ANALISI 1 — LEZIONE 97

Note Title 05/04/2025

SUCCESSIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME

L'unica regola è che non ci sono regole

Esempio 1 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+3}$ $\quad a_0 = 2025$

<u>Primo modo</u>: piano classico con la monotonia

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = 0$

Dim (iv)

$$\underset{\displaystyle \ell}{\overset{\downarrow}{a_{n+1}}} = \underset{\displaystyle 0}{\overset{\downarrow}{\boxed{\dfrac{a_n}{n+3}}}}$$

num. $\to \ell \in \mathbb{R}$

denom. $\to +\infty$

Dim (ii) Provo con ricorrenza + disequazione

$$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \iff \frac{a_n}{n+3} \overset{?}{\leq} a_n \iff a_n \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)}_{\geq 1 - \frac{1}{3} \text{ e quindi } \geq 0} \overset{?}{\geq} 0$$

a_n: ≥ 0 per p.to (i)

<u>Secondo modo</u>: criterio del rapporto

(i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Grazie al p.to (i) posso usare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{n+3} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+3} \to 0 < 1 \quad \rightsquigarrow \quad a_n \to 0$$

Terzo modo: $\boxed{\text{LIMITATEZZA + CARABINIERI}}$

(i) $0 \leq a_n \leq 2025 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $a_n \geq 0$ è induzione molto semplice

$a_n \leq 2025$ pure ... ma

$\boxed{n=0}$ $a_0 \leq 2025$ OK ☺ $a_0 = 2025$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $a_n \leq 2025$ Tesi: $a_{n+1} \leq 2025$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+3} \leq \frac{2025}{n+3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denom.} \geq 3}}{\leq} \frac{2025}{3} \leq 2025$$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Grazie al p.to (i)

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{a_n}{n+3}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{2025}{n+3}}}$$

Così abbiamo ottenuto che $a_{n+1} \to 0$ il che è equivalente ad $a_n \to 0$.

Esempio 2 $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + n}{5n+4} \qquad a_0 = 2025$

Esperimenti: $a_0 = 2025 \qquad a_1 \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{=} \dfrac{2025}{4} = 506{,}25$

$$a_2 = \frac{a_1 + 1}{9} = \frac{507{,}25}{9} = 55, \ldots$$

Congettura ragionevole: $a_n \to \frac{1}{5}$

Esperimento: sarà debolmente decrescente?

$$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \iff \frac{a_n + n}{5n+4} \overset{?}{\leq} a_n \iff a_n + n \overset{?}{\leq} 5n\, a_n + 4a_n$$

$$\iff (5n+3)\, a_n \overset{?}{\geq} n \iff a_n \overset{?}{\geq} \frac{n}{5n+3}$$

Quindi, $\boxed{\text{se}}$ voglio dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ (in un ipotetico p.to (ii)), mi serve come p.to (i) che $a_n \geq \frac{n}{5n+3}$

Ipotetico piano con monotonia:

(i) $a_n \geq \frac{n}{5n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = \frac{1}{5}$

I p.ti (ii), (iii), (iv) sono tranquilli.

$\boxed{\text{MA}}$ prima dovrei dimostrare (i) per induzione, e potrebbe essere complicato [provare per esercizio].

Alternativa: $\boxed{\text{LIMITATEZZA + CARABINIERI}}$

(i) $0 \leq a_n \leq \underset{\text{potevo mettere 2025}}{10.000} \quad \forall n \geq 0$

(ii) $a_n \to \frac{1}{5}$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $a_n \geq 0$ facile induzione

$a_n \leq 10.000$ per induzione

$\boxed{n=0}$ Gratis

$\boxed{n \to n+1}$ Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + n}{5n+4} \underset{\text{uso ipotesi}}{\leq} \frac{10.000 + n}{5n+4} \underset{\text{spero}}{\leq} 10.000$$

Controllo la speranza

$$\frac{10.000+n}{5n+4} \overset{?}{\leq} 10.000 \iff 10.000+n \overset{?}{\leq} 50.000\,n + 40.000$$

e questo è troppo vero

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\boxed{\dfrac{n}{5n+4}} \leq a_{n+1} = \dfrac{a_n+n}{5n+4} \leq \boxed{\dfrac{10.000+n}{5n+4}}$

$$\frac{n}{5n+4} \to \frac{1}{5} \qquad \frac{10.000+n}{5n+4} \to \frac{1}{5}$$

Per i carabinieri $a_{n+1} \to \frac{1}{5}$ quindi anche $a_n \to \frac{1}{5}$

— o — o —

<u>Esempio 3</u> $a_{n+1} = \dfrac{a_n+8}{n+3}$ $\quad a_0 = 2025$

Si può fare con limitatezza + carabinieri e tende a 0.

Si può fare con il rapporto ?

È facile che $a_n > 0$ sempre. Poi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n+8}{n+3} \cdot \dfrac{1}{a_n}$

e da qui non è chiaro come procedere ☹

<u>Esempio 4</u> $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_n+8}}{n+1} + \sqrt{n}$ $\quad a_0 = 2025$

Questa tende a $+\infty$ per colpa di $\sqrt{n}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $a_n \to +\infty$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $a_{n+1} \geq \boxed{\sqrt{n}}$

$$a_{n+1} \to +\infty \qquad \sqrt{n} \to +\infty$$

← [Corretto dopo video]

Per confronto $a_{n+1} \to +\infty$, quindi $a_n \to +\infty$.

Esempio 5 $\quad a_{n+1} = \frac{n^{100}}{2^n} a_n \qquad a_1 = 2025$

per evitare che tutti i termini siano 0 se fosse $a_0 = 2025$

Questa successione tende a 0!

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Criterio del rapporto $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{100}}{2^n} \to 0 < 1 \leadsto a_n \to 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Esiste (per definizione di limite) $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^{100}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

A quel p.to il piano diventa

(i) $0 \leq a_n \leq a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (teo. succ. monot.)

(iv) $\ell = 0$ $\qquad$ (solito)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Solita induzione ... $\quad a_{n+1} = \underbrace{\boxed{\frac{n^{100}}{2^n}}}_{\leq \frac{1}{2}} a_n \leq \frac{1}{2} a_n \leq a_n$

$a_n \geq 0$

[bastava pure che $\frac{n^{100}}{2^n} \leq 1$ per ogni $n \geq n_0$ per avere la monotonia]

Morale: talvolta le limitatezze bastano da un certo punto in poi.

— o — o —