ANALISI 1 - LEZIONE 104

Note Title 05/04/2017

$\boxed{\text{Assiomi di } \mathbb{R}}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Weierstrass}}$

VIA DIRETTA (che passa per Bolzano - Weierstrass)

Teorema (B.W.) Sia a_n una succ. di numeri reali limitata
(cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).
Allora esiste una s.succ. che ha limite reale, cioè
$\exists a_\infty \in \mathbb{R}$ $\exists n_k$ succ. crescente strett. di naturali t.c.

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (Usando liminf / limsup)

Sia $L := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Poiché $-M \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, di siamo

$$-M \leq L \leq M$$, quindi in particolare $L \in \mathbb{R}$.

Per la caratterizzazione del limsup come maxlim, esiste $a_{n_k} \to \underset{a_\infty}{L}$.

Potevo fare stesso discorso con il liminf.

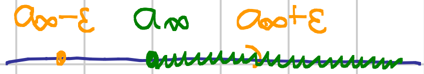
— o — o —

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ (Usando solo gli assiomi di $\mathbb{R}$, cioè sup / inf).

Prendo la succ. a_n e considero l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a_n \leq x \text{ per infiniti indici } n \in \mathbb{N}\}$$

L'insieme A contiene almeno almeno M e non contiene nulla $< -M$
Inoltre $a \in A$ e $b > a \Rightarrow b \in A$, quindi A è una semiretta,



con o senza estremo. Poniamo

$$a_\infty := \inf A$$

Quali sono le proprietà di a_∞?

① $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \le a_\infty + \varepsilon$ per infiniti indici

② $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \ge a_\infty - \varepsilon$ definitivamente (altrimenti $a_\infty - \varepsilon$ starebbe in A)

Dico che esiste $a_{n_k} \to a_\infty$. La costruisco così

- Scelgo n_0, e quindi a_{n_0}, a caso tra gli el. della succ.
- Supponendo di aver scelto $a_{n_0}, a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$, prendo $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ e dalle ① e ② deduco che

$$a_\infty - \frac{1}{k+1} \underset{\text{defin.}}{\le} a_n \underset{\infty \text{ indici}}{\le} a_\infty + \frac{1}{k+1}$$

per infiniti indici n. Quindi esiste un indice $n_{k+1} > n_k$ che va bene. Ho così ottenuto $a_{n_{k+1}}$.

Per i carabinieri succederà che $a_{n_k} \to a_\infty$ in quanto

$$a_\infty - \frac{1}{k} \le a_{n_k} \le a_\infty + \frac{1}{k} \qquad \forall k \ge 1.$$

Oss. Se fosse $a_n = (-1)^n$ verrebbe $A = [-1, +\infty)$
In tutti i casi $a_\infty = \liminf$ e quello che abbiamo fatto è ridimostrare che si tratta di minlim.

Oss. Avrei potuto fare la dim. ponendo (provare a farlo)

$$a_\infty := \sup\{x \in \mathbb{R} : a_n \ge x \text{ per infiniti indici } n\}$$

si può anche mettere stretta

Corollario Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme chiuso.
Sia $\{a_n\} \subseteq A$ una successione limitata.
Allora esiste $\boxed{a_\infty \in A}$ ed $n_k \to +\infty$ succ. di naturali crescente t.c.

$$a_{n_k} \longrightarrow a_\infty$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Essendo a_n limitata, per B-W. esiste $a_{n_k} \longrightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$.
Dico che $a_\infty \in \text{Clos}(A) = A$
perchè A è chiuso.
Devo dim. che ogni intervallo $(a_\infty - \varepsilon, a_\infty + \varepsilon)$ contiene almeno un p.to di A. Questo segue dal fatto che contiene a_{n_k} per ogni k abbastanza grande.

— o — o —

Definizione (Insieme compatto) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO se è limitato + chiuso.

Esempio Un intervallo $[a,b]$ è compatto
" " $(a,b]$ non è compatto (no chiuso)
una semiretta $[a,+\infty)$ è chiusa ma non compatta.

$\boxed{\text{TEOREMA DI WEIERSTRASS}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che $A \neq \emptyset$ e
(i) f continua in A
(ii) A compatto.
Allora esistono per forza

$$\max \{f(x) : x \in A\}$$
$$\underbrace{\min \{f(x) : x \in A\}}_{\substack{\| \\ f(A) \, = \, \text{immagine delle funzione}}}$$

(sono "delle y").

Dim. Dimostro che esiste il max (per il min. è analoga)
Di sicuro esiste il sup, cioè

$$M := \sup\{f(x) : x \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Per un lemma fatto a suo tempo esiste una succ. $y_n \in f(A)$ t.c. $y_n \to M$ (proprietà del sup).

Per def. di immagine, esiste $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$.
Ora A è compatto, quindi esiste

$$x_{n_k} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vorrei dire che è un p.to di max}}}{x_\infty} \in A$$

Grazie alla continuità di $f(x)$ sappiamo che

$$M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{M è il sup} \\ \text{dell'immagine}}}{\geq} f(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continuità} \\ \text{di } f(x)}}{=} \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. di} \\ x_{n_k}}}{=} \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} \underset{\substack{\uparrow \\ y_n \to M}}{=} M$$

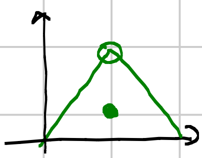
Quindi per forza $f(x_\infty) = M$. In questo momento sappiamo anche che $M \in \mathbb{R}$ e non $+\infty$.

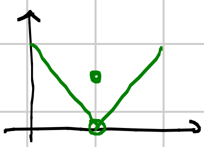
— o — o —

<u>Notazione</u> La successione x_n si dice una <u>successione massimizzante</u> perché

$$f(x_n) \longrightarrow \sup f(A).$$

<u>Oss.</u> Se manca la continuità anche in un solo p.to, allora max e min possono non esistere





Possono mancare entrambi ?

Esercizio (che non ha a che fare con W.)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto. Allora esistono per forza

$\min A$ e $\max A$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamolo per il min. Pongo $\ell := \inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Essendo A limitato, di sicuro $\ell \in \mathbb{R}$.
Per il solito lemma esiste una succ. $\{a_n\} \subseteq A$ t.c. $a_n \to \ell$.
Essendo A chiuso, di sicuro $\ell \in A$, e quindi $\ell = \min A$.

— o — o —

Oss. Tutto $\mathbb{R}$ è un chiuso, ma non un compatto
Tutto $\mathbb{R}$ è pure aperto.
$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono gli unici sottoinsiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi.

Oss. Non è vero che

- le funzioni continue mandano chiusi in chiusi

Esempio $f(x) = \arctan x$ $\quad A := [0, +\infty)$ chiuso
$f(A) = [0, \frac{\pi}{2})$ non chiuso

- le funzioni continue mandano limitati in limitati

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad A = (0, 1)$ limitato
$f(A) = (1, +\infty)$ non limitato.

Aggiunto dopo video: nel finale della dim. di Weierstrass ci sono 2 indici sbagliati e la prima disuguaglianza è vera ma inutile