3 Induzione

L'induzione è un metodo formale che permette di definire in modo rigoroso insiemi, funzioni. Serve anche per dimostrare che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un determinato insieme. Diventa sopratutto utile quando queste definizioni sono insiemi, funzioni di cardinalità o di lunghezza notevolmente grande (ma sempre finiti).

3.1 Sommatorie, produzioni

3.1.1 Sommatoria

Definizione 3.1. *Sia $a : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}$ una successione di anturali $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La sommatoria degli a_i per i che va da 1 a n è:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{20}$$

Possiamo definirla come di seguito in maniera induttiva:

- Clausola base: $\sum\limits_{i=1}^{0} a_i = 0$
- Clausola induttiva: $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) + a_{n+1}$

3.1.2 Sommatoria da k

Definizione 3.2. *Sia $a : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}$ una successione di naturali $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sia $k \in \mathbf{N}^+$. La sommatoria degli a_i per i che va da k a n è:*

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{21}$$

Possiamo definirla come di seguito in maniera induttiva:

- Clausola base: $\sum\limits_{i=k}^{0} a_i = 0$
- Clausola induttiva: $\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n+1 \\ \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) + a_{n+1} & \text{se } k \leq n+1 \end{cases}$

3.1.3 Produttoria da k

Definizione 3.3. *Sia $a : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}$ una successione di naturali $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sia $k \in \mathbf{N}^+$. La produttoria degli a_i per i che va da k a n è:*

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \tag{22}$$

Possiamo definirla come di seguito in maniera induttiva:

- Clausola base: $\sum\limits_{i=k}^{0} a_i = 0$
- Clausola induttiva: $\sum\limits_{i=k}^{n+1} a_i = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n+1 \\ \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) \cdot a_{n+1} & \text{se } k \leq n+1 \end{cases}$

3.2 Schema generale induttivo

La definizione per induzione di un insieme A sfrutta uno schema generale che permette di rappresentare infinite soluzioni:

1. **Clausola base**, o caso base, che stabilisce che certi oggetti appartengono all'insieme. Questi elementi costituiscono i mattoncini per costruire altri elementi dell'insieme. Nel nostro caso andiamo ad elencare un numero finito di elementi che appartengono ad A.
2. **Clausola induttiva** o passo induttivo, che descrive in che modo gli elementi dell'insieme possono essere usati per produrre altri elementi dell'insieme. Nel nostro caso usiamo elementi di A per costruirne o definirne altri.
3. **Clausola terminale**, che stabilisce che l'insieme che si sta definendo non contiene altri elementi oltre a quelli ottenuti dalle due clausole precedenti. Quindi l'insieme definito è il più piccolo insieme che soddisfa la clausola base e quella induttiva. Nel nostro caso definiamo che gli unici elementi che soddisfano A sono quelli definiti nelle condizioni 1 e 2. [14]

Esempio 3.2.1. Riscrivendo per intero in nostro esempio con A:
Clausola base: $A_1 \times A_2$ è una n-upla
Clausola induttiva: $A_1 \times A_2 \times A_3$ è una n-upla

Tramite queste due clausole possiamo andare a ricreare ogni n-upla (2-upla, 3-upla, ecc..) andando semplicemente a ripetere la clausola induttiva partendo da quella base. Infatti una 3-upla è clausola base per 1 volta clausola induttiva, mentre una 4-upla è la clausola base più due ripetizioni della clausola induttiva:
3-upla $= A_1 \times A_2 \times A_3$ 4-upla $= A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ e così per ogni n-upla

Esempio 3.2.2. Altri esempi particolari di casi induttivi:

- **Chiusura di kleene** o stella di kleene: $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ $A^n = A \times A \times A \ldots$ (n volte). Parte da 0 perché si considera quella che in informatica sarebbe la stringa vuota, cioè $A^0 = \{\}$, che si rappresentata con ϵ.
- **Chiusura positiva**: $A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ Uguale alla stella di kleene ma senza insieme vuoto.

Entrambi questi casi sono operazioni molto consuete nel mondo dell'informatica, essendo che possiamo vedere A come un insieme di caratteri per esempio $A = unicode$, e tramite queste operazioni si vanno a creare tutte le possibili sequenze o stringhe con quei caratteri.

3.3 Definizione induttiva dell'insieme $\mathbb{N}$

Definizione 3.4 (Definizione induttiva insieme $\mathbb{N}$)**.** *L'insieme N dei numeri naturali è l'insieme di numeri che soddisfa le seguenti clausole:*

1. *Clausola base:* $0 \in \mathbb{N}$.
2. *Clausola induttiva: se* $n \in \mathbb{N}$ *allora* $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Definendo le tre clausole è immediato capire la definizione dell'insieme $\mathbb{N}$ per induzione. Infatti possiamo ricavare qualsiasi numero dell'insieme semplicemente partendo da 0 (che già sappiamo per clausola base appartenere all'insieme) e ripetendo la clausola un numero illimitato [15] di volte.

Esempio 3.3.1. Altri esempi analoghi alla definizione dell'insieme $\mathbb{N}$:

1. Definizione **N. pari**: Base: $2 \in \mathbb{N}^{pari}$ Induttiva: se $n \in \mathbb{N}^{pari}$ allora $n + 2 \in \mathbb{N}^{pari}$
2. Definizione **N. dispari**: Base: $1 \in \mathbb{N}^{dispari}$ Induttiva: se $n \in \mathbb{N}^{dispari}$ allora $n + 2 \in \mathbb{N}^{dispari}$
3. Definizione **Potenze 2**: Base: $1 \in$ P Induttiva: se $p \in$ P allora $2 * p \in$ P
   È possibile scrivere anche come: Base: $2^0 \in P$ Induttiva: se $2^n \in P$ allora $2^n + 1 \in P$

[14] La clausola terminale di solito non viene specificata essendo sotto intesa
[15] Illimitato è diverso da infinito in quanto quest'ultimo non è un numero mentre il primo si

3.4 Definizione induttiva di funzioni

Per andare ad effettuare la definizione induttiva di una funzione bisogna andare (1) a stabilire il valore delle funzioni per gli elementi appartenenti alla clausola base e (2) una regola per andare a calcolare il valore della funzione sugli elementi che vi appartengono, stabiliti dalla clausola induttiva. Successivamente tramite te la clausola terminale definiamo che i punti (1) e (2) sono sufficienti a definire la funzione per tutti gli elementi dell'insieme. Quindi, prendendo una $f : A \to B$:

- La **clausola base** sarà il valore di f(a) per alcuni $a \in A$.
- La **clausola induttiva** invece indicherà il valore di f(a) utilizzando valori di f già definiti in precedenza.

Esempio 3.4.1. Facciamo un primo esempio definendo la funzione dei **numeri triangolari**.

Definizione 3.5 (Numeri triangolari)**.** *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ in numero triangolare T_n è uguale alla somma di tutti i numeri minori o uguali a n:*

$$T_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = fun(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \qquad T_n = \sum_{i=0}^{n} i \tag{23}$$

1. <u>Clausola base:</u> $T_0 = 0$
2. <u>Passo induttivo:</u> $T_{n+1} = T_n + (n + 1)$

Per dimostrare ciò possiamo procedere per casi andando a controllare $n = 1, n = 2, n = 3, \ldots$ e dimostrando la validità per questi casi, cosa che però non porta ad un risultato per un generico numero n. Per dimostrare la validità bisogna dimostrare quella che vine chiamata *formula di Gauss.*

$$\forall n \in \mathbb{N}. \left(T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \tag{24}$$

3.5 Dimostrazione induttiva di proprietà

Per andare a dimostrare una proprietà bisogna applicare il principio di induzione sui numeri naturali, che, dato una generica proprietà $P(n)$ sui naturali dice:

Definizione 3.6 (**Principio di induzione**)**.** *Se (caso base) $P(0)$ è vera, e se (passo induttivo) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ lo è, allora $P(m)$ è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$*

$$\frac{P(0) \land \forall n \in \mathbb{N}.(P(n) \Rightarrow P(n+1))}{\forall m \in \mathbb{N}.P(m)} \tag{25}$$

Proposizione 3.5.1 (Formula di gauss)**.** *La formula (24), $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, è valida per ogni $n \in \mathbb{N}$*

Dimostrazione 3.5.1 (Formula di gauss)**.** Per dimostrare la formula di gauss (24) per induzione è sufficiente dimostrare i seguenti casi:

1. <u>Caso base:</u> $T_0 = 0$, perché per definizione sarebbe $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$, quindi la formula di gauss (24) per $n = 0$ è vera.
2. <u>Passo induttivo:</u> Assumiamo che l'ipotesi $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ sia vera e dimostriamo che è vera per ogni $n + 1$, cioè che:

   $T_{n+1} = T_n + (n+1)$ Possibile per il passo induttivo della definizione dei numeri triangolari 23

   $= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1)$ Sostituiamo a T_n la clausola induttiva

   $= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2}$ Sviluppiamo l'equazione

   $= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2}$ Dimostrato il caso T_{n+1} la formula è dimostrata per induzione. ■

Esempio 3.5.1 (De Morgan)**.** Facciamo un altro esempio andando a dimostrare la proprietà di **De Morgan** per induzione:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Noi dobbiamo dimostrare che questa legge può valere per più insiemi utilizzando l'induzione. Quindi dobbiamo far valere la generalizzazione:

$$DM(n) = \forall A_1, \ldots, A_n \cdot \left(\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \right)$$

Noi a questo punto dobbiamo in particolare andare a dimostrare che per ogni $n \geq 2$ vale $DM(n)$:

$$\forall n.(n \geq 2 \Longrightarrow DM(n))$$

1. Caso base: $DM(2)$ diche che $\overline{(A_1 \cup A_2)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$, ed è dimostrato perché è ciò che dice la legge di De Morgan.

2. Passo induttivo: Assumiamo che $DM(n)$ sia vera e dimostriamo che vale anche $DM(n+1)$. Noi quindi vogliamo dimostrare che la seguente proprietà sia vera:

$$DM(n+1) = \forall\ A_1, ..., A_{n+1}\ \cdot\ \left(\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right)} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{A_i} \right)$$

Se prendiamo $n+1$ che è un insieme di $A_1, A_2, ...A_n, A_{n+1}$ notiamo che:

$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right)} = \overline{\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)}$ Perché possiamo usare la proprietà associativa per $\cup$.

$= \overline{A_{n+1}} \cap \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)}$ Utilizzando De Morgan

$= \overline{A_{n+1}} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \right)$ Per ipotesi induttiva.

$= \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{A_i} \right)$ Possiamo racchiudere tutto sotto la concatenazioni di intersezioni.

Vediamo quindi che anche il $DM(n+1)$ è dimostrato, quindi che tutte le sequenze $DM(n)$ sono dimostrate. ■

Esempio 3.5.2 (Numeri di Fibonacci)**.** La successione dei numeri di Fibonacci può essere definita induttivamente come:

1. Caso base: $f_1 = 1$
2. Caso base: $f_2 = 1$
3. Passo induttivo: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ se $n > 2$

Dimostrazione 3.5.2 (Numeri di Fibonacci)**.** Proviamo a dimostrare questa successione numerica. Sia f_i l'i-esimo numero di Fibonacci, noi dobbiamo dimostrare per induzione che:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ . \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1} \right) \tag{26}$$

1. Caso base: Poiché noi dobbiamo dimostrare per tutti gli n tale che $n \in \mathbb{N}^+$ per il caso base dobbiamo considerare $n = 1$, quindi il nostro caso base sarà $\sum_{i=1}^{1} f_i^2 = f_1 \cdot f_2$. questo caso è dimostriamo immediatamente dalla definizione di f_i

2. Passo induttivo: Assumiamo per ipotesi induttiva che valga $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

Una volta assunto per vero il passo induttivo possiamo dimostrare il caso $n+1$, ciò porta a dimostrare che:

$\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 = \sum_{i=1}^{n} f_n^2 + f_{n+1}^2$ Togliamo l'ultimo termine dalla sommatoria e scriviamolo esplicitamente.

$= f_n^2 \cdot f_{n+1}^2 + f_{n+1}^2$ Applichiamo l'ipotesi induttiva

$= (f_n^2 + f_{n+1}^2) \cdot f_{n+1}$ Proprietà distributiva

$= f_{n+2}^2 \cdot f_{n+1}$ Sviluppiamo l'equazione

Vediamo come $f_{n+2}^2 \cdot f_{n+1}$ sia la causala induttiva che volevamo dimostrare. Possiamo dire dunque che la formula di Fibonacci e dimostrata. ■

3.6 Principio di induzione forte sui naturali

Il Principio di Induzione Forte sui naturali ci permette di rafforzare le ipotesi del passo induttivo e portare avanti la dimostrazione in modo più semplice.

Definizione 3.7 (Induzione Forte)**.** *Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che se $P(0), P(1), \dots, P(n-1)$ sono vere allora anche $P(n)$ lo è, allora $P(m)$ è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$.*

$$\frac{\forall n.(P(0) \wedge P(1) \wedge ... \wedge P(n-1) \to P(n))}{\forall m.P(m)} \tag{27}$$

Esempio 3.6.1. Per dimostrare il:

Definizione 3.8 (Teorema fondamentale dell'Aritmetica)**.** *Ogni intero n maggiore di* 1 *o è un numero primo oppure può essere scritto come prodotto di numeri primi.*

- Caso base: $P(2)$: 2 è primo
- Passo induttivo: dimostro $P(m)$ assumendo $P(n)$ valga $\forall n \in \mathbf{N}^+ . n < m$
  - Se m è primo allora $P(m)$ vale
  - Se m non è primo allora ha un fattore **non banale** x ovvero $m = x \cdot y . x < m \wedge y < m$. Per induzione forte $x \cdot y$ può essere scritto come prodotto di numeri primi quindi $P(m)$ vale