2 Algoritmo di Gauss

2.1 Matrice a scalini

Utilizzando le proprietà (1), (2) e (3) viste sopra si ottiene un algoritmo per semplificare (E). In un primo momento si considera $b_1 = \ldots = b_n = 0$ e mettiamo i coefficienti in una matrice $n \times m$, $[a_{ij}]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{(Con operazioni)}} \begin{bmatrix} \ldots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} + a_{j2} + \lambda a_{i2} + \ldots + a_{jm} + \lambda a_{im} \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Le operazioni di prima si traducono come:

1. Scambiare due righe fra di loro.
2. Sostituire la riga R_j con la riga $R_j + \lambda R_i$.
3. Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$.

Partendo da una matrice l'algoritmo produce, utilizzando le 2 operazioni una matrice detta **a forma di scalini**.

Definizione 2.1.1 (Matrice a forma a scalini)**.** *Una matrice è a forma a scalini (per righe) se:*

- *Le righe* $(0, \ldots, 0)$ *sono "in fondo" alla matrice (partendo da sinistra).*
- *Il primo elemento di ogni riga (se esiste) è a destra del primo elemento diverso da 0 della riga precedente. Tale elemento si dice pivot.*

Definizione 2.1.2 (Pivot)**.** *Il primo elemento diverso a 0 d ogni riga di una matrice (nella forma a scalini) si chiama pivot.*

Esempio 2.1.1. Esempio di matrici in forma a scalini e non:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NO SI NO

Osservazione 2.1.1. Quando ci troviamo davanti ad una matrice a scalini possiamo avere due casi principali:

1. Se abbiamo che ogni colonna ha un **pivot**, notiamo che partendo dal basso avremo $a \cdot X_m = 0 \Rightarrow X_m = 0$. Quindi sostituendo nella riga precedente avremo che $b \cdot X_{m-1} + a \cdot X_m = 0 \Rightarrow X_{m-1} = 0$ e così via fino ad arrivare ad una **soluzione banale**, ovvero $(0, \ldots, 0)$.
2. Altrimenti per ogni colonna senza **pivot** avremo una variabile libera che dà ∞ soluzioni.

2.2 Algoritmo in un sistema omogeneo

Definizione 2.2.1 (Algoritmo di Gauss)**.** *Ogni matrice $n \times m$ si mette in forma a scalini (per righe) con operazioni del tipo 1 e 2.*

0. *Se la matrice è già in forma a scalini abbiamo finito.*
1. *Si cerca il primo elemento diverso da* 0 *della prima colonna diversa da* 0.
2. *Cambiando n righe si può supporre che questo elemento è il pivot della prima riga. Se siamo in forma a scalini abbiamo finito, altrimenti procediamo.*
3. *Si annullano tutti gli elementi della colonna del pivot sotto il pivot con operazioni del tipo (B). Se siamo in forma a scalini abbiamo finito, altrimenti procediamo.*
4. *Non consideriamo la prima riga e ricominciamo dal punto 1.*

Esempio 2.2.1. Prendiamo il seguente sistema di equazioni e scriviamolo su una matrice:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Da qui iniziamo ad applicare l'algoritmo

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo il passo (1) e troviamo 1 come pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo il passo (3) e calcoliamo $R_2 = R_2 - 3R_1$ e $R_3 = R_3 - R_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Applichiamo (4) e non consideriamo la riga R_1 per poi ripetere l'operazione (3) facendo $R_3 = R_3 - 3R_2$

Vediamo così che la matrice finale è in forma a scalini. Possiamo ora prendere i numeri nella matrice e andare a riscrivere il sistema di equazioni associato. Per il nostro esempio abbiamo:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + 5x_4 = 0 \end{array} \xLeftarrow{\text{(E la matrice)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

A questo punto se consideriamo $x_4 = t$ abbiamo che $x_3 = -5t$ e di conseguenza $2x_2 - 5t + t = 0$ e quindi $x_2 = 2t$ ed ancora abbiamo $x_1 = 2t - 3t - t$. Possiamo dunque dire che in questo esempio x_4 essendo una colonna senza pivot è una "variabile libera" e quindi ci sono più soluzioni.
Potrebbe esserci anche il caso in cui la colonna contenga un pivot e quinci ci sarebbe un unica soluzione.

2.3 Algoritmo in un sistema non omogeneo

Se consideriamo invece un sistema non omogeneo formato aggiungendo una colonna con $b_1, ..., b_n$, è possibile utilizzare ugualmente l'algoritmo di Gauss aggiungendo una colonna alla matrice.

Esempio 2.3.1. Prendiamo il seguente sistema di equazioni e mettiamolo su una matrice:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{Uso algoritmo}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \\ R_4 = R_4 - 2R_1 \end{array}$$

Il pivot è in R_1 ed è 1, da qui applichiamo (3) e poi (4).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

Il pivot ora è in R_3 e quindi applichiamo (2) per scambiare R_2 con R_3 e poi facciamo (3) con $R_4 = R_4 - R_2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

Usiamo (4) per eliminare R_2 e troviamo il pivot in R_3, applichiamo poi (4) con $R_4 = R_4 + R_4$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

Abbiamo finito perché il risultato è a scalini

Il risultato finale corrisponde al seguente sistema:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_2 - x_4 = -2 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ -5x_4 = -15 \end{array}$$

Se sostituiamo:
$x_4 = 4, x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 0$
Quindi abbiamo un sistema con un unica soluzione

Da questo esempio possiamo vedere una caratteristica comune per questa tipologia di esercizi, cioè che il sistema di equazione ha un unica soluzione se ogni colonna contiene un pivot.

Esempio 2.3.2. Altro esempio di sistema di applicazione dell'algoritmo di gauss.

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -10 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 5R_1 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{bmatrix} R_3 = R_3 + 8R_2$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Questa è una matrice in forma a scalini e la sua trasposizione in sistema di equazione è: $$\begin{matrix} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix}$$

Abbiamo quindi che x_3 è una variabile libera e quindi se poniamo $x_3 = t$ abbiamo $x_2 = 2t$ e $x_1 = 1+2t$. Soluzione particolare: (1,0,0). Soluzione generale: $(1 + 2t, 2t, t)$. Sol. Omogenea: $(2t, 2t, t)$.

Da questo esempio vediamo invece che se c'è una colonna senza pivot all'ora esiste almeno una variabile libera e quindi ci sono ∞ soluzioni.

Esempio 2.3.3. Facciamo un ultimo esempio per vedere un ulteriore casistica per l'algoritmo di gauss.

$$\begin{matrix} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 9x_3 = 7 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 3R_1 \\ R_3 = R_3 - 4R_1 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} R_3 = R_3 - 5R_2$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$ Questa è una matrice in forma a scalini e la sua trasposizione in sistema di equazione è: $$\begin{matrix} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -60 = 25 \end{matrix}$$

Possiamo notare che l'equazione $0 = 25$ non ha senso quindi non c'è nessuna soluzione.

Anche in questo caso possiamo estendere l'esempio in un caso generale dicendo che se c'è un pivot nell'ultima colonna allora non esistono soluzioni particolari (il sistema omogeneo però ammette ∞ soluzioni).
In sintesi possiamo riassumere i 3 casi visti in questi esempi come di seguito:

- Ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot $\iff$ unica soluzione.
- C'è un pivot nell'ultima colonna $\iff \nexists$ soluzione.
- C'è una colonna "non aggiunta" senza pivot e l'ultima colonna non ne ha $\iff \infty$ soluzioni.

2.4 Algoritmo di Gauss-Jordan

Questo algoritmo estende l'algoritmo di Gauss producendo una matrice ridotta a scalini.

Definizione 2.4.1 (Matrice ridotta)**.** *Una matrice è in forma* ***ridotta*** *a scalini se:*

- *E' in forma a scalini.*
- *Ogni pivot è uguale a 1.*
- *Ogni pivot è l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna.*

Esempio 2.4.1. Esempio di matrici in forma a scalini ridotta e non.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SI, è in forma a scalini ridotta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NO, questa è in forma scalini ma non ridotta.

Definizione 2.4.2 (Algoritmo di Gauss-Jordan)**.** *L'algoritmo sfrutta le 2 operazioni viste per l'algoritmo di gauss (A) e (B) ma aggiungendo anche l'operazione (C). Questo algoritmo, partendo da una matrice a scalini genera una matrice ridotta a scalini.*

1. *Con l'algoritmo di Gauss portiamo la matrice in forma a scalini.*
2. *In ogni riga si cerca il pivot (se esiste). Se il pivot è $\lambda \neq 1$, moltiplicare la riga per $\frac{1}{\lambda}$ (operazione (C)).*
3. *Nella colonna dei pivot gli elementi sotto (e nella riga a sinistra) sono già uguali a 0. Annullare gli elementi sopra della colonna con operazioni del tipo (B).*
   Questa operazione non cambia gli altri pivot perché sono o a sinistra o sotto.

Esempio 2.4.2. Proviamo ad applicare l'algoritmo di gauss-jordan con il seguente sistema di euqzioni

$$\begin{matrix} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{matrix} \implies \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Per semplificare la matrice usiamo l'operazione (C) e moltiplichiamo una riga per una costante: $R_2 = 2R_2$, $R_4 = 2R_4$

$\Rightarrow$ Applichiamo l'algoritmo di gauss

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 10 & -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 3R_1 \\ R_3 = R_3 - 2R_1 \\ R_4 = R_4 - 5R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 = R_3 + 5R_2 \\ R_4 = R_4 + 9R_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 = \frac{1}{8}R_3 \\ R_4 = R_4 - \frac{18}{8}R_3 \end{matrix}$$

La matrice è in forma scalini quindi applichiamo il punto (2) dell'algoritmo di guass-jordan

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 = R_1 + 2R_3 \\ R_2 = R_2 - R_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = \frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{matrix}$$

Esempio 2.4.3. Vediamo ora un secondo esempio di questo algoritmo.

$$\begin{matrix} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 9x_4 = 3 \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 9 & 8 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso semplifichiamo la seconda riga con un operazione (C) $R_2 = 2R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 6 & -12 & 2 & 18 & 16 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = R_2 - 3R_1 \\ R_3 = R_3 - 2R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 = -\frac{1}{7}R_2 \\ R_3 = -R_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} R_3 = R_3 + R_2 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = R_1 - 3R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 = \frac{1}{2}R_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 = s & x_1 = 3 + 2s - 4t \\ x_4 = t & x_3 = -1 + 3t \end{matrix}$$