ANALISI 1 — LEZIONE 38

Note Title 16/11/2024

Funzioni iperboliche Seno, Coseno, Tangente iperbolica

<u>Def.</u>

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Simmetrie

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$ ⇝ Dispari

$\cosh(-x) = \cosh(x)$ ⇝ Pari

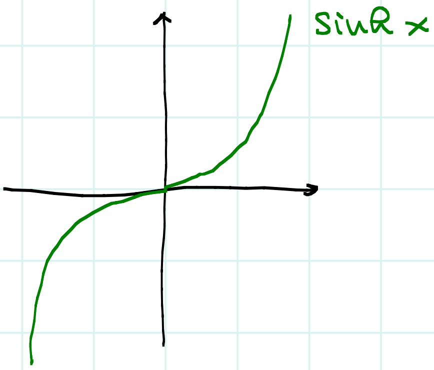
$\tanh(-x) = -\tanh(x)$ ⇝ Dispari

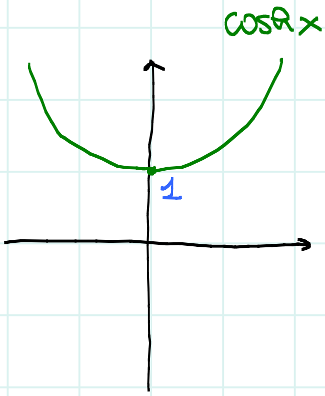
Le funzioni non sono periodiche, anzi

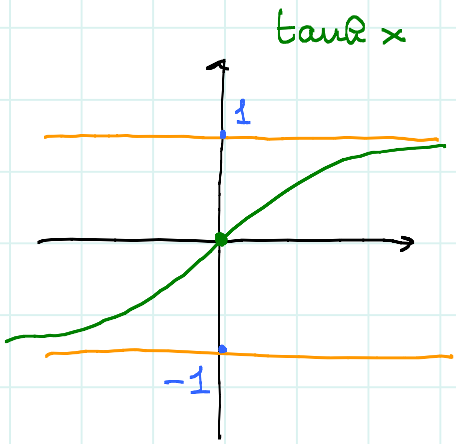
$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

Grafici







Quadrati

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Quindi

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$ relazione fondamentale

$\boxed{\text{Duplicazione}}$ Sommando i due quadrati trovo

$$\boxed{\sinh^2 x + \cosh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x)}$$

$$\boxed{\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\sinh x \cdot \cosh x}$$

simili alla trigonometria classica

$$2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$\boxed{\text{Derivate}}$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \boxed{\sinh x}$$

senza il segno −

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2}$$

$$= 1 - \tanh^2 x$$

diverso dalla trigo classica

$\boxed{\text{Taylor}}$ $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \dots + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4} \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

come $\cos x$, solo con tutti i segni +

Analogamente $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

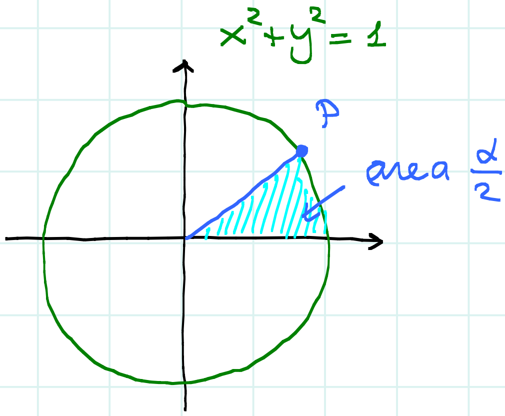
Oss. $\cosh x + \sinh x = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

si prende i pezzi pari di e^x

si prende i pezzi dispari

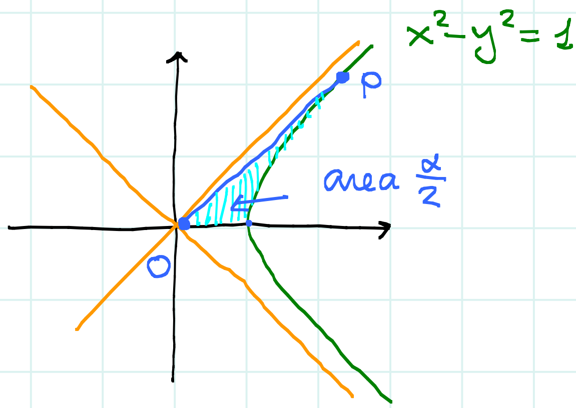
Interpretazione geometrica

Trigonometria classica



$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ dove $\frac{\alpha}{2}$ è l'area del settore in figura

Trigonometria iperbolica



Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, scelgo P sull'iperbole in modo che il settore in figura abbia area $\frac{\alpha}{2}$

Si può dimostrare che P esiste e $P = (\cosh\alpha, \sinh\alpha)$.

Dall'interpretazione geometrica è chiaro che $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ sono crescenti per $\alpha \geq 0$.

Si vede anche che $\tanh\alpha$ = coeff. angolare della retta OP tende a 1 quando $\alpha \to +\infty$

Funzioni iperboliche inverse   Settsinh x, Settcosh x, Setttanh x

$\boxed{\text{Settsinh } x}$ $f(x) = \sinh x$ è iniettiva e surgettiva come

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Quindi la sua inversa $\boxed{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ è $g(x) = \text{Settsinh } x$

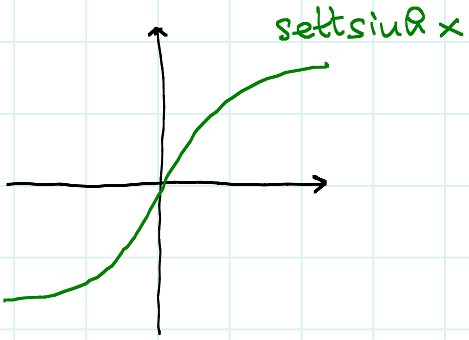
$\boxed{\text{Settcosh } x}$ $f(x) = \cosh x$ è iniettiva e surgettiva come

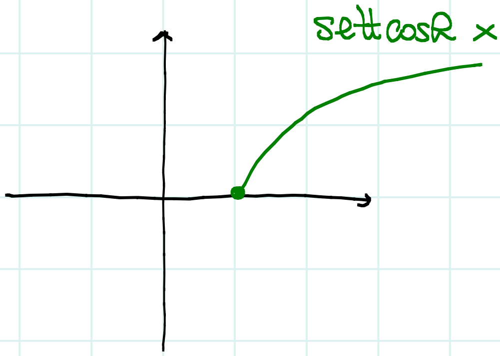
$$f : [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$$

Quindi l'inversa $g(x) = \text{Settcosh } x$ è definita come

$$g : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$$

Analogamente   Setttanh : $(-1, 1) \to \mathbb{R}$





$\boxed{\text{Formula per settcosh}}$ Dato $y \geq 1$, devo trovare $x \geq 0$ tale che

$$\cosh x = y \quad , \quad \text{cioè} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

Pongo $e^x = z$ e mi trovo $\underset{\underset{e^x}{\uparrow}}{z} + \underset{\underset{e^{-x}}{\uparrow}}{\frac{1}{z}} = 2y$, cioè $z^2 + 1 = 2yz$

cioè $z^2 - 2yz + 1 = 0$. Questa si risolve

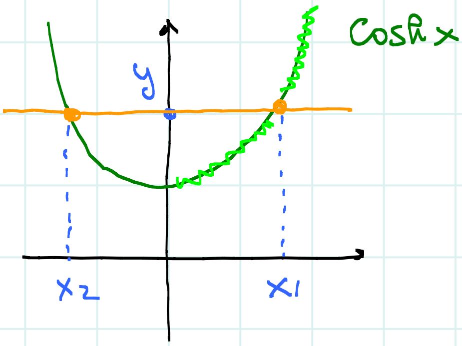
$$z = y \pm \underbrace{\sqrt{y^2 - 1}}_{\text{ok se } y \geq 1}$$

Scelgo quella con il segno +, perché l'altra si verifica essere < 1.

Ora $e^x = z = y + \sqrt{y^2 - 1}$ da cui

$$\boxed{x = \text{Settcosh } y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)}$$

<u>Oss.</u> È giusto che venissero due valori di z



$$x_1 = \log\big(\underbrace{y+\sqrt{y^2-1}}_{\geq 1}\big)$$ ⇝ si verifica che $x \geq 0$

$$x_2 = \log\big(y-\sqrt{y^2-1}\big)$$

<u>Esercizio</u> Trovare formule analoghe per Settsinh x e Setttanh x

<u>Oss.</u>
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Se sommo e divido per due:
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cosh(i\theta)$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(i\theta)$$

almeno formalmente.

<u>Brutalmente</u>: cosh x e sinh x sono la versione immaginaria di cos x e sin x

— o — o —