ANALISI 1 — LEZIONE 91

Note Title 04/04/2025

Esercizio 1 $u' = 3u - 2$

Abbiamo vari approcci : → variabili separabili
→ 1° ordine (come lez. prec. $u' - 3u = -2$)
→ lin. a coeff. cost. non omog.

$\boxed{\text{Var. sep.}}$ $\frac{du}{dt} = 3u - 2 \rightsquigarrow \frac{du}{3u-2} = dt \rightsquigarrow \frac{1}{3}\log|3u-2| = t + c$

$\rightsquigarrow \log|3u-2| = 3t + c \rightsquigarrow |3u-2| = e^{3t+c} = e^{3t} \cdot e^{c}$

$\rightsquigarrow 3u - 2 = \underbrace{\boxed{\pm e^{c}}}_{c} \cdot e^{3t} \rightsquigarrow 3u - 2 = c\, e^{3t}$

$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \frac{2}{3} + c\, e^{3t}}$

$\boxed{\text{1° ordine lineare}}$ $u' - 3u = -2$ $a(t) = -3$ $A(t) = -3t$

Fatt. int. $= e^{A(t)} = e^{-3t}$

$u' e^{-3t} - 3 e^{-3t} u = -2 e^{-3t}$ $\left[u e^{-3t}\right]' = -2 e^{-3t}$

Integrando: $u(t)\, e^{-3t} = -2 \int e^{-3t}\, dt = \frac{2}{3} e^{-3t} + c$

Ricavando : $\boxed{u(t) = \frac{2}{3} + c\, e^{3t}}$

$\boxed{\text{Coeff. cost.}}$ $u' = 3u - 2$ omog. $v' = 3v \rightsquigarrow v(t) = e^{3t}$

Cerco una $\bar{u}(t) = a$ costante che risolve $0 = 3a - 2 \rightsquigarrow a = \frac{2}{3}$

Finale

$$u(t) = c\,v(t) + \bar{u}(t) = \boxed{c e^{3t} + \frac{2}{3}}$$

Esercizio 2 $\quad u' - 5u = 3 + t e^{5t}$

Strategie : $\rightarrow$ lineare 1° ordine

$\rightarrow$ lineare a coeff. costanti

$\boxed{\text{lin. 1° ordine}}$ $\quad a(t) = -5 \leadsto$ Fatt. int. $= e^{A(t)} = e^{-5t}$

$$u' \cdot e^{-5t} - 5 e^{-5t} u = 3 e^{-5t} + t$$

$$\left[u(t) e^{-5t}\right]' = 3e^{-5t} + t$$

$$\leadsto u(t) e^{-5t} = -\frac{3}{5} e^{-5t} + \frac{1}{2} t^2 + c$$

$$\leadsto \boxed{u(t) = -\frac{3}{5} + \frac{1}{2} t^2 e^{5t} + c e^{5t}}$$

$\boxed{\text{lin. coeff. cost.}}$ $\quad u' - 5u = 3 + t e^{5t} \qquad u(t) = c\,v(t) + \bar{u}(t)$

$$v' - 5v = 0 \leadsto v' = 5v \leadsto v(t) = e^{5t}$$

Per trovare $\bar{u}(t)$ posso andare per tentativi.

Per ottenere 3 provo con $\bar{u}(t) = a$ costante

$$\leadsto -5a = 3 \leadsto a = -\frac{3}{5}$$

Per ottenere $t e^{5t}$ il tentativo classico sarebbe $\bar{u}(t) = \underbrace{(at+b)}_{\text{pol. dello stesso grado}} e^{5t}$

ma questo NON può funzionare

(andrebbe bene con e^{2t} o e^{-5t}, ma non con e^{5t}

perché $v(t) = e^{5t}$ risolve l'omogenea)... provare per credere...

DEVO aggiungere una t davanti

$$\rightsquigarrow \quad \bar{u}(t) = (at^2+bt)\,e^{5t}$$

Sostituisco nell'equazione

$$\underbrace{(2at+b)e^{5t} + (\cancel{a}t^2+bt)\cdot 5e^{5t}}_{\bar{u}'(t)} \underbrace{-\,5(\cancel{a}t^2+bt)e^{5t}}_{-5\bar{u}(t)} = t\,e^{5t}$$

$2a+5b = 1$ coeff. t $a = \frac{1}{2}$

$b = 0$ termine noto $b = 0$

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{5t}$$

La soluzione ottenuta è la stessa :)

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Domanda: stabilire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ c'è esistenza globale nel futuro.

Questa è a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = u^2 \rightsquigarrow \frac{du}{u^2} = dt \rightsquigarrow -\frac{1}{u} = t+c \rightsquigarrow \frac{1}{u} = -t+c$$

c e $-c$ sono la stessa cosa

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \frac{1}{c-t}}$$ soluz. generale

Trovo c usando la cond. iniz. $u(0) = \alpha = \frac{1}{c}$

sostituisco $t=0$

$$\rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{se } \alpha \neq 0)$$

Sostituendo:

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t} = \frac{\alpha}{1-\alpha t}$$

La soluzione del problema con il dato iniziale è

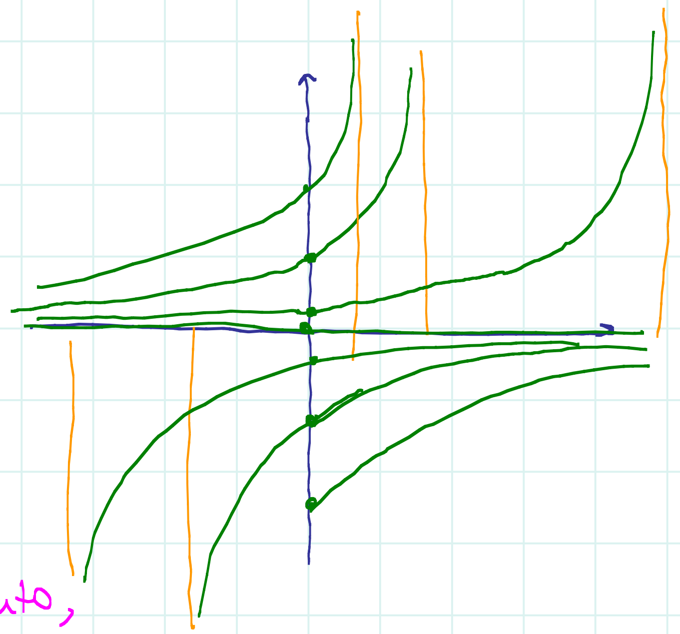
[Verifica!] $\boxed{u(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha t}}$ Noto che questa va bene anche se $\alpha = 0$, perché viene $u(t) \equiv 0$

Domanda: per quali α è globale nel futuro?

Il denominatore non si deve annullare per $t \geq 0$. Il denom. si annulla per $t = \frac{1}{\alpha}$, quindi c'è blow-up per $t = \frac{1}{\alpha}$

Se $\alpha > 0$, il blow-up è nel futuro
Se $\alpha < 0$, il blow-up è nel passato
Se $\alpha = 0$, già sappiamo che $u(t) \equiv 0$, quindi c'è esistenza globale nel passato e nel futuro.

Disegno:



→ Più α è grande, prima arriva il blow-up, che infatti arriva in $t = \frac{1}{\alpha}$

→ Due soluzioni non si possono mai intersecare (per quel punto, pensato come dato iniziale, passerebbero due soluzioni, e questo viola l'unicità, che di solito è verificata)

→ I grafici delle varie soluzioni sono l'uno il traslato degli altri (sempre vero se l'equazione è autonoma)

Cosa succede per α negativo?

→ Nel futuro tutte le soluzioni crescono e tendono a 0 (si vede dalla formula), quindi c'è esistenza globale nel futuro

→ Nel passato le soluzioni hanno blow-up a $-\infty$ per $t = \frac{1}{\alpha}$ che ora è negativo.

— o — o —