Teorema (attribuito a FERMAT)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Sia $f : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) $f'(x_0)$ esista

(ii) $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

(cioè x_0 è un p.to di max)

Allora $f'(x_0) = 0$.

Stessa cosa se x_0 è un p.to di min.

$\boxed{\text{Dim}}$ Usiamo monotonia 1

- Supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Allora $f(x) > f(x_0)$ un po' a dx di x_0, e quindi x_0 non può essere p.to di max
- Supponiamo che $f'(x_0) < 0$. Allora $f(x) < f(x_0)$ un po' a sx di x_0, e anche in questo caso x_0 non può essere p.to di max.
- Resta solo $f'(x_0) = 0$.

Dal teorema precedente segue la ricerca dei p.ti di max/min.

Consideriamo $\max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Weierstrass ci dice che esiste almeno un p.to di max x_0.

Dove può trovarsi?

→ sul bordo (cioè $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$) ⇝ categoria bordo

→ $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ non esiste ⇝ sing. interno

→ $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ esiste. Ma allora per il teorema precedente si avrà $f'(x_0) = 0$ ⇝ stazionario interno

Oss. Nella dim. del teo. è fondamentale potersi muovere sia a dx, sia a sx, quindi essere interni.

$\boxed{\text{TEOREMA DI ROLLE}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

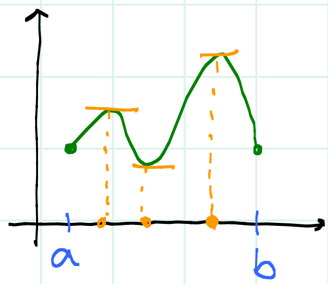
(i) f è continua in $[a,b]$ (estremi compresi)

(ii) f è derivabile in (a,b) (non serve che f sia derivabile agli estremi, ma se lo è va bene uguale)

(iii) $f(a) = f(b)$.

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Oss. Il p.to c non è obbligato ad essere unico.

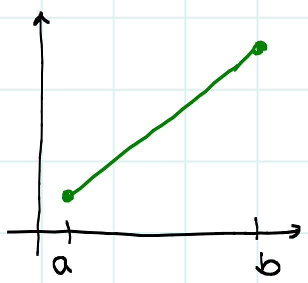


$\boxed{\text{Dim}}$ Per W sappiamo che esistono p.ti di max e di min

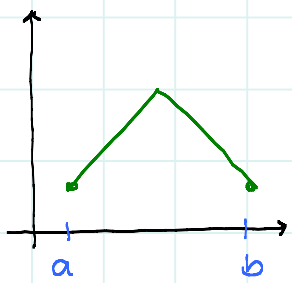
→ se almeno uno di questi è interno, allora per il teo. precedente lo possiamo prendere come c

→ se non sono interni sia il max sia il min, allora per l'ipotesi (iii) la funzione è costante (perché il max valore è uguale al min valore). Ma allora $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a,b)$.

Oss. Tutte e 3 le ipotesi servono davvero

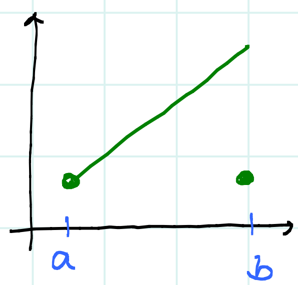


(iii) serve



(ii) serve

$f'(x)$ esiste ovunque tranne in un p.to



(i) serve

$f(x)$ è continua ovunque tranne in b

TEOREMA DI CAUCHY Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo

(i) f e g continue in $[a,b]$ (con estremi)

(ii) f e g derivabili in (a,b) (se lo sono anche in $[a,b]$ ancora meglio, però non serve)

Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{(f(b)-f(a))\, g'(c) = (g(b)-g(a))\, f'(c)}$$

1^a tesi

Se inoltre vale che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$,

allora $g(b) \neq g(a)$ e posso dividere ottenendo

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

2^a tesi

Dim Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = (g(b)-g(a))\, f(x) - (f(b)-f(a))\, g(x)$$

Osserviamo che $\varphi(x)$ è una combinazione lineare di $f(x)$ e $g(x)$, quindi

→ φ è continua in $[a,b]$,

→ φ è derivabile in (a,b).

Dico che $\varphi(a) = \varphi(b)$. Facciamo la verifica

$$(g(b)-g(a))\, f(a) - (f(b)-f(a))\, g(a) \overset{?}{=}$$
$$(g(b)-g(a))\, f(b) - (f(b)-f(a))\, g(b)$$

Svolgiamo il conto :

$$\boxed{g(b)f(a)} - \cancel{g(a)f(a)} \boxed{-f(b)g(a)} + \cancel{f(a)g(a)} \stackrel{?}{=}$$

$$\cancel{g(b)f(b)} \boxed{-g(a)f(b)} - \cancel{f(b)g(b)} + \boxed{f(a)g(b)}$$

☺

Ma allora φ verifica le ipotesi di Rolle, quindi esiste $c \in (a,b)$ tale che $\varphi'(c) = 0$.

Ma

$$\varphi'(x) = (g(b)-g(a))\, f'(x) - (f(b)-f(a))\, g'(x)$$

e quindi

$$\varphi'(c) = (g(b)-g(a))\, f'(c) - (f(b)-f(a))\, g'(c) = 0$$

e questa è la prima tesi.

Se ora supponiamo anche che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora per forza $g(b) \neq g(a)$. Perché? Se fosse $g(b) = g(a)$, allora potrei applicare Rolle a g e dedurre che esiste almeno un $c \in (a,b)$ con $g'(c) = 0$.

— o — o —

Oss. Se ci sono solo le ipotesi (i) e (ii), la seconda tesi può essere falsa.

L'esempio classico è con $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ e $[a,b] = [-1,1]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{0}{2}$$

Tuttavia non c'è nessun p.to in cui $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 0$

perché f' si annulla solo in 0 e lì si annulla pure g', quindi viene uno $0/0$.

— o — o —

Teorema di LAGRANGE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) f continua su $[a,b]$ $\Big\}$ soliti commenti

(ii) f derivabile in (a,b)

Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)}$$

Dim Applico Cauchy con $g(x) = x$. La seconda tesi (e posso perché $g'(x) = 1 \neq 0$ ovunque) diventa

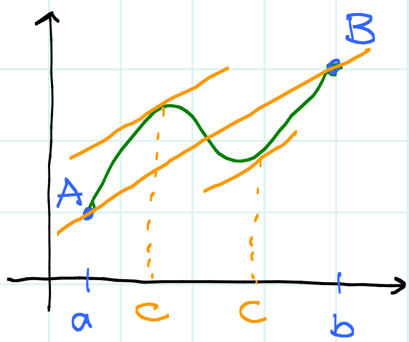
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \leadsto \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$$

che è la tesi di Lagrange!

— o — o —

Interpretazione geometrica Scriviamo la tesi come

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{coeff. angolare della retta } AB} = \underbrace{f'(c)}_{\text{coeff. ang. retta tang. in } c}$$



I pti c sono quelli in cui la retta tangente è parallela alla retta AB

Se A e B sono alla stessa altezza diventa ROLLE

In questo senso Lagrange è la versione "storta" di ROLLE.

— o — o —