ANALISI 1 — LEZIONE 55

Note Title 07/12/2024

FIL ROUGE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

$$\begin{array}{ccccccc} W & \Rightarrow & R & \Rightarrow & C & \Rightarrow & L \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & H & & M \\ & & & & \Downarrow & & \\ & & & & T & & \end{array}$$

WEIERSTRASS	HOPITAL
ROLLE	TAYLOR
CAUCHY	MONOTONIA
LAGRANGE	

<u>Def</u>. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.
Si dice che M è il massimo di f in A, e si scrive

$$M = \max \underbrace{\{ f(x) : x \in A \}}_{\text{Questo insieme è } f(A)}$$

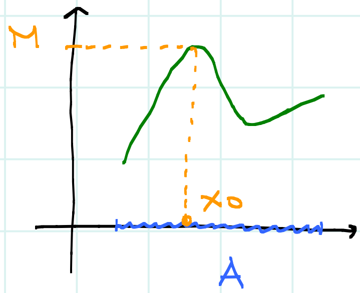
se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$

(ii) esiste almeno un $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$.

In tal caso tutti gli x_0 del p.to (ii) si chiamano p.ti di max.

<u>Achtung!</u> Il massimo M è "una y"
I p.ti di max sono "delle x"



<u>Oss</u>. ① Il max M non è obbligato ad esistere
Se esiste è unico

② I p.ti di max esistono se e solo esiste il max, e non sono obbligati ad essere unici

③ Discorsi analoghi valgono per $\min\{ f(x) : x \in A \}$.

<u>Esempio 1</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$

$\max\{ \sin x : x \in \mathbb{R} \} = 1$ p.ti di max: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\min\{ \quad '' \quad \} = -1$ p.ti di min: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

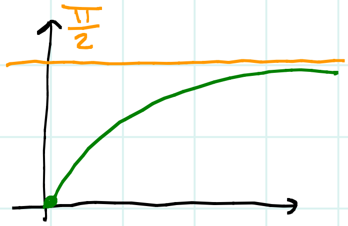
<u>Esempio 2</u>

$\max\{\arctan x : x \geq 0\}$ NON ESISTE

$\min\{\arctan x : x \geq 0\} = 0$

$\sup\{\arctan x : x \geq 0\} = \frac{\pi}{2}$

P.to di min: $x = 0$



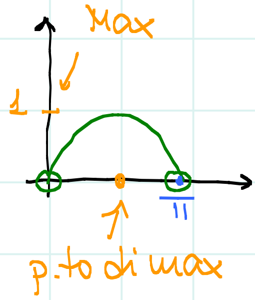
<u>Esempio 3</u>

$\max\{\sin x : x \in (0,\pi)\} = 1$

$\min\{\sin x : x \in (0,\pi)\}$ NON ESISTE

$\inf\{\quad " \quad\} = 0$

P.to di max : $x = \frac{\pi}{2}$



Teorema di WEIERSTRASS (Versione edulcorata)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[a,b]$.

Allora

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$
$$\min\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

esistono per forza.

<u>Oss.</u> È davvero essenziale che

- l'intervallo contenga gli estremi,
- sia davvero un intervallo e non ad esempio una semiretta,
- f sia continua ovunque in $[a,b]$.

Come trovo il max/min ? I p.ti di max/min. ricadono in una di queste 3 categorie

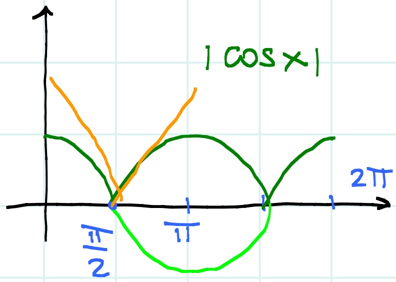
① P.ti STAZIONARI INTERNI: p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x) = 0$

② P.ti SINGOLARI INTERNI: p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste

③ P.ti del BORDO: $x = a$ oppure $x = b$

Operativamente: trovo tutti i p.ti che stanno nelle 3 categorie, poi sostituisco nella funzione: dove vale di più è il max, dove vale di meno è il min.

Esempio 4 $\max\{|\cos x| : x \in [0, 2\pi]\}$



Max $= 1$

P.ti di max:

$x = 0 \rightarrow$ bordo

$x = \pi \rightarrow$ staz. interno

$x = 2\pi \rightarrow$ bordo

$$\min\{|\cos x| : x \in [0, 2\pi]\} = 0$$

P.ti di min

$x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow$ singolari interni

Come dimostro che $f(x) = |\cos x|$ non è derivabile in $x = \frac{\pi}{2}$?

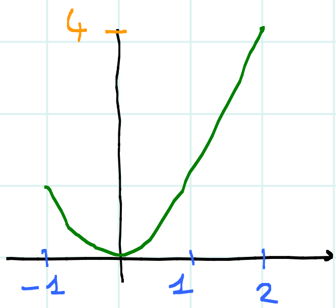
Faccio vedere che il rapporto incrementale ha limiti diversi per $h \to 0^+$ e per $h \to 0^-$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2}+h)| - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{|\cos\frac{\pi}{2}|}}}{h} = \frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2}+h)| - |\cos\frac{\pi}{2}|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1$$

$|\cos x| = \cos x$ prima di $\frac{\pi}{2}$

Esempio 5 $\max\{x^2 : x \in [-1, 2]\} = 4$



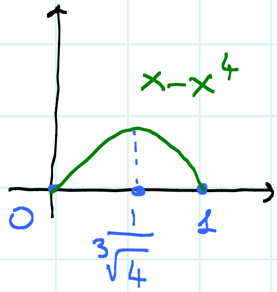
p.to di max: $x = 2 \rightsquigarrow$ bordo

$\min\{x^2 : x \in [-1, 2]\} = 0$

p.to di min: $x = 0 \rightsquigarrow$ staz. interno

Esempio 6 $\max\{x-x^4 : x\in[0,1]\} = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

$\min\{\underbrace{x-x^4}_{f(x)} : x\in[0,1]\} = 0$



Consideriamo i 3 tipi di candidati

→ Staz. interni : $f'(x)=0$

$1-4x^3=0 \rightsquigarrow \boxed{x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}}$ (è interno, quindi ok)

→ Sing. interni : $\varnothing$:)

→ Bordo : $\boxed{x=0}$ e $\boxed{x=1}$

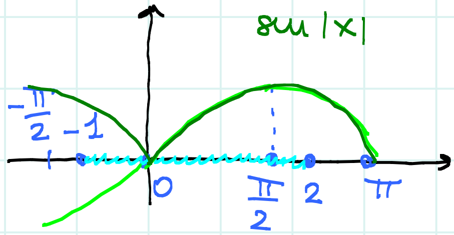
Ora confronto i 3 candidati:

$f(0)=0$ $\quad f(1)=0$ $\quad f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

p.ti di min. $\qquad$ p.to di max

Esempio 7 $\max\{\sin|x| : x\in[-1,2]\} = 1$

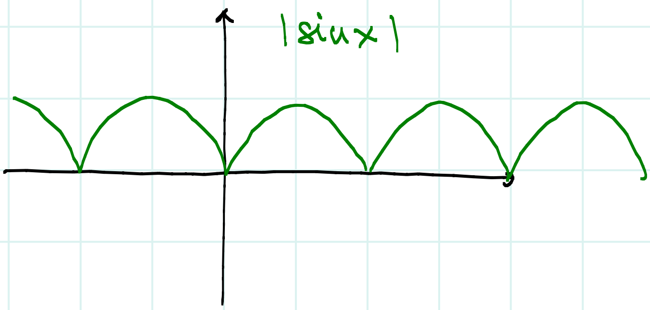
$\min\{\sin|x| : x\in[-1,2]\} = 0$

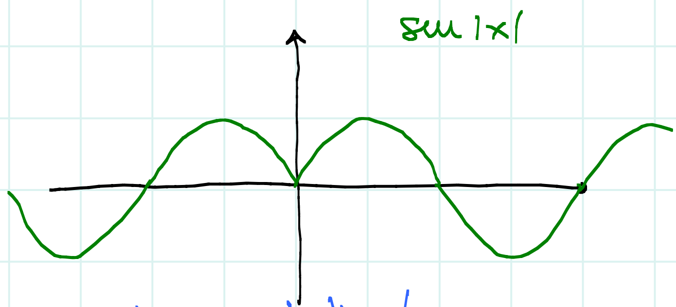


P.to di max : $x=\frac{\pi}{2}$ $\rightsquigarrow$ staz. interno

P.to di min : $x=0$ $\rightsquigarrow$ sing. interno

Achtung! Occhio a distinguere $|\sin x|$ e $\sin|x|$





Non periodica!

Periodica di periodo π

$=\sin x$ per $x>0$ e poi ribaltata per parità per $x<0$

— o — o —