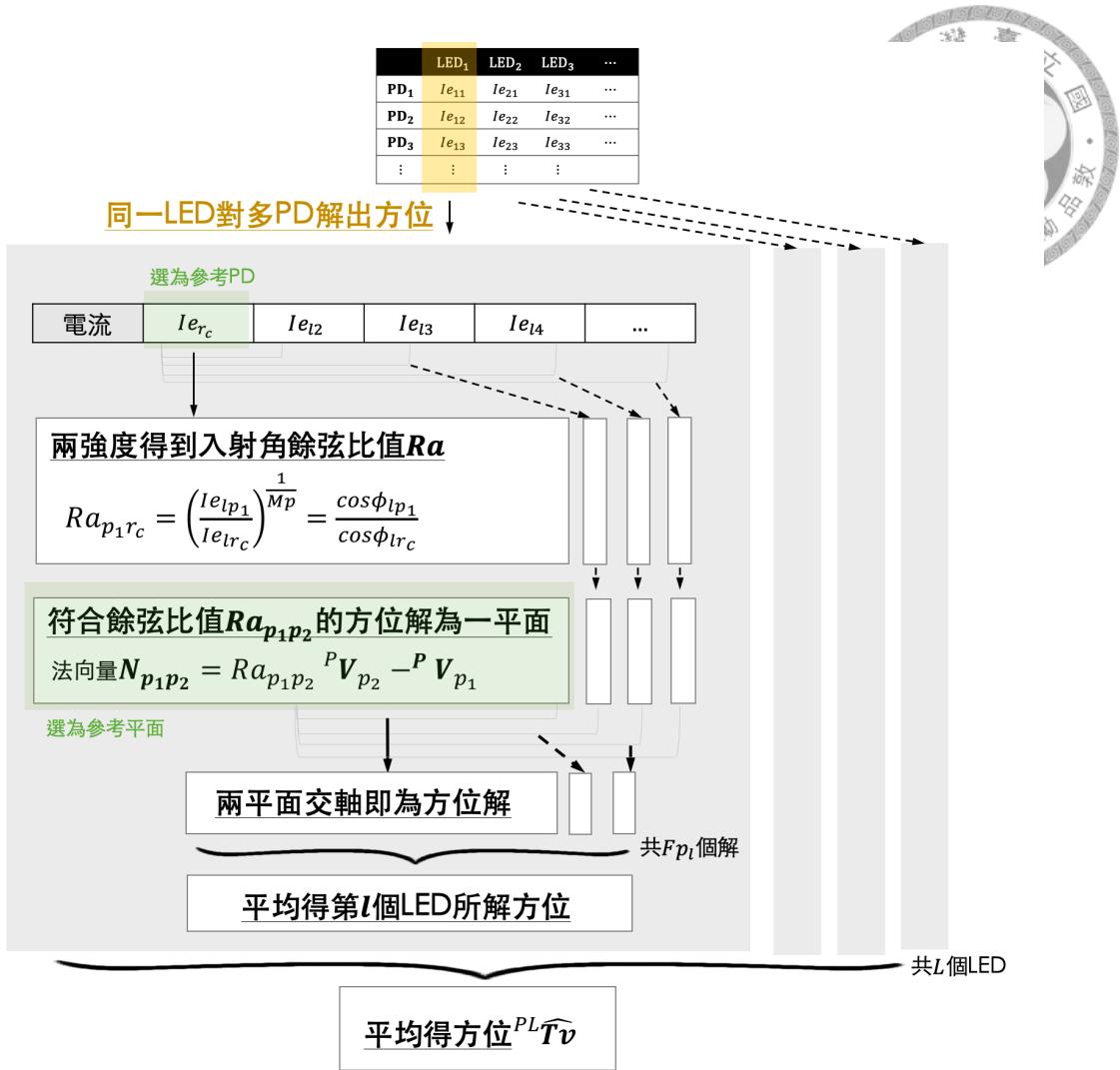


圖 3.5: 本研究定位演算法中解方位的流程

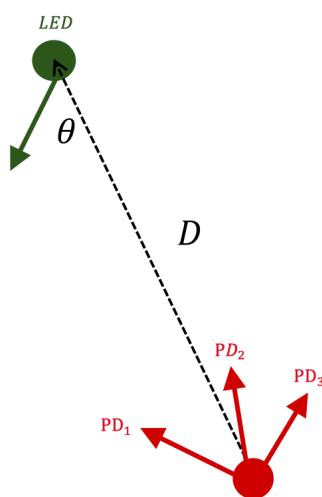


圖 3.6: 同一 LED 與多個 PD 之間的幾何關係



$$\frac{Ie_{lp_1}}{Ie_{lp_2}} = \left(\frac{\cos \phi_{lp_1}}{\cos \phi_{lp_2}} \right)^{Mp}$$

$$Ra_{p_1p_2} = \left(\frac{Ie_{lp_1}}{Ie_{lp_2}} \right)^{\frac{1}{Mp}} = \frac{\cos \phi_{lp_1}}{\cos \phi_{lp_2}}$$
(3.3)

兩個 PD 比較即可得到一個入射角比值，而為了更有系統性的進行兩兩比較，我們選擇一參考 PD，其餘 PD 訊號都與參考 PD 做比較，即可有效率的完成動作。其中，對第 l 個 LED 來說，過濾過後的訊號有 F_{pl} 個，我們選擇第 r_c 個 PD 當作參考值，將其作為分母，其他 PD 電流值與其相比，總共得到 $F_{pl} - 1$ 個比值 Ra_{pr_c}

3.3.1.2 滿足入射角餘弦比值的方位解位於一通過原點之平面

於式3.3中得到兩入射角餘弦比值，而我們需要從餘弦比值中得到方位關係，雖然兩角度的餘弦比值並沒有單一解，但是滿足入射角餘弦比值 Ra_{pr_c} 的方位解 ${}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v}$ ，僅有可能位於一通過原點之平面，以下進行推導。

首先，將式3.3中的PD入射角 ϕ_{lp} ，改寫為PD指向 ${}^P\mathbf{V}_p$ 與入射方位 ${}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v}$ 的內積，如式3.4。

$$\because \cos \phi_{lp} = {}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v} \cdot {}^P\mathbf{V}_p$$

$$\therefore Ra_{p_1r_c} = \frac{{}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v} \cdot {}^P\mathbf{V}_{p_1}}{{}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v} \cdot {}^P\mathbf{V}_{r_c}}$$
(3.4)

而式3.4中的向量都以卡氏座標系展開，經過移項整理呈現於式3.5。

$${}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v} \cdot (Ra_{p_1r_c} {}^P\mathbf{V}_{r_c} - {}^P\mathbf{V}_{p_1}) = 0$$
(3.5)

式3.5中的方位 ${}^{PL}\mathbf{T}\mathbf{v}$ ，於空間中為一通過原點的平面，參考圖3.7，透過兩個PD強度比較，我們可以得到一個方位解的可能平面。

我們將平面法向量以 $\mathbf{N}_{p_1r_c}$ 表示於式3.6中，小標 p_1, r_c 代表該平面是由第 p_1 個PD與第 r_c 個PD的入射角餘弦比值計算而得，其中 r_c 為作為參考值的PD編號。

$$\mathbf{N}_{p_1r_c} = Ra_{p_1r_c} {}^P\mathbf{V}_{r_c} - {}^P\mathbf{V}_{p_1}$$
(3.6)

而於3.3.1.1章中，我們知道對第 l 個LED可以得到 $F_{pl} - 1$ 個入射角餘弦比值 Ra_{pr_c} ，在本段我們將這些比值換算成 $F_{pl} - 1$ 個平面。值得注意的是，因為所解方位只有兩個自由度，方位唯一單位長度的向量，因此符合藉兩PD入射角餘弦比值的方位解，為通過原點平面上的單位圓。

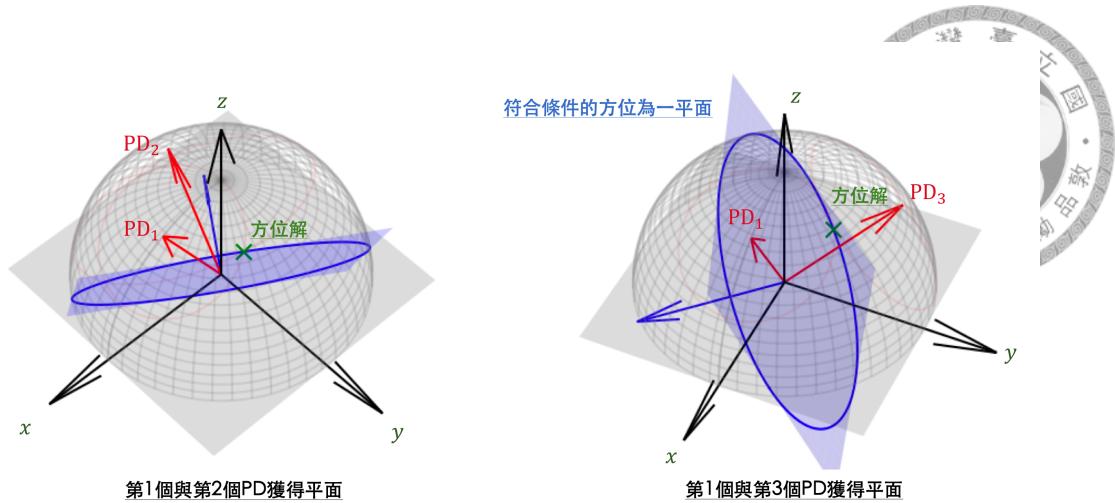


圖 3.7: 滿足入射角餘弦比值 Ra 的方位為通過原點之平面

3.3.1.3 兩平面交軸為方位

由3.3.1.2章中，我們知道滿足兩 PD 入射角餘弦比值 Ra_{pr_c} 的方位為一通過原點之平面上的單位圓。為了得到入射方位，我們將平面兩兩取交軸，交軸則為可能方位。兩兩取交軸與3.3.1.2章相同，本小節同樣取一平面作為參考，該平面為第 r_c 與 r_s 個 PD 入射角比值 Ra_{rsr_c} 所得到的平面，參考平面的平面法向量為 \mathbf{N}_{rsr_c} 。

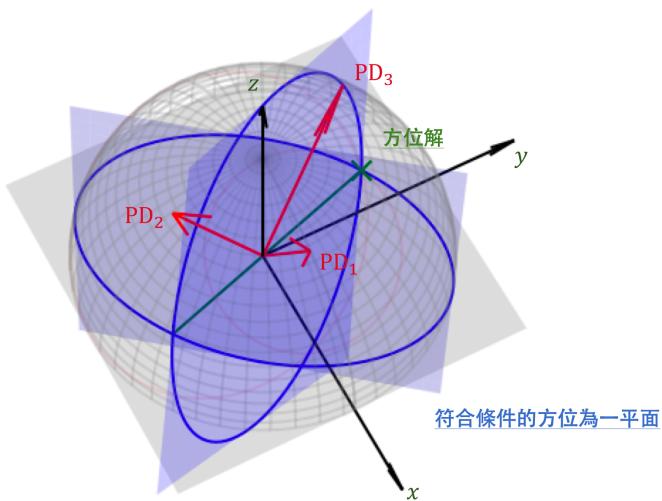
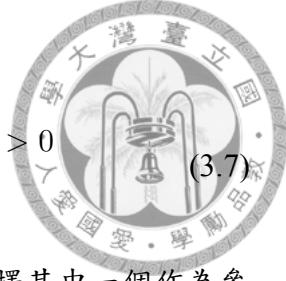


圖 3.8: 兩平面交於一軸

其中，兩平面交軸有正負兩個方向，我們可以透過 PD 可視範圍最大為 90° 的特性，判斷出方位解為交軸的正方向還是負方向，呈現於式3.7。



$${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}_{pr_{sr_c}} = \begin{cases} (\mathbf{N}_{pr_c} \times \mathbf{N}_{r_s r_c}) & , (\mathbf{N}_{pr_c} \times \mathbf{N}_{r_s r_c}) > 0 \\ -(\mathbf{N}_{pr_c} \times \mathbf{N}_{r_s r_c}) & , \text{else} \end{cases} \quad (3.7)$$

在此步驟，我們利用3.3.1.1章中產生的 $Fp_l - 1$ 個平面，選擇其中一個作為參考平面，將他以外的 $Fp_l - 2$ 個平面與其參考平面外積，得到共 $Fp_l - 2$ 個計算出的方位 ${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}_{pr_{sr_c}}$ 。

3.3.1.4 平均方位

第 l 個 LED 與 PD 的電流資訊，可以解出 $Fp_l - 2$ 個方位，因此該 **LED 過濾後的訊號最少需被 3 個 PD 感測到，才得以解出方位**。而我們將 $Fp_l - 2$ 個方位平均，得到第 l 個 LED 利用 Fp_l 個資訊求出的方位 ${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}_l$ 。

$${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}_l = \frac{\sum_{p=1}^{Fp_l-2} {}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}_{pr_{sr_c}}}{Fp_l - 2} \quad (3.8)$$

而一共有 l 個 LED，我們再將 l 個 LED 獲得的方位 ${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}_l$ 平均，解出方位 ${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}$ 。

$${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}} = \frac{\sum_{l=1}^L {}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}_l}{L} \quad (3.9)$$

3.3.1.5 小結

計算方位的方法，是透過 PD 兩兩比較得到方位的可能平面解，再透過平面兩兩外積求交軸即為方位。然而由於 L 個 LED 與 P 個 PD 交互之下，兩兩比較便會變得很複雜，可以參考圖3.4中的流程較為清楚。在這之中，最少需要一個 LED 與三個訊號沒被過濾掉的 PD 訊號，才能夠解出方位。

3.3.2 求解距離

在3.3.1章中解出方位後，對於光傳遞模型（式2.4.4.2）中的變數，我們目前僅能夠得到入射角 ϕ_{lp} 的資訊，仍缺少出射角資訊以求距離。因此，求解距離的步驟可參考圖3.4，需要先解出 PD 座標系於 LED 座標系上的方位，再利用方位資訊解出出入射角，進而利用光傳遞模型解出距離，以下分小節介紹。

3.3.2.1 解 LED 座標系中 PD 座標系所在方位

我們可以利用3.3.1章中一樣的方法，改應用在 LED 座標系中，解出 PD 座標系於 LED 座標系上的方位 ${}^{LP}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}$ 。方法與3.3.1章完全相同，以下僅簡單介紹：



針對第 p 個 PD 的資訊，在訊號過濾後，總共接收到 Fl_p 個 LED 訊號。由於硬體擺放位置皆限制於座標系原點，因此參考圖3.9，式3.2中的三個變數僅剩下 LED 出射角 θ_{lp} ，即可透過兩兩比較，得到 $Fl_p - 1$ 個出射角餘弦比值，而滿足出射角餘弦比值的方位為通過原點的平面。

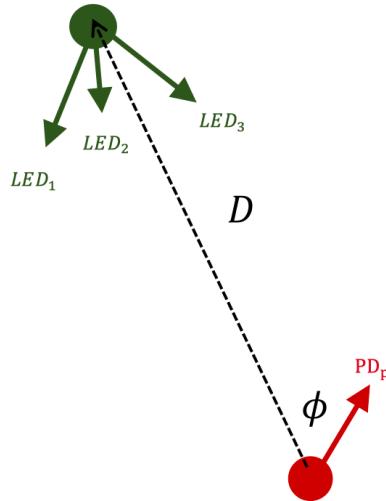


圖 3.9: 多 LED 對同一 PD 之間的幾何關係

再來，同樣取一平面作為參考，將其餘平面與參考平面外積，得到共 $Fl_p - 2$ 個方位 ${}^{LP}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{v}_{lr,rc}$ (參考式3.7)。最後將第 p 個 PD 獲得的 $Fl_p - 2$ 個方位平均得 ${}^{LP}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{v}_p$ ，再將總共 P 個 PD 所得方位平均，即可獲得 PD 座標系於 LED 座標系上的方位 ${}^{LP}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{v}$ ，可以參考圖3.2。

3.3.2.2 解出 LED 與 PD 的出入射角

有了3.3.1章中求出的 PD 座標系中 LED 所在方位 ${}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{v}$ ，我們利用 PD 硬體指向 ${}^P\mathbf{V}_p$ 與方位的內積獲得各 PD 的入射角 ϕ_{lp} ，如式3.10。

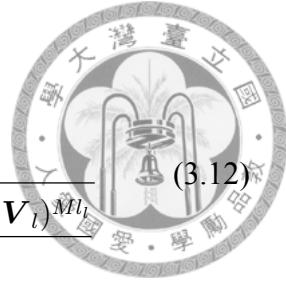
$$\hat{\phi}_{lp} = \arccos({}^{PL}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{v} \cdot {}^P\mathbf{V}_p) \quad (3.10)$$

出射角則是利用3.3.2.1章中求出 PD 座標系於 LED 座標系的方位 ${}^{LP}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{v}$ ，同樣與 LED 指向內積，得到各 LED 的出射角 $\hat{\theta}_{lp}$ ，如式3.11。

$$\hat{\theta}_{lp} = \arccos({}^{LP}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{v} \cdot {}^L\mathbf{V}_l) \quad (3.11)$$

3.3.2.3 利用光傳遞模型取得距離並平均

光傳遞模型中 (式3.2)，三個變數中的出入射角 $\theta\phi$ ，已於式3.11與式3.10中求得，因此可求出唯一未知的變數距離 D ，呈現於下式3.12



$$\begin{aligned}\hat{t}_{d,lp} &= \sqrt[2]{\frac{ReAPt(Ml_l + 1)}{2\pi} \frac{\cos\phi_{lp}^{Mpp} \cos\theta_{lp}^{Ml_l}}{Ie_{lp}}} \\ &= \sqrt[2]{\frac{ReAPt(Ml_l + 1)}{2\pi} \frac{(^P L \hat{\mathbf{T}} v \cdot ^P V_p)^{Mpp} (^L P \hat{\mathbf{T}} v \cdot ^L V_l)^{Ml_l}}{Ie_{lp}}}\end{aligned}\quad (3.12)$$

式3.12中得到的 $L \times P$ 個距離解，於式3.13中平均得到解。

$${}^P \hat{t}_d = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^P \hat{t}_{d,lp}}{L \times P} \quad (3.13)$$

3.3.2.4 小結

如3.3.1.5章所述，最少需要一個 LED 與 3 個 PD 才能獲得方位 ${}^{PL} \hat{\mathbf{T}} v$ ；而概念相同，PD 座標系於 LED 座標系中的方位 ${}^{LP} \hat{\mathbf{T}} v$ ，則需要至少一個 PD 與 3 個 LED 才能解，進而得到距離資訊。綜合兩者，我們需要最少三個 LED 對三個 PD 才能同時得到 LED 與 PD 於對方座標系中的方位 ${}^{PL} \hat{\mathbf{T}} v$ ，進而解出距離 \hat{t}_d 。綜合方位與距離，相對位置以卡氏座標系表示如式3.14

$${}^{PL} \hat{\mathbf{T}} = \hat{t}_d \times {}^{PL} \mathbf{T} v \quad (3.14)$$

3.4 演算法優點與缺點

介紹完本研究所提出的演算法，這裡以條列分析此演算法的優缺點：

1. 優點：

- 目標平面與量測平面不需平行：

現今研究中，單點對單點的 LED 與 PD 定位系統，大多會限制目標物需與量測者平行，此限制是為了使式2.11光傳播模型中的出入射角相等 $\phi = \theta$ ，進而降低模型複雜度。然而，限制兩平面平行會讓使用情境十分受限，僅能使用在兩相對旋轉並不會改變的物體上，在實務上並不常見，例如室內光源搭配地面平放的物體。而本章節提出的演算法突破此限制，因此在使用情境上不受限，得以對空間中任意姿態的兩物進行相對位置量測，例如姿態會改變的人、機械手臂、載具等，族繁不及備載。

- 考量 LED 與 PD 的朗博次方：

完整的考量 LED 與 PD 的朗博次方，可使挑選 LED 與 PD 的硬體時，更貼近實際的情況，讓購買硬體時選擇不用侷限在朗博次方為一的選項中，使系統的靈活度更高。



- 可獲得三維定位：

此演算法可獲得三維定位資訊，並不需要事先獲得垂直距離資訊，因此在使用場域上也更為靈活，不需限制活動範圍為特定距離之平面。

- 可獲得目標物姿態：

本研究提出的方法除了三維相對位置 ${}^{PL}T$ ，還能夠得到目標物的姿態，也就是 LED 座標系中 PD 座標系所在方位 ${}^{LP}Tv$ ，這項資訊在 LED 與 PD 定位方法中較少出現。

- 硬體配置靈活度較高：

此演算法中，對於 LED 與 PD 的指向並沒有特別的限制，不像大多文獻中常見將組態中的天頂角 α 限制為相同；除此之外，LED 與 PD 數量也可改變，只要兩者數量都大於三，可視範圍內便可進行定位。因此靈活度高，設計上可調整的變數多，即可針對不同情境調整。

2. 缺點：

- 演算法較為複雜：

限制多的演算法，大多可以透過簡單的矩陣或方程式運算得到定位；相較起來，本研究所提出的演算法需要先解出兩座標系於對方座標系中的方位，進而計算出 $L \times P$ 個出入射角來計算距離，演算法較為複雜。

- 多 LED 對多 PD 定位系統的難度：

多 LED 與多 PD 的定位系統，由於光通訊的硬體尚未被商業化，因此在文獻上較少有硬體的實驗驗證，所以在評估演算法時，大多僅能透過模擬。這樣會使評估缺乏可信度，無法討論多 LED 對多 PD 定位下的實務問題，僅能夠探討系統發展的可能性，而模擬與實際上的差異則需要被注意。

介紹完本研究提出的演算法後，我們需要分析此演算法在定位上的效果，以及各參數對定位表現的影響，因此於第4章中，建立模擬環境模擬多 LED 與多 PD 的定位系統，套用本章節提出的定位演算法，進行誤差分析。



模擬與評估系統表現

第三章中，我們提出了一個多 LED 對多 PD 系統的演算法，在不需限制目標平面與使用者平面平行的情況下，具有獲得三維定位以及目標物姿態的能力，而在硬體擺放的指向以及數量上也具有靈活度，而本章節的主要目的便是希望探討不同系統設計對定位的影響。為了評估不同系統設計，我們需要利用硬體驗證或是軟體模擬的方法，完成完整的定位系統流程（參考圖2.27），以進行定位誤差的計算與評估。

參考圖4.1，硬體驗證的方法會由挑選硬體以及設計硬體模組開始，在硬體系統搭建完成後，將兩硬體單位放置於量測位置，透過光通訊的技術得到各 LED 對各 PD 的電流強度。軟體模擬的部分，則是以數學方式描述硬體參數、硬體組態、以及兩座標系之間的轉換關係，並以光傳遞模型來模擬光通訊所得到的硬體輸出電流。比較硬體與軟體模擬的特性，最完整的驗證方法為硬體驗證，然而由於光通訊發展並不如無線電波段成熟，架設光通訊系統較不方便，因此硬體驗證的複雜度較高；除此之外，硬體購買以及設計硬體模組的部分，都需要花費時間與金錢成本進行架設，在調整系統設計上也不如軟體靈活。也因此，大多數的文獻上會先透過軟體模擬，評估系統與演算法的表現，藉由低成本又快速方便的軟體模擬，在實際搭建硬體系統之前先對該設計有所了解，以做為硬體系統設計的參考。

因此，本論文會利用軟體模擬的方法，建立一模擬環境，將光通訊的步驟在模擬中完成，再以第三章提出的定位演算法計算出相對位置，並評估誤差與系統表現。以下依序在4.1章中詳細介紹如何透過數學模型模擬實際情況，而我們將數值帶入模擬方法得到的結果呈現於4.2，於4.3章中則對不同的系統設計進行分析以及評估，最後於4.4章中總結。

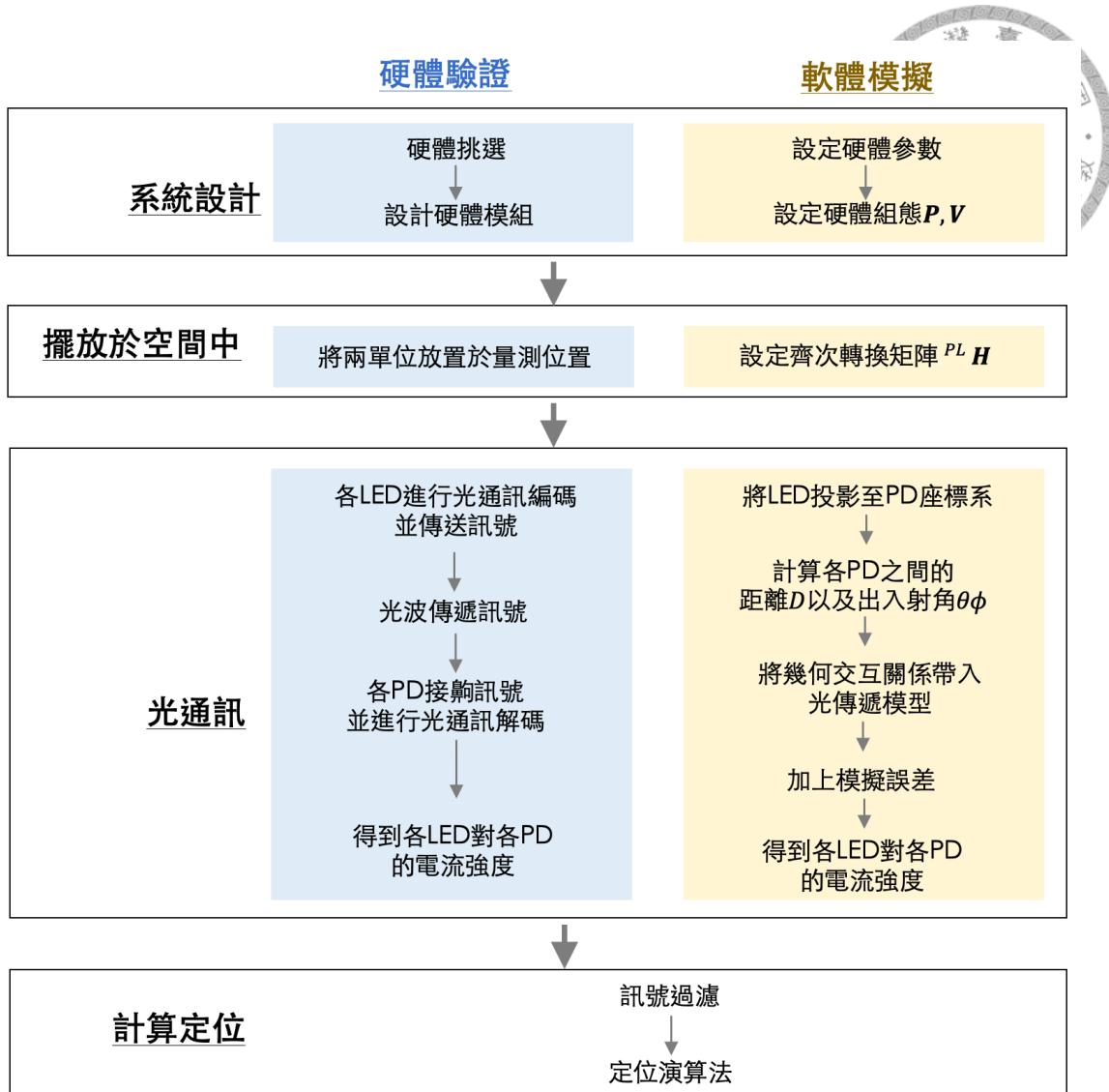


圖 4.1: 多 LED 對多 PD 定位系統以硬體驗證與軟體模擬的流程圖

4.1 模擬方法

根據圖4.1中軟體模擬的流程，本章節由4.1.1章中介紹軟體模擬中的系統設計，於4.1.2章中模擬兩硬體單位於不同位置的擺放，於4.1.3章中模擬光通訊的硬體輸出訊號，而透過第三章提出的演算法得到的模擬定位結果則呈現於4.2章。

4.1.1 系統設計模擬

系統設計中，我們需決定硬體數量 L, P ，以及硬體的規格與組態，在此章節將敘述軟體模擬中需設定的數值，以及與實際硬體系統設計時的差異。



4.1.1.1 硬體數量

硬體數量的部分，參考3.3.1.5章中所述，LED 與 PD 數量各需要最少三個來達成三維定位，因此在設定數量 L, P 時需確定其大於等於 3，參考表4.1。

表 4.1: 模擬中需設定的硬體數量

硬體數量	單位	備註
LED 數量 L	個	最小為 3 的整數
PD 數量 P	個	最小為 3 的整數

4.1.1.2 硬體參數

硬體規格在挑選時需著重注意的參數可以參考圖2.36，包含影響輻射模式的朗博次方 M_p, M_ℓ ，以及影響收發光強度的參數：LED 總輻射通量 P_t 、PD 有效面積 A 、飽和電流 s 、響應率 Re ；我們將這些參數統整於表4.2。這些參數中，除了朗博次方 M_ℓ, M_p 與有效面積 A 以外，各參數又會隨著給予的電壓電流改變。因此，**挑選朗博次方格外重要**，一旦購買該規格硬體則無法調整輻射模型，不像其他可在購買後透過提高給定電壓電流來提升表現。

需要注意的是，朗博輻射模型在軟體模擬中，可以設定為任意大於一的數值，設計空間為連續的；然而實際硬體挑選時，各硬體的朗博次方無法改變，設計空間不連續，僅能從市面上的硬體中挑選合適的，在市售硬體中無法指定所需的朗博次方。

表 4.2: 模擬中需設定的硬體參數

硬體參數		單位	備註
LED	總輻射通量 P_t	W	可透過改變電壓調整
	朗博次方 M_ℓ	-	最小為 1
PD	響應率 Re	A/W	可透過改變電壓調整
	有效面積 A	m^2	-
	飽和電流 s	A	可透過改變電壓調整
	朗博次方 M_p	-	最小為 1

4.1.1.3 硬體組態

硬體組態的部分，位置的限制如3.1章中所述，需限制 PD 擺放位置於 PD 座標系原點： ${}^P\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ，LED 的擺放位置也限制於 LED 座標系原點： ${}^L\mathbf{P}_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ 。而實際在設計硬體模組時，可以參考圖2.26，需要將各電子



元件與 LED、PD 硬體固定於一特殊形狀的載體上，利用載體的形狀來調整硬體的擺放指向。在模擬時，我們僅需透過定義各硬體的指向 V 即可，其中各指向有兩個自由度：以球座標系定義的天頂角 α 與方位角 β 。改變各硬體的指向時，各硬體的照射範圍也會改變，導致定位效果不同，因此硬體指向如何設計為一影響系統表現的因素，於??章中進行評估。執得注意的是，每一個硬體的組態需要定義兩個自由度，因此組態的部分，總共需定義 $2 \times (L + P)$ 個自由度，組態的變數數量為硬體數量的函數。

表 4.3: 模擬中需設定的硬體組態

組態參數		單位	備註
第 l 個 LED	天頂角 ${}^L\alpha_l$	rad	$0 \leq {}^L\alpha_l < \pi$
	方位角 ${}^L\beta_l$	rad	$0 \leq {}^L\beta_l < 2\pi$
第 p 個 PD	天頂角 ${}^P\alpha_p$	rad	$0 \leq {}^P\alpha_p < \pi$
	方位角 ${}^P\beta_p$	rad	$0 \leq {}^P\beta_p < 2\pi$

4.1.2 兩硬體單位擺放位置的模擬

根據2.4.1章中描述，LED 與 PD 各自可視為一個座標系，而兩者之間的相對關係可以齊次座標轉換表示，參考2.1章。因此，我們可以透過改變齊次轉換矩陣 ${}^{PL}\mathbf{H}$ ，使兩座標系之間的相對關係改變，以模擬兩硬體單位於空間中擺放位置。

而根據式2.1中呈現，齊次座標轉換矩陣 ${}^{PL}\mathbf{H}$ 可以視為平移向量 ${}^{PL}\mathbf{T}$ 與旋轉矩陣 ${}^{PL}\mathbf{R}\mathbf{o}$ 綜合的效果，而平移與旋轉各自三個自由度，呈現於表4.4。我們透過定義平移矩陣與旋轉矩陣來模擬兩硬體單位於空間中的相對位置，如式4.1，平移位置透過 ${}^{PL}t_x, {}^{PL}t_y, {}^{PL}t_z$ 三項定義，而旋轉則透過翻滾角 ${}^{PL}rx$ (Roll)、俯仰角 ${}^{PL}ry$ (Pitch)、偏航角 ${}^{PL}rz$ (Yaw) 定義，各自代表繞 x,y,z 軸旋轉的角度，則旋轉矩陣可以寫為 ${}^{PL}\mathbf{Rx}, {}^{PL}\mathbf{Ry}, {}^{PL}\mathbf{Rz}$ 三個矩陣的相乘結果。



$${}^{PL}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^{PL}t_x \\ {}^{PL}t_y \\ {}^{PL}t_z \end{bmatrix}$$

$${}^{PL}\mathbf{Ro} = {}^{PL}\mathbf{Rz}({}^{PL}rz){}^{PL}\mathbf{Ry}({}^{PL}ry){}^{PL}\mathbf{Rx}({}^{PL}rx)$$

Where

$$\begin{aligned} {}^{PL}\mathbf{Rx}({}^{PL}rx) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos({}^{PL}rx) & -\sin({}^{PL}rx) \\ 0 & \sin({}^{PL}rx) & \cos({}^{PL}rx) \end{bmatrix} & (4.1) \\ {}^{PL}\mathbf{Ry}({}^{PL}ry) &= \begin{bmatrix} \cos({}^{PL}ry) & 0 & \sin({}^{PL}ry) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin({}^{PL}ry) & 0 & \cos({}^{PL}ry) \end{bmatrix} \\ {}^{PL}\mathbf{Rz}({}^{PL}rz) &= \begin{bmatrix} \cos({}^{PL}rz) & -\sin({}^{PL}rz) & 0 \\ \sin({}^{PL}rz) & \cos({}^{PL}rz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

表 4.4: 模擬中定義相對位置的參數

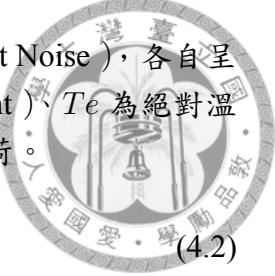
定義相對位置的參數		單位	備註
平移向量 ${}^{PL}\mathbf{T}$ 自由度	x 分量 ${}^{PL}t_x$	m	
	y 分量 ${}^{PL}t_y$	m	
	z 分量 ${}^{PL}t_z$	m	
旋轉矩陣 ${}^{PL}\mathbf{Ro}$ 自由度	Roll ${}^{PL}rx$	rad	$0 \leq {}^{PL}rx < 2\pi$
	Pitch ${}^{PL}ry$	rad	$0 \leq {}^{PL}ry < 2\pi$
	Yaw ${}^{PL}rz$	rad	$0 \leq {}^{PL}rz < 2\pi$

4.1.3 光通訊訊號模擬

理想的光通訊訊號強度，可以藉由光傳遞模型（式2.17）描述，透過將硬體參數、硬體組態與兩座標系相對位置帶入，即可計算出理想的 PD 電流輸出 I_{elp} 。然而實際情況下，硬體量測具有誤差，因此我們參考大多文獻模擬誤差的方式，呈現於4.1.3.1章中。

4.1.3.1 模擬硬體誤差

圖4.1流程中，模擬光通訊的部分可透過式3.2獲得，而為了更真實的模擬現實狀況，參考[?]中對誤差的模擬，呈現於式4.2中， \hat{I}_{elp} 代表第 1 個 LED 對第 p 個 PD 的量測電流，其組成包含了理想的量測電流 I_{elp} 與 PD 硬體誤差。PD 硬體誤



差中，又可分為熱雜訊 It (Thermal Noise) 與散粒雜訊 Is (Shot Noise)，各自呈現於式4.3與式4.4中，其中 Kb 為波茲曼常數 (Boltzmann constant)、 Te 為絕對溫度、 B 為頻寬、 Rs 為分路電阻 (Shunt Resistance)、 q 為電子電荷。

$$\hat{I}_{elp} = I_{elp} + \sqrt{It_{lp}^2 + Is_{lp}^2} \quad (4.2)$$

$$It_{lp} = \sqrt{\frac{4KbTeB}{Rs}} \quad (4.3)$$

$$Is_{lp} = \sqrt{2qI_{elp}B} \quad (4.4)$$

除了加上誤差以外，我還需評估硬體的解析度，光電二極體的解析度，也就是 PD 最小可感測的電流 Im ，可以用雜訊等效功率 Nep (noise equivalent power，以下簡稱 NEP) 計算，如式4.5，而 NEP 大小則取自硬體規格表。

$$Im = Nep \times \sqrt{B} \quad (4.5)$$

模擬硬體誤差這段落所需設定得參數整理於表4.5：

表 4.5: 模擬硬體誤差需定義的參數

模擬硬體誤差的參數	單位	備註
絕對溫度 Te	K	
頻寬 B	Hz	
分路電阻 Rs	Ω	
雜訊等效功率 Nep	W/\sqrt{Hz}	

4.2 計算定位結果

在此章節，我們利用4.1章中介紹的模擬方法，將需設計之參數帶入模型，透過圖4.1中軟體模擬的流程計算不同系統設計下，兩硬體於空間中各位置的距離與方位。有了流程之後，我們即可將欲評估的系統設計與相對位置帶入，利用計算出的定位 $PL\hat{T}$ 與定義相對位置的平移向量 PLT ，兩者之間的歐氏距離作為誤差 \hat{e} 。如何抉擇使用的硬體參數於4.2.1章中記錄，而模擬的結果呈現於4.2.2章中。



4.2.1 參考市售硬體規格

在模擬中，上述的所有參數皆可以透過簡單的調整數值來進行模擬；然而在現實中，一旦挑選了一種 LED 與 PD，則表 4.2 中的數值基本上就被訂下。雖然仍能透過改變給定的電壓電流來調整硬體參數，但各硬體參數間的關係仍存在，因此設定硬體參數的最佳方法，便是直接參考現有的硬體規格表，由規格表上的數據進行設定。因此我們將 4.1 章中提到需要設定的參數們，依照「是否在硬體挑選時被決定」分為兩類，以下我們將現有市售的硬體規格列出。

在此段落，我們介紹如何設定 4.1 章中須設置的參數們，包含硬體數量、硬體參數、硬體組態、與誤差模擬參數。

表 4.6: 市售的 LED 規格

參數	單位	Vishay VSMA1085250 [?]	Hamamatsu L12170 [?]
總輻射通量 P_t	W	5.34	80×10^{-3}
朗博次方 $M\ell$	-	5.57	19.97

表 4.7: 市售的 PD 規格 [?]

參數	單位	Hamamatsu S12915-16R	Hamamatsu S12915-66R	Hamamatsu S12915-1010R	Hamamatsu S12698-02
響應率 Re	A/W	0.64	0.64	0.64	0.38
有效面積 A	m^2	6×10^{-6}	33×10^{-6}	100×10^{-6}	33.6×10^{-6}
朗博次方 M_p	-	1	1	1	1.5
分路電阻 R_s	Ω	50×10^9	10×10^9	5×10^9	10^8
雜訊等效功率 Nep	W/\sqrt{Hz}	3.5×10^{-14}	9×10^{-16}	2×10^{-15}	2.8×10^{-15}

4.2.2 模擬結果

根據 4.1 章所述系統設計與誤差模擬方法，我們利用將兩座標系至於模擬空間中，定義齊次座標轉換矩陣為

結果如下

我們參考文獻最常見的使用情境，將座標於空間中移動，誤差大小以顏色呈現於圖



4.2.3 小結

我們利用4.1章中的方法，帶入4.2.1章中的硬體參數，於4.2.2章中呈現不同系統設計下的定位結果 \hat{PLT} ，並計算出定位誤差 \hat{e} 。得到誤差後，我們即可透過改變兩座標系的相對位置，來觀察該系統設計在不同位置上的定位表現，因此我們在4.3章中進行系統評估。

4.3 系統評估

上一章節中，我們能夠完整的以數值模擬方式，針對不同設計在模擬空間中不同位置，進行定位以及計算誤差，完成圖4.1中的流程。而本章節則是想要了解不同系統設計的表現，模擬流程整理於圖4.2：

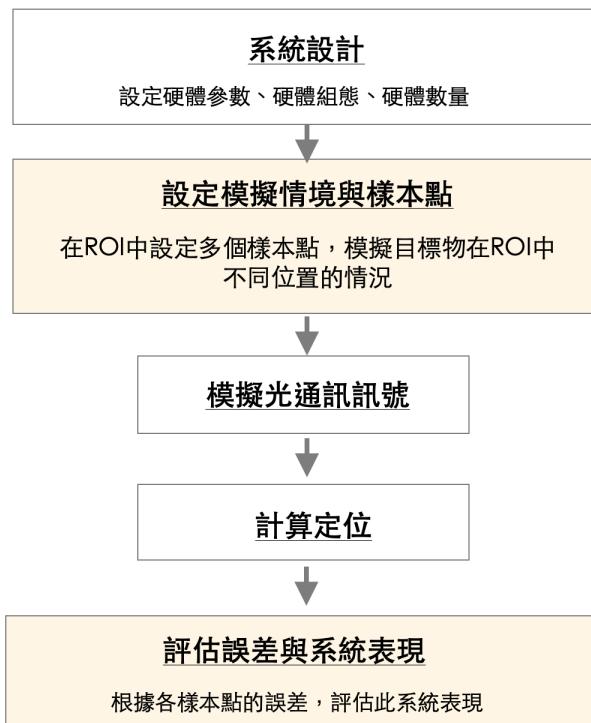


圖 4.2: 評估系統流程圖

由於在評估系統時，需要對不同的使用情境進行設計，因此我們的模擬流程由定義使用情境開始，參考4.3.0.1章，而根據不同使用情境，量測與目標單位於空間中的相對位置與姿態也會有所不同。系統設計的部分於??章中介紹，需決定的部分包含硬體數量、硬體參數以及硬體組態。有了硬體組態與座標轉換關係，即可透過式2.17計算出相對位置，如何模擬硬體誤差則在4.1.3.1章中介紹。最後則是透過第三章提出的演算法，計算出相對位置與誤差。



4.3.0.1 使用情境與樣本點

4.3.1 量化系統表現

4.3.1.1 量化系統表現

4.3.2 系統設計對系統表現的影響

4.3.2.1 硬體指向對系統表現的影響

4.3.2.2 朗博次方對系統表現的影響

4.3.2.3 硬體數量對系統表現的影響

4.3.3 不同使用情境的系統表現

4.4 結論



第五章

針對不同使用情境進行最佳化

如第四章所述，系統設計上具有靈活度，我們可以透過改變硬體指向、硬體數量、朗博次方，來改變系統的表現。因此，我們可以針對不同的使用情境，給出最佳的系統設計，本章節於依序於5.1章定義最佳化問題，並於章中針對4.3.0.1章中室內定位的例子，於5.2章給出最佳系統設計。

5.1 最佳化流程

最佳化變數的部分，包含朗博次方 M_p, M_ℓ 、硬體指向 ${}^P\mathbf{V}_p, {}^L\mathbf{V}_l$ 與硬體數量 P, L ，而其中每個硬體皆有朗博次方與硬體指向需要定義，因此最佳化的變數量又會根據硬體數量而改變，使得最佳化難度高。為了簡化這個變數數量與變數本身相關的問題，我們將硬體數量於最佳化流程的最開始定義，參考流程圖5.1，硬體數量確定後，針對朗博次方與指向的最佳化問題則可利用基因演算法（Genetic Algorithm，以下簡稱 GA）求解。而透過迭代改變硬體數量，我們可以得到不同硬體數量對應的最佳設計，以及該設計的目標函數。擁有這些資訊，即可透過人類決策者介入選擇最合適的硬體數量，在系統表現以及硬體成本中進行取捨。

5.1.1 目標函數

我們的最佳化目標，是希望使系統表現更好，而評估方式可以參考??章所述，目標是讓在容許範圍內的樣本點比例越高越好。因此，在硬體總數設定為 P, L 的情況下，最佳化目標函數 f 呈現於式5.1

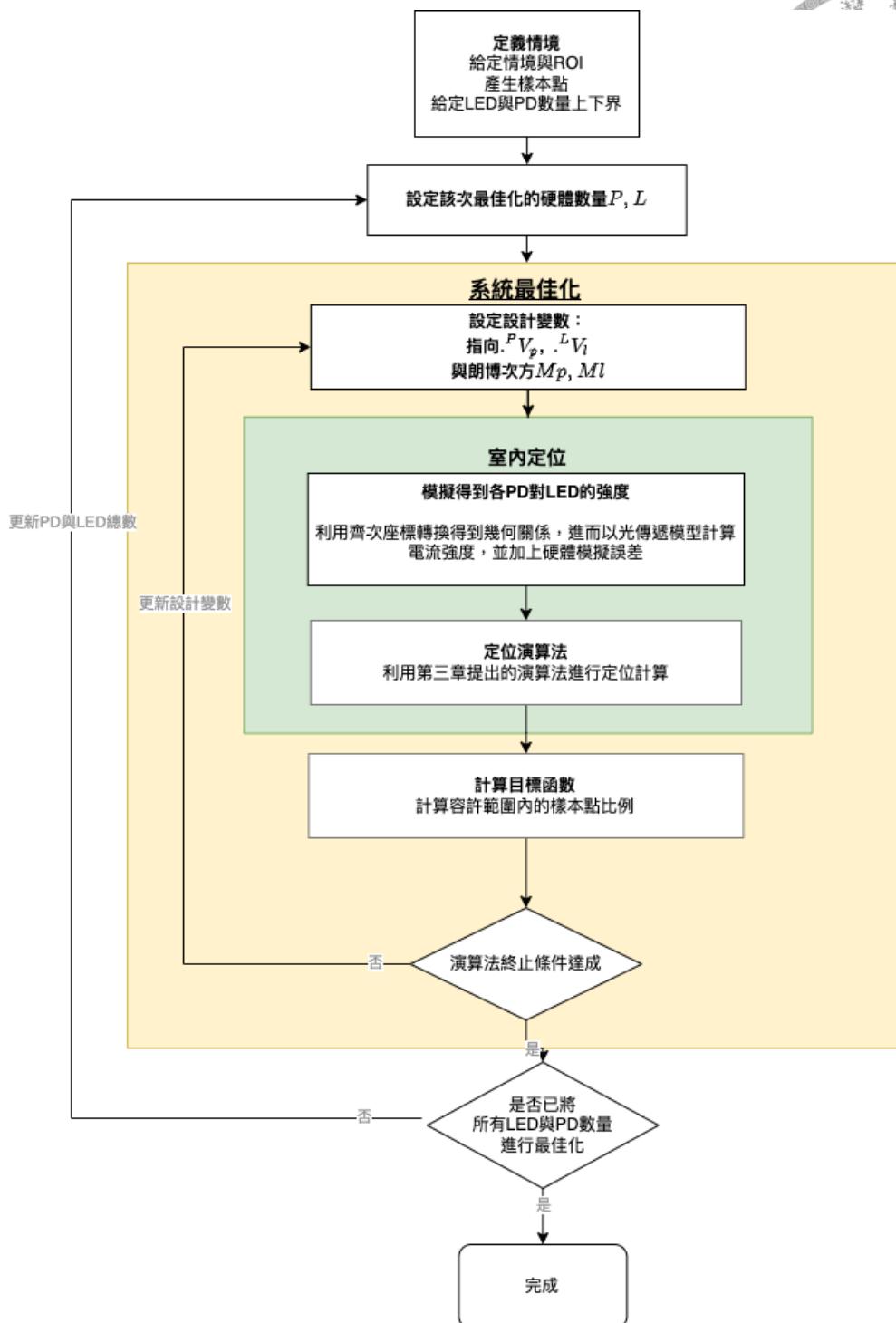


圖 5.1: 最佳化流程圖

$$\begin{aligned}
 & \underset{{}^P V_p, {}^L V_l, M_l, M_p}{\text{minimize}} \quad f = \frac{\sum_{i=1}^K F(k)}{K} \\
 & \text{Where } F(k) = \begin{cases} k e < T o & , 1 \\ \text{else} & , 0 \end{cases} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$



where $p = 1, 2, \dots, P$

$l = 1, 2, \dots, L$

5.1.2 最佳化變數

最佳化變數的部分，包含朗博次方 M_p, M_l 、硬體指向 ${}^P\mathbf{V}_p, {}^L\mathbf{V}_l$ 與硬體數量 P, L ，而其中每個硬體皆有朗博次方與硬體指向需要定義，因此最佳化的變數量又會根據硬體數量而改變，變數總數為 $2 + 2 \times (L + P)$ 。

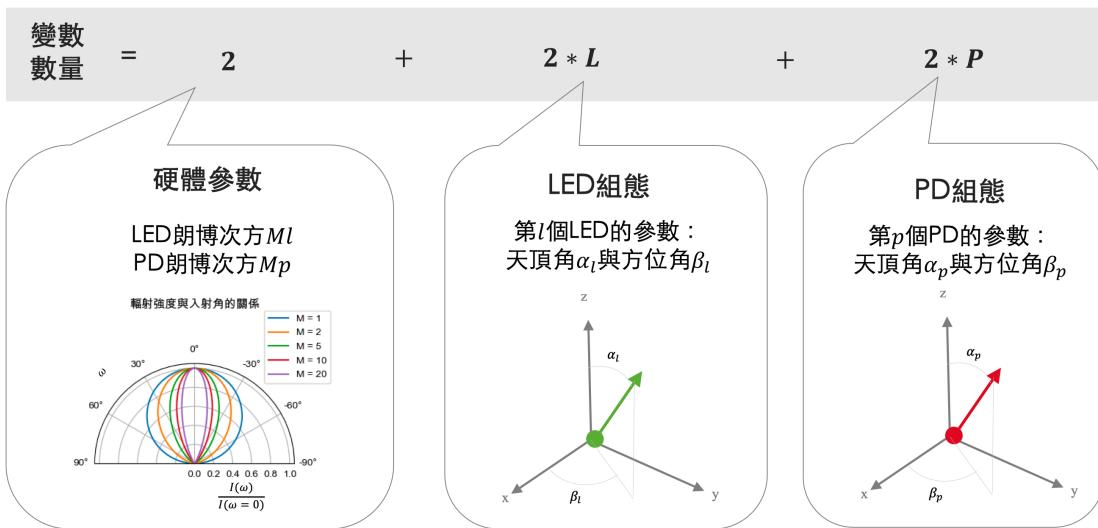


圖 5.2: 最佳化變數

5.2 案例

5.2.1 室內空間的案例

我們最佳化的目標情境參考4.3.0.1章，為一包含平移樣本與旋轉樣本的的室內空間，而以下圖5.3呈現硬體數量分別為 $P = L = 5$ 以及 $P = L = 10$ 時，朗博次方與硬體指向的最佳化結果。

觀察這兩個系統設計的差別，在硬體數量少的時候，為了讓空間中的最多個樣本點可讀到訊號，因此朗博次方較小，捨棄了對出入射角敏感度。

5.3 結論

本章節提出一流程，針對不同使用情境，進行朗博次方 M_p, M_l 、硬體指向 ${}^P\mathbf{V}_p, {}^L\mathbf{V}_l$ 與硬體數量 P, L 的最佳化。透過設定不同的情境、不同的參數，我們可

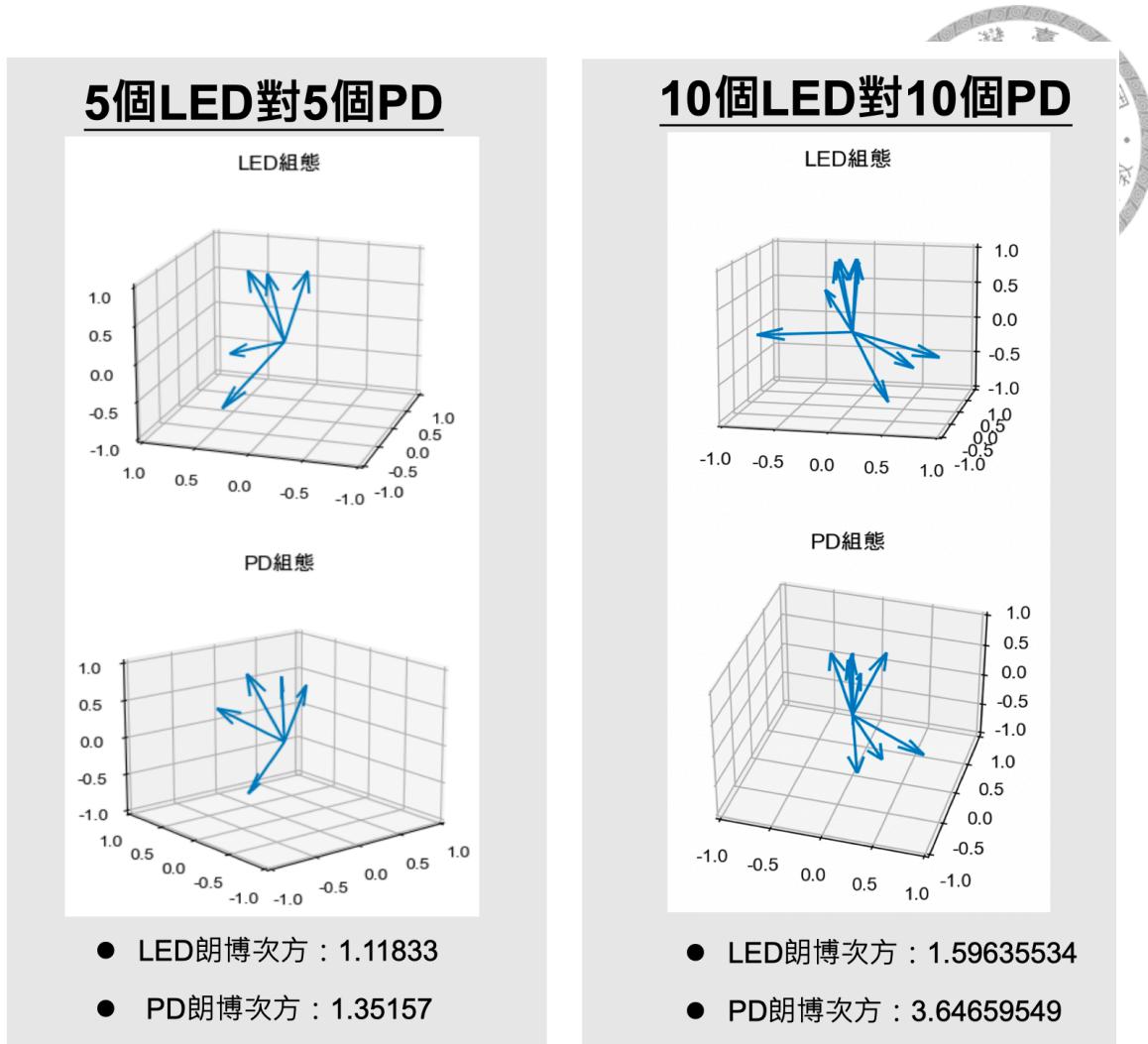


圖 5.3: 最佳化結果

以得到最適合的朗博次方與硬體擺設設計，也知道不同硬體數量的表現。由此資訊，再進行硬體的購買以及硬體系統的搭建，便可以減少硬體系統重複測試的麻煩。



結論

6.1 研究總結

本研究為了能夠達到一單點對單點的三維定位系統，且需具有靈活安裝於不同環境與位置的特性，從分析不同室內定位技術與方法的特色開始，將目光著重在具有靈活度潛力的 LED 與 PD 系統上。其中，為了解決此領域中的應用情境限制，提出一不需限制目標物與觀察者姿態，又能達到三維定位，且完整考量朗博次方的方法。本方法透過比較兩兩 PD 的訊號，得到方位解可能的平面，而平面兩兩比較即可得到方位；利用前述方法取得 PD 座標系中 LED 座標系所在方位，以及 LED 座標系中 PD 座標系所在方位，即可解出各 LED 對應各 PD 的出入射角關係，再透過光傳遞模型求得距離。

為了評估此演算法，建立一模擬環境以模擬多 LED 對多 PD 的定位系統，並用其分析各項參數的影響，如朗博次方、硬體數量、硬體組態對系統誤差的影響。了解了各項參數的意義後，將此演算法於模擬中應用於不同情境，提出一最佳化流程，針對不同情境進行參數與組態的最佳化，提供系統設計者最合適的系統組態。

6.2 未來目標

- **提升演算法靈活度：** 第3章提出的演算法中，仍然有限制硬體種類需相同，侷限了硬體挑選以及系統設計上的自由度。透過調整演算法可解除此限制，繼續提升演算法靈活度，然而演算法複雜度也隨之提升，需特別注意。
- **提升模擬真實度：** 本研究與大多 LED 對 PD 的定位系統相同，在模擬中並沒有考量多重路徑誤差、干涉等效果的誤差，因此不夠貼近實際系統的表現。無論是以實驗評估誤差，或是將模擬系統加入更多誤差考量，便可檢考模擬與實際系統的差異。

- 硬體驗證：本研究與大多 LED 對 PD 的定位系統相同，缺乏硬體驗證，僅利用模擬評估演算法與誤差；然而模擬與實際情況必有出入，最正確評估系統的方式便需架設完整的光通訊系統，並利用該系統進行定位，針對實驗結果再進行分析與研究以調整演算法或是系統設計。

