

Projet Plume Janvier 2024

October 16, 2024

1 Configuration expérimentale

- Créer une stratification linéaire en température sur $H=1$ m, température en bas de 15°C , en haut de 30°C , pas de rotation initiale. La différence de densité correspondante est de $0,3\%$.
- Mesurer le profil vertical de température initial, juste après le remplissage, puis régulièrement pendant environ une heure, en l'absence de mouvements. Utiliser deux profileurs, un au centre et un proche de la périphérie pour tester l'homogénéité horizontale.
- Ensemencer en particules, puis mettre en rotation la plate-forme à période $T=120$ s. PIV sur tranche verticale pendant 1 heure pour observer la croissance de la zone mélangée.
- Utiliser deux caméras pour vue haute résolution proche du fond (mesure du tenseur de Reynolds $\langle u'w' \rangle$), et une autre pour vue du profil de vitesse sur toute la hauteur.
- Mesurer régulièrement l'évolution du profil de température.
- Si le temps le permet refaire la même manip avec une stratification en salinité équivalente. Permet d'étudier l'influence du nombre de Prandtl sur le mélange.

Stratification en densité

Le coefficient d'expansion n'est pas vraiment linéaire dans la plage de température, allant d'environ $1.5 \cdot 10^{-4}$ à $3 \cdot 10^{-4}$ entre 15 et 30 degrés. La stratification ne sera donc pas linéaire si le profile de température l'est. Est-ce plus linéaire avec de l'eau (uniformément) salée? On pourrait aussi mettre une plus forte stratification dans la partie basse intéressante avec température uniforme en hauteur.

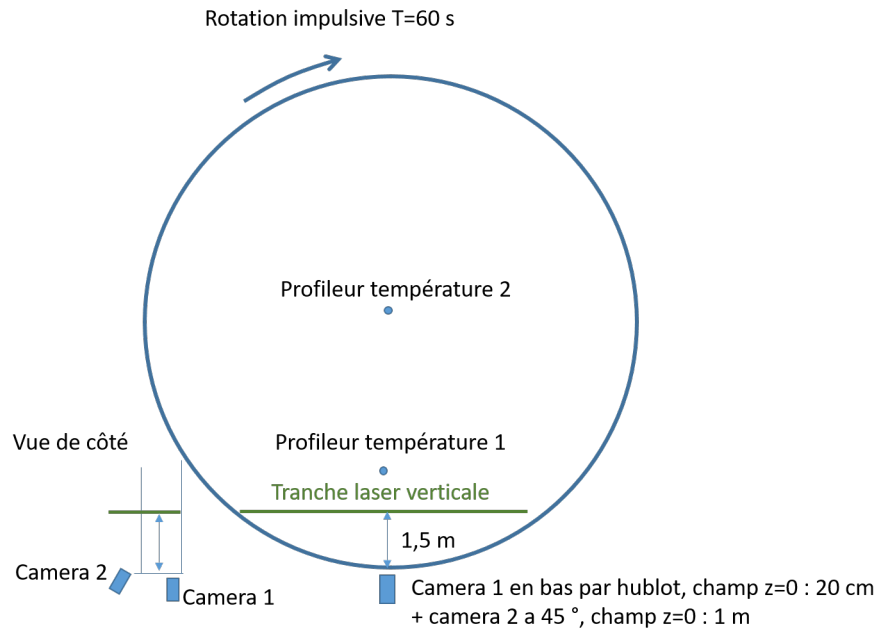


Figure 1: schéma

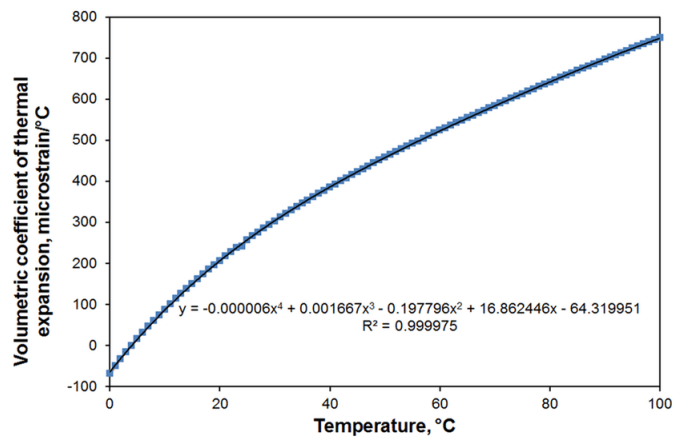


Figure 2: coefficient d'expansion thermique de l'eau

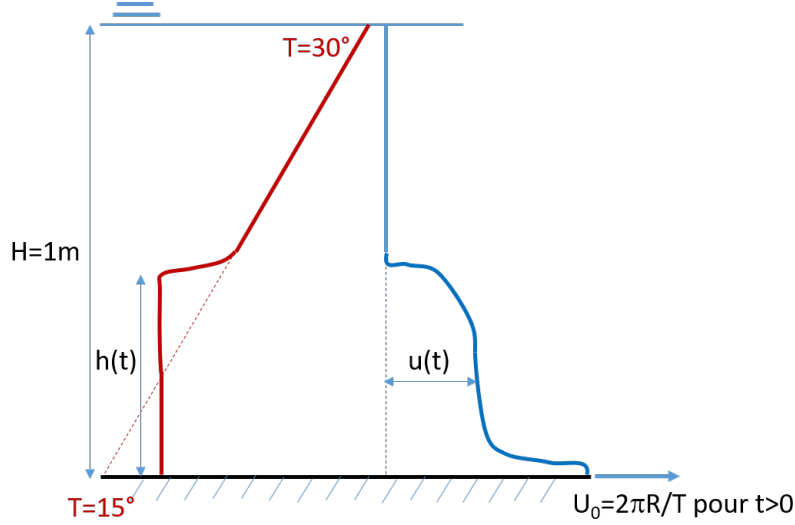


Figure 3: profils de température et de vitesse

2 Théorie:

2.1 vitesse d'entraînement

On a une couche mélangée dont l'épaisseur $h(t)$ croît avec le temps sous l'effet de la turbulence produite par la force de cisaillement u_*^2 provenant de la différence entre la vitesse de la plaque $V_0 = 2\pi R/T$ et la vitesse de la couche mélangée $v(z, t) \simeq V(t)$. Voir figure.

Pour un profil autosimilaire $u(z, t) = U(t)F(z/h)$, on a le bilan de quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt} \left(\int u dz \right) = \frac{d(Uh)}{dt} \left(\int F(\xi) d\xi \right) = u_*^2 \quad (1)$$

(on utilise le changement de variable $\xi = z/h$). Notons $\lambda = \int F(\xi) d\xi = cte$ par hypothèse d'autosimilarité.

On suppose par ailleurs que le profil est marginalement stable, soit

$$Ri = \frac{gh\delta\rho/\rho}{U^2} = \frac{h^2 N^2}{U^2} = 1/4 \quad (2)$$

D'après le modèle de Pollard et al. (1973), on a pour u_* constant,

$$\begin{aligned} h &= 2^{1/4} u_* (t/N)^{1/2} \\ U &= 2^{-1/4} \lambda^{-1} u_* (tN)^{1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

Avec rotation la relation 1 n'est valable que pour les temps courts, de l'ordre d'un quart de période inertielle $\pi/(2f)$, ensuite la vitesse est déviée par la force de Coriolis et oscille. La vitesse moyenne à la surface est donc

$\langle U \rangle = 2^{-7/4} \lambda^{-1} \pi^{1/2} u_* (N/f)^{1/2}$. Le taux de production d'énergie correspondant est $P = \langle U u_* \rangle = 2^{-7/4} \lambda^{-1} \pi^{1/2} u_*^2 (N/f)^{1/2}$. L'épaisseur de la couche stratifiée h_s est donnée par $Ri=1/4$, soit

$$\frac{h_s h N^2}{\langle U^2 \rangle} = 1/4 \quad (4)$$

, pour tenir compte de u_* variant avec le temps,

$$\frac{dh^2}{dt} = 2^{1/2} u_*^2 N^{-1} \quad (5)$$

D'où en combinant avec 1, $d/dt(h^2 N/\sqrt{2} - Vh)=0$. Puisque ces deux quantités sont égales à 0 à $t=0$, on obtient en intégrant $h^2 N/\sqrt{2} = Vh$, soit

$$h = 2^{1/2} V/N \quad (6)$$

Dans la couche mélangée, on s'attend au profil logarithmique turbulent

$$\frac{V_0 - \bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z u_*}{\nu}\right) + B \quad (7)$$

où V_0 est la vitesse de la plaque et $\kappa = 0.4$, $B = 5.2$. En supposant la vitesse à peu près uniforme $= V$ dans la couche mélangée, on a

$$\frac{V_0 - V}{u_*} \simeq \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{h u_*}{\nu}\right) + B \quad (8)$$

Nous prévoyons $N^2=0,03 \text{ s}^{-2}$, donc $N=0.17 \text{ s}^{-1}$. Pour $h = 0.1\text{m}$, $u_* = 0.01\text{m/s}$, cela donne $\frac{V_0-V}{u_*} \simeq 20$. Ce rapport varie logarithmiquement avec h et u_* , de façon assez minime. On a donc d'après 1,

$$\frac{d}{dt}(Vh) \simeq \frac{1}{400}(V_0 - V)^2 \quad (9)$$

donc, introduisant 6,

$$\frac{d}{dt}(V^2) = \frac{N}{400\sqrt{2}}(V_0 - V)^2 \quad (10)$$

soit pour le défaut relatif de vitesse $X = (V_0 - V)/u_0$,

$$\left(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X}\right) \frac{dX}{dt} = \frac{N}{800\sqrt{2}} \quad (11)$$

ce qui donne par integration

$$\frac{1}{X} + \ln(X) = \frac{Nt}{800\sqrt{2}} + 1 \quad (12)$$

(à $t = 0$, on a $V = 0$ soit $X = 1$ d'où la constante d'intégration égale à 1). La fonction $1/X + \ln(X)$ décroît pour $X < 1$ et croît pour $X > 1$ avec un

minimum à $X = 1$. Cela donne deux solutions pour chaque t , mais X ne peut que diminuer, donc seule la branche $X < 1$ est active.

L'épaisseur de couche mélangée est alors donnée par 6. Elle se stabilise à $h = 2^{1/2}V_0/N$ aux temps longs. Pour $N=0.17 \text{ s}^{-1}$ et $V_0 = 2\pi R/T = 0.26 \text{ m/s}$, cela donnerait $h_{max} = 2.16 \text{ m}$, au delà de l'épaisseur de la couche d'eau. La hauteur $H = 1\text{m}$ est atteinte lorsque $V = 0.12 \text{ m/s}$, soit $X \simeq 1/2$.

Pour $N=0.17 \text{ s}^{-1}$, on a $X = 1/2$ pour $0.17t/800\sqrt{2} = 1 - \ln(2) \simeq 0.31$, soit $t = 2063 \text{ s}$, soit un peu plus d'une demi-heure. La hauteur $h = 0.5 \text{ m}$ est atteinte pour $V = 0.06 \text{ m/s}$, soit $X = 0.77$. Le temps correspondant est donné par $0.17t/800\sqrt{2} = 1/0.77 - \ln(0.77) - 1 = 0.037$, soit $t = 246\text{s}$.

A noter que pour les temps petits $X = 1 - \epsilon$ ($\epsilon = V/V_0$), d'où $1/X \simeq 1 + \epsilon + \epsilon^2$ et $\ln X \simeq -\epsilon - \epsilon^2/2$ d'où 12 s'approxime en

$$V = 2^{-1/4} \frac{1}{20} V_0 (Nt)^{1/2} = 0.0045 t^{1/2} \quad (13)$$

et la hauteur croît en

$$h = 2^{1/4} V_0 \frac{1}{20} N^{-1/2} t^{1/2} = 0.037 t^{1/2} \quad (14)$$

On retrouve la loi de Polard et al. pour $u_* = V/20$ constant. Ceci restera une bonne approximation dans les manips, bien que u_* décroisse progressivement avec la mise en rotation de la couche mélangée.

2.2 Comparaison avec Kato et Phillips

Dans l'expérience de Kato et Phillips, on a $R = 1.29\text{m}$, et une vitesse V_0 proche de 26 cm/s , et donc $u_* \simeq 1\text{cm/s}$ comme nous. La formule 43 donne alors $\delta_{95} = 3\text{cm}$, ce qui semble incompatible avec le resultat indiqué d'un mélange complet tres rapide en l'absence de stratification. L'effet de confinement dans un canal circulaire limite peut-être la recirculation radiale. La stratification de Kato et Phillips est bien plus forte que nous avec $N = 1.37\text{s}^{-1}$ et $N = 1.94\text{s}^{-1}$ (leur fig 5). La loi 14 donne respectivement $h = 0.013 t^{1/2}$ et $h = 0.01 t^{1/2}$, soit environ 10 cm en 100 s , ce qui colle bien avec cette fig 5. Pour nous c'est 10 fois plus rapide à cause du N plus faible.

Par ailleurs notre nbre de Richardson sera beaucoup plus faible

$$Ri = \frac{N^2 h^2}{2u_*^2} \quad (15)$$

On aura $Ri=1.4$, soit 10 fois moins que les valeurs les plus faibles de Kato et Phillips. On devrait s'approcher du cas d'un scalaire passif à $Ri=0$.

2.3 Effet de pente .

La couche mélangée est ensuite progressivement mise en rotation selon la formule 13. Le mélange à l'interface stratifiée est alors controlé par le cisaillement à l'interface, plutot que par l'effet direct de la turbulence de couche limite.

Par ailleurs l'équilibre geostrophique donne une pente radiale des isothermes, telle que

$$g\alpha\partial T/\partial r = f\partial v/\partial z \quad (16)$$

La pente est donc

$$s = \frac{\partial T/\partial r}{\partial T/\partial z} = \frac{f}{g\alpha} \frac{\delta v}{\delta T} \quad (17)$$

En l'absence de rotation initiale, on a plutot un équilibre cyclostrophique. Et $g\alpha\delta T = N^2 h$.

$$s = \frac{V^2}{N^2 h R} = 2^{-3/4} \frac{V_0}{20R} N^{-1/2} t^{1/2} = 3.75 \cdot 10^{-3} t^{1/2} \quad (18)$$

Pour $t = 100s$, on a donc $s=0.0375$, soit 3,75 cm sur 1 m, ce qui n'est pas négligeable.

Il faudrait regarder quel est l'effet sur le développement vertical à un rayon donné.

2.4 General equations with radial transport

Considérons les équations générales dans l'approximation de Boussinesq en coordonnées polaires, r, θ, z , avec $\mathbf{u} = (u, v, w)$ (u composante radiale), en négligeant les effets de viscosité liés aux gradients horizontaux de vitesse

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - f\bar{v} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (20)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + b \quad (21)$$

où $b = -g(\rho - \rho_0)/\rho_0$ est la 'buoyancy'. On peut réécrire ces équations sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(uv)}{\partial \theta} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{v^2}{r} - f\bar{v} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial r} + \frac{1}{r} v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} - v \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(wv)}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} - w \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + b \quad (24)$$

En utilisant la condition d'incompressibilité,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(uv)}{\partial \theta} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2vu)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial \theta} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + fu = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad (27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rwu)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(wv)}{\partial \theta} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial w}{\partial z}\right) + b \quad (28)$$

Décomposons en moyenne et fluctuations, $u = \bar{u} + \tilde{u}$ vitesse radiale et $v = \bar{v} + \tilde{v}$ vitesse azimuthale, $w = \bar{w} + \tilde{w}$ vitesse verticale, on obtient pour un état moyen axisymétrique

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{u})}{\partial r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

d'où l'estimation $\bar{w}/U \sim (\delta/L)$.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{u}^2)}{\partial r}}_{U^2/L} + \underbrace{\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}}_{U^2/L} \underbrace{\frac{\bar{v}^2}{r}}_{U^2/L} - f\bar{v} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{u}^2)}{\partial r}}_{u'^2/L} \underbrace{\frac{\tilde{v}^2}{r}}_{u'^2/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \bar{u}\bar{w}\right)}_{u'^2/\delta} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\bar{v}\bar{u})}{\partial r}}_{U^2/L} + \underbrace{\frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z}}_{U^2/L} + f\bar{u} = -\underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tilde{v}\tilde{u})}{\partial r}}_{u'^2/L} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \bar{v}\bar{w}\right)}_{u'^2/\delta} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{w}\bar{u})}{\partial r}}_{U^2\delta/L^2} + \underbrace{\frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z}}_{U^2\delta/L^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tilde{w}\tilde{u})}{\partial r}}_{u'^2/L} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\bar{w}\bar{w}}_{u'^2/\delta} + \bar{b} \quad (32)$$

En dehors de la couche limite, la vitesse radiale u devient négligeable par rapport à $v \equiv v_\infty$, et la turbulence s'annule, donc la première équation se réduit à l'équilibre cyclo-geostrophique

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{v_\infty^2}{r} + fv_\infty \quad (33)$$

et puisque $\delta/L \ll 1$, la dernière équation se réduit à l'équilibre hydrostatique $p/\rho = p_\infty/\rho + \int \bar{b} dz + o(U^2\delta^2/L^2) + o(u'^2)$. On peut donc approximer $\partial p/\partial r$ par 33 dans la couche limite. En combinant avec le terme centrifuge et le terme de Coriolis, obtient alors dans la première équation une contribution en $-\frac{\bar{v}^2 - v_\infty^2}{r} - f(\bar{v} - v_\infty)$ qu'on peut réarranger en $-(\bar{v} - v_\infty)\left(\frac{\bar{v} + v_\infty}{r} + f\right)$ indépendante du repaire: un changement $v \rightarrow v + \Omega r$ et $f \rightarrow f - 2\Omega$ ne change pas cette expression de la force centrifuge effective.

Le transport turbulent radial $o(u'^2/L)$ est négligeable devant le transport turbulent vertical $o(u'^2/\delta)$. Par contre le transport par l'écoulement moyen U^2/L n'est pas négligeable si $(u'/U)^2 \sim \delta/L$. On obtient donc les equ. de couche limite

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{u}^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} - (\bar{v}-v_\infty)\left(\frac{\bar{v}+v_\infty}{r} + f\right) &= \frac{\partial}{\partial z}(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \bar{u}\bar{w}) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\bar{v}\bar{u})}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z} + f\bar{u} &= \frac{\partial}{\partial z}(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \bar{v}\bar{w}) \end{aligned} \quad (34)$$

Dans la phase initiale on a $\delta/L \ll (u'/U)^2$ et $u \ll v$, donc 29 donne aussi $\partial w/\partial z \ll U/L$. Les equ 34 se réduisent alors à

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \bar{u}\bar{w}) &= (\bar{v}-v_\infty)\left(\frac{\bar{v}+v_\infty}{r} + f\right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \bar{v}\bar{w}) \end{aligned} \quad (35)$$

la 2eme equ decrit une croissance de la couche limite sans effet de rotation, tandis qu'une vitesse radiale se développe dans la couche limite sous l'effet centrifuge, selon la 1ere equ.

Ensuite, on a une rétroaction de u et de la vitesse verticale w associée qui stabilisent la couche limite et tous les termes de 34 interviennent. Pour verifier experimentalement la difficulté est de mesurer les dérivées radiales. On peut cependant estimer que $u \propto r$ de même que $v \propto r$. l'équation de continuité 29 donne alors $\partial \bar{w}/\partial z = -2\bar{u}/r$, soit $\bar{w} = -(2/r) \int_0^z \bar{u} dz'$ et $\partial(\bar{u}\bar{w})/\partial z = \bar{w}\partial\bar{u}/\partial z + \bar{u}\partial\bar{w}/\partial z = \bar{w}\partial\bar{u}/\partial z - 2\bar{u}^2/r$, ainsi que $\partial(\bar{v}\bar{w})/\partial z = \bar{w}\partial\bar{v}/\partial z + \bar{v}\partial\bar{w}/\partial z = \bar{w}\partial\bar{v}/\partial z - 2\bar{v}\bar{u}/r$. 34 devient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}^2}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \int_0^z \bar{u} dz' - (\bar{v}-v_\infty)\left(\frac{\bar{v}+v_\infty}{r} + f\right) &= \frac{\partial}{\partial z}(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \bar{u}\bar{w}) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \int_0^z \bar{u} dz + (f + \frac{2\bar{v}}{r})\bar{u} &= \frac{\partial}{\partial z}(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \bar{v}\bar{w}) \end{aligned} \quad (36)$$

dont on doit pouvoir mesurer tous les termes.

En integrant en z la 1ere equ sur toute la couche limite on a (en integrant par partie $\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} (\int_0^z \bar{u} dz') dz$)

$$\frac{\partial \int \bar{u} dz}{\partial t} + 3 \frac{\int \bar{u}^2 dz}{r} - \int (\bar{v}-v_\infty) \left(\frac{\bar{v}+v_\infty}{r} + f\right) dz = -u_*^2 \sin \alpha \quad (37)$$

où α l'angle de la force de friction par rapport à la direction azimuthale. Pour la 2eme equ, il faut tout d'abord travailler sur $v-v_\infty$ avec $v_\infty \simeq cte$ pour assurer la convergence des integrales verticales.

$$\frac{\partial \int (\bar{v}-v_\infty) dz}{\partial t} + \frac{4}{r} \int (\bar{v}-v_\infty) \bar{u} dz + \int (f + \frac{2v_\infty}{r}) \bar{u} dz = -u_*^2 \cos \alpha \quad (38)$$

Pour la couche d'Ekman classique, on a $v/r \ll f$, et ces deux equ. se réduisent à

$$\begin{aligned} \frac{\partial \int \bar{u} dz}{\partial t} - f \int (\bar{v}-v_\infty) dz &= -u_*^2 \sin \alpha \\ \frac{\partial \int (\bar{v}-v_\infty) dz}{\partial t} + f \int \bar{u} dz &= -u_*^2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (39)$$

Dans le cas sans rotation initiale, on a $2v_\infty/r = -f$ (la vitesse angulaire est opposée à celle du repère de la cuve).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{u} dz + 3 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\bar{u}^2}{r} dz - \frac{1}{r} \int (v + \frac{fr}{2})^2 dz &= -u_*^2 \sin \alpha \\ \frac{\partial}{\partial t} \int (\bar{v} + \frac{fr}{2}) dz + \frac{4}{r} \int (\bar{v} + \frac{fr}{2}) \bar{u} dz &= -u_*^2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (40)$$

La variable pertinente est alors $\bar{v} + \frac{fr}{2}$, la vitesse azimuthale dans le repère fixe.

2.5 Calculs antérieurs

Pour un mouvement supposé rectiligne, on a par conservation de la quantité de mouvement

$$\delta_1 = \frac{u_*^2}{V_0^2} V_0 t \simeq 0.65 \cdot 10^{-3} t \quad (41)$$

Pour $t = 100$ s, on aurait donc $\delta_1 = 6.5$ cm alors que le calcul avec stratification donnerait 37 cm. Donc la croissance ne sera pas limitée par la stratification mais par la diffusion de la quantité de mouvement. On s'attend ensuite à une stabilisation de l'épaisseur de couche limite turbulente sous l'effet de rotation. On s'attend à une loi d'échelle de la forme

$$\delta \propto \frac{u_*}{\Omega} \quad (42)$$

L'article de [?] explicite les propriétés de cette couche limite sur un disque en rotation. La table 1 de cet (cas TO2) donne une vitesse de disque de $V_0 = 33.5$ m/s à $R = 0.22$ m, soit $\Omega = 152$ s⁻¹. La valeur de u_* est de 1.46 m/s, soit $V_0/u_* = 23$, proche de notre estimation à 20 et $\delta_{95} = 6.08$ mm (c'est la hauteur où la vitesse atteint 5 % de la vitesse de paroi) tandis que $\delta_1 = 1.16$ mm = $0.19\delta_{95}$. On peut donc préciser

$$\delta_{95} = 0.63 \frac{u_*}{\Omega} \quad \delta_1 = 0.19 \delta_{95} \quad (43)$$

On notera que le résultat correspondant est $\delta \simeq 0.3u_*/f$ pour la couche d'Ekman turbulente. D'après 41, ce régime de couche limite quasi-stationnaire est atteint **au bout de 35 s**, soit environ **1/4 de tour de rotation**. En comparant avec 14,

[?] indique (fig 6) que la vitesse turbulente rms est d'environ $0.03 V_0$ à $z = \delta_{95}$, et chute à $0.01 V_0$ à $1.5 \delta_{95}$. Pour nous, $\Omega = 2\pi/120 = 0.052$ s⁻¹ et $u_* = 1$ cm/s, cela donnerait $\delta_{95} = 12$ cm et $\delta_1 = 2.3$ cm. Au-delà la turbulence produite par le frottement de fond chute et ne contribue plus au mélange. Mais il persiste peut-être des fluctuations de pression qui agissent à plus grandes distances.

D'après 14, on atteint une épaisseur $h = 12$ cm en $t = 10$ s, puis l'effet de confinement de la couche limite va jouer et changer la loi de mélange.

Initial

Away from the boundary layer $u \sim (h/H)v \ll v$, so ?? reduces to $-\frac{V^2}{r} - fV = -\frac{\partial}{\partial r}(\frac{p}{\rho_0})$, where $V = v(h)$. The variation of p in the boundary layer can be neglected, so that cyclogeostrophic balance determines the radial pressure gradient.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \bar{v} dz + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \int_0^h \bar{u} \bar{v} dz) + f \int_0^h \bar{u} dz = u_*^2 \cos \alpha \quad (44)$$

ou α est l'angle de la vitesse par rapport à l'azimuthale pres de la paroi, u_*^2 le module de la force de friction.

En estimant $\int_0^h \bar{v} dz = h\bar{v}$, cela donne

$$\frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} = u_*^2 \cos \alpha - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{v} \int_0^h \bar{u} dz) - f \int_0^h \bar{u} dz \quad (45)$$