ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 06

Note Title 03/10/2023

PIANI NELLO SPAZIO → Cartesiana

→ Parametrica

Cartesiana $ax+by+cz+d=0$, con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

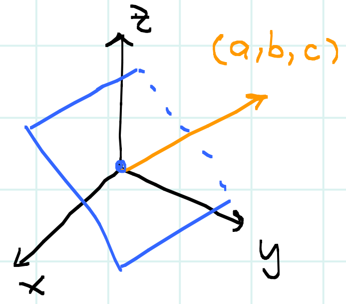
non sono tutti nulli

Se $d=0$ il piano passa per l'origine $ax+by+cz=0$

e sono tutti i vettori $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che sono $\perp$ al vettore (a,b,c).

$\langle (a,b,c),(x,y,z) \rangle$

Se $d \neq 0$, il piano non passa per l'origine ed è // al precedente



Esempio $3x+2y-z+7=0$

$3x+2y-z=-7$

y, z: variabili libere

$z=t$, $y=s$, $3x=-7+z-2y=-7+t-2s \rightsquigarrow x=-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}s$

$(x,y,z) = \left(-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}s, s, t\right)$

$= \boxed{\left(-\frac{7}{3},0,0\right)+t\left(\frac{1}{3},0,1\right)+s\left(-\frac{2}{3},1,0\right)}$

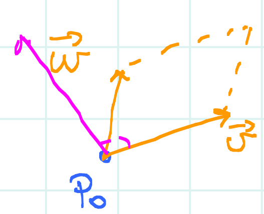
rappresentazione parametrica del piano

Volendo la posso scrivere come $\left(-\frac{7}{3},0,0\right)+t\,(1,0,3)+s\,(-2,3,0)$

PARAMETRICA $\boxed{\vec{P_0}+t\vec{v}+s\vec{w}}$

p.to qualunque del piano

vettori $\perp$ ai coeff. (a,b,c)



Mutua posizione di due piani nello spazio

→ paralleli e coincidenti ("stesso piano", se li interseco l'insieme delle soluzioni è ∞ e dipende da 2 param.)

→ paralleli e distinti (nessuna intersezione)

→ incidenti (si intersecano in una retta: se li interseco l'insieme delle soluz. dipende da un parametro)

Come interseco due piani?

→ Se conosco le due cartesiane, le metto a sistema e risolvo

→ Se non le conosco, le trovo e poi procedo come prima (volendo si può evitare)

Come passo dalla parametrica alla cartesiana?

<u>Esempio</u> $(1,2,0)+t\,(1,1,2)+s\,(-3,0,1)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ BOVINO $ax+by+cz+d=0$

$(1+t-3s,\ 2+t,\ 2t+s)$

$a(1+t-3s)+b(2+t)+c(2t+s)+d=0$

$a+\underline{at}-\underline{3as}+2b+\underline{bt}+\underline{2ct}+\underline{cs}+d=0$

$$\begin{cases} a+b+2c=0 & \text{(coeff. di } t) \\ -3a+c=0 & \text{(coeff. di } s) \\ a+2b+d=0 & \text{(termine noto)} \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ho finito (abbiamo 3 equ. e 4 incognite, quindi ci sarà un parametro libero che posso fissare a piacere).

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Ricordo che (a,b,c) deve essere $\perp$ a $(1,1,2)$ e $(-3,0,1)$

Ottengo

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ -3a \quad +c=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{risolvo e trovo } (a,b,c) \text{ a meno di un parametro libero}$$

Scelti (a,b,c), trovo d imponendo che il p.to dato $(1,2,0)$ soddisfi l'eq. del piano

$$a=1,\ c=3,\ b=-7 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x-7y+3z=-13}$$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Uso la $\boxed{\text{FORMULA MISTERIOSA}}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (v_2w_3 - v_3w_2, \overbrace{-v_1w_3 + v_3w_1}^{\text{cambio di segno}}, v_1w_2 - v_2w_1)$$

Questa formula produce misteriosamente (per ora) un vettore $\perp$ a (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3)

[Dim: fare i prod. scalari e vedere che vengono 0!!!]

Nell'esempio
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,-7,3) = (a,b,c)$$
$\rightsquigarrow$ poi trovo d.

<u>Esempio</u> Trovare il piano che passa per

$A=(0,1,-1) \qquad B=(2,1,3) \qquad C=(-1,0,2)$

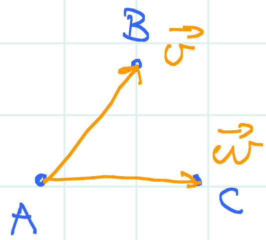
$\boxed{1° \text{ modo}}$ (Bovino) $\quad ax+by+cz+d=0$

[Segui conretti dopo video]

$$\begin{cases} \overbrace{+b-c}+d=0 \\ 2a+b+3c+d=0 \\ -a \quad +2c+d=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{risolvo}$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Una parametrica del piano è

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$



$$(0,1,-1) + t(2,0,4) + s(-1,-1,3)$$

che volendo posso scrivere come

$$(0,1,-1) + t(1,0,2) + s(1,1,-3)$$

Passo in cartesiana

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2,5,1) \rightsquigarrow -2x+5y+z = 4$$

$$\rightsquigarrow \boxed{2x-5y-z+4=0}$$

Verifico che A, B, C risolvano l'equazione!

Come determino l'angolo tra due piani incidenti?

Basta osservare che l'angolo tra i due piani è lo stesso che c'è tra i vettori a loro $\perp$, cioè l'angolo tra gli (a,b,c) delle cartesiane. Così si trova il cos dell'angolo (se voglio il + piccolo dei 2 angoli devo mettere il modulo al cos).

— o — o —