Studio di funzioni integrali

$$\boxed{\varphi(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt}$$

o ancora più in generale

$$\varphi(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,dt \quad \rightsquigarrow \text{Analisi 2}$$

Situazione più semplice: $\to a(x) \equiv a$ (costante)

$\to b(x) = x$

In questo caso viene la funzione integrale classica

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

Formula per la derivata

$$\boxed{\varphi'(x) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $F(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$. Allora

$$\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x))$$

Quindi per la derivata della funzione composta

$$\varphi'(x) = F'(b(x))\,b'(x) - F'(a(x))\,a'(x)$$

$$= f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$$

Esempi $\quad \varphi(x) = \int_x^{x^2} \arctan(t^2)\, dt$

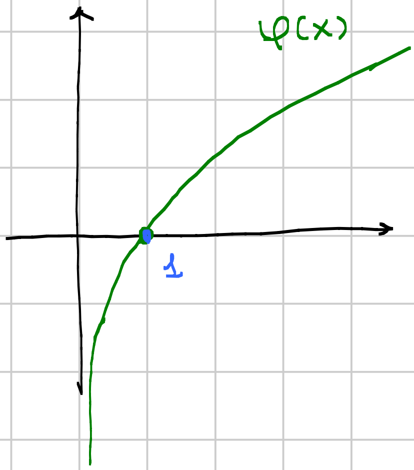
Allora $\quad \varphi'(x) = \arctan(x^4) \cdot 2x - \arctan(x^2) \cdot 1$

$$\varphi(x) = \int_{2x}^{3\sin x} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$\varphi'(x) = \frac{\cos(3\sin x)}{\sqrt{3\sin x}} \underbrace{3\cos x}_{b'(x)} - \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2x}} \cdot \underbrace{2}_{a'(x)}$$

Esercizio 1 $\quad$ Studiare la funzione

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\arctan t}\, dt$$



→ Definita (almeno) per ogni $x > 0$

→ $\varphi(1) = 0$

→ $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\arctan x} \quad \forall\, x > 0$

$\varphi'(x) > 0$ per ogni $x > 0 \Rightarrow$ strett. crescente

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\arctan t}\, dt \underset{\text{def}}{=} -\int_0^1 \frac{1}{\arctan t}\, dt$$

$$= -\infty \quad \text{per confr. asint. con } \frac{1}{t}$$

$\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ sempre, quindi

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\arctan t}\, dt \geq \int_1^x \frac{2}{\pi}\, dt = \frac{2}{\pi}(x-1) \to +\infty \text{ per } x \to +\infty$$

Abbiamo così dim. che $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è bigettiva.

Lo stesso argomento mostra che non è estendibile per $x \leq 0$.

→ Calcolare l'ordine di ∞ di $\varphi(x)$ per $x \to +\infty$. Ci aspettiamo un asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp}}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\arctan x} = \frac{2}{\pi}$$

Questo da solo dice che $\varphi(x) \sim \frac{2}{\pi} x$ per $x \to +\infty$

Vediamo il limite che dovrebbe n

$$n := \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) - \frac{2}{\pi} x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\int_1^x \frac{dt}{\arctan t} - \int_0^x \frac{2}{\pi} \, dt \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{\arctan t} - \frac{2}{\pi} \right) dt - \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{\pi} \, dt}_{\substack{\text{numero} \\ = \frac{2}{\pi}}}$$

$$\frac{1}{\arctan t} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan t}{\arctan t \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\arctan \frac{1}{t}}{\frac{\pi}{2} \cdot \arctan t}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \boxed{\int_1^x \frac{\arctan \frac{1}{t}}{\frac{\pi}{2} \cdot \arctan t} \, dt} - \frac{2}{\pi}$$

diverge per confr. asint. con $\frac{1}{t}$.

$$= \int_1^{+\infty} \ldots - \frac{2}{\pi} = +\infty$$

Quindi niente asintoto obliquo ☹.

$\to$ per $x \to 0^+$, $\varphi(x)$ si comporta come $\log x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arctan x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

—o —o —

<u>Esempio</u> $$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \arctan t \cdot e^{-t}\, dt$$

Domanda: calcolare il pol. di Taylor di ordine 5 con centro in $x=0$.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Calcolo le prime 5 derivate ... auguri!

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Taylor dentro!

$$\arctan t \cdot e^{-t} = \left(t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^4)\right)\left(1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right)$$

$$= t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + o(t^4)$$

$$= t - t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)$$

quindi $$\varphi(x) = \int_x^{x^2} t - t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_x^{x^2} - \left[\frac{1}{3}t^3\right]_x^{x^2} + \left[\frac{1}{24}t^4\right]_x^{x^2} + \left[\frac{1}{30}t^5\right]_x^{x^2} + \left[\text{prim. di } o(t^4)\right]_x^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \underbrace{o(x^5)}_{\text{spero.}}$$

<u>Domandone</u> La primitiva di $o(x^4)$ è $o(x^5)$?

Più in generale: se
$$f(x) = o(x^k) \quad \text{per } x \to 0$$
posso dire che
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = o(x^{k+1}) \quad ?$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Funziona perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^{k+1}} \underset{\uparrow \text{Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(k+1)x^k} \underset{\uparrow \text{ipotesi.}}{=} 0$$

— o — o —

Oss. Non posso derivare o piccolo !!! Ad esempio

$$f(x) = x^{30} \sin \frac{1}{x^2} = o(x^{29}) \quad \text{ma}$$

$$f'(x) = 30x^{29} \sin \frac{1}{x^2} - x^{30} \cos \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\parallel$$

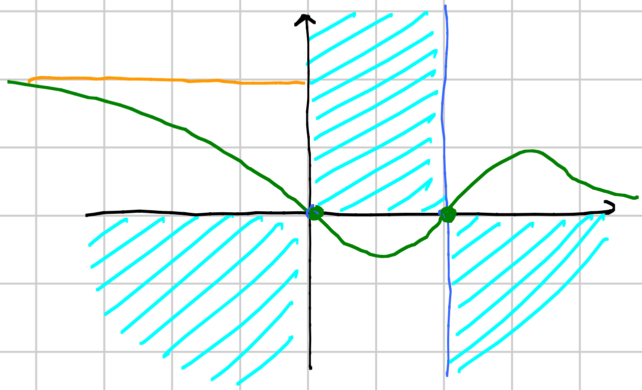
$$2x^{27} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{e non è} \quad o(x^{28}).$$

— o — o —

Esempio $\quad \varphi(x) = \int_x^{x^2} \underbrace{\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}}_{f(t)} dt$

Studiare la funzione

→ La funzione $f(t)$ non ha problemi in $t=0$, perché è limitata (basta oss. che tende ad 1)
Quindi $\varphi(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ammesso che per $x=0$ fa 0).



→ L'integranda $f(t)$ è sempre ≥ 0, quindi

$$\varphi(x) \geq 0 \iff x^2 \geq x$$
$$\iff x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 1$$

→ $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = 0$ perché l'integranda è del tipo $\frac{1}{t^2}$, quindi è l'esercizio della doppia di una lez. precedente

$\to \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$ = numero reale

per $t \to \pm\infty$ si comporta come $\frac{1}{t^2}$

$\to$ Conseguenza: $\varphi(x)$ è limitata su tutto $\mathbb{R}$!!

$\to$ $\varphi(x)$ è lip. perché la sua derivata è limitata

$$\varphi'(x) = \underbrace{\frac{1-e^{-x^4}}{x^{\cancel{4}3}} \cdot 2\cancel{x}}_{\text{IDEM}} - \underbrace{\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}}_{\text{limitata: nessun pbm in } x=0 \text{ e tende a 0 per } x \to \pm\infty}$$

$\to$ Per quali $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(n)]^{\alpha} \quad \text{converge ?}$$

Dico che $\varphi(n) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$ quindi conv. $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(n)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

vedi derivata precedente.

$\to \int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx = +\infty$ per C.A. con $\frac{1}{x}$ (vedi limite sopra).

— o — o —