ANALISI 1 — LEZIONE 103

Note Title 04/04/2017

Teoremi di CESÀRO – STOLZ (aka Hôpital per successioni)

Caso $\frac{0}{0}$ Siano a_n e b_n due successioni.
Supponiamo che

(i) b_n strett. decrescente

(ii) $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$

Allora $b_n \neq 0$ definitivamente e

$$\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n}$$

$$\leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

DIM (Riciclo della dim 2 di Hôp. $\frac{0}{0}$)

Dimostro la disug di sx (tanto per cambiare). Indico con ℓ il liminf a sx. Suppongo $\ell \in \mathbb{R}$ (se fosse $-\infty$ è banale, se $\ell = +\infty$ è analogo ma andrebbe fatto).

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratt.

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \quad \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \geq \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Per avere un denom. positivo la scrivo come

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \geq \ell - \varepsilon \quad \text{da cui} \quad a_n - a_{n+1} \geq (\ell-\varepsilon)(b_n - b_{n+1})$$

Ora per ogni coppia di indici m ed n con

$$m > n \geq n_0$$

vale

$$a_n - a_m \underset{\substack{\uparrow\\ \text{telescopica}}}{=} \sum_{k=m}^{n-1} a_k - a_{k+1} \geq (\ell-\varepsilon) \overset{\substack{\text{telescopica}\\ \swarrow}}{\sum_{k=m}^{n-1}} b_k - b_{k+1}$$

$$= (\ell-\varepsilon)(b_n - b_m)$$

e quindi

$$\frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} \geq \frac{(\ell-\varepsilon)(b_n \cancel{- b_m})}{b_n \cancel{- b_m}} = \ell - \varepsilon$$

Facendo il lim per $m \to +\infty$ ottengo $\dfrac{a_n}{b_n} \geq \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ da cui passando al liminf ho la tesi.

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}, \text{ ma basta in realtà } \infty \text{ sotto}}$

Supponiamo a_n e b_n due successioni tali che
(i) b_n strett. crescente
(ii) $b_n \to +\infty$
Allora vale la solita tesi a 4.

Dim. (analoga a Hôpital $\frac{\infty}{\infty}$). Dimostriamo che

$$\ell = \liminf \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e per caratt.

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \geq \ell - \varepsilon$$

e quindi (posso ?) $\quad a_{n+1} - a_n \geq (\ell-\varepsilon)(b_{n+1} - b_n).$

Ora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{n_0} + a_{n_0}}{b_n}$$

e per $n > n_0$ ho come prima

$$a_n - a_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} - a_k \geq (l-\varepsilon) \sum_{k=n_0}^{n-1} b_{k+1} - b_k$$

$$= (l-\varepsilon)(b_n - b_{n_0})$$

sostituendo

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(l-\varepsilon)(b_n - b_{n_0}) + a_{n_0}}{b_n}$$

Passo al limite e poiché $b_n \to +\infty$ ottengo

$$\liminf \frac{a_n}{b_n} \geq l - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \ldots$$

—o — o —

<u>Teorema delle medie di Cesàro</u> Sia a_n una successione. Poniamo

$$M_n := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \text{media dei primi } n \text{ termini}$$

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf M_n \leq \limsup M_n \leq \limsup a_n.$$

In particolare: se $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, anche $M_n \to l$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $A_n := a_1 + \ldots + a_n$ e applico Cesaro-Stolz con A_n e $b_n = n$. Con queste scelte

$$\frac{A_n}{b_n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = M_n$$

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{a_{n+1}}{1}$$

(Occorre verificare che $b_n \overset{\text{monotonamente}}{\nearrow} +\infty$)

— o — o —

Oss. Ci sono casi in cui a_n non ha limite, ma M_n sì.

Esercizio Hard: Esiste una succ. che resiste a 2017 passaggi di Cesarizzazione senza avere limite, ma poi cede.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio rapporto} \to \text{radice}}$

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \dots \leq \dots$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $A_n = \log a_n \qquad B_n = n$

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\log a_n}{n} = \log \sqrt[n]{a_n} \; ;$$

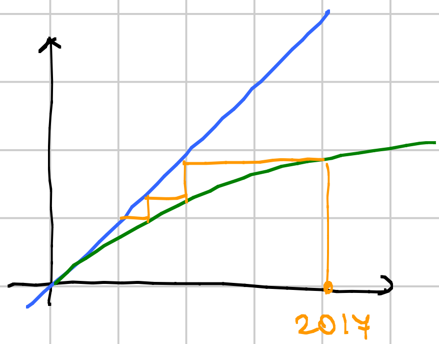
$$\frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \frac{\log a_{n+1} - \log a_n}{1} = \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

— o — o —

Esempio
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n!}{n} = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{n}}_{\text{media di Cesaro fatta su } a_n = \log n.} \to +\infty$$

Esempio
$$x_{n+1} = \arctan x_n$$
$$x_0 = 2017$$

$x_n \to 0$ con piano monotonia



Domandona: come x_n tende a 0. (col rapporto non viene)

Brutal mode: supponiamo $x_n = \frac{c}{n^a}$ per opportuni c ed a

Come trovo c ed a?

$$x_{n+1} = \arctan x_n, \quad \text{cioè} \quad \frac{c}{(n+1)^a} = \arctan \frac{c}{n^a} \sim \frac{c}{n^a} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{3a}}$$

$$\frac{1}{(n+1)^a} \sim \frac{1}{n^a} - \frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{3a}} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \qquad \frac{1}{1-x} = 1+x+\dots$$

$$\frac{n^a}{(n+1)^a} \sim 1 - \frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{2a}} \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \sim \frac{1}{1-\frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{2a}}}$$

$$\cancel{1}+\frac{a}{n} = \cancel{1}+\frac{1}{3}\frac{c^2}{n^{2a}} \rightsquigarrow a = \frac{1}{2} \rightsquigarrow c^2 = \frac{3}{2} \rightsquigarrow c = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Congettura: $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$ cioè $n \cdot x_n^2 \longrightarrow \frac{3}{2}$

Dim Uso Cesaro-Stolz con $b_n = n$ e $a_n = \frac{1}{x_n^2}$.

Allora

$$\frac{1}{n x_n^2} = \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \frac{a_n}{b_n} \qquad \text{Ma allora}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \frac{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}{1}$$

$$= \lim\left(\frac{1}{\arctan^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^2 \arctan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{2}{3}$$