ANALISI 1 — LEZIONE 090

Note Title 17/03/2017

SUCCESSIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME

__Esempio 1__ $x_{n+1} = \frac{x_n}{n+3}$ $x_0 = 2017$

Si potrebbe avere una formula esplicita, ma non la usiamo

$\boxed{\text{PIANO}}$ (Con la monotonia)

(i) $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione]

(ii) $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ [(i) + (ii) + teo. succ. monot.]

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ __Ricorrenza + disequazione__

$$x_{n+1} \overset{?}{\leq} x_n \iff \frac{x_n}{n+3} \overset{?}{\leq} x_n \iff x_n\left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \overset{?}{\geq} 0$$

$$\iff \underbrace{\frac{n+2}{n+3}}_{>0} \underbrace{x_n}_{\geq 0 \text{ p.to (i)}} \overset{?}{\geq} 0$$

vera l'ultima, quindi vere tutte

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$

$$\underset{\downarrow}{x_{n+1}} = \frac{\boxed{x_n} \to \ell \in \mathbb{R}}{\boxed{n+3} \to +\infty}$$

$$\ell = 0$$

[Nemmeno pensare che $\frac{x_n}{n+3} \to \frac{\ell}{n+3}$ perché limite metà per volta]

Quindi $x_{n+1} \to 0$ e di conseguenza $x_n \to 0$ (stessa succ. solo con indici shiftati).

$\boxed{\text{PIANO 2}}$ (i) $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione]

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Uso criterio del rapporto (posso per (i))

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{x_n}}{n+3} \cdot \frac{1}{\cancel{x_n}} = \frac{1}{n+3} \to 0 < 1 \Rightarrow x_n \to 0.$$

$\boxed{\text{PIANO 3}}$ (limitatezza + carabinieri)

(i) $0 \leq x_n \leq 2017 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ facile induzione

$x_n \leq 2017$ pure...

... $n \Rightarrow n+1$ ... ipotesi $x_n \leq 2017 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{n+3} \leq \frac{2017}{n+3} \leq 2017$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Uso i carabinieri. Prendo il p.to (i) e divido per $n+3$ (posso perché...)

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{x_n}{n+3}}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{2017}{n+3}}}$$

Ho dim. che $x_{n+1} \to 0$, quindi anche $x_n \to 0$.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\quad x_{n+1} = \frac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \qquad x_0 = 2017$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (limitatezza + Carabinieri)

(i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ facile induzione

$x_n \leq 10.000$

Passo base ovvio

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $x_n \leq 10.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 10.000$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \underset{\text{Hp}}{\leq} \frac{10.000 + 10}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{11.000}{\sqrt{2}} \leq 10.000$$

da cui la tesi

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Grazie al p.to (i) so che

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\to 0} \leq \underbrace{x_{n+1}}_{\to 0} = \frac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \leq \underbrace{\boxed{\frac{10.010}{\sqrt{n+2}}}}_{\to 0}$$

Quindi $x_{n+1} \to 0$, ma allora anche $x_n \to 0$.

Oss. Se fosse stato $x_0 = \frac{1}{10}$ conveniva comunque usare al p.to (i) una limitazione "abbondante"

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{\frac{1}{10} + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{\frac{1}{10} + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{10}$$

se avessi come Hp induttiva che $x_n \leq \frac{1}{10}$

FALSA

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = 5 + \frac{n^{20}}{2^n}(x_n + \arctan x_n) \qquad x_1 = 2017$

Idea: all'inizio cresce molto, ma da un certo p.to in poi il 2^n al denominatore comanda.

Scelgo un intero n_0 tale che $\frac{n^{20}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione] (o $x_n \geq 5$)

(ii) $x_n \leq x_{n_0} + 100 \quad \forall n \geq n_0$

(iii) $x_n \to 5$

Dim (iii) Grazie al p.to (ii) sappiamo che

$$\boxed{5} \leq x_{n+1} \leq 5 + \underbrace{\boxed{\frac{n^{20}}{2^n}\left(x_{n_0} + 100 + \frac{\pi}{2}\right)}}_{\to 5} \qquad \forall n \geq n_0$$

$$5 \to 5, \quad x_{n+1} \to 5, \quad \frac{n^{20}}{2^n}\left(x_{n_0} + 100 + \frac{\pi}{2}\right) \to 0$$

Ho dim. che $x_{n+1} \to 5$, quindi anche $x_n \to 5$.

Dim (ii) Per induzione

Passo base $\boxed{n = n_0}$ $\qquad x_{n_0} \leq x_{n_0} + 100$ ☺

Passo ind Ipotesi: $x_n \leq x_{n_0} + 100$ $\qquad$ Tesi: $x_{n+1} \leq x_{n_0} + 100$

$$x_{n+1} = 5 + \frac{n^{20}}{2^n}\left(x_n + \arctan x_n\right)$$

$$\underset{\text{Uso Hp}}{\leq} 5 + \underbrace{\boxed{\frac{n^{20}}{2^n}}}_{\leq \frac{1}{2} \text{ per } n \geq n_0}\left(x_{n_0} + 100 + 10\right) \leq 5 + \frac{1}{2}\left(x_{n_0} + 110\right) \overset{?}{\leq} x_{n_0} + 100$$

L'ultima dis. è come dire $\qquad 5 + \frac{1}{2}x_{n_0} + 55 \leq x_{n_0} + 100$

$$-40 \leq \frac{1}{2}x_{n_0}$$

e questa è vera per il p.to (i).

Oss. Se invece di 100 avessi messo 2 o addirittura nulla, avrei avuto pbm. nel passaggio induttivo

— o — o —

Esempio 4 $\qquad x_{n+1} = \sqrt[n]{1.000 + x_n} \qquad x_1 = 2017$

$$x_2 = \sqrt[1]{1.000 + x_1} = 3017 \qquad x_3 = \sqrt[2]{1000 + x_2} = \sqrt{4017} = 60 + \text{q.c.}$$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ (oppure $x_n \geq 1$)

[Facile induzione]

(ii) $x_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 1$

(iii) $x_n \to 1$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Dal punto (i) e (ii) sappiamo che

$$\underbrace{\sqrt[n]{1.000}}_{\downarrow\ 1} \leq \underbrace{x_{n+1}}_{\downarrow\ 1} = \sqrt[n]{1.000 + x_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{11.000}}_{\downarrow\ 1}$$

Solita conclusione.

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Induzione ... faccio a mano i passi base $n = 1$ e $n = 2$.

... $\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi : $x_n \leq 10.000$

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{1.000 + x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Uso Hp + monotonia di } \sqrt[n]{\ }}}{\leq} \sqrt[n]{11.000} \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq 2}}{\leq} \sqrt{11.000} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Facile}}}{\leq} 10.000$$

Oss. $\to$ Provare a fare lo stesso con il piano con la monotonia e vedere che succede.
Quando si imposta la disug. ci sono problemi.

Esercizio Dimostrare davvero che è definitivamente monotona (idea: usare l'induzione).

— o — o —