ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 17

Note Title 17/10/2023

	$V \to W$	Applicazione	dim(ker)	dim(Im)	Matrice
1	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$(x-y, 2x+y)$	0	2	
2	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$(x-y, y-x)$			

(1) $f(x,y) = (x-y, 2x+y)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Verifico che f è lineare

(i) SOMMA

$$f(\underbrace{(x_1,y_1)}_{v_1} + \underbrace{(x_2,y_2)}_{v_2}) \overset{?}{=} f(\underbrace{(x_1,y_1)}_{v_1}) + f(\underbrace{(x_2,y_2)}_{v_2})$$

$$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f((x_1+x_2, y_1+y_2))$$

uso formula per f $\quad = (x_1+x_2-y_1-y_2, 2x_1+2x_2+y_1+y_2)$

spezzo come somma $\quad = (x_1-y_1, 2x_1+y_1) + (x_2-y_2, 2x_2+y_2)$

uso formula per f $\quad = f((x_1,y_1)) + f((x_2,y_2))$ ☺

(ii) PRODOTTO $\qquad v = (x,y) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda(x,y)) \overset{?}{=} \lambda f((x,y))$$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y)) &= f((\lambda x, \lambda y)) \\ &= (\lambda x - \lambda y, 2\lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x-y, 2x+y) \\ &= \lambda f((x,y)) \end{aligned}$$

Trovo ker (f) $\qquad \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ 3y=0 \end{cases} \rightsquigarrow y=0 \nearrow x=0$

Quindi $\ker(f) = \{(0,0)\}$ cioè il solo vettore nullo

In questo momento so che $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, cioè so che il sistema

$$\begin{cases} x - y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

ha soluzione (UNICA) per ogni a e b.

Altro modo di vedere le cose $\quad x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ha come unica sol. $x = y = 0$, cioè

$(1,2)$ e $(-1,1)$ sono lin. indip.

Ma essendo in numero giusto sono una base di $\mathbb{R}^2$, quindi ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si scrive in modo unico come loro comb. lin.

Altro modo di fare le cose: $(1,0)$ e $(0,1)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

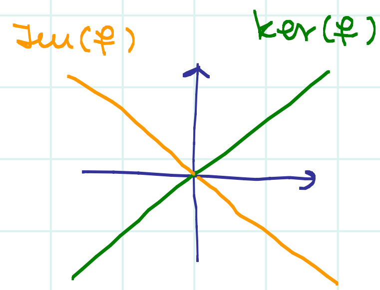
Quindi $f((1,0))$ e $f((0,1))$ sono generatori di $\operatorname{Im}(f)$

$$\underset{(1,2)}{\overset{\parallel}{f((1,0))}} \qquad \underset{(-1,1)}{\overset{\parallel}{f((0,1))}}$$

Quindi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}((1,2),(-1,1)) \underset{\substack{\text{sono lin.}\\ \text{indip.}}}{=} \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \dim \operatorname{Im} = 2.$

② $f(x,y) = (x-y,\ y-x) \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

[Fare verifica linearità]



$\ker(f) \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad x = y$

$\ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \operatorname{Span}((1,1)) \rightsquigarrow \operatorname{Dim}(\ker) = 1$

$\rightsquigarrow \dim(\operatorname{Im}) = 1$

base qualunque

Come sempre $\operatorname{Im}(f)$ è generata da $f(1,0)$ e $f(0,1)$

$$\underset{(1,-1)}{\overset{\parallel}{f(1,0)}} \qquad \underset{(-1,1)}{f(0,1)}$$

Quindi $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}((1,-1), (-1,1)) = \operatorname{Span}((1,-1))$

lo elimino

— o — o —

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$(x+y-z, z-3x)$	③
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$	$(x+y, x, -y, x)$	④

③ $\ker(f)$ $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -3x+z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$

$z=3t \quad y=2t \quad x=z-y=t \quad (x,y,z)=t\,(1,2,3)$

$\ker(f) = \operatorname{Span}((1,2,3))$ ⤳ $\dim(\ker)=1$

⤳ $\dim(\operatorname{Im})=2$

⤳ $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}^2$

⤳ f è surgettiva

④ $f(x,y) = (x+y, x, -y, x) \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$\ker(f)$ $\begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \\ -y=0 \\ x=0 \end{cases}$ ⤳ $x=y=0$ ⤳ $\ker(f)=\{(0,0)\}$

⤳ f è iniettiva

⤳ $\dim(\operatorname{Im})=2$

Chi è $\operatorname{Im}(f)$? È un s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dim 2

$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(f(1,0), f(0,1))$

$= \operatorname{Span}(\underbrace{(1,1,0,1), (1,0,-1,0)}_{\text{sono lin. indip.}})$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Ingredienti : $\rightarrow f : V \rightarrow W$ lineare

$\rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\rightarrow \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

Procedimento : calcolo $f(v_1)$ e lo scrivo come comb. lin. di $w_1, \dots, w_m$

$$f(v_1) = \boxed{c_{11}}\, w_1 + \boxed{c_{21}}\, w_2 + \dots + \boxed{c_{m1}}\, w_m$$

⇝ prima colonna di una matrice

Procedo allo stesso modo con $f(v_2)$

$$f(v_2) = \boxed{c_{1,2}}\, w_1 + \boxed{c_{2,2}}\, w_2 + \dots + \boxed{c_{m,2}}\, w_2$$

⇝ seconda colonna di una matrice

Procedo allo stesso modo fino a $f(v_n)$ e ottengo una matrice con m righe e n colonne.

— o — o —

Esempio

V	W	Applicazione	Base di V	Base di W
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x-y, y, y-x)$	$v_1 = (1,2)$ $v_2 = (1,3)$	$w_1 = (1,-2,0)$ $w_2 = (0,2,1)$ $w_3 = (1,1,1)$

$f(x,y,z) = (x-y, y, y-x)$ [Verificare che le basi lo siano veramente]

$$f(1,2) = (-1,2,1) = a\,(1,-2,0) + b\,(0,2,1) + c\,(1,1,1)$$

↑ formula

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ -2a + 2b + c = 2 \\ b + c = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -1 \\ 2b + 3c = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -1 \\ 2b + 3c = 0 \\ -c = 2 \end{cases}$$

$c = -2 \quad b = 3 \quad a = 1$

$$f(1,3) = (-2,3,2)$$
$$= a(1,-2,0) + b(0,2,1) + c(1,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = -2 \\ -2a + 2b + c = 3 \\ b + c = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ 2b + 3c = -1 \\ b + c = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ 2b + 3c = -1 \\ -c = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{c = -5 \qquad b = 7 \qquad a = 3}$$

La matrice di f in quelle basi è $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

A cosa serve la matrice?

$$f(0,1) = f(v_2 - v_1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$(-1,1)$ sono le componenti di $(0,1)$ rispetto alla base v_1, v_2

$\rightsquigarrow$ $(2,4,-3)$ sono le componenti di $f(0,1)$ rispetto alla base w_1, w_2, w_3

— o — o —