ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 40

Note Title 21/11/2023

Trovare le forme canoniche

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

① ② ③ ④ ⑤

① $\mathrm{Tr} = 0 \quad \mathrm{Det} = 4 \quad \leadsto \quad p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2i$

Diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ $\quad \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$

Jordan reale $\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo le M di passaggio su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$

Su $\mathbb{C}$ le colonne di M sono gli autovettori

$$\ker(A - 2i\,Id) = \ker \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((1, -2i))$$

Bovino: $\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ia - b \\ 4a - 2ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b = -2i\,a \quad \leadsto \quad 4a - 2i(-2i)a = 4a - 4a = 0$:)

$$\ker(A + 2i\,Id) = \ker \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((1, 2i))$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{pmatrix}$ $\quad$ Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$

↖ M che diagonalizza su $\mathbb{C}$

Consideriamo ora $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ↙ M che jordanizza su $\mathbb{R}$

parte reale e immaginaria delle 2 colonne della M complessa

$$M^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Forma canonica $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Tr = 4 \quad Det = 0$

Le due righe sono DIPENDENTI $\rightsquigarrow$ rango $=1$ $\rightsquigarrow$ dim ker $=1$
$\rightsquigarrow$ c'è l'autovalore 0 $\rightsquigarrow$ l'altro è per forza la traccia

$\boxed{\lambda = 4}$ $\ker\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{span}((1,-1))$ $\quad 1\cdot C_1 - 1\cdot C_2 = 0$

$\boxed{\lambda = 0}$ $\ker\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{Span}((3,1))$ $\quad 3C_1 + 1\cdot C_2 = 0$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Verifica: $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oppure

$$AM = M\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $Tr = 4 \quad Det = 4 \quad$ Autov: $2, 2$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \leftarrow \text{m.alg.}$$

$$p_A(\lambda) = Det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Serve $mg(2) = \text{Dim}(\ker(A - 2Id)) = 1$

$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \ker(A-2Id) = \text{Span}((1,1))$

$m_a(2) = 2$, $m_g(2) = 1$ $\rightsquigarrow$ 1 blocco da 2

Quindi

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Come trovo la M jordanizzante?

Sia $\{v_1, v_2\}$ la relativa base (le colonne di M).

Cosa deve succedere?

$A v_1 = 2 v_1 \rightsquigarrow v_1 =$ autovettore di A $\rightsquigarrow v_1 = (1,1)$

$A v_2 = 2 v_2 + v_1$

Vado di bovino $\quad v_2 = (a,b)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{2}_{2} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{v_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}$$

$$\begin{cases} a + b = 2a + 1 \\ -a + 3b = 2b + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a + b = 1 \\ -a + b = 1 \end{cases} \qquad b = a + 1 \qquad (a,b) = (0,1)$$

Conclusione: $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

Verifica: $\quad M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Jordan prevista}$$

4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Essendo triangolare superiore, gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$

$\rightsquigarrow$ diagonalizzabile sui reali $\qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 1}$ $\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((1,0))$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 3}$ $\ker \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((1,2))$

[Verifica per esercizio]

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Rango $= 1 \rightsquigarrow$ Dim (ker) $= 1 \rightsquigarrow$ c'è l'autovalore nullo $\rightsquigarrow$ somma autovalori $= 0$

$\rightsquigarrow$ autovalori : $0, 0$

$ma(0) = 2 \qquad mg(0) = 1 \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bovino : $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = (1-\lambda)(-1-\lambda)+1$

$= -1-\lambda+\lambda+\lambda^2+1 = \lambda^2$

$\lambda^2 = 0 \rightsquigarrow \lambda = 0, 0.$

Come trovo la M di passaggio ? $\quad Av_1 = 0$

$\rightsquigarrow v_1 \in \ker A \quad$ ad esempio $v_1 = (1, -1)$

$Av_2 = v_1 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} \qquad \begin{matrix} a+b = 1 \\ -a-b = -1 \end{matrix}$

$b = 1-a$ ad esempio $v_2 = (3, -2)$ oppure $v_2 = (0, 1)$

Possibile M di passaggio : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ [Verifica per esercizio]

— o — o —

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad Tr = 5 \qquad Det = 10$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{15}\, i}{2}$$

Diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, con i 2 autovalori sulla diagonale

La Jordan reale è $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$Tr = 5$

$Det = -2$

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Tr = 0$

$Det = -3$

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

Diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = \sqrt{3}}$ $\ker \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \text{Span}((\sqrt{3}, 1))$

$\boxed{\lambda = -\sqrt{3}}$ $\ker \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \text{Span}((\sqrt{3}, -1))$

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

[Verifica]

— o — o —