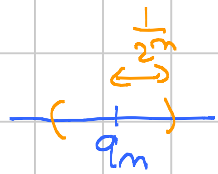
ANALISI 1 — LEZIONE 135 (-1) ☺

Note Title 19/05/2017

Insiemi strani 2 Razionali ingrassati

Supponiamo di numerare i razionali $q_1, q_2, q_3, \dots$
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo



$$I_n = \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n}\right) \qquad \text{APERTO}$$

Sia

$$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Allora: → I è aperto (unione num. di aperti)
→ I contiene tutti i razionali
→ quanto è grande I? Posto che abbia senso, la sua lungh. è

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{lungh}(I_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Quindi è praticamente nulla rispetto ad $\mathbb{R}$
→ Il complementare di I è "enorme", è chiuso, ma non contiene intervalli.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che e è irrazionale.

Dim Osserviamo che $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Supponiamo per assurdo che $e = \frac{a}{b}$, con a e b interi positivi, quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{a}{b}$$

. Moltiplico tutto per $b!$ e spezzo la serie in 2.

$$\underbrace{b!\,\frac{a}{b}}_{\text{intero}} = b!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \underbrace{b!\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}}_{\text{intero}} + \underbrace{b!\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!}}$$

Di conseguenza è intero e non nullo (diff. di 2 interi)

$$b!\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!} = b!\left(\frac{1}{(b+1)!}+\frac{1}{(b+2)!}+\frac{1}{(b+3)!}+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\dots$$

denom. + piccoli

$$\leq \frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\dots$$

$$= \frac{1}{b+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b+1)^k}$$

$$= \frac{1}{b+1}\,\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}} = \frac{1}{\cancel{b+1}}\cdot\frac{\cancel{b+1}}{b} = \frac{1}{b}$$

Quindi la seconda serie è un intero positivo e minore di $\frac{1}{b}$ il che è assurdo.

(Per escludere $b=1$ ci sono due modi (almeno):

→ osservare che $2<e<3$

→ osservare che la diseg. nella dim. era stretta).

<u>Oss</u>. La stessa tecnica funziona bene quando il numero è somma di una serie che converge molto rapidamente quindi allo stesso modo $\sin 1$ è irrazionale.

— o — o —

<u>Esercizio 2</u> Sia T l'insieme degli interi positivi che si scrivono senza mai usare la cifra 3.
Cosa posso dire della serie

$$\sum_{n \in T} \frac{1}{n} \quad ?$$

CONVERGE !!

$\boxed{\text{Dim.}}$ Raggruppiamo (perché possiamo?) a seconda del numero di cifre.

I numeri di k cifre che si scrivono senza mai usare il 3 sono

$$8 \cdot 9^{k-1}$$

↑ prima cifra $\neq 0$ e 3, le altre $\neq 3$.

e i reciproci sono tutti

$$\leq \frac{1}{10^{k-1}}$$

Quindi il loro contributo alla serie è $\leq \dfrac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}}$

Quindi

$$\sum_{n \in T} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 8 \cdot \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}$$ e questa converge

Approfondimento: per quali α converge $\displaystyle\sum_{n \in T} \frac{1}{n^\alpha}$ (vedi AM1 15).

—o—o—

<u>Esercizio</u> Serie dei reciproci dei primi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$
DIVERGE !

$\boxed{\text{Dim poco rigorosa}}$ Si parte dal prodotto di Eulero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots\right)$$

(ogni naturale è prodotto di primi in modo unico)

Dando per buono il prodotto

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right) = \sum_{p \text{ primo}} \log\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\dots\right)$$

$$= \sum_{p \text{ primo}} \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

$$= -\sum_{p \text{ primo}} \log\left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p}$$

$\log(1-x) \sim -x$

$\boxed{\text{Dim. di ERDÖS}}$ Supponiamo per assurdo che converga. Allora esiste A tale che

$$\sum_{\substack{p \geq A \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$$

Chiamo

- primi grandi quelli $p \geq A$
- primi piccoli quelli $p < A$. $\qquad p_1, \dots, p_m$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indico con

$$P_n = \{ k \leq n \text{ che sono prodotto di primi piccoli} \}$$

$$G_n = \{ k \leq n \text{ che hanno nella scompos. almeno un primo grande} \}$$

$$|P_n| + |G_n| = n$$

numero el.

Dico che

- $|P_n| \leq (\log_2 n)^m \leq \frac{n}{27}$ per n grande

perché log cresce poco

- $|G_n| \leq \frac{n}{2}$

Dimostriamo la prima

$$n \geq k = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m} \geq 2^{\alpha_i} \rightsquigarrow \alpha_i \leq \log_2 n$$

tutti gli esponenti sono $\leq \log_2 n$ e quindi

i P_n sono $\leq (\log_2 n)^m$

Dimostriamo la seconda: siano $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots$ i primi grandi

G_m = unione degli interi in $1, \dots, n$ che sono divisibili per $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots$

Quanti sono quelli div. per p_{m+1}? $\leq \frac{n}{p_{m+1}}$

" " p_{m+2}? $\leq \frac{n}{p_{m+2}}$

e così via, quindi

$$|G_m| \leq \frac{n}{p_{m+1}} + \frac{n}{p_{m+2}} + \dots = n \underbrace{\sum_{p \text{ grandi}} \frac{1}{p}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{n}{2}.$$

Oss. Dalla seconda dim. non possiamo sapere come divergono le somme parziali di

$$\sum_p \frac{1}{p}$$