ANALISI 1 — LEZIONE 029

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO QUALUNQUE

<u>Teorema misterioso</u> Sia $r>0$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia

$$f:(x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$$

una funzione. Sia n un intero positivo.
Supponiamo che
(i) f sia derivabile $n-1$ volte in (x_0-r, x_0+r),
(ii) f sia derivabile n volte in x_0.
Allora

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Polinomio di Taylor di ordine } n \text{ in } x_0} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{resto alla PEANO}} \quad \text{per } x \to x_0}$$

Altro modo di scrivere la stessa cosa: cambio di variabili $x-x_0 = h$, da cui $x = x_0+h$

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n) \quad \text{per } h \to 0}$$

Per $n=1$ diventa

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

quindi differenziale = Taylor di ordine 1

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $g(x) = f(x+x_0)$ e applico la formula con centro in $x = 0$ per la funzione $g(x)$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

ora osservo che $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x+x_0)$, quindi $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$ e così otteniamo la formula voluta (con $h = x$).

— o — o —

Operazioni con i polinomi di Taylor, ovvero come calcolare i pol. di Taylor senza fare le derivate.

$\boxed{\text{Somma}}$ Siano
$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Poniamo $s(x) := f(x) + g(x)$. Allora

$$s(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Ci sono 2 vie:

→ osservare che $s^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) + g^{(k)}(0)$

→ usare le propr. di o piccolo

$$s(x) = \underbrace{P_n(x) + o(x^n)}_{f(x)} + \underbrace{Q_n(x) + o(x^n)}_{g(x)} = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

$\boxed{\text{Prodotto per una costante}}$ $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

Allora $$a f(x) = a P_n(x) + o(x^n)$$

Dim. Proprietà $a\, o(x^n) = o(x^n)$.

$\boxed{\text{Prodotto di 2 funzioni}}$ f e g come sopra. Poniamo

$$p(x) = f(x)\cdot g(x)$$

Allora

$$p(x) = \boxed{P_m(x)\cdot Q_n(x)} + o(x^n)$$

in questo calcolo posso limitarmi ai termini di grado $\leq n$ (gli altri sono mangiati da $o(x^n)$)

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$p(x) = (P_m(x) + o(x^n))\cdot(Q_m(x) + o(x^n))$$

$$= P_m(x)\cdot Q_n(x) + \underbrace{P_m(x)\cdot o(x^n) + Q_n(x)\cdot o(x^n) + o(x^n)\cdot o(x^n)}_{o(x^n)}$$

Vediamo un caso

$$P_m(x)\cdot o(x^n) = P_m(x)\cdot x^n\cdot \omega(x) = x^n\cdot \boxed{P_m(x)\cdot \omega(x)} = o(x^n)$$

$$\omega_1(x) \to P_m(0)\cdot 0 = 0$$

— o — o —

Esempio 1 $\quad f(x) = \sin x \cdot \log(1+x) \qquad n = 4 \qquad x_0 = 0$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Calcolare le derivate fino alla 4^a.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ sfrutto il prodotto

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Reverse engineering: quanto vale $f^{(4)}(0)$?

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}}}_{=\frac{1}{6}}x^4 + o(x^4)$$

Quindi $f^{(4)}(0) = \frac{1}{6}\cdot 4! = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$

$\boxed{\text{Composizione 1}}$ $\quad f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

Allora

$$f(ax) = P_n(ax) + o(a^n x^n) = P_n(ax) + o(x^n)$$

Brutalmente: metto ax al posto di x nello sviluppo

$\boxed{\text{Composizione 2}}$ $\quad f$ come sopra.

Allora

$$f(x^a) = P_n(x^a) + o((x^a)^n) = P_n(x^a) + o(x^{na})$$

Brutalmente: metto x^a al posto di x nello sviluppo

<u>Esempio 1</u> $\quad e^{x^2} \cdot \cos(3x) \quad n=4 \quad x_0 = 0$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4) \qquad \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \qquad \cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)$

Prodotto $\quad e^{x^2} \cdot \cos(3x) = \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4\right) + o(x^4)$

$$= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + x^2 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$+ o(x^5)$

perché $f(x)$ è PARI

<u>Esempio 2</u> $\quad \sin(x^5) \quad n = 15$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \qquad$ Metto $t = x^5$:

$$\sin(x^5) = x^5 - \frac{1}{6}x^{15} + o(x^{15})$$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \rightsquigarrow \sin(x^5) = x^5 - \frac{1}{6}x^{15} + o(x^{20})$

Posso arrivare fino a $o(x^{24})$, anzi $o(x^{24.99\ldots})$ perché il termine successivo sarebbe x^{25}.

Se $f(x) = \sin(x^5)$, calcolare $f^{(2016)}(0)$ e $f^{(2015)}(0)$

Quella 2016-esima è 0 perché nello sviluppo di $f(x)$ ci sono solo potenze dispari.
Quella 2015-esima la ritrovo nel coeff. di x^{2015}, il quale arriva dal coeff. di t^{403} visto che $403 \cdot 5 = 2015$

$$\sin t = \dots - \frac{1}{403!} t^{403} + \dots$$

$$\sin(x^5) = \dots \underset{\frac{f^{(2015)}(0)}{2015!}}{\underset{\shortparallel}{\boxed{-\frac{1}{403!}}}} x^{2015} + \dots$$

Quindi

$$f^{(2015)}(0) = -\frac{2015!}{403!}$$

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} + \cos(2x) - 2}{x(\arctan x - x)}$ Scelgo $n = 4$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ $e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2}4x^4 + o(x^4)$

$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4)$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

Numeratore $= \cancel{1} + \cancel{2x^2} + 2x^4 + \cancel{1} - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 \cancel{-2} + o(x^4) = \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)$

Denominatore $= -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Frazione $= \dfrac{\frac{8}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} =$ solito finale $= -8$

Alternativa: 4 passaggi di Hôpital.