ANALISI 1 — LEZIONE 060

Note Title 01/12/2016

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = [\Phi(b) - \Phi(a)]$$

Questa volta $\Phi(x) = G(F(x))$, quindi

$$\varphi(x) = G'(F(x))F'(x)$$

Sostituendo ottengo

$$\int_a^b \underbrace{G'(F(x))F'(x)}_{\varphi(x)}dx = \overbrace{G(F(b))}^{\Phi(b)} - \overbrace{G(F(a))}^{\Phi(a)}$$

$$= [G(x)]_{F(a)}^{F(b)}$$

$$= \int_{F(a)}^{F(b)} g(x)\,dx$$

Riorganizzando

$$\boxed{\int_a^b g(F(x))f(x)\,dx = \int_{F(a)}^{F(b)} g(x)\,dx}$$

FORMULA DI INT. PER SOSTITUZIONE UFFICIALE

Brutal mode: $\int_a^b g(F(x))f(x)\,dx$ Pongo $y = F(x)$

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x) \qquad dy = f(x)\,dx.$$

Quando $x = a$ ho che $y = F(a)$ e idem quando $x = b$ ... $y = F(b)$

In conclusione

$$\int_a^b \underbrace{g(F(x))}_{g(y)}\underbrace{f(x)\,dx}_{dy} = \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)\,dy$$

Esempio 1 $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Pongo $y = \cos x$ quindi $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ e quindi $dy = -\sin x \, dx$

$$= -\int \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\frac{1}{y}} \underbrace{\boxed{(-\sin x)\, dx}}_{dy} = -\int \frac{1}{y} dy = -\log|y|$$

$$= -\log|\cos x| = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Esempio 2 $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ Pongo $y = 1+x^2 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = 2x$

$\rightsquigarrow dy = 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2}\log|y| = \frac{1}{2}\log|1+x^2|$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \log\sqrt{1+x^2}$$

Esempio 3 $\int \frac{\log^7 x}{x} dx$ Pongo $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \underbrace{\log^7 x}_{y^7} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int y^7 dy = \frac{1}{8} y^8 = \frac{1}{8}\log^8 x$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{\log^7 x \cdot x} dx$ $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{y^7} dy = -\frac{1}{6}\frac{1}{y^6} = -\frac{1}{6}\frac{1}{\log^6 x}$$

Esempio 5 $\int \frac{1}{x \log x} dx$ Come sopra

$$= \int \frac{1}{y} dy = \log|y| = \log|\log x|$$

Esempio 6 $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

Pongo $x = \sin y$

$\frac{dx}{dy} = \cos y \rightsquigarrow dx = \cos y\, dy$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 y}\, \cos y\, dy = \int \cos^2 y\, dy = \text{(Es. prec.)}$$

$$= \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \sin y \cos y \qquad (y = \arcsin x)$$

$y \downarrow \arcsin x$ $\qquad$ $\sin y \downarrow x$ $\qquad$ $\cos y \downarrow \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$$

Ci sono passaggi sporchi ovunque: verifico per $x \in (-1,1)$ e sono sicuro di aver fatto bene.

—o—o—

Esempio 7 $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Pongo $x = \sinh y$

$dx = \cosh y\, dy$

$$= \int \sqrt{1+\sinh^2 y}\, \cosh y\, dy = \int \cosh^2 y\, dy = \text{si fa...}$$

(provare per esercizio)

Esempio 8 $\boxed{\text{Come integrare potenze di } \sin x \text{ e } \cos x}$

$$\int \cos^4 x\, dx$$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Parti + precorso + grande ritorno

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \underset{g}{\cos x} \cdot \underset{F}{\cos^3 x}\, dx = \underset{G}{\sin x} \cdot \underset{F}{\cos^3 x} - \int \underset{G}{\sin x} \cdot \underset{f}{3\cos^2 x (-\sin x)}$$

$$= \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \underbrace{\sin^2 x}_{\substack{\text{precorso} \\ (1-\cos^2 x)}} \cos^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \underbrace{\int \cos^2 x\, dx}_{\text{lo so}} - 3 \underbrace{\int \cos^4 x\, dx}_{\text{grande ritorno}}$$

In generale con questa tecnica faccio scendere l'esponente di 2.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Trasformare il prodotto in somma (questo è il modo migliore quando l'esponente è 2)

$$\cos^4 x = \cos^2 x \cdot \cos^2 x = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

$=$ moltiplico e poi analogo per $\cos^2(2x)$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Se l'esponente è dispari, posso fare per sostituzione

$$\int \cos^7 x \, dx = \int \cos^6 x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^3 \cdot \cos x \, dx$$

Pongo $y = \sin x$ $\rightsquigarrow$ $dy = \cos x \, dx$

$$= \int (1-y^2)^3 \, dy$$

$$= \int (1-3y^2+3y^4-y^6) \, dy = y - y^3 + \frac{3}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7$$

$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x$$

— o — o —

Esempio 9

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx \qquad \int \frac{x^2}{1+x^4} dx \qquad \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

MEDIO DIFFICILE FACILE

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4}\log(1+x^4)$$

(Volendo: $y = 1+x^4$)

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx$$

Pongo $y = x^2$ $\rightsquigarrow$ $dy = 2x \, dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2}\arctan y = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$

Esempio 10 $\int x^2 e^{5x^3} dx = \frac{1}{15} e^{5x^3}$ (volendo: $y = 5x^3$)

Esempio 11 $\int \sin(\log x)\, dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx$

$\rightsquigarrow x = e^y$

$$= \int \underset{e^y}{x} \underbrace{\sin(\log x)}_{\sin y} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy}$$

$= \int e^y \sin y \, dy$ = si fa per parti con grande ritorno

Esempio 12 $\int x \sqrt{3 - x^2}\, dx$

1° modo: trigonometrico $x = \sqrt{3} \sin y \rightsquigarrow$ diventa tutta trigonometria

2° modo: Pongo $y = 3 - x^2 \rightsquigarrow dy = -2x\, dx$

$$= -\frac{1}{2} \int \sqrt{3 - x^2}\, (-2x)\, dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{y}\, dy \qquad \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} = -\frac{1}{3} y \sqrt{y}$$

$$= -\frac{1}{3} (3 - x^2) \sqrt{3 - x^2}.$$

— o — o —