Algebra Lineare

Realizzato da: Giuntoni Matteo

A.A. 2022-2023

---

1 Introduzione

1.1 Sistemi di equazioni

L'algebra lineare è lo studio delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari utilizzando spazi vettoriali.

Esempio 1.1.1. Un esempio di sistemi di equazioni:

1. $$\left.\begin{aligned} E_1 &: x + y = 5 \\ E_2 &: x + 2y = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_2 - E_1 \text{ (sostituzione):} \begin{cases} y = 5 - 3 = 2 \\ x = 3 - 2 = 1 \end{cases} \quad \text{Un unica soluzione.}$$

2. $$\left.\begin{aligned} E_1 &: x + y = 3 \\ E_2 &: 2x + 2y = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_2 - 2E_1\text{: } 0 = 0.$$

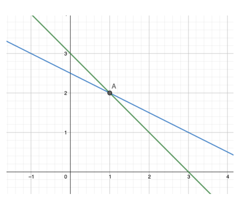
   Infatti $E_2 = 2E_1 \Rightarrow$ hanno le stesse soluzioni $\Rightarrow \exists\infty$ soluzioni.

3. $$\left.\begin{aligned} E_1 &: x + y = 3 \\ E_2 &: 2x + 2y = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_2 - 2E_1 : 0 = -1 \text{ è impossibile infatti } \nexists \text{ soluzioni comuni.}$$

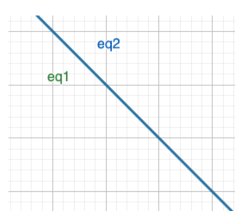
Possiamo vedere da questi esempi che abbiamo tre possibili risultati: 1 soluzione, ∞ e 0.

1.2 Interpretazioni geometrica

In ogni caso le equazioni E_1 ed E_2 rappresentano rette su un piano a 2 dimensioni. Le soluzioni comuni sono i punti di intersezione delle rette.
Nel caso specifico dell'esempio 1.1.1 abbiamo che:



(a) 1° hanno un punto in comune P=(1,2)



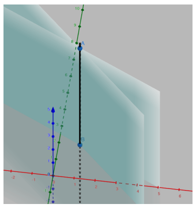
(b) 2° coincidono $\Rightarrow \infty$ punti in comune

(c) 3° sono parallele $\Rightarrow \nexists$ punti in comune

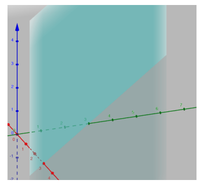
1.3 Equazioni a 3 variabili

Un esempio di equazione a 3 variabili è $x + 2y + 3z = 4$. Ciò crea, invece di una retta, un piano nello spazio 3-dimensionale. Se adesso consideriamo le equazioni viste sopra E_1 ed E_2 come equazioni a 3 variabili possiamo vedere che esse corrispondono a 2 piani nello spazio ed i punti in comune formano una retta.

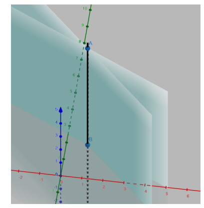
Se oltre a E_1 ed E_2 consideriamo una terza equazione E_3 essa corrisponde ad un terzo piano.



(a) 1° forma una retta

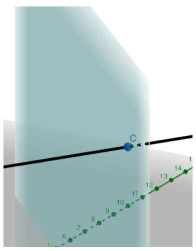


(b) 2° i due piani coincidono

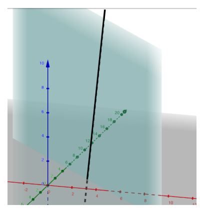


(c) 3° i due piani sono paralleli

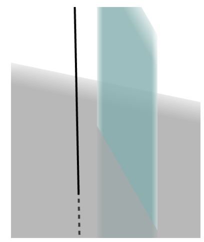
Possiamo vedere come esso si comporta intersecandolo con l'intersezione fra E_1 ed E_2, $E_1 \cap E_2$.



(a) $E_1 \cap E_2$ è una retta che, intersecata con E_3, crea un punto



(b) $E_1 \cap E_2$ può essere contenuto in E_3 quindi nuova retta



(c) $E_1 \cap E_2$ e E_3 possono non coincidere

1.4 Caso generale

Possiamo definire un sistema (E) di n equazioni a m variabili con $n, m > 0$ e con $a_{nm}, b_n \in \mathbb{R}$ come:

$$E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n$$

Definizione 1.4.1 (Sistema omogeneo)**.** *Il sistema (E) è **omogeneo** se $b_1 = \ldots = b_n = 0$. In caso contrario possiamo considerare il sistema omogeneo associato (E_{om}) definito come:*

$$E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0$$
$$E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0$$
$$\vdots$$
$$E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0$$

*Se (E) è **omogeneo**, $\exists$ sempre una soluzione comune del tipo $(x_1, \ldots, x_n) = (0_1, \ldots, 0_n)$.*

Proposizione 1.4.1. *Se $(c_1, ..., c_n)$ e $(d_1, ..., d_n)$ sono soluzioni di $(E) \implies c_1 - d_1, ..., c_n - d_n$ è soluzione del sistema omogeneo.*

Dimostrazione 1.4.1. Se $(c_1, \ldots, c_m)$ è soluzione vuol dire che :
$E_1 : a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{im}c_m = b_i$
$E_2 : a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + a_{im}d_m = b_i$
Quindi se sottraggo $E1 - E2$ e raccolgo viene:
$a_{i1}(c_1 - d_1) + a_{i2}(c_2 - d_m) + a_{im}(c_m - d_m) = 0 \ \forall\, i, ..., n$

Teorema 1.4.1. Se $(c_1, \ldots, c_m)$ è soluzione del sistema (E) tutte le soluzioni (E) sono della forma $(c_1 + e_1, c_2 + e_2, \ldots, c_m + e_m)$ dove $(e_1, \ldots, e_m)$ è soluzione di E_{om}.

In sinestesi si può semplificare questo teorema scrivendo:

$$\text{"Soluzione generale"} = \text{"Soluzione particolare"} + \text{"Soluzione omogenea"} \tag{1}$$

Dimostrazione 1.4.2. La proposizione 1.4.1 dice che le soluzioni hanno questa forma. Viceversa se $(e_1, \ldots, e_m)$ sono soluzioni di $(E_{om}) \implies (c_1 + e_1, c_2 + e_2, \ldots, c_m + e_m)$ sono soluzioni di (E).

Esempio 1.4.1. Prendiamo n=1 e m=2 e prendiamo come sistema di equazioni $(E) : 2x + 3y = 5$ e come equazione omogenea $(E_{om}) : 2x + 3y = 0$

Vediamo che le soluzioni particolari sono $x = y = 1$. Per calcolare le soluzioni omogenee si fa $2x = -3y$ e poi $x = -\frac{3}{2}y$, qui per ogni valore di y trovo un valore di x.
La soluzioni omogenea è $(-\frac{3}{2}p, p)$ dove p è un parametro che può essere qualsiasi valore.
Sappiamo che "sol. generale" = "sol. particolare" + "sol. omogenea" $\Rightarrow (1,1)+(-\frac{3}{2}t, t) = (1-\frac{3}{2}t, 1+t)$.

Osservazione 1.4.1. $(0, ..., 0)$ è sempre soluzione di (E_{om}). Quindi se (E) ammette una soluzione questo soluzione è unica $\iff (0, ..., 0)$ è l'unica soluzione di (E_{om}).

1.5 Interpretazione geometrica caso generico

L'interpretazione geometrica per (E_{om}) è un iperpiano attraverso l'origine", e la soluzione è traslazione di questo caso generale per un caso particolare.

1. $n = 1$, $m = 2$ (E) $a_{1n}x_1 + a_{m2}x_2 = b_1$.
   Una soluzione $\iff$ retta (E_{om}) $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ una soluzione a (E) $\Rightarrow$ retta attraverso (0,0).

2. $n = 1$, $m = 2$, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a$ (E), punto attraverso (0,0,0).

1.6 Come trovare le soluzioni?

Per trovare le soluzioni comuni di (E) possiamo usare 3 operazioni per semplificare il sistema:

1. Scambiare due equazioni.

2. Moltiplicare E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j, $E_j = E_j + \lambda E_i$.

3. Moltiplicare un'equazione E_i per un costate $\lambda \neq 0$, $E_i \Rightarrow \lambda E_i$.

Osservazione 1.6.1. Queste operazioni non cambiano l'insieme delle soluzioni di (E).

Dimostrazione 1.6.1. Dimostriamo le 3 proprietà:

1. La prima è ovvia quindi non ha bisogno di una dimostrazione.

2. Se $(c_1, \ldots, c_n)$ soluzioni di E_i ed $E_j \Rightarrow$ è anche soluzione di $E_i + \lambda E_j$.
   Viceversa se $(c_1, \ldots, c_n)$ soluzioni di E_i, $E_j + \lambda E_i \Rightarrow$ anche soluzione di $(E_j + \lambda E_i)$ - $\lambda = E_j$.

3. Se $(c_1, \ldots, c_n)$ soluzioni di (E) $\Rightarrow$ anche di λE e viceversa.