# ANALISI 1 — LEZIONE 114

Note Title 16/05/2025

Esercizio 1 Poniamo $W_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$

prodotto parziale del prodotto di Wallis

Trovare una formula più esplicita per $W_n$

$$W_1 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}, \quad W_2 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}, \quad W_3 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7}$$

$$W_4 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \quad \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{1}{9} \frac{(4!)^4 \cdot 2^{16}}{(8!)^2}$$

Sembra ragionevole che

$$\boxed{W_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2^n \cdot n!)^4}{[(2n)!]^2}}$$

A partire la dimostrazione rigorosa si fa per induzione dopo aver osservato che

$$W_{n+1} = W_n \cdot \frac{(2n+2)(2n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

L'induzione è un facile esercizio.

Esercizio 2 $\boxed{\text{Se}}$ $W_n \to \frac{\pi}{2}$, allora $S_\infty = \sqrt{2\pi}$

Già sappiamo che $n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}\, S_\infty$. Se sostituisco nella formula per $W_n$ trovo

$$W_n = \frac{1}{2n+1} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2} = \frac{1}{2n+1} \frac{2^{4n} \frac{n^{4n}}{e^{4n}} n^2 S_\infty^4}{\left[\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \sqrt{2n}\, S_\infty\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \frac{\cancel{2^{4n}}\, \cancel{n^{4n}}}{\cancel{e^{4n}}} n^{\cancel{2}} S_\infty^{\cancel{4}\,2} \frac{\cancel{e^{4n}}}{\cancel{(2n)^{4n}}\; 2\cancel{n}\, \cancel{S_\infty^2}}$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\underbrace{\boxed{W_n}}_{\downarrow\, \frac{\pi}{2}} = \underbrace{\boxed{\frac{n}{2n+1}}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}} S_\infty^2 \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} S_\infty^2 \quad \rightsquigarrow \quad S_\infty^2 = 2\pi$$

$$\rightsquigarrow \quad S_\infty = \sqrt{2\pi}$$

Calcoliamo il limite del Wallis

Pongo $I_n = \int_0^\pi \sin^n x\, dx$. Lo calcolo con il grande ritorno

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x\, dx = \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva}}}{\sin x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata}}}{\sin^{n-1} x}\, dx$$

$$= \underbrace{\left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\right]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi \cos^2 x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x\, dx$$

$$= (n-1) \int_0^\pi (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x\, dx$$

$$= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^\pi \sin^n x\, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \quad \rightsquigarrow \quad n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

Conseguenza

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \forall n \geq 2} \qquad I_0 = \pi \qquad I_1 = 2$$

succ. per ricorrenza

$\boxed{\text{Oss.}}$ Tra le varie cose la formula ci dice che $I_n < I_{n-2}$.
È ragionevole?

Certo! Infatti $\sin x \in [0,1]$ quando $x \in [0,\pi]$, e quindi all'aumentare di $n$ la funzione che integro diventa sempre più piccola.

Introduco il rapporto $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \hat{R}_n$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ Dimostriamo che $\hat{R}_n \to 1$ per $n \to +\infty$

Cerco di usare i carabinieri. Per l'osservazione precedente $\hat{R}_n \leq 1$.

Dall'altra parte $$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2n}{2n+1} \underbrace{\boxed{\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}}}_{\geq 1} \geq \frac{2n}{2n+1}$$

calcolo $I_{2n+1}$ usando la ricorrenza

Conclusione $$\underbrace{\boxed{\frac{2n}{2n+1}}}_{\downarrow\, 1} \leq \underbrace{\hat{R}_n}_{1} \leq \underbrace{\boxed{1}}_{\downarrow\, 1}$$

$\boxed{\text{Esercizio 4}}$ Trovare una specie di Formula esplicita per $\hat{R}_n$

$$\hat{R}_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \boxed{\frac{2n}{2n+1}\ \frac{2n}{2n-1}}\ \hat{R}_{n-1}$$

ingrediente fondamentale del prodotto di Wallis

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

$$\hat{R}_1 = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\hat{R}_0, \quad \hat{R}_2 = \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\hat{R}_0, \quad \hat{R}_3 = \frac{6\cdot 6}{7\cdot 5}\ \frac{4\,4}{5\cdot 3}\ \frac{2\cdot 2}{3\cdot 1}\hat{R}_0$$

Per induzione si dimostra che $\boxed{\hat{R}_n = \hat{R}_0 \cdot W_n}$

Ora possiamo sapere il limite di $W_n$.

Infatti $\hat{R}_0 = \frac{I_1}{I_0} = \frac{2}{\pi}$, quindi $\underbrace{\boxed{\hat{R}_n}}_{\downarrow 1} = \frac{2}{\pi} \cdot W_n$

Quindi per forza $W_n \to \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Esercizio 5}}$ Dimostriamo che $I_n \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$, cioè che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{2\pi}$$

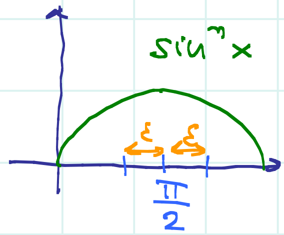
$\boxed{\text{Esercizio 5 –}}$ Dimostriamo che $\int_0^\pi \sin^n x\, dx \to 0$

$\boxed{\text{Grande tentazione}}$ Per ogni $x \in [0,\pi]$ con $x \neq \frac{\pi}{2}$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sin^n x = 0 \qquad \left(\text{in } \tfrac{\pi}{2} \text{ non è vero perché } \sin x = 1\right)$$

Allora $\int_0^\pi \sin^n x\, dx \to \int_0^\pi 0 \cdot dx = 0$

Questo modo di procedere non è giustificato.




Più rigorosamente. Fisso un piccolo parametro $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\pi \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \dots$$

Ora il centrale è $\leq 2\varepsilon$ (ampiezza intervallo $\cdot 1$)

I due laterali sono più piccoli di $\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\text{ampiezza intervallo}} \underbrace{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\text{Max della funzione}}$

Ne segue che

$$0 \leq \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx \leq 2\varepsilon + \boxed{2\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)} \xrightarrow{} 0$$

Ora faccio liminf e limsup di tutto (uso che $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)<1$)

e ottengo $\quad 0 \leq \liminf I_n \leq \limsup I_n \leq 2\varepsilon$.

Poiché $2\varepsilon$ è un qualunque numero $>0$ questo dimostra che

$$I_n \to 0.$$

— o — o —