FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Teorema misterioso Sia $\delta > 0$ e sia $f : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, sia $n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che f sia derivabile $n+1$ volte in $(-\delta, \delta)$.
Allora

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

pol. di Taylor di ordine n

Resto di LAGRANGE, e c è un p.to misterioso compreso tra 0 e x.

Oss 1 – Il resto alla Peano fornisce informazioni al limite, quello alla Lagrange per ogni x

2 – Per $n=0$ la formula diventa

$$f(x) = \underset{f(0)}{P_0(x)} + f'(c)\,x \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{f(x) - f(0) = f'(c)\,x}_{\text{Teo. Lagrange classico}}$$

3 – Con la solita traslazione la formula vale anche con centro in un p.to x_0 qualunque

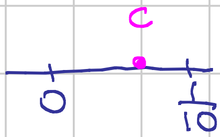
$$f(x) = P_n(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove c sta fra x e x_0 e P_n è il pol. di Taylor di ordine n in x_0.

— o — o —

Utilizzi operativi : → calcolo approx. di funzioni
→ dim. di disug.
→ convergenza di serie di Taylor

Esempio 1 Calcolare approx $\cos \frac{1}{10}$



$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}_{P_5(x)} + \underbrace{\frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6}_{\text{resto di Lagrange}}$$

Se invece di $\cos \frac{1}{10}$ scrivo

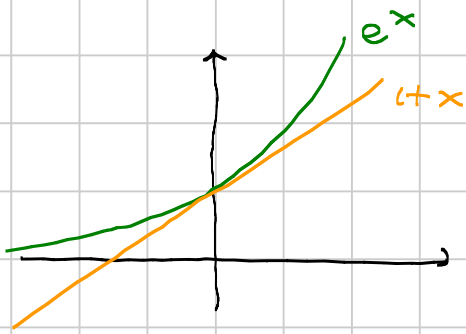
$$1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{100} + \frac{1}{24}\,\frac{1}{10.000} = \frac{240.000 - 1.200 + 1}{240.000} = \frac{238.801}{240.000}$$

ho commesso un errore che è

$$\frac{\overbrace{|f^{(6)}(c)|}^{\leq 1}}{720} \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{1}{7{,}2 \cdot 10^8}$$

Riprova Frazione $= 0{,}99500416\underset{\downarrow}{6}$ $\quad \cos \frac{1}{10} = 0{,}99500416\underset{\downarrow}{5}$

Esempio 2 Dimostrare che $e^x \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(con uguaglianza $\Leftrightarrow x = 0$)



Taylor-Lagrange con $f(x) = e^x$, $n = 1$

$$e^x = \underbrace{1 + x}_{P_1(x)} + \frac{f''(c)}{2!}x^2$$

$$= 1 + x + \underbrace{\boxed{\frac{e^c}{2}x^2}}_{\geq 0} \geq 1 + x$$

vale $=$ se e solo se $x = 0$.

Esempio 3 Dim. che $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(con $=$ se e solo se $x = 0$)

Stessa cosa con $n = 3$ $\qquad e^x = P_3(x) + \frac{e^c}{24}x^4$

Esempio 4 Risolvere la diseq. $e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$

Osservo che per $x \to -\infty$ non può essere vera

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\boxed{\frac{e^c}{6}x^3}$$

il segno dipende da x

- per $x>0$ $e^x > P_2(x)$
- per $x=0$ c'è $=$
- per $x<0$ $e^x < P_2(x)$

Fatto generale: Le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti.

Dim. nel caso speciale di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2

Prendo un punto x_0 e scrivo Taylor-Lagrange con $n=1$ e centro nel punto:

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$$

$$= \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{equazione retta tangente in } x_0} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}}_{\geq 0}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

— o — o —

Esempio 5 Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}_{\text{serie di Taylor di } e^x} = e^x$$

Le somme parziali della serie sono i polinomi di Taylor $P_n(x)$ di e^x, quindi

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

dipende da x e da n, ma comunque sta tra 0 e x

$$= \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

$$\leq \boxed{\frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}} \to 0$$

perché fattoriale batte le potenze

dove $M = \max$ di e^c per c tra 0 e x (cioè e^x per $x > 0$ e 1 per $x < 0$)

<u>Oss.</u> In una lezione prec. c'è dim. diversa per $x > 0$.

— o —

Allo stesso modo si dimostra la convergenza per ogni $x \in \mathbb{R}$ delle serie di $\sin x$ e $\cos x$ (anche iperbolici)

— o — o —

<u>Esempio 6</u> Per quali $x \in \mathbb{R}$ possiamo dire che

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

1ª osservazione Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Per $x > 1$ manca la cond. necessaria
per $x = 1$ converge per Leibnitz
per $x \in (-1, 1)$ c'è pure assoluta convergenza
per $x = -1$ è l'armonica che diverge
per $x < -1$ manca la cond. nec.

Posso sperare nella convergenza solo per $x \in (-1, 1]$
uguaglianza

$\boxed{2^a \text{ oss.}}$ Taylor Lagrange

$$\log(1+x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Quindi $\left| \log(1+x) - P_n(x) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(c) \right|$

c'è la formula ed è del tipo

$$\frac{n!\,(-1)^{\cdots}}{(1+c)^{n+1}}$$

$$\text{errore} \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}}$$

dipende da x e da n

Cosa succede per $n \to +\infty$. Tutto dipende da $\left| \frac{x}{1+c} \right|$

se $x \in [0,1)$ il termine è più piccolo di 1 $\rightsquigarrow$ resto $\to 0$

se $x \in (-1,0]$ non è chiaro per nulla

Se $x = 1$ si osserva che

$\left| \frac{x}{1+c} \right| \leq \frac{1}{1}$, e in questo caso mi salva $(n+1)$ sotto.

Quindi per $x=1$ c'è convergenza, quindi

$$\boxed{\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots}$$

— o — o —