ANALISI 1 - LEZIONE 39

Note Title 16/11/2024

Esempio 1 $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$ centro $x_0 = 1$ $n = 3$

$$f(1+h) = (1+h)^3\, 3^{-1-h} = (1+h)^3 \frac{1}{3} 3^{-h} = \frac{1}{3}(1+h)^3 e^{-h\log 3}$$

$$= \frac{1}{3}(1+3h+3h^2+h^3)\left(1-\log 3 \cdot h + \frac{1}{2}\log^2 3 \cdot h^2 - \frac{1}{6}\log^3 3 \cdot h^3 + o(h^3)\right)$$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ con $t = -h\log 3$

Ora basta moltiplicare tutto tenendo solo i termini di grado ≤ 3

Esempio 2 $f(x) = \arctan x$ centro $x_0 = 1$ $n = 2$

Qui bisogna fare le derivate

$$f(1+h) = f(1) + f'(1)\cdot h + \frac{1}{2}f''(1)h^2 + o(h^2)$$

$f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \rightsquigarrow f''(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$$

Esempio 3 $f(x) = \arctan(e^x)$ centro $x_0 = 0$ $n = 2$

$\arctan t = t + o(t^2) \rightsquigarrow \arctan(e^x) = e^x + o(e^{2x})$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

No! Perché e^x non tende a 0 quando $x \to 0$.

Il problema sopra è che non è vero che $o(e^{2x}) = o(x^2)$

In realtà $o(e^{2x}) = o(1)$ e questo si mangia tutto

Modo corretto: uso sviluppo di arctan x con centro in 1

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$$

$$\arctan(e^x) = \arctan\Big(1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\text{Questo è un } h \to 0}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$$

$$+ \underbrace{o\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right)}_{\text{Davvero è } o(x^2)}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \cancel{\frac{x^2}{4}} - \cancel{\frac{x^2}{4}} + o(x^2)$$

Per l'ultima volta scriviamo il conto

$$o\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right) = \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \omega(x)$$

$$= x^2 \underbrace{\boxed{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}\right)^2 \omega(x)}}_{\downarrow\, 0} = o(x^2)$$

<u>Esempio 4</u> Ricordiamo gli sviluppi delle potenze

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Vediamo alcuni casi speciali

$\boxed{\alpha = -1}$ $\quad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots} \qquad \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}$$

Esempio 5 $\quad f(x) = \tan x \quad$ centro $x_0 = 0 \quad n = 5$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Mi calcolo le derivate fino alla quinta!

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{t}}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\Big(\underbrace{1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}_{1-t} + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)\Big)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)$$

e ora basta moltiplicare tenendo solo i termini di grado ≤ 5

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Lo sviluppo di $\tan x$ sarà del tipo

$$\tan x = x + a x^3 + b x^5 + o(x^5)$$

Ora sappiamo che

$$\tan(\arctan x) = x$$

ma

$$x = \tan(\arctan x) = \arctan x + a(\arctan x)^3 + b(\arctan x)^5 + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 + b\left(\quad\right)^5 + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a x^3 - a x^5 + b x^5 + o(x^5)$$

Quindi per forza $a = \frac{1}{3}$ (per mandare via x^3)

$b = a - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ (per mandare via x^5)

funzione dispari

Concludo che $\quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$

Esempio 6

$\frac{\sin x}{x}-1$	$(1+x)^{1/x}-e$	$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$

Calcolare le parti principali per $x \to 0$.

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) - 1$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3) \cancel{-1} = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$$

Nota bene: $\frac{o(x^4)}{x} = \frac{x^4\omega(x)}{x} = x^3\omega(x) = o(x^3)$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} - e$$

$$= e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - e$$

$$= e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - e$$

$$= e \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2} + o(x)}}_{e^t \text{ con } t \to 0} - e$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) - e$$

$$= e - \frac{e}{2}x + o(x) - e = -\frac{e}{2}x + o(x)$$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{x}{6} + o(x)$$

Come lo giustifico bene? Semplifico x^2 e mi trovo

$$\frac{\frac{x}{6} + o(x)}{1 + o(x)} = \left(\frac{x}{6} + o(x)\right) \cdot \frac{1}{1 + o(x)} \rightsquigarrow \text{uso sviluppo per } \frac{1}{1+t} = 1 - t + \ldots$$

Esempio 7

$$\sqrt[22]{n+2}-\sqrt[22]{n}$$

$$\sqrt[22]{n+2}-\sqrt[22]{n} = \sqrt[22]{n}\left(\sqrt[22]{1+\frac{2}{n}}-1\right)$$

$$= \sqrt[22]{n}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{22}}-1\right]$$

$$= \sqrt[22]{n}\left[\cancel{1}+\frac{1}{11n}-\cancel{1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{11}\frac{1}{n^{21/22}}+o\left(\frac{1}{n^{21/22}}\right)$$

— o — o —