ANALISI 1 - LEZIONE 038

Note Title 07/11/2016

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=82}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$

Leibnitz con $a_n = \dfrac{1}{\log(\log n)}$

(i) Ok, almeno defin. (iii) ok (ii) Ok $\Rightarrow$ converge

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^3-7n+8}{n^4+5n^2+2016}}}_{a_n}$

È seccante mostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

Alternativa: $a_n \sim \frac{1}{n}$ ma non potendo fare il confronto asintotico $\boxed{\text{aggiungo e tolgo}}$

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \left[a_n - \frac{1}{n}\right]$$

$$(-1)^n \left[\frac{n^3-7n+8}{n^4+5n^2+2016} - \frac{1}{n}\right]$$

$$(-1)^n \boxed{\frac{\cancel{n^4}-7n^2+8n-\cancel{n^4}-5n^2-2016}{n(n^4+5n^2+2016)}}$$

Conseguenza

$$\sum (-1)^n a_n = \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n \frac{1}{n}}}_{\text{conv. per Leibnitz}} + \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n \beta_n}}_{\text{conv. assolutamente per confr. asint. con } \frac{1}{n^3}}$$

Quindi la serie iniziale è somma di 2 serie convergenti.

—o—o—

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^2+1}{n^2+3n+2}}}_{d_n}$

$d_n \to 1 \Rightarrow$ viene (iii) di Leibnitz $\Rightarrow$ NON può convergere.
Sì, ma che fa?
Aggiungo e tolgo 1.

$$\begin{aligned}(-1)^n d_n &= (-1)^n + (-1)^n \left[\frac{n^2+1}{n^2+3n+2} - 1\right] \\ &= (-1)^n + (-1)^n \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}-3n-2}{n^2+3n+2} \\ &= (-1)^n - (-1)^n \frac{3n+1}{n^2+3n+2}\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum (-1)^n d_n = \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n}}_{\text{indet. facilm.}} - \sum (-1)^n \frac{3n+1}{n^2+3n+2}$$

Se la seconda convergesse, sapremmo che quella iniziale è indeterminata.
Per dimostrare che la 2ª è conv., si può fare come l'esempio 2.

— o — o —

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{(-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}}}_{a_n}$

Brutale: $a_n \sim (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, quindi conv. per Leibnitz

"Rigoroso": confronto asintotico con $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 1 \Rightarrow \text{stesso comp.}$$

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

NOOO!!!

Recorsista: $(-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

quindi $$\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\text{conv. per Leibnitz}} + \underbrace{\boxed{\sum \frac{1}{n}}}_{\text{div. a } +\infty}$$

Quindi la serie iniziale diverge a $+\infty$

Morale: quando le serie sono a segno variabile, non bisogna fidarsi del brutale e NON si può usare il confr. asintotico.

— o — o —

Esempio 5 $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Converge ad esempio per il rapporto. La somma è uguale ad e. Più in generale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Quella a sx è una serie di Taylor, cioè una serie in cui le somme parziali sono i polinomi di Taylor di una certa $f(x)$. Sotto opportune ipotesi, e per opportuni valori del parametro x, le serie di Taylor convergono proprio ad $f(x)$.

Dimostro l'esempio per valori $a \geq 0$, ed in particolare per $a = 1$.

Dimostro che $$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n}_{= e^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Dimostro che è $\boxed{\leq}$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \underset{\text{binomio}}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\boxed{\binom{n}{k} \frac{1^{n-k}\, a^k}{n^k}}}_{\leq \frac{1}{k!}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Quindi

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad \text{per ogni } n \geq 1$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$e^a \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Dimostro che è $\boxed{\geq}$. Fisso un qualunque $m \geq 0$. Uso di nuovo il binomio di Newton e osservo che per ogni $n \geq m$ vale

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^{m} a^k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

uso che $a \geq 0$
e $n \geq m$

Faccio il limite per $n \to +\infty$ a dx e sx:

$$e^a \geq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} a^k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \lim_{n \to +\infty} a^k \boxed{\binom{n}{k} \frac{1}{n^k}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!}$$

numero finito di addendi

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$$

Ho quindi dimostrato che

$$e^a \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ora faccio tendere $m \to +\infty$ e ottengo

$$e^a \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

— o — o —

Esempio (finale)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n^a} - \arctan\frac{1}{n}\right)}_{b_n}$$

Studiare il comportamento al variare di $a>0$.

- Se $a \in (0,1)$, allora la serie si comporta come $\sum \frac{1}{n^a}$, quindi diverge a $+\infty$
  (Dim: confronto asintotico con $c_n = \frac{1}{n^a}$)

- Se $a>1$, posso scrivere $\sum b_n = \underbrace{\sum \frac{1}{n^a}}_{\text{converge}} - \underbrace{\sum \arctan\left(\frac{1}{n}\right)}_{+\infty}$ (C.A. con $\frac{1}{n}$)

  quindi complessivamente diverge a $-\infty$

- Se $a=1$, entrano in gioco i termini successivi:

$$b_n = \frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n} \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3n^3}$$

$\rightsquigarrow$ converge (rigoroso: confr. asint. con $c_n = \frac{1}{n^3}$)
(e i termini sono defin. >0).

— o — o —