ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 26

Esercizio 1 $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+3z=0 \}$

→ Dimostrare che V è un s.sp. vett.

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Devo verificare che, $\boxed{\text{per ogni}}$ v_1 e v_2 in V, anche $v_1+v_2 \in V$

non basta fare esempi

Ipotesi $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in V$ cioè $x_1 - 2y_1 + 3z_1 = 0$

$v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in V$ cioè $x_2 - 2y_2 + 3z_2 = 0$

Tesi $v_1 + v_2 \in V$ Ora $v_1+v_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

Devo quindi verificare che $(x_1+x_2) - 2(y_1+y_2) + 3(z_1+z_2) = 0$

$\boxed{\text{Dim la tesi usando l'ipotesi}}$

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+3(z_1+z_2) \underset{\text{proprietà della somma di numeri}}{=} (\underbrace{x_1-2y_1+3z_1}_{0}) + (\underbrace{x_2-2y_2+3z_2}_{0}) \underset{\text{uso ipotesi}}{=} 0+0=0$$

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$ $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}}$ $\boxed{\forall v \in V}$ anche $\lambda v \in V$

Ipotesi $\lambda \in \mathbb{R}$

$v = (x,y,z) \in V$, cioè $x-2y+3z=0$

Tesi $\lambda v \in V$ $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Quindi devo verificare che $(\lambda x) - 2(\lambda y) + 3(\lambda z) = 0$

$\boxed{\text{Dim}}$ $(\lambda x) - 2(\lambda y) + 3(\lambda z) \underset{\text{proprietà del prodotto}}{=} \lambda(x-2y+3z) \underset{\text{uso ipotesi}}{=} \lambda \cdot 0 = 0$

→ Dimensione e base $x-2y+3z=0$

y e z variabili libere, quindi pongo $z=t$, $y=s$, $x=2s-3t$

e quindi $(x,y,z) = (2s-3t, s, t) = t(-3,0,1) + s(2,1,0)$

Dim $= 2$ $V = \text{Span}((-3,0,1),(2,1,0))$ SONO UNA BASE

Esercizio 2 $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w \, , \, x-y = w\}$

$x+y-z-w=0, \quad x-y-w=0$

Dimostrare che è un s.sp. vett.

$\boxed{\text{SOMMA}}$

Ipotesi $\boxed{\begin{array}{l} x_1+y_1-z_1-w_1=0 \\ x_1-y_1-w_1=0 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} x_2+y_2-z_2-w_2=0 \\ x_2-y_2-w_2=0 \end{array}}$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1) \in V$ $\quad v_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2) \in V$

Tesi $v_1+v_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2) \in V$ cioè

$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)-(w_1+w_2)=0$

$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-(w_1+w_2)=0$

$\boxed{\text{Dim}}$ (della tesi usando l'ipotesi)

$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)-(w_1+w_2)$

$= (x_1+y_1-z_1-w_1)+(x_2+y_2-z_2-w_2) = 0+0 = 0$ ☺

$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-(w_1+w_2) = (x_1-y_1-w_1)+(x_2-y_2-w_2) = 0+0=0$

☺

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$ Ipotesi : $\lambda \in \mathbb{R}$

$v = (x,y,z,w) \in V$ cioè $\quad x+y-z-w=0$

$x-y-w \quad =0$

Tesi : $\lambda v \in V$ ma $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda w)$ quindi

$(\lambda x)+(\lambda y)-(\lambda z)-(\lambda w)=0$

$(\lambda x)-(\lambda y)-(\lambda w)=0$

Dim: raccogliere λ

$\boxed{\text{Dimensione e base}}$ $\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x-y-w=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y-z-w=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$

$w = t, \quad z = 2s, \quad y = s, \quad x = w + z - y = t + 2s - s = t + s$

$(x, y, z, w) = (t+s, s, 2s, t) = t\,(1,0,0,1) + s\,(1,1,2,0)$

Quindi dim $= 2$ e UNA BASE è $\{(1,0,0,1), (1,1,2,0)\}$

Oss. $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \boxed{y^2 + w^2 \geq 0}\}$ quindi $V = \mathbb{R}^4$

sempre verificata

$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \boxed{y^2 + w^2 = 0}\}$

modo BUFFO di dire che $y = w = 0$

Quindi in questo caso V è un s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dim 2 e UNA BASE è $\{(1,0,0,0), (0,0,1,0)\}$

Esercizio 3 $\quad V = \left\{ A \in M_{2\times 2} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

→ Dimostrare che è un s.sp. vettoriale

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Se A_1 e $A_2 \in V$, allora anche $A_1 + A_2 \in V$

Ipotesi: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_1 = A_1 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_2 = A_2 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Tesi: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Dim}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_2$

propr. distributiva

$= A_1 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

uso ipotesi

$= (A_1 + A_2) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ☺

uso distributiva per raccogliere

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$ Ipotesi $\lambda \in \mathbb{R}$

$A \in V$, cioè $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Tesi: $\lambda A \in V$, cioè $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (\lambda A) = (\lambda A) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Dim}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (\lambda A) = \lambda \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ipotesi}}}{=} \lambda \left[A \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right] = (\lambda A) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Dimensione e base}}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Ora faccio i conti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+7b & 6a+8b \\ 5c+7d & 6c+8d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = 5a+7b \\ b+2d = 6a+8b \\ 3a+4c = 5c+7d \\ 3b+4d = 6c+8d \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ porto tutto dalla stessa parte e risolvo

(può anche succedere che l'unica soluzione sia $a=b=c=d=0$)

Oss. L'esercizio era lo stesso che dire
$V = \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 :$ sono verificate le 4 equazioni del sistema $\}$

Esercizio 4 $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y \geq 0 \}$

Questo non è un s.sp. vettoriale. Che cosa va male?

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Ipotesi: $(x_1,y_1) \in W$, cioè $x_1+3y_1 \geq 0$

$(x_2,y_2) \in W$, cioè $x_2+3y_2 \geq 0$

Tesi: $(x_1+x_2, y_1+y_2) \in W$, cioè $(x_1+x_2)+3(y_1+y_2) \geq 0$

Dim. $(x_1+x_2)+3(y_1+y_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. somma}}}{=} \overbrace{(x_1+3y_1)}^{\geq 0} + \overbrace{(x_2+3y_2)}^{\geq 0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma di due numeri } \geq 0}}{\geq} 0$

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$ Ipotesi : $\lambda \in \mathbb{R}$

$(x,y) \in W$ cioè $x+3y \geq 0$

Tesi : $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in W$ cioè $(\lambda x) + 3(\lambda y) \geq 0$

Dim $(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda \underbrace{(x+3y)}_{\geq 0}$

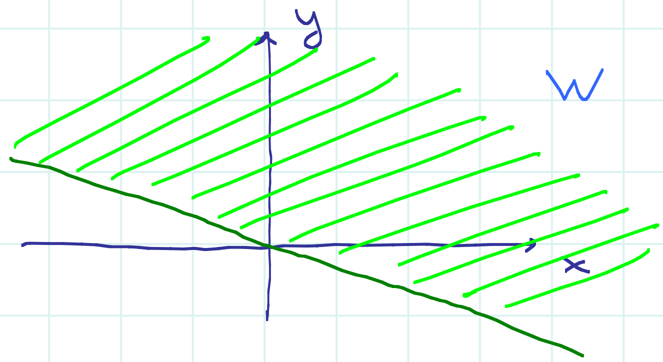
Se λ è ≥ 0, allora posso concludere

Se λ è < 0, sembra andare male

Allora BASTA UN ESEMPIO $(x,y) = (1,1) \in W$

$\lambda = -2$ $\lambda(x,y) = (-2,-2) \notin W$

Interpretazione geometrica



— o — o —