ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 38

Note Title 14/11/2023

Diagonalizzare $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}$

$Tr = 4$ $Det = 5$ $\leadsto$ $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ $\qquad 2 \pm i$ autovalori

$\boxed{\lambda = 2+i}$ $\quad \ker \begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} = \text{Span}\,((1-i, -1))$

autovettore di $2+i$

Bovino $\begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} (-1-i)\,a - 2b = 0 \\ a + (1-i)\,b = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} +(+1+i)(1-i)b - 2b = 0 \\ a = -(1-i)b \end{cases}$ $\qquad 2b - 2b = 0$

$\boxed{\lambda = 2-i}$ $\quad \ker \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \text{Span}\,((1+i, -1))$

autovettore di $2-i$

$M = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Verifica per esercizio

— o — o —

	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$
TR	4	4	4	4	4	4
Det	4	4	4	4	4	4

Tutte hanno pol. caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

Tutte hanno

$\lambda = 2$ come unico autovalore di molt. alg. $= 2$

Calcoliamo nei vari casi $m_g(2)$ (può essere 1 o 2)

Quindi sottraggo 2 Id e calcolo Dim(ker)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_g = 1$ 1   1   1   2   1

La quinta è l'unica diagonalizzabile, le altre NON lo sono né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$

— o — o —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

intrusa

$\boxed{\text{Fatto generale utile}}$ Se una matrice A è triangolare inferiore o superiore, allora gli autovalori sono i termini sulla diagonale

Nel caso della terza il pol. caratt. è

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda & 0 \\ 5 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1, -2, 3$$

Per esercizio diagonalizziamo la 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \text{Span}$$

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ 5a + 4b + 2c = 0 \end{cases}$$

$a = 1 \quad b = 2 \quad 2c = -5a - 4b = -13 \rightsquigarrow c = -\frac{13}{2}$

$(1, 2, -\frac{13}{2}) \rightsquigarrow (2, 4, -13) \rightsquigarrow v_1$

$\boxed{\lambda = -2}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\ker = \text{Span}((0, 5, -4)) \rightsquigarrow v_2$

$\boxed{\lambda=3}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ker = Span((0,0,1)) $\rightsquigarrow v_3$

Quindi $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -13 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Devo fare M^{-1}

Verifica soft: $AM = MD$

— o — o —

Trovare la forma canonica di $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Risposta: $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Det = 0 (ci sono due righe uguali!)
Quindi un autovalore è 0.
Tr = 8, quindi l'altro è 8
Due autovalori diversi $\Rightarrow$ diagonalizzabile

$\boxed{\lambda=0}$ Autovettore: $(1,-1)$
$\boxed{\lambda=8}$ Autovettore: $(1,1)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

— o — o —

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

autov: 1, 1, 2 — autov: 1, 1, 2 — autov: 1, 1, 2 — autov 1, 1, 2

Per la terza facciamo il conto

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ 1^a \text{ colonna}}}{\text{Det}} = (2-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda)-1]$$

$$= (2-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2+1)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Autovalori sono $1, 1, 2$

In tutti i casi $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 2$ $\quad m_g(1) = ?$
$\lambda = 2$ con $m_a(2) = m_g(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m_g = 1 \qquad m_g = 2 \qquad m_g = 1 \qquad m_g = 1 \qquad m_g = 1$

$\uparrow \uparrow$

l'unica diagonalizzabile

Diagonalizziamo la seconda

$\boxed{\lambda = 1}$ Autospazio $= \text{Span}((1,0,0),(0,1,0))$

$\boxed{\lambda = 2}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Autospazio $= \text{Span}((1,0,1))$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ verifiche!