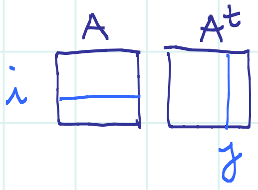
ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 34

MATRICI ORTOGONALI

Teorema Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata).
Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti:
(1) Le righe di A sono ortonormali ($\langle R_i, R_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e 1 se $i = j$)
(2) Le colonne di A sono ortonormali (stessa cosa con le colonne)
(3) $A^{-1} = A^t$ (cioè $A A^t = A^t A = Id$)

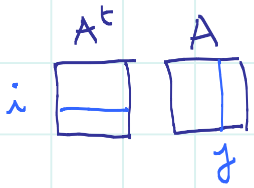
Idea della dim. $A \cdot A^t$ chi sta in posizione i, j



Ora la colonna j di A^t è la riga j di A. Quindi l'elemento richiesto è $\langle R_i, R_j \rangle$

Questo dimostra che Righe ortonormali $\Leftrightarrow$ $A \cdot A^t = Id$

Allo stesso modo prendiamo $A^t \cdot A$



Riga i-esima di A^t = colonna j-esima di A.
Quindi nel prod. l'el. in posizione i, j è
$\langle C_i, C_j \rangle$

Questo dimostra che Colonne ortonormali $\Leftrightarrow$ $A^t \cdot A = Id$

— o — o —

Def Una matrice si dice ortogonale se e solo se verifica una qualunque delle tre proprietà sopra (e quindi le verifica tutte)

— o — o —

Esempio
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = A \qquad A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = A^t$$

Proprietà matrici ortogonali

① Se A e B sono ortogonali, allora AB è ortogonale

Dim $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$

volendo si può anche verificare che

$$(AB)^t(AB) = B^t\underbrace{A^tA}_{Id}B = B^tB = Id$$

② Se A è ortogonale allora $\text{Det}(A) = \pm 1$

$\boxed{\text{Dim}}$ $1 = \text{Det}(Id) = \text{Det}(AA^t) \underset{\text{Binet}}{=} \text{Det}(A)\cdot\text{Det}(A^t) \underset{\text{Det}(A)=\text{Det}(A^t)}{=} \text{Det}(A)^2$

$\rightsquigarrow \text{Det}(A) = \pm 1$

③ Se A è ortogonale, allora A^t e A^{-1} sono ortogonali (e coincidono)

$\boxed{\text{Dim}}$ $A^t\cdot(A^t)^t = A^t\cdot A = Id$:)

(2 bis) Somma / Differenza di matrici ortogonali non sono necessariamente ortogonali

$\underset{\text{ortog}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = A \qquad \underset{\text{ortog.}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = B \qquad A+B = \underset{\text{No ortog.}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

④ Se A è ortogonale, allora λA è ortogonale se e solo se $\lambda = \pm 1$

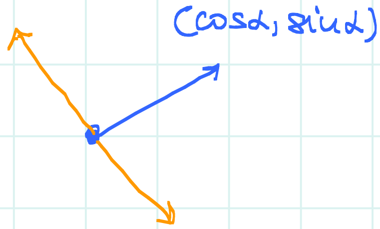
$\boxed{\text{Dim}}$ Basta osservare che le righe vengono moltiplicate per λ e

$$\langle \lambda R_i, \lambda R_j \rangle = \lambda^2 \langle R_i, R_j \rangle$$

e considerare $i = j$.

Esercizio Come sono fatte tutte le 2×2 ortogonali?

La prima riga è un vettore lungo 2 di norma 1, quindi si scrive come $(\cos\alpha, \sin\alpha)$
La seconda riga deve essere di norma 1 e $\perp$ alla precedente
Le possibilità sono



$(\sin\alpha, -\cos\alpha)$ oppure $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$
Quindi restano due tipi di matrici

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = -1$ — $\text{Det} = +1$

SIMMETRIA — ROTAZIONE

Esercizio Scriviamo una 3×3 ortogonale non banale

Partiamo con $v_1 = (2,3,1)$ (a caso)
Prendiamo $v_2 \perp v_1$ $\quad v_2 = (4,5,-23)$
Troviamo un $v_3 \perp$ ad entrambi
(metodo a scelta tra: bovino, formula ex-misteriosa, completo la base con vettore a caso e faccio G.S.)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -23 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-74, +50, -2) \rightsquigarrow (-37, 25, -1) = v_3$$

Basta dividere ognuno per la radice della sua norma e abbiamo una matrice ortogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{4}{\sqrt{570}} & \frac{5}{\sqrt{570}} & \frac{-23}{\sqrt{570}} \\ \frac{-37}{\sqrt{\dots}} & \frac{25}{\sqrt{\dots}} & \frac{-1}{\sqrt{\dots}} \end{pmatrix} = A \qquad \text{e} \quad A^{-1} = A^t$$

Consideriamo ora

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -23 \\ -37 & 25 & -1 \end{pmatrix} = B$$

Ora

$$BB^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -23 \\ -37 & 25 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -37 \\ 3 & 5 & 25 \\ 1 & -23 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 570 & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

divido per 14 | divido per 570 | divido per...

Se faccio così ottengo B^{-1}

<u>Esercizio</u>

(d) $W = \mathrm{Span}(\underset{v_1}{(1,-1,1)}, \underset{v_2}{(1,2,3)})$,

Scrivere la matrice di proiezione ORTOGONALE su W.

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad (-5,-2,3) = v_3 \quad (\text{quindi } W^\perp = \mathrm{Span}(v_3))$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{cambio base da } \{v_1, v_2, v_3\} \to \text{Canonica}$$

La matrice richiesta è $M \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice di proiezione su W scritta nella base strana}} M^{-1}$

Non resta che calcolare M^{-1}

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}} \underset{M^t}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & \frac{3}{19} \\ -\frac{5}{27} & -\frac{2}{9} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$$

— o — o —