ANALISI 1 — LEZIONE 095

Note Title 22/03/2017

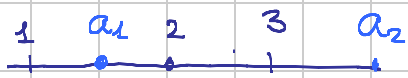
<u>Proposizione</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.
Allora esiste una successione $\{a_n\} \subseteq A$ t.c.

$$a_n \to \sup A$$

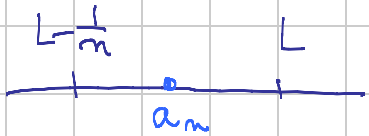
Ne esiste anche una che tende all'inf.

<u>Dim.</u> Ci sono sempre 2 casi

(1) $\sup A = +\infty$. Per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ t.c. $a \geq M$.
Me la gioco con $M = n$ e trovo un elemento $a \in A$ tale che $a \geq n$. Lo chiamo a_n.
Così ho la succ. che volevo.



(2) $\sup A = L \in \mathbb{R}$.
Per la caratt. del sup vale che
(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$.



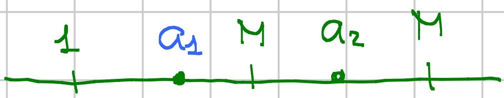
Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e ottengo

$$L - \frac{1}{n} \leq a_n \leq L$$

Per i carabinieri $a_n \to L$, come richiesto.

<u>Esercizio</u> Dimostrare che si può fare in modo che a_n sia debolmente crescente (strett. se $\sup = +\infty$).

<u>Idea</u> Uso $M = 1$



<u>Oss.</u> Caso bastardo: $A = \{28\}$
Vedere come questo complica le dimostrazioni

<u>Oss.</u> Se $\sup A \notin A$, allora posso fare a_n strett. cresc.

Proposizione Sia a_n una successione, e sia a_{i_n} una sua sottosuccessione. Allora

$$\boxed{\liminf a_n \le \liminf a_{i_n} \le \limsup a_{i_n} \le \limsup a_n}$$

Se a_n ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$, allora i 2 laterali coincidono, ma allora coincidono anche i centrali.

Dim Dim. la disug. di destra. Pongo

$$S_n := \sup\{a_k : k \ge n\} \qquad \hat{S}_n := \sup\{a_{i_k} : k \ge n\}$$

Allora $\hat{S}_n \le S_n$

sto facendo il sup su meno roba, cioè solo sulla s.succ.

Quando $n \to +\infty$ si conserva la disug. e si ha la tesi.

—o—o—

Corollario Se a_n è una successione e a_{i_n} è una sottosucc. che ha limite, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} a_{i_n} \le \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

—o—o—

MAXLIM e MINLIM

Sia a_n una successione. Considero tutte le sottosucc. che hanno limite. Considero l'insieme A costituito da tutti i possibili limiti di sottosucc. che hanno limite. Allora esistono

$$\max A = \operatorname{maxlim} a_n \qquad \min A = \operatorname{minlim} a_n$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ $\quad$ Max lim = limsup

min lim = liminf

<u>Oss.</u> La parte facile è che

$$\liminf \leq \min\lim \leq \max\lim \leq \limsup$$

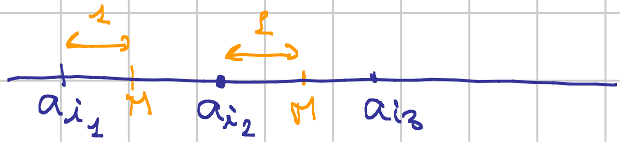
(segue dal corollario di prima)

$\boxed{\text{Dim che Max lim = limsup.}}$ Devo dimostrare che per ogni succ. a_n esiste una sottosucc. a_{i_n} tale che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{i_n} = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ tutta $a_n \to -\infty$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.



- Scelgo a_{i_1} a caso
- Supponendo di aver già scelto $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$, scelgo l'indice i_{n+1} in maniera tale che

$$a_{i_{n+1}} \geq \underbrace{a_{i_n} + 1}_{M} \qquad e \qquad i_{n+1} > i_n$$

(posso perché M viene superato ∞ volte, quindi almeno una volta con indice grande quanto mi serve)

Si dimostra facilmente che $a_{i_n} \geq a_{i_1} + n$ da cui il limite è $+\infty$.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ $\limsup = L \in \mathbb{R}$

Per ogni $m \geq 1$ uso la caratt. con $\varepsilon = \frac{1}{m}$. So che esistono ∞ indici per cui

$$L - \frac{1}{m} \leq a_k \leq L + \frac{1}{m}$$

Quindi posso procedere in questo modo

- Scelgo a_{i_1} in modo tale che $\quad L - 1 \leq a_{i_1} \leq L + 1$
- Supponendo di aver già scelto $i_1, \ldots, i_n$, scelgo i_{n+1} in maniera tale che

$$i_{n+1} > i_n \qquad\qquad L - \frac{1}{n+1} \leq a_{i_{n+1}} \leq L + \frac{1}{n+1}$$

(posso perché ho ∞ infiniti indici che soddisfano la seconda)

Per i carabinieri $a_{i_n} \to L$.

Conseguenza operativa: come dimostro che $\limsup a_n = L$?

SLOGAN: $\to$ disuguaglianza dall'alto
$\to$ sottosuccessione dal basso.

Esempio

$$a_n = \frac{3(-1)^n n + \sqrt{n} + \arctan n}{2 + (-1)^n \sqrt{n} + n}$$

$$\limsup a_n = 3 \qquad\qquad \liminf a_n = -3$$

→ Disuguaglianza dall'alto

$$a_n \le \boxed{\frac{3n+\sqrt{n}+\arctan n}{2-\sqrt{n}+n}}$$

$\downarrow$
3

Quindi $\limsup a_n \le 3$

→ Sottosucc. dal basso: trovare una s.succ. con limite ≥ 3

Basta prendere $a_{2n} = \dfrac{6n+\sqrt{2n}+\arctan(2n)}{2-\sqrt{2n}+2n} \to 3$

Questo dice che $\max\lim a_n \ge 3$

Per il liminf lo slogan è

→ Disuguaglianza dal basso

→ Sottosucc. dall'alto.

— o — o —