ANALISI 1 - LEZIONE 052

Note Title 23/11/2016

Esempio 1 Dimostrare le disuguaglianze

$$|\sin x - \sin y| \le |x-y| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$|\cos x - \cos y| \le |x-y| \qquad \text{"}$$
$$|\arctan x - \arctan y| \le |x-y| \qquad \text{"}$$

Dim. Sono tutte disuguaglianze di Lipschitzianità con costante $=1$.
Le funzioni sono $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$.
Basta fare nei 3 casi

$$\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

$f(x) = \sin x \quad \rightsquigarrow \quad \sup\{|\cos x| : x \in \mathbb{R}\} = 1$
$f(x) = \cos x \quad \rightsquigarrow \quad \sup\{|-\sin x| : x \in \mathbb{R}\} = 1$

$f(x) = \arctan x \quad \rightsquigarrow \quad \sup\left\{\frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\} = 1.$

Esempio 2 Trovare la più piccola costante c tale che

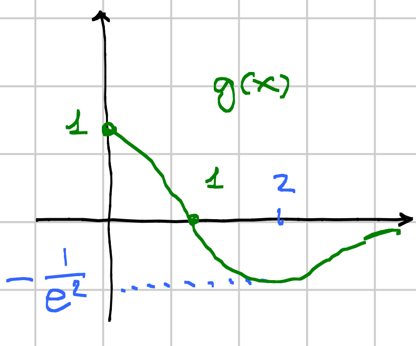
$$|xe^{-x} - ye^{-y}| \le c\,|x-y| \qquad \forall x \ge 0 \ \forall y \ge 0$$

Dim Devo trovare la costante di Lip. di $f(x) = xe^{-x}$ in $[0,+\infty)$

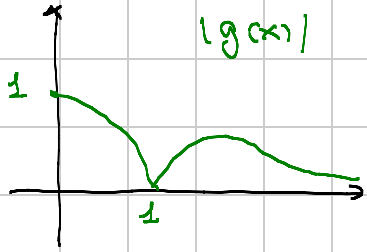
$$\sup\{|f'(x)| : x \ge 0\} = \sup\{|e^{-x} - xe^{-x}| : x \ge 0\}$$

Quindi studio $g(x) = (1-x)e^{-x}$ per $x \ge 0$

$$g'(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$



Quindi

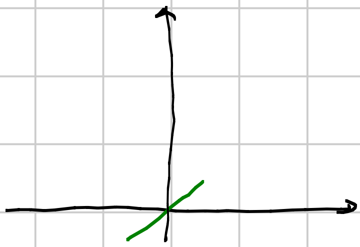


$$\sup\{|g(x)| : x \geq 0\} = 1 = c \text{ ottimale.}$$

Oss. Esiste c per cui la disug. vale $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$?

No! Se esistesse, $f(x) = xe^{-x}$ sarebbe Lip. in $\mathbb{R}$, quindi $f'(x)$ sarebbe limitata in $\mathbb{R}$, ma non lo è perché tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$.

Esempio 3 $\quad f(x) = \arctan^2 x + \sin x$



Domanda: esistono max/min su $\mathbb{R}$?

Esplorazione: limiti per $x \to \pm\infty$ ... poi li facciamo

$f(x)$ assume valori negativi. Infatti $f(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, quindi $f'(0) = 1$, quindi $f(x) < f(0) = 0$ in un intorno sx di 0.

Il limite per $x \to +\infty$ non esiste. Per dimostrarlo per bene prendo

$a_n = 2\pi n \qquad f(a_n) \to \frac{\pi^2}{4}$

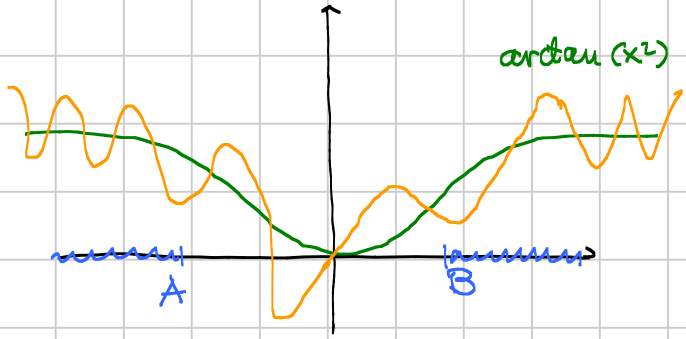
$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad f(b_n) \to \frac{\pi^2}{4} + 1$

Idem a $-\infty$.

$$\boxed{\text{Fatto 1: } \sup = \frac{\pi^2}{4} + 1 \text{ e max non esiste}}$$

Basta osservare che $f(x) < \frac{\pi^2}{4} + 1$ sempre e $f(b_n) \to \frac{\pi^2}{4} + 1$.

$\boxed{\text{Fatto 2: esiste } \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)}$



Osservo che $f(x) \geq \arctan^2 x - 1$

Quindi esistono $A<0$ e $B>0$ t.c.

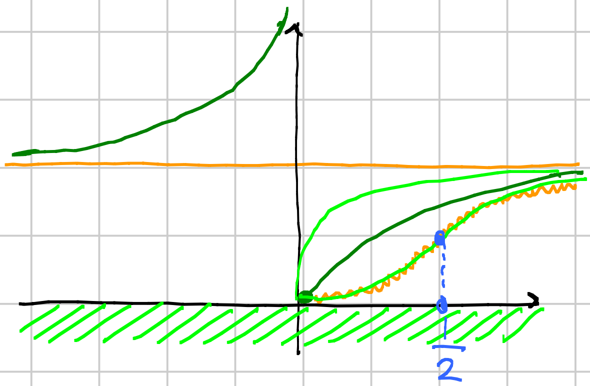
$$f(x) > 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in (-\infty, A] \cup [B, +\infty)$$

Per W. vero esiste $\min\{f(x) : x \in [A,B]\} \leq 0$

perché $x=0$ gioca

Ora il min su $[A,B]$ è anche min. in generale.

Esempio 4 Studiare per bene $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$



- C^∞ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- limiti agli estremi ⇝ vedi figura

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

- $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} > 0$ per ogni $x \neq 0$.

- Per vedere come va a 0^+, basta vedere $\lim_{x\to 0^+} f'(x) =$

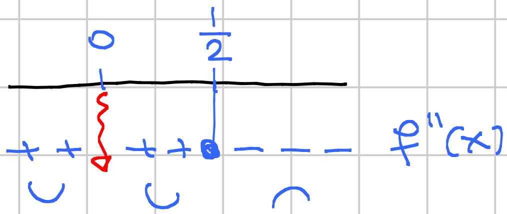
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} y^2 = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$$

Oss. Possiamo ora dire che $e^{-\frac{1}{x}}$ è Lip. in $(0,+\infty)$

(infatti $f'(x)$ tende a 0 sia per $x \to 0^+$, sia per $x \to +\infty$, quindi $|f'(x)|$ è limitata)

Ci aspettiamo un p.to di flesso in $(0,+\infty)$

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4} - e^{-\frac{1}{x}}\frac{2}{x^3} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(1-2x)$$



$$\lim_{x\to 0^+} f''(x) = 0$$

Commento Tutte le derivate successive hanno lo stesso comp., cioè

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0$$