ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 57

Note Title 12/12/2023

① $(x,-y,z)$ ② $(y,-z,x)$ ③ $(y,-x,z)$

Classificare le trasformazioni

① $(x,y,z) \to (x,-y,z)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Matrice ortogonale, $b=0$ ⇝ isometria

Autovalori: $+1, +1, -1$, quindi è una una matrice di simmetria

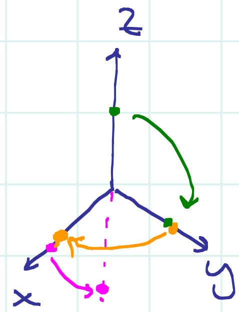
La simmetria è rispetto all'autospazio di 1, cioè $\text{Span}((1,0,0),(0,0,1))$

cioè rispetto al piano $\boxed{y=0}$

Se volevo calcolare i pti fissi

$(x,-y,z) = (x,y,z)$ $\begin{cases} x = x \\ -y = y \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 0 \\ \boxed{y = 0} \leftarrow \\ 0 = 0 \end{cases}$

② $(x,y,z) \to (y,-z,x)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$



Matrice ortogonale ⇝ isometria (con $b=0$, quindi lineare)

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Studio i pti fissi

$\begin{cases} x = y \\ y = -z \\ z = x \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$

L'unica soluzione è $(0,0,0)$

$\rightsquigarrow$ rotazione intorno ad un asse seguita da simmetria rispetto al piano $\perp$ all'asse e passante per l'origine

Domanda: chi è l'asse? Quanto è l'angolo?

Quello che va in $-$ se stesso, cioè l'autospazio di -1

Gli autovalori saranno -1 e $\cos\theta \pm i \sin\theta$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Calcolo autovalori e autovettori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda^3+1)$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$$

Autovalori: $\lambda = -1$ $\qquad \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Autospazio di -1

$$A + Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ker = \operatorname{Span}((1,-1,-1))$$

asse di rotazione

Sto ruotando di un angolo θ con

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \theta = 60°$$

— o — o —

(3) $(x, y, z) \to (y, -x, z)$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Volendo posso calcolare autovalori e autovettori, però è già la Jordan reale di se stessa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta = -90°$$

⤳ Rotazione oraria di 90° rispetto ad omino in piedi lungo semiasse z positivo.

— o — o —

$(3-x, 5-z, 7-y)$ ④ $\qquad (3+y, 5+z, 7+x)$ ⑤ $\qquad (3+y, 5-z, 7+x)$ ⑥

④ Scriviamola come $f(x) = Ax + b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A \text{ matrice ortogonale}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{b}$$

⤳ ISOMETRIA

Cerco i p.ti fissi

$$\begin{cases} 3 - x = x \\ 5 - z = y \\ 7 - y = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 3 \\ y + z = 5 \\ y + z = 7 \end{cases}$$

il sistema è impossibile ⤳ Nessun p.to fisso

Restano 2 possibilità: $\boxed{5.2}$ Simmetria + traslazione //
$\boxed{5.3}$ Rotazione + traslazione lungo asse

Det A = +1 ⤳ Matrice di rotazione!

Come posso trovare angolo di rotazione e direzione della retta di rotazione?

autovalori $\cos\theta \pm i \sin\theta$ autospazio di 1

Direzione retta

$$A - Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Ker = Span((0,1,-1))$$

Se voglio davvero la retta intorno alla quale stiamo ruotando, sappiamo che sarà del tipo

$$(a,b,c) + t(0,1,-1) = (a, b+t, c-t)$$

e sappiamo che la sua immagine coincide con se stessa (perché lungo la retta stiamo solo traslando).

Quindi basta imporre

$$(3-x, 5-z, 7-y)$$

$$(a, b+t, c-t) \to (3-a, 5-c+t, 7-b-t)$$
$$= (3-a, 5-c, 7-b) + t\,(0,1,-1)$$

direzione giusta

Come faccio a capire se è la stessa retta?

<u>Fatto generale</u>: se ho $P_0 + t v_0$ e $Q_0 + t v_0$

Come capisco se sono la stessa retta?

Basta imporre che $P_0 - Q_0$ sia multiplo di v_0.

Nel nostro caso

$$P_0 = (a,b,c) \qquad Q_0 = (3-a, 5-c, 7-b)$$

Quindi

$(2a-3, 5-c-b, 7-b-c)$ deve essere multiplo di $(0,1,-1)$,

cioè

$$\begin{cases} 2a-3 = 0 \\ 5-c-b+7-b-c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b+c = 6 \end{cases} \leadsto \quad a = \frac{3}{2} \quad b = 4 \quad c = 2$$

Per sapere di quanto traslo, basta vedere dove va $(\frac{3}{2}, 4, 2)$.