# ANALISI 1 – LEZIONE 50

Note Title 30/11/2024

**Teoremi di monotonia** Legami tra monotonia e segno della derivata prima.

**MONOTONIA 1** (Segno della derivata in un punto)

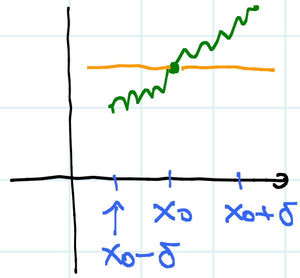
Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta > 0$, e sia $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f'(x_0) > 0$ (esiste ed è positiva).

Allora esiste $\delta_0 \in (0, \delta)$ tale che

$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_0)$$

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0)$$




(Un po' a dx di $x_0$ la funzione di più
" " " sx " " di meno)

Achtung! Non ho detto che $f(x)$ è monotona in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

**Dim** Ricordiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f'(x_0) > 0$, allora per le solite permanenze del segno, esiste $\delta_0 > 0$ t.c.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \qquad \forall h \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$$

Quando $h > 0$, vuol dire che $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$ per $h \in (0, \delta_0)$.

Quando $h < 0$, vuol dire che $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$, cioè $f(x_0-h) < f(x_0)$ per $h \in (-\delta_0, 0)$.

— o — o —

MONOTONIA 2 (Segno della derivata in un intervallo)

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in tutto l'intervallo.

Allora valgono le seguenti implicazioni

$$\boxed{f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f \text{ è debolm. cresc. in } (a,b)}$$

$$\boxed{f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f \text{ è strett. cresc. in } (a,b)}$$

Achtung! L'implicazione mancante è falsa

$$\boxed{f \text{ strett. cresc. } \overset{\text{FALSA}}{\implies} f'(x) > 0 \text{ in } (a,b)}$$

Esempio: $f(x) = x^3$ è strett. cresc., ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

Resta vero che

$$f \text{ strett. cresc. in } (a,b) \implies f \text{ debolm. cresc. in } (a,b)$$
$$\implies f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Teorema misterioso (Teorema di Lagrange)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

↑ intervallo con estremi

Supponiamo che

(i) $f$ continua in $[a,b]$

(ii) $f$ derivabile in $(a,b)$ (se è derivabile in $[a,b]$, ancora meglio)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)}$$

## Dim di monotonia 2, usando Lagrange


$\boxed{f' \geq 0 \Rightarrow \text{debolm. cresc.}}$ Prendo due punti qualunque $c$ e $d$ in $(a,b)$, con $c<d$.

Applico Lagrange nell'intervallo $[c,d]$. Ottengo

$$f(d)-f(c) = \overbrace{(d-c)}^{>0} \cdot \overbrace{f'(s)}^{\geq 0}$$

$s$: punto misterioso in $(c,d)$

Quindi $f(d)-f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$

$\boxed{f' > 0 \Rightarrow \text{strett. cresc.}}$ Come sopra

$$f(d)-f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(s)}_{>0} > 0 \rightsquigarrow f(d) > f(c)$$

$\boxed{\text{debolm. cresc.} \Rightarrow f' \geq 0}$ Per ogni $x_0 \in (a,b)$ vale

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\geq 0}}{h} \geq 0$$

$h \to 0^+$: lo faccio solo da dx (potrei anche da sx)

$h$: segno +

$\geq 0$ perché è limite di frazioni $\geq 0$

(Da sx sarebbe stato $\frac{\leq 0}{<0}$ e quindi ancora frazione $\geq 0$)

<u>Oss.</u> Nell'ultimo caso, se $f$ era strett. cresc. il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ era strett. pos. per ogni $h \neq 0$ ammissibile

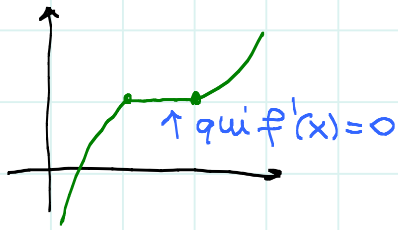
Tuttavia $\boxed{\text{LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE}}$

Classico: $\frac{1}{x^2} > 0$ sempre, ma $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

**MONOTONIA 3** (Annullamento sporadico)

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in $(a,b)$.
Supponiamo che
(i) $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in(a,b)$
(ii) $f'(x)$ non si annulla in un intero intervallo
(annullamento sporadico, cioè $f'(x)$ ha come soluzione dei punti, magari anche infiniti, ma non un intero intervallo)
Allora $f$ è strett. monotona.

**Dim** Da monotonia 2 sappiamo già che $f$ è debolm. cresc.
Se non fosse anche strett. cresc., per forza ci sarebbero dei tratti piatti, ma allora in tutto quell'intervallo $f'(x)=0$




Esempio 1 Consideriamo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=x+\sin x$$

Dimostrare che $f$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile!

Per la surgettività basta osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

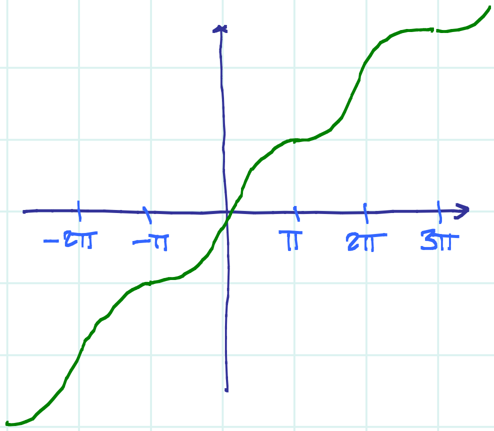
e poi si chiude per il teorema dei valori intermedi.
[La continuità segue dal solito meta-teorema ...]

Per l'iniettività dimostriamo che $f$ è strett. cresc.

$$f'(x)=1+\cos x$$

Ora $1+\cos x\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e questo darebbe la debole crescenza.
Dove si annulla $f'(x)$? $f'(x)=0 \iff \cos x=-1 \iff x=\pi+2k\pi$
$\Rightarrow$ annullamento sporadico $\Rightarrow$ $f$ è strett. cresc. per monotonia 3.

Il grafico è grosso modo come a destra




Esempio 2 Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ l'equazione

$$x - \arctan x = \lambda$$

ha esattamente una soluz. $x > 0$.

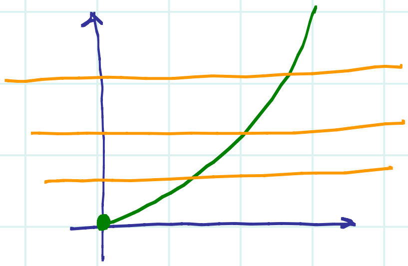
Analogamente: $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva

Surgettiva: segue da $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Iniettiva: segue da strett. cresc. perché

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x > 0$$

e quindi posso usare monotonia 2.



— o — o —