ANALISI 1 — LEZIONE 65

Note Title 16/12/2024

UNICITÀ DEL POLINOMIO DI TAYLOR

Una stessa funzione non può avere due polinomi di Taylor diversi di grado n.

Supponiamo che
$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$
$$f(x) = \hat{P}_n(x) + o(x^n)$$
per $x \to 0$

Facendo la differenza avremmo
$$\underbrace{P_n(x) - \hat{P}_n(x)}_{\text{polinomio di grado } \leq n} = o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

Fatto fondamentale: un polinomio di grado $\leq n$ non può essere $o(x^n)$, a meno che non sia tutto nullo

termine di grado più piccolo

$$\frac{a_k x^k + \text{roba di grado maggiore}}{x^n}$$

non può tendere a 0 se $k \leq n$ e $a_k \neq 0$

— o — o —

Se f ha tutte le derivate previste, allora il polinomio è quello dato dalla formula solita.

<u>Oss.</u> Può succedere che f non abbia tutte le derivate previste, ma tuttavia abbia il polinomio di Taylor di un certo grado, e addirittura di tutti i gradi possibili (non sarà dato dalla formula)

Possibile esempio: $f(x) = x^{2025} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^{3000}}\right)$ estesa ponendo $f(0) = 0$

Si verifica che $f(x) = o(x^{2024})$, quindi $P_{2024}(x)$ è il polinomio nullo.

Tuttavia non esiste nemmeno $f''(0)$ (qui bisogna fare il conto)

— o — o —

<u>Notazione</u>: classi di regolarità. Si dice che $f \in C^k$ in un certo intervallo (a,b) o anche $f \in C^k(\mathbb{R})$ se f in quella zona ammette tutte le derivate fino all'ordine k e quelle sono continue nella zona prevista.

Varianti

C^∞ ⇝ tutte le derivate esistono e sono continue

C^ω ⇝ C^∞ e inoltre f è la somma della sua serie di Taylor (funzione ANALITICA)

omega

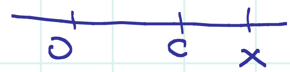
<u>Esempio 1</u> La funzione $f(x) = e^x$ è analitica su tutto $\mathbb{R}$, quindi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fissato per semplicità $x > 0$, per Taylor-Lagrange sappiamo che

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \frac{\boxed{e^c}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$f^{(n+1)}(c)$



Osserviamo che

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\to 0} \le \underbrace{\boxed{\frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}}}_{\to 0}$$

quando $n \to +\infty$
(fattoriale batte potenza)

Quindi, qualunque sia x, il resto tende a 0 per $n \to +\infty$

<u>Oss.</u> La stessa dimostrazione funziona con $\sin x$ e $\cos x$, quindi le serie di Taylor convergono alla funzione stessa per ogni $x \in \mathbb{R}$.

<u>Esempio 2</u> $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

<u>Fatto 1</u> La serie di potenze converge solo per $x \in (-1, 1]$

<u>Fatto 2</u> Taylor-Lagrange vale per ogni $x > -1$ perché vale in tutta la zona dove $f(x)$ ha le derivate previste.
Come la mettiamo?

Prendiamo $n = 2024$. Viene

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^{2024}}{2024} + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(2025)}(c)}{2025!} x^{2025}}}_{\text{resto}}$$

Quando avevamo fatto la formula per le derivate, veniva del tipo

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,(-1)^{n+1} \frac{1}{(1+x)^n}$$

per cui $\qquad \text{resto} = \frac{1}{2025} \frac{1}{(1+c)^{2024}} x^{2025}$

Ora non c'è più il fattoriale al denominatore che batte la potenza.
Quindi se $x = 15$ non c'è garanzia che il resto sia piccolo.
Discorso diverso se $x \in (-1, 1)$.

— o — o —

<u>Esercizio</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}}$

Assoluta convergenza: ☹ perché $|a_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

Spero in Leibnitz, ma devo dim. che $\frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}}$ è decrescente, o

equivalentemente che $\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$ è definitivamente crescente.

Modo facile: pongo $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$ e dim. che $f'(x) \geq 0$ per x grandi

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/4}} = \frac{2\sqrt[4]{x} - 1}{4x^{3/4}}$$

e questo è > 0 appena $\sqrt[4]{x} > \frac{1}{2}$.

Esempio (che Leibnitz e "circa" non vanno d'accordo)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}}}_{a_n}$$

Questa diverge a $+\infty$

Brutale: $a_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, quindi converge per Leibnitz   NO! NO!

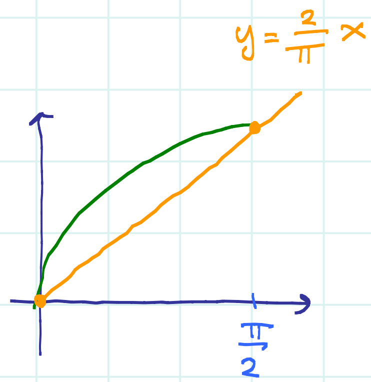
Realtà:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{converge per Leibnitz}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Diverge a } +\infty}$$

Esercizio Sappiamo che $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$.

Dimostriamo che

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



Potremmo fare lo studio di funzioni.
Cerchiamo di vederlo geometricamente
Osserviamo che la retta $y = \frac{2}{\pi}x$ passa per l'origine e per $(\frac{\pi}{2}, 1)$.
Sappiamo che le funzioni concave stanno sopra le rette congiungenti due p.ti del grafico.
Ora $f(x) = \sin x$ è concava in $[0, \pi]$ perché

$$f''(x) = -\sin x \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in [0, \pi].$$

— o — o —