ANALISI 1 — LEZIONE 115

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx \qquad\qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$\boxed{\text{Esercizio 5}}$ Dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{2\pi}$

Occorre fare due dim. separate sui pari e sui dispari, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\, I_{2n} = \sqrt{2\pi} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} \cdot I_{2n+1} = \sqrt{2\pi}$$

Facciamo il caso pari, l'altro è analogo [fare per esercizio].
Cerchiamo di avere una formula per I_{2n}

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \qquad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0, \qquad I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$$

$$I_8 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 \; \frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = I_0 \frac{8!}{2^8\cdot(4!)^2}$$

Una congettura ragionevole è che sia

$$I_{2n} = \underset{\substack{\uparrow \\ \pi}}{I_0} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Quindi

$$\sqrt{2n}\, I_{2n} = \pi \cdot \sqrt{2n} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Uso formula di Stirling

$$\sim \cancel{\pi}\, \sqrt{2\cancel{n}} \underbrace{\frac{\cancel{(2n)^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}} \sqrt{2\pi\cdot 2\cancel{n}}}_{(2n)!} \; \frac{1}{\cancel{2^{2n}}} \; \frac{\cancel{e^{2n}}}{\cancel{n^{2n}}} \; \frac{1}{2\cancel{\pi}\,\cancel{n}}$$

$$= \sqrt{2}\; 2\sqrt{\pi}\; \frac{1}{2} = \sqrt{2\pi} \quad 🙂$$

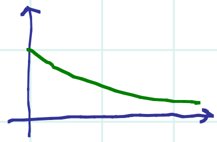
Sui dispari è analogo.

Esercizio 6 Dimostrare che

$$\boxed{\frac{1}{1+t} \geq e^{-t} \geq 1-t \qquad \forall t > 0}$$

Sono facili studi di funzione.

① A sx ci si riduce a $(1+t)e^{-t} \leq 1$ per ogni $t > 0$



$$f'(t) = e^{-t} - (1+t)e^{-t} = -te^{-t} < 0 \quad ☺$$

② A dx è un caso particolare di $e^{x} \geq 1+x$ che è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si può fare in 2 modi:

→ studio $e^{x}-x-1$ e vedo che ha minimo per $x=0$

→ si può fare con Taylor-Lagrange di ordine 2.

Calcoliamo l'integrale Gaussiano

Partiamo dalla disuguaglianza con $t = x^2$:

$$1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Elevo alla n-esima potenza

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Integro tra -1 e 1:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx \leq \int_{-1}^{1} e^{-nx^2} dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Vediamo quanto valgono questi integrali

$$\int_{-1}^{1} e^{-nx^2}\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{n}\,x \\ dy=\sqrt{n}\,dx}}{=} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx \underset{\substack{x=\cos t \\ dx=-\sin t\,dt}}{=} -\int_{\pi}^{0} \sin^{2n+1} t\,dt = \int_{0}^{\pi} \sin^{2n+1} t\,dt = I_{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \underset{\uparrow}{=}$$

$$x=\frac{1}{\tan t} \qquad 1+x^2 = 1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$dx = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' dt = \frac{-1}{\sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2n-2} t\,dt \le \int_{0}^{\pi} \sin^{2n-2} t\,dt = I_{2n-2}$$

Conclusione

$$I_{2n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy \le I_{2n-2}$$

Moltiplico per $\sqrt{n}$

$$\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}}}_{\downarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}}\ \underbrace{\boxed{I_{2n+1}\cdot\sqrt{2n+1}}}_{\downarrow\ \sqrt{2\pi}} \le \underbrace{\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy}_{\downarrow\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy} \le I_{2n-2}\ \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}}}}_{\downarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}}\ \underbrace{\sqrt{2n-2}}_{\downarrow\ \sqrt{2\pi}}$$

Questo dimostra che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$:)

Oss. Nella dimostrazione c'è un passaggio MOLTO SPORCO.
Il cambio di variabili $x = \frac{1}{\tan t}$ è "improprio" perché per $t=0$ ha grossi problemi.
Andrebbe giustificato con più cura.

Esercizio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$ con $a>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{a}\,x \\ dy=\sqrt{a}\,dx}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

(Andrebbe giustificato per bene il cambio variabili nell'integrale improprio ... $\int_{-n}^{n}$ ... e passo al limite)

DELIRIO La uso con $a=i$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}} = \sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(x^2) - i\sin(x^2))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$$

ora $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Uguagliando parti reali e immaginarie

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Fatto tra 0 e $+\infty$ è la metà :)

— o — o —

Gamma di Eulero

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

① Se $\alpha \geq 1$ l'unico pbm. è a $+\infty$ e l'integrale converge

② Se $\alpha \in (0,1)$ c'è anche il problema in $t=0$, ma non pregiudica la convergenza

③ Se $\alpha \leq 0$ ci sono problemi di convergenza

④ $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \underset{\text{derivo}}{t^{\alpha-1}}\, \underset{\text{integro}}{e^{-t}}\, dt$$

$$= \underbrace{\left[-e^{-t} \cdot t^{\alpha-1}\right]_{t=0}^{\text{“}t=+\infty\text{”}}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-t} (\alpha-1) \cdot t^{\alpha-2}\, dt$$

$$= (\alpha-1) \int_0^{+\infty} t^{\alpha-2} e^{-t}\, dt = (\alpha-1)\, \Gamma(\alpha-1)$$

⑤ $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$ $\qquad \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$ $\qquad \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6$

$\ldots \quad \Gamma(n) = (n-1)!$

La Γ è il sostituto del fattoriale anche quando α non è intero.

<u>Esercizio</u>

$$\text{“}\left(-\tfrac{1}{2}\right)!\text{”} = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt \underset{\substack{x=\sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt}}{=}$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$