A.A. 2016/2017
Corso di Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 – LEZIONE 094

Note Title 22/03/2017

LIMINF e LIMSUP DI SUCCESSIONI

Sia a_n una successione

Def. di Limsup

① Se a_n NON è limitata superiormente, allora per def.

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

② Se a_n è limitata superiormente (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$) allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso porre

$$S_n := \sup\{a_k : k \geq n\} \in \mathbb{R}$$

Osservo che $S_{n+1} \leq S_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (sto facendo il sup su meno roba), quindi ammette limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si pone allora

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

— o — o —

Def. di liminf

① Se a_n non è limitata inferiormente, allora per def.

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

succ. deb. cresc.

② Se a_n è lim. inf., allora $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} I_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$.

Oss. 1 liminf e limsup esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}}$

Oss. 2 Per ogni successione vale

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n \leq \limsup_{n \to +\infty} a_n \quad (\text{disug. in } \overline{\mathbb{R}})$$

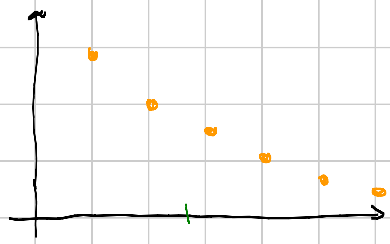
Più avanti vedremo che vale il segno di $=$ se e solo se esiste il limite.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\quad I_n \leq S_n \quad (\inf \leq \sup)$
Passando al lim. si ha la tesi.

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$S_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = 1 \longrightarrow 1 = \limsup$$
$$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = -1 \longrightarrow -1 = \liminf$$

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$. Allora



$$S_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = \frac{1}{n}$$

$$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = 0$$

Quindi $\limsup \frac{1}{n} = \lim S_n = 0$

$\liminf \frac{1}{n} = \lim I_n = 0$

Esempio 3 $a_n = 2^{(-3)^n}$. Allora

a_n non è lim. sup (basta vedere sui pari) $\Rightarrow \limsup_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

$I_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (basta vedere sui dispari) $\Rightarrow \liminf_{n \to +\infty} a_n = 0$.

CARATTERIZZAZIONE DEL LIMSUP

① $\limsup_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ frequentemente

② $\limsup_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff$ succedono due cose $\forall \varepsilon > 0$

(i) $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente
(ii) $a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

③ $\limsup_{n \to +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M$ definitivamente
$\iff \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

Dim

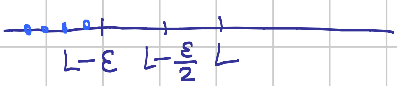
① $\limsup = +\infty \iff a_n$ non è limitata superiormente
$\iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n > M$ almeno una volta
in realtà sono ∞ volte perché altrimenti la successione avrebbe un massimo, ma allora non supererebbe mai i valori sopra il max.

② Sappiamo che $L = \lim S_n$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$L - \frac{\varepsilon}{2} \leq S_n \leq L + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{definitivamente}$$

Allora $a_n \leq S_n \leq L + \frac{\varepsilon}{2} \leq L + \varepsilon$ definitivamente, il che dimostra (i).

Per la (ii), supponiamo per assurdo che $a_n \geq L - \varepsilon$ solo un numero finito di volte. Allora da un certo p.to in poi si avrà che $a_n \leq L - \varepsilon$, da cui $S_n \leq L - \varepsilon$, il che va contro il fatto che $S_n \geq L - \frac{\varepsilon}{2}$ definitiv.



③ Se $\limsup a_n = -\infty$, allora $S_n \to -\infty$, quindi $\forall M \in \mathbb{R}$ vale $S_n \le M$ definitiv., ma

$a_n \le S_n$, quindi $a_n \le M$.

— o — o —

$\boxed{\text{CARATTERIZZAZIONE DEL LIMINF}}$

① $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ vale $a_n \le M$ frequent.

② $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ valgono 2 cose

(i) $a_n \le \ell + \varepsilon$ frequentemente
(ii) $a_n \ge \ell - \varepsilon$ definitivamente

③ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ vale $a_n \ge M$ definitiv.
$\iff a_n \to +\infty$

— o — o —

Prop. a_n ammette limite $\iff \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$

Ovviamente in tal caso il valore comune è il limite.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ abbastanza semplice (ovvia se $a_n \to +\infty$ o $a_n \to -\infty$)

Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $\forall \varepsilon > 0$ vale

$\ell - \varepsilon \le a_n \le \ell + \varepsilon$ definitiv.

ma allora

$\ell - \varepsilon \le I_n \le S_n \le \ell + \varepsilon$ definitiv.

che è come dire che $I_n \to \ell$ ed $S_n \to \ell$

$\boxed{\Leftarrow}$ Se liminf e limsup sono $\pm\infty$, siamo nel caso della caratterizzazione (quando limsup se $-\infty$, quando liminf se sono $+\infty$). Supponiamo ora che

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora per la caratterizzazione vale

$$\ell - \varepsilon \underset{\uparrow}{\leq} a_n \underset{\uparrow}{\leq} \ell + \varepsilon \qquad \text{definitiv.}$$

per merito del liminf — per merito del limsup

che è quello che serve nella def. di limite.

— o — o —

<u>Teorema del confronto</u> Supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitiv.
Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \qquad \limsup a_n \leq \limsup b_n$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $S_n^a \leq S_n^b$ $\qquad S_n^a = \sup\{a_k : k \geq n\}$

$\downarrow \qquad \downarrow$ $\qquad S_n^b = \sup\{b_k : k \geq n\}$

$\limsup a_n \leq \limsup b_n$

Stessa cosa per gli inf.

<u>Teorema dei carabinieri</u> Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitiv.
Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto}}}{\leq} \liminf_{n\to+\infty} b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ovvia}}}{\leq} \limsup_{n\to+\infty} b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto}}}{\leq} \limsup_{n\to+\infty} c_n$$

<u>Oss.</u> Se $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$ (stesso ℓ reale, come nel caso classico, allora i 2 laterali sono uguali, ma allora i 2 centrali sono uguali, quindi $b_n \to \ell$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 095

Note Title 22/03/2017

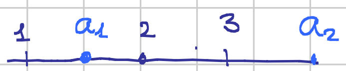
<u>Proposizione</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.
Allora esiste una successione $\{a_n\} \subseteq A$ t.c.

$$a_n \to \sup A$$

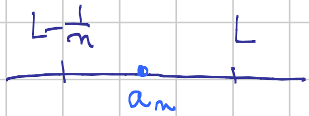
Ne esiste anche una che tende all'inf.

<u>Dim.</u> Ci sono sempre 2 casi

① $\sup A = +\infty$. Per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ t.c. $a \geq M$
Me la gioco con $M = n$ e trovo un elemento $a \in A$ tale che $a \geq n$. Lo chiamo a_n
Così ho la succ. che volevo.



② $\sup A = L \in \mathbb{R}$.
Per la caratt. del sup vale che
(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$.
Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e ottengo

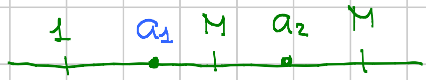


$$L - \frac{1}{n} \leq a_n \leq L$$

Per i carabinieri $a_n \to L$, come richiesto.

<u>Esercizio</u> Dimostrare che si può fare in modo che a_n sia debolmente crescente (strett. se $\sup = +\infty$).

<u>Idea</u> Uso $M = 1$



<u>Oss.</u> Caso bastardo : $A = \{28\}$
Vedere come questo complica le dimostrazioni

<u>Oss.</u> Se $\sup A \notin A$, allora posso fare a_n strett. cresc.

Proposizione Sia a_n una successione, e sia a_{i_n} una sua sottosuccessione. Allora

$$\boxed{\liminf a_n \leq \liminf a_{i_n} \leq \limsup a_{i_n} \leq \limsup a_n}$$

Se a_n ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$, allora i 2 laterali coincidono, ma allora coincidono anche i centrali.

Dim Dim. la disug. di destra. Pongo

$$S_n := \sup\{a_k : k \geq n\} \qquad \hat{S}_n := \sup\{a_{i_k} : k \geq n\}$$

Allora $\hat{S}_n \leq S_n$

sto facendo il sup su meno roba, cioè solo sulla s.succ.

Quando $n \to +\infty$ si conserva la disug. e si ha la tesi.

— o — o —

Corollario Se a_n è una successione e a_{i_n} è una sottosucc. che ha limite, allora

$$\liminf_{n \to +\infty} a_n \leq \lim_{n \to +\infty} a_{i_n} \leq \limsup_{n \to +\infty} a_n$$

— o — o —

MAXLIM e MINLIM

Sia a_n una successione. Considero tutte le sottosucc. che hanno limite. Considero l'insieme A costituito da tutti i possibili limiti di sottosucc. che hanno limite. Allora esistono

$$\max A = \operatorname{maxlim} a_n \qquad \min A = \operatorname{minlim} a_n$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Max lim = liminsup

min lim = liminf

<u>Oss.</u> La parte facile è che

$$\liminf \leq \min\lim \leq \max\lim \leq \limsup$$

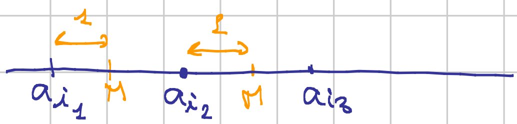
(segue dal corollario di prima)

$\boxed{\text{Dim che Max lim} = \limsup.}$ Devo dimostrare che per ogni succ. a_n esiste una sottosucc. a_{i_n} tale che

$$\lim_{n \to +\infty} a_{i_n} = \limsup_{n \to +\infty} a_n$$

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ tutta $a_n \to -\infty$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.



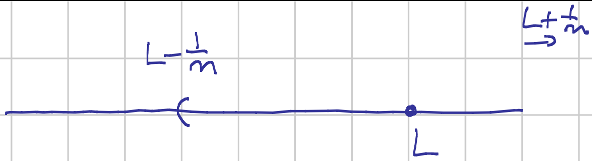
- Scelgo a_{i_1} a caso
- Supponendo di aver già scelto $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$, scelgo l'indice i_{m+1} in maniera tale che

$$a_{i_{m+1}} \geq \underbrace{a_{i_m} + 1}_{M} \qquad \text{e} \qquad i_{m+1} > i_m$$

(posso perché M viene superato ∞ volte, quindi almeno una volta con indice grande quanto mi serve)

Si dimostra facilmente che $a_{i_m} \geq a_{i_1} + m$ da cui il limite è $+\infty$.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ $\limsup = L \in \mathbb{R}$



Per ogni $n \geq 1$ uso la caratt. con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. So che esistono ∞ indici per cui

$$L - \frac{1}{n} \leq a_k \leq L + \frac{1}{n}$$

Quindi posso procedere in questo modo

- Scelgo a_{i_1} in modo tale che $\quad L - 1 \leq a_{i_1} \leq L + 1$
- Supponendo di aver già scelto $i_1, \ldots, i_n$, scelgo i_{n+1} in maniera tale che

$$i_{n+1} > i_n \qquad L - \frac{1}{n+1} \leq a_{i_{n+1}} \leq L + \frac{1}{n+1}$$

(posso perché ho ∞ infiniti indici che soddisfano la seconda)

Per i carabinieri $a_{i_n} \to L$.

<u>Conseguenza operativa</u>: come dimostro che $\limsup a_n = L$?

SLOGAN: $\to$ disuguaglianza dall'alto
$\to$ sottosuccessione dal basso.

<u>Esempio</u> $\qquad a_n = \dfrac{3(-1)^n n + \sqrt{n} + \arctan n}{2 + (-1)^n \sqrt{n} + n}$

$\limsup a_n = 3 \qquad \liminf a_n = -3$

→ Disuguaglianza dall'alto

$$a_n \leq \boxed{\frac{3n + \sqrt{n} + \arctan n}{2 - \sqrt{n} + n}}$$

$\downarrow$

3

Quindi $\limsup a_n \leq 3$

→ Sottosucc. dal basso: trovare una s.succ. con limite ≥ 3

Basta prendere $\quad a_{2n} = \dfrac{6n + \sqrt{2n} + \arctan(2n)}{2 - \sqrt{2n} + 2n} \longrightarrow 3$

Questo dice che $\quad \max\lim a_n \geq 3$

Per il liminf lo slogan è

→ Disuguaglianza dal basso

→ Sottosucc. dall'alto.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 096

Note Title 24/03/2017

$\boxed{\text{Radice}}$ (In versione liminf / limsup)

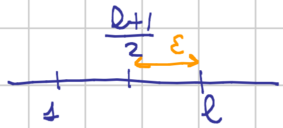
Sia $a_n \geq 0$ definitivamente. Allora

- Se $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ allora $a_n \to +\infty$ (e $\sum a_n = +\infty$)
- Se $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ allora $a_n \to 0$ (e $\sum a_n$ conv.)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo di essere nel 1° caso

$\ell = \liminf \sqrt[n]{a_n}$.

Per la caratt. avremo che

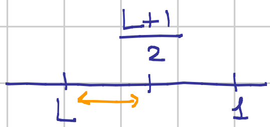


$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \quad \text{definitiv.} \quad \text{quindi}$$

$$\underbrace{a_n}_{+\infty} \geq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{+\infty} \text{ definitiv.}$$

Nel secondo caso poniamo $L = \limsup \sqrt[n]{a_n}$

Allora definitiv.



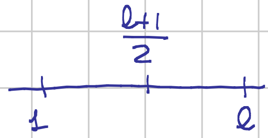
$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2} \quad \text{definitiv. da cui}$$

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^n \quad \text{Solita conclusione.}$$

$\boxed{\text{Rapporto}}$ Supponiamo $a_n > 0$ definitiv. Allora

- $\liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies a_n \to +\infty$
- $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies a_n \to 0$

Dim. Facciamo un pezzo del 1° caso. Sia $\ell = \liminf$.
Allora



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \quad \text{definitiv.}$$

Detto meglio, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \quad \forall n \geq n_0$

cioè $a_{n+1} \geq \frac{\ell+1}{2}\, a_n \quad \forall n \geq n_0$ da cui per induzione

$$a_{n_0+k} \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$ o equivalentemente

$$a_n \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0}$$ da cui la tesi per confronto.

L'altro caso è analogo

— o — o —

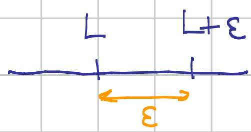
Rapporto → radice Sia $a_n > 0$ definitivamente. Allora

$$\boxed{\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Oss. Come sempre, se il rapporto ha limite, allora i due laterali sono uguali, dunque i due centrali sono uguali, dunque la radice n-esima ha limite (lo stesso limite).

Dim. La disug. centrale è ovvia. Dimostro quella di dx (quella di sx è analoga).
Pongo

$$L := \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$



Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratt.

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon \qquad \forall n \geq n_0 \qquad \text{cioè} \qquad a_{n+1} \leq (L+\varepsilon)\, a_n$$

da cui per induzione

$$a_n \leq a_{n_0} (L+\varepsilon)^{n-n_0} \qquad \forall n \geq n_0$$

o ancora meglio $\quad a_n \leq (L+\varepsilon)^n \dfrac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}$

Facendo la radice ottengo

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon) \boxed{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}}} \to 1 \text{ perché } \sqrt[n]{\text{costante}} \to 1$$

(con Bernoulli)

Faccio limsup a dx e sx:

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon)$$

Essendo vera per ogni $\varepsilon > 0$, sarà $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L$.

— o — o —

Teoremi algebrici

- <u>Prodotto per una costante</u> Sia a_n una successione.

→ se $\lambda > 0$, allora

$$\limsup (\lambda a_n) = \lambda \limsup a_n \qquad (\text{idem per liminf})$$

→ se $\lambda < 0$, allora

$$\left.\begin{aligned} \limsup (\lambda a_n) &= \lambda \liminf a_n \\ \liminf (\lambda a_n) &= \lambda \limsup a_n \end{aligned}\right\} \text{ due esercizi}$$

Esempio $a_n = 5 + (-1)^n$ $\limsup = 6$ $\liminf = 4$

$-a_n = -5 - (-1)^n$ $\limsup = -4$ $\liminf = -6$

- Somma di due successioni

Il limsup della somma non è in generale la somma dei limsup (idem per il liminf)

Esempio: $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

$b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

In questo caso

$\lim (a_n+b_n) = 1$, ma $\limsup a_n + \limsup b_n = 2$

$\liminf a_n + \liminf b_n = 0$

Siano a_n e b_n due successioni. Allora vale (quasi sempre)

$$\boxed{\begin{aligned}&\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n+b_n) \leq \\ &\leq \limsup (a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n\end{aligned}}$$

TRANNE quando almeno ad uno dei laterali ci sono $+\infty - \infty$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono tanti casi da fare, facciamo quello in cui a dx non ci sono $\pm\infty$. Poniamo

$$S_n^a := \sup \{a_k : k \geq n\} \qquad S_n^b := \sup \{b_k : k \geq n\}$$

$$S_n^c := \sup \{a_k + b_k : k \geq n\}$$

Allora vale $S_n^c \leq \underbrace{S_n^a + S_n^b}$

↓ è un maggiorante per tutti gli a_k con $k \geq n$

Quindi per confronto tra limiti

$$\limsup (a_n+b_n) = \lim S_n^c \leq \lim S_n^a + \lim S_n^b$$

limite della somma

$$= \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Tutti gli altri casi sono analoghi.

— o — o —

- Caso speciale del teorema della somma

Se b_n ammette limite, allora (TRANNE nei casi $\pm\infty$)

$$\limsup (a_n+b_n) = \limsup a_n + \lim (\sup)\, b_n$$

$$\liminf (a_n+b_n) = \liminf a_n + \lim (\inf)\, b_n$$

Brutalmente: le oscillazioni di (a_n+b_n) sono in questo caso dovute solo alle oscillazioni di a_n

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamola per il liminf (una volta tanto ☺)

Sappiamo che vale $\boxed{\geq}$ per teo. precedente. (disug. dal basso)
Per i discorsi con il MINLIM, sappiamo che esiste una sottosucc. a_{n_k} t.c.

$$a_{n_k} \longrightarrow \liminf a_n$$

Allora $\underbrace{a_{n_k}}_{\liminf} + \underbrace{b_{n_k}}_{\lim} \longrightarrow \liminf a_n + \lim b_n$

Quindi $\underset{= \liminf}{\operatorname{minlim}} (a_n+b_n) \boxed{\leq} \liminf a_n + \lim b_n$

Oss. Vale l'uguale nel teorema della somma se esiste una sottosuccessione comune (la stessa per a_n e b_n) che realizza il liminf / limsup.

Oss. Non pensare nemmeno ad un teorema algebrico per il prodotto, a meno che non sia tutto positivo $\boxed{(a_n > 0,\ b_n > 0)}$.
In tal caso funziona allo stesso modo

$$\boxed{\limsup (a_n b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n}$$

TRANNE ... con $=$ quando uno dei due è limite.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 097

Note Title 24/03/2017

Liminf / limsup di funzioni

Abbastanza analogo al caso delle successioni.

Caso $x \to +\infty$

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e supponiamo che $\sup D = +\infty$

Voglio definire

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x)$$

Distinguo due casi

① Se $\forall R \in \mathbb{R}$ si ha che $\sup\{f(x) : x \in D, x \geq R\} = +\infty$, allora si pone

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

② Se $\exists R_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\sup\{f(x) : x \in D, x \geq R_0\} \in \mathbb{R}$, allora

$$S_R := \sup\{f(x) : x \in D, x \geq R\}$$

è finito, cioè $\in \mathbb{R}$, per ogni $R \geq R_0$, anzi S_R è una funzione decrescente (debolm) di R, quindi ha limite in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ quando $R \to +\infty$.

Si pone allora

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{R \to +\infty} S_R \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Esempio $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \to S_R = \sup\{\sin x : x \geq R\} = 1$

Quindi

$$\limsup_{x \to +\infty} \sin x = 1$$

Il liminf si definisce allo stesso modo a partire da

$$I_R := \inf \{ f(x) : x \in D, \ x \geq R \}$$

— o — o —

Se voglio definire limsup/liminf per $x \to -\infty$, faccio

$$S_R := \sup \{ f(x) : x \in D, \ x \leq R \}$$
$$I_R := \inf \qquad \text{"}$$

e poi faccio

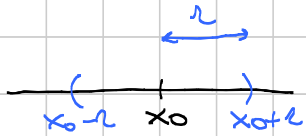
$$\lim_{R \to -\infty} S_R \qquad\qquad \lim_{R \to -\infty} I_R$$

— o — o —

<u>Caso finito</u>: liminf / limsup per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$.

Definiamo il limsup distinguendo 2 casi

<u>Caso 1</u> Se $\forall r > 0$ (quelli interessanti sono quelli vicini a 0)



vale che

$$\sup \{ f(x) : x \in [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \} = +\infty$$

allora si pone

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

<u>Caso 2</u> Se $\exists r_0 > 0$ tale che sup di prima $\in \mathbb{R}$, allora si pone

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{r \to 0^+} \sup \{ f(x) : x \in [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \}$$

più r è piccolo, più il sup è piccolo perché è fatto su un insieme più piccolo.

Discorso analogo vale per il liminf.

— o — o —

$\boxed{\text{MAXLIM e MINLIM di funzioni}}$

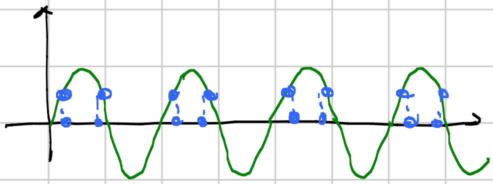
Sia $f: D \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ il punto in cui stiamo facendo liminf / limsup.

Consideriamo tutte le succ. $x_n \to x_0$ per cui $f(x_n)$ ha limite. Tra tutti i possibili limiti di $f(x_n)$, ce ne sarà uno più grande ed uno più piccolo (fatto non ovvio). Quello + grande è max lim, quello + piccolo è il minlim.

<u>Esempio</u> $f(x) = \sin x$ $\quad x \to +\infty$

$x_n \to +\infty$

$\sin(x_n)$ ha limite



In questo caso i possibili limiti sono tutti i numeri in $[-1, 1]$. Quindi $\max\lim = 1$ e $\min\lim = -1$.

<u>Teorema</u> $\quad$ Max lim = limsup

$\quad$ min lim = liminf.

$\boxed{\text{Dim}}$ Tantissimi casi, sostanzialmente quasi tutti uguali. Facciamone uno significativo:

$$\boxed{x_0 \in \mathbb{R} \qquad \limsup_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}}$$

Devo dimostrare due cose:

① Se $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \to \ell$, allora $\ell \leq L$

(maxlim ≤ limsup)

② $\exists\ x_n \to x_0$ tale che $f(x_n) \to L$ $\quad$ (maxlim ≥ limsup)

Dim ① Dalla definizione di limsup sappiamo che

$$\sup\{f(x) : x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap \ldots\} \leq L + \varepsilon$$

per r abbastanza piccolo

Definitivamente

$$x_n \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap \ldots$$

quindi definitiv.

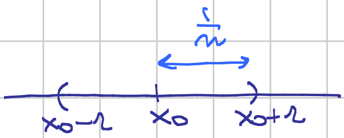
$$f(x_n) \leq L + \varepsilon$$

Passando al limite

$$f(x_n) \longrightarrow \ell \leq L + \varepsilon$$ per ogni $\varepsilon > 0$, quindi $\ell \leq L$.

Dim ② Devo trovare $x_n \to x_0$ tale che $f(x_n) \to L$.

Poiché $\sup\{f(x) : x \in (x_0 - r, x_0 + r)\} \to L$ per ogni $\varepsilon > 0$ avremo che



$$\sup\{f(x) : \ldots\} \geq L - \varepsilon$$ per ogni r abb. piccolo.

Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $r = \frac{1}{n}$

Trovo $x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ tale che $L + \frac{1}{n} \geq f(x_n) \geq L - \frac{1}{n}$

A questo punto è fatta perché $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \to L$ e questo fornisce la succ. voluta.

— o — o —

Come calcolare un limsup di funzioni

① Disuguaglianza dall'alto
② Successione dal basso

scambiati per il liminf

Esempio $f(x) = \sin x \cdot \arctan x$

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \limsup_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Dim. il limsup

① $f(x) \leq \arctan x$, quindi

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) \leq \limsup_{x\to+\infty} \arctan x = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

② Successione dal basso. Serve $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to \frac{\pi}{2}$

Prendo $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ e $f(x_n) \to \frac{\pi}{2}$

Dim. il liminf

① Uso $f(x) \geq -\arctan x \to -\frac{\pi}{2}$

② Uso $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Esempio 2 $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 \frac{1}{x}$ $\qquad x \to 0^+$

$$\liminf_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \limsup_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Dim limsup ① $f(x) \leq 1 \Rightarrow \limsup_{x\to 0^+} f(x) \leq 1$

② $x_n = \boxed{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} \to 0^+$; $f(x_n) = \cos \frac{1}{\cdots} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$ (con $\sin^2(\dots) = 1$)

$= \cos \frac{1}{\cdots} \to 1$

Dim. liminf ① $f(x) \geq 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ ② $x_n = \frac{1}{\pi n}$

Esempio 3 $\quad f(x) = \sin x \cdot \cos^2 \frac{1}{x} \qquad x \to 0^+$

In questo caso esiste il limite perché

$$\lim_{x\to 0^+} |f(x)| \leq \lim_{x \to 0^+} |\sin x| = 0$$

Esempio 4 $\quad f(x) = \sin x \cdot \cos^2 \frac{1}{x} \qquad x \to \boxed{-\infty}$

$\boxed{\text{LIMSUP} = 1}$ (1) $f(x) \leq \underbrace{\cos^2 \frac{1}{x}}_{\downarrow \, 1}$

(2) $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ NO !!! Deve tendere a $-\infty$

$x_n = \frac{\pi}{2} - 2\pi n \to -\infty$ e $f(x_n) \to 1$.

$\boxed{\text{LIMINF} = -1}$ Analogo.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 098

Note Title 28/03/2017

Linguaggio topologico sulla retta reale

Ambientazione: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme.

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto. Si dice che

1 – x_0 è interno ad A se $\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A}$

2 – x_0 è aderente ad A se $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset}$

3 – x_0 è sulla frontiera di A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che

$$\boxed{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset}$$

4 – x_0 è isolato in A se $\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \{x_0\}}$

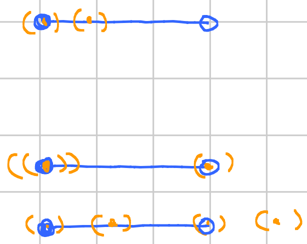
5 – x_0 è un punto di accumulazione di A se

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset}$$

Def. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si pone

1 – Int (A) (detto anche $\mathring{A}$) l'insieme dei p.ti interni (parte interna)
2 – Clos (A) (" " $\bar{A}$) l'insieme dei p.ti aderenti (chiusura)
3 – ∂A (\partial A) la frontiera di A
4 – Isol (A) l'insieme dei p.ti isolati
5 – $D(A)$ l'insieme derivato di A, costituito da tutti i punti di accumulazione per A.

Esempio 1 $\quad A = [0,3)$



$\text{Int}(A) = (0,3)$

$\text{Clos}(A) = [0,3]$

$\partial A = \{0,3\}$

$\text{Isol}(A) = \emptyset$

$D(A) = [0,3]$

Esempio 2 $\quad A = (0,2) \cup (2,3] \cup \{4\}$

$\text{Int}(A) = (0,2) \cup (2,3)$

$\text{Clos}(A) = [0,3] \cup \{4\}$

$\partial(A) = \{0,2,3,4\}$

$\text{Isol}(A) = \{4\}$

$D(A) = [0,3]$

Esempio 3 $\quad A = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \text{ intero} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

$\text{Int}(A) = \emptyset$

$\text{Clos}(A) = A \cup \{0\}$ ← ogni intorn. $(-\varepsilon,\varepsilon)$ tocca A

$\partial A = A \cup \{0\}$

$\text{Isol}(A) = A$

$D(A) = \{0\}$ ← ogni intorno $(-\varepsilon,\varepsilon)$ tocca A in un p.to diverso da 0 stesso.

Oss.

- Ha senso fare la derivata di una funzione nei p.ti interni ad A

- Ha senso fare i limiti di una $f: A \to \mathbb{R}$ per $x \to x_0 \in D(A)$

Proprietà banali (esercizi)

① $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \text{Clos}(A)$

② $\text{Isol}(A) \subseteq A$

③ $\partial A = \text{Clos}(A) \setminus \text{Int}(A)$

④ $\text{Clos}(A) = D(A) \cup \text{Isol}(A)$ e $D(A) \cap \text{Isol}(A) = \emptyset$

⑤ $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \text{Clos}(A)$

$\text{Clos}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \text{Int}(A)$

⑥ $\partial A = \text{Clos}(A) \cap \text{Clos}(\mathbb{R} \setminus A)$

Unioni e intersezioni

① L'unione qualunque di aperti è aperto

② L'intersezione qualunque di chiusi è chiusa

Def. (che andrebbe prima)

- Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se $A = \text{Int}(A)$
- " " " " " chiuso se $A = \text{Clos}(A)$

Famiglie di insiemi : $\{A_i\}_{i \in I}$ ⇝ I è un insieme di indici e per ogni $i \in I$ si ha che $A_i \subseteq \mathbb{R}$

Esempi $\{(n, n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ = famiglia numerabile di intervalli

$\{(x, x+1)\}_{\substack{x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}}}$ = famiglia di insiemi con indici reali

$\boxed{\text{Dim ①}}$ Siano A_i aperti per ogni $i \in I$ e sia $A := \bigcup_{i \in I} A_i$

Devo dim. che A è aperto, cioè che

$$\forall x_0 \in A \ \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$$

Essendo $x_0 \in A$, esiste $i_0 \in I$ t.c. $x_0 \in A_{i_0}$.
Essendo A_{i_0} aperto, esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A_{i_0} \subseteq A$.

$\boxed{\text{Dim. ②}}$ Siano A_i chiusi per ogni $i \in I$ e sia $A := \bigcap_{i \in I} A_i$

Devo dim. che A è chiuso, cioè che ogni p.to aderente ad A sta a sua volta in A.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to aderente ad A.
Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\emptyset \neq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \subseteq \underbrace{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A_i}_{\text{quindi questo è } \neq \emptyset} \qquad \forall i \in I$$

quindi x_0 è aderente a A_i per ogni $i \in I$, quindi $x_0 \in \text{Clos}(A_i)$ ma $\text{Clos}(A_i) = A_i$ perché A_i è chiuso, quindi $x_0 \in A_i$ $\forall i \in I$ e dunque $x_0 \in A$.

— o — o —

Achtung! ① L'unione qualunque di chiusi può non essere chiusa

$A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ sono chiusi, ma la loro unione è $(0, 1]$

② L'intersezione qualunque di aperti può non essere aperta

$A_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$ sono aperti, ma la loro intersezione è $[1, 2]$

Esercizio → Unione finita di chiusi è chiusa
→ Intersezione finita di aperti è aperta.
basta farlo per due, poi induzione

Esercizi (hard) [A, Int (A), Clos (Int (A)), Int (Clos (Int (A))), ...
A, Clos (A), Int (Clos (A)), ...

[A, D(A), D(D(A)), D(D(D(A))), ...] [A, ∂(A), ∂(∂(A)), ...]
Quanti insiemi diversi posso ottenere nei vari casi.

ANALISI 1 — LEZIONE 099

Note Title 28/03/2017

Caratterizzazione della chiusura con le successioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{x_0 \in \mathrm{Clos}(A) \iff \exists \{x_n\} \subseteq A \text{ t.c. } x_n \to x_0}$$

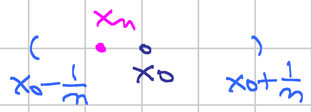
(Brutalmente: x_0 è aderente ad A se e solo se è il limite di una succ. di punti di A)

$\boxed{\text{Dim}}$ $\boxed{\Leftarrow}$ Sia $x_n \to x_0$ con $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dico che $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

↑ per def. di limite questo intervallo contiene x_n per n abbastanza grande, quindi contiene el. di A.

$\boxed{\Rightarrow}$ Per ipotesi $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$, cioè $\forall \varepsilon > 0$ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
Voglio trovare una succ. x_n in A con $x_n \to x_0$.
Mi gioco la def. con $\varepsilon = \frac{1}{n}$
Ottengo un elemento



$$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A$$

È ovvio che $x_n \to x_0$ per i carabinieri.

Oss. Non è detto, ma non serve, che gli x_n siano tutti distinti

Posso sostituire $\frac{1}{n}$ con una qualunque succ. che tende a 0.

Topologia relativa Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme e sia $B \subseteq A$ un altro sottoinsieme

Def. (solo qualche caso)

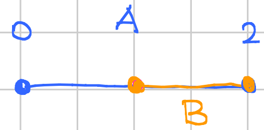
1 - Dico che $x_0 \in B$ è un p.to interno di B, relativamente ad A, se

$$\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \subseteq B}$$

Indico con $\mathrm{Int}_A(B)$ l'insieme dei punti che sono interni a B relativamente ad A.

Brutalmente: le regole del gioco sono le stesse, ma le applico solo in A.

Esempio $A = [0,2]$ $B = [1,2]$



Allora $\mathrm{Int}_A(B) = (1, 2]$

compreso, basta prendere $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e lo sforamento fuori di A non conta.

4 - Dico che x_0 è isolato in B relativamente ad A se

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap B \underbrace{\cap A}_{\text{inutile perché } B \subseteq A} = \{x_0\}$$

Dim. a voce

Oss. Gli insiemi $B \subseteq A$ che sono aperti in B relativamente ad A sono le intersezioni di A con i "veri aperti" di $\mathbb{R}$.

Nell'esempio $\underset{B}{\underset{\shortparallel}{(1,2]}}$ è aperto in $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{[0,2]}}$ e infatti $(1,2] = \underset{A}{\underset{\shortparallel}{[0,2]}} \cap \overset{\text{vero aperto}}{(1,3)}$

$\boxed{\text{Quattro facce della continuità}}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$.
Allora i seguenti 4 fatti sono equivalenti

(1) (Epsilon - delta)

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A}$$

(2) (Per successioni)

$$\boxed{\text{Per ogni succ. } x_n \to x_0, \text{ con } x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ vale } f(x_n) \to f(x_0)}$$

(3) (Con i limiti) x_0 è un p.to isolato oppure non lo è e

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

(4) (Topologica)

$$\boxed{\forall B \subseteq \mathbb{R} \text{ con } f(x_0) \in \operatorname{Int}(B) \text{ vale che } x_0 \text{ è p.to interno di } f^{-1}(B) \text{ relativamente ad } A.}$$

— o — o —

Analogamente possiamo dire che $f: A \to \mathbb{R}$ è continua su tutto A se è continua in ogni p.to di A, cioè

(1) $\forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(2) $\forall x_0 \in A \quad \forall x_n \to x_0$ con $x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ vale $f(x_n) \to f(x_0)$

(3) $\forall x_0 \in A \setminus \operatorname{Isol}(A)$ vale $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(4) $\forall B \subseteq \mathbb{R}$ aperto vale $f^{-1}(B)$ è aperto $\boxed{\text{relativamente ad } A}$

Dimostrazione dell'equivalenza tra (1) e (2)

(1) $\Rightarrow$ (2) Per ipotesi $f(x)$ è continua in x_0 alla ε/δ.
Voglio dim. che è continua per succ. cioè
$A \ni x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

Prendo $\varepsilon > 0$, ottengo dall'ipotesi $\delta > 0$ t.c.

$$\forall x \in \underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A}_{x_n \text{ sta qui definitivamente perché } x_n \to x_0} : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

quindi $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ definitivamente.

(2) $\Rightarrow$ (1) Per ipotesi $f(x)$ è continua per succ. in x_0
Voglio dim. che è continua ε/δ, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Lo faccio per assurdo. Neghiamo la tesi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

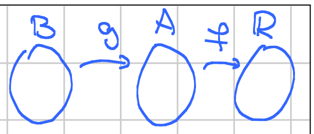
Mi gioco il "$\forall \delta > 0$" ponendo $\delta = \frac{1}{n}$. La negazione mi procura

$$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A \quad \text{t.c.} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Ora $A \ni x_n \to x_0$ per i carabinieri, ma $f(x_n)$ se ne sta ben lontano da $f(x_0)$, e questo contraddice il fatto che dovrebbe essere $f(x_n) \to f(x_0)$.

— o — o —

Esercizio Verificare altre equivalenze.



Teorema Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione
Sia $g : B \to A$ una funzione

Supponiamo che

(i) g continua in $x_0 \in B$

(ii) f continua in $g(x_0) \in A$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0.

$\boxed{\text{Dim via 2}}$ Prendo $B \ni x_n \to x_0$. Voglio verificare che

$$f(g(x_n)) \to f(g(x_0)).$$

Per la continuità di g in x_0 vale che

$$A \ni g(x_n) \to g(x_0)$$

Per la continuità di f in $g(x_0)$ vale che

$$f(g(x_n)) \to f(g(x)).$$

— o — o —

Oss. Provare la dimostrazione via 1
Provare la dimostrazione via 4.

ANALISI 1 — LEZIONE 100

Note Title 29/03/2017

FIL ROUGE DI ANALISI 1

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\text{Assiomi di } \mathbb{R} & \Rightarrow & \underset{\uparrow \text{ compattezza}}{\dots} & \Rightarrow & W & \Rightarrow & R & \Rightarrow & C & \Rightarrow & L & & \\
 & & & & & & & & \Downarrow & & \Downarrow & \leftarrow & \text{già visto} \\
 & & & & & & & & H & & M & & \\
 & & & & & & & & \Downarrow & & & & \\
 & & & & & & & & T & & & &
\end{array}$$

W : WEIERSTRASS

R : ROLLE

C : CAUCHY

L : LAGRANGE

H : De L'HÔPITAL

T : TAYLOR

M : monotonia

Teorema di Weierstrass (edulcorata)

$$f : \underbrace{[a,b]}_{\text{con estremi}} \to \mathbb{R} \qquad \text{continua}$$

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$
$$\min \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

Dove si trovano i p.ti di max / min ?

In una delle 3 categorie

1 – Stazionari interni : $\{ x \in (a,b) : f'(x) = 0 \}$

2 – Singolari interni : $\{ x \in (a,b) : f'(x) \text{ N.E.} \}$

3 – Bordo : $\{ a, b \}$

Lemma Sia $\underbrace{f:(a,b)\to\mathbb{R}}_{\text{nessuna ipotesi}}$ e sia $x_0 \in (a,b)$

Supponiamo che

(i) $f'(x_0)$ esiste

(ii) x_0 p.to di min. di $f(x)$ in (a,b) (cioè $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (a,b)$)

Allora

$$f'(x_0) = 0.$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (Via monotonia 1) Supponiamo per assurdo che $f'(x_0) \neq 0$.

- Se $f'(x_0) > 0$, allora $f(x) < f(x_0)$ un po' a sx di x_0 (detto meglio: $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ vale $f(x) < f(x_0)$) il che contraddice che x_0 è p.to di min.
- Se $f'(x_0) < 0$, allora $f(x) < f(x_0)$ un po' a dx di x_0.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (Diretta, senza assurdo). Considero il rapp. increm.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Per $h > 0$ abbiamo Denom > 0 e Num ≥ 0, quindi fraz. ≥ 0, quindi
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$
- Per $h < 0$ abbiamo Denom < 0 e Num ≥ 0, quindi fraz ≤ 0, quindi
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

L'unica possibilità è che sia $f'(x_0) = 0$.

— o — o —

Esercizi → rifare il tutto per x_0 p.to di max

→ cosa si può dire di $f'(a)$ nelle ipotesi in cui $\max\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(a)$.

— o — o —

TEOREMA DI ROLLE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

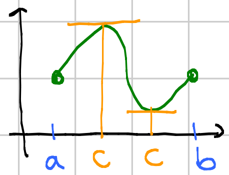
(i) f continua in $[a,b]$ (estremi compresi)

(ii) f derivabile in (a,b) (estremi non compresi, ma se lo sono meglio ancora)

(iii) $f(a) = f(b)$

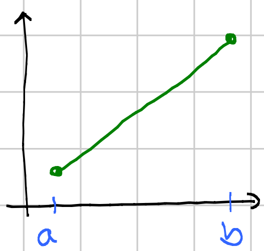
Allora

$$\exists\, c \in \underbrace{(a,b)}_{\text{aperto}} \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

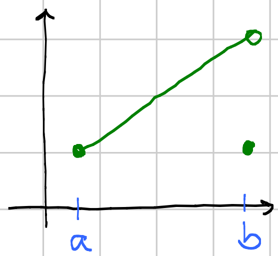


Oss. 1 – c non è nec. unico

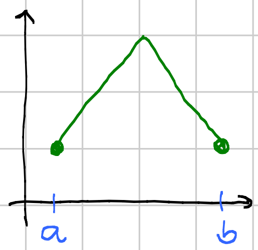
2 – le ipotesi servono tutte



Manca (iii)



Manca (i) in un solo p.to $(x=b)$



Manca (ii) in un solo p.to

Dim. Per (i) + W esistono max e min di $f(x)$ in $[a,b]$.

Due casi

- Se almeno uno tra max/min viene assunto in un p.to $x_0 \in (a,b)$, allora per il lemma $f'(x_0) = 0$ (sappiamo che $f'(x_0)$ esiste per la (ii)), quindi $c = x_0$.

- Se sia il max sia il min sono assunti al bordo, allora per la (iii) la funzione è costante.
  A questo punto posso prendere un qualunque $c \in (a,b)$.

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA DI CAUCHY}}$ Siano $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f e g continue in $[a,b]$ (con estremi)
(ii) f e g derivabili in (a,b) (se lo sono in $[a,b]$, ancora meglio)
Allora

1ª tesi

$$\boxed{\exists\, c\in(a,b) \text{ t.c. } \quad (f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c)}$$

Se inoltre vale la terza ipotesi
(iii) $g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in(a,b)$
allora

2ª tesi

$$\boxed{g(b)\neq g(a) \quad \text{e} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Considero la seguente funzione

$$\varphi(x) := \underbrace{(f(b)-f(a))}_{\text{numero}}\,g(x) - \underbrace{(g(b)-g(a))}_{\text{numero}}\,f(x)$$

(= comb. lineare di $f(x)$ e $g(x)$).

Accade che
(i) φ è continua in $[a,b]$
(ii) φ è derivabile in (a,b)
(iii) $\varphi(a)=\varphi(b)$ (contaccio da fare)
Allora posso applicare Rolle e ottenere $c\in(a,b)$ t.c. $\varphi'(c)=0$

$$\varphi'(x) = (f(b)-f(a))\,g'(x) - (g(b)-g(a))\,f'(x)$$

Ora $\varphi'(c)=0$ è equivalente alla 1ª tesi.

Supponiamo che valga (iii). Allora $g(b)\neq g(a)$ perché se fosse $g(b)=g(a)$ per Rolle esisterebbe un p.to in cui $g'(x)=0$.

A quel p.to posso dividere e ho la 2ª tesi.

—o —o —

Oss. Senza l'ipotesi (iii) non è detto che valga la 2ª tesi, nemmeno se assumo che $g(b) \neq g(a)$

Esempio classico: $f(x) = x^2$ $g(x) = x^3$ $[a,b] = [-1,1]$

È vero che $g(b) \neq g(a)$, ma $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{0}{2} = 0$

e 0 non lo posso scrivere come $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{2c}{3c^2} = \dfrac{2}{3c}$

per nessun valore $c \in (-1,1)$. La prima tesi invece vale con $c = 0$

—o —o —

$\boxed{\text{TEOREMA DI LAGRANGE}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b).

} soliti commenti

Allora

$$\boxed{\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Applico Cauchy con $g(x) = x$.

Le ipotesi (i) + (ii) + (iii) di Cauchy sono verificate, quindi

$$\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } \frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{g(b)-g(a)}_{b-a}} = \frac{f'(c)}{\underbrace{g'(c)}_{1}}$$

Moltiplico e ho la tesi.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (Via Rolle)

Considero la funzione

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x$$

Allora $\varphi(x)$ verifica le ipotesi di Rolle (controllare $\varphi(a)=\varphi(b)$)
Ma allora

$$\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } \varphi'(c)=0, \text{ cioè } f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

che è equivalente alla tesi.

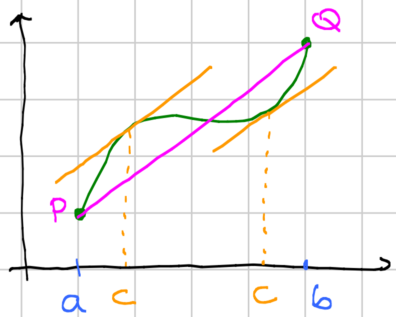
Oss. La dim 2 è equivalente a rifare la dim. di Cauchy con $g(x) = x$.

Oss. Significato geometrico di Lagrange e della seconda dim.

$$f'(c) = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$\parallel$
coeff. angolare retta PQ

coeff. ang. retta tangente in $(c, f(c))$



Lagrange: esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.

$\boxed{\text{retta tangente parallela retta PQ}}$

In un certo senso Lagrange è un Rolle "storto"
La DIM 2 "raddrizza il disegno".
[Vedere finale lezione corrisp. di AM1_15]

ANALISI 1 – LEZIONE 101

Note Title 29/03/2017

TAYLOR Ambientazione generale: $r>0$ e $f:\underbrace{(-r,r)}_{\text{intorno dell'origine}} \to \mathbb{R}$

Taylor Peano Sia $n \in \mathbb{N}$ (ordine dello sviluppo)

Supponiamo che

(i) f derivabile $(n-1)$ volte in $(-r,r)$,

(ii) f derivabile n volte in $x=0$.

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ t.c. $\deg(P_n) \le n$ e

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

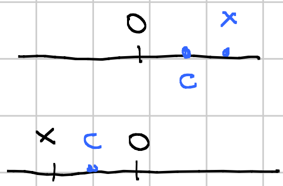
Taylor Lagrange Sia $n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che

(i) f derivabile $(n+1)$ volte in $(-r,r)$

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ t.c. $\deg(P_n) \le n$ e

$\forall x \in (-r,r)$ $\exists c$ compreso tra x e 0 t.c.



$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

In entrambi i casi il polinomio $P_n(x)$ è dato dalla solita formula

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Oss. La formula con centro in $x_0 \neq 0$ si ottiene da quella di sopra considerando la funzione $g(x) = f(x_0 + x)$ (le deriv. di g in 0 sono quelle di f in x_0)

Dimostrazione classica dei due Taylor

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ Consideriamo un monomio ax^i.
Allora la sua derivata k-esima è

$$(ax^i)^{(k)} = \begin{cases} \frac{i!}{(i-k)!}\, a\, x^{i-k} & \text{se } k \leq i \\ 0 & \text{se } k \geq i+1 \end{cases}$$

Nota bene: $\frac{i!}{(i-k)!} = i(i-1)(i-2)\ldots(i-k+1)$

Dim: facile induzione a partire da $k=0$.

Come conseguenza, se calcolo la derivata in $x=0$, ottengo

$$\begin{cases} i!\,a & \text{se } k=i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

$\boxed{\text{LEMMA 2}}$ Sia $P(x)$ un polinomio, diciamo

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Allora

$$\boxed{P^{(i)}(0) = a_i\, i!}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per il lemma 1, quando derivo i volte e sostituisco $x=0$, sopravvive solo il termine di grado i, che si ritrova moltiplicato per $i!$

— o — o —

LEMMA 3 Sia $f(x)$ come nei teoremi di Taylor e sia $P_n(x)$ dato dalla formula solita.
Poniamo
$$\varphi(x) := f(x) - P_n(x).$$
Allora

$$\boxed{\varphi^{(i)}(0) = 0 \qquad \forall\, i = 0, 1, \dots, n}$$
derivate i-esime

Dim. $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) - P_n^{(i)}(0) = 0$

$P_n^{(i)}(0) =$ coeff. di x^i moltiplicato per $i!$ $= \dfrac{f^{(i)}(0)}{\cancel{i!}} \cdot \cancel{i!} = f^{(i)}(0)$

Proprietà fondamentale del polinomio di Taylor

Se valgono le ipotesi di Taylor – Peano (quelle che chiedono meno) allora il pol. dato dalla formula è quell' unico polinomio le cui derivate in $x=0$ coincidono con quelle di $f(x)$ fino all' ordine n. (Da $n+1$ in poi sono nulle)

LEMMA 4 (PEANO) Sia $\varphi(x)$ tale che
$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$$

Allora $\qquad \varphi(x) = o(x^n) \quad$ per $\quad x \to 0$

Dim Si dimostra con De L'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} \underset{[\frac{0}{0}:\,\text{Hôp}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x)}{n\, x^{n-1}} \underset{[\frac{0}{0}:\,\text{Hôp}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(x)}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots$$

$$= \dots = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n!\; x}$$

Qui giunto vorrei rifare Hôpital, ma non posso perché ho assunto che $\varphi^{(n)}(x)$ esista solo per $x=0$. Ne esco con la def. di derivata

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(0)}{x}}_{\text{rapp. increm. di } \varphi^{(n-1)}(x) \text{ in } x=0} = \varphi^{(n)}(0) = 0.$$

Meno con i puntini ... si può fare per induzione su n (il passo base $n=1$ è la def. di derivata, il passo induttivo si fa con Hôpital).

Dim Taylor-Peano: Lemma 1+2+3+4.

$\boxed{\text{Lemma 4 (Lagrange)}}$ Sia $\varphi: (-r,r) \to \mathbb{R}$, sia $n \geq 1$ intero

Supponiamo che

(i) φ derivabile $(n+1)$ volte in $(-r,r)$

(ii) $\varphi^{(i)}(0) = 0$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n$.

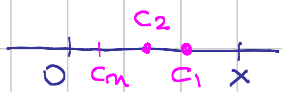
Allora per ogni $x \in (-r,r)$ esiste c compreso tra x e 0 t.c.

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Sempre con i puntini. Se $x \neq 0$ posso dividere

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \text{uso Cauchy con } \begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) \\ g(x) = x^{n+1} \end{array}$$

(le hp di C valgono tra 0 e x)



$$= \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\,c_1^{\,n}}$$

$$= \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(0)}{(n+1)(c_1^{\,n} - 0^n)} = \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)n\,c_2^{\,n-1}} \qquad \text{con } c_2 \text{ tra } 0 \text{ e } c_1$$

$$= \dots = \frac{\varphi^{(n)}(c_n)}{(n+1)!\,c_n}$$

$$= \frac{\varphi^{(n)}(c_n) - \varphi^{(n)}(0)}{(n+1)!\,(c_n - 0)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

Più rigoroso, senza puntini: induzione su n.
Per $n=1$ è proprio il teorema di Cauchy o di Lagrange.
Al passaggio induttivo applico una volta C

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\,c_1^{\,n}}$$

e osservo che la nuova funzione $\varphi'(x)$ ha tutte le derivate nulle fino alla $(n-1)$-esima e procedo con l'hp induttiva.

<u>Oss 1</u> Le ipotesi di Taylor Peano / Lagrange sono cond. sufficienti per l'esistenza del polinomio ma non necessarie (vedi esempi nella prima parte del corso).

<u>Oss 2</u> Esiste una dim. di Taylor-Lagrange che usa solo Rolle (vedi AM1_15).

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 102

Note Title 04/04/2017

Teoremi di De L'Hôpital

Ci sono tanti casi, facciamo il caso $x \to x_0^+$ con $x_0 \in \mathbb{R}$

(fare per esercizio $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$)

$\boxed{\text{Caso } \frac{0}{0}}$ Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $r > 0$, siano $f : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

$g : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f e g sono derivabili in (x_0, x_0+r) (in particolare continue)

(ii) $g'(x)$ sempre > 0 oppure < 0 in (x_0, x_0+r)

(iii) vale che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$$

Allora $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0+r)$ e vale

$$\boxed{\liminf_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

In particolare, se $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste, allora questo coincide con

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Due possibili dimostrazioni

→ estendendo f e g

→ senza estendere f e g

$\boxed{\text{DIM 1}}$ (via estensione) Definisco $\hat{f}$ e $\hat{g}$ in $[x_0, x_0+2)$ ← compreso
ponendo

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (x_0, x_0+2) \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Stessa cosa per $\hat{g}(x)$.

<u>Oss. fondamentale</u>: $\hat{f}(x)$ e $\hat{g}(x)$ sono continue in $[x_0, x_0+2)$ e derivabili in (x_0, x_0+2)
(uso qui l'ipotesi (iii))

Dimostro che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0+2)$. Se infatti per assurdo esistesse $y_0 \in (x_0, x_0+2)$ tale che $g(y_0) = 0$, potrei applicare Rolle a $\hat{g}(x)$ in $[x_0, y_0]$. Ma allora

$$\exists\, c \in (x_0, y_0) \text{ t.c. } \hat{g}'(c) = 0$$

$$\underset{\displaystyle g'(c) = 0}{\shortparallel} \quad \Rightarrow \text{ contro l'ipotesi (ii)}$$

<u>Oss.</u> Qui non ho usato che $g'(x)$ ha un segno, ma solo che è $\neq 0$.

Ora dimostriamo $\displaystyle \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Chiamiamo L il RHS. Supponiamo $L \in \mathbb{R}$ (se $L = +\infty$ è banale, se $L = -\infty$ è analogo, anzi più facile).
Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratt. del limsup

$$\exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

Ora per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta)$ vale

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

per un opportuno $c \in (x_0, x)$

Passando al limsup ho finito

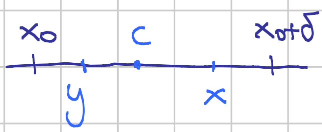
$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

Valendo per ogni $\varepsilon > 0$ ho finito.

— o — o —

$\boxed{\text{DIM 2}}$ Facciamo il finale. Fisso $\varepsilon > 0$ e trovo $\delta > 0$ t.c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$



Considero $\quad x_0 < y < x < x_0 + \delta$. Allora

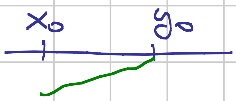
$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

Passo al limite per $y \to x_0^+$. Ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Ora faccio il limsup e concludo.

Resta da dire (senza estensione) che $g(x) \neq 0$ in $(x_0, x_0 + 2)$.
Se so che $g'(x)$ ha un segno $+$ o $-$ in (x_0, x_0+2) la cosa segue dalla stretta monotonia di $g(x)$.



[Consideriamo $g'(x) > 0$ sempre. Se $g(y_0) = 0$ per un qualche y_0, allora non può tendere a 0 per $x \to x_0^+$ (formalizzare meglio questo discorso)]

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$ (Per modo di dire, perché serve solo che sia ∞ il denominatore)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $f : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$
$g : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f e g derivabili in (x_0, x_0+r)

(ii) $g'(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r)

(iii) vale

$$\lim_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty \qquad \text{(basta solo la } g\text{)}$$

Allora solito discorso

$$\liminf \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

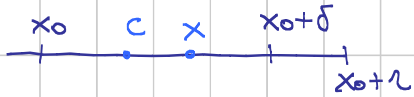
e $g(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r) a patto di prendere un nuovo r eventualmente più piccolo

$\boxed{\text{DIM}}$ È facile che $g(x) \neq 0$ in un intorno (tende a $+\infty$, quindi sta sopra 2017)

Come sempre dim. disug. di dx e pongo $L := \limsup\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ che assumo $\in \mathbb{R}$.

Fisso $\varepsilon > 0$ e per la caratt. del limsup esiste $\delta \in (0, r)$ t.c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$



Ora

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\uparrow}{=} \frac{f(x) - f(x_0+\delta) + f(x_0+\delta)}{g(x)}$$

aggiungo e tolgo solo al numeratore

e osservo che

$$\frac{f(x)-f(x_0+\delta)}{g(x)-g(x_0+\delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L+\varepsilon$$

Moltiplicando (e si può se x è abbastanza piccolo perché $g(x) > g(x_0+\delta)$) ottengo

$$f(x)-f(x_0+\delta) \leq (L+\varepsilon)\,(g(x)-g(x_0+\delta))$$

Sostituendolo in quella sopra ottengo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{(L+\varepsilon)(g(x)-g(x_0+\delta)) + f(x_0+\delta)}{g(x)}$$

$$= (L+\varepsilon) + \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+\delta)-(L+\varepsilon)\,g(x_0+\delta)}{g(x)}}}_{\to\, 0}$$

0 per $x \to x_0^+$

(numeratore è fisso, denom $\to +\infty$)

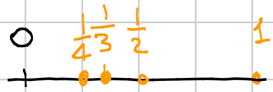
da cui

$$\limsup_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L+\varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \text{ quindi} \ldots$$

— o — o —

Oss. Serve per De L'Hôpital che le f e g siano definite in tutto un intervallo. Non basta che la zona di def. sia un aperto e che x_0 sia un p.to di accumulazione di questo aperto.
Non basta che f e g siano definite in

$$(0,1) \setminus \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N} \right\}$$



(Posso fare esempi con f costante a tratti)

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 103

Note Title 04/04/2017

Teoremi di CESÀRO – STOLZ (aka Hôpital per successioni)

Caso $\frac{0}{0}$ Siano a_n e b_n due successioni. Supponiamo che

(i) b_n strett. decrescente

(ii) $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$

Allora $b_n \neq 0$ definitivamente e

$$\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Dim (Riciclo della dim 2 di Hôp. $\frac{0}{0}$)

Dimostro la disug di sx (tanto per cambiare). Indico con ℓ il liminf a sx. Suppongo $\ell \in \mathbb{R}$ (se fosse $-\infty$ è banale, se $\ell = +\infty$ è analogo ma andrebbe fatto).

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratt.

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \quad \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \geq \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Per avere un denom. positivo la scrivo come

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \geq \ell - \varepsilon \quad \text{da cui} \quad a_n - a_{n+1} \geq (\ell-\varepsilon)(b_n - b_{n+1})$$

Ora per ogni coppia di indici m ed n con

$$m > n \geq n_0$$

vale

$$a_n - a_m = \underbrace{\sum_{k=m}^{m-1} a_k - a_{k+1}}_{\text{telescopica}} \geq (\ell-\varepsilon) \overbrace{\sum_{k=m}^{m-1} b_k - b_{k+1}}^{\text{telescopica}}$$

$$= (\ell-\varepsilon)(b_n - b_m)$$

e quindi

$$\frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} \geq \frac{(\ell-\varepsilon)(b_n - \cancel{b_m})}{b_n - \cancel{b_m}} = \ell - \varepsilon$$

Facendo il lim per $m \to +\infty$ ottengo $\dfrac{a_n}{b_n} \geq \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ da cui passando al liminf ho la tesi.

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}\text{, ma basta in realtà } \infty \text{ sotto}}$

Supponiamo a_n e b_n due successioni tali che
(i) b_n strett. crescente
(ii) $b_n \to +\infty$
Allora vale la solita tesi a 4.

Dim. (analoga a Hôpital $\frac{\infty}{\infty}$). Dimostriamo che

$$\ell = \liminf \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e per caratt.

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \geq \ell - \varepsilon$$

e quindi (posso ?) $\quad a_{n+1} - a_n \geq (\ell-\varepsilon)(b_{n+1} - b_n)$.

Ora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{n_0} + a_{n_0}}{b_n}$$

e per $n > n_0$ ho come prima

$$a_n - a_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} - a_k \geq (\ell - \varepsilon) \sum_{k=n_0}^{n-1} b_{k+1} - b_k$$

$$= (\ell - \varepsilon)(b_n - b_{n_0})$$

sostituendo

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(\ell - \varepsilon)(b_n - b_{n_0}) + a_{n_0}}{b_n}$$

Passo al limite e poiché $b_n \to +\infty$ ottengo

$$\liminf \frac{a_n}{b_n} \geq \ell - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 \ldots$$

— o — o —

Teorema delle medie di Cesàro Sia a_n una successione. Poniamo

$$M_n := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \text{media dei primi } n \text{ termini}$$

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf M_n \leq \limsup M_n \leq \limsup a_n.$$

In particolare: se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, anche $M_n \to \ell$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $A_n := a_1 + \ldots + a_n$ e applico Cesàro-Stolz con A_n e $b_n = n$. Con queste scelte

$$\frac{A_n}{b_n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = M_n$$

monotonamente

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{a_{n+1}}{1} \qquad (\text{Occorre verificare che } b_n \nearrow +\infty)$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Ci sono casi in cui a_n non ha limite, ma M_n sì.

<u>Esercizio Harol</u> Esiste una succ. che resiste a 2017 passaggi di Cesarizzazione senza avere limite, ma poi cede.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio rapporto} \to \text{radice}}$

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \dots \leq \dots$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $A_n = \log a_n \qquad B_n = n$

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\log a_n}{n} = \log \sqrt[n]{a_n} \; ;$$

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \frac{\log a_{n+1} - \log a_n}{1} = \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

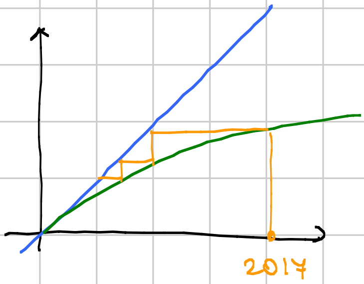
— o — o —

<u>Esempio</u>
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n!}{n} = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{n}}_{\text{media di Cesaro fatta su } a_n = \log n.} \to +\infty$$

<u>Esempio</u> $x_{n+1} = \arctan x_n$

$x_0 = 2017$

$x_n \to 0$ con piano monotonia



Domandona: come x_n tende a 0. (col rapporto non viene)

Brutal mode: supponiamo $x_n = \frac{c}{n^a}$ per opportuni c ed a

Come trovo c ed a?

$x_{n+1} = \arctan x_n$, cioè $\frac{c}{(n+1)^a} = \arctan \frac{c}{n^a} \sim \frac{c}{n^a} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{3a}}$

$$\frac{1}{(n+1)^a} \sim \frac{1}{n^a} - \frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{3a}} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \qquad \frac{1}{1-x} = 1+x+\dots$$

$$\frac{n^a}{(n+1)^a} \sim 1 - \frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{2a}} \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \sim \frac{1}{1-\frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{2a}}}$$

$$\cancel{1}+\frac{a}{n} = \cancel{1}+\frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{2a}} \leadsto a = \frac{1}{2} \leadsto c^2 = \frac{3}{2} \leadsto c = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Congettura: $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$ cioè $n \cdot x_n^2 \to \frac{3}{2}$

Dim Uso Cesaro – Stolz con $b_n = n$ e $a_n = \frac{1}{x_n^2}$.

Allora

$$\frac{1}{n x_n^2} = \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \frac{a_n}{b_n} \qquad \text{Ma allora}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}{1}$$

$$= \lim\left(\frac{1}{\arctan^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^2\arctan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \frac{2}{3}$$

ANALISI 1 - LEZIONE 104

Note Title 05/04/2017

Assiomi di $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Weierstrass

VIA DIRETTA (che passa per Bolzano - Weierstrass)

Teorema (B.W.) Sia a_n una succ. di numeri reali limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).
Allora esiste una s.succ. che ha limite reale, cioè $\exists a_\infty \in \mathbb{R}$ $\exists n_k$ succ. crescente strett. di naturali t.c.

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty$$

Dim 1 (Usando liminf / limsup)

Sia $L := \limsup_{n\to+\infty} a_n$. Poiché $-M \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, di siamo

$$-M \leq L \leq M \quad , \text{quindi in particolare } L \in \mathbb{R}.$$

Per la caratterizzazione del limsup come maxlim, esiste $a_{n_k} \to \underset{a_\infty}{L}$.

Potevo fare stesso discorso con il liminf.

— o — o —

Dim. 2 (Usando solo gli assiomi di $\mathbb{R}$, cioè sup / inf).

Prendo la succ. a_n e considero l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a_n \leq x \text{ per infiniti indici } n \in \mathbb{N}\}$$

L'insieme A contiene almeno almeno M e non contiene nulla $< -M$
Inoltre $a \in A$ e $b > a \Rightarrow b \in A$, quindi A è una semiretta,

con o senza estremo. Poniamo

$$a_\infty := \inf A$$

Quali sono le proprietà di a_∞?

① $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \leq a_\infty + \varepsilon$ per infiniti indici

② $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \geq a_\infty - \varepsilon$ definitivamente (altrimenti $a_\infty - \varepsilon$ starebbe in A)

Dico che esiste $a_{n_k} \to a_\infty$. La costruisco così

- Scelgo n_0, e quindi a_{n_0}, a caso tra gli el. della succ.
- Supponendo di aver scelto $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$, prendo $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ e dalle ① e ② deduco che

$$a_\infty - \frac{1}{k+1} \underset{\text{defin.}}{\leq} a_n \underset{\infty \text{ indici}}{\leq} a_\infty + \frac{1}{k+1}$$

per infiniti indici n. Quindi esiste un indice $n_{k+1} > n_k$ e che va bene. Ho così ottenuto $a_{n_{k+1}}$.

Per i carabinieri seguirà che $a_{n_k} \to a_\infty$ in quanto

$$a_\infty - \frac{1}{k} \leq a_{n_k} \leq a_\infty + \frac{1}{k} \qquad \forall k \geq 1.$$

— o — o —

Oss. Se fosse $a_n = (-1)^n$ verrebbe $A = [-1, +\infty)$
In tutti i casi $a_\infty = \liminf$ e quello che abbiamo fatto è ridimostrare che si tratta di minlim.

Oss. Avrei potuto fare la dim. ponendo (provare a farlo)

$$a_\infty := \sup\{x \in \mathbb{R} : a_n \geq x \text{ per infiniti indici } n\}$$

si può anche mettere stretta

Corollario Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme chiuso.
Sia $\{a_n\} \subseteq A$ una successione limitata.
Allora esiste $\boxed{a_\infty \in A}$ ed $n_k \to +\infty$ succ. di naturali crescente t.c.

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Essendo a_n limitata, per B-W. esiste $a_{n_k} \longrightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$.
Dico che $a_\infty \in \text{Clos}(A) = A$
perché A è chiuso.
Devo dim. che ogni intervallo $(a_\infty - \varepsilon, a_\infty + \varepsilon)$ contiene almeno un pto di A. Questo segue dal fatto che contiene a_{n_k} per ogni k abbastanza grande.

— o — o —

Definizione (Insieme compatto) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO se è limitato + chiuso.

Esempio Un intervallo $[a,b]$ è compatto
" " $(a,b]$ non è compatto (no chiuso)
una semiretta $[a,+\infty)$ è chiusa ma non compatta.

$\boxed{\text{TEOREMA DI WEIERSTRASS}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che $A \neq \emptyset$ e
(i) f continua in A
(ii) A compatto.
Allora esistono per forza

$$\max\{f(x) : x \in A\}$$
$$\min\{f(x) : x \in A\}$$

$$\underbrace{\phantom{\{f(x) : x \in A\}}}_{\displaystyle \parallel}$$

$f(A)$ = immagine della funzione
(sono "delle y").

Dim. Dimostro che esiste il max (per il min. è analoga)
Di sicuro esiste il sup, cioè

$$M := \sup\{f(x) : x \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Per un lemma fatto a suo tempo esiste una succ. $y_n \in f(A)$ t.c. $y_n \to M$ (proprietà del sup).

Per def. di immagine, esiste $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$.
Ora A è compatto, quindi esiste

$$x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A$$

vorrei dire che è un p.to di max

Grazie alla continuità di $f(x)$ sappiamo che

$$\underset{\substack{\text{M è il sup}\\ \text{dell' immagine}}}{M \geq f(x_\infty)} \underset{\substack{\text{continuità}\\ \text{di } f(x)}}{=} \lim_{n \to +\infty} f(x_{n_k}) \underset{\substack{\text{Def. di}\\ x_{n_k}}}{=} \lim_{n \to +\infty} y_{n_k} \underset{y_n \to M}{=} M$$

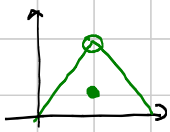
Quindi per forza $f(x_\infty) = M$. In questo momento sappiamo anche che $M \in \mathbb{R}$ e non $+\infty$.

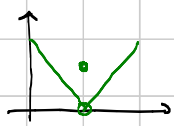
— o — o —

<u>Notazione</u> La successione x_n si dice una <u>successione massimizzante</u> perché

$$f(x_n) \longrightarrow \sup f(A).$$

<u>Oss.</u> Se manca la continuità anche in un solo p.to, allora max e min possono non esistere





Possono mancare entrambi ?

<u>Esercizio</u> (che non ha a che fare con W.)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto. Allora esistono per forza

$$\min A \qquad \text{e} \qquad \max A$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamolo per il min. Pongo $\ell := \inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Essendo A limitato, di sicuro $\ell \in \mathbb{R}$.
Per il solito lemma esiste una succ. $\{a_n\} \subseteq A$ t.c. $a_n \to \ell$.
Essendo A chiuso, di sicuro $\ell \in A$, e quindi $\ell = \min A$.

— o — o —

<u>Oss.</u> Tutto $\mathbb{R}$ è un chiuso, ma non un compatto
Tutto $\mathbb{R}$ è pure aperto.
$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono gli unici sottoinsiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi.

<u>Oss.</u> $\boxed{\text{Non è vero che}}$

- Le funzioni continue mandano chiusi in chiusi

<u>Esempio</u> $f(x) = \arctan x$ $\qquad$ $A := [0, +\infty)$ chiuso
$f(A) = [0, \frac{\pi}{2})$ non chiuso

- Le funzioni continue mandano limitati in limitati

<u>Esempio</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $A = (0,1)$ limitato
$f(A) = (1, +\infty)$ non limitato.

Aggiunto dopo video: nel finale della dim. di Weierstrass ci sono 2 indici sbagliati e la prima disuguaglianza è vera ma inutile

ANALISI 1 — LEZIONE 105

Note Title 05/04/2017

FUNZIONI SEMICONTINUE

<u>Def.</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in A$ non isolato. Si dice che f è

- <u>semicontinua inferiormente</u> in x_0 se SCI

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

- <u>semicontinua superiormente</u> in x_0 se SCS

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

<u>Oss</u> Se f è SCI e SCS in x_0, allora f è continua in x_0

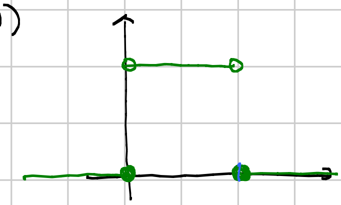
$$f(x_0) \underset{\text{SCI}}{\leq} \liminf_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup_{x \to x_0} f(x) \underset{\text{SCS}}{\leq} f(x_0)$$

Allora sono tutti uguali, quindi esiste il limite ed è $f(x_0)$.

Brutalmente, SCI vuol dire che al limite può crollare in giù
SCS " " " " " " " in su.

<u>Esempio</u>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \notin (0,1) \end{cases}$$



Questa è
- SCI su tutto $\mathbb{R}$
- SCS su $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Fatto generale

- La funzione caratt. di un aperto è SCI
- " " " " " chiuso è SCS

LE DUE SU QUATTRO FACCE DELLA SEMICONTINUITÀ

$f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Allora sono fatti equivalenti

(i) f è SCI in x_0 nel senso di prima
(ii) per ogni succ. $x_n \to x_0$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Più o meno è sempre la solita.
$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ prendiamo una succ. $x_n \to x_0$
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la def. di liminf

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$
Poiché $x_n \to x_0$, allora definitivamente

$$f(x_n) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

Passando al liminf

$$\liminf f(x_n) \geq f(x_0) - \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ldots \text{quindi}$$

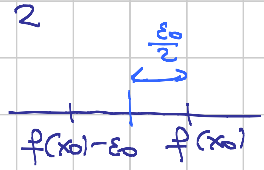
$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Supponiamo per assurdo che

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon_0 \qquad \text{con} \quad \varepsilon_0 > 0$$

Per definizione di liminf accade che

$$\inf\{f(x) : x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A\} \leq f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

per ogni $\delta > 0$. Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$



e ottengo $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ t.c.

$f(x_n) \leq f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{4}$. Passando al liminf trovo $x_n \to x_0$ e

$\liminf f(x_n) \leq f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{4}$ che è contro l'ipotesi

— o — o —

Esempio $A = [0, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Allora

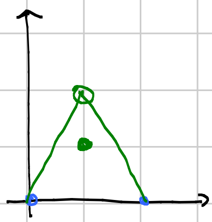
- $f(x)$ è SCI $\iff a \leq -1$
- $f(x)$ è SCS $\iff a \geq 1$

— o — o —

Teorema (Weierstrass SCI) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.
Supponiamo che
(i) A è compatto
(ii) f è SCI.
Allora esiste per forza

$$\min\{f(x) : x \in A\}$$

Oss. Il max non si salva necessariamente



Oss. Se come ipotesi ho SCS salvo il max

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia I l'inf. dell'immagine, cioè

$$I := \inf\{f(x) : x \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Per il solito lemma $\exists \{y_n\} \subseteq f(A)$ t.c. $y_n \to I$

Per defn. di immagine $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $y_n = f(x_n)$

Poiché A è compatto $\exists\ x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A$

Dico che x_∞ è un p.to di min. Infatti

$$\underset{\substack{\uparrow\\ I \text{ è inf}\\ \text{di } f(A)}}{I \le} f(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow\\ f \text{ SCI}}}{\le} \liminf_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \to +\infty} y_{n_k}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} y_n = I$$

n ← cambiato dopo video

Poiché a dx e sx sono uguali abbiamo $f(x_\infty) = I$, che ora sappiamo essere un numero reale.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Provare a fare dim. con caso SCS.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Sia x_n una succ. e sia

$$L := \limsup_{n \to +\infty} x_n$$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Cosa posso dire di $\displaystyle\limsup_{n \to +\infty} f(x_n)$?

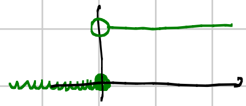
In generale nulla $\quad x_n = -3, -2, -3, -2, -3, -2, \ldots \quad f(x) = x^2$

$\limsup x_n = -2 \qquad \limsup f(x_n) = 9$

Fatto generale Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è debolmente crescente, allora e continua

$$\limsup f(x_n) \leq f(L)$$

Senza la continuità è falso



$x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad x_n \to 0 = L$ $\qquad f(x_n) \to 1 > f(L) = 0$

Dim fatto generale: Fisso $\varepsilon > 0$. Per continuità di f in L e monotonia

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $\quad f(x) \leq f(L) + \varepsilon \quad \forall x \leq L + \delta$

Ma allora definitivamente so che $x_n \leq L + \delta$ per caratt. del limsup, quindi

$$f(x_n) \leq f(L) + \varepsilon$$

e passando al limsup

$$\limsup f(x_n) \leq f(L) + \varepsilon$$

Essendo vero $\forall \varepsilon > 0$ ho finito

— o — o —

Esercizio Sia $a_n \to 2$ qualunque. Consideriamo la succ. per ricorrenza.. (supponiamo $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

$x_{n+1} = a_n \sqrt{x_n} \qquad x_0 = 2015$

Brutal mode:

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & a_n & \sqrt{x_n} & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \ell & = & 2 & \sqrt{\ell} & \rightsquigarrow \ \ell = 4 \end{array}$$

Sarebbe ok se so che il limite esiste ed è reale.

Sia $L = \limsup x_n$. Allora $\limsup \sqrt{x_n} \leq \sqrt{L}$ e quindi passo al limsup a dx e sx e ottengo

$$\limsup x_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uno dei 2 è lim.}}}{=} \lim a_n \cdot \limsup \sqrt{x_n}$$

$$L \leq 2\sqrt{L} \qquad\qquad L \leq 4$$

Facendo lo stesso con il liminf ℓ ottengo

$$\ell \geq 2\sqrt{\ell} \qquad\qquad \ell \geq 4$$

Usando che ovviamente $\ell \leq L$ trovo che sono entrambi 4.

C'è qualche dettaglio da sistemare, tipo escludere $\ell = 0$ o $L = +\infty$.

Aggiunto dopo video: se f è continua e debolmente crescente, allora nel fatto generale vale il segno di $=$.

ANALISI 1 – LEZIONE 106

Note Title 07/04/2017

TRE FACCE DELLA COMPATTEZZA ⇝ Nuove interpretazioni di Weierstrass

<u>Def.</u> (già vista) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO se è limitato + chiuso.

<u>Def.</u> (compattezza per successioni) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI se ogni successione a valori in A ammette una s.succ. convergente ad un elemento di A.
Detto più formalmente: per ogni succ x_n con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono naturali n_k strett. cresc ed esiste $\boxed{x_\infty \in A}$ t.c.

$$x_{n_k} \to x_\infty$$

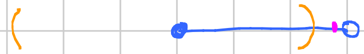
<u>Def.</u> (Ricoprimento) Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice RICOPRIMENTO di A una qualunque famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che indichiamo con $\{M_i\}_{i \in I}$ tale

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$$

(gli Mi possono sovrapporsi tra di loro)

<u>Def.</u> (Compattezza per ricoprimenti) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO PER RICOPRIMENTI se ogni ricoprimento <u>aperto</u> di A ammette un sottoricoprimento finito, cioè per ogni ricoprimento $\{M_i\}_{i \in I}$ di A con M_i aperto per ogni $i \in I$ esiste un insieme $J \subseteq I$, con J <u>finito</u>, tale che

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} M_i \quad \text{(ne basta un numero finito)}$$

<u>Esempio</u> $A = [0,1)$. Considero 

$U_n = (-1, 1-\frac{1}{n})$ sono aperti e $\{U_n\}_{n\geq 1}$ è un ricoprimento di A, cioè

$$A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} U_n$$

Nessun sottoricoprimento finito basta per ricoprire A, perché rimarrebbe fuori un piccolo intervallino vicino ad 1.
Quindi questo A non è compatto per ricoprimenti.

— o — o —

Teorema 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme.
Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti:
(i) A è limitato + chiuso,
(ii) A è compatto per successioni,
(iii) A è compatto per ricoprimenti.

Teorema 2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto per successioni e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Allora $f(A)$, cioè l'immagine, è compatta per successioni

(Le funzioni continue mandano compatti per succ. in compatti per succ.)

Teorema 3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ cpt. per ricoprimenti e sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua.
Allora $f(A)$ è cpt. per ricoprimenti.

(Le funz. cont. mandano cpt. per ricopr. in cpt. per ricopr.)

<u>Oss.</u> Le funzioni cont. non mandano necessariamente chiusi in chiusi e limit. in limitati.

Meta dim. di Weierstrass (dando per buoni i teoremi)

Prendiamo $f : A \to \mathbb{R}$ con A compatto.

1. Dal teo. 1 sappiamo che A è cpt. per. succ. o per ricopr.
2. Dai teo. succ. sappiamo che $f(A)$ è cpt.
3. Abbiamo fatto per esercizio che i compatti ammettono max / min
4. Di conseguenza $f(A)$ ammette max / min.

— o — o —

Dim teo 1 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ipotesi: A chiuso + limitato
Tesi: ogni succ. in A ammette s.succ. conv.

Questo è B-W + relativo corollario (visto che A è limitato ogni succ. $x_n \in A$ ammette $x_{n_k} \to x_\infty \in \mathbb{R}$. Visto che A è chiuso, per forza $x_\infty \in A$).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ipotesi: A è cpt. per succ.
Tesi: A è limitato + chiuso

Dimostro che A è limitato. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \quad |a| \leq M \qquad \text{se è limitato}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A \ \text{t.c.} \ |a| > M \qquad \text{negazione}$$

Me la gioco con $M = n \in \mathbb{N}$ e trovo

$$a_n \in A \quad \text{t.c.} \quad |a_n| > n$$

Se questa avesse una s. succ. conv. $a_{n_k} \to a_\infty \in A$ avrei $|a_{n_k}| \to |a_\infty| \in \mathbb{R}$ ma sappiamo che $|a_{n_k}| > n_k$
$\searrow +\infty$

<u>Dimostro che A è chiuso.</u> Prendo $a_0 \in \mathrm{Clos}(A)$. Per un esercizio fatto tante volte sappiamo che esiste una succ.

$$A \ni a_n \to a_0$$

Ora sappiamo che a_n ammette una s.succ. che converge ad un elemento di A.
D'altra parte tutte le s.succ. devono convergere ad a_0 e quindi $a_0 \in A$, cioè $\mathrm{Clos}(A) \subseteq A$, cioè A è chiuso

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teo. 2}}$ Ipotesi : A cpt. per succ.
$f : A \to \mathbb{R}$ continua
Tesi : $f(A)$ cpt. per succ.

Prendo una qualunque succ. $\{y_n\} \subseteq f(A)$.
Per def. di immagine, esistono $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$.
Poiché A è cpt. per succ., esiste

$$x_{n_k} \to x_\infty \in A$$

Per continuità

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to \underset{\substack{\parallel \\ y_\infty}}{f(x_\infty)} \in f(A)$$

Ecco dimostrato che y_n ha una s.succ. conv.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teo. 1, (iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Ipotesi : A cpt. per ricoprimenti
Tesi : A è limitato + chiuso

<u>Dimostro che è limitato.</u> Considero $\mathcal{U}_n = (-n, n)$ per $n \geq 1$
È evidente che

$$A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{U}_n \quad (= \mathbb{R})$$

Poiché A è cpt. per ricoprimenti ne deve bastare un numero finito, cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} \mathcal{U}_n = (-n_0, n_0)$$

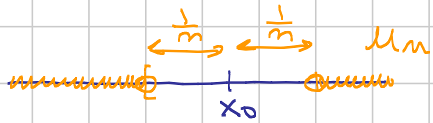
che è equivalente a dire che A è limitato.

<u>Dimostro che A è chiuso</u> Prendo $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$. Voglio dedurre che $x_0 \in A$.

- Se $x_0 \in A$, sono felice :)

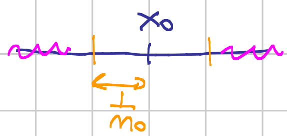
- Se $x_0 \notin A$, considero $\mathcal{U}_n := \mathbb{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$

Ora $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{U}_n = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, quindi



$$A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{U}_n$$

Poiché A è cpt. per ricoprimenti, ne basta un numero finito, dunque



$$A \subseteq \mathbb{R} \setminus \left[x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}\right]$$

per un opportuno n_0. Ma allora $A \cap (x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}) = \emptyset$, e questo va contro l'ipotesi che

$$x_0 \in \mathrm{Clos}(A).$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 107

Note Title 07/04/2017

$\boxed{\text{Dim teo. 3}}$ Ipotesi: A cpt. per ricoprimenti, $f: A \to \mathbb{R}$ continua
Tesi: $f(A)$ cpt. per ricoprimenti.

Prendo un ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ di $f(A)$ e dimostro che basta un s.ricopr. finito.
Pongo

$$\mathcal{U}_i := f^{-1}(V_i)$$

È chiaro che $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, cioè $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ sono un ricoprimento di A
(dato $x \in A$, trovo $i \in I$ t.c. $f(x) \in V_i$, quindi $x \in \mathcal{U}_i$).
Inoltre, essendo f continua, gli $\mathcal{U}_i$ sono aperti in partenza.
(ad essere precisi, gli $\mathcal{U}_i$ sono aperti in A, cioè sono intersezione di A con veri aperti di $\mathbb{R}$, cioè

$$\mathcal{U}_i = A \cap \underbrace{\hat{\mathcal{U}}_i}_{\text{aperto in } \mathbb{R}}$$

)

Concludendo: $\{\hat{\mathcal{U}}_i\}_{i \in I}$ sono un ricoprimento aperto di A, ma allora basta un s.ricopr. finito, cioè

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} \hat{\mathcal{U}}_i \qquad \text{con } J \text{ finito.}$$

Ma allora $$f(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(\hat{\mathcal{U}}_i) = \bigcup_{i \in J} V_i$$

e quindi ho trovato il s.ricopr. finito voluto.

— o — o —

Resta da dim. un pezzo del teo (i), cioè che (i) $\Rightarrow$ (iii) oppure (ii) $\Rightarrow$ (iii).
La dim. si basa su due lemmi.

LEMMA 1 (Raggio magico) (Numero di LEBESGUE)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme cpt. per successioni.
Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A.
Allora esiste $r > 0$ con questa proprietà

$$\forall x \in A \ \exists i \in I \ \text{ t.c. } \ (x-r, x+r) \subseteq U_i$$

Oss. Il fatto che gli U_i siano tutti aperti dice che

$$\forall x \in U_i \ \exists r > 0 \ \text{ t.c. } \ (x-r, x+r) \subseteq U_i$$

oppure che

$$\boxed{\forall x \in A \ \exists i \in I \ \exists r > 0 \ \text{ t.c. } \ (x-r, x+r) \subseteq U_i}$$

quasi ovvia, perché r dipende da x

La tesi del lemma è

$$\boxed{\exists r > 0 \ \forall x \in A \ \exists i \in I \ \text{ t.c. } \ (x-r, x+r) \subseteq U_i}$$

qui r non dipende da x

LEMMA 2 (Lemma dei distributori)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato e sia $r > 0$ un numero qualunque.
Allora esiste un numero finito di p.ti $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ (dipendente da r) con questa proprietà

$$\boxed{\forall x \in A \ \exists i \in \{1, \dots, n\} \ \text{ t.c. } \ |x - x_i| < r}$$

<u>Interpretazione</u>: posso piazzare dei distributori in $x_1, \dots, x_n$ in modo che ogni elemento abbia un distributore a distanza $\le r$ da lui.

$\boxed{\text{Dati i due lemmi, dimostriamo che (i)+(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$

Ipotesi: A è chiuso + lim. (dunque anche cpt. per succ.)
Tesi: A è cpt. per ricoprimenti.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A.

① Per il lemma 1, il ricoprimento ammette un raggio magico $r > 0$.

② Per il lemma 2, applicato con il raggio magico, posso trovare dei punti $x_1, \dots, x_n$ in A (in numero finito) t.c.

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (x_k - r, x_k + r)$$

③ Ora siano $i_1, \dots, i_n$ indici in I tali che

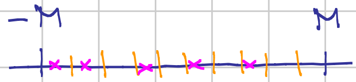
$$(x_k - r, x_k + r) \subseteq U_{i_k} \quad \text{(magicità di } r\text{)}$$

e sia $J = \{i_1, \dots, i_n\}$. È chiaro che J è finito (ha al max n elementi) e

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

Ecco ottenuto il s.ricopr. finito.

— o — o —



$\boxed{\text{Dim. distributori}}$ A per ipotesi è limitato, quindi $A \subseteq [-M, M]$ per opportuno reale M. Sia dato $r > 0$. Divido $[-M, M]$ in parti uguali di ampiezza $< r$. In ogni intervallino prendo (se c'è) un pto di A. Ho piazzato un numero finito di distributori e ogni altro p.to di A ne ha uno a distanza $< r$ (quello stesso intervallo).

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. raggio magico}}$ Sono dati A ed un ricopr. aperto $\{U_i\}_{i\in I}$.
Devo dim. che

$$\exists r>0 \ \forall x \in A \ \exists i \in I \text{ t.c. } (x-r, x+r) \subseteq U_i$$

Suppongo per assurdo che non sia vero, cioè

$$\forall r>0 \ \exists x \in A \ \forall i \in I \quad (x-r, x+r) \not\subseteq U_i$$

Me la gioco prendendo $r := \frac{1}{n}$. Ottengo un p.to $x_n \in A$ t.c.

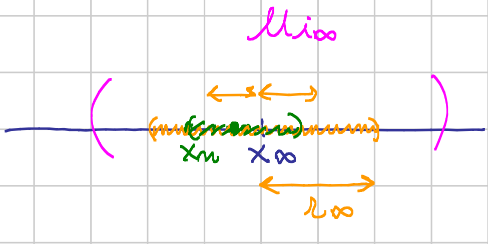
$$\forall i \in I \qquad \left(x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}\right) \not\subseteq U_i$$

Ora x_n è una succ. in A, dunque per ipotesi ammette una sottosucc. convergente, che per comodità non rinomino

$$x_n \longrightarrow x_\infty \in A$$

Ora $x_\infty \in A$, dunque $x_\infty \in U_{i_\infty}$ per un qualche indice $i_\infty \in I$.
Ma allora, essendo U_{i_∞} aperto, esiste r_∞ t.c.

$$(x_\infty - r_\infty, x_0 + r_\infty) \subseteq U_{i_\infty}$$



Ora definitivamente

$$x_n \in \left(x_\infty - \frac{r_\infty}{2}, x_\infty + \frac{r_\infty}{2}\right)$$

Ma allora definitivamente gli x_n hanno garantito un raggio minimo, nel senso che

$$\left(x_m - \frac{r_\infty}{2}, x_m + \frac{r_\infty}{2}\right) \subseteq U_{i_\infty}$$

Ma questo va contro la definizione degli x_n, cioè il fatto che per loro nessun raggio del tipo $\frac{1}{n}$ andasse bene.

— o — o —

Idea per una dim. alternativa di W. senza usare nulla se non il sup (vedi AM1_15).

A cpt. (limitato + chiuso), $f: A \to \mathbb{R}$ continua

① Sia $A \subseteq [-M, M]$. Pongo $I := \inf f(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

② Per ogni $a \in A$ considero

$$\inf \{f(x) : x \in A \cap [-M, a]\} = g(a)$$

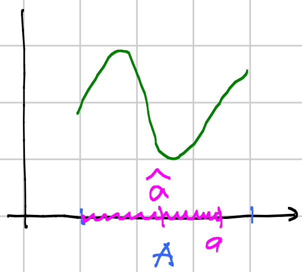
Osservo che $g(a)$ è decrescente in a e $g(M) = I$.

③ Pongo $\hat{a} := \inf \{a \in [-M, M] : g(a) = I\}$

Dico che $\rightarrow \hat{a} \in A$

$\rightarrow f(\hat{a}) = I$

(se per assurdo fosse $f(\hat{a}) > I$)



Completare per esercizio.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 108

Note Title 11/04/2017

SUCCESSIONI DI CAUCHY E COMPLETEZZA

Def. Sia x_n una succ. di numeri reali. Si dice che x_n è una succ. di Cauchy se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall m \geq n_0 \qquad |x_n - x_m| \leq \varepsilon}$$

Brutalmente: gli x_n stanno definitivamente vicini - vicini

Prop. 1 Sia x_n una succ. di Cauchy. Allora x_n è limitata

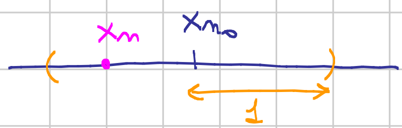
Brutalmente: da un certo p.to in poi gli x_n stanno tutti vicini tra di loro, quelli prima sono un numero finito.

Dim. Uso la definizione con $\varepsilon = 1$ (o anche con $\varepsilon = 2017 \ldots$)
Trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_n - x_m| \leq 1 \qquad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

La applico con $m = n_0$ e ho ottenuto che

$$|x_n - x_{n_0}| \leq 1 \qquad \forall n \geq n_0$$



cioè

$$x_{n_0} - 1 \leq x_n \leq x_{n_0} + 1 \qquad \forall n \geq n_0$$

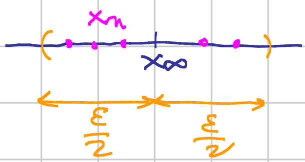
In definitiva
$$x_n \leq \max\{x_{n_0}+1, x_0, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$$
$$x_n \geq \min\{x_{n_0}-1, x_0, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$$

Questo mostra che x_n è limitata. $\square$

Prop. 2 Sia x_n una succ. che ha limite reale, cioè $x_n \to x_\infty \in \mathbb{R}$.
Allora x_n è una succ. di Cauchy.

Brutale: definitivamente gli x_n stanno vicini ad x_∞, quindi stanno vicini tra di loro.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $\varepsilon > 0$ e applico la def. di limite con $\frac{\varepsilon}{2}$.
Ottengo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$|x_n - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora per ogni $n \geq n_0$ e ogni $m \geq n_0$ vale

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_\infty| + |x_\infty - x_m| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

che è quello che volevo. $\square$

Prop. 3 Sia x_n una succ. di Cauchy.
Supponiamo che esista una s.succ. conv. $x_{n_k} \longrightarrow x_\infty$
Allora

$$x_n \longrightarrow x_\infty \qquad \text{(tutta la succ. ha stesso limite)}$$

Brutale: se alcune pecore stanno dalle parti di x_∞, allora ci stanno tutte.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fissiamo $\varepsilon > 0$. Voglio dimostrare che $|x_n - x_\infty| \leq \varepsilon$ definitivamente in n.
Per la convergenza della s.succ. sappiamo che

$$|x_{n_k} - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{definitivamente in } k$$

quindi per ∞ indici.

Essendo la succ. di Cauchy, sappiamo pure che

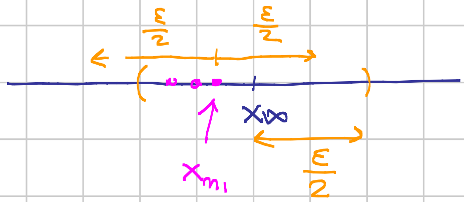
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\quad |x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$

Sappiamo che $|x_n - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ∞ indici (gli n_k con k grande) quindi questo succede per almeno un indice $n_1 \geq n_0$.

A questo punto $\forall n \geq n_0$ vale (uso $m := n_1$)

$$|x_n - x_{n_1}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e quindi}$$

$$|x_n - x_\infty| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$



$\boxed{\text{Teorema}}$ (Altra freccia della Prop. 2)
Sia x_n una succ. di Cauchy.
Allora x_n ha limite reale, cioè esiste $x_\infty \in \mathbb{R}$ t.c. $x_n \to x_\infty$.

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (via B–W e quindi compattezza)

① Per la Prop 1 la succ. è limitata

② Essendo limitata, per B.W. ammette una s.succ. conv. cioè $x_{n_k} \to x_\infty$

③ Per la Prop 3, tutta la succ. tende a x_∞.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Via liminf e limsup

① Per la prop. 1 la succ. è limitata, quindi

$$\ell := \liminf x_n \in \mathbb{R} \qquad L := \limsup x_n \in \mathbb{R}$$

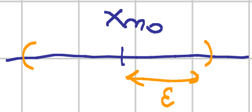
② Voglio dimostrare che $\ell = L$. Dimostro che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$L - \ell \leq 2\varepsilon \qquad \text{(e questo basta).}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e per definizione trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

La uso con $m := n_0$ e deduco che



$$x_{n_0} - \varepsilon \leq x_n \leq x_{n_0} + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq \ell \leq L \leq x_{n_0} + \varepsilon$$

da cui $L - \ell \leq 2\varepsilon$. $\square$

— o — o —

<u>Assoluta convergenza delle serie</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ conv.} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (via ordinamento) (vedi Book 1)

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \qquad + \text{ lemma carab. per serie.}$$

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (via completezza) Pongo

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad \hat{S}_n := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

Prendiamo $m > n$. Vale

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m$$

da cui

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m|$$
$$\leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| = \hat{S}_m - \hat{S}_n = |\hat{S}_m - \hat{S}_n|$$

Catena logica:

se $\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow$ $\hat{S}_n$ ha limite reale $\Rightarrow$

$\hat{S}_n$ è una succ. di Cauchy $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ S_n è una succ. di Cauchy

$\Rightarrow$ S_n ha limite reale $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$*$ $\hat{S}_n$ di Cauchy vuol dire $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall m \geq n_0$
vale $|\hat{S}_m - \hat{S}_n| \leq \varepsilon$,
ma allora a maggior ragione vale con $|S_m - S_n| \leq \varepsilon$

— o — o —

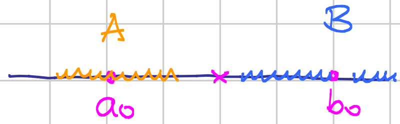
Abbiamo visto che dall'assioma di continuità segue la completezza dei numeri reali (conv. succ. di Cauchy).

Vale anche il viceversa, cioè se valgono gli assiomi algebrici, quelli di ordinamento, la conv. delle succ. di Cauchy e la proprietà archimedea, allora vale l'assioma di continuità.

$\boxed{\text{Due parole della dim.}}$ Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi con A a sx di B ($a \leq b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$)

Voglio trovare un separatore.
Costruisco 2 succ. a_n e b_n in questo modo

- Scelgo $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ a caso



- Considero il p.to medio. Ci sono solo due casi:
  se non è un separatore
  → o lascia A a sx] almeno una
  → o lascia B a dx] delle 2 la fa

Nel primo caso pongo $a_1 = $ p.to medio $\quad b_1 = b_0$
" secondo " " $\quad a_1 = a_0 \quad b_1 = $ p.to medio

- Procedo allo stesso modo: ad ogni passaggio divido in 2 e ottengo succ. a_k e b_k tali che

  A sta sempre a sx di b_k
  B sta sempre a dx di a_k.

Si verifica che a_k e b_k sono succ. di Cauchy, quindi tendono ad un certo c (che è lo stesso perché

$$b_k - a_k \leq \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Si verifica che c è il separatore richiesto.

<u>Domande</u> ① Dove ho usato la proprietà archimedea
② (Molto hard) Dimostrare che esistono strutture in cui valgono assiomi alg. + ord. + conv. succ. di Cauchy, ma non l'archimedea.

ANALISI 1 – LEZIONE 109

Note Title 11/04/2017

UNIFORME CONTINUITÀ

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Ripasso: f è continua in A se (versione ε/δ)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \ \boxed{\exists \delta > 0} \ \forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

questo δ dipende da ε e da x
potrei scrivere $\delta(\varepsilon, x)$

Def. f è uniformemente continua in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \boxed{\exists \delta > 0} \ \forall x \in A \ \forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

questo δ dipende solo da ε,
quindi c'è un δ comune che va bene per ogni $x \in A$

Oss. Si ottengono def. equiv. chiedendo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
o imponendo $y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$
(pensarci per bene!)

Oss. La negazione dell' unif. continuità è

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in A \ \exists y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

Brutalmente: se f non è unif. continua, allora posso trovare x e y vicini quanto voglio con $f(x)$ e $f(y)$ lontani almeno ε_0

Prop. Se $f: A \to \mathbb{R}$ è lip., allora è pure unif. continua

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$ t.c. ...
Per ipotesi esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Pongo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ e ottengo che, se $|x-y| \leq \delta$ vale

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Esempio 1 $f(x) = x^2 \qquad A = [0,27]$

f lip. in A ($f'(x)$ limitata) $\Rightarrow$ f unif. cont. in A.

Esempio 2 $f(x) = x^2 \qquad A = \mathbb{R}$

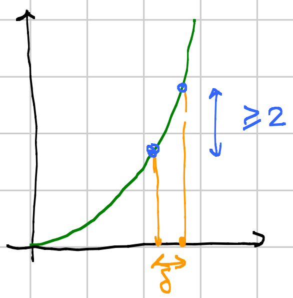
Allora f non è unif. continua

Devo far vedere che posso trovare x e y vicini quanto voglio, ma con immagini lontane

$$|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = |x-y| \cdot |x+y|$$

Dato $\delta > 0$ pongo $\quad x = \frac{1}{\delta}, \quad y = \frac{1}{\delta} + \delta \quad$ e ho che

$$x - y = \delta \qquad \text{e} \qquad f(y) - f(x) = \delta\left(\frac{2}{\delta} + \delta\right) \geq 2$$



Brutalmente: l'uniforme continuità dice che se controllo il gap orizzontale, so controllare il gap verticale.

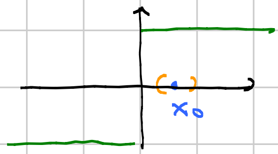
<u>Oss.</u> Nel mondo reale, supponiamo di voler calcolare $f(x)$ con un certo errore. L'unif. continuità mi dice che se l'errore orizz. è $\leq \delta$, allora l'errore verticale è $\leq \varepsilon$. (Voglio calcolare $f(\sqrt{2})$ calcolando $f(1.4\dots)$)

<u>Oss.</u>
- La continuità è una proprietà locale, l'unif. cont. è una propr. globale.
- La continuità è una proprietà topologica, l'unif. cont. è una proprietà metrica.
- La continuità si rincolla, l'unif. continuità no, cioè

$$f \text{ cont. in } A + f \text{ cont. in } B \Rightarrow f \text{ cont. in } A \cup B$$

$$f \text{ unif. cont in } A + f \text{ unif. cont. in } B \underset{\text{NO}}{\not\Rightarrow} f \text{ unif. cont. in } A \cup B$$

<u>Esempio</u> $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \quad \rightsquigarrow \text{zona } A \\ -1 & \text{se } x < 0 \quad \rightsquigarrow \text{zona } B \end{cases}$

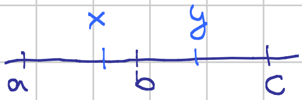


f non è u.c. in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (trovo p.ti vicini quanto voglio con immagini lontane)

<u>Prop.</u> (Buon rincollamento) Siano $a < b < c$ e sia $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. Supponiamo f u.c. in $[a, b]$ e $[b, c]$.
Allora f è UC in $[a, c]$.

$\boxed{\text{Dim}}$ Prendo $\varepsilon > 0$. Allora esistono
- $\delta_1 > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni x e y in $[a, b]$ con $|x - y| \leq \delta_1$
- $\delta_2 > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni x e y in $[b, c]$ con $|x - y| \leq \delta_2$.

Dico che $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ va bene ovunque.
Prendo x e y in $[a,c]$ con $|x-y| \leq \delta$. Ho 3 casi



- Se x e y stanno in $[a,b]$ è fatta
- " " " " $[b,c]$ è fatta
- resta il caso wlog in cui $x \in [a,b]$ e $y \in [b,c]$
  Allora

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f(b)| + |f(b)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(bisogna notare che $|y-b| \leq \delta_2$ e $|b-x| \leq \delta_1$)

<u>Proprietà semplici</u>

① f u.c. in A e $B \subseteq A$ $\Rightarrow$ f u.c. in B (chiedo meno)

② f e g u.c. in A $\Rightarrow$ $f+g$ u.c. in A

<u>Dim</u>. Fisso $\varepsilon > 0$. Ottengo

- $\delta_1 > 0$ t.c. $|f(y)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall$ x e y in A con $|x-y| < \delta_1$
- $\delta_2 > 0$ t.c. $|g(y)-g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ " " $< \delta_2$

Prendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e vedo che sommando le cose funzionano.

③ f u.c. in A, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ λf u.c. in A

(Basta prendere nuovo δ = vecchio δ corrispondente a $\frac{\varepsilon}{\lambda}$)

④ f e g u.c. in A $\Longrightarrow$ $f \cdot g$ u.c. in A

NO! NO!

(Basta prendere $f(x) = g(x) = x$ su $\mathbb{R}$)

⑤ f e g u.c. e limitate in A $\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x)$ u.c. in A.

SLOGAN: termine misto

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| = |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)|$$

$$\leq |f(y)g(y) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(x)g(x)|$$

$$= |f(y)| \cdot |g(y) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f(y) - f(x)|$$

Dim. Siamo $|f(x)| \leq M_f$
$|g(x)| \leq M_g$ per ogni $x \in A$

Sia $M := \max\{M_f, M_g\}$. Dato $\varepsilon > 0$, prendo δ_f e δ_g corrispondenti a

$$\frac{\varepsilon}{2M}$$

Prendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e ho finito perché

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| \leq$$

$$\leq |f(y)| \cdot |g(y) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f(y) - f(x)|$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

se $|x - y| \leq \delta$.

Domanda: e se una sola delle 2 è limitata ?

ANALISI 1 — LEZIONE 110

Note Title 12/04/2017

Teoremi sulle funzioni unif. continue

① HEINE – CANTOR
② ESTENSIONE

Teoremini

① Sublinearità
② Asintotica a U.C. $\Rightarrow$ U.C.

Teorema di HEINE-CANTOR

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che
(i) f continua in A,
(ii) A compatto.
Allora f è unif. cont. in A.

Dim 1 (Per assurdo via cpt. per succ.)

Devo dim. che f è U.C., cioè

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x\in A \ \forall y\in[x-\delta,x+\delta]\cap A \quad |f(x)-f(y)|\le\varepsilon$$

Supponiamo per assurdo che sia falsa, quindi

$$\exists \varepsilon_0>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x\in A \ \exists y\in[x-\delta,x+\delta]\cap A \quad |f(x)-f(y)| \overset{>}{\ge} \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{m}$. Trovo x_m e y_m in A t.c.

$$x_n - \frac{1}{n} \le y_n \le x_n + \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_0$$

Poiché A è cpt. per successioni, x_n ha una s. succ. conv. in A, cioè

$$x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A$$

Per i carabinieri $\quad x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \le y_{n_k} \le x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ anche

− (corretto dopo video)

$$y_{n_k} \longrightarrow x_\infty$$ (lo stesso di sopra)

Ora uso che f è continua (per succ.) in A

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon_0$$

$$0 = f(x_\infty) - f(x_\infty) \ge \varepsilon_0$$ e questo è assurdo.

— o — o —

<u>Lemma</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funz. unif. cont.
Sia $\{x_n\} \subseteq A$ una succ. di Cauchy.
Allora $\{f(x_n)\}$ è una succ. di Cauchy.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $\varepsilon > 0$ e voglio trovare $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f(x_n) - f(x_m)| \le \varepsilon \qquad \forall n \ge n_0 \quad \forall m \ge n_0 \qquad (*)$$

Dato l'ε, prendo il $\delta > 0$ corrispondente nella def. di u.c.

Poiché $\{x_n\}$ è di Cauchy, esisterà $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_n - x_m| \le \delta \qquad \forall n \ge n_0 \quad \forall m \ge n_0$$

A questo punto per unif. continuità vale la $(*)$. □

Oss. (1) Le funzioni u.c. mandano succ. di Cauchy in succ. di C.

(2) Le funzioni continue in generale non mandano succ. di C. in succ. di Cauchy (esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$ continua in $(0,+\infty)$ $x_m = \frac{1}{m}$ è succ. di C., ma $f(x_m) = m$ non lo è)

(3) Se una f continua manda succ. di C. in succ. di C., non è detto che sia u.c. (esempio $f(x) = x^2$)

(4) Le funz. cont. mandano succ. conv. ad un limite nell'insieme di def. a succ. conv.

$\boxed{\text{Teorema di estensione}}$ Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funz. unif. cont. Allora è possibile estendere f alla chiusura, cioè esiste

$$\hat{f} : \operatorname{Clos}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\hat{f}$ è unif. continua e $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$. Inoltre l'estensione è unica.

Corollario classico Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è u.c., allora può essere estesa in modo unico ad una $\hat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$, in modo che rimanga continua, anzi unif. cont.

$\boxed{\text{Dim}}$

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Definizione dell'estensione $\hat{f} : \operatorname{Clos}(A) \to \mathbb{R}$.

Prendo un qualunque p.to $x_0 \in \operatorname{Clos}(A)$. Per un lemma visto tante volte, esiste $\{x_m\} \subseteq A$ t.c. $x_m \to x_0$.
La succ. x_m è di Cauchy perché ha limite.
Poiché f è u.c., per il lemma precedente la succ. $\{f(x_m)\}$ è di Cauchy, quindi ha un limite reale, diciamo

$$f(x_m) \longrightarrow y_0.$$

Pongo

$$\hat{f}(x_0) = y_0.$$

Passo 2 Dimostro che la def. è ben posta, cioè che se uso due succ. diverse, ottengo comunque lo stesso y_0.

Quindi supponiamo che $x_n \to x_0$, $z_n \to x_0$

Sappiamo che $f(x_n) \to y_0$, $f(z_n) \to w_0$

Vorrei che $y_0 = w_0$.

Due modi per vederlo

→ Modo elegante: costruisco una nuova succ. che tende a x_0 alternando gli x_n e gli z_n, cioè $x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, z_3, \ldots$ quindi per il lemma prec.

$$f(x_1), f(z_1), f(x_2), f(z_2) \ldots$$

deve avere un limite, che quindi deve essere il valore comune di y_0 e w_0.

→ Modo bovino: fisso $\varepsilon > 0$ e voglio dimostrare che $|w_0 - y_0| \leq \varepsilon$. Prendo il corr. δ nell'u.c. di f. Poiché $x_n \to x_0$ e $z_n \to x_0$ esisterà $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|x_n - z_n| \leq \delta \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora per u.c.

$$|f(x_n) - f(z_n)| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

e passando al limite ottengo

$$|y_0 - w_0| \leq \varepsilon.$$

Passo 3 Dimostro che $\hat{f}$ estende f, cioè

$$\hat{f}(x) = f(x) \qquad \forall x \in A$$

Se $x \in A$ posso usare la succ. approssimante $x_n \equiv x$, e quindi

$$\hat{f}(x) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\substack{\shortparallel \\ f(x) \ \forall n \in \mathbb{N}.}} = f(x)$$

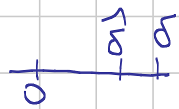
$\boxed{\text{Passo 4}}$ Dimostro che $\hat{f}$ è u.c. in Clos(A).

Prendo $\varepsilon > 0$, prendo il $\delta > 0$ corrispondente nella u.c. di f in A, e prendo un qualunque $\hat{\delta} \in (0, \delta)$.
Dico che $\hat{\delta}$ va bene per l'u.c. di $\hat{f}$, cioè se x e y in Clos(A) verificano $|x-y| \leq \hat{\delta}$, allora di sicuro

$$|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon.$$

Prendo succ. approx $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Poiché $|x-y| \leq \hat{\delta}$, allora definitivamente

$$|x_n - y_n| \leq \delta$$



e quindi per u.c.

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\hat{f}(x) \qquad \hat{f}(y)$$

e passando al limite otteniamo $|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon$.

— o — o —

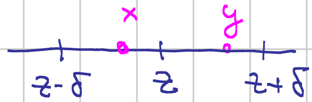
$\boxed{\text{Dim 2 di Heine - Cantor}}$ (Apparentemente diretta via cpt. per ricoprimenti)

Ipotesi: A cpt. e f continua in A.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ogni $z \in A$ esiste $\delta > 0$, che però può dipendere da z, tale che

$$\forall w \in [z-\delta, z+\delta] \cap A \quad \text{vale} \quad |f(z) - f(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Osservo che, se x e y stanno in $[z-\delta, z+\delta] \cap A$ vale



$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Quindi ok se x e y stanno nello stesso intornino di z.

Ora osservo che gli intervalli del tipo $(z-\delta(z), z+\delta(z))$ al variare di z in A ricoprono A.

Vicolo cieco: considerare un sottoricoprimento finito e prendere il + piccolo δ NON basta (capire perché: se prendo x e y con $|x-y| \leq \delta$, non è detto che stiano nello stesso intervallino del sottoricopr.)

Via d'uscita: usare il RAGGIO MAGICO. Esiste $r>0$ tale che per ogni $z \in A$ l'intervallo $(z-r, z+r)$ sta in uno degli intervalli del ricoprimento.

Ora dico che questo $\frac{r}{2}$ fa funzionare l'u.c. Infatti se x e y verificano $|x-y| \leq \frac{r}{2}$, allora $y \in [x-\frac{r}{2}, x+\frac{r}{2}]$, quindi x e y stanno nello stesso intervallo del ricoprimento originale, quindi

$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

— o — o —

Oss. In realtà l'esistenza del raggio magico si dimostra comunque per assurdo ☺.

ANALISI 1 — LEZIONE 111

Note Title 12/04/2017

$\boxed{\text{Proposizione}}$ Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione unif. cont. Allora f è sublineare, cioè esistono A e B reali tali che

$$|f(x)| \leq Ax + B \qquad \forall x \geq 0$$

Oss. ① Vale un risultato analogo se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con un qualunque $a \in \mathbb{R}$ (basta traslare)

② $f(x) = x^2$ è u.c. in $\mathbb{Z}$ e non è sublineare, quindi serve che l'insieme in cui f è u.c. sia una semiretta e non solo un insieme non limitato.

(per l'u.c. di x^2 in $\mathbb{Z}$ basta prendere $\delta = \frac{5}{6}$ ☺)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Mostriamo che $f(x) \leq Ax + B \quad \forall x \geq 0$ (l'altra è del tutto analoga).

Uso l'unif. cont. con $\varepsilon = 1$. Trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Pongo

$$B := \max\{f(x) : x \in [0, \delta]\} \qquad A := \frac{1}{\delta}$$

Dico che vale la stima di sopra.

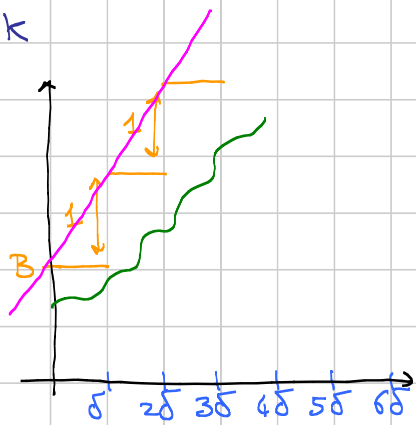
Dimostro preliminarmente che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\max\{f(x) : x \in [k\delta, (k+1)\delta]\} \leq B + k$$

Induzione: $k = 0$ è la def. di B

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$ Prendo $x \in [(k+1)\delta, (k+2)\delta]$ e osservo che

$$f(x) = \underbrace{f(x) - f(x-\delta)}_{\substack{\leq 1 \\ \text{per unif. cont.}}} + \underbrace{f(x-\delta)}_{\substack{\leq B+k \\ \text{per hp induttiva}}} \leq B+k+1$$



A questo punto $f(x)$ sta sotto la retta che "unisce gli scalini" che ha equazione

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. ang.}}}{\frac{1}{\delta}} x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. asse } y}}{B}$$

Più formalmente, se $x \in [k\delta, (k+1)\delta]$ vale

$$f(x) \leq B + K \overset{?}{\leq} B + \frac{1}{\delta} x$$

Controlla la speranza $\quad K \overset{?}{\leq} \frac{1}{\delta} x \iff \delta k \leq x$ e questa è ok.

Allo stesso modo si dimostra che $f(x) \geq -B - Ax$ con $A = \frac{1}{\delta}$ e $-B = \min \{ f(x) : x \in [0, \delta] \}$.

— o — o —

Prop. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$.
compreso

Supponiamo che

(i) f continua in $[a, +\infty)$

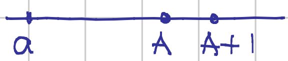
(ii) esiste

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora f è U.C. in $[a, +\infty)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $\varepsilon > 0$. Per definizione di limite, esiste $A \geq a$ tale che

$$|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \geq A$$



Ora nell'intervallo $[a, A]$ $f(x)$ è continua, quindi anche UC per Heine–Cantor. La stessa cosa vale in $[a, A+1]$, quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| \leq \delta \text{ e } x \text{ e } y \text{ in } [a, A+1], \text{ allora } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Dico che lo stesso δ, o meglio $\hat{\delta} := \min\{\delta, 1\}$ va bene su tutto $[a,+\infty)$. Perché?

Prendiamo 2 p.ti x e y in $[a,+\infty)$ con $|x-y| \leq \hat{\delta}$.
Allora ci sono solo 2 casi

- x e y stanno entrambi in $[a, A+1]$. Allora $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ per l'u.c. di f in $[a, A+1]$.
- x e y stanno entrambi in $[A,+\infty)$. Allora

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-\ell| + |\ell - f(y)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

per via del limite.

Non è possibile che $x < A$ e $y > A+1$ (o viceversa) perché $|x-y| \leq 1$ ed è il motivo per cui abbiamo fatto $\hat{\delta}$ come $\min\{\delta, 1\}$.

—o—o—

<u>Corollario</u> Siano $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo che
(i) f continua in $[a,+\infty)$,
(ii) g unif. cont. in $[a,+\infty)$,
(iii) f e g asintotiche, cioè

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x) = 0$$

Allora f è unif. cont. in $[a,+\infty)$.

$\boxed{\text{Dim}}$

$$f(x) = \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{u.c.} \\ \text{per hp}}}{\boxed{g(x)}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{u.c. per la prop. prec.}}}{\boxed{f(x)-g(x)}}}_{\text{u.c. per somma}}$$

Corollario Continua in $[a, +\infty)$ + esiste asintoto obliquo
$\Rightarrow$ unif. continua.

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. cont. in $[0, +\infty)$?

$\boxed{\text{SI}}$ È unif. continua in $[0,1]$ per H.C.
È unif cont. in $[1, +\infty)$ perché è lip.
A questo punto ci sono 2 vie per concludere

- usare un lemma di riincollamento (UC in $[a,b]$ e unif. cont. in $[b, +\infty)$ $\Rightarrow$ unif. cont. in $[a, +\infty)$ (stessa dim. lemma alla lez. 108)
- usare l'overlap, cioè u.c. in $[0,2]$ + u.c. in $[1, +\infty)$ $\Rightarrow$ u.c. in $[0, +\infty)$ come nella dim. dell'ultima prop.

Conseguenza: $f(x) = \sqrt{x}$ è u.c. in ogni insieme $B \subseteq [0, +\infty)$

Esempio 2 $f(x) = \dfrac{\sin(x^8)}{x}$ è u.c. in $(0, +\infty)$? E in $(0,1)$?

$\boxed{\text{SI}}$ Osservo che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, quindi posso estenderla a $[0, +\infty)$ ponendo $f(0) = 0$ e conservando la continuità.
A questo punto osservo che l'estensione è continua in $[0, +\infty)$ e verifica

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

quindi per la prop. prec. è u.c. in $[0, +\infty)$, quindi a maggior ragione in $(0, +\infty)$ o in $(0,1)$

Oss. $f(x)$ NON è lip. in $[3, +\infty)$

(Basta fare la derivata e vedere che non è limitata).

<u>Esempio 3</u> $f(x) = x \log x$ è u.c. in $(0,1)$? in $(1,+\infty)$?

$\boxed{\text{NO in } (1,+\infty)}$ Non è sublineare ☹

<u>Oss.</u> f sublineare $\Rightarrow$ $\limsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{SI in } (0,1)}$ Posso estenderla con continuità fino a $x=0$ ponendo $f(0)=0$.
A quel p.to per H.C. è u.c. in $[0,1]$, quindi a maggior ragione in $(0,1)$.

<u>Esempio 4</u> $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ è u.c. in $[1,+\infty)$?
in $(0,1)$?

$\boxed{\text{SI in } [1,+\infty)}$ C'è solo l'imbarazzo della scelta
$\rightarrow$ è Lip
$\rightarrow$ continua + limite finito

$\boxed{\text{NO in } (0,1)}$ Se lo fosse, sarebbe estendibile alla chiusura $[0,1]$ come funzione continua, dunque dovrebbe avere limite per $x\to0^+$.

<u>Esempio 5</u> $f(x) = \cos(x^8)\sin\frac{1}{x}$ è u.c. in $(1,+\infty)$? in $(0,1)$?

$\boxed{\text{SI in } (1,+\infty)}$ Continua in $[1,+\infty)$ + limite finito
(N.B.: non è Lip.)

$\boxed{\text{NO in } (0,1)}$ Non è estendibile a $[0,1]$ perché il $\lim_{x\to0^+} f(x) = $ N.E.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 112

Note Title 21/04/2017

FUNZIONI HÖLDERIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $\alpha \in (0,1)$.
Si dice che f è α – Hölderiana se esiste $H \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq H\,|x-y|^{\alpha} \qquad \forall x \in A\ \forall y \in A}$$

Oss. La lip. è hölderianità con $\alpha = 1$

Oss. L'hölderianità è una proprietà globale (dipende da A) e metrica.

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$, $A = [0, +\infty)$ Non è lip., ma è $\frac{1}{2}$ - hölder con costante 1.

Devo verificare $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \overset{?}{\leq} 1\,\sqrt{|x-y|}$

wlog $x \geq y$ e mi ritrovo $\sqrt{x} - \sqrt{y} \overset{?}{\leq} \sqrt{x-y}$

$$\Longleftrightarrow \cancel{x} + y - 2\sqrt{xy} \leq \cancel{x} - y \iff 2y \leq 2\sqrt{xy}$$

perché posso ?

$$\iff \sqrt{y} \leq \sqrt{x} \quad \text{Ok}$$

perché $y \leq x$

serve intervallo o semiretta

Esercizio Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ verifica $|f(x) - f(y)| \leq H\,|x-y|^{\alpha}$ con un qualche $\alpha > 1$, allora f è costante.

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = 0 \implies \text{funzione costante.}$$

$$\leq \frac{H \cdot |h|^{\alpha}}{|h|} \longrightarrow 0 \quad \text{se } \alpha > 1$$

Esempio 2 $f(x) = x$ $A = [0, +\infty)$. Su questo insieme f NON è $\frac{1}{2}$ - Hölder (idem per ogni esponente $\alpha < 1$)

Se lo fosse, avrei $|f(x) - f(y)| \leq H |x-y|^\alpha$

La uso con $y = 0$:

$$|x| \leq H |x|^\alpha \qquad \underbrace{|x|^{1-\alpha} \leq H}$$

assurdo per $x \to +\infty$ se $\alpha < 1$.

Esempio 3 $f(x) = x^\alpha$ $A = [0, +\infty)$ $\alpha \in (0,1)$

Su questo insieme $f(x)$ è α-hölder, cioè

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq H |x-y|^\alpha \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

Dim. Suppongo wlog che $x > y$ e pongo $y = t$ e $x = t + h$ dove $h > 0$.

Il LHS diventa $(t+h)^\alpha - t^\alpha = g(t)$

Studio $g(t)$. Calcolo

$$g'(t) = \alpha (t+h)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha \underbrace{[(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]} < 0$$

negativo perché $\alpha - 1 < 0$, quindi "sono al denominatore"

Quindi $g(t) \leq g(0)$ per ogni $t \geq 0$, da cui

$$(t+h)^\alpha - t^\alpha \leq h^\alpha$$

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x-y|^\alpha$$

che è quello che volevo (la costante H è 1).

— o — o —

Mettendo $y = 0$ si vede che $H = 1$ è ottimale

Proprietà delle funz. Hölderiane

① f e g α Höld in A $\Rightarrow$ $f+g$ α Höld in A

$$|f(x)-f(y)| \le H_f\, |x-y|^\alpha \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$
$$|g(x)-g(y)| \le H_g\, |x-y|^\alpha \qquad \text{"} \qquad \text{"}$$

Sommo e ottengo

$$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \le |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$
$$\le (H_f + H_g)\, |x-y|^\alpha$$

② f α Höld in A $\Rightarrow$ λf α-Höld in A

(Esercizio)

③ f e g α Höld + limitate in A $\Rightarrow$ $f \cdot g$ α-Höld in A

$\boxed{\text{Dim.}}$ $|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| =$ (termine misto)

$$|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)\,g(y) - f(y)\,g(y)| \le$$
$$\le |f(x)| \cdot |g(x)-g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x)-f(y)|$$
$$\le M_f \cdot H_g\, |x-y|^\alpha + M_g \cdot H_f\, |x-y|^\alpha$$
$$= (M_f H_g + M_g H_f)\, |x-y|^\alpha$$

Esercizio Fare vedere che se anche una sola è non limitata, allora il prodotto può non essere Hölderiano.

④ <u>Composizione</u> $\quad f$ α - Hölderiana $\quad g$ β - Hölderiana $\Big\}$ su insiemi compatibili con la composizione

$\Rightarrow g \circ f \quad \alpha\beta$ - Hölderiana

$\boxed{\text{Dim.}}$
$$|g(f(x)) - g(f(y))| \leq H_g\, |f(x) - f(y)|^{\beta}$$
$$\leq H_g \left(H_f\, |x-y|^{\alpha}\right)^{\beta}$$
$$= H_g H_f^{\beta}\, |x-y|^{\alpha\beta}$$

⑤ Hölder in A $\Rightarrow$ unif. cont. in A

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dato $\varepsilon > 0$, voglio trovare $\delta > 0$ t.c.

$$|x-y| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Basta porre $H\delta^{\alpha} = \varepsilon$, cioè $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/\alpha}$. A questo punto

$$|f(x) - f(y)| \leq H\, |x-y|^{\alpha} \leq H\, \delta^{\alpha} = H \cdot \frac{\varepsilon}{H} = \varepsilon.$$

⑥ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme LIMITATO. Siano $0 < \beta < \alpha \leq 1$
Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ sia α - Hölder.
Allora f è anche β - Hölder.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ipotesi $|f(x) - f(y)| \leq H_{\alpha}\, |x-y|^{\alpha} \quad \forall x \in A \;\; \forall y \in A$
Ma allora

$$|f(x) - f(y)| \leq H_{\alpha}\, |x-y|^{\alpha} = H_{\alpha}\, |x-y|^{\beta} \cdot \underbrace{|x-y|^{\overbrace{\alpha-\beta}^{>0}}}_{\substack{\text{se A è limitato,} \\ \text{questo è limitato}}}$$

$$\leq \underbrace{H_{\alpha}\, (2M)^{\alpha-\beta}}_{\text{costante}}\, |x-y|^{\beta}$$

Commento: se A è limitato, allora esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$|a| \leq M$ per ogni $a \in A$, ma allora

$$|x-y| \leq (|x|+|y|) \leq 2M$$

— o — o —

Riassunto finale $\quad f : A \to \mathbb{R}$

① Se l'insieme A è qualunque, allora

$$\boxed{f \text{ Hölder in } A \underset{(\text{Lip.})}{} \Rightarrow f \text{ unif. cont. in } A \Rightarrow f \text{ cont. in } A}$$

② Se A è limitato, allora per ogni $0 < \beta < \alpha < 1$ vale

$$\boxed{f \text{ Lip in } A \Rightarrow f\ \alpha\text{-Höld in } A \Rightarrow f\ \beta\text{-Höld in } A \Rightarrow f \text{ è U.C. in } A \Rightarrow f \text{ cont. in } A}$$

Le implicazioni inverse sono tutte false.

Esempi classici da sapere

① $f(x) = x \log x$ non è Lip in $(0,1)$, ma è α-höld per ogni $\alpha \in (0,1)$

② $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$ è U.C. in $(0, \frac{1}{2})$, non è α-höld per ogni $\alpha \in (0,1)$.

ANALISI 1 — LEZIONE 113

Note Title 21/04/2017

ROAD MAP Come dimostro che f è/non è u.c. – Höld – lip ?

Lipschitzianità

SI
- derivata limitata
- somme, prod., composizioni
- definizione

NO
- derivata non limitata
- spero che non sia u.c.
- nego la definizione
- mancanza di sublinearità

Unif. continuità

SI
- Heine cantor
- spero sia lip. o Hölder
- spezzo l'insieme e reincollo
- definizione
- cont. + asint. a u.c.

NO
- non estendibile
- non sublineare
- definizione negata

Hölderianità

SI
- lip + insieme limitato
- definizione
- criterio di Hölderianità

NO
- spero non unif. cont.
- non sub $|x|^\alpha$
- definizione negata.

Esercizio (superclassico)

È vero che $\boxed{f \ \tfrac{1}{2} \text{ Hölder} \Longleftrightarrow f^2 \text{ è lip}}$?

Sono entrambe false!

① $f(x) = \sqrt{x}+1$ in $[0,1]$ è $\frac{1}{2}$-Hölder, ma

$[f(x)]^2 = x+1+2\sqrt{x}$ non è Lip. ☹

② $f(x) = \pm 1$ a caso in $[0,1]$ può essere orribile, ma $f^2(x)$ è addirittura costante. ☹

Prop (Criterio di Hölderianità)
Sia A un intervallo (o una semiretta o tutto $\mathbb{R}$) e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $\alpha \in (0,1)$.
Supponiamo che
(i) $f(x)$ è continua in A
(ii) $|f(x)|^{1/\alpha}$ è Lip. in A
Allora

$$f(x) \text{ è } \alpha\text{-Höld in } A.$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ipotesi so che

$$\left| |f(x)|^{\frac{1}{\alpha}} - |f(y)|^{\frac{1}{\alpha}} \right| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x \in A \ \forall y \in A$$

Come tesi vorrei che

$$|f(x) - f(y)| \leq H\,|x-y|^{\alpha}$$

Dimostrazione quasi sbagliata

$$|f(x)-f(y)| = \left| \left(|f(x)|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha - \left(|f(y)|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \right|$$

$$\leq \left| |f(x)|^{\frac{1}{\alpha}} - |f(y)|^{\frac{1}{\alpha}} \right|^\alpha$$

Ho usato $|A^\alpha - B^\alpha| \leq |A-B|^\alpha$ (vedi lez. prec.)

$$\leq |L\,|x-y||^\alpha$$

$$= L^\alpha \cdot |x-y|^\alpha$$

L'errore è precorsistico all'inizio: non è vero che $f(x) = \sqrt{f(x)^2}$

Bisogna distinguere 3 casi

- Se $f(x) \geq 0$ e $f(y) \geq 0$, allora la dim. sopra è ok.
- Se $f(x) \leq 0$ e $f(y) \leq 0$, allora messi i segni − che servono si ritorna alla dim. di sopra.
- Se wlog $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$, allora esiste un punto z fra x e y tale che $f(z) = 0$. Qui ho usato che f è cont. e sono su un intervallo. Ora aggiungo e tolgo $f(z)$:

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)|$$

(2 casi prec.) $\leq L^\alpha |x-z|^\alpha + L^\alpha |z-y|^\alpha$

(z sta tra x e y) $\leq L^\alpha |x-y|^\alpha + L^\alpha |x-y|^\alpha$

$$= 2L^\alpha |x-y|^\alpha.$$

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x \log x$ $A = (0,1)$

Non è lip $\rightsquigarrow$ $f'(x)$ non è limitata

Dico che è α-Hölder per ogni $\alpha \in (0,1)$

Essendo continua, basta verificare che $[f(x)]^{\frac{1}{\alpha}}$ è lip.

$$|f(x)|^{\frac{1}{\alpha}} = x^{\frac{1}{\alpha}} |\log x|^{\frac{1}{\alpha}} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} |\log x|^{\frac{1}{\alpha}} + x^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} |\log x|^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \frac{1}{x}$$

Dico che è limitata, ma poiché $\frac{1}{\alpha}-1 > 0$ avremo che

$g'(x) \longrightarrow 0$ per $x \to 0$, il che salva la limitatezza.

Esempio 2 $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$ è UC. in $(0,\frac{1}{2})$ ma non α-Höld. qualunque sia $\alpha > 0$.

- È U.C. perché è estendibile a $[0,\frac{1}{2}]$ come funz. continua $\Rightarrow$ è U.C. in $[0,\frac{1}{2}]$ per H.C. $\Rightarrow$ è ancora meglio in $(0,\frac{1}{2})$

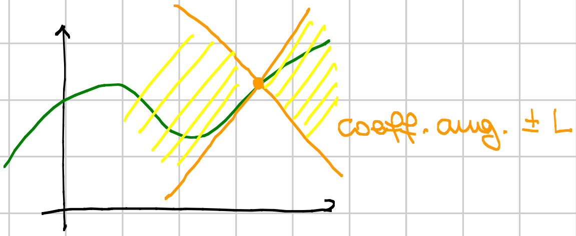
- Verifichiamo che NON è $\frac{1}{2}$-Hölder. Vado per assurdo
Supponiamo che lo sia.
Allora
$$|f(x) - f(y)| \le H\sqrt{|x-y|} \qquad \forall x \in (0,\tfrac{1}{2}) \quad \forall y \in (0,\tfrac{1}{2})$$

Faccio tendere $y \to 0^+$

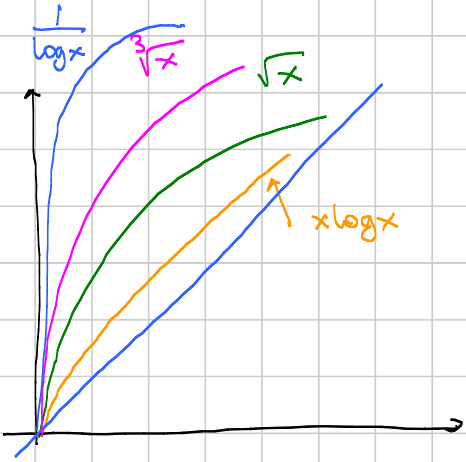
$$|f(x)| \le H\sqrt{x}, \text{ cioè } \frac{1}{|\log x|} \le H\sqrt{x}, \text{ cioè}$$

$H\sqrt{x}|\log x| \ge 1$. Faccio tendere $x \to 0^+$ e ottengo $0 \ge 1$ ☺

Idea mentale di Lip.



Idea mentale di $\frac{1}{2}$-Höld



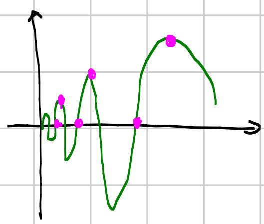
<u>Esempio 3</u> $\quad f(x) = x \sin\frac{1}{x} \qquad A = (0,1)$

- È u.c. ⇝ estensione + H.C. + restrizione
- Non è Lip. ⇝ $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \cancel{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}$ NO LIM.
- È $\frac{1}{2}$ Hölder ⇝ $g(x) = f^2(x) = x^2\sin^2\frac{1}{x}$

$$g'(x) = 2x\sin^2\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\,2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) \qquad \text{LIMITATA}$$

$\Rightarrow g$ lip $\Rightarrow f$ $\frac{1}{2}$ Hölder

- Non è α-Hölder con $\alpha > \frac{1}{2}$ ⇝ esercizio (def. negata)



ANALISI 1 — LEZIONE 114

Note Title 26/04/2017

FUNZIONI CONVESSE

<u>Def.</u> Siano x e y in $\mathbb{R}$. Si dice <u>combinazione convessa</u> di x e y ogni numero che si scrive nella forma

$$\boxed{\lambda x + (1-\lambda) y} \qquad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

comb. lin. con coeff. ≥ 0 a somma 1

<u>Oss.</u> ① È un concetto che vale in ogni spazio vettoriale
② L'insieme delle comb. conv. di x e y è tutto il segmento di estremi x e y.

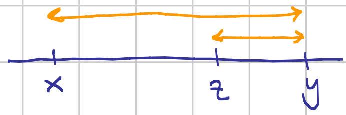
<u>Dim.</u> Supponiamo wlog che $x < y$. Allora per ogni $\lambda \in [0,1]$ vale

$$\lambda x + (1-\lambda) y \geq x, \quad (1-\lambda) y \geq (1-\lambda) x, \quad \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\lambda x + (1-\lambda) y \leq y \quad \ldots \text{ stessa dim.}$$

Viceversa, dato un qualunque $z \in [x,y]$ esiste $\lambda \in [0,1]$ t.c.

$$\lambda x + (1-\lambda) y = z \quad \ldots \text{ basta risolvere} \ldots \quad \lambda = \frac{z-y}{x-y} = \frac{y-z}{y-x} \in [0,1]$$



Brutalmente: per $\lambda = 0$ sono in y
per $\lambda = 1$ sono in x
quando λ va da 0 a 1 percorro al contrario il segmento

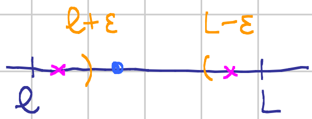
<u>Oss.</u> Anche in $\mathbb{R}^n$ le comb. conv. descrivono il segmento di estremi x e y (in $\mathbb{R}^n$).

Def. Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}$ si dice CONVESSO se per ogni x e y in C vale che tutto il segmento di estremi x e y sta in C.

Prop. I sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$ ricadono in queste tipologie:

- tutto $\mathbb{R}$
- semirette $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$
- intervalli $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$
- p.ti singoli $\{a\}$
- $\emptyset$

Idea: Pongo $\ell = \inf$, $L = \sup$ e mostro che tutti gli $\ell < x < L$ stanno per forza nell'insieme. Poi ℓ ed L possono starci oppure no.



Def. Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme convesso non vuoto, sia $f: C \to \mathbb{R}$. Si dice che f è convessa in C se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x \in C \ \forall y \in C \ \forall \lambda \in [0,1]$$

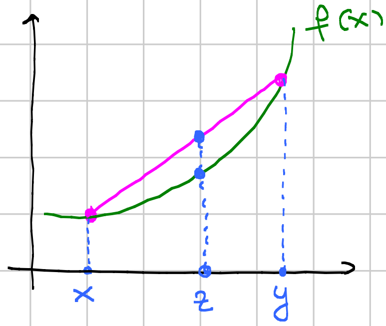
comb. convessa di x e y (essendo C convesso, questa sta a sua volta in C)

comb. conv. di $f(x)$ e $f(y)$

La funzione si dice strettamente convessa se vale il $<$ stretto quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$ aperto.

Def. (geometrica) f è convessa se ogni segmento che congiunge due p.ti del grafico sta "sopra al grafico".

Vorrei avere che per ogni $z \in [x, y]$ vale



$$f(z) \le r(z)$$

equazione retta

Ora sappiamo che z si può scrivere come comb. convessa di x e y, cioè

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \qquad \text{con} \qquad \lambda = \frac{y-z}{y-x}$$

L'eq. della retta è $$r(z) = f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)$$

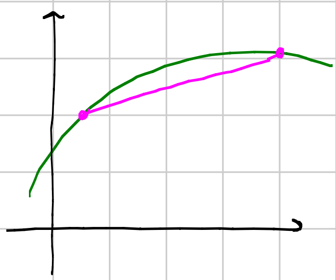
sostituendo a z il valore trovato sopra si ottiene che $f(z) \le r(z)$ è equivalente alla definizione algebrica.

— o — o —

<u>Def.</u> Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso non vuoto, sia $f : C \to \mathbb{R}$.
La funzione f si dice <u>concava</u> in C se vale

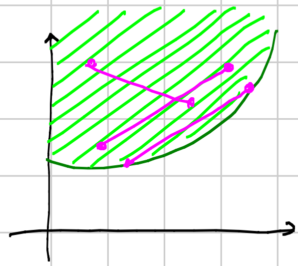
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x \in C \ \ \forall y \in C \ \ \forall \lambda \in [0,1]$$

Strettamente concava ... stessa cosa con $>$



<u>Oss.</u> f è concava $\iff$ $-f$ è convessa.

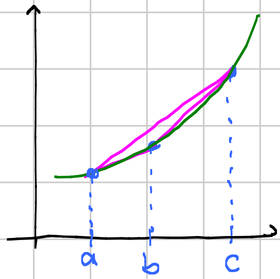
<u>Oss.</u> Una funzione è convessa se e solo se il suo sopragrafico è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$



$$\text{epi}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge f(x) \}$$

epigrafico

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ (Lemma dei 3 rapporti incrementali)



Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \to \mathbb{R}$.
Allora f è convessa in C (se e) solo se

$$a < b < c \implies$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dimostro solo l'implicazione convessa $\Rightarrow$ disuguaglianza

Per ipotesi $\quad f(\lambda a+(1-\lambda)c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$

- l'idea è usare $\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}$ da cui $1-\lambda = \dfrac{b-a}{c-a}$

$$f(\lambda a+(1-\lambda)c) \leq \lambda (f(a)-f(c)) + f(c)$$

$$f(\lambda a+(1-\lambda)c) - f(c) \leq \lambda(f(a)-f(c))$$ ricordo chi è λ:

$$f(b)-f(c) \leq \frac{c-b}{c-a}(f(a)-f(c))$$

Divido per $c-b$ e poi aggiusto i segni e ottengo la disug. dx.

- Per la disug. sx scrivo

$$f(\lambda a+(1-\lambda)c) - f(a) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c) - f(a)$$
$$= (1-\lambda)(f(c)-f(a))$$

Ricordo chi è $(1-\lambda)$...

$f(b)-f(a) \leq \dfrac{b-a}{c-a}(f(c)-f(a))$. Divido per $b-a$ e ho finito.

Lemma 2 (Lemma dei 2 rapporti) Stesse ipotesi del Lemma 1.
Allora f è convessa se e solo se

$$a < b < c \Rightarrow \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}_{\text{i due estremi del Lemma prec.}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ f convessa $\Rightarrow$ disuguaglianza è il lemma precedente.

Resta da dim. che disug. $\Rightarrow$ f convessa.

Prendo x e y, con wlog $x<y$, prendo $\lambda \in [0,1]$ e voglio che

$$f(\underbrace{\lambda x+(1-\lambda)y}_{z}) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Uso la disug. con $x<z<y$

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \; ; \quad f(z)-f(x) \leq \frac{z-x}{y-z}\left(f(y)-f(z)\right)$$

$$f(z)\underbrace{\left(1+\frac{z-x}{y-z}\right)}_{\frac{y-x}{y-z}} \leq f(x)+\frac{z-x}{y-z}f(y)$$

moltiplico per $y-z$

$$f(z)(y-x) \leq (y-z)f(x)+(z-x)f(y)$$ divido

$$f(z) \leq \frac{y-z}{\underbrace{y-x}_{\lambda}}f(x)+\frac{z-x}{\underbrace{y-x}_{1-\lambda}}f(y)$$

$\lambda x+(1-\lambda)y$

come volevo.

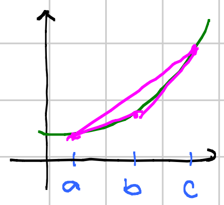
Oss. Stretta conv. $\Leftrightarrow$ disug. strette nei 2 lemmi.

ANALISI 1 — LEZIONE 115

Note Title 26/04/2017

① f convessa $\Rightarrow$

$\forall\, a<b<c \qquad r(a,b) \leq r(a,c) \leq r(b,c)$



② $\forall\, a<c \quad r(a,b) \leq r(b,c) \Rightarrow f$ convessa

dove $\quad r(x,y) := \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Oss. Il rapporto incrementale è una funzione crescente dei due argomenti, cioè

- fissato y, la funzione $x \to r(x,y)$ è crescente in x (disug. dx)
- fissato x, la funzione $y \to r(x,y)$ è " in y (disug. sx)

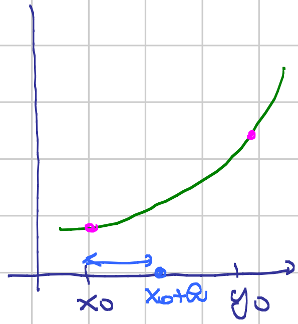
Rapporti tra convessità e derivata prima (caso classico)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un convesso aperto. Sia $f: C \to \mathbb{R}$ una funzione $\boxed{\text{derivabile}}$.
Allora
- f è convessa in $C \Leftrightarrow f'$ è debolmente crescente in C
- f è strett. conv. in $C \Leftrightarrow f'$ è strett. cresc. in C

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ Ipotesi: f è convessa
Tesi: se $x_0 < y_0$, allora $f'(x_0) \leq f'(y_0)$

Per $h>0$ abbastanza piccolo vale che $x_0+h < y_0$, quindi vale che

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}$$

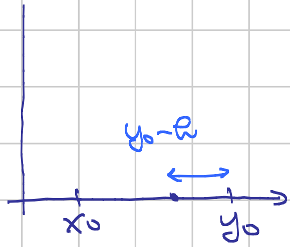


Passando al limite per $h \to 0^+$ ottengo

$$\boxed{f'(x_0) \leq \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}}$$

Per h abbastanza piccolo vale pure

$$x_0 < y_0 - h < y_0$$



da cui

$$\frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leq \frac{f(y_0)-f(y_0-h)}{h} = \frac{f(y_0-h)-f(y_0)}{-h}$$

Passando al limite per $h \to 0^+$ ottengo

$$\boxed{\frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leq f'(y_0)}$$

Mettendo insieme le due disug. ho la tesi.

Oss. Abbiamo in realtà dimostrato che

$$\boxed{f'(x_0) \leq r(x_0,y_0) \leq f'(y_0)} \qquad \forall\, x_0 < y_0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ipotesi: $f'(x)$ debolm. cresc.
Tesi: f convessa

Basta dimostrare che $\quad r(a,b) \leq r(b,c) \quad \forall\, a<b<c$

$$\underset{\displaystyle f'(d_1)}{\underset{\shortparallel}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}} \overset{?}{\leq} \underset{\displaystyle f'(d_2)}{\underset{\shortparallel}{\frac{f(c)-f(b)}{c-b}}}$$

Uso Lagrange

e so che $f'(d_1) \leq f'(d_2)$, quindi ok.

Oss. Nel teorema precedente si suppone che f sia derivabile.
Tuttavia f può essere convessa senza essere derivabile, ad esempio $f(x) = |x|$ in $\mathbb{R}$.

Rapporti tra convessità e derivata seconda (caso classico)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso aperto, sia $f: C \to \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte in C.
Allora
- f è convessa in $C \iff f'' \geq 0$ in C
- f è strett. conv. in C $\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ $f'' > 0$ in C

Esempio classico: $f(x) = x^4$ è strett. conv., ma $f''(x)$ si annulla per $x = 0$.

Dim. f è convessa in $C \iff f'$ è debolm. cresc. in C
$\iff f'' \geq 0$ in C
teorema di monotonia applicato a f'

$f''(x) > 0$ in $C \Rightarrow f'(x)$ strett. cresc. in $C \iff f$ strett. conv. in C
teo. monotonia applicato a f'

Ulteriore enunciato:

- $f''(x) \geq 0$ in C e $f''(x)$ NON si annulla in un intervallo interno, $\Rightarrow f$ strett. conv. in C

Dim. $f''(x) \geq 0$ in C + f'' ha annullamento sporadico $\Rightarrow f'(x)$ strett. cresc. in C $\Rightarrow f$ strett. conv. in C
Monotonia 3.

— o — o —

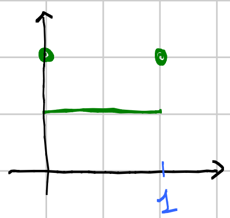
Oss. Valgono caratterizzazioni analoghe delle funzioni concave.

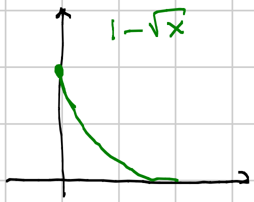
RAPPORTI TRA CONVESSITÀ e CONTINUITÀ

Domande: → convessa $\Rightarrow$ continua ? NO

→ convessa $\Rightarrow$ Lipschitziana (almeno sui limitati) ? NO

Esempi classici $\quad C = [0,1]$





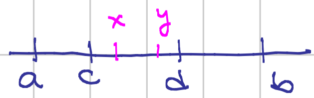
convessa ma non continua

convessa e continua ma non Lipschitziana

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

1. f è continua in $\mathrm{Int}(C)$
2. f è localmente Lipschitziana in $\mathrm{Int}(C)$, cioè è Lip. in ogni intervallo con estremi (chiuso) contenuto in $\mathrm{Int}(C)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta dimostrare il ②. Mi posso sempre ricondurre a questa situazione



$a < c < d < b$ + f convessa in $[a,b]$

$\Rightarrow$ f Lipschitziana in $[c,d]$

Prendo x e y in $[c,d]$ e assumo wlog che $x < y$. Allora

$$r(x,y) \underset{\substack{\text{monot.}\\ 2^a \text{ var.}}}{\leq} r(x,b) \underset{\substack{\text{monot.}\\ 1^a \text{ var.}}}{\leq} r(d,b)$$

Dalla parte opposta

$$r(x,y) \geq r(a,y) \geq r(a,c)$$

Ho quindi dimostrato che

$$\boxed{r(a,c) \leq r(x,y) \leq r(d,b)}$$

I due Sateroti non dipendono da x e y.

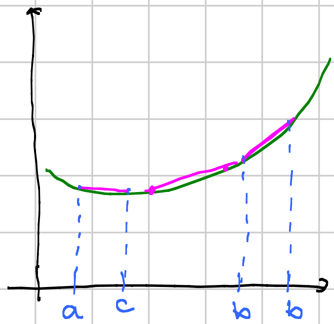
Da questa deduco che

$$|r(x,y)| \leq \max\{|r(a,c)|, |r(d,b)|\} =: L$$

(Ho usato che $A \leq x \leq B$, allora $|x| \leq \max\{|A|,|B|\}$)

precorso ... si distingue $x \geq 0$ e $x \leq 0$.

ho quindi $\dfrac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq L$, da cui la Lip.



<u>Esercizio</u> Sia $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni convesse su un certo insieme convesso C.

Definisco

$$g(x) := \sup\{f_i(x) : i \in I\} \qquad \forall x \in C$$

Dimostrare che $g(x)$ è convessa (purché sia ben definita)

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Per ogni $i \in I$, $x \in C$, $y \in C$, $\lambda \in [0,1]$ vale

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)$$

$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

Ora faccio il sup su $i \in I$ del LHS e ottengo la tesi

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Il sopragrafico di $g(x)$ è l'intersezione dei sopragrafici delle $f_i(x)$, e l'intersezione di insiemi convessi è convessa.

Caso particolare: il max tra 2 funzioni convesse è convessa.
Questo dimostra anche che

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{è convessa}$$

Non vale per il min.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 116

Note Title 28/04/2017

Le funzioni convesse sono derivabili?

NO (basta pensare a $|x|$), ma QUASI.

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$, sia $f: A \to \mathbb{R}$.
Si definiscono derivata destra e sinistra i limiti (posto che esistano in $\mathbb{R}$)

$$\boxed{\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ f'_-(x_0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \end{aligned}}$$

Oss. Con un cambio di variabili $h=-k$ possiamo scrivere

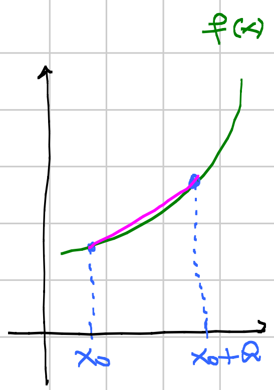
$$f'_-(x_0) = \lim_{k\to 0^+} \frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k}$$

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, sia $x_0 \in \mathrm{Int}(C)$.
Allora esistono per forza

$$f'_+(x_0) \qquad \text{e} \qquad f'_-(x_0)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Vediamo $f'_+(x_0)$. È il limite di

$r(x_0, x_0+h)$, ma questa quantità è monotona in h, cioè
$h \to r(x_0, x_0+h)$ è debolm. crescente

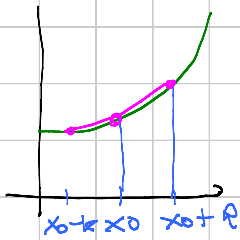


Questo dice che $\lim_{h \to 0^+} r(x_0, x_0+h)$ esiste in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Devo solo escludere che sia $-\infty$, ma questo segue dal fatto che

$$r(x_0, x_0+h) \geq r(x_0-k, x_0) \quad \text{per ogni } k>0$$

per il lemma dei 3 rapporti incrementali.



Stesso discorso a sx.

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Proprietà delle derivate destra e sinistra)
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Allora
(1) $\forall x_0 \in \operatorname{Int}(C)$ vale $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$
(2) se x_0 e y_0 sono in $\operatorname{Int}(C)$ e $x_0 < y_0$, allora

$$f'_-(x_0) \underset{(1)}{\leq} f'_+(x_0) \leq f'_-(y_0) \underset{(1)}{\leq} f'_+(y_0)$$

(3) La derivata destra è continua a destra, cioè

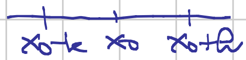
$$\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0) \qquad \forall x_0 \in \operatorname{Int}(C)$$

e analogamente la der. sx è continua a sx, cioè

$$\lim_{x \to x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0) \qquad \forall x_0 \in \operatorname{Int}(C).$$

$\boxed{\text{Dim (1)}}$ Per ogni $h > 0$ e $k > 0$ piccoli a sufficienza vale

$$r(x_0 - k, x_0) \leq r(x_0, x_0 + h) \qquad \text{(lemma 2 rapporti)}$$



Facendo il limite per $h \to 0^+$ ottengo

$$r(x_0 - k, x_0) \leq f'_+(x_0)$$

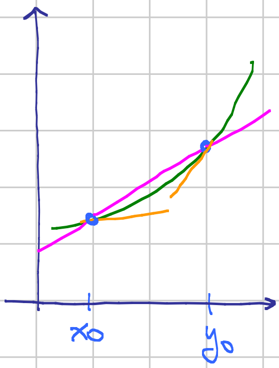
Facendo ora il limite per $k \to 0^+$ ottengo

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

che è quello che volevo.

$\boxed{\text{Dim (2)}}$ Tesi: $x_0 < y_0 \implies f'_+(x_0) \leq f'_-(y_0)$

Dimostriamo di +, cioè che



$$\boxed{f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0)}$$

Per $h > 0$ abbastanza piccolo vale

$$r(x_0, x_0 + h) \leq r(x_0, y_0) \qquad \text{basta } x_0 + h < y_0$$

Passando al lim. per $h \to 0^+$ ottengo $f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0)$

Analogamente per $k > 0$ abb. piccolo vale

$$r(x_0, y_0) \leq r(y_0 - k, y_0) \qquad \text{basta } y_0 - k > x_0$$

Per $k \to 0^+$ ottengo $r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0)$.

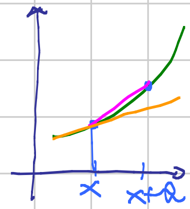
$\boxed{\text{Dim (3)}}$ Devo dimostrare che $f'_+(x)$ è continua a destra.

Disug. facile $\quad f'_+(x_0) \leq f'_+(x) \quad$ per ogni $x \geq x_0$

Quindi
$$\boxed{f'_+(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0^+} f'_+(x)}$$

Disug. "difficile" Per ogni $x \in \text{Int}(C)$ e per ogni $h > 0$ vale

$$f'_+(x) \leq r(x, x+h)$$



Facendo il limite per $x \to x_0^+$ otteniamo

$$\limsup_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq \limsup_{x \to x_0^+} r(x, x+h)$$

$$= \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è un} \\ \text{limite}}}{=} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
$$= r(x_0, x_0+h)$$

Abbiamo scoperto che

$$\limsup_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq r(x_0, x_0+h) \qquad \text{per ogni } h > 0 \text{ abbastanza piccolo}$$

Passando al lim per $h \to 0^+$ abbiamo

$$\boxed{\limsup_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq f'_+(x_0)}$$

Mettendo insieme le 2 disug. abbiamo la tesi

Esercizio Rifare la dim. per quanto riguarda la deriv. sx.

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, sia $x_0 \in \text{Int}(C)$, sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa.

Allora sono fatti equivalenti

(1) $f'(x_0)$ esiste

(2) $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

(3) $f'_+(x)$ è continua a sx in x_0

(4) $f'_-(x)$ è continua a dx in x_0.

Dim (1) $\Longleftrightarrow$ (2) è praticamente ovvio

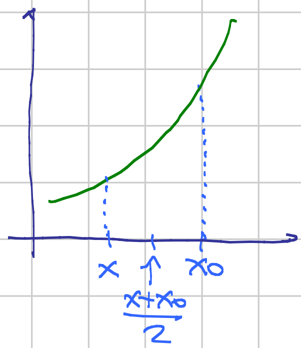
(3) $\Rightarrow$ (1), oppure equivalentemente (3) $\Rightarrow$ (2)

Ipotesi f'_+ continua a sx in x_0

Tesi $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (basta il $\leq$ che è quello non ovvio)

Per ogni $x < x_0$ vale che

$$f'_+(x) \leq f'_-\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$



Passo al limite per $x \to x_0^-$.

Il LHS $\to f'_+(x_0)$ per ipotesi

Il RHS $\to f'_-(x_0)$ perché la derivata sx è sempre continua a sx

Quindi: $f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0)$ che è la disug. voluta.

Ancora meglio: per ogni $x < x_0$ vale $f'_+(x) \leq f'_-(x_0)$

per ipotesi

$$f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0)$$

Resta da dim. che (1) $\Rightarrow$ (3)

Ipotesi: f è derivabile in x_0

Tesi: $f_+'(x_0)$ è continua a sx in x_0.

Vale un fatto più generale: senza ulteriori ipotesi è sempre vero che

$$\lim_{x\to x_0^-} f_+'(x) = f_-'(x_0)$$

Infatti, per ogni $x < x_0$ vale

$$\boxed{f_-'(x)} \le f_+'(x) \le \boxed{f_-'(x_0)}$$

lim. sx di der sx $\longrightarrow$ $f_-'(x_0)$ $\qquad$ $f_-'(x_0)$ $\qquad$ $f_-'(x_0)$

In particolare, se $f'(x_0)$ esiste, allora

$$\lim_{x\to x_0^-} f_+'(x) \underset{\text{sempre}}{=} f_-'(x_0) \underset{\text{se } f \text{ è derivabile in } x_0.}{=} f_+'(x_0)$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 117

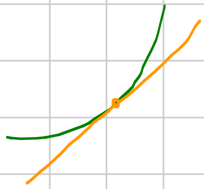
Note Title 28/04/2017

DISUGUAGLIANZE DI CONVESSITÀ

→ Le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti

→ JENSEN

① Funzioni convesse e retta tangente



Caso classico Supponiamo che f'' esista. Allora

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{eq. retta tg. al grafico in } x_0} \qquad \forall x \in C \qquad \forall x_0 \in \text{Int}(C)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Pongo $x - x_0 = h$, da cui $x = x_0 + h$. Allora

$$f(x) = f(x_0+h) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor} \\ \text{Lagrange}}}{=} f(x_0) + f'(x_0)h + \overbrace{\tfrac{1}{2} f''(c) h^2}^{\geq 0}$$

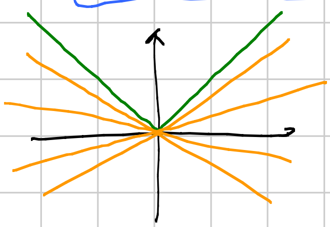
tra x_0 e x_0+h

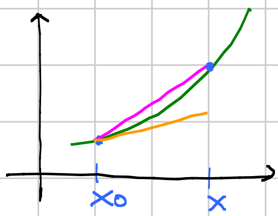
$$\geq f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Caso generale Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa, sia $x_0 \in \text{Int}(C)$.

Allora per ogni $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ vale

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) \qquad \forall x \in C.}$$

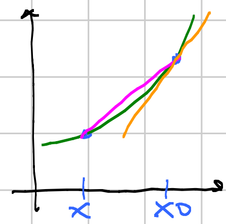




$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $x > x_0$, allora

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = r(x_0,x) \geq f'_+(x_0) \geq m$$

Moltiplico per $(x-x_0)$ (posso perché ...) ottengo la tesi



Se $x < x_0$, allora

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq f'_-(x_0) \leq m$$

Moltiplicando per (x_0-x) (posso perché ...) ottengo

$$f(x_0)-f(x) \leq m(x_0-x),$$ da cui

$$f(x_0)-m(x_0-x) \leq f(x)$$
$$f(x_0)+m(x-x_0) \leq f(x)$$ che è quello che volevo.

— o — o —

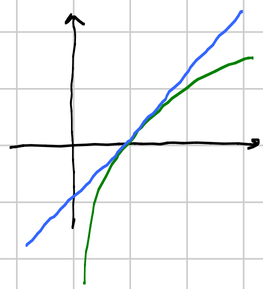
Esempi classici

(1) e^x, $x_0=0$ $\Rightarrow$ $\underset{\uparrow\, f(x_0)}{e^x \geq 1} + \underset{\uparrow\, f'(x_0)(x-x_0)}{x}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\log x$ è concava in $(0,+\infty)$, quindi sta sotto le rette tang.

$x_0=1$: $\quad f(x) \leq \underset{0}{\underbrace{f(x_0)}} + \underset{1}{\underbrace{f'(x_0)}}(x-x_0)$

$$\log x \leq x-1 \qquad \forall x>0$$



Con cambio di variabile diventa

$$\log(1+x) \leq x \qquad \forall x>-1$$

(3) $f(x) = x^\alpha$ è convessa in $x \geq 0$ se $\alpha \geq 1$ (α reale)
(basta pensare che $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$)

Prendendo $x_0 = 1$ otteniamo
$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & \geq & f(x_0) & + & f'(x_0) & (x-x_0) \\ \| & & \| & & \| & \\ x^\alpha & \geq & 1 & + & \alpha & (x-1) \end{array}$$

cioè $x^\alpha \geq 1 + \alpha(x-1) \quad \forall x \geq 0.$

Facendo il cambio di variabili $x-1=y$ otteniamo

$$\boxed{(1+y)^\alpha \geq 1+\alpha y \qquad \forall y \geq -1}$$

Bernoulli con α reale (serve ≥ 1)

— o — o —

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa, sia $n \geq 2$ intero
Siano $x_1, \dots, x_n$ elementi di C
Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri reali ≥ 0 tali che $\boxed{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1}$
Allora

$$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}_{\text{comb. convessa di } x_1, \dots, x_n} \in C$$

e vale

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}$$

Dim Mostriamo che $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C$.
Sia M il max e sia m il min di $x_1, \dots, x_n$. Allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \leq \lambda_1 M + \dots + \lambda_n M = M(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = M$$
$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geq \ \dots \qquad = m$$

Per convessità di C concludo perché $[m, M] \subseteq C$.

Dim 1 di Jensen Induzione su n.

Passo base $n=2$ È la def. di funzione convessa

$$f(\lambda_1 x_1 + \underbrace{\lambda_2}_{(1-\lambda_1)} x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \underbrace{\lambda_2}_{(1-\lambda_1)} f(x_2)$$

$n \Rightarrow n+1$ Abbiamo $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$
$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$

Almeno un coeff. è diverso da 1, diciamo $\lambda_{n+1} \neq 1$ (<1)

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) =$$

$$= f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \underbrace{\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}}_{y}\right)$$

$$\underset{\text{def. di } f \text{ convessa}}{\leq} \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\Big(\overbrace{\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n}_{\text{comb. convessa di } x_1, \dots, x_n}}^{y}\Big)$$

comb. convessa di $x_1, \dots, x_n$ in quanto la somma dei coeff. fa 1:

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

$$\underset{\text{ipotesi induttiva}}{\leq} \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \cancel{(1-\lambda_{n+1})} \left\{ \frac{\lambda_1}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}} f(x_n) \right\}$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

— o — o —

Dim 2 di Jensen Dati $x_1, \dots, x_n$
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Pongo $x_0 := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Prendo $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Per la seconda delle rette tangenti vale

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \qquad \forall x \in C$$

Ma allora

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)}_{\text{RHS di Jensen}} \underset{\text{uso che } \lambda_k \geq 0}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k f(x_0) + m \lambda_k (x_k - x_0) \right)$$

$$= f(x_0) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}_{=1} + m \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - m x_0 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}_{=1}$$

$$f(x_0) \quad + \quad m x_0 \quad - \quad m (x_0)$$

$$= f(x_0) = \underbrace{f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k)}_{\text{LHS di Jensen.}}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Caso speciale}}$ Se $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ otteniamo

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}}$$

Esercizio Provare a dimostrarla per induzione su n e vedere che succede.

Oss. Per le funzioni concave vale tutto al contrario.

Disuguaglianza di YOUNG a 2

$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \rightsquigarrow$ precorso

$$\boxed{ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad \forall a \geq 0 \ \forall b \geq 0 \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1}$$

Dim $f(x) = \log x$ è concava in $(0, +\infty)$, quindi

$$\log(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \log x_1 + \lambda_2 \log x_2$$

La applico con $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ (so che $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ☺)

$x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$

Ottengo

$$\cancel{\log}\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{\cancel{p}} \log a^{\cancel{p}} + \frac{1}{\cancel{q}} \log b^{\cancel{q}}$$

$$= \log a + \log b = \cancel{\log}(ab)$$

Essendo $\log x$ monotona posso semplificare il log.

<u>Esercizio</u> (YOUNG a 3)

$abc \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q + \frac{1}{r}c^r$ se $a, b, c \geq 0$ e

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$

ANALISI 1 — LEZIONE 118

Note Title 02/05/2017

Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz rivisitata

Siano $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ due vettori di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\boxed{|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}} \qquad (C.S.)$$

Talvolta si scrive anche elevando al quadrato

$$\boxed{(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)}$$

Indicando con A e B i due vettori, la disug. diventa

$$|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \|A\| = \langle A, A \rangle^{1/2}$$

Dim. stile algebra lineare: Per ogni $t \in \mathbb{R}$ considero

$$p(t) = \|A + tB\|^2 = t^2 \|B\|^2 + 2t \langle A, B \rangle + \|A\|^2 \geq 0$$

Essendo sempre ≥ 0, il Δ deve essere ≤ 0!

aggiunti dopo video

$$\langle A, B \rangle^2 - \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \leq 0, \quad \text{cioè} \quad \langle A, B \rangle^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.$$

— o — o —

Dim via convessità: Passi fondamentali.

Step 1: Se $\|A\| = 0$ oppure $\|B\| = 0$, allora è banale

Step 2: La disuguaglianza è OMOGENEA. Se moltiplico le componenti di A per λ e quelle di B per μ, ottengo una nuova disug. che vale $\Leftrightarrow$ vale quella prec. (cioè λ e μ si semplificano)

Conseguenza: posso supporre WLOG che $\|A\| = \|B\| = 1$, cioè

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1 \qquad e \qquad b_1^2 + \dots + b_n^2 = 1.$$

(altrimenti considero i nuovi vettori $\frac{A}{\|A\|}$ e $\frac{B}{\|B\|}$)

$\boxed{\text{Step 3}}$ Conclusione. Uso $\boxed{xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}$

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \dots + \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}b_n^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(a_1^2 + \dots + a_n^2)}_{1} + \frac{1}{2}\underbrace{(b_1^2 + \dots + b_n^2)}_{1}$$

$$= 1 = (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

Se ho il val. assoluto al LHS uso la triangolare

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq |a_1b_1| + \dots + |a_nb_n|$$

$$= |a_1| \cdot |b_1| + \dots + |a_n| \cdot |b_n|$$

$$\leq \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \dots \quad \text{come prima.}$$

— o — o —

$\boxed{\text{DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER A 2}}$ (C.S. con esponenti diversi)

Siano $(a_1, \dots, a_n)$ e $(b_1, \dots, b_n)$ vettori con componenti ≥ 0.
Siano p e q esponenti > 1 tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Allora vale

$$\boxed{a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Come prima è banale se $\|A\| = 0$ oppure $\|B\| = 0$.
Altrimenti posso sempre supporre che

$$a_1^p + \dots + a_n^p = b_1^q + \dots + b_n^q = 1.$$

In questo caso uso la disug. di YOUNG e ottengo $\boxed{xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q}$

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \le \frac{1}{p}a_1^p + \frac{1}{q}b_1^q + \ldots + \frac{1}{p}a_m^p + \frac{1}{q}b_m^q$$

$$= \frac{1}{p}(a_1^p + \ldots + a_n^p) + \frac{1}{q}(b_1^q + \ldots + b_n^q)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

— o — o —

Analogamente si può fare una Hölder a più specie, ad esempio 3

$$\boxed{a_1b_1c_1 + \ldots + a_nb_nc_n \le (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + \ldots + b_m^q)^{\frac{1}{q}}(c_1^r + \ldots + c_m^r)^{\frac{1}{r}}}$$

purché a_i, b_i, c_i sono ≥ 0 e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$\boxed{\text{Dim}}$ Omogenea + YOUNG a 3 $\quad xyz \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q + \frac{1}{r}z^r$

— o — o —

Altra variante

$$\left[(a_1b_1)^r + \ldots + (a_nb_n)^r\right]^{\frac{1}{r}} \le (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

è vera se $a_i \ge 0$, $b_i \ge 0$ $\quad \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}}$

$\boxed{\text{Dim}}$ Volendo si usa la solita strategia partendo da una Young opportuna

In alternativa cambio variabili ponendo

$$A_i = a_i^r \qquad B_i = b_i^r \qquad \text{e} \qquad \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$$

Scrivo la Hölder a 2 con esponenti p_1 e q_1.

Disuguaglianza tra le medie p-esime

Dati $a_1, \dots, a_n$ numeri reali POSITIVI, si pone

$$\boxed{M_p(a_1, \dots, a_n) := \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Casi speciali: $\boxed{p=1}$ Media aritmetica
$\boxed{p=2}$ Media quadratica
$\boxed{p=-1}$ Media armonica
$\boxed{p=0}$ Media geometrica $:= (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$

Teorema Dati $(a_1, \dots, a_n)$, la funzione $p \to M_p(a_1, \dots, a_n)$ è crescente (strettamente se gli a_i non sono tutti uguali).
Inoltre

$$\lim_{p \to +\infty} M_p = \max\{a_1, \dots, a_n\} \qquad \lim_{p \to -\infty} M_p = \min\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\lim_{p \to 0} M_p = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$ ↖ Corretto dopo video

Dim. I limiti a $\pm\infty$ sono un esercizio (farlo!)

Il limite per $p \to 0$ è un esercizio sui limiti notevoli che parte con

$$a_i^p = e^{p \log a_i} = 1 + p \log a_i + o(p)$$ (ascoltare AUDIO)

Monotonia Basta dimostrare 2 casi (convincersene)

Caso 1 geometrica $\leq$ aritmetica

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

Facciamo log a dx e sx (possiamo perché ...)

$$\frac{1}{n}(\log a_1 + \ldots + \log a_n) \le \log\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)$$

$$\underbrace{\frac{f(a_1) + \ldots + f(a_n)}{n} \le f\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)}_{\text{Jensen per la funzione concava } \log x = f(x)} \quad \text{con } f(x) = \log x$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ aritmetica $\le M_p$ con $p > 1$, cioè

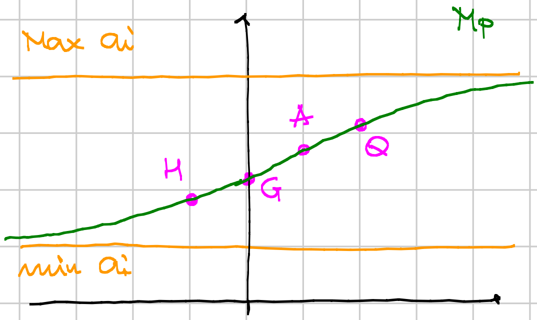
$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \le \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{elevo alla } p \text{ e ottengo}$$

$$\underbrace{\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^p \le \frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}}_{\text{Jensen dalla parte giusta per la funzione}}$$

$f(x) = x^p$ che è convessa per $p > 1$ (anche per $p = 1$)

— o — o —

Perché sono bastati 2 casi?



- $M_{-1} \le M_0$

(basta osservare che

$$M_{-1}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{M_1\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)}$$

$$M_0(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{M_0\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)} \quad \text{(basta passare ai reciproci)}$$

- $M_p \ge M_0$ per ogni $p > 0$ (cambio variabili $a_1^p, \ldots, a_n^p$)
- Stessa cosa per fare $M_p \le M_q$ se $p < q$ e diventa $M_1 \le M_{\frac{q}{p}}$

ANALISI 1 – LEZIONE 119

Note Title 02/05/2017

Esercizio 1 Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa, sia $x_0 \in \text{Int}(C)$ un p.to stazionario. Allora x_0 è un p.to di min. globale

$\boxed{\text{Dim.}}$ Le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti, quindi

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{=0} \qquad \forall x \in C$$

Oss. Si può indebolire l'ipotesi richiedendo solo che

$$f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$$

vale $f(x) \geq$ retta con coeff. compreso tra $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$

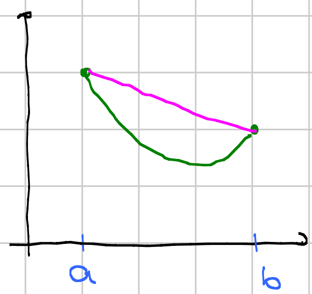
Esercizio 2 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa e continua. Allora

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\} = \max\{f(x) : x \in \{a,b\}\}$$

(cioè il max viene assunto anche agli estremi)

L'unico caso in cui c'è un p.to di max in (a,b) è il caso delle costanti.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono due casi



→ se $f(a) \neq f(b)$, allora c'è un unico p.to di max

→ se $f(a) = f(b) = c$, allora comunque $f(x) \leq c$ per ogni $x \in [a,b]$.

<u>Esercizio 3</u> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa ma non nec. cont.
Allora f è almeno semicontinua sup., cioè

$$f(a) \geq \limsup_{x \to a^+} f(x), \qquad f(b) \geq \limsup_{x \to b^-} f(x)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Mettiamoci in a. Per convessità vale (vedi figura prec.)

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Ora faccio limsup per $x \to a^+$ (idem in b)

<u>Esercizio 4</u> Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso aperto
Sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa e derivabile.
Allora $f'(x)$ è continua in C, cioè $f \in C^1$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dato $x_0 \in \text{Int}(C) = C$ devo dim. che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$

Sappiamo che vale sempre che f'_+ è continua a dx e
f'_- è continua a sx

Ma allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

<u>Esercizio 5</u> Prodotto di 2 funzioni convesse è convessa ?

In generale no : $f(x) = x$ è convessa
$g(x) = x^2$ è convessa
$f(x) \cdot g(x) = x^3$ NO, almeno per $x < 0$.

Esperimento: facciamo finta che esistano le f'' e g''.
Allora

$$[f(x)g(x)]'' = [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]'$$

$$= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

[Oss. generale: la derivata k-esima di un prodotto è una specie di binomio di Newton]

Congettura: se $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ e $f(x)$ e $g(x)$ sono monotone nello stesso verso, e $f(x)$ e $g(x)$ convesse, allora $f(x) \cdot g(x)$ è convessa.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dobbiamo dim. che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y)\, g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y)$$

Partiamo da LHS e usiamo convessità di f e g

$$\text{LHS} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } f \text{ e } g \\ \text{convesse} + \geq 0}}{\leq} (\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))$$

$$= \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1-\lambda)(f(x)g(y) + f(y)g(x)) + (1-\lambda)^2 f(y)g(y)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\leq} \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y)$$

Controllo la speranza portando tutto a sx:

$$\lambda(\lambda-1)f(x)g(x) - \lambda(\lambda-1)(f(x)g(y) + f(y)g(x)) + \lambda(\lambda-1)f(y)g(y) \leq 0$$

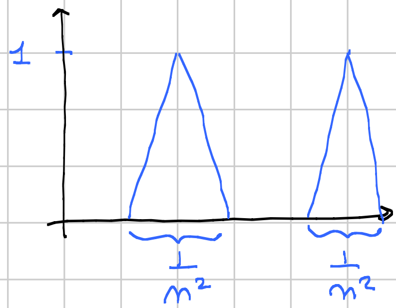
$$\underbrace{\lambda}_{\geq 0}\underbrace{(\lambda-1)}_{\leq 0}\underbrace{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}_{\geq 0 \text{ se } f \text{ e } g \text{ sono monotone dalla stessa parte}} \leq 0$$

Esercizio 6 Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge}$$

Sappiamo da esempi precedenti che non possiamo concludere che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$



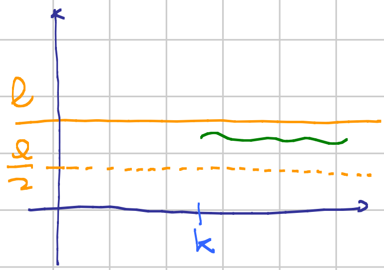
È vero però che

$$\boxed{\liminf_{x \to +\infty} f(x) \leq 0 \leq \limsup_{x \to +\infty} f(x)}$$

(quindi se esiste il limite, è per forza 0)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per assurdo supponiamo che $\liminf_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$

Allora per la caratterizz. esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che



$$f(x) \geq \frac{\ell}{2} \qquad \forall x \geq k$$

Ora per ogni $A \geq k$ vale

$$\int_a^A f(x)\,dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^A f(x)\,dx$$

$$\geq \underset{\shortparallel}{\int_a^k f(x)\,dx} + \int_k^A \frac{\ell}{2}\,dx$$

$$= \text{numero} + \underbrace{\frac{\ell}{2}(A-k)}_{\substack{\downarrow \\ +\infty \text{ per } A \to +\infty}}$$

Quando $A \to +\infty$ a sx tende all'int. improprio, a dx a $+\infty$.
Stessa cosa per il limsup (farlo!).

Esercizio 7 Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{unif. continua}}$ e tale che

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

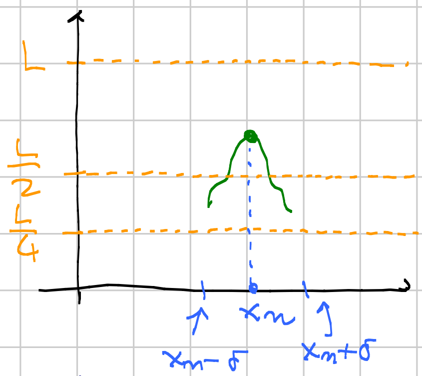
Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ (Idea: se diventa grande ed è unif. cont., ci vuole del tempo a scendere!!)

Supponiamo per assurdo che $\limsup_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$

Per la caratterizzazione esiste una succ. $x_n \to +\infty$ t.c.

$$f(x_n) \geq \frac{L}{2}$$



Considero il δ dell'unif. continuità corrispondente a $\varepsilon = \frac{L}{4}$. Allora sono sicuro che

$$f(x) \geq \frac{L}{4} \qquad \forall x \in [x_n - \delta, x_n + \delta] \text{ perché}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_n) + f(x_n) \\ &\geq \underbrace{f(x_n)}_{\geq \frac{L}{2}} - \underbrace{|f(x) - f(x_n)|}_{\frac{L}{4}} \geq \frac{L}{4} \end{aligned}$$

Ma allora $\displaystyle\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \frac{L}{4}\,dx = \frac{L}{4} \cdot 2\delta$

ma d'altra parte

$$\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{x_n+\delta} f(x)\,dx}_{\downarrow\, I} - \underbrace{\int_a^{x_n-\delta} f(x)\,dx}_{\downarrow\, I} \to 0$$

contraddice

ANALISI 1 — LEZIONE 120

Note Title 03/05/2017

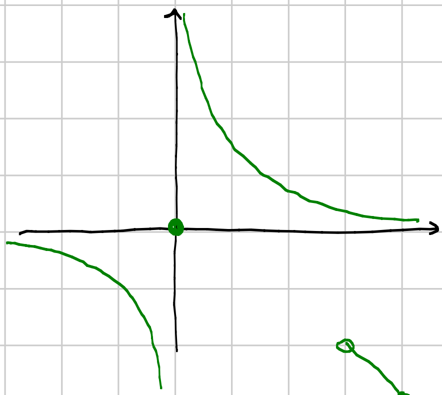
FUNZIONI INVERSE

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi.
Siano $f: A \to B$ e $g: B \to A$ due funzioni.
Si dice che g è la funzione inversa di f se

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B \end{array}}$$

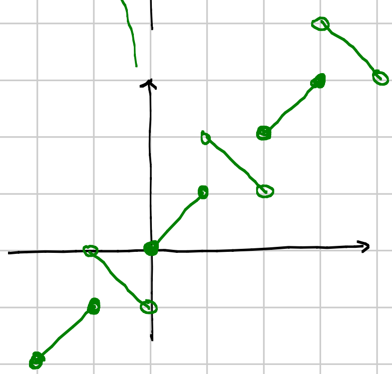
Domande:
1. Rapporti invertibilità / monotonia
2. Se f è continua, posso dire che g è continua ?
3. Se f è deriv. in $x_0 \in \text{Int}(A)$, posso dire g deriv. in $f(x_0)$
4. Se $f \in C^1$, posso dire $g \in C^1$?
5. Se $f \in C^k$, posso dire $g \in C^k$?

$\boxed{1.1}$ Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile, posso dire che f è monotona (strettamente)?



→ Se è monotona, lo è strettamente
(se $f(a_1) = f(a_2)$ con $a_1 \neq a_2$, allora addio iniettività

→ In generale la risposta è NO



$\boxed{1.2}$ Se $f: A \to B$ è monotona e invertibile, posso dire che g è monotona ?

$\boxed{\text{SI}}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo f crescente (per forza strettamente)
Voglio dim. che g è cresc. strett.
Prendo $b_1 < b_2$ e mostro che $g(b_1) < g(b_2)$
Se così non fosse, sarebbe

- $g(b_1) = g(b_2)$ ⇝ NO, perché g non sarebbe iniettiva
- $g(b_1) > g(b_2)$ ⇝ applico f (posso...)

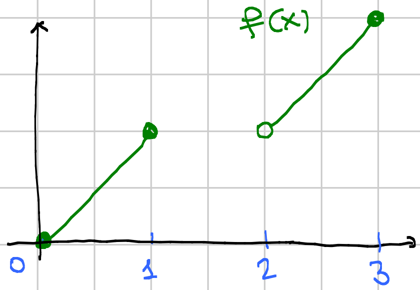
$$f(g(b_1)) > f(g(b_2)),\ \text{cioè}\ b_1 > b_2,\ \text{assurdo.}$$

Analogo nel caso decrescente (farlo!).

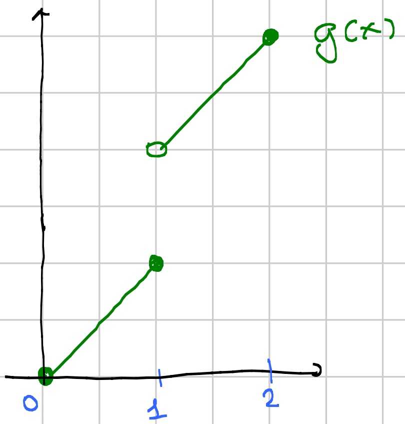
— o — o —

$\boxed{2}$ Rapporti invertibilità – continuità: se f è cont., g è cont.?

$\boxed{\text{NO}}$



$f: [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$
iniettiva e surg., quindi invertibile



$g: [0,2] \to [0,1] \cup (2,3]$

$g(x)$ è discontinua in $x=1$

$\boxed{2.1}$ Se A è compatto e f è continua e invertibile, allora g è continua

$\boxed{2.2}$ Se A è convesso e f è continua + invertibile, allora g è continua

$\boxed{\text{LEMMA DELLA SOTTO – SOTTO}}$

Sia a_n una successione. Supponiamo che ogni sottosucc. a_{n_k} abbia a sua volta una sotto-sotto-succ. $a_{n_{k_i}}$ convergente ad un certo $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$
(sempre con lo stesso ℓ).
Allora $a_n \to \ell$ (tutta quanta)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Voglio dim. che $a_n \to \ell$. Facciamo per semplicità il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Mi serve che

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |a_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \text{definitivamente}$$

Supponiamo per assurdo che sia falso. Allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \text{t.c.} \quad |a_n - \ell| > \varepsilon_0 \quad \text{frequentemente},$$

cioè per infiniti indici, cioè esiste una s. succ. a_{n_k} tale che

$$|a_{n_k} - \ell| > \varepsilon_0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

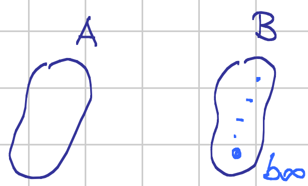
Per ipotesi questa s. succ. a_{n_k} ha una sotto-sotto $a_{n_{k_i}}$ che tende ad ℓ, il che però va contro la disuguaglianza $(*)$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teorema 2.1}}$ A compatto, $f : A \to B$ inv. e cont.
$\Rightarrow$ $g : B \to A$ continua.

Prendo una qualunque succ. $b_n \to b_\infty$ di elem. di B e voglio dimostrare che $g(b_n) \to g(b_\infty)$
Poniamo

$$a_n := g(b_n) \qquad a_\infty := g(b_\infty)$$



Vogliamo dimostrare che ogni s. succ. a_{n_k} ammette una s.s. succ. tendente ad a_∞.
Ora a_{n_k} è una succ. in A, che è cpt, quindi ammette

$a_{n_{k_i}} \longrightarrow \ell \in A$ Vorrei tanto che $\ell = a_\infty$

Applico $f(x)$ e ottengo
$$\underbrace{f(a_{n_{k_i}})}_{= b_{n_{k_i}}} \longrightarrow \underbrace{f(\ell)}_{= b_\infty} \quad (f \text{ cont.})$$

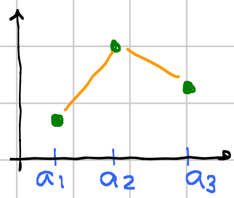
Quindi $f(\ell) = b_\infty$, cioè applicando g: $\ell = g(f(\ell)) = g(b_\infty) = a_\infty$

— o — o —

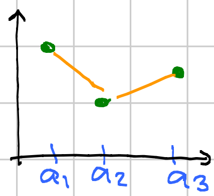
$\boxed{\text{LEMMA}}$ Sia A convesso, sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua + iniettiva.
Allora f è monotona.

$\boxed{\text{LEMMA}}$ (del triangolino) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione NON monotona (nemmeno debolmente).
Allora esistono 3 p.ti $a_1 < a_2 < a_3$ in A per cui vale una delle seguenti

① $f(a_2) > f(a_1)$, $f(a_2) > f(a_3)$



② $f(a_2) < f(a_1)$, $f(a_2) < f(a_3)$

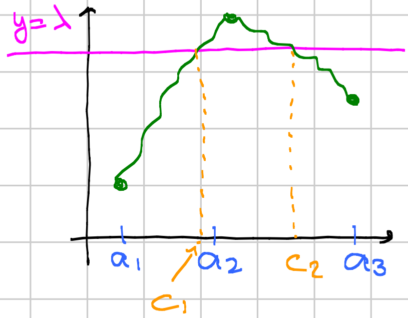


$\boxed{\text{Dim}}$ Non la so fare (brevemente)

$\boxed{\text{Dim. che cont. + insieme conv. + iniett} \Rightarrow \text{monot.}}$

Supponiamo per assurdo che f non sia monotona. Allora vale la tesi del lemma del triangolino.
Supponiamo di essere nel 1° caso, cioè

esistono $a_1 < a_2 < a_3$ con $f(a_2) >$ degli altri 2.
Scelgo un valore λ tale che



$f(a_1) < \lambda < f(a_2)$
$f(a_3) < \lambda < f(a_2)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Per il teo. valori intermedi in } [a_1,a_2] \\ \text{esiste } c_1 \in (a_1,a_2) \text{ t.c. } f(c_1)=\lambda \\ \text{Analogamente} \\ \text{esiste } c_2 \in (a_2,a_3) \text{ t.c. } f(c_2)=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \text{addio iniettività}$$

Ho usato A convesso per applicare teo. valori intermedi.

— o — o —

$\boxed{\text{LEMMA}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \to \mathbb{R}$ strett. monotona. Allora

$$f \text{ è continua} \iff f(A) \text{ è convessa}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ teorema dei valori intermedi

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo f NON continua in $x_0 \in A$.
Allora poniamo

$$\left.\begin{array}{l} \ell := \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \\ \\ L := \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{esistono per monotonia} \\ \text{e verificano } \ell \leq L\end{array}$$

Se $\ell = L$, allora è continua in x_0. Se $\ell < L$, allora tutto l'intervallo (ℓ, L) non è contenuto nell'immagine (dopo x_0 f vale $\geq L$, prima di x_0 f vale $\leq \ell$)

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 121

Note Title 03/05/2017

Teo 2.2 $f : A \to B$ con f continua e A convesso $\Rightarrow g$ continua

Dim.
- Per un lemma precedente f è monotona
- Per un altro lemma, g è monotona
- Sempre per i soliti lemmi, $B = f(A)$ è convesso
- Ma allora g è continua se e solo se $g(B)$ è convesso, ma $g(B) = A$ ☺.

— o — o —

Invertibilità e derivabilità

(3) Se f è invertibile e $f'(x_0)$ esiste in $x_0 \in \text{Int}(A)$, posso dire che $g(x)$ è derivabile in $f(x_0)$?

No $f(x) = x^3$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile ovunque, in part. in $x_0 = 0$
$g(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $f(x_0) = 0$.

Teorema Se f è invertibile, $x_0 \in \text{Int}(A)$, $f'(x_0)$ esiste e $f'(x_0) \neq 0$
Allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Dim. sbagliata $g(f(x)) = x$ ... derivo

$$g'(f(x))\, f'(x) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \rightsquigarrow \quad x = x_0$$

Il pbm. è che ho usato che g sia derivabile ...

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$g'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(y_0+h) - g(y_0)}{h} \overset{y = y_0+h}{=} \lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Per calcolare il limite pongo $g(y) = x$ e ottengo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad g(y) = x, \quad y = f(x)$$

Occhio: perché posso dire che quando $y \to y_0$ ho che $x \to x_0$? Sto usando che g è continua in y_0 (continuità della funzione inversa).

— o — o —

Oss. Tutte le funzioni inverse elementari rientrano nelle ipotesi di almeno uno dei teo. di continuità dell'inversa. (Insieme di partenza compatto o convesso).

Oss. La formula per la derivata dell'inversa si può scrivere come

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}}$$

— o — o —

④ Se $f \in C^1$, posso dire che $g \in C^1$?

$\boxed{\text{SI}}$ PURCHÉ $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$

$\boxed{\text{Dim}}$ Basta guardare la formula di sopra.

— o — o —

⑤ Se $f \in C^{28}$, posso dire che $g \in C^{28}$?

$\boxed{\text{SI}}$ PURCHÉ $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$

Detto altrimenti: passato lo scoglio di C^1, la g ha tutta la regolarità di $f(x)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{BOOTSTRAP}}$ Partiamo dalla formula

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \qquad g' = \text{Mostro}(g)$$

- Se f' è continua, allora g' è continua
- Se f' è C^1, allora $f'(g(x)) \in C^1$ perché composizione di funzioni C^1, quindi $g' \in C^1 \Rightarrow g \in C^2$
- $f \in C^3 \Rightarrow f' \in C^2 \Rightarrow f'(g(x)) \in C^2 \Rightarrow g' \in C^2 \Rightarrow g \in C^3$

Avanti di questo passo ottengo $f \in C^{28} \Rightarrow g \in C^{28}$.

— o — o —

Altra applicazione del bootstrap:
considero il pbm. di Cauchy

$$u' = \arctan u \qquad u(0) = 2017 \qquad u' = \text{Mostro}(u).$$

Allora la soluzione è di classe C^∞.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per un teo. misterioso abbiamo che $u \in C^1$. Ma allora

$u \in C^1 \Rightarrow \arctan u \in C^1 \Rightarrow u' \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$
$\Rightarrow \arctan u \in C^2 \Rightarrow u' \in C^2 \Rightarrow u \in C^3$
$\Rightarrow \ldots$

— o — o —

Esempio 1 $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x + \cos x$

Facile: f è invertibile

Dimostrare che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e calcolare $g'(1), g''(1), g'''(1)$.

Osserviamo che $f'(x) = 2 - \sin x \geq 1 \Rightarrow g$ ha la stessa regolarità di f.

Osserviamo $1 = f(0)$, cioè $g(1) = 0$.

Uso le formule $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Per la $g''(y)$ devo fare il conto:

$$g''(y) = -\frac{1}{[f'(g(y))]^2} f''(g(y))\, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ri-sostituisco}}}{g'(y)} = -\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3}$$

$$f''(x) = -\cos x \quad \Longrightarrow \quad g''(1) = -\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = -\frac{-1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$g'''(y) = -\frac{f'''(g(y))\, g'(y)}{[f'(g(y))]^3} - f''(g(y))\,(-3)\,\frac{f''(g(y))\, g'(y)}{[f'(g(y))]^4}$$

$=$ volendo sostituisco nuovamente $g'(y)$.

— o — o — o —

Alternativa: cerco direttamente il polinomio di Taylor di $g(y)$

$$g(1+h) = g(1) + g'(1)h + \frac{1}{2} g''(1) h^2 + \frac{1}{6} g'''(1) h^3 + o(h^3)$$

E sappiamo che $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ e che

$$f(g(1+h)) = 1+h$$

Per semplicità pongo $g(1+h) = \overset{\substack{g(1)=0 \\ \parallel}}{a} + bh + ch^2 + dh^3 + o(h^3)$

e calcolo la composizione degli sviluppi:

$$\cancel{1} + \underbrace{h} = f(g(1+h)) = f(bh + ch^2 + dh^3 + o(h^3))$$

$$= \underbrace{2bh} + 2ch^2 + 2dh^3 + \cancel{1} - \frac{1}{2}(b^2h^2 + 2bch^3) + o(h^3)$$

$$\underset{h}{1 = 2b} \qquad \underset{h^2}{2c - \frac{1}{2}b^2 = 0} \qquad \underset{h^3}{2d - bc = 0}$$

$b = \frac{1}{2}$ $\quad c = \frac{1}{4} b^2 = \frac{1}{16}$ $\quad d = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{64}$

da cui facilmente

$g'(1) = b = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} g''(1) = c = \frac{1}{16} \rightsquigarrow g''(1) = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{6} g'''(1) = d = \frac{1}{64} \rightsquigarrow g'''(1) = \frac{3}{32}$ (controllare che il contaccio dia lo stesso risultato)

ANALISI 1 — LEZIONE 122

Note Title 04/05/2017

SIMBOLI DI LANDAU (Linguaggio degli infinitesimi)

o piccolo | $\sim$ equiv. asintotica | O grande

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (p.to in cui fare i limiti). Supponiamo per semplicità che $x_0 \in \mathbb{R}$.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite almeno in un intorno di x_0 (eventualmente $\setminus\{x_0\}$)

Proviamo a scrivere $\quad f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$

- Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0}$
- Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se $\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1}$
- Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\omega(x)$ è limitata in un intorno di x_0, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |\omega(x)| \leq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

o equivalentemente $\boxed{\limsup_{x \to x_0} |\omega(x)| \in \mathbb{R}}$ $\quad \underbrace{\limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|}$

Quando si può fare

<u>Esempio 1</u>

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$

$\sin x = O(x)$ per $x \to 0$

$\sin x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$\sin x^2 = O(x^2)$ per $x \to 0$

entrambe vere, ma quella sotto dà più informazioni

Brutalmente $\quad f(x) = o(x^{20}) \rightsquigarrow$ non ci sono potenze con esponente ≤ 20

$f(x) = O(x^{21}) \rightsquigarrow$ non ci sono potenze con esponente < 21

Esempio 2
$\arctan(x^2) = o(x)$ per $x \to 0$ SI
$\arctan(x^2) = O(x)$ per $x \to 0$ SI
$\arctan(x^2) = o(x^2)$ per $x \to 0$ NO
$\arctan(x^2) = O(x^2)$ per $x \to 0$ SI

Fatto generale: Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ L'ipotesi dice che $f(x) = g(x)\,\omega(x)$ con $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$

Ma allora $\limsup_{x \to x_0} |\omega(x)| = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vale O grande.

Esempio 3 $\quad f(x) = O(x^{2017})$ per $x \to 0$

Allora $\quad f(x) = o(x^\alpha)$ per ogni $\alpha < 2017$ (per $x \to 0$)

Dim. In questo caso posso dividere

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x^{2017}}}}_{\text{limitato}} \underbrace{\boxed{\frac{x^{2017}}{x^\alpha}}}_{\to 0 \text{ se } \alpha < 2017} \to 0$$

Esempio 4 $\quad f(x) = x^8 \sin\left(\frac{1}{x^6}\right)$

$f(x) = O(x^2)$ SI $\qquad f(x) = O(x^8)$ SI $\qquad f(x) = o(x^\alpha)$ $\forall \alpha < 8$

$\omega(x) = \sin\left(\frac{1}{x^6}\right)$ è limitato pure ovunque

Esempio 5 $\dfrac{5n^3+7n+2}{2n+13} = a_n$ $a_n = O(n^2)$

$a_n \sim \frac{5}{2} n^2$

$a_n = O(n^3)$ SI

$a_n = o(n^3)$ SI (basta dividere e fare il limite)

Esempio 6 $f(x) = \int_0^x \arctan(e^t)\,dt$

Per $x \to +\infty$ vale $f(x) = O(x)$ e anche $f(x) \sim \frac{\pi}{2} x$

$\boxed{\text{Dim}}$ Per fare l'equivalenza asintotica devo fare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp} \\ \text{(denom} \to +\infty \\ \text{crescendo)}}}{=} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x) = \frac{\pi}{2}$$

Questo dimostra anche che $f(x) = O(x)$ per $x \to +\infty$, ma potevo più sempl. osservare che

$$0 \le f(x) = \int_0^x \arctan(\ldots)\,dt \le \int_0^x \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{2} x$$

e da questo gratis ottengo $0 \le \underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{\omega(x)} \le \frac{\pi}{2}$

Per lo stesso motivo $f(x) = O(x)$ per $x \to 0$

e ancora meglio

$f(x) \sim \frac{\pi}{4} x$ per $x \to 0$

Stesso Hôp e viene $\arctan(e^0) = \frac{\pi}{4}$

Esempio 7 Se $f(x) = O(x)$ per $x \to +\infty$, allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Dim. $\displaystyle \frac{f(x)}{x^2} = \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x}}}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\downarrow\, 0}$

Esempio 8 Se $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$
$g(x) = O(h(x))$ per $x \to x_0$

Allora $f(x) = O(h(x))$ per $x \to x_0$

Dim. $f(x) = g(x) \underbrace{\omega_1(x)}_{\text{limit.}}$ $\qquad g(x) = h(x) \underbrace{\omega_2(x)}_{\text{limit.}}$

$$f(x) = h(x) \underbrace{\omega_2(x)\, \omega_1(x)}_{\text{limit.}}$$

Oss. Basta che nell'ipotesi una delle due sia o piccolo, e nella tesi si ha o piccolo.

Esempio 9 $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ $\overset{\text{"SI"}}{\Longrightarrow}$ $g(x) \sim f(x)$ per $x \to x_0$

$f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$ $\overset{\text{NO}}{\not\Longrightarrow}$ $g(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$

$x^2 = O(x)$ per $x \to 0$, ma $x \neq O(x^2)$ per $x \to 0$

Per l'equiv. asintotica, se posso dividere è ok

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{g(x)}{f(x)} \to 1.$$

Esempio 10 $\quad a_n = |\{x \in [0,n] : \sin x = 0\}|$

numero di elementi

$a_n = O(n)$ o più precisamente $a_n \sim \frac{n}{\pi}$

Esempio 11 $\quad a_n = |\{x \in [0,n] : \sin(x^2) = 0\}|$

Le soluzioni sono $x^2 = k\pi$, quindi $x = \sqrt{k}\sqrt{\pi}$ mi serve

$0 \leq x \leq n$, cioè $0 \leq \sqrt{k}\sqrt{\pi} \leq n$, cioè $0 \leq k\pi \leq n^2$

$0 \leq k \leq \frac{n^2}{\pi}$

Quindi k può andare da 0 a $\left\lfloor \frac{n^2}{\pi} \right\rfloor$

parte intera

Quindi

$$a_n = \left\lfloor \frac{n^2}{\pi} \right\rfloor + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = O(n^2) \qquad a_n \sim \frac{n^2}{\pi}$$

Usando che $\alpha - 1 \leq \lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha$ ottengo

$$\frac{n^2}{\pi} \leq a_n \leq \frac{n^2}{\pi} + 1$$ Dividendo per n^2 ho la tesi

Esempio 12 $\quad f(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt$ come si comporta a $+\infty$?

Banale: $f(x) = O(x e^{\sqrt{x}})$ per $x \to +\infty$

$$f(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt \leq \int_0^x e^{\sqrt{x}}\,dt = x e^{\sqrt{x}}$$

$e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{x}} \quad \forall\, t \in [0,x]$

Vediamo se c'è equiv. asintotica (NO perché è o piccolo)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{e^{\sqrt{x}} + x e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} e^{\sqrt{x}}} = 0$$

Esercizio: $f(x) \sim c\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}$ per un opportuno valore di c.

ANALISI 1 — LEZIONE 123

Note Title 04/05/2017

Come stabilisco se $f(x)$ è derivabile in un dato $x_0 \in \mathbb{R}$?

Quando posso usare i teoremi algebrici è facile.

Esempio 1 $f(x) = |x| \sin x$ $g(x) = |x| \cos x$ $x_0 = 0$

$f'(0) = 0$ (quindi esiste) $g'(0)$ non esiste

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{h} = \lim_{h \to 0} \overset{\to 0}{|h|} \underbrace{\boxed{\frac{\sin h}{h}}}_{\to 1} = 0$$

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h| \cos h}{h} \quad \text{c'è un problema}$$

$$\underbrace{\lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h} \cos h}{\cancel{h}} = 1}_{f'_+(0)}, \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{-\cancel{h} \cos h}{\cancel{h}} = \underbrace{-1}_{f'_-(0)}$$

Esempio 2 $f(x) = x|\sin x|$ in quali p.ti è derivabile?

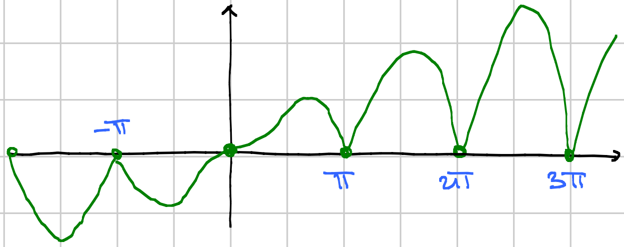
Facile: $\overbrace{\text{tutti}}^{\text{è deriv. in}}$ quelli tranne $x = m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ $\rightsquigarrow$ teo. algebrico

Meno facile: $f'(0)$ esiste e fa 0 $\rightsquigarrow$ definizione come sopra

Nei p.ti $x = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ NON è derivabile $\rightsquigarrow$ definizione

Vediamo per esempio $x = \pi$

$$\frac{f(\pi+h) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(\pi)}}}{h} = \frac{(\pi+h)|\sin(\pi+h)|}{h} = \underbrace{\boxed{(\pi+h)}}_{\pi} \underbrace{\boxed{\frac{|\sin h|}{h}}}_{\pm 1 \text{ a seconda che } h \to 0^{\pm}}$$



Quando sono in $n\pi$ ottengo
$$f'_{+}(n\pi) = n\pi$$
$$f'_{-}(n\pi) = -n\pi$$

— o — o —

<u>Lemma</u> Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $r > 0$. Sia $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che f sia derivabile in $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ e supponiamo di sapere che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora in realtà $f'(x_0) = \ell$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per $h > 0$ vale $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{\cancel{h} \cdot f'(c_h)}{\cancel{h}}$

con $x_0 < c_h < x_0 + h$, quindi $c_h \to x_0$ (carabinieri)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{c_h \to x_0} f'(c_h) = \ell$$

Stessa cosa per $h \to 0^-$.

<u>Alternativa</u> : Hôpital $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{\text{Hôp.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \ell$

Achtung! Se f è derivabile in $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ e continua ovunque, ma

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \quad \text{NON ESISTE}$$

allora LA DERIVATA IN x_0 PUÒ ESISTERE ALLA FACCIA DEL LIMITE

Esempio $\quad f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{per } x \neq 0$$

Ora $\displaystyle \limsup_{x \to 0} f'(x) = 1$ e $\displaystyle \liminf_{x \to 0} f'(x) = -1$

D'altra parte

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

PROPRIETÀ DI DARBOUX DELLE DERIVATE

Supponiamo $f(x)$ derivabile in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Allora

$$\liminf_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-}} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-}} f'(x)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Hôpital o Lagrange come sopra

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \limsup_{h \to 0^+} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \limsup_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Hôp con limsup

Stessa cosa per $h \to 0^-$ e con il liminf.

Conseguenza Sia f continua su (x_0-r, x_0+r) e derivabile in $(x_0-r, x_0) \cup (x_0, x_0+r)$

Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $f'(x_0)$ non esiste, e anzi $f_+'(x_0) = \ell_1$, $f_-'(x_0) = \ell_2$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $f_+'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f'(x_0+h) = \ell_1$

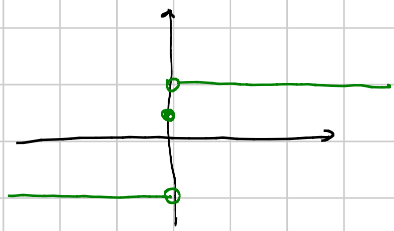
Idem per $f_-'(x_0)$.

Problema (aperto?) Data una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è vero che esiste sempre $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{f' = g}_{\text{ovunque}}$?

$\boxed{\text{FACILE SÌ}}$ Se g è continua (teo. fond. calcolo integrale)

corretto dopo video

$\boxed{\text{FACILE NO}}$ Se g non ha la proprietà di Darboux



Non è una derivata!

Esercizio Sia f derivabile in (x_0-r, x_0+r), ma non sappiamo se f' è continua.

Supponiamo che esistano 2 p.ti a e b t.c.

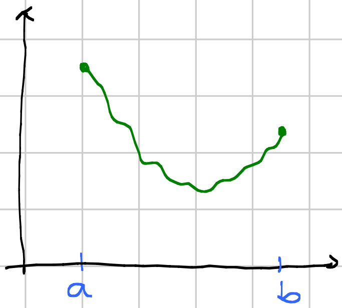
$$f'(a) < 0 \quad \text{e} \quad f'(b) > 0.$$

Allora esiste c t.c. $f'(c) = 0$.

(Se f' è continua è banalmente il teo. valori intermedi)

$\boxed{\text{Dim}}$ Supponiamo $a < b$

Idea. Considero



$$\min \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

Questo esiste per W. (f deriv. $\Rightarrow f$ cont.)

Sia c uno dei p.ti di minimo.

Se fosse $c \in (a,b)$ (interno), allora di sicuro $f'(c) = 0$ ☺

Può essere che il min è assunto in a oppure b?

Questo è impossibile per monotonia 1

- dato che $f'(a) < 0$, allora $f(x) < f(a)$ un po' a dx di a
- " " $f'(b) > 0$, " $f(x) < f(b)$ " " " sx di b.

Oss 1 Vale un risultato analogo se $f'(a) < 2$ e $f'(b) > 2$?

Domanda Se $f(x)$ ha la propr. di Darboux, vale il teo. di esistenza degli zeri ?

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 124

Note Title 09/05/2017

FORMULA DI STIRLING

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}} \qquad \boxed{n! \geq \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}}$$

PRODOTTO DI WALLIS

$$\boxed{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}}$$

Esercizio Il prodotto di Wallis converge

Dim. Wallis converge $\iff \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{4k^2}{4k^2-1}$ converge

$$\iff \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-\frac{1}{4k^2}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)}_{\sim -\frac{1}{4k^2}} \text{ converge}$$

— o — o —

Poniamo

$$S_n := \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n\, n!} = \boxed{\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n\, n!}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(il termine nel riquadro $\to 1$)

Voglio dimostrare che $S_n \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}\,\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{e^n}\,\cancel{n!}}{n^n\sqrt{n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{1}{e}$$

Abbiamo ottenuto

$$\boxed{\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Da questa otteniamo

$$S_{n+1} = S_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{S_{k+1}}{S_k} = S_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}$$

Dimostrare che S_n ha limite è equivalente a dire che la produttoria converge.

<u>Esercizio 2</u> La produttoria converge

$\boxed{\text{Dim}}$ Prod. conv. $\iff \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}\right]$ converge

$$\iff \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1\right]$$

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1 = \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) - 1$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2k}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + \cancel{\frac{1}{2k}} - \cancel{1} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Quindi ordine di infinit. $\geq 2 \Rightarrow$ la serie converge

Da questo momento sappiamo che $S_n \longrightarrow S_\infty \in \mathbb{R}$
"Ci resta" da calcolare S_∞.

Considero il prodotto di Wallis e pongo

$$W_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$W_n = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{2n\quad 2n}{(2n-1)\ (2n+1)}$$

$$W_n\cdot\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2}\ \frac{4\cdot 4}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)\cdot(2n)}{(2n)\cdot(2n)} = \frac{[2^n\cdot n!]^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}$$

Quindi

$$W_n = \frac{(2^n n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}$$

D'altra parte sappiamo che

$$n! = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n S_n}$$

Vado a sostituire

$$W_n = \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)} = \frac{\cancel{2^{4n}}\ \cancel{n^{4n}}\ n^2}{\cancel{e^{4n}}\ S_n^4}\ \frac{\cancel{e^{4n}}\ S_{2n}^2}{\cancel{(2n)^{4n}}\ 2n}\ \frac{1}{(2n+1)}$$

$$= \frac{n^2}{2n(2n+1)}\ \frac{S_{2n}^2}{S_n^4}$$

Abbiamo ottenuto che

$$W_n = \boxed{\frac{n^2}{2n(2n+1)}}\ \boxed{\frac{S_{2n}^2}{S_n^4}}$$

Se vale il prodotto di Wallis.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\ \frac{1}{S_\infty^2} \Longrightarrow S_\infty^2 = \frac{1}{2\pi} \Longrightarrow S_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Quindi Stirling è ok se uno dimostra il prodotto di Wallis.

Poniamo

$$I_n := \int_0^\pi \sin^n x\, dx$$

$$I_n = \int_0^\pi \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\sin^{n-1} x}\, dx = \underbrace{\Big[\underset{F}{(-\cos x)}\, \underset{G}{\sin^{n-1} x}\Big]_0^\pi}_{= 0} - \int_0^\pi (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x\, dx$$

$$= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x \,(1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

↑ grande ritorno

$$n I_n = (n-1) I_{n-2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

$$R_n := \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

$$R_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}}{\frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}} = \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} R_{n-1}$$

Ma allora

$$R_n = R_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{R_k}{R_{k-1}} = R_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = R_0 \cdot W_n$$

Da cui:

$$W_n = \frac{R_n}{R_0}$$

Ora osservo che $R_0 = \dfrac{I_1}{I_0} = \dfrac{\int_0^\pi \sin x\, dx}{\int_0^\pi \sin^0 x\, dx} = \dfrac{2}{\pi}$

Basta dim. che $R_n \longrightarrow 1$

$$\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{\frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}}{I_{2n}} = R_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n}} = 1$$

uso che I_n decresce all'aumentare di n

Conclusione

$$\boxed{\frac{2n}{2n+1}} \leq R_n \leq \boxed{1}$$

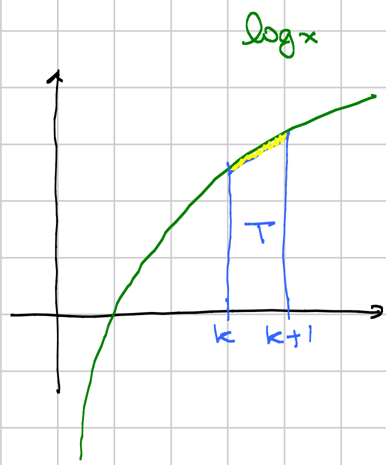
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

— o — o —

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right)-1$$

$$= \int_k^{k+1} \log x - \text{area trapezio}$$



$\boxed{\text{Dim}}$ Area trapezio $= \dfrac{\log k + \log(k+1)}{2}$

$$\int_k^{k+1} \log x \, dx = \left[x \log x - x \right]_k^{k+1}$$

$$= (k+1)\log(k+1) - (\cancel{k}+1) - k\log k + \cancel{k}$$

$$= (k+1)\log(k+1) - k\log k - 1$$

$$\text{Integrale} - \text{Area trapezio} = (k+1)\log(k+1) - k\log k - 1 - \frac{1}{2}\log k - \frac{1}{2}\log(k+1)$$

$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\log(k+1) - \left(k+\frac{1}{2}\right)\log k - 1 \quad \text{☺}$$

— o — o —

$\log x$ concava $\Rightarrow$ aree > 0 $\Rightarrow$ $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = e^{\text{aree}} > 1$ $\Rightarrow$ S_{n+1} cresc.

$\Rightarrow$ $S_n < \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ dimostra $n! > \sqrt{2\pi n}\,\dfrac{n^n}{e^n}$

ANALISI 1 — LEZIONE 125

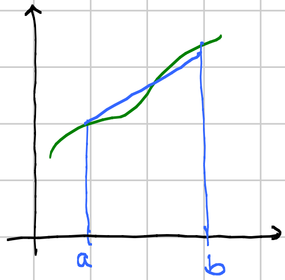
Note Title 09/05/2017

$\boxed{\text{Metodo dei trapezi per gli integrali}}$

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2

Domanda: che errore si commette dicendo che

integrale ~ area trapezio



Fatto generale

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) \right| \leq (b-a)^3 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $r(x)$ la retta del lato obliquo. Poniamo $\varphi(x) := f(x) - r(x)$ e osserviamo che

$$LHS = \left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$$

$$\uparrow$$

$$\text{Area trapezio} = \int_a^b r(x)\,dx$$

Osservo che $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, quindi per Lagrange

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(a)| = |\varphi'(c)| \cdot |x-a| \leq |\varphi'(c)|\,(b-a)$$

Osservo che esiste $d \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(d) = 0$ (Rolle) e quindi

$$|\varphi'(c)| = |\varphi'(c) - \varphi'(d)| = |\varphi''(e)| \cdot |c-d| \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |\varphi''(x)|$$

$$= (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Tornando indietro

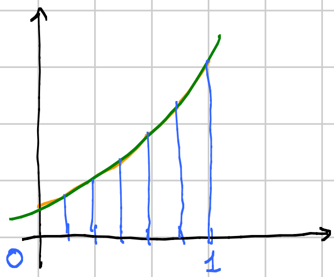
$|\varphi'(c)| \leq (b-a) \max |f''(x)|$, ma allora

$|\varphi(x)| \leq (b-a)^2 \max |f''(x)|$, ma allora

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx \leq \int_a^b \text{cost.}\,dx = (b-a)^3 \max |f''(x)|.$$

— o — o —

Utilità pratica: posso approx un integrale con aree dei trapezi



Voglio calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$. Divido $[0,1]$

in n parti e sommo le aree di n trapezi. Su ogni pezzo l'errore è $\leq \frac{1}{n^3} \max |f''(x)|$

Essendo n pezzi ottengo che

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \sum \text{aree trapezi} \right| \leq n \cdot \frac{1}{n^3} \max |f''(x)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

— o — o —

$$I_n := \int_0^\pi \sin^n x\,dx$$

Domanda 1: calcolare il lim I_n Claim: $I_n \to 0$.

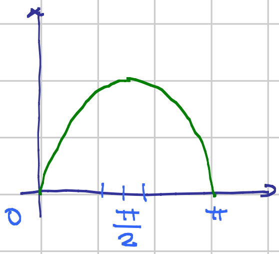
$\boxed{\text{Dim 1}}$ Usando la ricorrenza $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

Questa si può pensare come succ. per ricorrenza e da qui si fa vedere

$$I_{2n} \to 0 \quad \text{e} \quad I_{2n+1} \to 0$$

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Grande tentazione

$$I_n = \int_0^{\pi} \underset{\downarrow \atop 0}{\sin^n x}\, dx \longrightarrow \int_0^{\pi} 0\, dx = 0$$



Proviamo a sistemare l'idea.

Fisso $\varepsilon > 0$ e scrivo

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}$$

$$0 \leq I_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \sin^n x\, dx$$

$$\leq 2\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \underbrace{2\varepsilon}$$

Ho usato che $\sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$

ho usato $\sin x \leq 1$ e zona di integr. di lungh. 2ε

Facendo il limsup ottengo

$$0 \leq \liminf_{n \to +\infty} I_n \leq \limsup_{n \to +\infty} I_n \leq 2\varepsilon$$

Ho usato che $\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \to 0$ per $n \to +\infty$

Essendo ε arbitrario ottengo che $I_n \to 0$.

— o — o —

<u>Domanda 2</u>: determinare ordine di infinitesimo e parte principale di I_n.

$\boxed{\text{Idea}}$ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ Calcoliamo un po' di termini

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \qquad I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0 \qquad I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0$$

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\text{denom}}{\text{denom}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Ora uso Stirling:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n}\,\cancel{(2n)^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}}\;\frac{1}{\cancel{2^{2n}}}\;\frac{\cancel{e^{2n}}}{2\pi n\cdot \cancel{n^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Poi bisogna moltiplicare per $I_0 = \pi$ $\qquad I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n}}$

Un discorso analogo andrebbe fatto sui dispari, portando (forse) a

$$I_n \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$$

— o — o —

<u>Esercizio</u> Per ogni $x \leq 1$ vale $\qquad 1+x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

<u>Dim</u> Studio di funzioni (volendo a sx è convessità, a dx si può intuire con Taylor)

Pongo $x = -t^2$ e ottengo

$$1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Elevo alla n

$$(1-t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \qquad \forall t \in [-1,1]$$

serve $(1-t^2) \geq 0$

Integro su $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt \leq \int_{-1}^{1} e^{-nt^2}\,dt \leq \int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-nt^2}\, dt$$

Pongo $\sqrt{n}\, t = x$ $\quad \sqrt{n}\, dt = dx$

$$= \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{n}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt = +\int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)^n \sin x\, dx$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\, dx$

$$= I_{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$$

$t = \dfrac{1}{\tan x}$ $\quad dt = \dfrac{-1}{\sin^2 x}\, dx$

$$= \int \sin^{2n} x \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2}} = \frac{1}{1+\frac{\cos^2}{\sin^2}} = \sin^2$$

$$= \int \sin^{2n-2} x\, dx = I_{2n-2} \ldots$$

c'è qualche esponente sbagliato ...

Aggiunto dopo video: gli esponenti sono giusti ☺
Sarebbe però meglio fare l'integrale al RHS tra $-\infty$ e $+\infty$, che così gli estremi tornano meglio.
Occhio poi che il cambio $t = \frac{1}{\tan x}$ è "improprio"

$$I_{2n+1} \ldots \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\, dx \leq I_{2n-2} \ldots$$

Moltiplico per $\sqrt{n}$ e se i conti sono giusti

$$\sqrt{n}\, I \ldots \leq \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \leq \sqrt{n}\, I \ldots$$

$\downarrow$ $\sqrt{\pi}$ $\qquad$ $\downarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ $\qquad$ $\downarrow$ parte principale di I_n $\sqrt{\pi}$

ANALISI 1 – LEZIONE 126

Note Title 10/05/2017

Confronto tra definizione di integrale

Ingredienti : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

① $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f limitata)

② $\exists\, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0 \quad \forall x \notin [a,b]$ (nulla fuori da un limitato)

Vogliamo definire $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \quad \left[= \int_a^b f(x)\,dx \right]$

Tre possibili definizioni (anzi 3×2)

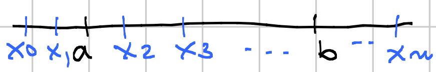
→ Integrale di DARBOUX unrestricted
→ Integrale di DARBOUX ortodosso
→ Integrale di RIEMANN

Def. Una partizione P è un insieme di numeri reali

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n \qquad (n \text{ può dipendere da } P)$$

Si dice che P "ingloba" un intervallo $[a,b]$ se $x_0 \leq a$ e $x_n \geq b$

Def. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa ① e ②, poniamo



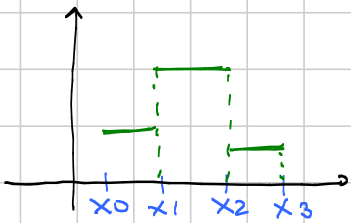
$SF^+(f)$ = step functions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite a partire da una partizione P che ingloba $[a,b]$ e tali che
$$\varphi(x) \geq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$SF^-(f)$ = come sopra richiedendo $\varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Una step function è una funzione tale che

$$\varphi(x) = \lambda_i \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

e
$$\varphi(x) = 0 \qquad \forall x \in (-\infty, x_0) \cup (x_n, +\infty)$$



DEF. DARBOUX UNRESTRICTED

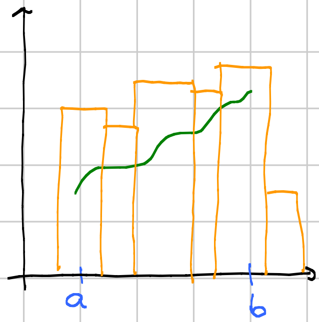
$$I_D^+(f) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \;:\; \varphi \in SF^+(f) \right\}$$ = int. superiore

$$I_D^-(f) := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \;:\; \varphi \in SF^-(f) \right\}$$ = int. inferiore

Vale sempre $I_D^+(f) \geq I_D^-(f)$. Se vale il segno di $=$, allora f è integrabile nel senso Darboux unrestricted.

Ovviamente
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

DEF. DARBOUX ORTODOSSA



In ogni intervallino uso le step function con altezza uguale al sup e all'inf.

Data f come sempre, e data una partizione P, si pone

$$S_D^+(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \underbrace{\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{\text{+ piccola altezza utilizzabile}}$$

$$S_D^-(f,P) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Come prima si definisce

$$I^+_{DO}(f) := \inf \{ S^+_D(f,P) : P \text{ partizione che ingloba } [a,b] \}$$

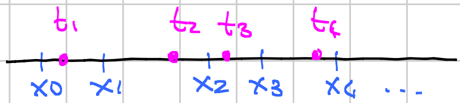
corretto dopo video

$$I^-_{DO}(f) := \sup \{ S^-_D(f,P) : P \ldots [a,b] \}$$

Vale sempre $I^-_{DO}(f) \le I^+_{DO}(f)$ e se coincidono è fatta.

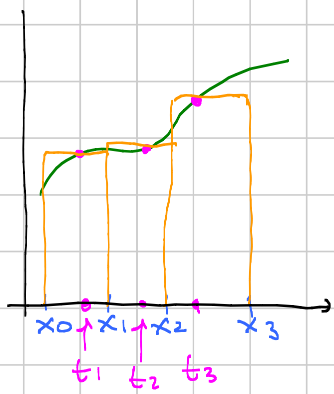
$\boxed{\text{DEF. DI RIEMANN}}$

Def. Una partizione taggata (tagged partition) è una coppia (P,T) dove
- P è una partizione $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$
- $T = (t_1, \ldots, t_n)$ con $x_{i-1} \le t_i \le x_i$



Data una f come sempre, e data una partizione taggata (P,T), con P che ingloba $[a,b]$, si definisce

$$S_R(f,P,T) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \underbrace{f(t_i)}_{\text{altezza}}$$



Def. (diametro di una partizione)
Si definisce diametro di una partizione P la massima lungh. degli intervalli che ne fanno parte, cioè

$$\text{diam}(P) := \max \{ (x_i - x_{i-1}) : i = 1, \ldots, n \}$$

Def. (Integrale di Riemann)
Una f con le solite proprietà si dice integrabile secondo Riemann se esiste un numero reale I (che poi sarà l'integrale) tale che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall (P,T) \text{ con } \operatorname{diam}(P) \leq \delta \text{ vale } |I - S_R(f,P,T)| \leq \varepsilon}$$

Oss ① Questa produce un integrale, ma non un integrale inferiore o superiore
(esercizio: provare a definire un integrale superiore alla Riemann)

② Non abbiamo mai usato la parola inf/sup, quindi tutto vale per funzioni a valori in uno sp. vettoriale.

TEOREMONE Sia f come al solito. Allora

f integrabile alla Darboux unrestricted $\Longleftrightarrow$
f " " " ortodosso $\Longleftrightarrow$
f " " Riemann
(e i valori degli integrali sono gli stessi).

Viene la stessa cosa anche se si usano partizioni con intervalli della stessa lunghezza.

— o — o —

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Allora f è integrabile in $[a,b]$
(che è come dire che estesa a 0 fuori di $[a,b]$ risulta integrabile su $\mathbb{R}$).

Possiamo dimostrarlo alla Darboux ortodosso. Basta per ogni $\varepsilon > 0$ trovare una partizione P tale che

$$\left| S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) \right| \leq \varepsilon$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Parola magica: uniforme continuità (segue da Heine-Cantor)

Dato $\varepsilon > 0$ scelgo $\delta > 0$ che nell'unif. continuità corrisponde a $\frac{\varepsilon}{b-a}$, cioè

$$|x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Scelgo una qualunque partizione con $x_0 = a$, $x_n = b$ e $\operatorname{diam}(P) \leq \delta$ e dico che questa va bene.

$$S_D^+(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{M_i}$$

$$S_D^-(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\min\{\dots\}}_{m_i}$$

Quindi

$$S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{(M_i - m_i)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

(sono i valori di f in due punti che distano $\leq \delta$)

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{\text{somma lunghezza}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

ANALISI 1 — LEZIONE 127

Note Title 23/05/2017

Dim. teoremone

Darboux unrestricted $\Longleftrightarrow$ Darboux ortodossa

Facile: basta pensarci, anzi sono uguali gli integrali inferiori e superiori prodotti con i due metodi.

Punti essenziali

- $S_D^+(f,P)$ sono particolari somme della costruzione unrestricted
- per ogni somma superiore unrestricted ne esiste una ortodossa che è $\leq$ (basta usare le stesse basi)

Riemann $\Longrightarrow$ Darboux

Ipotesi: f integrabile secondo Riemann

Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ partizione P tale che

$$S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) \leq \varepsilon$$

Dato $\varepsilon > 0$ scelgo il $\delta > 0$ corrispondente nella def. di R., cioè quello che assicura

$$\operatorname{diam}(P) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |I - S_R(f,P,T)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La disuguaglianza vale qualunque sia T. Ora in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ scelgo t_i in modo che $f(t_i)$ sia vicino quanto voglio a $\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

In questo modo riesco ad ottenere

$$|I - S_D^+(f,P)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Allo stesso modo ottengo $|I - S_D^-(f,P)| \le \frac{\varepsilon}{2}$
e concludo con la triangolare

$$|S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P)| \le |S_D^+ - I| + |I - S_D^-| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Darboux} \Rightarrow \text{Riemann}}$

Ipotesi: f int. secondo Darboux ortodosso, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \ \text{t.c.} \quad S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) \le \varepsilon$$

Tesi: f int. secondo Riemann, cioè esiste $I \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ \text{diam}(P) \le \delta \Rightarrow |I - S_R(f,P,T)| \le \varepsilon$$

(deve essere vero $\forall P$ con diam $\le \delta$)

Il valore I è l'integrale di Darboux, che esiste per ipotesi.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per Darboux, posso trovare P_ε partizione tale che

$$|I - S_D^+(f,P_\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad |I - S_D^-(f,P_\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

[Da qui in poi è stata riscritta a posteriori, sperabilmente in maniera più efficiente che nel video live]

Devo ora scegliere δ e lo scelgo in modo tale che

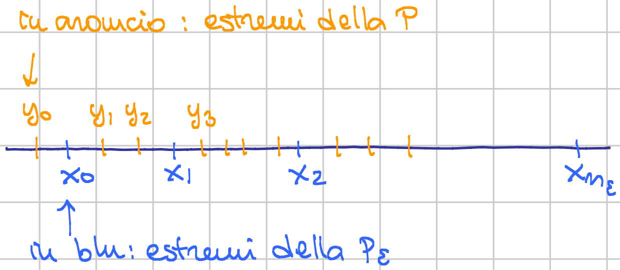
$$\underbrace{\delta \le \text{diam}(P_\varepsilon)}_{\text{condizione comoda, ma non strettamente necessaria}} \qquad \delta \le \frac{\varepsilon}{4M(m_\varepsilon + 1)}$$

m_ε: numero di punti della partizione P_ε

M: costante t.c. $|f(x)| \le M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

CLAIM Il valore di δ appena scelto è ok per la def. di Riemann

Prendo quindi una <u>qualunque</u> partizione taggata (P,T) con $\text{diam}(P) \le \delta$



Considero una nuova partizione Q_ε ottenuta unendo P e P_ε, cioè considerando come pti sia quelli provenienti da P, sia quelli prov. da P_ε.
Osservo che vale (fatto gen. che vale quando si uniscono 2 partizioni)

$$S^+_D(f,Q_\varepsilon) \le S^+(f,P_\varepsilon) < I+\frac{\varepsilon}{2}$$

e analogamente

$$S^-_D(f,Q_\varepsilon) \ge S^-(f,P_\varepsilon) \ge I-\frac{\varepsilon}{2}$$

Ora divido gli intervallini della P in due categorie:

- quelli che sono contenuti in un intervallino della P_ε (che chiamo "interni") e che quindi sono anche intervallini della Q_ε
- quelli che sono "a cavallo" di due intervallini della P_ε, e che quindi sono unione di due intervallini della Q_ε.

Più precisamente, detti $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$ i p.ti della $\mathcal{P}$, definiamo

$$\mathrm{Int} := \{ i \in \{1, \ldots, n\} : (y_{i-1}, y_i) \text{ è interno rispetto alla } \mathcal{P}_\varepsilon \}$$

$$\mathrm{Cav} := \{ i \in \{1, \ldots, n\} : (y_{i-1}, y_i) \text{ è a cavallo rispetto alla } \mathcal{P}_\varepsilon \}.$$

Ora ovviamente

p.ti "taggati" da T

$$S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}, T) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)$$

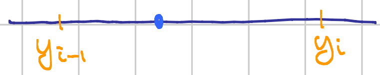
$$= \sum_{i \in \mathrm{Int}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) + \sum_{i \in \mathrm{Cav}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) \qquad (\star)$$

Ora

$$\sum_{i \in \mathrm{Int}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) \leq \underbrace{\sum_{i \in \mathrm{Int}} (y_i - y_{i-1}) \sup_{x \in [y_{i-1}, y_i]} f(x)}_{\text{e questi sono addendi della } S_D^+(f, \mathcal{Q}_\varepsilon)}$$

Per stimare il secondo pezzo, osserviamo che la situazione è questa

$x_{j_i} \leftarrow$ questo sta nella $\mathcal{P}_\varepsilon$



e scriviamo

$$(y_i - y_{i-1}) f(t_i) = (y_i - x_{j_i}) f(t_i) + (x_{j_i} - y_{i-1}) f(t_i)$$

$$= \boxed{(y_i - x_{j_i}) \sup_{[x_{j_i}, y_i]} f(x) + (x_{j_i} - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1}, x_{j_i}]} f(x)} + \boxed{(y_i - x_{j_i}) \underbrace{\left(f(t_i) - \sup \ldots\right)}_{\leq 2M} + (x_{j_i} - y_{i-1}) \underbrace{\left(f(t_i) - \sup \ldots\right)}_{\leq 2M}}$$

Questi sono addendi della $S_D^+(f, \mathcal{Q}_\varepsilon)$ $\qquad\qquad$ $\leq 2M (y_i - y_{i-1})$

Tornando alla ($\star$), abbiamo ottenuto che

$$S_R(f,P,T) \le \left[\sum_{i \in \text{Int}} (y_i - y_{i-1}) \sup_{x \in [y_{i-1}, y_i]} f(x) + \sum_{i \in \text{Con}} (y_i - x_{j_i}) \sup_{x \in [x_{j_i}, y_i]} f(x) + \sum_{i \in \text{Con}} (x_{j_i} - y_{i-1}) \sup_{x \in [y_{i-1}, x_{j_i}]} f(x)\right] = S_D^+(f, Q_\varepsilon)$$

$$+ \left[\sum_{i \in \text{Con}} 2M \underbrace{(y_i - y_{i-1})}_{\le \delta}\right] \le 2M\delta\,(\text{numero el. di Con}) \le 2M\delta(n_\varepsilon + 1)$$

da cui

$$S_R(f,P,T) \le S_D^+(f,Q_\varepsilon) + \underbrace{2M\delta(n_\varepsilon+1)}_{\text{scelta di } \delta}$$

$$\le I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= I + \varepsilon.$$

In maniera del tutto analoga si dimostra che

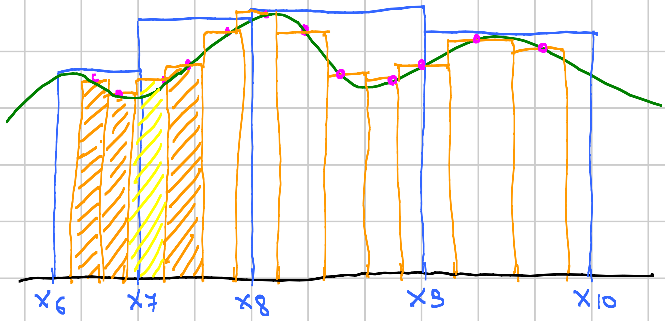
$$S_R(f,P,T) \ge I - \varepsilon.$$

Questo completa la dimostrazione. ☺

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 128

Note Title 12/05/2017



Integrabile rispetto D $\Rightarrow$ Integrabile rispetto Riemann

- Fisso $\varepsilon > 0$
- Per ipotesi esiste partiz. P_ε tale che

$$S_D^+(f, P_\varepsilon) \leq \underset{\text{integrale}}{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_D^-(f, P_\varepsilon) \geq I - \frac{\varepsilon}{2}$$

- Prendiamo

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{4(m_\varepsilon + 1) M}$$

$|f(x)| \leq M$

numero p.ti partizione P_ε

- Tesi: per ogni partizione P (arancione in figura) con diam $(P) \leq \delta$ vale

$$I - \varepsilon \leq S_R(f, P, T) \leq I + \varepsilon$$

Idea quasi giusta:

$S_R(f, P, T) =$ aree arancioni + aree gialle

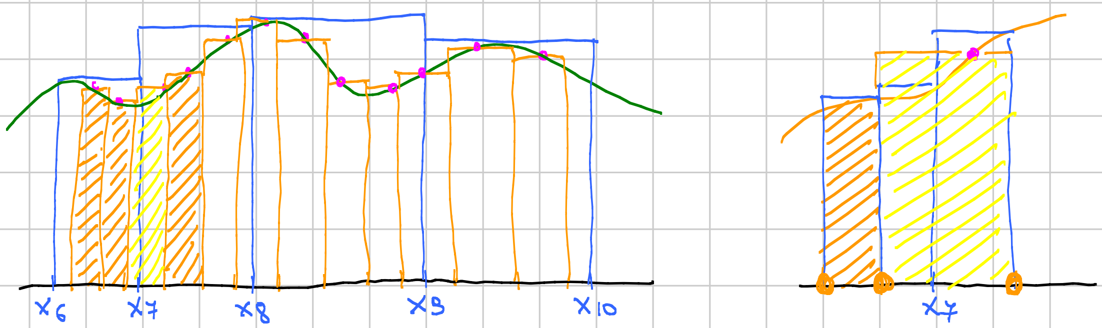
$\leq S_D^+(f, P) + (m_\varepsilon + 1)\, \delta\, M$

numero aree   base max   altezza max

$\leq I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = I + \varepsilon$

Il problema è che aree arancioni ≤ aree blu funziona solo se tutte le altezze blu sono ≥ 0, altrimenti è la figura che inganna.

Come rimediare?



Cambiamo la partizione P_ε, quella di D., aggiungendo anche i p.ti arancioni. Chiamiamo

$$P \cup P_\varepsilon$$

la nuova partizione di D. e osserviamo che

$$S_D^+(f, P\cup P_\varepsilon) \leq S_D^+(f, P_\varepsilon) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Rispetto a questa nuova partizione le aree arancioni sono nuove aree blu. Quindi

$$S_R(f, P, T) = \text{aree arancioni} + \underset{\leq (n_\varepsilon + 1)\delta M}{\text{aree gialle}}$$

$\downarrow$

alcune delle nuove aree blu

Aree blu nuove = aree blu/arancioni + $\underbrace{\text{aree blu a cavallo}}$

si stimano al solito modo

→ sono al max $2(n_\varepsilon+1)$

→ le altezze sono al max M

→ le basi sono ≤ δ

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia f come al solito (f limitata e nulla fuori da un limitato).
Supponiamo che f sia integrabile alla R-D.
Allora $|f|$ è integrabile.

$\boxed{\text{Dim}}$ Più comodo lavorando alla Darboux unrestricted.

Ipotesi: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono 2 funzioni a gradino φ e ψ, ottenute a partire dalla stessa partizione, tali che

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \varepsilon.$$

Tesi: per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $\hat{\varphi}$ e $\hat{\psi}$ step funct. t.c.

$$\hat{\varphi}(x) \leq |f(x)| \leq \hat{\psi}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x))\, dx \leq \varepsilon.$$

Come definisco $\hat{\varphi}$ e $\hat{\psi}$ a partire da φ e ψ?
La partizione sia

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

Prendo $[x_{i-1}, x_i]$. Ho 3 casi

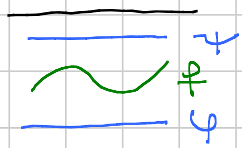
- Se $f(x) \geq 0$ in $[x_{i-1}, x_i]$ pongo $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\hat{\psi}(x) = \psi(x)$

  e la disug. funziona e

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi} - \hat{\varphi})\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi - \varphi)\, dx$$

- Se $f(x) \leq 0$ in $[x_{i-1}, x_i]$ pongo $\hat{\varphi}(x) = -\psi(x)$, $\hat{\psi}(x) = -\varphi(x)$

$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ diventa



$$-\psi(x) \leq -f(x) \leq -\varphi(x)$$
$$\hat{\varphi}(x) \leq |f(x)| \leq \hat{\psi}(x)$$

e per gli integrali

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x))\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varphi(x) + \psi(x))\, dx$$

- Se $f(x)$ cambia segno in $[x_{i-1}, x_i]$ allora pongo

$$\hat{\psi}(x) := \max\{\psi(x), -\varphi(x)\}$$
$$\hat{\varphi}(x) := 0$$

Ancora una volta ho che

$$\hat{\varphi}(x) \leq |f(x)| \leq \hat{\psi}(x)$$

e

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x))\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \max\{\psi, -\varphi\}\, dx \quad \text{(max tra le 2 aree)}$$
$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi - \varphi)\, dx \quad \text{(somma di 2 Aree)}$$

In ogni intervallino abbiamo ottenuto

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi} - \hat{\varphi})\, dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi - \varphi)\, dx$$

Sommando su tutti gli intervalli abbiamo la tesi.

—o—o—

Oss. Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

Dim $\max\{f, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$, $\min\{f, g\} = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Siano f e g come al solito.
Supponiamo f e g integrabili.
Allora fg è integrabile

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Per ipotesi $\varphi_f \leq f \leq \psi_f$ con $\int(\psi_f - \varphi_f)$ piccolo a piacere

$\varphi_g \leq g \leq \psi_g$ con $\int(\psi_g - \varphi_g)$ " "

Posso supporle tutte relative alla stessa partizione

Se fosse $\varphi_f \varphi_g \leq fg \leq \psi_f \psi_g$ concluderei osservando che

$$\int(\psi_f \psi_g - \varphi_f \varphi_g)\,dx =$$

$$= \int(\psi_f \psi_g - \psi_f \varphi_g)\,dx + \int(\psi_f \varphi_g - \varphi_f \varphi_g)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\psi_f}_{\leq M_f} (\psi_g - \varphi_g)\,dx + \int \underbrace{\varphi_g}_{\leq M_g} (\psi_f - \varphi_f)$$

$$\leq M_f \underbrace{\int(\psi_g - \varphi_g)\,dx} + M_g \underbrace{\int(\psi_f - \varphi_f)}$$

$$\leq M_f \frac{\varepsilon}{2M_f} + M_g \frac{\varepsilon}{2M_g} \leq \varepsilon$$

In realtà la dim. funziona solo se f e g sono ≥ 0 perché in tal caso posso prendere $\varphi_f \geq 0$ e $\varphi_g \geq 0$.
Allora

- Se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ sono ok
- Se $f \leq 0$ e $g \leq 0$ sono ok a patto di cambiare i segni
- Se $f \geq 0$ e $g \leq 0$ raccolgo un segno $-$
- Se f e g cambiano segno le scrivo come

$$f = f_+ + f_- \qquad\qquad g = g_+ + g_-$$

dove $f_+ = \max\{f, 0\}$ $\quad f_- = \min\{f, 0\}$

$g_+ = \max\{g, 0\}$ $\quad g_- = \min\{g, 0\}$

e osservo che

$$fg = (f_+ + f_-) \cdot (g_+ + g_-)$$

e così ho la somma di 4 funzioni con il segno costante che sono integrabili per l'osservazione su max/min.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$

Basta dim. che i $\square$ sono integrabili. Per questo osservo che

f integr $\Rightarrow$ $|f|$ integr $\Rightarrow$ $|f|^2 = f^2$ integr.

perché prodotto di due funzioni ≥ 0.

ANALISI 1 — LEZIONE 129

Note Title 12/05/2017

Complementi sulle serie

Per le sommatorie finite (numero finito di addendi) valgono
→ proprietà commutativa
→ " associativa

Vale lo stesso per le serie?

$\boxed{\text{COMMUTATIVA}}$ Sia a_n una successione
Sia $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutazione, cioè una funzione iniettiva e surgettiva.

Posso dire che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad ?$$

Risposta:

$\boxed{\text{Teo 1}}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, allora vale l'uguaglianza per ogni σ.

$\boxed{\text{Teo 2}}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

allora per ogni $S \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutazione t.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \text{ "converge" ad } S$$

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma non assolutamente.

Allora posso riordinare i termini in modo che tenda a 2017.

Idea dim. del teo 2 — È evidente che ci sono termini positivi e neg. e che la serie dei positivi da soli e quella dei neg. da soli divergono entrambe.

Voglio ottenere 2017

- Inizio usando solo termini + fino a quando supero 2017 (prima o poi succede)
- Sommo termini − fino a quando torno sotto 2017 (prima o poi succede)
- continuo in questo modo usando prima o poi tutti i termini
- osservo che i superamenti dall'alto o dal basso sono sempre più piccoli in valore assoluto perché $a_n \to 0$.

— o — o —

Dim Teo 1 — Ipotesi $\sum a_n$ converge e $\sum |a_n|$ converge

Sia S la somma della prima.

Voglio dim. che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi succedono 2 cose:

$$\exists H_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \left| \sum_{k=0}^{m} a_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m \geq H_\varepsilon$$

$$\exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{\sum_{k=m}^{+\infty} |a_k|}_{\text{coda di serie convergente.}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m \geq K_\varepsilon$$

Pongo $L_\varepsilon := \max\{H_\varepsilon, K_\varepsilon\}$.

Poiché $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una permutazione, esiste $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\sigma(\{0,1,\dots,M_\varepsilon\}) \supseteq \{0,1,\dots,L_\varepsilon\}$$

(prima o poi σ prende tutti i valori da 0 ad L_ε.

$\boxed{\text{CLAIM}}$
$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} - S \right| \leq \varepsilon \qquad \forall m \geq M_\varepsilon$$

Se fosse vero, ho finito.
Pongo

$$U_{m,\sigma,\varepsilon} = \{ k \in \{1, \dots, m\} : \sigma(k) \in \{0, 1, \dots, L_\varepsilon\} \}$$

indici k "utili"

$$I_{m,\sigma,\varepsilon} = \{ k \in \{1, \dots, m\} : \sigma(k) \geq L_\varepsilon + 1 \}$$

indici k "inutili"

$$\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} = \underbrace{\sum_{k \in U_{m,\sigma,\varepsilon}} a_{\sigma(k)}}_{= \sum_{k=0}^{L_\varepsilon} a_k} + \sum_{k \in I_{m,\sigma,\varepsilon}} a_{\sigma(k)}$$

commutativa su sommatoria

ma allora

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} - S \right| &\leq \left| \sum_{k \in U} a_{\sigma(k)} - S \right| + \left| \sum_{k \in I} a_{\sigma(k)} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{L_\varepsilon} a_k - S \right| + \sum_{k \in I} |a_{\sigma(k)}| \\
&\leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{L_\varepsilon} a_k - S \right|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{perché } L_\varepsilon \geq M_\varepsilon}} + \underbrace{\sum_{k \geq L_\varepsilon + 1} |a_k|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{perché } L_\varepsilon \geq K_\varepsilon}} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

— o — o —

Oss. Grazie al teorema precedente posso parlare di somma di un insieme numerabile di numeri reali, cioè dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ con A numerabile (che è immagine di una successione) posso scrivere

$$\sum_{a \in A} a$$

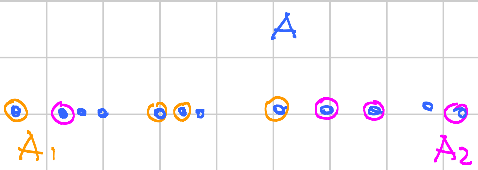
purché questa converga assolutamente
(se scrivo A in modi diversi come immagine di una succ. iniettiva, il risultato della serie non cambia).

$\boxed{\text{Proprietà associativa}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme numerabile e sia

$$\sum_{a \in A} a \quad \text{assolutamente convergente}$$

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ insiemi disgiunti (finiti o numerabili) tali che

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$



Allora vale che

$$\boxed{\sum_{a \in A} a = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{a \in A_n} a}_{\text{somma dei soli elementi di } A_n}}$$

Esercizio: provare a dimostrarlo (l'idea è la stessa della dim. precedente).

Occhio: se la serie iniziale non converge assolutamente, raggruppando i termini può succedere di tutto

$$\underbrace{+1-1}_{0} + \underbrace{1-1}_{0} + \underbrace{1-1}_{0} + \dots$$

ANALISI 1 — LEZIONE 130

Note Title 16/05/2017

Derivata funzione composta

$f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \text{Int}(A)$

$y_0 = f(x_0) \in \text{Int}(B)$

Ipotesi: (i) f derivabile in x_0

(ii) g derivabile in y_0

Tesi: $g \circ f$ è derivabile in x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Dim. brutale

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{k} + \overbrace{f(x_0)}^{y_0}) - g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0}))}{\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{k}} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{k \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{g(k+y_0) - g(y_0)}{k}}}_{g'(y_0)} \cdot \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} = g'(y_0) f'(x_0)$$

Problema: potremmo aver moltiplicato e diviso per 0 $(f(x_0+h) - f(x_0))$

Dim 1 (Passando attraverso definizione estesa di rapp. incrementale)

Definisco

$$R_g(k) := \begin{cases} \dfrac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} & \text{se } k \neq 0 \quad \text{(e abb. piccolo)} \\ g'(y_0) & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Osservo che $R_g(k)$ è una funzione $\boxed{\text{CONTINUA}}$ di k in un intorno dell'origine (continua in $k = 0$).

Osservo anche che

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = R_g(f(x_0+h) - f(x_0)) \, \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(Vale come sopra se $f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0$, mentre se $f(x_0+h) - f(x_0) = 0$, allora LHS $= 0$ perché num $= 0$ e RHS $= 0$ per il 2° termine)

A questo punto posso fare il limite del LHS per $h \to 0$

$$\underbrace{\boxed{R_g(f(x_0+h) - f(x_0))}}_{R_g(0) = g'(y_0)} \; \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} \to g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

per composizione di funzioni continue

— o — o —

$\boxed{\text{DIM 2}}$ Uso il lemma della SOTTO-SOTTO

[Strategia generale: per dimostrare che $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = \ell$ basta dimostrare che per ogni succ. $h_n \to 0$ esiste una sotto-succ. $h_{n_k} \to 0$ tale che

$$\varphi(h_{n_k}) \to \ell \quad (\text{stesso } \ell)\ ]$$

Applico la strategia alla funzione $\varphi(h) = \dfrac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$

Prendo una qualunque succ. $h_n \to 0$, e guardo cosa succede a $f(x_0+h_n) - f(x_0)$. Posso trovare una sottosucc. h_{n_k} tale che succede una di queste 2 possibilità

① $f(x_0+h_{n_k}) - f(x_0) \neq 0$ per ogni k. In questo caso va bene la dim. brutale e rapp. increm $\to g'(y_0) f'(x_0)$

② $f(x_0+R_{m_k})-f(x_0)=0$ per ogni k. In questo caso

$\varphi(R_{m_k})=0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$, quindi $\varphi(R_{m_k})\to 0$

Ma in tal caso

$$g'(y_0)f'(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{k\to+\infty}\frac{f(x_0+R_{m_k})-f(x_0)}{R_{m_k}}=0$$

In entrambi i casi $\varphi(R_{m_k})\to g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ e quindi ok.

— o — o —

$\boxed{\text{MODULO DI CONTINUITÀ}}$

"Def<u>n</u>" Data $f:A\to\mathbb{R}$ e dato $r>0$ si pone

$$\boxed{\omega(r):=\sup\{|f(x)-f(y)|: x\in A, y\in A, |x-y|\le r\}}$$

Brutalmente: $\omega(r)$ è il "max" gap verticale se il gap orizz. è $\le r$

Conseguenza immediata: $|f(x)-f(y)|\le\omega(|x-y|)\quad\forall(x,y)\in A^2$

$\boxed{\text{Oss.}}$ ① La def<u>n</u>. è mal posta, cioè $\omega(r)$ potrebbe venire $+\infty$ per ogni $r>0$, e lo fa: pensiamo $f(x)=x^2$ in $\mathbb{R}$.

② Può venire $+\infty$ anche se f è unif. continua: pensiamo a $f(x)=x^2$ in $\mathbb{Z}$ e $r\ge 1$.

③ Se f è unif. cont., allora esiste $r_0>0$ t.c. $\omega(r)\in\mathbb{R}$ per ogni $r\in(0,r_0)$

[Dim.: uso def<u>n</u>. di unif. cont. con $\varepsilon=2017$ e ottengo $\delta>0$ t.c. $|f(x)-f(y)|\le 2017$ per ogni $|x-y|\le\delta$

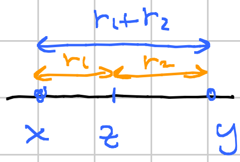
Questo mostra che

$$\omega(r)\le 2017\qquad\forall r\le\delta=:r_0.\ ]$$

④ f è Lip. $\Longleftrightarrow\omega(r)\le Lr$; f è α-Höld $\Longleftrightarrow\omega(r)\le Hr^\alpha$

Esercizio Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (con insieme qualunque) allora $\omega(r)$ è sub-additiva, cioè

$$\omega(r_1+r_2) \leq \omega(r_1) + \omega(r_2)$$



— o — o —

Stime di integrali con somme di Riemann

Problema: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Voglio approssimare l'integrale.

Scelgo una partizione P, la taggo T e calcolo

$$S_R(f, P, T) \qquad \text{(somma aree rettangoli)}$$

Voglio stimare

$$\left| S_R(f,P,T) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \qquad \text{(Errore)}$$

① Risposta teorica dell'integrale di Riemann

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \operatorname{diam}(P) \leq \delta, \text{ allora } |\ldots| \leq \varepsilon.}$$

② Se f è Lip. con costante L, allora

$$\boxed{\text{Errore} \leq \operatorname{diam}(P)\, L\, (b-a)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. In ogni intervallino

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = (x_i - x_{i-1}) f(s_i) \qquad \text{(teo. media integrale)}$$

L'i-esimo termine della S_R è $(x_i - x_{i-1}) f(t_i)$

tag nell'intervallo

Ma allora

$$\left| S_R(f,P,T) - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) - (x_i - x_{i-1}) f(s_i) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left| f(t_i) - f(s_i) \right| \qquad (\text{uso Lip})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) L \underbrace{|t_i - s_i|}$$

stanno su $[x_{i-1}, x_i]$, quindi
$|t_i - s_i| \leq (x_i - x_{i-1}) \leq \operatorname{diam}(P)$

$$= L \operatorname{diam}(P) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a} = L \operatorname{diam}(P)\,(b-a)$$

3 Se f è Höld o più in generale ha modulo di cont $\omega(r)$ ottengo

$$\boxed{\text{Errore} \leq (b-a)\,\omega(\operatorname{diam}(P))}$$

Oss. • Se nel caso lip. voglio dividere l'errore per 10 devo dividere il diametro per 10

• Nel caso $\frac{1}{2}$ - Hölder devo dividere il diametro per 100.

— o — o —

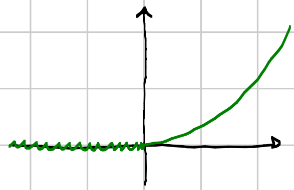
ANALISI 1 – LEZIONE 131

Note Title 16/05/2017

$\boxed{\text{EPPUR SI MUOVE}}$ Esiste una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$

$f(x) > 0$ per ogni $x > 0$



In particolare $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

e quindi f ha nell'origine polinomi di Taylor di ogni ordine (e tali polinomi sono nulli), quindi

$$f(x) = o(x^n) \quad \text{per } x \to 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

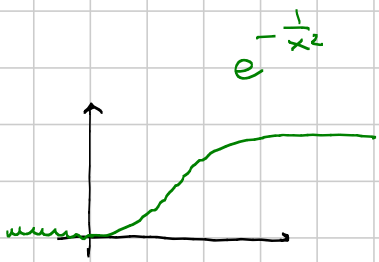
(quindi $f(x)$ sta sotto x^n in un opportuno intorno dell'origine per ogni $n \in \mathbb{N}$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall x \in [0, \delta] \;\; f(x) \leq x^n \qquad \text{VERA}$$

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in [0, \delta] \;\; f(x) \leq x^n \qquad \text{FALSA}$$

(implicherebbe $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, \delta]$)

<u>Esempio classico</u>
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{per } x > 0$$
$$\quad\;\; = 0 \qquad \text{per } x \leq 0$$



Perché ha tutte le derivate nulle in $x = 0$?

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \qquad \text{per } x > 0$$

Osservo che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ (esponenziale batte polinomio)

È ovvio che $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$

Dal momento che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, allora per un criterio dim.

a suo tempo anche $f'(0)$ esiste e fa 0.

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{4}{x^6} + e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{6}{x^4}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{4-6x^2}{x^6}$$

Ancora una volta $\lim_{x\to 0} f''(x) = 0$ e quindi $f''(0) = 0$

Per induzione si dimostra che

$$\boxed{f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{P_k(x)}{x^{3k}}}$$

con $P_k(x)$ polinomio opportuno (per $x > 0$)

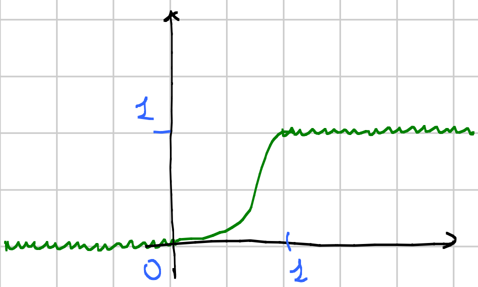
Da questa segue che $\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0$ e quindi anche $f^{(k)}(0) = 0$

Oss. In questo esempio NON è vero che $f(x)$ è somma della sua serie di Taylor (la somma è sempre nulla)

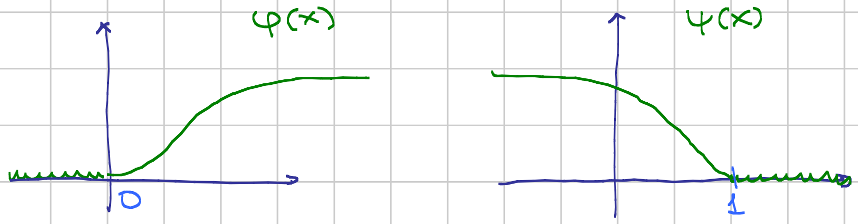
— o — o —

$\boxed{\text{RACCORDO } C^\infty}$ Esiste $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ fatta così

(i) $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$
(ii) $f(x) = 1$ " " $x \geq 1$
(iii) $0 < f(x) < 1$ " " $x \in (0,1)$
(iv) $f(x)$ strett. ↗ in $(0,1)$



L'idea è usare 2 "eppur si muove"



Ad esempio $\psi(x) := \varphi(1-x)$

Ora pongo
$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\underbrace{\varphi(x)+\psi(x)}_{\text{sempre } \neq 0}}$$

(i) Ok

(ii) Ok perché per $x \geq 1$ diventa $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(iii) per $x \in (0,1)$ vale $\quad 0 < \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\psi(x)} < \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{\varphi(x)+\psi(x)} = 1$

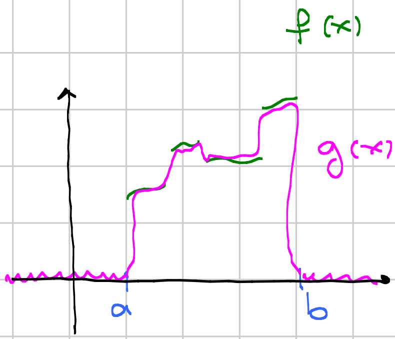
(iv) Facciamo $\quad f'(x) = \frac{\varphi'(\varphi+\psi) - (\varphi'+\psi')\varphi}{(\varphi+\psi)^2} = \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{(\varphi+\psi)^2} \overset{?}{\geq} 0$

Basta vedere se $\underset{+}{\varphi'}\,\underset{+}{\psi} > \underset{-}{\psi'}\,\underset{+}{\varphi}$ (ovvio ☺)

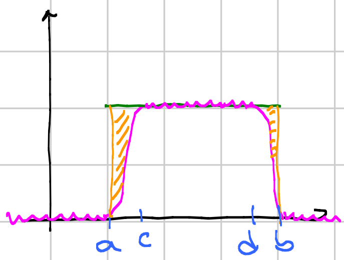
$\underline{\quad\ \ }\, 0 \ \underline{\quad\ \ }\, 0 \ \underline{\quad\ \ }$

$\boxed{\text{Esercizio di Analisi 3}}$

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Sia $\varepsilon > 0$.
Allora esiste $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $g(x) = 0$ fuori da $[a,b]$ e
$$\boxed{\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq \varepsilon}$$



$\boxed{\text{Sol.}}$ Caso banale : f è costante in $[a,b]$



Basta fare due raccordi C^∞ con un intervallo $[c,d] \subseteq (a,b)$
Se $c-a$ e $b-d$ sono piccoli, l'integrale è piccolo

Caso semibanale f è una step function, cioè comb. lineare di caratteristiche di intervallini.

Basta approx. le singole come nel caso banale e poi fare la comb. lin. delle approssimanti.

Caso generale Per definizione di integrale, dato $\varepsilon > 0$ trovo una step function ψ, volendo $\geq f$, tale che

$$\int_a^b (\psi(x) - f(x))\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \psi \geq f}}{=} \int_a^b |\psi(x) - f(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Per il punto precedente approssimo $\psi(x)$ con una $g(x)$ tale che

$$\int_a^b |g(x) - \psi(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

A questo p.to osservo che

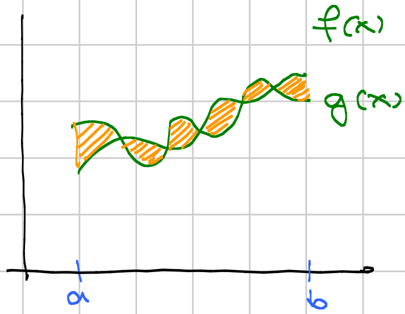
$$\int_a^b |f - g|\, dx \leq \int_a^b |f - \psi|\, dx + \int_a^b |\psi - g|\, dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

— o — o —

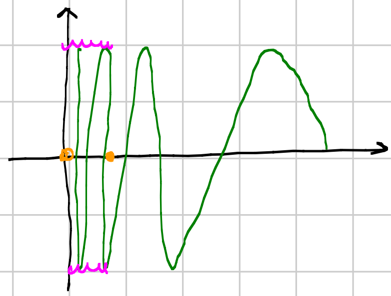
Il termine $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ rappresenta una "distanza integrale" tra le funzioni $f(x)$ e $g(x)$

= area tra i due grafici.



— o — o —

Esercizio Dimostrare che $\sin \frac{1}{x}$ è integrabile in $[0,2]$



Detto altrimenti: devo, per ogni $\varepsilon > 0$, mostrare che esistono step function

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$$

tali che

$$\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \le \varepsilon.$$

Idea Appena mi sposto a dx di 0 la funzione è continua.

Prendo $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{1}{4}\varepsilon$. In questo primo intervallino pongo

$$\varphi(x) = -1 \quad \text{e} \quad \psi(x) = 1$$

Con gli integrali ho pagato $\displaystyle\int_0^{x_1} (\psi(x) - \varphi(x))\,dx = \frac{1}{4}\varepsilon \cdot 2 = \frac{1}{2}\varepsilon$

(è continua)

Ora fra x_1 e 2 la funzione è integrabile, quindi posso definire in $[x_1, 2]$ le φ e ψ in maniera tale che

$$\int_{x_1}^2 (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Allo stesso modo si dimostra l'integrabilità delle funzioni che sono
- → limitate
- → continue tranne in un numero finito di punti.

Variante: stessa cosa se i p.ti di discontinuità sono una succ. infinita ma convergente. (dim. a voce nel video).

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 132 (−4)

Note Title 17/05/2017

INSIEMI NUMERICI (Da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{R}$ passando per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$)

Numeri naturali (Assiomi di PEANO)

I numeri naturali sono una terna $(\mathbb{N}, 0, s)$ dove

- $\mathbb{N}$ è un insieme
- $0 \in \mathbb{N}$ è un elemento
- $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione (moralmente il successivo) tale che
  (i) s è iniettiva
  (ii) l'immagine di s è $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, cioè

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } s(m) = n$$

  (iii) per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$, se valgono le 2 proprietà
  * $0 \in A$
  * $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in A \Rightarrow s(n) \in A$

  allora $A = \mathbb{N}$.

Oss. La proprietà (iii) è il principio di induzione (pensiamo ad A come l'insieme degli $n \in \mathbb{N}$ per cui una certa P_n è vera)

Oss. Quella sopra è una definizione assiomatica.

Teorema I numeri naturali esistono e sono unici a meno di isomorfismo, nel senso che per ogni altra terna $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{0}, \hat{s})$ che soddisfa gli assiomi esiste

$$\varphi : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$$

tale che
- φ è iniettiva e surgettiva
- $\varphi(0) = \hat{0}$
- $\hat{s}(\varphi(n)) = \varphi(s(n))$

$\boxed{\text{Dim}}$ Esistenza : tutt'altro che ovvia, e serve qualcosa in teoria degli insiemi che permetta la costruzione

Unicità Data la terna alternativa $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{0}, \hat{s})$ devo costruire $\varphi : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$.

Pongo
$$\varphi(0) = \hat{0}$$
e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ prendo il valore $m \in \mathbb{N}$ t.c.
$$s(m) = n$$ (esiste ed è unico per Peano)

e pongo
$$\varphi(n) = \hat{s}(\varphi(m))$$ (gratis terza richiesta)

Ho veramente definito φ ovunque ? Sì : sia $A \subseteq \mathbb{N}$ il sottoinsieme per cui l'ho definita. Allora
- $A \ni 0$
- se $m \in A$, anche $s(m) \in A$

Quindi per l'assioma di Peano sull'induzione $A = \mathbb{N}$.
Resta da (facile) verifica che φ è bigettiva.

— o — o —

$\boxed{\text{Operazioni e ordinamento in } \mathbb{N}}$

Somma $a+b$ Def.
- $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$
- $a + s(b) = s(a+b) \quad \forall a \in \mathbb{N} \ \forall b \in \mathbb{N}$

Esercizio Dimostrare che la somma è commutativa e associativa (è una vera pena)

Prodotto $a \cdot b$ Def. • $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$
• $a \cdot s(b) = a \cdot b + a \quad \forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N}$

Esercizio Stesso di sopra

Ordinamento Si dice che $m \geq n$ se esiste $z \in \mathbb{N}$ t.c.
$$m = n + z$$

Esercizio Verificare gli assiomi di ordinamento e quelli che legano ordin. e operazioni

— o — o —

$\boxed{\text{Definizione di } \mathbb{Z}}$ Moralmente $z = \underset{\mathbb{N}}{n} - \underset{\mathbb{N}}{m}$

Considero le coppie di naturali $\mathbb{N}^2$ e definisco una relaz. di equiv.

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

$n_1 - m_1 = n_2 - m_2$ ⇝ riscrivo senza usare segno $-$

Dicesi $\mathbb{Z}$ il quoziente $\mathbb{N}^2/\sim$

Operazioni
$$(n_1, m_1) \underset{\mathbb{Z}}{+} (n_2, m_2) = (n_1 \underset{\mathbb{N}}{+} n_2, m_1 \underset{\mathbb{N}}{+} m_2)$$
$$(n_1, m_1) \underset{\mathbb{Z}}{\cdot} (n_2, m_2) = (n_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} n_2 \underset{\mathbb{N}}{+} m_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} m_2, n_1 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} m_2 \underset{\mathbb{N}}{+} n_2 \underset{\mathbb{N}}{\cdot} m_1)$$

Esercizio ☺ • Le operazioni passano al quoziente
• Le operazioni verificano le proprietà di anello di $\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Definizione di } \mathbb{Q}}$ $q = \frac{m}{n}$

Coppie $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ e definisco la rel. di equiv.

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$$

Dicesi $\mathbb{Q}$ il quoziente $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$

Con un po' di pazienza definisco le operazioni, verifico che passano al quoziente e le proprietà di campo di $\mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Definizione di } \mathbb{R}}$

Def. via sezioni di DEDEKIND (Dedekind cuts)

Parto da $\mathbb{Q}$ e definisco sezione di Dedekind ogni coppia (A,B) tale che

(i) $A \subseteq \mathbb{Q}$ e $B \subseteq \mathbb{Q}$
(ii) $A \cap B = \emptyset$
(iii) $A \cup B = \mathbb{Q}$
(iv) $a < b$ per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$
(v) $\forall a \in A \ \exists a' \in A$ t.c. $a < a'$ (moralmente A è una semiretta sx aperta)

Oss. Dato A, si ha che B è univoc. determinato.

Def. Dicesi $\mathbb{R}$ l'insieme di tutte le sezioni di Dedekind.

(Moralmente: penso A come $\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$
reale che ho in mente

Con molta pazienza dovrei
- definire le operazioni
  - → facile per la somma
  - → una pena per il prodotto
- definire l'ordinamento
  - → quasi banale ($r_1 > r_2$ se la sua semiretta contiene quell'altra)
- verificare propr. algebriche e di ordinamento (una pena)
- verificare l'assioma di continuità (il sup è l'unione delle semirette)

<u>Oss.</u> Da tutti gli assiomi segue che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono contenuti dentro $\mathbb{R}$, cioè

→ esiste $i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ iniettiva con un minimo di proprietà tipo

- $i(\underset{\mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{0}}) = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{0}}$
- $i(s(\underset{\mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{n}})) = i(n) + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{1}}$ (el. neutro della moltiplic.)

Analogamente per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Posto di aver fatto tutto, uno ha dim. l'esistenza dei reali.

Per l'unicità, dati degli altri reali $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{\geq})$ occorre costruire

$$\varphi : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$$

che commuta... L'idea è

- si parte con $\varphi(0) = \hat{0}$ e $\varphi(1) = \hat{1}$ (sempre $1 \neq 0$)
- si estende all'immagine di $\mathbb{N}$, poi a quella di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$,
- sfruttando l'assioma di continuità si estende a tutto $\mathbb{R}$, pensando agli elementi come semirette sinistre

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 133 (-3)

Note Title 17/05/2017

Costruzione funzioni elementari

POTENZE E RADICI

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ voglio definire $f(x) = x^n$ come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
oppure $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

- Definizione facile per induzione $x^{n+1} = x^n \cdot x$ (prodotto su $\mathbb{R}$)

- Iniettività come $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ segue dalla stretta crescenza, la quale si dimostra a partire dagli assiomi di ordinamento (per induzione su $\mathbb{N}$)

- Surgettività. Qui entrano in gioco i numeri reali. Sostanzialmente serve il teo. di esistenza degli zeri il quale ha due ingredienti
  - → la continuità (segue per induzione dalla continuità del prodotto di funzioni)
  - → qualcosa del tipo

$$\boxed{\forall r > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \exists x \geq 0 \text{ t.c. } x^n > r}$$

(Basta dim. per induzione che $x^n \geq x$ per ogni $n \geq 1$ e $x \geq 1$ a quel punto uso $x = r + 1$)

- Avuta la surgettività, abbiamo le funzioni inverse, quindi le radici

— o — o —

$\boxed{\text{ESPONENZIALI}}$ Come si definisce a^x o anche solo e^x

Soluzioni di comodo:

① $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (dopo aver osservato che la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ per assol. conv. e criterio del rapporto)

[Esercizio: dim. le proprietà :)]

② $e^x := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (dopo aver dim. che il limite esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$)

③ Soluzione del pbm. di Cauchy $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

(Bisognerebbe sapere che la sol. esiste unica e globale)

④ L'unico numero y tale che $x = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt$

(ovviamente perché esiste? perché è unico)

⓪ Più precorsistica: attraverso l'equazione funzionale

Dato $a > 1$ (ma un discorso analogo vale per $a \in (0,1)$) cerco una funzione

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{(moralmente è } a^x\text{)}$$

tale che

(i) $f_a(1) = a$

(ii) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$

Sorpresona: f_a NON è unica, ma quasi

$\boxed{\text{Teorema}}$ Per ogni $a>1$ esiste un'unica funzione
$$f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

che verifica (i) e (ii)
Inoltre tale funzione
- è strett. cresc. in $\mathbb{Q}$,
- è continua in $\mathbb{Q}$
- tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a 0^+ per $x \to -\infty$

$\boxed{\text{Teorema bis}}$ Per ogni $a>1$ esiste un'unica funzione
$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

che verifica (i) e (ii) ed è MONOTONA.
Questa verifica su $\mathbb{R}$ le 3 proprietà prec. (monotonia, cont., limiti a $\pm\infty$).

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Passo 1}}$ $f_a(0) = 1$

$$\cancel{a} = f_a(1) = f_a(1+0) = f_a(1)\cdot f_a(0) = \cancel{a}\cdot f_a(0)$$

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Definisco $f_a(n)$ per $n \in \mathbb{N}$.

$$f_a(1) = a, \quad f_a(2) = f_a(1)\cdot f_a(1) = a\cdot a = a^2$$

Per induzione $\quad f_a(n+1) = f_a(n)\cdot f_a(1) = a^n \cdot a = a^{n+1}$

(Bisognerebbe verificare che su $\mathbb{N}$ vale la proprietà $f_a(x+y) = f_a(x)\cdot f_a(y)$ e la stretta crescenza)

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Definisco $f_a(-n)$ per $n \in \mathbb{N}$

$$1 = f_a(0) = f_a(n + (-n)) = f_a(n) \cdot f_a(-n) = a^n \cdot f_a(-n)$$

$$\rightsquigarrow \quad f_a(-n) = \frac{1}{a^n} \quad \text{(inverso moltiplicativo di } a^n\text{)}$$

(Rifare le verifiche di $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$ + monotonia)

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Definisco $f_a(q)$ per $q \in \mathbb{Q}$. Scrivo $q = \frac{m}{n}$

Dimostro come lemma che $f_a(kx) = [f_a(x)]^k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $k \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ facile induzione su k

Dal lemma segue che

$$a^m \underset{\substack{\uparrow \\ m \in \mathbb{Z}}}{=} f_a(m) = f_a\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ k}}{n} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\frac{m}{n}}\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma}}}{=} \Big[f_a\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big]^n$$

Quindi $\quad f_a\left(\frac{m}{n}\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inversa della potenza } n\text{-esima}}}{\sqrt[n]{a^m}}$

(Solite verifiche da rifare)

$\boxed{\text{Passo 5}}$ Come verifico la continuità: siano x e h in $\mathbb{Q}$

$$f_a(x+h) - f_a(x) \quad \leftarrow \text{è piccolo per } h \text{ piccolo}$$

$$= f_a(x) \cdot f_a(h) - f_a(x) = f_a(x) \cdot \underbrace{[f_a(h) - 1]}_{\substack{\text{deve essere piccolo per} \\ h \text{ piccolo}}}$$

Basta dimostrare, grazie alla monotonia, che $f_a\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ quando $n \to +\infty$.

Ma $f_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$ e perché $f_a\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \sqrt[n]{a} - 1$ è piccolo per n grande ?
Serve che $\sqrt[n]{a} \to 1$ e questo NON SI PUÒ DIM DICENDO

$$a^{\frac{1}{n}} \longrightarrow a^0 = 1$$

Fortunatamente si dim. con Bernoulli.

$\boxed{\text{Passo 6}}$ Restano da fare i limiti a $\pm\infty$.
Come dimostro che

$$a^x \to +\infty \quad \text{per } x \to +\infty \quad ?$$

Grazie alla monotonia basta fare che $a^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e questo segue da Bernoulli.
Il limite a $-\infty$ è analogo.

— o — o —

A questo punto l'estensione ad $\mathbb{R}$ è un esercizio.

— o — o —

<u>Funzioni trigonometriche</u>
1. Somma della serie
2. Eq. diff. $u'' = -u$
3. Equazione funzionale

Cerco 2 funzioni $C(x)$ e $S(x)$ t.c.

(i) $C^2(x) + S^2(x) = 1$

(ii) $C(x+y) =$ quello che viene
$S(x+y) =$ quello che viene
] segue dalla successiva

(iii) Distanza sulla circ. trigonometrica

$$\big(C(x+y), S(x,y)\big) \leftrightarrow \big(C(x), S(x)\big)$$

$$\big(C(y), S(y)\big) \quad \leftrightarrow \quad \big(C(0), S(0)\big)$$

Si dimostra che sotto ipotesi decenti esistono e sono uniche, continue, e con tutte le propr. usuali.

ANALISI 1 — LEZIONE 134 (-2)

Note Title 19/05/2017

Esercizio Successione $a_n = \sin n$

Non si può dire che $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ N.E. quindi $\lim_{n \to +\infty} \sin n$ N.E.

(Lo stesso ragionamento direbbe che $\lim_{n \to +\infty} \sin(2\pi n)$ N.E. e invece esiste e fa 0)

① $\sin n$ NON ha limite

② $\liminf_{n \to +\infty} \sin(n) = -1$ e $\limsup_{n \to +\infty} \sin(n) = 1$

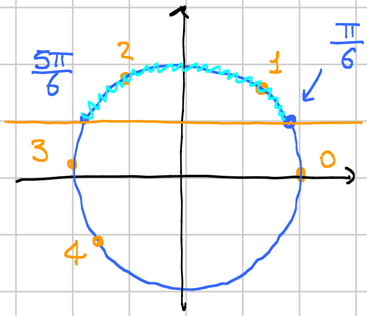
③ $\forall l \in [-1,1]$ esiste $n_k \to +\infty$ succ. monotona di interi t.c.

$$\lim_{k \to +\infty} \sin(n_k) = l$$

Oss. La stessa cosa dovrebbe valere se al posto di n c'è un polinomio in n. Il problema dovrebbe essere aperto se c'è 2^n.

Problema è equiv. a vedere come si dispongono i naturali sulla circonferenza trigonometrica.

$\boxed{\text{DIM 1}}$ Consideriamo la parte di circ. trig. con $y \geq \frac{1}{2}$



Si tratta di una zona di lungh. $\frac{2\pi}{3} > 1$

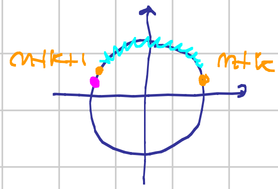
Essendo la zona più lunga di 1, dati 6 interi consecutivi almeno uno casca nella zona e quindi almeno una volta $\sin n \geq \frac{1}{2}$

Questo dice che frequentemente $\sin n \geq \frac{1}{2}$ (succede almeno una volta su 6).
Allo stesso modo si vede che $\sin n \leq -\frac{1}{2}$ frequentemente.
Questo impedisce l'esistenza del limite.

Per dim. che una volta su 6 si casca nella zona, basta considerare 6 numeri consecutivi

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad n+3, \quad n+4, \quad n+5.$$

Prendiamo il più grande $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\quad n \geq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
Allora



- Non può essere $\quad n+5 \leq \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi$,
  perché altrimenti

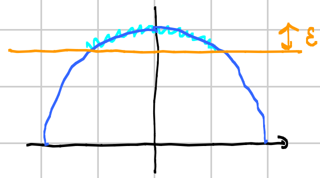
$$-n \leq -\frac{5\pi}{6} - 2k\pi$$
$$n+5 \leq \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi$$

e sommando verrebbe $\quad 5 \leq 2\pi - \frac{2}{3}\pi = 6,\text{poco} - 2\ldots < 5$

- Sia $n+k$ l'ultimo che sta prima di $\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$.
  Allora $n+k+1$ deve stare dentro perché altrimenti la lungh. dovrebbe essere minore di 1.

<u>Oss.</u> Una dim. analoga mostra che $\cos(n)$ non ha limite.

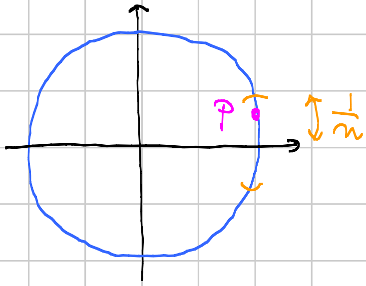
<u>Oss.</u> Con lo stesso sistema non si può dire che $\limsup = 1$



<u>Fatto misterioso</u> Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$
esiste una frazione $\frac{p}{q}$ tale che

$$0 < \left| 2\pi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$$

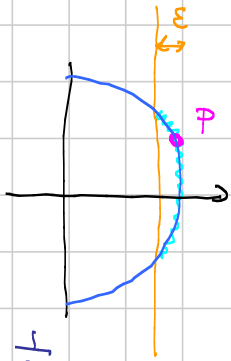
DIM ② e ③ (Usando fatto misterioso)



Dal fatto misterioso segue che

$$|2\pi q - p| \le \frac{1}{n}$$

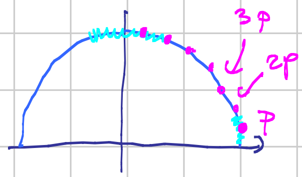
Questo dice che p si trova sulla circ. a distanza $\le \frac{1}{n}$ dal punto $(1,0)$



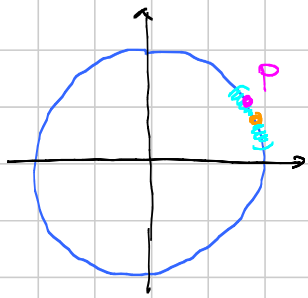
Questo solo fatto dice che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \cos n > 1 - \varepsilon$$

Se considero i multipli di p, cioè 2p, 3p, 4p, ... allora questi distano l'uno dall'altro meno di $\frac{1}{n}$ cioè meno di un $\varepsilon > 0$ prefissato, quindi cascano in una finestra piccola a piacere intorno a $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$



Allo stesso modo posso finire in una finestra intorno ad un p.to qualunque della circ., il che dimostra ③



Più in generale, abbiamo ottenuto che

$\forall$ punto (α, β) della circ. trigonometrica esiste $n_k \to +\infty$ t.c.

$$\cos(n_k) \to \alpha \qquad \sin(n_k) \to \beta.$$

Questo dice che i p.ti interi sono <u>densi</u> nella circ. trigonom.

$\boxed{\text{FATTO MISTERIOSO}}$ Per ogni α irrazionale e per ogni $n \geq 1$ intero esiste frazione $\frac{p}{q}$ t.c.

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$$

Inoltre posso usare denominatori $q \leq n$, da cui come corollario

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

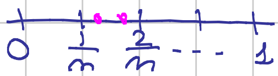
<u>Esempio</u> π lo approx con $\frac{314}{100}$ commettendo un errore $\leq \frac{1}{100}$

Ma posso approx anche con $\frac{22}{7} = 3,142857\ldots$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Considero le parti frazionarie di $k\alpha$ per $k = 0, 1, \ldots, n$, cioè

$$0, \ \{\alpha\}, \ \{2\alpha\}, \ \ldots, \ \{n\alpha\}$$

Sono $n+1$ numeri in $[0, 1]$.
Quindi ce ne sono almeno due che distano $\leq \frac{1}{n}$
Siano $\{k_1\alpha\}$ e $\{k_2\alpha\}$.
Quindi



$$0 \leq \{k_1\alpha\} - \{k_2\alpha\} \leq \frac{1}{n}$$

$$\{k_1\alpha\} = k_1\alpha - m_1 \qquad m_1 = \lfloor k_1\alpha \rfloor$$
$$\{k_2\alpha\} = k_2\alpha - m_2 \qquad m_2 = \lfloor k_2\alpha \rfloor$$

$$0 \leq k_1\alpha - m_1 - k_2\alpha + m_2 \leq \frac{1}{n}$$

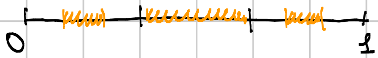
$$0 \leq \underbrace{(k_1 - k_2)}_{q}\alpha - \underbrace{(m_1 - m_2)}_{p} \leq \frac{1}{n}$$

(q è $\leq n$ perché diff. di k_1 e k_2)

Dividendo per q ottengo $\quad 0 \leq \alpha - \frac{p}{q} \leq \frac{1}{nq}$.

se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, questa è stretta

$\boxed{\text{Insiemi strani 1}}$ INSIEME DI CANTOR



→ Prendo $[0,1]$, divido in 3, butto il centrale (aperto), cioè $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

→ Prendo i 2 pezzi rimasti e ripeto

→ Prendo i 4 rimasti e ripeto ...

Itero ∞ volte e quello che resta è l'insieme di Cantor.

Quello che resta è un chiuso.

Quanto ho buttato?

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \underbrace{\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots\right)}_{\text{geometrica di ragione } \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 1$$

$\boxed{\text{FATTI}}$

→ Resta qualcosa...

→ Quello che resta è + che numerabile

→ La funzione caratt. è integrabile e ha integrale nullo

→ Quello che resta sono tutti e soli i numeri che in base 3 si scrivono senza usare la cifra 1.

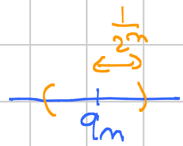
ANALISI 1 — LEZIONE 135 (−1) ☺

Note Title 19/05/2017

Insiemi strani 2 Razionali ingrassati

Supponiamo di numerare i razionali $q_1, q_2, q_3, \dots$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ consideriamo



$$I_m = \left(q_m - \frac{1}{2^m}, q_m + \frac{1}{2^m}\right) \quad \text{APERTO}$$

Sia

$$I := \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$$

Allora: → I è aperto (unione num. di aperti)

→ I contiene tutti i razionali

→ quanto è grande I? Posto che abbia senso, la sua lungh. è

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{lungh}(I_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Quindi è praticamente nulla rispetto ad $\mathbb{R}$

→ Il complementare di I è "enorme", è chiuso, ma non contiene intervalli.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che e è irrazionale.

Dim Osserviamo che $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Supponiamo per assurdo che $e = \frac{a}{b}$, con a e b interi positivi, quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{a}{b}$$

. Moltiplico tutto per $b!$ e spezzo la serie in 2.

$$\underbrace{b!\,\frac{a}{b}}_{\text{intero}} = b!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \underbrace{b!\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}}_{\text{intero}} + \underbrace{b!\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!}}$$

Di conseguenza è intero e non nullo (diff. di 2 interi)

$$b!\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!} = b!\left(\frac{1}{(b+1)!}+\frac{1}{(b+2)!}+\frac{1}{(b+3)!}+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\dots$$

denom. + piccoli

$$\leq \frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\dots$$

$$= \frac{1}{b+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b+1)^k}$$

$$= \frac{1}{b+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}} = \frac{1}{\cancel{b+1}}\cdot\frac{\cancel{b+1}}{b} = \frac{1}{b}$$

Quindi la seconda serie è un intero positivo e minore di $\frac{1}{b}$ il che è assurdo.

(Per escludere $b=1$ ci sono due modi (almeno):
- → osservare che $2<e<3$
- → osservare che la diseg. nella dim. era stretta).

<u>Oss</u>. La stessa tecnica funziona bene quando il numero è somma di una serie che converge molto rapidamente quindi allo stesso modo $\sin 1$ è irrazionale.

— o — o —

<u>Esercizio 2</u> Sia T l'insieme degli interi positivi che si scrivono senza mai usare la cifra 3.
Cosa posso dire della serie

$$\sum_{n \in T} \frac{1}{n} \quad ? \qquad \text{CONVERGE !!}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Raggruppiamo (perché possiamo ?) a seconda del numero di cifre.

I numeri di k cifre che si scrivono senza mai usare il 3 sono

$$8 \cdot 9^{k-1}$$

prima cifra $\neq 0$ e 3, le altre $\neq 3$.

e i reciproci sono tutti

$$\leq \frac{1}{10^{k-1}}$$

Quindi il loro contributo alla serie è $\leq \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}}$

Quindi

$$\sum_{n \in T} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 8 \cdot \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}$$ e questa converge

Approfondimento: per quali α converge $\sum_{n \in T} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (vedi AM1 15).

— o — o —

<u>Esercizio</u> Serie dei reciproci dei primi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$
DIVERGE !

$\boxed{\text{Dim poco rigorosa}}$ Si parte dal prodotto di Eulero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right)$$

(ogni naturale è prodotto di primi in modo unico)

Dando per buono il prodotto

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right) = \sum_{p \text{ primo}} \log\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots\right)$$

$$= \sum_{p \text{ primo}} \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

$$= -\sum_{p \text{ primo}} \log\left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p}$$

$\log(1-x) \sim -x$

$\boxed{\text{Dim. di ERDÖS}}$ Supponiamo per assurdo che converga. Allora esiste A tale che

$$\sum_{\substack{p \geq A \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$$

Chiamo

- primi grandi quelli $p \geq A$
- primi piccoli quelli $p < A$. $\quad p_1, \ldots, p_m$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indico con

$P_n = \{ k \leq n$ che sono prodotto di primi piccoli $\}$

$G_n = \{ k \leq n$ che hanno nella scompos. almeno un primo grande $\}$

$$|P_n| + |G_n| = n$$

numero el.

Dico che

- $|P_n| \leq (\log_2 n)^m \leq \frac{n}{27}$ per n grande

perché log cresce poco

- $|G_n| \leq \frac{n}{2}$

Dimostriamo la prima

$$n \geq k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} \geq 2^{\alpha_i} \rightsquigarrow \alpha_i \leq \log_2 n$$

tutti gli esponenti sono $\leq \log_2 n$ e quindi

i P_n sono $\leq (\log_2 n)^m$

Dimostriamo la seconda: siano $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots$ i primi grandi

G_n = unione degli interi tra $1, \dots, n$ che sono divisibili per $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots$

Quanti sono quelli div. per p_{m+1}? $\leq \dfrac{n}{p_{m+1}}$

" " p_{m+2}? $\leq \dfrac{n}{p_{m+2}}$

e così via, quindi

$$|G_n| \leq \frac{n}{p_{m+1}} + \frac{n}{p_{m+2}} + \dots = n \underbrace{\sum_{p \text{ grandi}} \frac{1}{p}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{n}{2}.$$

Oss. Dalla seconda dim. non possiamo sapere come divergono le somme parziali di

$$\sum_p \frac{1}{p}$$