ANALISI 1 — LEZIONE 004

Note Title 28/09/2024

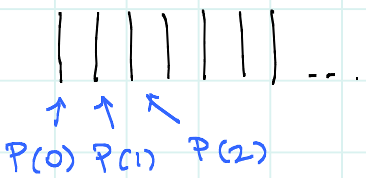
PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(n)$ un predicato che dipende da un parametro $n \in \mathbb{N}$
($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)
lo zero è naturale

Supponiamo che
(i) $P(0)$ è vera (se sostituisco $n=0$ viene qualcosa di vero)
(ii) se $P(n)$ è vera per un certo n, allora anche $P(n+1)$ è vera [$\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$]
Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Perché moralmente funziona:
→ $P(0)$ è vera per la (i)
→ Visto che $P(0)$ è vera, per la (ii) con $n=0$ anche $P(1)$ è vera
→ " " $P(1)$ " " $n=1$ anche $P(2)$ è vera
e così via.

Interpretazione intuitiva: pensiamo a tanti mattoncini messi in modo da cascare uno di fila all'altro



(i) è come dire che $P(0)$ casca
(ii) è come dire che c'è il meccanismo di caduta

Nomenclatura: (i) si chiama "PASSO BASE"
(ii) si chiama "PASSO INDUTTIVO"

<u>Variante</u> : supponiamo che

(i) $P(42)$ è vera

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per ogni $n \geq 42$ $\quad (n \geq 30)$

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 42$

Se la (ii) fosse stata con $n \geq 30$ la conclusione era comunque solo per $n \geq 42$.

<u>Esempio 1</u> $\quad \boxed{0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}} \quad P(n)$

Passo base $\quad n=0$ sostituisco $\quad 0=0$ vera :)

Passo induttivo $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Ipotesi : $0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi : $0+1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ← Ho scritto $P(n)$ con $n+1$ al posto di n

Dimostro la tesi a partire dall'ipotesi

$$\underbrace{0+1+2+\ldots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Uso} \\ \text{ipotesi}}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spero !!}}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Controllo la speranza:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right] = (n+1)\frac{n+2}{2} \quad :)$$

<u>Notazione</u> $\quad 0+1+2+\ldots+n = \sum_{k=0}^{n} k$

sommatoria

Come farsi venire in mente la formula? In questo caso c'è il trucco di Gauss!

Sommiamo i numeri da 1 a 100 :

$$\boxed{0} + \boxed{1} + \boxed{2} + \dots + 99 + 100 = S$$
$$\boxed{100} + \boxed{99} + \boxed{98} + \dots + 1 + 0 = S$$

Sommiamo le 2 righe

$$\underbrace{100 + 100 + 100 + \dots + 100 + 100}_{101 \cdot 100} \qquad 2S$$

$$2S = 100 \cdot 101 \rightsquigarrow S = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

Esempio 2

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\| $$

$$0 + 1 + 4 + 9 + \dots$$

Ma sarà vera?

$\boxed{n=0}$ $\quad 0 = 0$

$\boxed{n=1}$ $\quad 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

$\boxed{n=2}$ $\quad 0 + 1 + 4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}$

$\boxed{n=3}$ $\quad 0 + 1 + 4 + 9 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6}$

Proviamo per induzione

Passo base $\quad n = 0$: già fatto

Passo induttivo $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Ipotesi: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesi: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Dimostro la tesi usando l'ipotesi

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

isolo l'ultimo termine

spero

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Controllo la speranza:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6}$$

$$= (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

Esempio 3 Sia a un numero reale, con $a \neq 1$.
Allora

$$\underset{\substack{\| \\ 1+a+a^2+\dots+a^n}}{\sum_{k=0}^{n} a^k} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

[Somma di una progressione geometrica]

$\boxed{\text{Passo base}}$ $n=0$ $\quad 1 = \frac{a-1}{a-1}$ ☺

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Saltati i convenevoli...

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isolo} \\ \text{ultimo termine}}}{=} \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{ipotesi}}}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

Casi particolari $\boxed{n=1}$ $\quad 1+a = \frac{a^2-1}{a-1} \rightsquigarrow a^2-1 = (a+1)(a-1)$

$\boxed{n=2}$ $\quad 1+a+a^2 = \frac{a^3-1}{a-1} \rightsquigarrow a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1)$

$\boxed{n=3}$ $\quad 1+a+a^2+a^3 = \frac{a^4-1}{a-1} \rightsquigarrow a^4-1 = (a-1)(a^3+a^2+a+1)$ ...

— o — o —