5 Determinante

Definizione 5.0.1 (Determinante)**.** *Il determinante $det(A)$ di una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è uno scalare in $\mathbb{R}$.*

$$n = 1 A = [a] det(A) = a$$

$$n = 2 A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} det(A) = ad - bc$$

Si noti che $det(A) \neq 0 \iff$ le colonne di A sono linearmente indipendenti.

Teorema 5.0.1. Se $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \geq 0$ e $ad - bc \neq 0$ allora $det(A)$ corrisponde all'area del parallelogramma definita da $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

Esempio 5.0.1. Di seguito alcuni esempi del calcolo del determinante e della corrispondenza con l'area del parallelogramma.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $det(A) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $det(A) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $det(A) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $det(A) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$

Definizione 5.0.2 (Determinante per induzione)**.** *Se $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, sia A_{ij} una matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j.*

$$A_{ij} \in M_{(n-1)(m-1)}(\mathbb{R})$$

Il determinante si può definire induttivamente come segue:

- ***Ipotesi induttiva**: supponiamo che $det(A_{ij}) \in M_{(n-1)(m-1)}(\mathbb{R})$ sia già definito*
- ***Passo induttivo**: $det(A)$ si definisce come*

Definizione 5.0.3 (Formula di Cramer)**.** *Dati una matrice $A = [a_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, la **matrice aggiunta** $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ e sia $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(A_{ij})$, allora:*

$$A \cdot \tilde{A} = det(A) \cdot I$$

Corollario 5.0.1.1. *Se $det(A) \neq 0$, A è **invertibile** e*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \tilde{A}$$

Esempio 5.0.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -22$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies A^{-1} = -\frac{1}{22} \cdot \tilde{A}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposizione 5.0.1. *Se A è invertibile allora $det(A) \neq 0$*

Teorema 5.0.2 (Teorema di Binet)**.** Dati A, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ vale che

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

Proposizione 5.0.2. *Sapendo che $\exists A^{-1} \implies A \cdot A^{-1} = I$ allora:*

$$det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(A \cdot A^{-1}) = det(I)$$

Teorema 5.0.3. Sia $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ allora sono equivalenti:

1. A è **invertibile**
2. $det(A) \neq 0$
3. Le colonne di A sono **linearmente indipendenti**

Osservazione 5.0.1. Dati questi teoremi, facciamo alcune osservazioni:

1. Data una matrice $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
   $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ sono **linearmente indipendenti** $\iff$ Non sono collineari
   $\iff$ l'area del parallelogramma associato è diversa da 0
   $\iff det(A) \neq 0$
2. (3) $\iff rango(A) = n$
3. Le condizioni sono equivalenti
4. Le righe di A sono linearmente indipendenti

Definizione 5.0.4 (Matrice trasposta)**.** *Se $A = [a_{ij}]$ la sua trasposta è la matrice $A^t = [a_{ji}]$, ovvero la riga i di A diventa la colonna i di A^t.*

Osservazione 5.0.2.

$$det(A) = det(A^t)$$

Da questo deduciamo che (2) $\iff det(A^t) \neq 0 \iff$ le colonne di A^t sono linearmente indipendenti $\iff$ (4)

Proposizione 5.0.3. *Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare, B, B' due basi di V e $A = [\phi]^B_B$, $A' = [\phi]^{B'}_{B'}$. Allora $det(A) = det(A')$. Quindi $det(A)$ dipende solo da ϕ'.*

Teorema 5.0.4. Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare, B una qualsiasi base e $A = [\phi]^B_B$ allora è equivalente dire:

1. ϕ è un **isomorfismo**
2. $det(A) \neq 0$
3. $im(\phi) = V$
4. $ker(\phi) = \{0\}$