ANALISI 1 — LEZIONE 85

Note Title 28/03/2025

Esempio 1 $u'(t) = u(t)$

→ 1° ordine
→ forma normale
→ autonoma
→ variabili separabili
→ lineare primo ordine a coeff. costanti omogenea

$u(t) = e^t$ è una soluzione

Essendo autonoma, anche e^{t+c} è soluzione

Anche $u(t) = -e^t$ è soluzione e quindi anche $-e^{t+c}$.

Tutte queste soluzioni si possono scrivere come $\boxed{u(t) = ke^t}$

k ↑ parametro reale

[Nota bene: $e^{t+c} = e^c \cdot e^t = ke^t$]

Si potrebbe dimostrare che tutte soluzioni sono queste.

Esempio 2 $u'' = -u$

Esempi di soluzione: $u(t) = \sin t$ $\quad u(t) = \cos t$

Anche

$$u(t) = \underset{\uparrow}{a} \sin t + \underset{\uparrow}{b} \cos t \quad \text{è soluzione}$$

due parametri

Si potrebbe dimostrare che sono solo queste

[Nota bene: $\sin(t+c) = \sin t \cdot \underset{a}{\underset{\shortparallel}{\cos c}} + \cos t \cdot \underset{b}{\underset{\shortparallel}{\sin c}}$]

Esempio 3 $u'' = u$

$u(t) = ae^t + be^{-t}$

$u(t) = a \sinh t + b \cosh t$

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ (Falso, ma quasi vero)

L'insieme delle soluzioni di una eq. diff. di ordine k dipende da k parametri.

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ $u' = -u^2$ $u(t) = \dfrac{1}{t+c}$ ← parametro

più la soluzione $u(t) \equiv 0$ (che corrisponde a $c = +\infty$)

$\boxed{\text{PROBLEMA DI CAUCHY}}$ Eq. diff. + condizioni iniziali

Per una equazione di ordine k vuol dire prescrivere il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla (k-1) esima per uno stesso tempo t_0.

Esempi

$$\begin{cases} u' = u^2 + t \\ u(\underset{t_0}{7}) = \underset{u_0}{8} \end{cases}$$

→ eq. di ordine 1: prescrivo il valore di u in un certo t_0

$$\begin{cases} u'' = u' + u^2 - e^t \\ u(\boxed{7}) = 8 \\ u'(\boxed{7}) = 25 \end{cases}$$

eq. di ordine 2; prescrivo u e u' in uno STESSO t_0 (in questo caso 7)

Se avessi messo

$$\boxed{\begin{aligned} u(7) &= 8 \\ u'(8) &= 25 \end{aligned}}$$

No: deve essere lo stesso t

$$\boxed{\begin{aligned} u(7) &= 8 \\ u''(7) &= 9 \end{aligned}}$$

No: deve essere u e u'

$$\boxed{\begin{aligned} u(7) &= 8 \\ u(9) &= 8 \end{aligned}}$$

non andava bene (non era un problema di Cauchy)

$\boxed{\text{Morale}}$ Per una eq. diff. di ordine k ci aspettiamo una sol. generale che dipende da k parametri
Imponendo le k condizioni del problema di Cauchy si determinano univocamente i k parametri.

Oss. Nei modelli fisici spesso si trovano eq. del tipo

$$\underset{\text{massa}}{1} \cdot \underset{\text{accelerazione}}{u''} = \underset{\text{forza}}{\dots}$$

Prescrivere u e u' vuol dire prescrivere posizione e velocità iniziali.

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ (Molto misterioso) (Teorema di sola esistenza)
Prendiamo un problema di Cauchy per una eq. diff. di ordine k del tipo

$$\begin{cases} u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases}$$

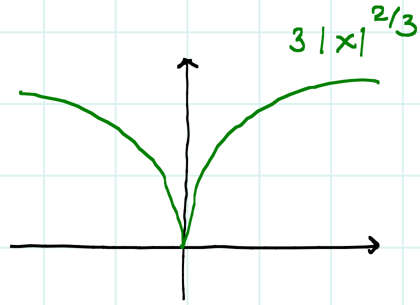
Se F è continua (bisognerebbe dire cosa vuol dire continua in k+1 variabili)
allora il problema ha almeno una soluzione (per lo meno locale, cioè vicino a t_0)
Se F è un po' meglio (un po' di Lipschitzianità locale, che è gratis se tutto è derivabile)
allora la soluzione è pure unica.

— o — o —

Esempio classico

$$\begin{cases} u'(t) = 3\,|u(t)|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

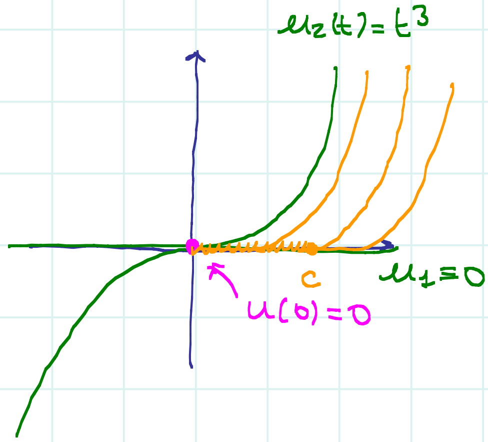
$u' = 3|u|^{2/3}$



La funzione $g(u) = 3\,|u|^{2/3}$
è continua, ma non è lip.
dalle parti di $u=0$, quindi
funziona la parte esistenza, ma non la parte unicità.

Una soluzione è $u_1(t) \equiv 0$ (vale sempre 0)
Un'altra soluzione è $u_2(t) = t^3$

Verifica $u'(t) = 3t^2 = 3\,|t^3|^{\frac{2}{3}}$



Entrambe le soluzioni verificano $u(0)=0$

Ci sono in realtà infinite soluzioni, e
sono tutte e sole (almeno per $t \geq 0$)
quelle del tipo

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases} \qquad \text{con } c > 0$$

Verificare derivando.

Oss. Il fenomeno precedente si chiama PENNELLO DI PEANO