Quali funzioni sono integrabili?

Teorema misterioso Sono integrabili
1. Tutte le funzioni MONOTONE
2. Tutte le funzioni CONTINUE
3. Tutte le funzioni continue a tratti (possiamo suddividere $[a,b]$ in sottointervallini in cui $f(x)$ è continua e limitata)

Proprietà degli integrali

1. Se f e g sono integrabili in $[a,b]$, allora $f+g$ è int. in $[a,b]$
e
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$.
Poiché $f(x)$ è integrabile, esistono funzioni a gradino
$$\varphi^f(x) \le f(x) \le \psi^f(x)$$
t.c.
$$\int_a^b \psi^f(x)\,dx - \int_a^b \varphi^f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\varepsilon$$

Analogamente per $g(x)$, esistono $\varphi^g(x) \le g(x) \le \psi^g(x)$ t.c.
$$\int_a^b \psi^g(x)\,dx - \int_a^b \varphi^g(x)\,dx \le \frac{1}{2}\varepsilon$$

Ora osserviamo che
$$\underbrace{\boxed{\varphi^f(x)+\varphi^g(x)}}_{\text{step function}} \le f(x)+g(x) \le \underbrace{\boxed{\psi^f(x)+\psi^g(x)}}_{\text{step function}}$$

e

$$\int_a^b (\psi^f(x)+\psi^g(x))\,dx - \int_a^b (\varphi^f(x)+\varphi^g(x))\,dx$$

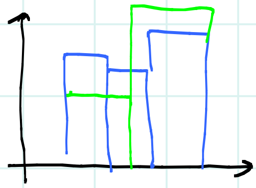
$$= \int_a^b \psi^f(x)\,dx + \int_a^b \psi^g(x)\,dx - \int_a^b \varphi^f(x)\,dx - \int_a^b \varphi^g(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

e questo dimostra che $\underline{f+g}$ è $\underline{\text{integrabile}}$.

Oss. Apparentemente ho usato che l'integrale della somma è la somma degli integrali, ma l'ho fatto solo per le step functions, per le quali è un fatto elementare.

Oss. Se ho due step function, le posso sempre pensare ottenute a partire da una suddivisione comune



② Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e vale

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{1+2 in maniera "colta"}}$ L'insieme delle funzioni integrabili in $[a,b]$ è uno spazio vettoriale e

$$f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

è un'applicazione lineare.

③ Il prodotto di due funzioni integrabili è integrabile, MA

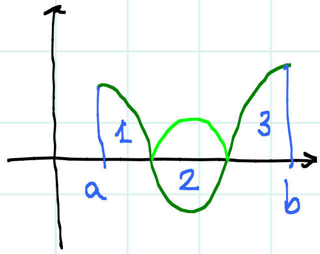
$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \text{nulla di furbo}$$

<u>Domanda</u>: Quando è vero che $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$?

④ Se $f(x)$ è integrabile, allora anche $|f(x)|$ è integrabile, e vale

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

<u>Brutalmente</u> $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = |A_1 - A_2 + A_3|$



$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2 + A_3$

Quindi si tratta in fondo della solita $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$

⑤ <u>Monotonia dell'integrale</u> Se $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b]$, allora

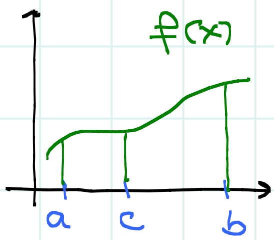
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(Basta osservare che le somme di Riemann superiori per g lo sono anche per f, e viceversa per quelle inferiori)

⑥ <u>Additività rispetto alla zona di integrazione</u>

Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$. Sia $c \in (a,b)$. Allora $f(x)$ è integrabile in $[a,c]$ e $[c,b]$ e vale

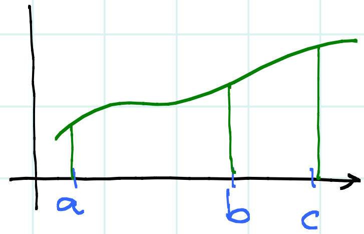
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



<u>Oss</u>. Vale una formula analoga anche se $c > b$ pur di assumere $f(x)$ integrabile in $[a,c]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{= -\int_b^c f(x)\,dx}$$

definizione



<u>Oss</u>. È possibile dedurre l'additività rispetto alla zona di integrazione a partire dall'integrale della somma. Basta considerare

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a,c] \\ 0 & \text{se } x \in (c,b] \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a,c] \\ f(x) & \text{se } x \in (c,b] \end{cases}$$

Ora sappiamo che

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\boxed{\text{Dim. che le funzioni debolmente crescenti sono integrabili}}$$

Dato $\varepsilon > 0$, devo trovare $\varphi \leq f \leq \psi$

step f.

con intercapedine $\leq \varepsilon$.

Divido $[a,b]$ in n parti uguali.

In ogni intervallo definisco

$$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$
$$\psi(x) = f(x_i)$$

Ma allora

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

Quindi

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{b-a}{n}} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)$$

$$\cancel{f(x_1)} - f(x_0) + f(x_2) - \cancel{f(x_1)} + \dots$$

effetto telescopico

$$= \underbrace{\frac{b-a}{n} \left(f(b) - f(a)\right)}_{}$$

piccolo a piacere per n grande.

— o — o —