ANALISI 1 - LEZIONE 111

Note Title 12/04/2017

$\boxed{\text{Proposizione}}$ Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione unif. cont. Allora f è sublineare, cioè esistono A e B reali tali che

$$|f(x)| \leq Ax + B \qquad \forall x \geq 0$$

Oss. ① Vale un risultato analogo se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con un qualunque $a \in \mathbb{R}$ (basta traslare)

② $f(x) = x^2$ è u.c. in $\mathbb{Z}$ e non è sublineare, quindi serve che l'insieme in cui f è u.c. sia una semiretta e non solo un insieme non limitato.

(per l'u.c. di x^2 in $\mathbb{Z}$ basta prendere $\delta = \frac{5}{6}$ ☺)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Mostriamo che $f(x) \leq Ax + B \quad \forall x \geq 0$ (l'altra è del tutto analoga).

Uso l'unif. cont. con $\varepsilon = 1$. Trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Pongo

$$B := \max\{f(x) : x \in [0, \delta]\} \qquad A := \frac{1}{\delta}$$

Dico che vale la stima di sopra.

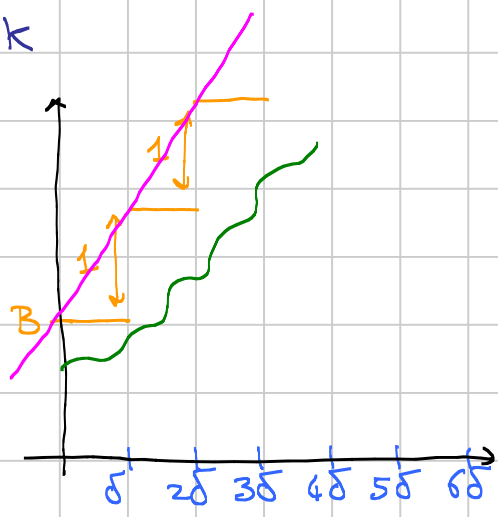
Dimostro preliminarmente che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\max\{f(x) : x \in [k\delta, (k+1)\delta]\} \leq B + k$$

Induzione: $k = 0$ è la def. di B

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$ Prendo $x \in [(k+1)\delta, (k+2)\delta]$ e osservo che

$$f(x) = \underbrace{f(x) - f(x-\delta)}_{\substack{\leq 1 \\ \text{per unif. cont.}}} + \underbrace{f(x-\delta)}_{\substack{\leq B+k \\ \text{per hp induttiva}}} \leq B + k + 1$$



A questo punto $f(x)$ sta sotto la retta che "unisce gli scalini" che ha equazione

$$\underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\text{coeff. ang.}} x + \underbrace{B}_{\text{int. asse } y}$$

Più formalmente, se $x \in [k\delta, (k+1)\delta]$ vale

$$f(x) \leq B + K \overset{?}{\leq} B + \frac{1}{\delta} x$$

Controlla la speranza $\quad K \overset{?}{\leq} \frac{1}{\delta} x \quad \Longleftrightarrow \delta k \leq x$ e questa è ok.

Allo stesso modo si dimostra che $f(x) \geq -B - Ax$ con $A = \frac{1}{\delta}$ e $-B = \min\{f(x) : x \in [0, \delta]\}$.

— o — o —

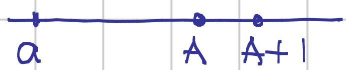
Prop. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : [\underbrace{a}_{\text{compreso}}, +\infty) \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f continua in $[a, +\infty)$
(ii) esiste

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora f è U.C. in $[a, +\infty)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $\varepsilon > 0$. Per definizione di limite, esiste $A \geq a$ tale che

$$|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \geq A$$



Ora nell'intervallo $[a, A]$ $f(x)$ è continua, quindi anche UC per Heine-Cantor. La stessa cosa vale in $[a, A+1]$, quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| \leq \delta \text{ e } x \text{ e } y \text{ in } [a, A+1], \text{ allora } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Dico che lo stesso δ, o meglio $\hat{\delta} := \min\{\delta, 1\}$ va bene su tutto $[a, +\infty)$. Perché?
Prendiamo 2 p.ti x e y in $[a, +\infty)$ con $|x-y| \leq \hat{\delta}$.
Allora ci sono solo 2 casi

- x e y stanno entrambi in $[a, A+1]$. Allora $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ per l'u.c. di f in $[a, A+1]$.
- x e y stanno entrambi in $[A, +\infty)$. Allora

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-\ell| + |\ell - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

per via del limite.

Non è possibile che $x < A$ e $y > A+1$ (o viceversa) perché $|x-y| \leq 1$ ed è il motivo per cui abbiamo fatto $\hat{\delta}$ come $\min\{\delta, 1\}$.

—o—o—

<u>Corollario</u> Siano $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni.
Supponiamo che
(i) f continua in $[a, +\infty)$,
(ii) g unif. cont. in $[a, +\infty)$,
(iii) f e g asintotiche, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0$$

Allora f è unif. cont. in $[a, +\infty)$.

$\boxed{\text{Dim}}$ $$\underbrace{f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{u.c.} \\ \text{per hp}}}{\boxed{g(x)}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{u.c. per la prop. prec.}}}{\boxed{f(x)-g(x)}}}_{\text{u.c. per somma}}$$

Corollario Continua in $[a,+\infty)$ + esiste asintoto obliquo $\Rightarrow$ unif. continua.

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. cont. in $[0,+\infty)$?

$\boxed{SI}$ È unif. continua in $[0,1]$ per H.C.
È unif cont. in $[1,+\infty)$ perché è lip.
A questo punto ci sono 2 vie per concludere
- usare un lemma di riincollamento (UC in $[a,b]$ e unif. cont. in $[b,+\infty)$ $\Rightarrow$ unif. cont. in $[a,+\infty)$ (stessa dim. lemma alla lez. 108)
- usare l'overlap, cioè U.C. in $[0,2]$ + U.C. in $[1,+\infty)$ $\Rightarrow$ U.C. in $[0,+\infty)$ come nella dim. dell'ultima prop.

Conseguenza: $f(x) = \sqrt{x}$ è U.C. in ogni insieme $B \subseteq [0,+\infty)$

Esempio 2 $f(x) = \dfrac{\sin(x^8)}{x}$ è U.C. in $(0,+\infty)$? E in $(0,1)$?

$\boxed{SI}$ Osservo che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, quindi posso estenderla a $[0,+\infty)$ ponendo $f(0)=0$ e conservando la continuità.
A questo punto osservo che l'estensione è continua in $[0,+\infty)$ e verifica

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

quindi per la prop. prec. è U.C. in $[0,+\infty)$, quindi a maggior ragione in $(0,+\infty)$ o in $(0,1)$

Oss. $f(x)$ NON è lip. in $[3,+\infty)$

(Basta fare la derivata e vedere che non è limitata).

Esempio 3 $\quad f(x) = x\log x$ è u.c. in $(0,1)$? in $(1,+\infty)$?

$\boxed{\text{NO in } (1,+\infty)}$ Non è sublineare ☹

Oss. f sublineare $\Rightarrow \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{SI in } (0,1)}$ Posso estenderla con continuità fino a $x=0$ ponendo $f(0)=0$.
A quel p.to per H.C. è u.c. in $[0,1]$, quindi a maggior ragione in $(0,1)$.

Esempio 4 $\quad f(x) = \sin\frac{1}{x}$ è u.c. in $[1,+\infty)$?
in $(0,1)$?

$\boxed{\text{SI in } [1,+\infty)}$ C'è solo l'imbarazzo della scelta
$\to$ è Lip
$\to$ continua + limite finito

$\boxed{\text{NO in } (0,1)}$ Se lo fosse, sarebbe estendibile alla chiusura $[0,1]$ come funzione continua, dunque dovrebbe avere limite per $x\to0^+$.

Esempio 5 $\quad f(x) = \cos(x^8)\sin\frac{1}{x}$ è u.c. in $(1,+\infty)$? in $(0,1)$?

$\boxed{\text{SI in } (1,+\infty)}$ Continua in $[1,+\infty)$ + limite finito
(N.B.: non è Lip.)

$\boxed{\text{NO in } (0,1)}$ Non è estendibile a $[0,1]$ perché il $\lim_{x\to0^+} f(x) = $ N.E.

— o — o —