Come sono fatti tutti i prod. scalari in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$?

Sono in corrispondenza con le matrici simmetrica

$\mathbb{R}^2$
$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = (x_1\ y_1)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2\end{pmatrix}$$
$$= (x_1\ y_1)\begin{pmatrix} ax_2+cy_2 \\ cx_2+by_2\end{pmatrix}$$
$$= ax_1x_2+by_1y_2+cx_1y_2+cx_2y_1$$

$\mathbb{R}^3$
$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = (x_1\ y_1\ z_1)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2\end{pmatrix}$$
$$= ax_1x_2+by_1y_2+cz_1z_2$$
$$+dx_1y_2+dx_2y_1$$
$$+ex_1z_2+ex_2z_1$$
$$+fy_1z_2+fz_1y_2$$

NO SIMMETRICO

è simmetrico, ma non è lineare

$\boxed{x_1y_1}$, x_1x_2, $\boxed{x_1y_2}$, $x_1y_2+x_2y_1$, $x_1x_2+y_1y_2$, $\boxed{x_1y_1+x_2y_2}$

① Quali sono prod. scalari
② Quando lo sono, matrice risp. base canonica
③ Quando lo sono, trovare base Sylvesterizzante

$\boxed{x_1y_1}$ NON è un prodotto scalare

prodotto delle prime due componenti del primo vettore
(non dipende dal secondo, non è simmetrico, non è lineare ...)

Esaminiamo $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$

Calcoliamo la matrice rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{matrix}$$

$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_1, e_2 \rangle = 1$

Calcoliamo la segnatura:

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Con gli autovalori

$$\text{Det}(B - \lambda Id) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)$$

$\lambda = 0, 1, -1$

Segnatura $= + - 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Det $B = 0$ (riga di tutti zeri)

Quindi almeno un autovalore è nullo.

$Tr = 0$

Quindi le possibilità sono: $\rightarrow + - 0$

$\rightarrow 0\,0\,0$, ma allora sarebbe la matrice nulla (perché sarebbe $\dim \ker = m_g(0) = m_a(0) = 3$)

Ora sappiamo che in una base opportuna il prodotto scalare ha come matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Come trovo la base?

Come v_3 uso una base del ker della matrice, ad esempio

$$v_3 = (0,0,1)$$

Come v_1 cerco un vettore che abbia prodotto scalare positivo con se stesso, ad esempio

$$v_1 = (1,1,0) \qquad \langle v_1, v_1 \rangle_B = 2$$

Ora come v_2 mi serve un vettore che sia $\perp$ a v_1 e a v_3

Impongo le condizioni

$$(1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x+y=0 \rightsquigarrow (1,-1,0) = v_2$$

Essere $\perp$ a v_3 è gratis :)

Osservo che $\langle v_2, v_2 \rangle_B = -2$.

A questo punto la base Sylvesterizzante è
UNA

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad v_3 = (0,0,1)$$

La verifica da fare sarebbe che

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M = (v_1 | v_2 | v_3)$$

NO SIMM

$$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{1} p(x)q(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{1} p(x)q'(x)\,dx,$$

$$\boxed{p(x)q(x),} \qquad p(0)q(0), \qquad p(1)q(0), \qquad p(0)q(1)+p(1)q(0), \qquad p'(0)q'(0).$$

NO NUMERO NO SIMM.

$p(x)$ e $q(x)$ sono in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

:)

→ INPUT 2 pol. OUTPUT numero

→ $\langle p,q \rangle = \langle q,p \rangle$

→ $\langle \lambda p,q \rangle = \lambda \langle p,q \rangle$

→ $\langle p_1+p_2, q \rangle = \langle p_1,q \rangle + \langle p_2,q \rangle$

Consideriamo $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$

Matrice rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$

$\langle 1,1\rangle = 1$ $\quad\langle x,x\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ $\quad\langle x^2,x^2\rangle = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$

$\langle 1,x\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ $\quad\langle 1,x^2\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ $\quad\langle x,x^2\rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

Matrice rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = B$$

Se volessi fare $\langle 1+x-2x^2,\ 3+4x+7x^2\rangle$ cosa dovrei fare?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Moltiplico e integro

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $\quad (1 \ \ 1 \ \ -2)\ B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Qual è la segnatura?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Sylvester, ad esempio 1-2-3, e viene +++

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Dico che il prod. scalare è def. positivo, cioè

$$\langle p,p\rangle = \int_0^1 p(x)^2 dx > 0 \quad \text{se} \quad p(x) \not\equiv 0$$

è un quadrato

In una opportuna base la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Una base Sylvesterizzante si può costruire a partire dalla canonica con GS

$v_1 = 1 \qquad v_2 = x \qquad v_3 = x^2$

$\hat{v}_1 = 1$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} \hat{v}_1 = x - \frac{\overbrace{\langle x, 1 \rangle_B}^{\frac{1}{2}}}{\underbrace{\langle 1, 1 \rangle_B}_{1}} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

Verifica : $\langle 1, x - \frac{1}{2} \rangle_B = 0$

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle_B}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle_B} \hat{v}_2 = \dots$$

— o — o —