4 Funzioni razionali di sin x e cos x

Ultima spiaggia: formule parametriche (se le conosci, le eviti)

Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$ e ricordo che $\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$ $\cos x = \frac{1-y^2}{y^2+1}$

$\frac{x}{2} = \arctan y \rightsquigarrow x = 2\arctan y \rightsquigarrow dx = \frac{2}{1+y^2}\, dy$

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{3+\sin x}{2+\cos x}\, dx$

Sostituisco bovinamente le formule

$$\int \frac{3+\frac{2y}{y^2+1}}{2+\frac{1-y^2}{y^2+1}} \frac{2}{1+y^2}\, dy = \int \frac{3y^2+2y+3}{y^2+3} \frac{2}{1+y^2}\, dy = \text{si fa}$$

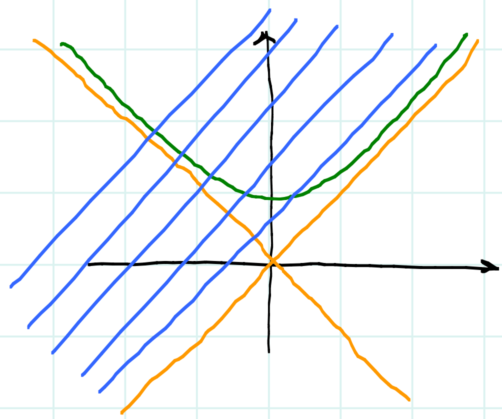
— o — o —

Interpretazione geometrica delle sostituzioni razionalizzanti

$\boxed{\text{Scenario 1}}$ $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ Come è fatto il grafico?

Sostituzione $\sqrt{1+x^2} = \underbrace{x+t}$

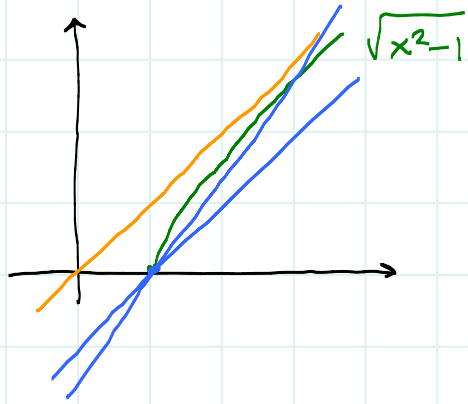
al variare di t, questa è una famiglia di rette parallele all'asintoto



Fissato t, ho un'unica soluzione in x

Algebricamente, l'equazione diventava di 1° grado in x.

$\boxed{\text{Scenario 2}}$ $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$



La sostituzione $\sqrt{x^2-1} = x+t$
ha la stessa interpretazione di prima

La sostituzione $\sqrt{x^2-1} = \underbrace{t\,(x-1)}$

famiglia di rette che
passano per $(1,0)$
(t è il coeff. angolare)

Quando vado ad intersecare retta e iperbole trovo due p.ti, di cui però uno lo conosco già perché è $(1,0)$, quindi resta una sola soluzione.

$\boxed{\text{Esempio creativo}}$ $\int \sqrt{x^2+7x+1}\;dx$

Osservo che il p.to $(1,3)$ sta sul grafico della funzione.
Quindi posso provare la sostituzione

$$\sqrt{x^2+7x+1} = 3+t\,(x-1)$$

Faccio il conto

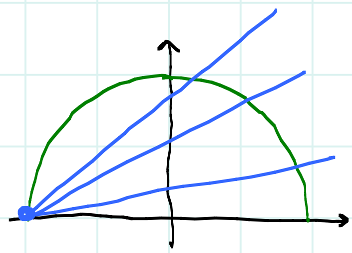
$$x^2+7x+1 = 9+t^2(x-1)^2+6t\,(x-1)$$

$$x^2+7x-8 = t^2(x-1)^{\cancel{2}}+6t\,\cancel{(x-1)}$$

$$(x+8)\cancel{(x-1)} = t^2(x-1)+6t$$

$\rightsquigarrow$ posso ricavare x senza radici!

$\boxed{\text{Scenario 3}}$ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

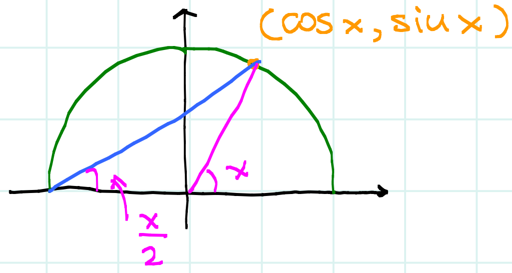


Considero la famiglia di rette per $(-1,0)$

$$\sqrt{1-x^2} = t\,(x+1) \quad \rightsquigarrow \quad (1+x)(1-x) = t^2(x+1)^2$$

$$1-x = t^2 x + t^2 \qquad x(t^2+1) = 1-t^2 \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$ formule parametriche

A quel punto $\sqrt{1-x^2} = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right) = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$



t = coeff. angolare retta per $(-1,0)$ e $(\cos x, \sin x)$
$= \tan \frac{x}{2}$

Così si interpretano le formule parametriche.

<u>Esempio 1</u> $\int \arcsin x \, dx$

Usiamo l'1 nascosto!

$$\int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\arcsin x} \, dx = \underset{G}{x} \, \underset{F}{\arcsin x} - \int \underset{G}{x} \underset{f}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \, dx$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Derivata per verifica: $\arcsin x + \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}} = \arcsin x$:)

<u>Esempio 2</u> $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Parametriche bovine $y = \tan \frac{x}{2} \rightsquigarrow dx = \frac{2}{1+y^2} dy$

$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \frac{1+y^2}{2y} \underbrace{\frac{2}{1+y^2} dy}_{dx}$$

$$= \int \frac{1}{y} \, dy = \log|y|$$

$$= \log\left|\tan \frac{x}{2}\right|$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ (Va bene per tutte le potenze dispari)

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

Pongo $y = \cos x \rightsquigarrow dy = -\sin x\,dx$ $\qquad \int \frac{-dy}{1-y^2} = \int \frac{dy}{y^2-1}$

$=$ si fa facile

Esempio 3 $\quad \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Parametriche bovine

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\quad \frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\tan x - \frac{1}{\cos x}$$

Esempio 4 $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

Si può fare calcolando la primitiva, ma si può usare la simmetria!

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$

Poiché $\sin x$ e $\cos x$ sono uno il simmetrico dell'altro in $[0,\frac{\pi}{2}]$, la stessa cosa vale per $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$, quindi

$$S = C$$

Ma

$$S + C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow S = C = \frac{\pi}{4}$$

Fatto generale :

$\boxed{h, k \text{ interi}}$

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{h\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_{k\frac{\pi}{2}}^{h\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \underbrace{\frac{\pi}{4}(h-k)}_{\text{metà della lungh. dell'intervallo}}$$

Achtung! Funziona solo per i quadrati e solo se gli estremi sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ altrimenti addio simmetria!

— o — o —