## STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: capire il grafico di una funzione in tutta la zona di definizione

ROAD MAP:
1. Eventuali simmetrie (pari / dispari / periodica)
2. Zona di definizione e continuità
3. Limiti agli estremi della zona di definizione
4. Zeri e segno
5. Derivata prima e zone di monotonia
6. P.ti di max / min locali e globali
7. Eventuali asintoti
8. Derivata seconda, zone di convessità / concavità, flessi
9. LIPSCHITZIANITÀ

Esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

1. Funzione dispari $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$

$\rightsquigarrow$ il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

2. Definita quando $x^2-1 \neq 0$, cioè $x^2 \neq 1$, cioè $x \neq \pm 1$.
La zona di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$
In questa zona $f(x)$ è continua per il metateorema.

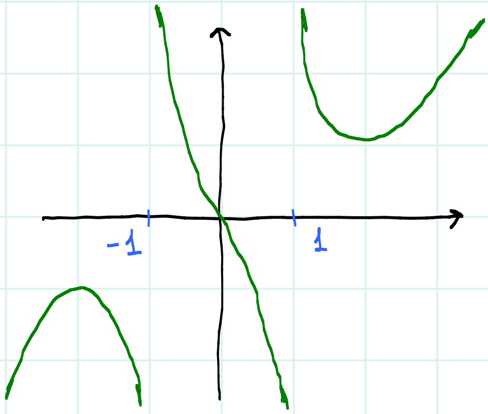
3. Limiti agli estremi, cioè a $\pm\infty$ e a $\pm 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty \quad \left[\frac{1}{0^+}\right] \qquad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty \quad \left[\frac{-1}{0^+}\right]$$

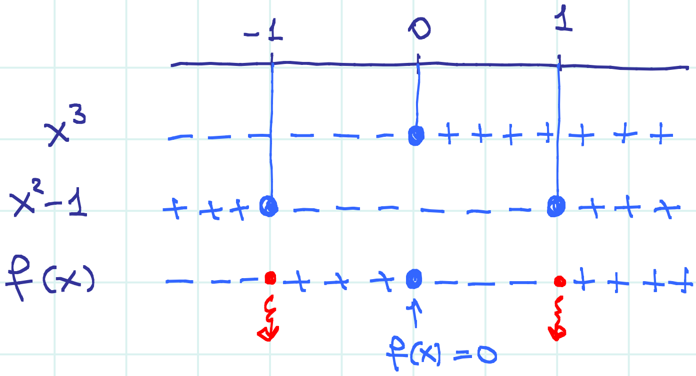
$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty \quad \left[\frac{1}{0^-}\right] \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty \quad \left[\frac{-1}{0^-}\right]$$

Rappresentiamo graficamente quello che già sappiamo.
Il grafico che ci aspettiamo è quello a destra, ma potrebbe essere molto più complicato




(4) Zeri e segno:
risolvere l'equazione $f(x)=0$
risolvere le disequazioni $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

In generale studio il segno di $\frac{x^3}{x^2-1}$.
Per farlo studio separatamente numeratore e denominatore




Riassumendo:

$f(x)=0 \iff x=0$

$f(x)>0 \iff x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

$f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

I risultati del p.to (4) sono coerenti con l'ipotesi di grafico che avevamo dopo il p.to (3) :)

## 5) Studio di $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Ora devo studiare zeri e segno di $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

| | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | + | | + | | + | 0 | + | | + | | + |
| $x^2-3$ | + | 0 | − | | − | | − | | − | 0 | + |
| $(x^2-1)^2$ | + | | + | 0 | + | | + | 0 | + | | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | − | | − | 0 | − | | − | 0 | + |
| | | $f'=0$ | | | | $f'=0$ | | | | $f'=0$ | |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |

Dallo studio della derivata prima abbiamo ulteriori conferme al grafico tracciato precedentemente. In particolare $f(x)$

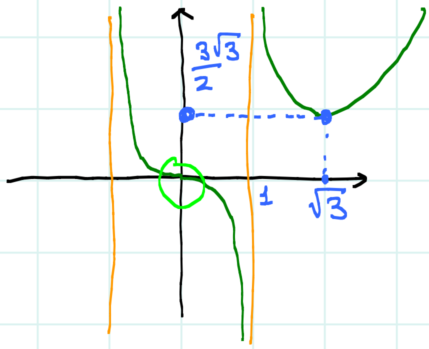
- → cresce in $(-\infty, -\sqrt{3})$
- → decresce in $(-\sqrt{3}, -1)$
- → decresce in $(-1, 1)$
- → decresce in $(1, \sqrt{3})$
- → cresce in $(\sqrt{3}, +\infty)$

Achtung! Non è vero che $f(x)$ decresce in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
Ad esempio $f(-1,2) < f(-0,8)$.
Non posso applicare i teoremi di monotonia nell'intervallo $[-1.2, -0.8]$ perché non è vero che $f$ è derivabile in tutto l'intervallo.

⑥ Max / Min locali globali  Dal p.to ⑤ sappiamo che

$x=\sqrt{3}$ è un p.to di min. locale

$x=-\sqrt{3}$ è un p.to di max. locale




Già dallo studio dei limiti sapevamo che max / min globali NON ESISTONO

Volendo posso calcolare la y dei p.ti di max / min.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Oss. Sappiamo che $f'(x)=0$ per

$x=-\sqrt{3}$ → p.to max loc.

$x=0$ → p.to di flesso a tang. orizz. discendente

$x=\sqrt{3}$ → p.to min. loc.

Potevo da subito sapere che $x=0$ era quello che è ?

Certo ! Bastava lo studio locale in $x=0$

Taylor: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -x^3\left(1+x^2+o(x^2)\right)$

$\frac{1}{1-t} = 1+t+o(t)$

$= -x^3 + o(x^3)$

Questo bastava per sapere che $f(x)$ si comporta come $-x^3$ vicino a $x=0$.

— o — o —