ANALISI 1 - LEZIONE 042

Note Title 10/11/2016

MASSIMI E MINIMI (Globali)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione

Def. Si dice che

$$M = \max\{f(x) : x \in A\}$$

se

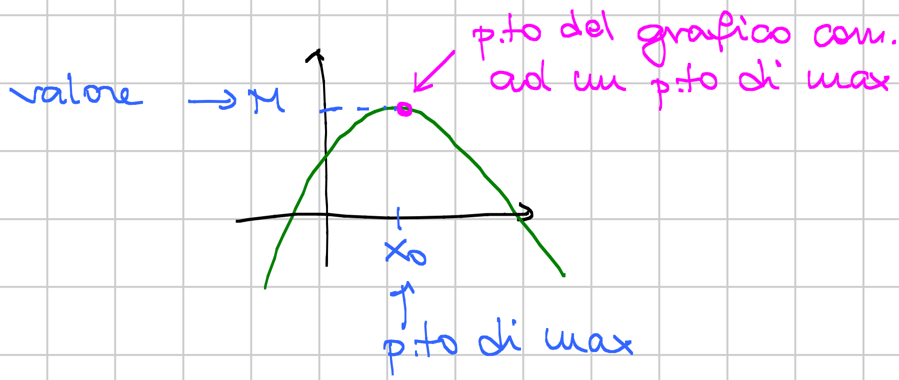
(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists\, x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = M$.

Tutti i punti x_0 per cui vale la (ii) si dicono p.ti di max.

Def. analoga vale per il minimo e i p.ti di min.

Achtung! Max e min sono VALORI assunti dalla funzione, cioè "delle y". Se esistono sono nec. unici.
I p.ti di max/min sono "delle x". Esistono se e solo se esistono max/min e non sono obbligati ad essere unici.

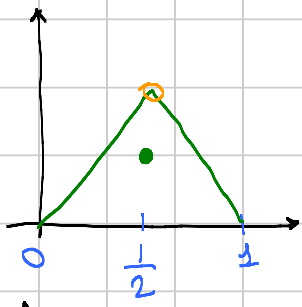


TEOREMA MISTERIOSO (WEIERSTRASS edulcorato)

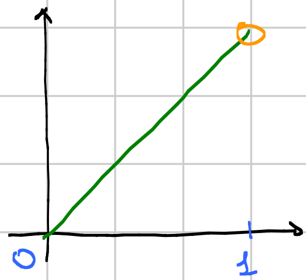
Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che f sia continua in $[a,b]$ ← (con gli ESTREMI)
Allora esistono per forza

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\},$$
$$\min\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

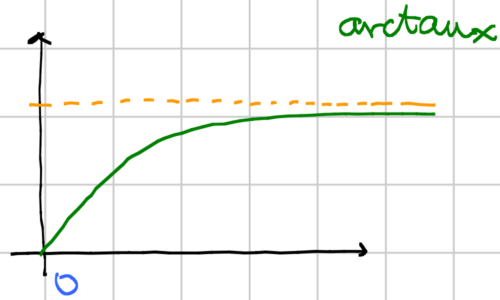
Oss. Le ipotesi servono davvero



manca la cont. in $\frac{1}{2}$ e non c'è il max



funzione definita solo in $[0,1)$ e manca il max



funzione definita in $[0,+\infty)$ e non esiste il max.

Esercizi (semihard)

① $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Possono mancare sia max, sia min?

② $f:(0,1] \to \mathbb{R}$ " " " " " " "

③ $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ continua tranne in $x=\frac{1}{2}$. Stessa domanda.

Oss. Ovviamente possono non essere verificate le ipotesi, ma valere lo stesso la tesi. Ad esempio

$$f:(0,10) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x$$

Tuttavia max e min esistono.

— o — o —

Ricerca dei punti di max / min

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora max / min esistono per W.

Domanda: come li trovo? Come determino p.ti max / min?

Risposta: i punti di max / min appartengono alle seguenti 3 categorie

① P.ti STAZIONARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)=0$

② P.ti SINGOLARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste

③ BORDO : p.ti $x=a$ e $x=b$.

Operativamente: data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ faccio l'elenco dei p.ti di tipo ①, ②, ③.
Fatto l'elenco, li sostituisco nella funzione: dove vale di + è il max, dove vale di − è il min.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Consideriamo un p.to x_0 di min. (analogo per il max)

- Se $x_0 \in \{a,b\}$, allora x_0 è di tipo 3.
- Se $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ non esiste, allora x_0 è di tipo 2.
- Se $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ esiste, allora per forza $f'(x_0) = 0$.

Infatti se fosse $f'(x_0) > 0$, allora $f(x) < f(x_0)$ un po' a sx di x_0 per monotonia 1; se fosse $f'(x_0) < 0$, allora $f(x) < f(x_0)$ un po' a dx di x_0. In entrambi i casi x_0 non sarebbe p.to di min.

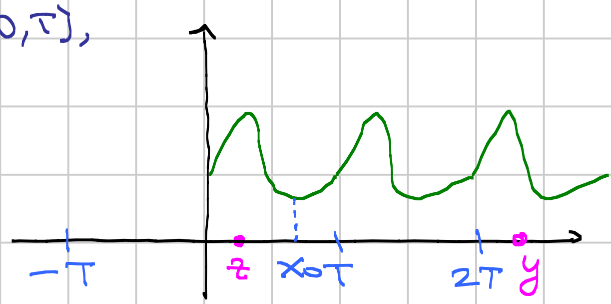
— o — o —

$\boxed{\text{VARIANTE 1 DI WEIERSTRASS}}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e PERIODICA.
Allora esistono per forza max e min.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $T > 0$ un periodo di $f(x)$. Dico che max/min in $[0,T]$ sono max/min su tutto $\mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in [0,T]$ p.to di min per $[0,T]$, cioè

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in [0,T].$$

Sia ora $y \in \mathbb{R}$ qualunque.
Per periodicità esiste $z \in [0,T]$ t.c. $y - z = kT$ per un qualche $k \in \mathbb{Z}$. Ora

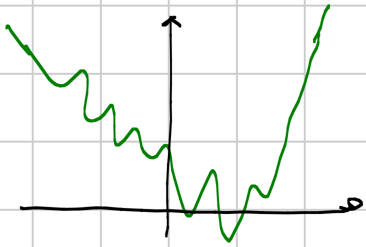


$$f(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per periodicità}}}{=} f(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } z \in [0,T].}}{\geq} f(x_0)$$

Oss. Anche i p.ti di min. si "ripetono periodicamente".

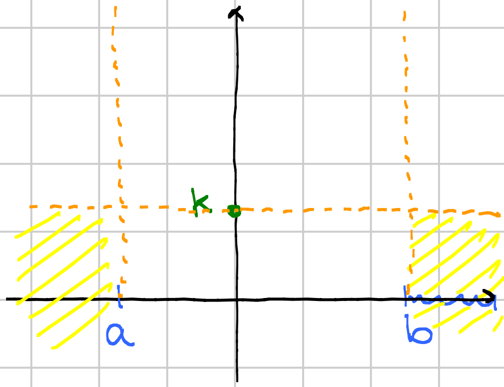
$\boxed{\text{WEIERSTRASS GENERALIZZATO}}$ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$



$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $k = f(0)$ (andava bene anche $k = f(2016)$)

Per definizione di limite per $x \to +\infty$ esiste b, che posso suppore $b > 0$ tale che

$$f(x) \geq k \qquad \forall x \geq b$$

Analogamente per il limite a $-\infty$ esiste a, che posso suppore $a < 0$, tale che

$$f(x) \geq k \qquad \forall x \leq a$$

Per W. esiste

$$M = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}.$$

Dico che M è anche minimo in generale, cioè su tutto $\mathbb{R}$.
Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero qualunque. Ci sono 3 casi

- Se $x \in [a, b]$, allora $f(x) \geq M$ per def. di M.
- Se $x \geq b$, allora

$$f(x) \underset{\text{def. di } b}{\geq} K = f(0) \underset{\text{perché } 0 \in [a,b]}{\geq} M$$

- Se $x \leq a$, allora stessa cosa.

— o — o —

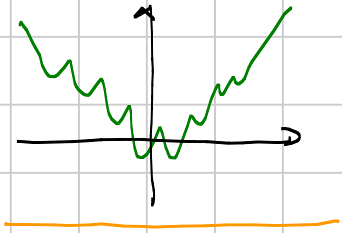
Oss. Se partivo con $k = f(2016)$ dovevo scegliere $a < 2016 < b$.

— o — o —

Esempio 1 $\quad f(x) = \cos h\, x - x^{217}$

$g(x) = \sin h\, x + \sin x$

Iniettività / surgettività di $f(x)$? Nessuno dei 2 !!



Basta osservare che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

In gen $\Rightarrow$ ha min $\Rightarrow$ non assume i valori sotto il min, ed assume i valori sopra almeno 2 volte

E per $g(x)$? Surgettività SI per i limiti a $\pm\infty$.

Iniettività : fare la derivata e usare monotonia 3.

— o — o —