A.A. 2024/2025
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 – LEZIONE 01

Note Title 27/09/2024

① Preliminari
② Limiti
③ Calcolo Diff.
④ Calcolo Integrale

Preliminari: → logica elementare, insiemi, funzioni
→ principio di induzione
→ numeri reali, inf., sup
→ funzioni elementari

LOGICA ELEMENTARE

Proposizione: frase che può essere vera o falsa

Esempi: oggi è venerdì V
Qui funziona tutto F
$7 \geq 12$ F

Predicato: frase che contiene al suo interno uno o più parametri, e a seconda del valore dei parametri può essere vera o falsa

Esempi: Noi siamo nell' aula $\boxed{X}$ ↖ parametro

Vera se $X = F8$, falsa se $X = F5$

Lo studente $\boxed{X}$ passa l' esame $\boxed{Y}$

$x^2 \geq 32$

$\boxed{\text{Quantificatori}}$ $\boxed{\forall}$ per ogni $\boxed{\exists}$ esiste ALMENO un

$x^2 \geq 32$

$\exists\, x \in \mathbb{N}$ t.c. $x^2 \geq 32$ V (ad esempio $x = 10$)

$\forall\, x \in \mathbb{N}$ $x^2 \geq 32$ F (ad esempio $x = 5$)

$\boxed{\text{Negazione}}$ Negare una proposizione vuol dire "affermare il suo contrario"

Esempi Siamo in F8 Non siamo in F8

$7 \geq 12$ $7 < 12$

Oss. O una proposizione è vera, o la sua negata è vera. Non possono essere entrambe vere o entrambe false.

Qui funziona tutto $\rightsquigarrow$ Qui esiste almeno una cosa che non funziona

Tutte le pecore sono bianche $\rightsquigarrow$ Esiste almeno una pecora non bianca

Tutti gli studenti sono bocciati $\rightsquigarrow$ Almeno uno studente viene promosso

$\forall x \quad x^2 \geq 32 \quad \rightsquigarrow \quad \exists\, x$ t.c. $x^2 < 32$

La negazione di $\forall x\ \underbrace{P(x)}_{\text{predicato con } x \text{ come parametro}}$ è $\exists\, x$ t.c. NON $P(x)$

La neg. di $\exists\, x$ t.c. $P(x)$ è $\forall x$ NON $P(x)$

Esempio con due parametri

S = insieme di studenti
B = insieme di birre

$P(s,b)$ = Allo studente s piace la birra b

$\forall s \in S \ \exists b \in B \quad P(s,b)$ "ogni studente ha almeno una birra che gli piace"

$\exists s \in S \ \forall b \in B \quad P(s,b)$ "esiste almeno uno studente a cui piacciono tutte le birre"

$\forall b \in B \ \exists s \in S \quad P(s,b)$ "ogni birra piace ad almeno uno studente"

$\exists b \in B \ \forall s \in S \quad \text{NON } P(s,b)$ negazione della precedente "esiste almeno una birra che non piace a nessuno"

$\boxed{\text{Implicazione}}$ $P \Rightarrow Q$

Se P è vera, allora Q è vera
Se P è falsa, allora BOH

Dire $P \Rightarrow Q$ è la stessa cosa che dire $\text{NON } Q \Rightarrow \text{NON } P$

Se Q è falsa, allora P è falsa

Esempi $\quad 7 > 12 \Rightarrow 7 > 32 \quad$ SI!

Se la premessa è falsa, l'implicazione è GRATIS!!

$\forall x \in \mathbb{N} \quad x > 3 \Rightarrow x^2 \geq 7 \quad$ SI

— o — o —

ANALISI MATEMATICA I – LEZIONE 001

Titolo nota 26/09/2012

$\boxed{\text{INSIEMI}}$ Che cos'è un insieme? Non ve lo dico formalmente.

Come si presenta un insieme:

* PER ELENCO $\quad A = \{3, 7, 12, a, \star, \square\}$

    Oss. 1: l'ordine non è importante

    Oss. 2: gli elementi ripetuti contano una sola volta

    $A = \{3, 12, \star, \square, a, 7\} = \{12, 3, \star, \star, \square, a, 7, \square, \square\}$

* PER PROPRIETÀ $\quad A = \{$studenti che stanno seguendo questa lezione$\}$

$\boxed{\text{NOTAZIONI}}$ $\quad \underset{\text{elemento}}{a} \in \underset{\text{insieme}}{A} \quad (A \ni a) \quad$ "a appartiene ad A"

$a \notin A \quad (A \not\ni a) \quad$ "a NON appartiene ad A"

$\underset{\text{insiemi}}{A \subseteq B} \quad (B \supseteq A) \quad$ "A è sottoinsieme di B" oppure "A è contenuto in B"

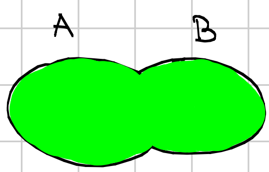
Ogni elemento di A è anche elemento di B

$\emptyset$: insieme vuoto : non contiene nessun elemento

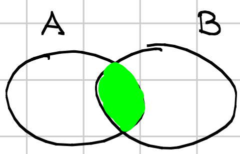
$\boxed{\text{OPERAZIONI}}$ $\quad A \cup B \quad$ unione

$A \cap B \quad$ intersezione

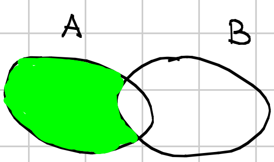
$A \setminus B \quad$ differenza



$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$

x tali che $x \in A$ $\boxed{\text{oppure}}$ $x \in B$ (OR, VEL, $\vee$)

x tali che $x \in A$ $\boxed{\text{e}}$ $x \in B$ ($\wedge$ (AND))

x tali che $x \in A$ e $x \notin B$

Esempi $A = \{2, 7, \square, \star, 19\}$
$B = \{$ interi positivi dispari $\}$

$2 \in A \cup B$ Vero

$2 \in A \cap B$ Falso

$2 \in A \setminus B$ Vero

$19 \in A \cap B$ Vero

$A \cap B \subseteq A$ Vero

$2 \subseteq A$ Falsa (a dx e sx dovrebbero esserci insiemi)

$2 \in A$ Vera

$\{2\} \subseteq A$ Vera

$\{2\} \in A$ Falsa

$\emptyset \subseteq A$ Vera

$\emptyset \in A$ Falsa

Achtung! $2012 \geq 37$ Vera
$2012 \geq 2012$ Vera

Analogamente: $A \supseteq B$ ammette come possibilità sia che $A = B$ ma anche che B sia più piccolo di A

$\boxed{\text{PRODOTTO CARTESIANO}}$ Dati due insiemi A e B, si definisce il loro prod. cartesiano $A \times B$ come l'insieme delle coppie (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$

Esempio $A = \{1, d\}$ $B = \{2, \square, f\}$

$$A \times B = \{(1,2), (1,\square), (1,f), (d,2), (d,\square), (d,f)\}$$

Osservazione Nelle coppie l'ordine è importante!!!

$$A \times A = \{(1,1), (1,d), (d,1), (d,d)\}$$

sono diversi !!!

Se A ha a elementi e B ha b elementi, allora $A \times B$ ha ab elementi.

$\boxed{\text{NOTAZIONE}}$ Si indica con $|A|$ la cardinalità dell'insieme A, cioè il numero di elementi di A.

Quindi $$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

— o — o —

$\boxed{\text{INSIEME DELLE PARTI}}$

Dato un insieme A, si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, cioè

$$\mathcal{P}(A) = \{\text{insiemi } B \underset{\text{tale che}}{:} B \subseteq A\}$$

Esempi $A = \{1, d\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{d\}, \{1, d\}\}$

$B = \{2, \star, £\}$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{\star\}, \{£\}, \{2,\star\}, \{2,£\}, \{\star,£\}, \{2,\star,£\}\}$

Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$? Sono

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Perché? Per ogni elemento di A io posso decidere ↗ SI ↘ NO

Nel costruire un sottoinsieme di A, per ogni el. di A decido se metterlo o no nel sottoinsieme ... Le scelte sono $2^{|A|}$

— o — o —

Esercizio (Hard) Calcolare $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))|$

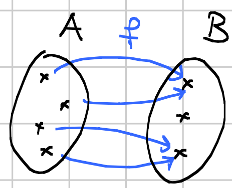
ANALISI MATEMATICA – LEZIONE 002

Titolo nota 26/09/2012

FUNZIONI Cos'è una funzione? Non ve lo dico.

Operativamente una funzione sono 3 cose:

1) Un insieme di partenza A,
2) " " " arrivo B,
3) Una serie di regole che ad ogni elemento $a \in A$ associa un $\boxed{\text{unico}}$ elemento $f(a) \in B$



Come si presenta: $f : A \to B$

A ↑ insieme partenza; B ↑ insieme arrivo

Grafico di una funzione

Grafico di f: $\{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$

Oss. Il grafico di una funzione è un sottoinsieme del prodotto cart. $A \times B$

Funzioni INIETTIVE e SURGETTIVE Sia $f : A \to B$ una funzione

- Si dice che f è INIETTIVA se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B. "Formalmente"

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

oppure, che è lo stesso, se

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

Brutalmente: frecce che partono da p.ti diversi arrivano in p.ti diversi

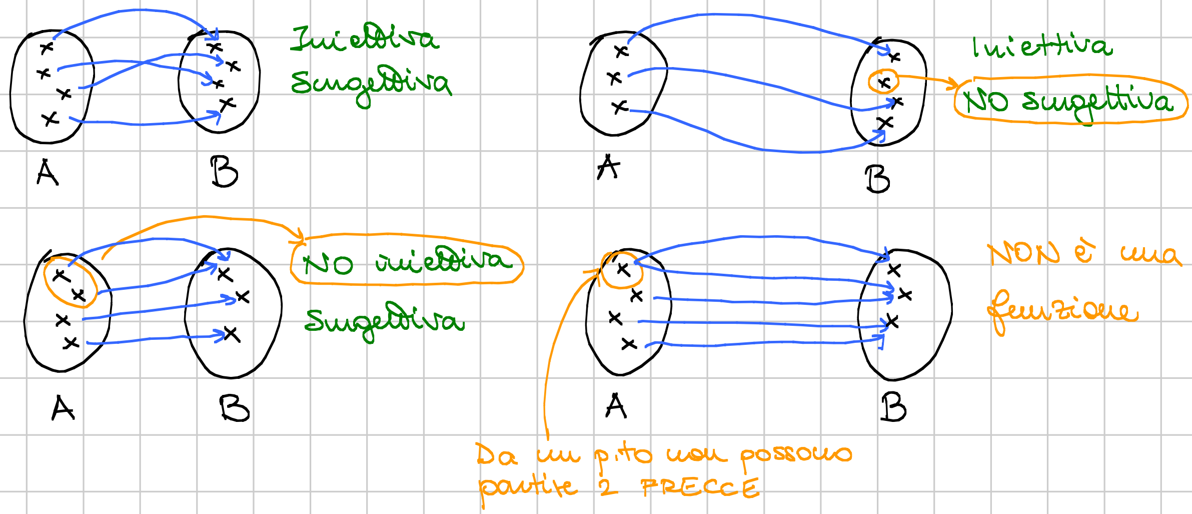
- Si dice che f è SURGETTIVA se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A. Formalmente

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad : \quad b = f(a)$$

$\forall$ ↑ per ogni; $\exists$ ↑ esiste almeno un; $:$ ↑ tale che

Brutalmente: ogni p.to in arrivo è raggiunto da almeno una freccia.

Esempi



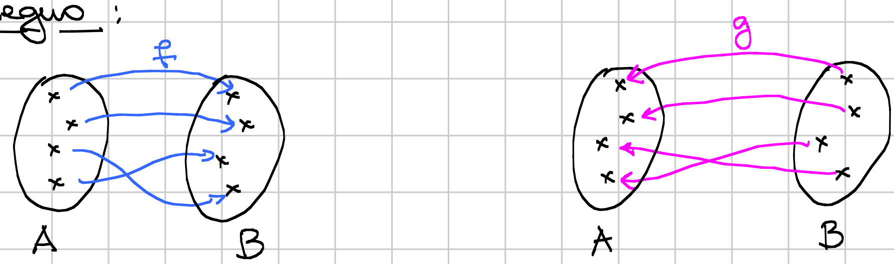
- Si dice che f è BIGETTIVA se è sia INIETTIVA sia SURGETTIVA

Teorema / definizione Una funzione $f: A \to B$ è bigettiva se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione $g: B \to A$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B. \end{array}}$$

Brutalmente: la funzione g, detta inversa di f, è la funzione che "torna indietro" rispetto alle frecce di f.

Disegno:



$g(f(a)) = a$ $\forall a \in A$: parto da a, seguo f, poi seguo g, e torno in a

$f(g(b)) = b$ $\forall b \in B$: parto da B, seguo g, poi seguo f, e torno in b

È sempre garantito che esiste la g? NO!

Posso farlo se e solo se in ogni p.to di B arriva una ed una sola freccia in partenza di A.

Questo accade se e solo se f è iniettiva e surgettiva.

Altra interpretazione:

- f è iniettiva se e solo se in ogni $b \in B$ arrivano 0 o 1 freccia
- f è surgettiva " " " " 1 o più frecce

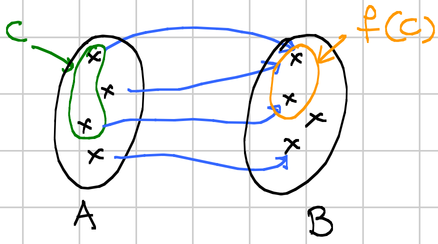
Quindi

f è bigettiva " " " 1 e 1 sola freccia, che dunque posso invertire.

—o—o—

$\boxed{\text{IMMAGINE E CONTROIMMAGINE}}$ Sia $f: A \to B$ una funzione.

Sia $C \subseteq A$ un sottoinsieme.



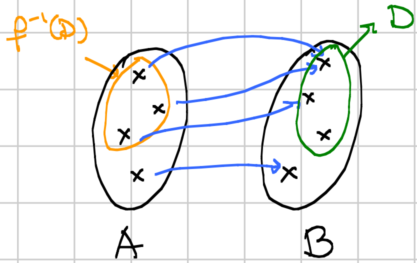
Si dice <u>immagine</u> di C l'insieme dei p.ti di B raggiunti da frecce che partono da elementi di C:

$$f(C) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$$

In particolare si dice <u>immagine</u> di A l'insieme

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \} = \text{tutti gli el. di } B \text{ raggiunti}$$

PER ELENCO



Sia $D \subseteq B$ un sottoinsieme. Si dice <u>controimmagine</u> di D l'insieme di tutti i p.ti di A da cui partono frecce che arrivano in D. Formalmente

$$\underbrace{f^{-1}(D)}_{\text{controimmagine di } D} = \{ a \in A : f(a) \in D \}$$ ← PER PROPRIETÀ

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ f è surgettiva se e solo se $f(A) = B$, cioè ogni p.to di B è raggiunto da frecce

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Per definire $f^{-1}(D)$ non serve che f sia invertibile

ANALISI 1 — LEZIONE 004

Note Title 28/09/2024

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(n)$ un predicato che dipende da un parametro $n \in \mathbb{N}$
$(\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \})$

lo zero è naturale

Supponiamo che

(i) $P(0)$ è vera (se sostituisco $n=0$ viene qualcosa di vero)

(ii) Se $P(n)$ è vera per un certo n, allora anche $P(n+1)$ è vera $[\ \forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)\ ]$

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Perché moralmente funziona:

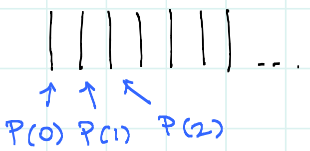
→ $P(0)$ è vera per la (i)

→ Visto che $P(0)$ è vera, per la (ii) con $n=0$ anche $P(1)$ è vera

→ " " $P(1)$ " " $n=1$ anche $P(2)$ è vera

e così via.

Interpretazione intuitiva: pensiamo a tanti mattoncini messi in modo da cascare uno di fila all'altro



(i) è come dire che $P(0)$ casca

(ii) è come dire che c'è il meccanismo di caduta

Nomenclatura: (i) si chiama "PASSO BASE"

(ii) si chiama "PASSO INDUTTIVO"

Variante: supponiamo che

(i) $P(42)$ è vera

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per ogni $n \geq 42$ $(n \geq 30)$

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 42$

Se la (ii) fosse stata con $n \geq 30$ la conclusione era comunque solo per $n \geq 42$.

Esempio 1 $$\boxed{0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}} \quad P(n)$$

Passo base: $n=0$ sostituisco $0=0$ vera :)

Passo induttivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Ipotesi: $0+1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Tesi: $0+1+2+\ldots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ ← Ho scritto $P(n)$ con $n+1$ al posto di n

Dimostro la tesi a partire dall'ipotesi

$$\underbrace{0+1+2+\ldots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) \underset{\text{Uso ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \underset{\text{Spero !!}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Controllo la speranza:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right] = (n+1)\frac{n+2}{2} \quad :)$$

Notazione $$0+1+2+\ldots+n = \sum_{k=0}^{n} k$$

sommatoria

Come farsi venire in mente la formula? In questo caso c'è il trucco di Gauss!

Sommiamo i numeri da 1 a 100:

$$\boxed{0} + \boxed{1} + \boxed{2} + \dots + 99 + 100 = S$$
$$\boxed{100} + \boxed{99} + \boxed{98} + \dots + 1 + 0 = S$$

Sommiamo le 2 righe

$$\underbrace{100 + 100 + 100 + \dots + 100 + 100}_{101 \cdot 100} \qquad 2S$$

$$2S = 100 \cdot 101 \quad \leadsto \quad S = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

:)

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\| $

$0 + 1 + 4 + 9 + \dots$

Ma sarà vera?

$\boxed{n=0}$ $\quad 0 = 0$:)

$\boxed{n=1}$ $\quad 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$:)

$\boxed{n=2}$ $\quad 0 + 1 + 4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}$:)

$\boxed{n=3}$ $\quad 0 + 1 + 4 + 9 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6}$:)

Proviamo per induzione

Passo base $\quad n = 0$: già fatto

Passo induttivo $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Ipotesi: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesi: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Dimostro la tesi usando l'ipotesi

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

isolo l'ultimo termine

spero $\quad \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Controllo la speranza:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)\,\frac{2n^2+n+6n+6}{6}$$

$$= (n+1)\,\frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

Esempio 3 Sia a un numero reale, con $a \neq 1$.
Allora

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

[Somma di una progressione geometrica]

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\ldots+a^n$$

$\boxed{\text{Passo base}}$ $n=0$ $\quad 1 = \dfrac{a-1}{a-1}$ ☺

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Saltati i convenevoli...

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k \underset{\substack{\uparrow\\ \text{isolo}\\ \text{ultimo termine}}}{=} \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{uso}\\ \text{ipotesi}}}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{percorso}}}{=} \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

Casi particolari $\boxed{n=1}$ $\quad 1+a = \dfrac{a^2-1}{a-1} \rightsquigarrow a^2-1 = (a+1)(a-1)$

$\boxed{n=2}$ $\quad 1+a+a^2 = \dfrac{a^3-1}{a-1} \rightsquigarrow a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1)$

$\boxed{n=3}$ $\quad 1+a+a^2+a^3 = \dfrac{a^4-1}{a-1} \rightsquigarrow a^4-1 = (a-1)(a^3+a^2+a+1)$ ...

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 005

Note Title 28/09/2024

Esempio 1 Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $2^n \geq n^2$

Esplorazione:

$n=0$	$2^0 \overset{?}{\geq} 0^2$	☺	
$n=1$	$2^1 \geq 1^2$	☺	
$n=2$	$2^2 \geq 2^2$	☺	
$n=3$	$2^3 \geq 3^2$	NO!	
$n=4$	$2^4 \geq 4^2$	$16 \geq 16$	Ok!
$n=5$	$2^5 \geq 5^2$	$32 \geq 25$	ok
$n=6$	$2^6 \geq 6^2$	$64 \geq 36$	ok

Sembra che più si va avanti e più diventa abbondante

Idea: $2^n \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 3$

I casi $n = 0, 1, 2, 3, 4$ si fanno a mano, e da 4 in poi si spera di usare l'induzione

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Ipotesi: $2^n \geq n^2$ Tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Dimostro la tesi a partire dall'ipotesi

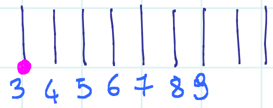
$$2^{n+1} \underset{\text{precorso}}{=} 2 \cdot 2^n \underset{\substack{\text{ipotesi molt.}\\ \text{per } 2}}{\geq} 2 \cdot n^2 \underset{\text{spero}}{\geq} (n+1)^2$$

Controllo la speranza:

$$2n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$
$$2n^2 \overset{?}{\geq} n^2+2n+1$$
$$n^2-2n \overset{?}{\geq} 1$$
$$n(n-2) \overset{?}{\geq} 1$$

e questa è vera per lo meno da 3 in poi

Oss. Nell'esempio precedente il meccanismo di caduta vale per lo meno da $n = 3$ in poi



Però il mattone con $n = 3$ non casca

Oss. Nell'esempio abbiamo usato una CATENA DI DISUGUAGLIANZE

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \dots \geq A_{2024} \leadsto A_1 \geq A_{2024}$$

(devono essere tutte dalla stessa parte)

DISUGLIANZA DI BERNOULLI (Esempio 2)

Sia $\boxed{x > -1}$ un numero reale. Allora

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Esplorazione:

$n = 0 \leadsto 1 \geq 1$ ok

$n = 1 \leadsto 1 + x \geq 1 + x$ ok

$n = 2 \leadsto 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$ ok

Dimostriamo per induzione

Passo base: $n = 0 \leadsto$ vedi sopra

Passo induttivo Hp: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Th: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

Strategia: costruire una catena di disuguaglianze che parte con $(1+x)^{n+1}$ e finisce con $1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} \underset{\text{precorso}}{=} (1+x)\cdot(1+x)^n$$

$$\underset{\substack{\text{ipotesi molt.}\\ \text{per } (1+x)}}{\geq} (1+x)\cdot(1+nx)$$

precorso

$$= 1 + nx + x + nx^2$$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$

si usa che $nx^2 \geq 0$

<u>Oss.</u> Dove ho usato che $x > -1$??

L'ipotesi era $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Ad un certo punto ho moltiplicato per $(1+x)$ conservando il verso della disuguaglianza. Questo si può fare solo se moltiplico per roba > 0, altrimenti il verso gira.
Quindi mi serve $1 + x > 0$, cioè $x > -1$.

Fatto generale: se $A \geq B$ e $C > 0$, allora $AC \geq BC$
se $C < 0$, allora $AC \leq BC$
[$3 \geq 2$ se moltiplico per -4 ottengo $-12 \leq -8$]

<u>Esempio 3</u>

$$\underset{\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)}{\underset{\shortparallel}{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}} = \frac{\cos(x/2) - \cos[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)},$$

$\boxed{\text{Passo base}}$ $n = 0$ $\rightsquigarrow$ $\sin(0 \cdot x) = \dfrac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}$ ☺

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ Saltati i soliti convenevoli, impostiamo la catena di uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) + \sin((n+1)x)$$

$$\underset{\text{uso ipotesi}}{=} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \sin((n+1)x)$$

$$\underset{\text{speranza}}{=} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Controllo la speranza:

$$\frac{\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n+1)x)}{2\sin\cancel{\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$\overset{?}{=} \frac{\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\cancel{\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Ora basta osservare che si riduce a

[corretto dopo video]

$$\cos\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n+1)x)$$

e usare le formule di addizione per il coseno...

— o — o —

Esempio 4 Dire quando è vero che $n! \geq 2^n$

Nota: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ = FATTORIALE DI n se $n \geq 1$

$0! = 1$ per definizione

Esplorazione	$n=0$	$0! \geq 2^0$	ok	
	$n=1$	$1! \geq 2^1$	NO	
	$n=2$	$2! \geq 2^2$	NO	
	$n=3$	$3! \geq 2^3$	$6 \geq 8$	NO

$n=4 \qquad 4! \geq 2^4 \qquad 24 \geq 16 \quad$ ok

$n=5 \qquad 5! \geq 2^5 \qquad 120 \geq 32 \quad$ ok

e sembra diventare abbondante

Dimostro per induzione per $n \geq 4$

<u>Passo base</u> $n=4$ già fatto

<u>Passo induttivo</u> Hp $n! \geq 2^n$

Tesi $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

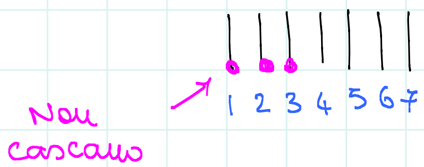
Solita catena
$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$$
$$\geq (n+1)\cdot 2^n$$
uso ipotesi
molt. per $(n+1)$,
che è di sicuro >0
$$\geq 2^{n+1}$$
speranza

Mi resta da controllare che $(n+1)\cdot 2^n \overset{?}{\geq} 2^{n+1}$

cioè $(n+1)\cdot \cancel{2^n} \overset{?}{\geq} 2\cdot \cancel{2^n}$

cioè $n \geq 1$

<u>Oss.</u> Il meccanismo di caduta funziona da 1 in poi, ma la prima che casca è $n=4$



ANALISI 1 – LEZIONE 006

Note Title 28/09/2024

Esempio 1 Per quali $n \in \mathbb{N}$ vale che $5^n \geq 3^n + 4^n$

Esplorazione. $n=0$ $1 \geq 2$ NO

$n=1$ $5 \geq 3+4$ NO

$n=2$ $25 \geq 9+16$ Ok

$n=3$ $125 \geq 27+64$ Ok

Idea è che vale per ogni $n \geq 2$

Passo base $n=2$ appena fatto

Passo induttivo Ipotesi: $5^n \geq 3^n + 4^n$

Tesi : $5^{n+1} \geq 3^{n+1} + 4^{n+1}$

Impostiamo la catena:

$$5^{n+1} \underset{\text{precorso}}{=} 5 \cdot 5^n \underset{\substack{\text{ipotesi} \\ \text{per } 5}}{\geq} 5(3^n + 4^n) \underset{\text{precorso}}{=} 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n$$

$$\geq 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n \underset{\text{propr. potenze}}{=} 3^{n+1} + 4^{n+1}$$

Esempio 2 Dimostrare che $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$ per ogni intero $n \geq 37$.

$n = 37$ come passo base conduce a numeri enormi.

Idea: non è che la cosa è vera già un po' prima di 37...

$n=1 \rightsquigarrow 2! \geq 2^1 \cdot 1^2$ Ok

$n=2 \rightsquigarrow 4! \geq 2^2 \cdot (2!)^2 \rightsquigarrow 24 \geq 2^2 \cdot 2^2$ Ok

$n=3 \rightsquigarrow 6! \geq 2^3 (3!)^2 \rightsquigarrow 720 \geq 8 \cdot 36$ Ok

Spero di riuscire a dimostrare che è vera per $n \geq 1$ e anzi per $n \geq 0$

e quindi anche per $n \geq 37$.

Passo induttivo Ipotesi: $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$

Tesi: $(2n+2)! \geq 2^{n+1} ((n+1)!)^2$

Impostiamo la catena di disuguaglianze

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$$

solo ultimi 2 fattori

$$\geq (2n+2)(2n+1) \cdot 2^n (n!)^2$$

ipotesi molt. per quello che serve

$$\geq 2^{n+1} ((n+1)!)^2$$

speranza

Controllo la speranza

$$(2n+2)(2n+1) \cdot 2^n \cdot (n!)^2 \overset{?}{\geq} 2^{n+1} ((n+1)!)^2$$

$$(2n+2)(2n+1) \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{(n!)^2} \overset{?}{\geq} 2 \cdot \cancel{2^n} \cdot (n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}$$

$2(n+1)(n+1)$

$$\cancel{(2n+2)}(2n+1) \overset{?}{\geq} \cancel{(2n+2)}(n+1)$$

$$2n+1 \overset{?}{\geq} n+1$$ e questo è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$

Riassunto: il meccanismo di caduta funziona sempre e per $n=0$ già casca $\rightsquigarrow$ vera per ogni $n \geq 0$.

Esempio 3 Dimostrare che

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 \qquad \forall n \geq 1$$

Passo base $n = 1 \rightsquigarrow 1 < 2$ Ok

Passo induttivo Ipotesi. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

Tesi: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} < 2$

Dim. isolo $k = n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$< \frac{1}{(n+1)^2} + 2 \leq 2$$

uso ipotesi — speranza

[Fatto generale: nella catena $A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_{2024}$, basta che una disug. sia stretta e possiamo concludere che $A_1 < A_{2024}$]

Purtroppo la speranza fallisce miseramente

Bisogna farsi venire un'idea, che in questo caso è dim. che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

in apparenza è più difficile da dimostrare perché il RHS è più piccolo

[LHS = left hand side RHS = right hand side]

In realtà

Passo base $n = 1 \rightsquigarrow 1 < 2 - \frac{1}{2}$ Ok!

Passo induttivo Ipotesi: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$

Tesi: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n+2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{(isolo } k=n+1\text{)}$$

$$< \frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(uso ipotesi)}$$

$$= 2 + \frac{1-n-1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{n}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{(n+2)}$$

speranza

Controllo la speranza:

molt. per −1
e inverto

$$\cancel{2} - \frac{n}{(n+1)^2} \overset{?}{<} \cancel{2} - \frac{1}{(n+2)} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{n}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+2)}$$

$$\rightsquigarrow \quad n(n+2) \overset{?}{>} (n+1)^2 \quad \rightsquigarrow \quad n^2+2n > n^2+2n+1 \quad ☹$$

C'eravamo quasi, accidenti! Devo spingere ancora di più:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad (<2)$$

Passo base : $1 \leq 1$ giusto giusto!

Passo induttivo ...

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1}$$

Nuova speranza: $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} - \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$n\cancel{(n+1)} \overset{?}{\leq} (n+1)^{\cancel{2}} \qquad n \overset{?}{\leq} n+1 \qquad \text{ok!}$$

— o — o —

Idea per farsi venire in mente la tesi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots$$

$$< 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots$$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 007

Note Title 03/10/2024

FATTORIALI, BINOMIALI, BINOMIO DI NEWTON

Versione BABY:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$\vdots$$
$$(a+b)^{2024} = a^{2024} + \dots a^{2023}b + \dots a^{2022}b^2 + \dots$$

Domanda: come trovo i coefficienti?

Risposta BABY: mediante il triangolo di TARTAGLIA

1	$(a+b)^0 = 1$
1 1	$(a+b)^1 = a+b$
1 2 1	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
1 4 6 4 1	...
1 5 10 10 5 1	

Due regole:
→ ai lati ci sono degli 1
→ ogni numero è la somma dei due che gli stanno sopra

Problema: se voglio sapere in $(a+b)^{2024}$ chi sta davanti a $a^{1000}b^{1024}$, devo calcolare tutte le righe

Altra domanda: perchè funziona questo procedimento

$\boxed{\text{FATTORIALI}}$ Per ogni $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ il fattoriale di n, che si indica con $n!$, è definito come

$0! = 1$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad \text{se } n \geq 1$

[definizione ricorsiva $\quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$]

Significato combinatorio del fattoriale

Prendiamo un insieme di n studenti e organizziamo una corsa. Quanti sono i possibili ordini di arrivo?

Esempio con 3 studenti $\{A, B, C\}$. I possibili ordini di arrivo sono

A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	A	B
C	B	C	A	B	A

Sono $6 = 3!$

In generale i possibili ordini di arrivo sono $n!$

Perché? → Il primo lo posso scegliere in n modi
→ Il secondo " " " $(n-1)$ modi
→ Il terzo " " " $(n-2)$ modi
... e così via.

Tutte le scelte sono tra loro indipendipendenti, quindi

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

↑ l'ultimo è univoc. determinato dalla scelta degli altri

Problema analogo Quanti sono gli anagrammi di una parola di n lettere tutte diverse. $\rightsquigarrow n!$

PARCO $\quad$ 5 lettere diverse $\rightsquigarrow 5! = 120$ anagrammi

BINOMIALI Significato combinatorio.

Ho un gruppo di 180 studenti. Di questi, 60 supereranno AM1.
In quanti modi posso scegliere 60 persone su 180?

Supponiamo di scegliere le 60 persone una per volta.

→ La prima la posso scegliere in 180 modi
→ La seconda " " 179 modi
→ La terza " " 178 "
⋮
→ La 60-esima " " $\boxed{121}$ modi
↑ occhio non 120

In questo modo lo stesso gruppo di 60 persone viene scelto più volte, a seconda dell'ordine in cui le 60 persone sono state selezionate.
Lo stesso gruppetto compare 60! volte, quindi bisogna dividere, e viene

$$\frac{180 \cdot 179 \cdot \ldots \cdot 121}{60!} = \binom{180}{60}$$

← BINOMIALE "180 SU 60"

Più in generale

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}$$

si intende che n e k sono in $\mathbb{N}$ e $k \leq n$

Oss. $\frac{180 \cdot 179 \cdot \ldots \cdot 121}{60!} = \frac{180 \cdot 179 \cdot \ldots \cdot 121 \cdot 120 \cdot 119 \cdot \ldots \cdot 1}{60! \;\; 120 \cdot 119 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{180!}{60!\,120!}$

e così in generale

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

altro modo di scrivere la formula con solo fattoriali

BINOMIALI VS TARTAGLIA

Fissato n, i numeri $\binom{n}{k}$ al variare di k, sono la riga n del triangolo di Tartaglia

Esempio per $n=4$ $\quad \binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\,4!} = \boxed{1}$

$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{24}{6} = \boxed{4}$ $\quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = \boxed{6}$

$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = \frac{24}{6} = \boxed{4}$ $\quad \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\,0!} = \boxed{1}$

Oss. generali $\quad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$ (tutte le righe iniziano con 1)

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$ (il secondo termine di ogni riga è n)

se devo scegliere una sola persona su n, lo posso fare in n modi

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (ogni riga del triangolo è simmetrica)

$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

scegliere le k persone promosse è equivalente a scegliere le $n-k$ persone bocciate

Relazione "alla Tartaglia"

$$\underbrace{\binom{n+1}{k+1}}_{\text{numero della riga } n+1} = \underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}_{\text{due numeri della riga } n \text{ che gli stanno "sopra"}}$$

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \overset{?}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{(n+1)\cancel{n!}}{(k+1)\cancel{k!}\,(n-k)\cancel{(n-k-1)!}} \overset{?}{=} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}\,(n-k)\cancel{(n-k-1)!}} + \frac{\cancel{n!}}{(k+1)\cancel{k!}\,\cancel{(n-k-1)!}}$$

$$\frac{n+1}{(k+1)(n-k)} \overset{?}{=} \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}$$

Vero per facile conto

Domanda iniziale: chi sta davanti a $a^{1000}\, b^{1024}$ in $(a+b)^{2024}$?

Risposta: $\binom{2024}{1000} = \dfrac{2024!}{1000!\,1024!} = \binom{2024}{1024}$

Domanda: in un campionato a n squadre, quante sono le partite del girone di andata?

Sono $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 008

Note Title 03/10/2024

$\boxed{\text{INSIEMI NUMERICI}}$ Notazioni standard

c'è lo zero

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ NATURALI

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ INTERI

$\mathbb{Q} = \{\text{frazioni } \frac{a}{b} \text{ con } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ RAZIONALI

$\mathbb{R}$ REALI

$\mathbb{C}$ COMPLESSI

$\mathbb{Q}$ deriva da "quozienti" $\mathbb{Z}$ da "ZAHLEN" (numeri in tedesco)

Approccio assiomatico ai numeri reali: breve descrizione delle proprietà dei numeri reali

I numeri reali sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$, cioè un insieme che indichiamo con $\mathbb{R}$, in cui sono definite due operazioni (la somma e la moltiplicazione), e una relazione d'ordine che indichiamo con $\geq$.

Valgono 3 tipi di proprietà

$\boxed{\text{PROPRIETÀ ALGEBRICHE}}$

(S1) $a+b = b+a$

(S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(S3) $\exists\, 0$ t.c. $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(S4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b = 0$

moralmente $b = -a$

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$

(P2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(P3) $\exists\, 1$ t.c. $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(P4) $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ $\exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$

moralmente $b = \frac{1}{a}$

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Oss. In $\mathbb{N}$ abbiamo solo (S1), (S2), (S3), (P1), (P2), (P3), (D)
in $\mathbb{Z}$ si aggiunge (S4)
in $\mathbb{Q}$ si aggiunge (P4)

$\boxed{\text{PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO}}$ La relazione $\geq$ ha le seguenti proprietà

(ord-1) Per ogni x e y in $\mathbb{R}$ vale $x \geq y$ oppure $y \geq x$ (ord. totale)
(ord-2) $x \geq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (riflessiva)
(ord-3) Se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (transitiva)
(già usata quando abbiamo fatto le catene di disuguagl.)
(ord-4) Se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (antisimmetrica)

Ci sono due proprietà che legano l'ordinamento alle operazioni

(ord-S) Se $a \geq b$ allora $a+c \geq b+c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$
(ord-P) Se $a \geq b$, allora $a \cdot c \geq b \cdot c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ con $\boxed{c \geq 0}$

Oss. Le stesse proprietà valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
Finora nulla distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

Oss. Tutte le volte che risolviamo equazioni o disequazioni siamo autorizzati ad usare solo queste proprietà

Esempio $2x + 7 \geq 10 \rightsquigarrow 2x \geq 3 \rightsquigarrow x \geq \frac{3}{2}$
In realtà

$2x+7 \geq 10$ aggiungo a dx e sx -7 e conservo il verso per la (ord-S)

$\underbrace{2x+7+(-7)}_{\underbrace{2x+0}_{2x}} \geq \underbrace{10+(-7)}_{3}$ $2x \geq 3$

serve che $\frac{1}{2} \geq 0$

Moltiplico a dx e sx per $\frac{1}{2}$

$2x \cdot \frac{1}{2} \geq \underbrace{3 \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}}$ $2x \cdot \frac{1}{2} = x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = x \cdot 1 = x$

ASSIOMA DI CONTINUITÀ

← quello che vale in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$

<u>Def.</u> Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi, diciamo non vuoti.

Si dice che A sta a sinistra di B se

$\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$

<u>Assioma di continuità</u> Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti tali che A sta a sinistra di B.

Allora esiste almeno un numero reale c che "sta in mezzo", cioè

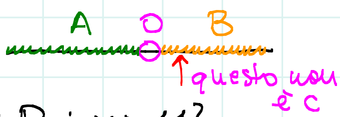
$a \leq c \quad \forall a \in A$ (c è più grande dei verdi)

$c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo degli arancioni)

<u>Oss.</u> L'assioma dice che c esiste. A seconda dei casi può essere unico oppure NO.

<u>Oss.</u> Può succedere che l'elemento più grande di A coincida con l'elemento più piccolo di B.
In tal caso quello è l'unico c che possiamo usare

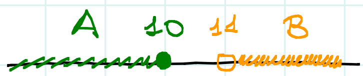
<u>Esempio</u> (1) Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
allora l'unica possibilità è $c = 0$.



(2) Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 10\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 11\}$
allora vanno bene tutti i c che soddisfano

$10 \leq c \leq 11$

vanno bene anche gli estremi



FATTO IMPORTANTE NON BANALE In $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di continuità, in $\mathbb{R}$ sì.

ANALISI 1 – LEZIONE 009

Note Title 03/10/2024

Maggioranti, minoranti, INF, SUP, MAX, MIN

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

- Si dice che un numero $M \in \mathbb{R}$ è un MAGGIORANTE di A se
$$a \leq M \quad \forall a \in A$$
(M sta a dx di A)
- si dice che un numero $m \in \mathbb{R}$ è un MINORANTE di A se
$$m \leq a \quad \forall a \in A$$
(m sta a sx di A)

Def. L'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante
- " inferiormente " " " " minorante
- limitato se esiste almeno un maggiorante e almeno un minorante

Oss. I maggioranti non sono obbligati ad esistere. Quando esistono non sono unici (se M è un maggiorante di A, allora anche $M+1$ o $M+2024$ sono maggioranti di A). Idem per i minoranti

Esempi ① $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Non ha nessun maggiorante (non esiste nessun reale M che è più grande di tutti i positivi)
Invece tutti i reali $m \leq 0$ sono minoranti di A
Quindi A è limitato inferiormente ma non superiormente.

② $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Stesso discorso di sopra. In particolare, tutti gli $m \leq 0$ sono minoranti.

Intuitivamente: i maggioranti, quando esistono, sono le barriere dall'alto per A, i minoranti quelle dal basso.

Def. (Massimo) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A, e si scrive

$$M = \max A$$

se

(i) $a \leq M \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante)

(ii) $M \in A$ (M sta in A)

Def. (minimo) Sia ... $\quad m = \min A$ se

(i) $m \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(ii) $m \in A$ (m sta in A)

Oss. Massimo e minimo non sono obbligati ad esistere, ma quando esistono sono unici.

Occhio: massimo e minimo possono non esistere anche se A è limitato

Esempi
1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 4\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 42\}$

→ L'insieme A è limitato inferiormente e superiormente (un maggiorante è 25, un minorante è -7)

$\text{Max } A = 4 \qquad \min A$ NON ESISTE

→ L'insieme B è limitato super, ma non inferiormente

$\text{Max } B$ e $\min B$ non esistono

→ L'insieme C è limitato infer., ma non superiormente

$\text{Max } C$ non esiste $\qquad \min C = 42$

Def. (Estremo superiore) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

- Se A non è limitato superiormente si pone per definizione

$$\sup A = +\infty$$

- Se A è limitato superiormente, allora si pone per defin.

$$\sup A = \text{minimo dei maggioranti di } A$$

Def. (Analogamente) Sia A come sopra

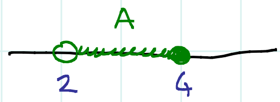
- Se A non è limitato infer., si pone per defin.

$$\inf A = -\infty$$

- Se A è limitato inferiormente, allora si pone per defin.

$$\inf A = \text{massimo dei minoranti di } A$$

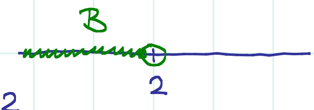
Esempi Siano A, B, C come sopra



→ I maggioranti di A sono tutti i numeri $M \geq 4$, quindi $\sup A = 4$

I minoranti di A sono tutti i numeri $m \leq 2$, quindi

$$\inf A = \text{massimo dei minoranti} = 2$$



→ I maggioranti di B sono tutti gli $M \geq 2$

quindi $\sup B = \text{minimo dei maggioranti} = 2$

Invece $\inf B = -\infty$ perché non esistono minoranti

→ $\sup C = +\infty$ e $\inf C = \min C = 42$

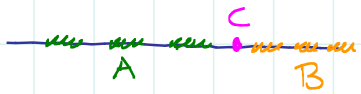
per gli stessi motivi.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto, allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono per forza (e sono unici, eventualmente $\pm\infty$)

$\boxed{\text{Dim. nel caso del sup}}$ Voglio dimostrare che sup esiste.

- Se non esistono maggioranti, allora $\sup A = +\infty$ per defin.
- Supponiamo quindi che esistano dei maggioranti, e chiamiamo B l'insieme dei maggioranti di A.

  Allora A sta a sx di B (ogni elemento di A è più piccolo di ogni maggiorante)

  L'assioma di continuità ci dice che esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che

  $\rightarrow$ $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante, quindi $c \in B$)

  $\rightarrow$ $c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo di tutti i maggioranti)

  Quindi $c = \min B$ che per definizione è il sup di A.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Ripetere la dimostrazione nel caso dell'inf.

<u>Oss.</u> Questo è un punto in cui $\mathbb{R}$ si distingue da $\mathbb{Q}$

<u>Esempio</u> Consideriamo

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ e } q^2 < 2 \}$$
$$B = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ e } q^2 > 2 \}$$

Si potrebbe dimostrare che

- A è a sinistra di B (se $a > 0$ e $b > 0$, allora $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$)
- se ci fosse un $c \in \mathbb{Q}$ in mezzo, questo dovrebbe verificare $c^2 = 2$ (bisognerebbe dimostrare che se $c^2 < 2$, allora esiste $q > c$ t.c. $q^2 < 2$, e se $c^2 > 2$ allora esiste $q < c$ con $q^2 > 2$)
- non esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c^2 = 2$

Fatte queste verifiche, viene fuori che in $\mathbb{Q}$ gli insiemi A e B non ammettono un separatore $c \in \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Caratterizzazione di sup } A}$

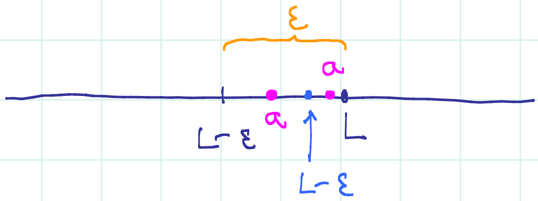
- $\sup A = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$

- $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

  (i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (cioè L è un maggiorante di A)

  (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ t.c. $a > L - \varepsilon$

  (cioè $L-\varepsilon$ non è un maggiorante di A)



Esercizio Scrivere lo stesso per l'inf.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 010

Note Title 05/10/2024

$\boxed{\text{FUNZIONI REALI}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o più in generale $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$

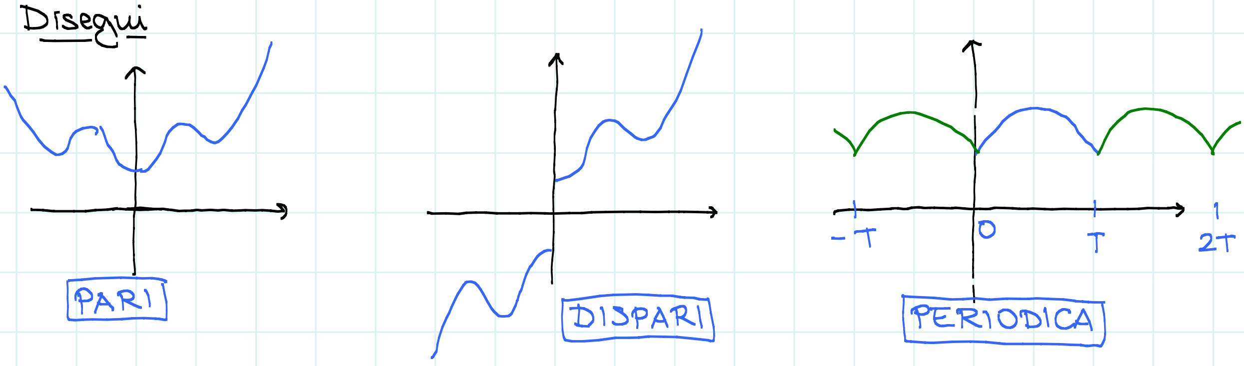
$$\boxed{\text{Grafico}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}}$$

Proprietà di simmetria

Def. Una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- $\boxed{\text{PARI}}$ se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
  (grafico simmetrico risp. asse y)
- $\boxed{\text{DISPARI}}$ se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
  (grafico simmetrico risp. all'origine)
- $\boxed{\text{PERIODICA}}$ se esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
  (il tratto di grafico tra 0 e T si ripete poi in $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, e così via e stessa cosa sui negativi)

Disegni



Conseguenze → se f è pari o dispari, basta conoscere il grafico per $x \geq 0$ e automaticamente lo conosco sempre

→ se f è periodica, basta sapere il grafico in un interv. lungo T.

Proprietà di MONOTONIA

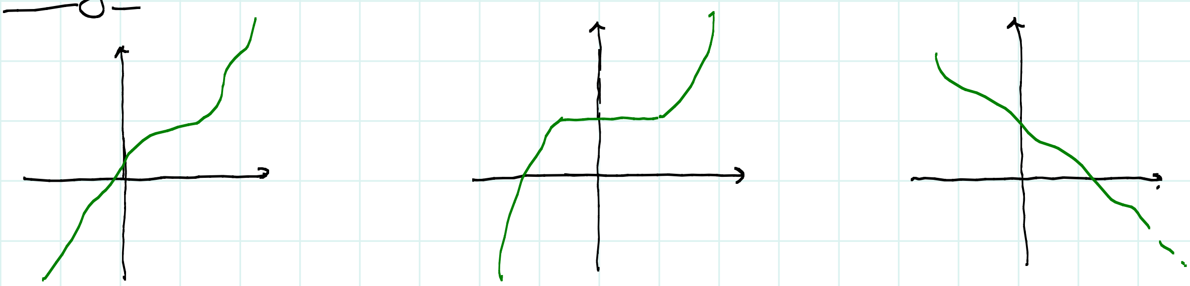
Def Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice
- stretti. crescente se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- debolm. crescente se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
- strett. decrescente se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
- debolm. decrescente se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

In tutti i 4 casi f si dice MONOTONA (strett. monotona)

Achtung! ① Mai usare le parole crescente o decrescente senza precisare ~~debolmente~~ o strettamente

② Strett. crescente $\Rightarrow$ debolmente crescente

Disegni



strett. cresc. debolm. cresc. | debolm. cresc. NO strett. cresc. | strett. decresc. debolm. decresc.

MONOTONIA VS INIETTIVITÀ

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se f è strett. crescente, allora di sicuro f è iniettiva

[Dim.: siano $a_1 \neq a_2$ in partenza

WLOG (without loss of generality) $a_1 < a_2$

Per la stretta crescenza $f(a_1) < f(a_2)$

Quindi $f(a_1) \neq f(a_2)$]

Stessa cosa, con dim. analoga, se f è strett. decrescente

STRETTA MONOTONIA $\Rightarrow$ INIETTIVITÀ

SIMMETRIE VS INIETTIVITÀ

- Se f è pari, di sicuro non è iniettiva $(f(7) = f(-7))$
- Se f è periodica, di sicuro non è iniettiva

In entrambi i casi di sicuro f non è strett. monotona (se lo fosse, sarebbe iniettiva)

- Le f dispari possono essere iniettive oppure no.

INIETTIVITÀ E SURGETTIVITÀ VS GRAFICO

Sia $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.}$

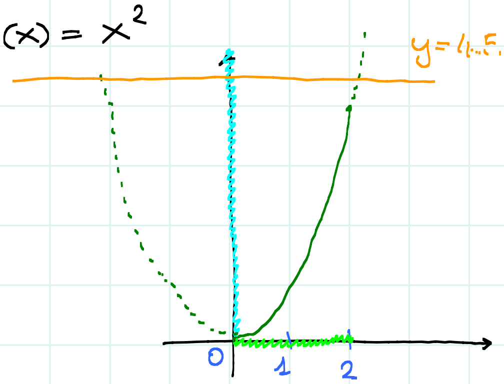
① f è iniettiva se ogni retta $y = \lambda$ (parallela all'asse x) incontra il grafico al massimo una volta

② f è surgettiva se .... almeno una volta.

③ f è bigettiva .... esattamente una volta

Più in generale, se consideriamo $f : A \longrightarrow B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ allora dobbiamo considerare solo rette $y = \lambda$ con $\lambda \in B$ e prendere solo le intersezioni con $x \in A$.

<u>Esempio</u> $f : \underbrace{[0,2]}_{A} \to \underbrace{[0,5]}_{B}$ con $f(x) = x^2$



→ Non è vero che ogni retta $y = \lambda$ con $\lambda \in [0,5]$ interseca il grafico (le rette con $\lambda \in (4,5]$ non intersecano) ⇝ NO SURG.

→ È vero che ogni retta con $\lambda \in [0,5]$ interseca al max una volta (le intersezioni buone sono quelle con $x \in [0,2]$)

GRANDI TENTAZIONI

Equazioni $\cancel{f}(2x+1) = \cancel{f}(3x+4) \rightsquigarrow 2x+1 = 3x+4 \rightsquigarrow x=-3$

Posso "eliminare la f" se so che $\boxed{f \text{ è INIETTIVA}}$

Disequazioni $f(2x+1) > f(3x+4) \rightsquigarrow 2x+1 > 3x+4 \rightsquigarrow x<-3$

Questo si può fare se so che $\boxed{f \text{ è STRETT. CRESCENTE}}$

Se so che f è strett. decrescente, posso eliminare f, ma devo "girare il verso della disequazione".

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 011

Note Title 05/10/2024

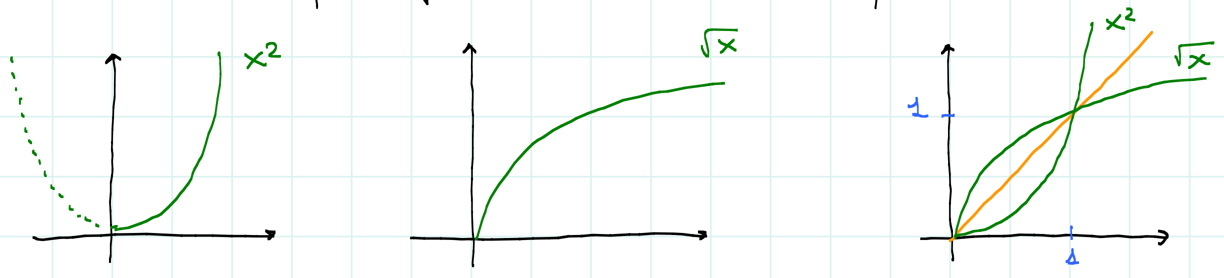
Presentazione funzioni elementari e relative inverse

POTENZE La funzione $f(x) = x^2$, vista come $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile
(vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è non iniettiva, non surgettiva, pari e non monotona).
La sua inversa è una $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ e si chiama radice quadrata $g(x) = \sqrt{x}$

Oss. $g(x) = \sqrt{x}$ prende in INPUT reali ≥ 0 e restituisce reali ≥ 0

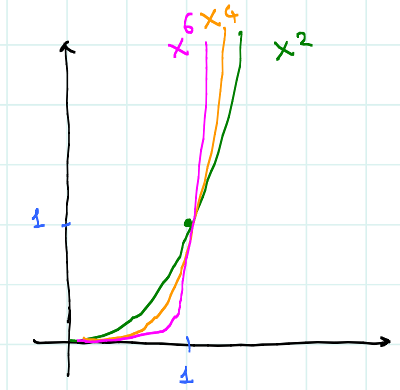
Quindi $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{-4}$ non ha senso (sui reali)
↑ e non ± 2 o altro

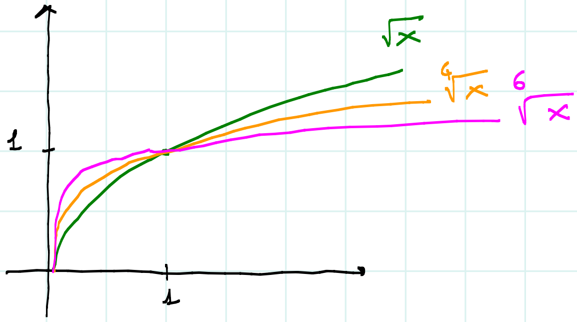
Stesso discorso per $f(x) = x^k$ con k intero positivo PARI.



FATTO GENERALE I grafici di f e della sua inversa sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice $y = x$
[Se $y = f(x)$, cioè $(x,y) \in$ Grafico di f
allora $x = g(y)$, cioè $(y,x) \in$ Grafico di g]

Grafico comparativo



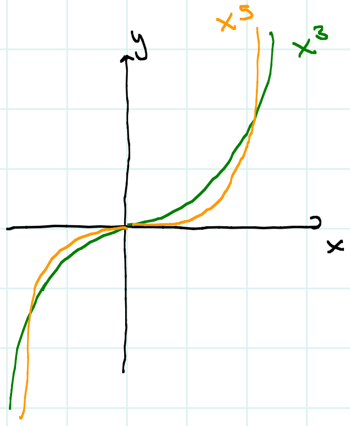


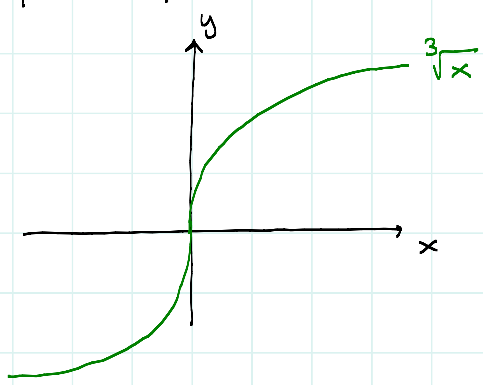
$\boxed{\text{Potenze DISPARI}}$ La funzione $f(x) = x^3$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari $[\,(-x)^3 = -x^3\,]$, strett. crescente quindi iniettiva, surgettiva, quindi invertibile.

La sua inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ è una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è pure lei dispari e strett. crescente, oltre che iniettiva e surgettiva.

Stessa cosa per $f(x) = x^k$ con k intero positivo dispari

Oss. $g(x) = \sqrt[3]{x}$ prende in INPUT reali qualunque e restituisce reali qualunque $\quad \sqrt[3]{-8} = -2$





Esercizio $\quad \sqrt[3]{x+4} = \sqrt[3]{2x-3} \quad \rightsquigarrow \quad x+4 = 2x-3 \quad \rightsquigarrow \quad x = 7$

Ok perché $\sqrt[3]{x}$ è iniettiva

$\sqrt[6]{x+4} = \sqrt[6]{2x-3} \quad \rightsquigarrow \quad x+4 = 2x-3 \quad \rightsquigarrow \quad x = 7$

NB: lo posso fare, ma mi devo accertare che quello che sta sotto sia ≥ 0 (basta sostituire $x = 7$ alla fine)

$\boxed{\text{ESPONENZIALI}}$

$x^7 \rightsquigarrow$ potenza (base variabile, espon. FISSO)

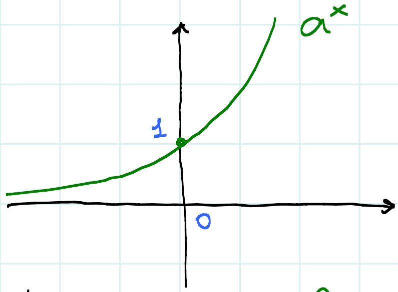
$7^x \rightsquigarrow$ esponenziale (esponente variabile)

$x^{\sin x} \rightsquigarrow$ esponenziale

<u>Fatto</u> Per ogni $\boxed{a > 1}$ fisso, la funzione $f(x) = a^x$ vista come

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$$

è strett. crescente, iniettiva e surgettiva (nessuna simmetria), quindi invertibile.



L'inversa è $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ è

$$g(x) = \log_a x$$

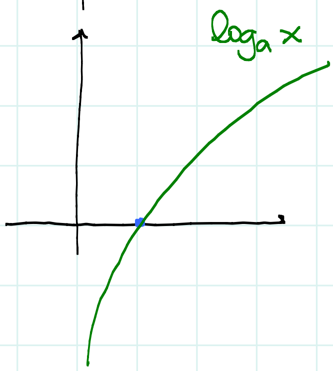
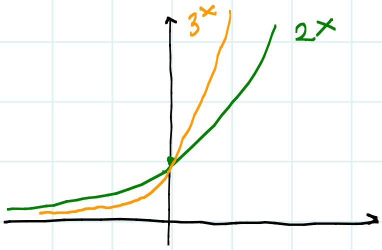


Grafico comparato

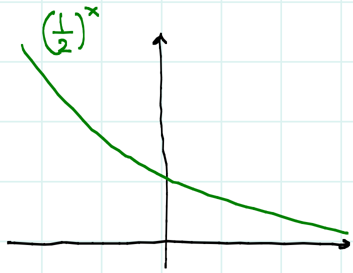


Per ogni $\boxed{a \in (0,1)}$ la funzione $f(x) = a^x$ è, vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$,

$\to$ strett. decrescente

$\to$ iniettiva

$\to$ surgettiva



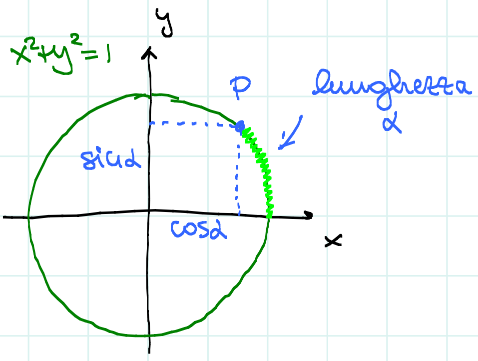
e l'inversa è ancora $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ e $g(x) = \log_a x$

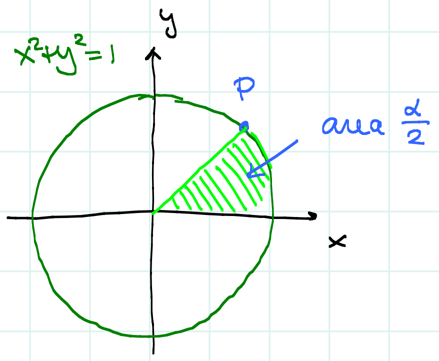
<u>Esempi</u> $3^{6x+4} = 9 \rightsquigarrow \cancel{3}^{6x+4} = \cancel{3}^2$ (posso eliminare il 3 perché 3^x è iniettiva)

$\rightsquigarrow 6x + 4 = 2 \rightsquigarrow 6x = -2 \rightsquigarrow x = -\frac{1}{3}$

$\boxed{\text{FUNZIONI TRIGONOMETRICHE}}$

Si possono definire via arco o via area





Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, prendiamo P sulla circ. tale che l'arco abbia lunghezza α, oppure il settore abbia area $\frac{\alpha}{2}$.

Le coordinate di P sono $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Si pone poi

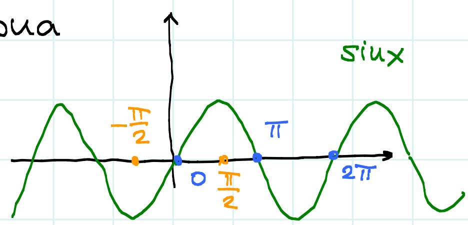
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\boxed{\text{SENO}}$ La funzione $f(x) = \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

→ periodica con periodo minimo 2π

→ dispari

→ né iniettiva, né surgettiva, né monotona

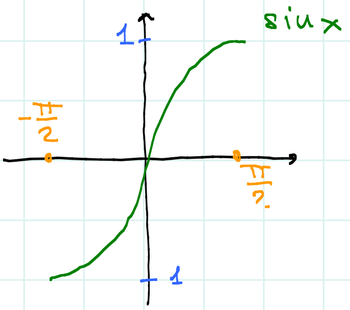


Vista come $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ diventa

→ strett. crescente

→ iniettiva e surgettiva

L'inversa è $g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e si chiama



$$g(x) = \arcsin x$$

↑ INPUT: $x \in [-1,1]$

OUTPUT $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\boxed{\text{COSENO}}$ La funzione $f(x) = \cos x$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

→ periodica (periodo min 2π)

→ pari

→ NON iniettiva, NON surg., NON monotona

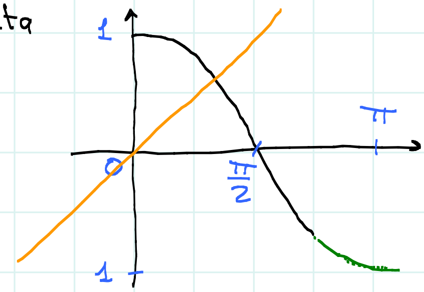
Vista come $f: [0,\pi] \to [-1,1]$ diventa

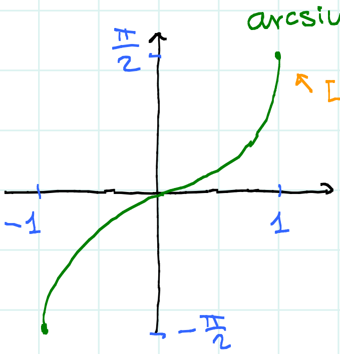
→ strett. decresc.

→ invertibile

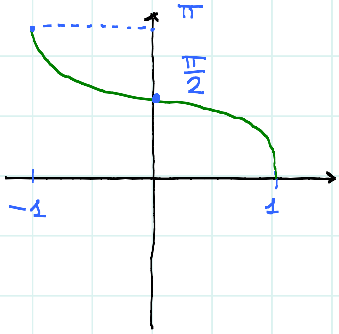
L'inversa $g: [-1,1] \to [0,\pi]$ è

$g(x) = \arccos x$





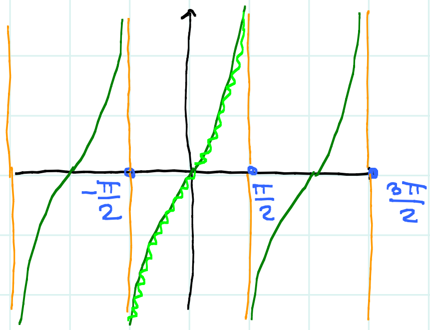
[grafico corretto dopo video]



ANALISI 1 – LEZIONE 012

Note Title 05/10/2024

$\boxed{\text{TANGENTE}}$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



La funzione $f(x) = \tan x$ vista come $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\} \to \mathbb{R}$ è

→ dispari

→ periodica di periodo minimo π

→ non iniettiva, SI surgettiva, NON monotona

Vista invece come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ diventa

→ strett. crescente

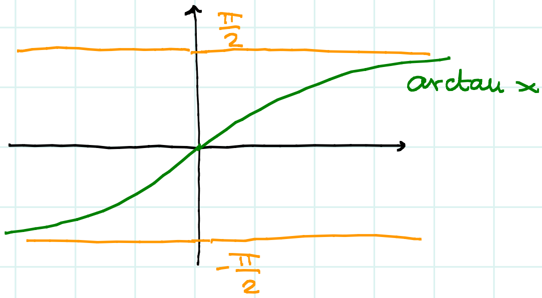
→ iniettiva e surgettiva.

La sua inversa $g: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è $g(x) = \arctan x$

ed è una funzione

→ dispari

→ strett. crescente.



— o — o —

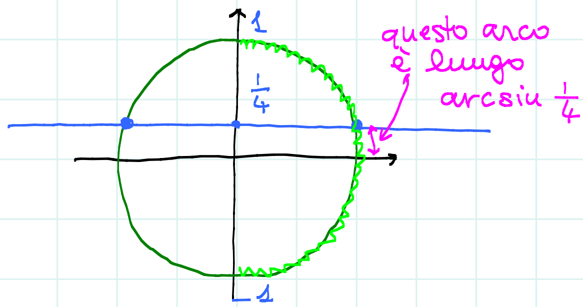
Interpretazione geometrica di arcsin, arccos, arctan

$\arcsin: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

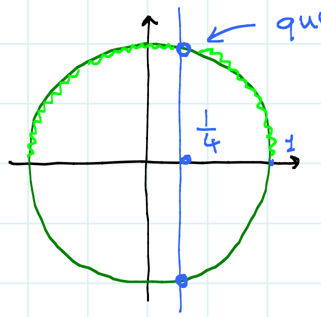
$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

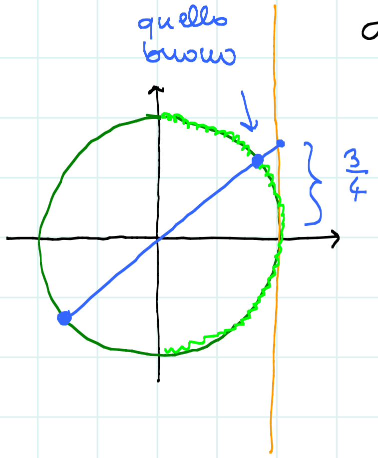
Cosa vuol dire calcolare $\arcsin(\frac{1}{4})$



Cosa vuol dire calcolare $\arccos \frac{1}{4}$?



$\arctan \frac{3}{4}$



— o — o —

Operazioni sui grafici

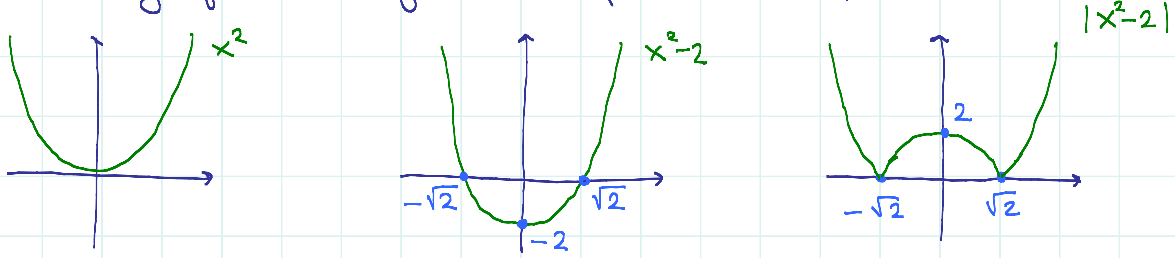
Dato il grafico di $f(x)$, e dato $a > 0$, come trovo il grafico di

- $f(x) \pm a$ ⇝ traslato alto / basso (alto se segno +)
- $f(x \pm a)$ ⇝ traslato dx / sx (sx se segno +)
- $-f(x)$ ⇝ ribalto sopra / sotto
- $f(-x)$ ⇝ ribalto dx / sx
- $|f(x)|$ ⇝ prendo le parti con $y < 0$ e le ribalto in alto
- $f(|x|)$ ⇝ per $x \geq 0$ non cambio nulla e poi osservo che è diventata una funzione pari

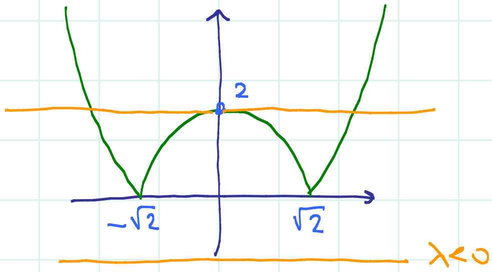
Esempio 1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$|x^2 - 2| = \lambda$$

Serve il grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 2|$



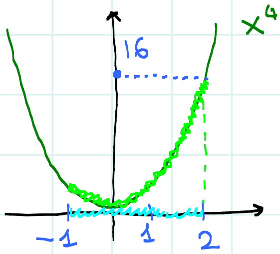
Per risolvere l'equazione $f(x) = \lambda$, interseco il grafico di $f(x)$ con le rette del tipo $y = \lambda$



- Se $\lambda < 0 \rightsquigarrow$ 0 soluzioni
- Se $\lambda = 0 \rightsquigarrow$ 2 soluz.
- Se $\lambda \in (0,2) \rightsquigarrow$ 4 soluz.
- Se $\lambda = 2 \rightsquigarrow$ 3 sol.
- Se $\lambda > 2 \rightsquigarrow$ 2 sol.

Esempio 2 Consideriamo $f(x) = x^4$ come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Calcolare $\underbrace{f([-1,2])}_{\text{immagine di un insieme}}$ e $\underbrace{f^{-1}([-1,2])}_{\text{controimmagine di un insieme}}$



Per fare l'immagine penso $[-1,2]$ nell'insieme di partenza. Poi vado sul grafico. Infine proietto sull'asse y.

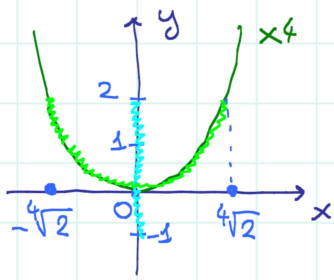
Ottengo $f([-1,2]) = [0,16]$

Calcolare inf / sup / max / min di

$$\underbrace{\{x^4 : x \in [-1,2]\}}_{\text{questo è } f([-1,2])} = [0,16]$$

$\min = \inf = 0$ $\qquad\qquad$ $\max = \sup = 16$

Per la controimmagine è la stessa cosa ma partendo da $[-1,2]$ sull'asse y. Vado sul grafico e proietto giù sull'asse x. Ottengo



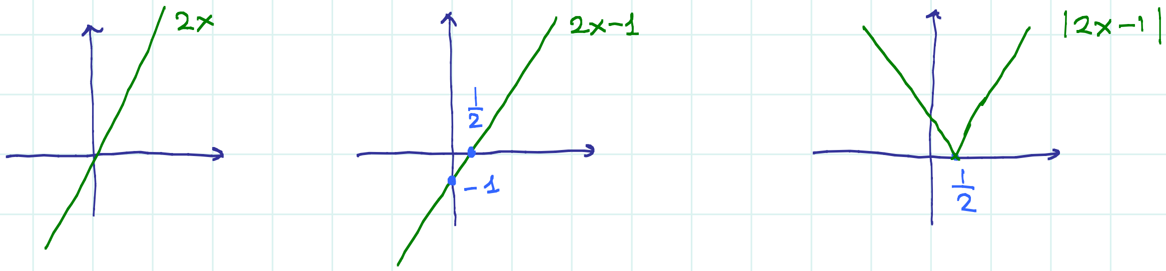
$$f^{-1}([-1,2]) = [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}]$$

Esempio 3 Calcolare

$\inf\{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \leq 4\}$ CONTROIMM. $\boxed{\text{MONDO } x}$

$\inf\{|2x-1| : x \leq -4\}$ IMMAGINE $\boxed{\text{MONDO } y}$

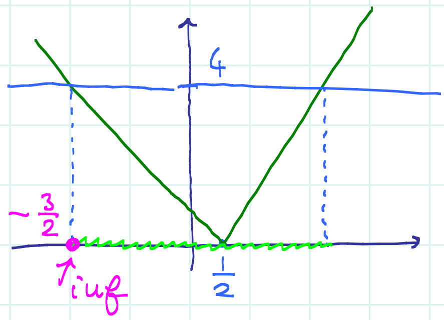
Intanto facciamo il grafico di $f(x) = |2x-1|$



$\{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \leq 4\}$ Sono delle x

$|2x-1| = 4 \rightsquigarrow 1-2x = 4$

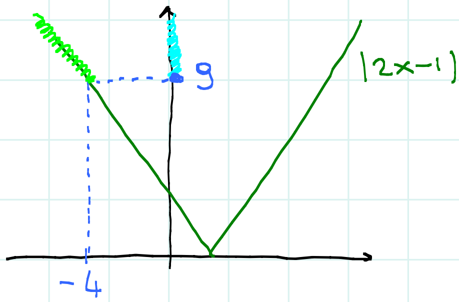
$\rightsquigarrow 2x = -3 \rightsquigarrow x = -\frac{3}{2}$



$\inf\{|2x-1| : x \leq -4\} = 9$

"Calcoliamo $|2x-1|$ per ogni $x \leq -4$"

che cosa otteniamo? Delle y



L'insieme $\{|2x-1| : x \leq -4\}$ è $f((-\infty,-4)) = [9,+\infty)$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 013

Note Title 10/10/2024

Esercizio 1 Dimostrare che, per ogni $x \geq 0$ reale, vale la relazione

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proviamo per induzione

$\boxed{n=0}$ $\quad 1 \geq 0$ ☺

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Passo induttivo

Hp: $(1+x)^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2} x^2$

Th: $(1+x)^{n+1} \geq \dfrac{(n+1)n}{2} x^2$

Impostiamo la solita catena

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}}}{\geq} (1+x)\cdot \frac{n(n-1)}{2} x^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero sia} \\ \text{vera}}}{\geq} \frac{(n+1)n}{2} x^2$$

Controllo la speranza

$$(1+x)\frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\cancel{x^2} \overset{?}{\geq} \frac{(n+1)\cancel{n}}{\cancel{2}}\cancel{x^2} \rightsquigarrow (1+x)(n-1) \overset{?}{\geq} n+1$$

$$\rightsquigarrow \cancel{n}-1+nx-x \overset{?}{\geq} \cancel{n}+1 \rightsquigarrow (n-1)x \overset{?}{\geq} 2 \rightsquigarrow x \overset{?}{\geq} \frac{2}{n-1}$$

Quindi: la speranza è vera se e solo se $x \geq \dfrac{2}{n-1}$ e questo è un GUAIO perché noi sappiamo solo che $x \geq 0$.

Quindi il meccanismo di caduta NON FUNZIONA ☹

Esercizio 2 Dimostrare che, per ogni $x \geq 0$, vale

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

(se è vero questo, allora è vero anche il precedente!)

Questo si riesce a fare per induzione.
Arriviamo al passo induttivo

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n$$

$$\overset{\text{Hp}}{\geq} (1+x)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right)$$

$$\underset{\text{spero}}{\geq} 1+(n+1)x+\frac{(n+1)n}{2}x^2$$

Controlliamo la speranza:

$$(1+x)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x+\frac{(n+1)n}{2}x^2$$

$$\cancel{1}+n\cancel{x}+\cancel{\frac{n(n-1)}{2}x^2}+\cancel{x}+\cancel{nx^2}+\frac{n(n-1)}{2}x^3 \overset{?}{\geq} \cancel{1}+\cancel{(n+1)x}+\cancel{\frac{(n+1)n}{2}x^2}$$

$\frac{n(n-1)}{2}x^3 \overset{?}{\geq} 0$ e questo è vero $\forall x \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ☺

<u>Oss.</u> Classico esempio di cosa più difficile che si riesce a dimostrare, mentre quella più facile non veniva.

<u>Oss.</u> Come fa a venire in mente la disug. dell'esercizio 2?

Binomio di Newton!

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Se lo facciamo con $a=1$ e $b=x$ e prendiamo i termini con $k=0,1,2$ otteniamo

termini successivi

$$(1+x)^n = \underbrace{\binom{n}{0}1^n\cdot x^0}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}1^{n-1}x^1}_{x} + \underbrace{\binom{n}{2}1^{n-2}x^2}_{\frac{n(n-1)}{2}x^2} + \dots$$

La prima disug. diventa

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \rightsquigarrow \text{Bernoulli} \quad (\text{per } x>-1)$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

Dopo verrebbe

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}_{\binom{n}{3}}x^3$$

— o — o —

Esercizio 3 Calcolare la somma dei numeri della riga n-esima del triangolo di Tartaglia (altrove triangolo di PASCAL)

La somma della riga n-esima viene 2^n

1					1				
2				1		1			
4			1		2		1		
8		1		3		3		1	
16	1		4		6		4		1

Spiegazione algebrica

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Mettendo $a=b=1$ viene

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}$$

↑ numeri che compaiono nella riga n-esima

Spiegazione combinatoria Ricordiamo che

$\binom{n}{k}$ = sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n studenti

$\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}$ = tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme di n studenti

↑ stiamo contando tutti i sottoinsiemi

Ora un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi perché ogni elemento può essere messo oppure non messo.

Esempio 4 Quanti sono gli anagrammi di MATEMATICA ?

Abbiamo 10 lettere. SE fossero tutte diverse sarebbero $10!$

Ma qui abbiamo 2M, 3A, 2T e allora viene

$$\frac{10!}{2!\,3!\,2!}$$

Come spiegare il denominatore? Consideriamo gli anagrammi di

MATEMATICA

Questi sono davvero $10!$ Ma quanti diventano lo stesso?

Le M le posso permutare in $2!$ modi

Le T " "

Le A " $3!$ "

Esempio 5 Interpretare in modo combinatorio la relazione

$$\underbrace{\binom{n+1}{k+1}}_{\substack{\text{sottoinsiemi di } k+1 \text{ elementi}\\ \text{in un insieme con } n+1 \text{ elementi}}} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(relazione del triangolo di Tartaglia)

Prendo gli $n+1$ elementi e ne isolo uno

$$\underbrace{A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n}\quad A_{n+1}$$

Come posso costruire un sottoinsieme con $k+1$ elementi?

Ci sono due modi

(1) Posso prendere $(k+1)$ elementi tra i primi n $\rightsquigarrow$ $\binom{n}{k+1}$ modi

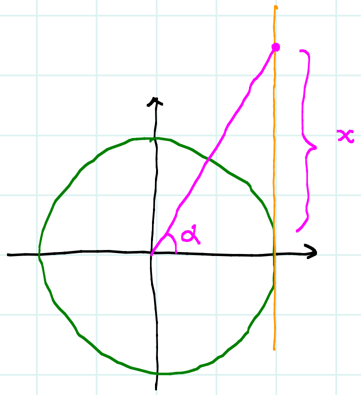
(2) Posso prendere k elementi tra i primi n e poi aggiungere l'ultimo $\rightsquigarrow$ $\binom{n}{k}$ modi

— o — o —

Estensione $(a+b+c)^{2024} = \dots + \underbrace{\dots}_{\frac{2024!}{1000!\,500!\,524!}} a^{1000} b^{500} c^{524} + \dots$

ANALISI 1 – LEZIONE 014

Note Title 10/10/2024



Esercizio 1 Dimostrare che per ogni $x>0$ vale

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$$

Sia $\alpha = \arctan x$. Poiché $x>0$ si ha che

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Questo vuol dire che $\tan \alpha = x$. Ma allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{x}$$

(Proprietà della tangente: passando da α a $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sin e cos si scambiano)

Ancora una volta

$$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

La relazione di sopra dice che $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

In maniera analoga si dimostra che

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad \forall x<0}$$

Altra formula analoga

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1,1]}$$

$$\alpha = \arcsin x \rightsquigarrow \sin\alpha = x \rightsquigarrow \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\sin\alpha} = x$$

$$\rightsquigarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$$

— o — o —

GRANDI TENTAZIONI

Sia $f : A \to B$ una funzione invertibile (iniettiva e surg.)
Sia $g : B \to A$ la funzione inversa.
Allora

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A \qquad f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Veniamo ai casi pratici.

La radice quadrata è l'inversa del quadrato quindi

$$\boxed{\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \geq 0} \qquad \boxed{(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \geq 0}$$

nemmeno ha senso per $x < 0$

$f(x) = x^2$ $\quad f : \boxed{\mathbb{R}_{\geq 0}} \to \boxed{\mathbb{R}_{\geq 0}}$

$g(x) = \sqrt{x}$ $\quad g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

per $x \geq 0$ è la def. di funzione inversa
per $x < 0$ basta osservare che LHS e RHS sono funzioni PARI

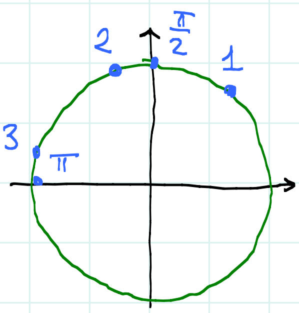
<u>Versione trigonometrica</u>

$f(x) = \sin x$ $\quad f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

$g(x) = \arcsin x$ $\quad g : [-1, 1] \to \underbrace{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_{\text{Radianti}}$

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Quindi non sono vere per ogni x !!!



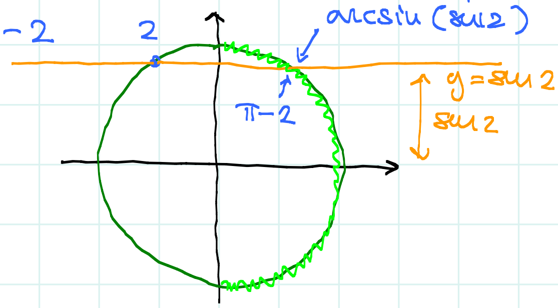
$\arcsin(\sin 1) = 1$ perché $1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

↑ 1 radianti

$\arcsin(\sin 2) = 2$ IMPOSSIBILE perché arcsin non può dare in output valori $\geq \frac{\pi}{2}$!!!

$\arcsin(\sin 2)$ ha senso? Sì, perché $\sin 2 \in [-1, 1]$ e quindi posso calcolarne arcsin!

Quanto fa $\arcsin(\sin 2) = 1{,}14\ldots$ come mai?
$= \pi - 2$

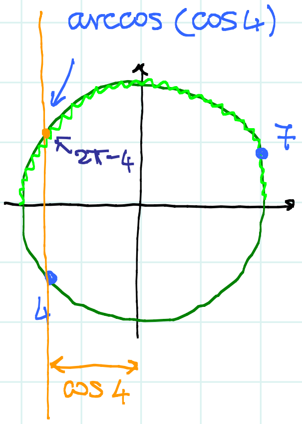


Stesso esercizio con arccos

$$\left.\begin{aligned} \arccos(\cos 1) &= 1 \\ \arccos(\cos 2) &= 2 \\ \arccos(\cos 3) &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

qui era la restrizione del cos che definiva arccos

$\arccos(\cos 4) =$ NON può essere 4 perché $\arccos(\ldots) \in [0, \pi]$



$\arccos(\cos 4) =$ simmetrico di 4 rispetto all'asse x $= 2\pi - 4$
(la media tra lui e 4 deve fare π)
(percorro 2π e poi torno indietro di 4)

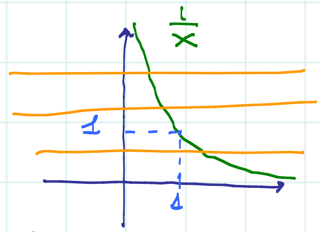
$\arccos(\cos 7) = 7 - 2\pi$

Dire se sono iniettive e/o surgettive P = porcheria

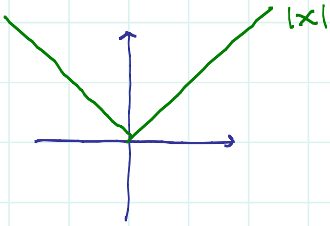
$2x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	IS	$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$	I	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	I
x^2	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	/	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	S	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$	I
x^2	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$[0,1] \to [0,1]$	IS	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I
x^2	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$	P	$[-1,1] \to [-1,1]$	/
x^3	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	IS	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	I
x^3	$[-1,1] \to [-1,1]$	IS	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	I	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I

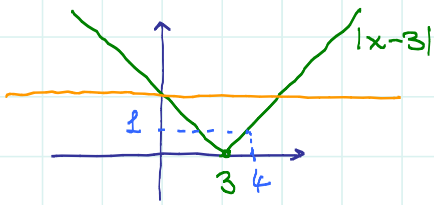
x^{-1}	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	P	$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$	IS	$(0,1) \to (1,+\infty)$	IS
$\lvert x-3 \rvert$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	/	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	S	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I

$\frac{1}{x}$ non è definita per $x=0$



$f(x) = |x-3|$





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Perché non è iniettiva? Perché $f(0) = f(6)$
Perché è surgettiva? Ogni retta interseca almeno una volta

$f: [3, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ IS
$f: [4, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ I (ma non S perché non prende tutti i valori ≥ 0)

$f: [4, +\infty) \to [1, +\infty)$ IS

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 015

Note Title 10/10/2024

Esercizio 1 $x \sin(x^2)$ $x^2 \sin x$ $x^3 \sin(x^5)$

Pari o dispari? D D P

$f(x) = x \sin(x^2)$ $f(-x) = -x \cdot \sin((-x)^2) = -x \sin(x^2) = -f(x)$

$f(x) = x^2 \sin x \rightsquigarrow f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2(-\sin x) =$
$-x^2 \sin x = -f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 \sin(x^5) \rightsquigarrow f(-x) &= (-x)^3 \sin((-x)^5) \\ &= -x^3 \sin(-x^5) \\ &= -x^3(-\sin x^5) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$x \cos(x^2)$ $x^2 \cos x$ $x^3 \cos(x^5)$

D P D

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 \cos(x^5) \rightsquigarrow f(-x) &= (-x)^3 \cos((-x)^5) \\ &= -x^3 \cos(-x^5) \\ &= -x^3 \cos(x^5) \\ &= -f(x) \rightsquigarrow \text{Dispari} \end{aligned}$$

cos è pari

$\arctan(\cos x) \cdot \sin(x^5)$ $\cos(\arctan x) \cdot \sin^5 x$

D D

$g(x) = \cos(\arctan x) \cdot \sin^5 x$

$$\begin{aligned} g(-x) &= \cos(\arctan(-x)) \cdot [\sin(-x)]^5 && \text{uso arctan e sin D} \\ &= \cos(-\arctan x)\,[-\sin(x)]^5 && \text{uso cos P} \\ &= \cos(\arctan x) \cdot [-(\sin(x))^5] \\ &= -\cos(\arctan x) \cdot \sin^5 x = -g(x) \end{aligned}$$

$x^{10} + x^8$ — Pari

$x^{10} + x^9$ — niente
$f(1) = 2$
$f(-1) = 0$

$x^{11} + x^9$ — Dispari

Esercizio 2

$\sin x$	$2^{\sin x}$	$\lvert\cos x\rvert$
Dispari	No PD	Pari
2π-periodica	2π-periodica	π-periodica

$2^{\sin x}$ non è pari/dispari. Basta trovare una violazione

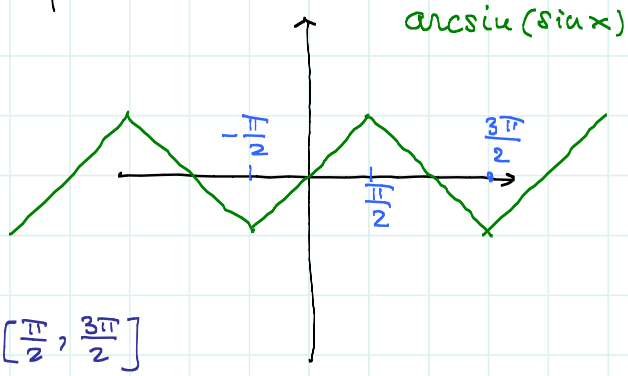
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ che non è ± 2

Perché $\lvert\cos x\rvert$ è π-periodica?

$$\lvert\cos(x+\pi)\rvert \underset{\text{precorso}}{=} \lvert -\cos x\rvert = \lvert\cos x\rvert$$

$\arcsin(\sin x)$ Dispari e 2π-periodica

Fatto generale: se è periodica la funzione dentro, allora la composizione è periodica



$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

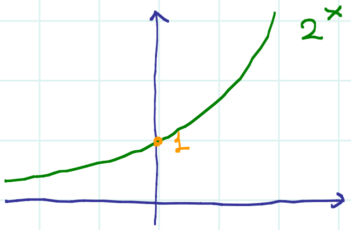
Per i ragionamenti della lez. precedente
$\arcsin(\sin x) = \pi - x \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

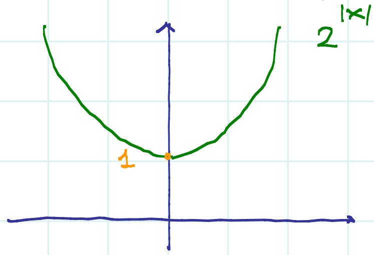
e poi è periodica, quindi se la conosco in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, allora la conosco ovunque.

Esercizio 3 Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni di

$$2^{|x-1|} = \lambda$$

Disegno il grafico di $2^{|x-1|}$, arrivandoci per tappe





coincide con 2^x per $x \geq 0$ ed è pari

- se $\lambda < 1$ ⇝ 0 soluzioni
- se $\lambda = 1$ ⇝ 1 soluzione
- se $\lambda > 1$ ⇝ 2 soluzioni

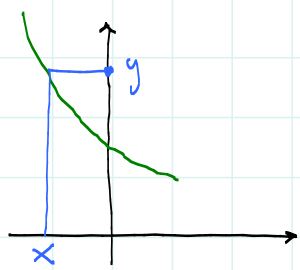
La funzione $f(x) = 2^{|x-1|}$, vista come $f : (-\infty, 1] \to [1, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile.
Chi è la sua inversa?

$$2^{|x-1|} = y$$

Dato $\boxed{y \geq 1}$ (spazio di arrivo), devo trovare l'unico $\boxed{x \leq 1}$ (spazio di partenza) che risolve l'equazione

$$2^{|x-1|} = y \rightsquigarrow 2^{1-x} = y$$

↑ $x \leq 1$, quindi $|x-1| = 1-x$



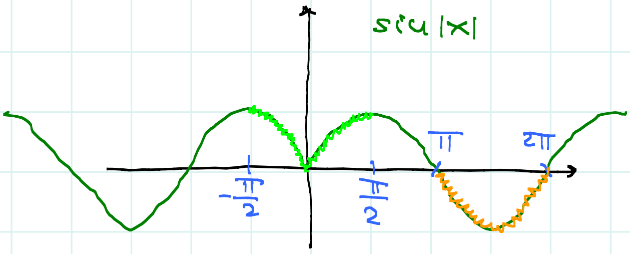
$$\rightsquigarrow 1-x = \log_2 y \rightsquigarrow x = 1 - \log_2 y$$

Risposta: l'inversa è $g(x) = 1 - \log_2 x$

Esercizio 4 $\sin|x|$

Coincide con $\sin x$ per $x \geq 0$
e poi è pari

Non è una funzione periodica



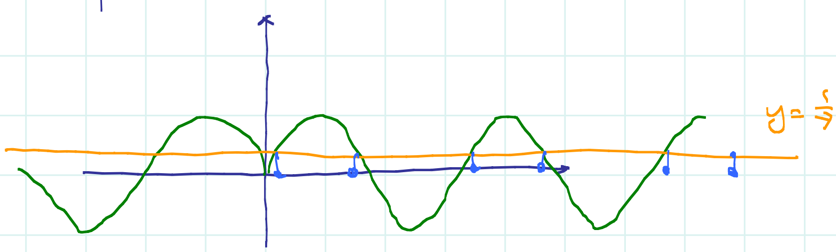
vale 1 in due punti
a distanza π
l'uno dall'altro, e
questo succede solo in
questo caso

Chiamata f la funzione,
calcolare
$f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [0,1]$ (quando x varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$,
y assume tutti e soli i valori in $[0,1]$)

$\sup\{\sin|x| : x \in [\pi, 2\pi]\} = 0$ ① $\inf = -1$
$\sup\{x \in \mathbb{R} : \sin|x| = \frac{1}{7}\} = +\infty$ ② $\inf = -\infty$

① Mondo y : fai variare x in $[\pi, 2\pi]$ e trova il valore più alto che ti viene

② Mondo x : trova tutti gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\sin|x| = \frac{1}{7}$ e prendi il loro sup



— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 16

Note Title 17/10/2024

Def. Sia $P(n)$ un predicato che parla di numeri naturali $n \in \mathbb{N}$.
Si dice che
- $P(n)$ vale **DEFINITIVAMENTE** se $P(n)$ vale da un certo punto in poi, cioè

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n) \text{ è vero } \forall n \geq n_0}$$

- $P(n)$ vale **FREQUENTEMENTE** se $P(n)$ è vero per infiniti valori di n.

Esempi

$n^2 \geq 1000$ vero definitivamente (dire $\forall n \geq 32$)
vero frequentemente

n è pari vero frequentemente
falso frequentemente
non è vero definitivamente

n, scritto in base 10, termina con le cifre 2024
vero frequentemente, ma non definitivamente

SUCCESSIONI

Def. (Rigida) Una successione di numeri reali è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$

Ad ogni indice n è associato un unico numero reale

Def. (più elastica) Come sopra, ma basta che sia definita definitivamente, cioè per n abbastanza grandi.

Esempi: $a_n = n^2$ $\qquad b_n = 2^n + n$

$c_n = \sqrt{n-27}$ ⇝ definita "solo" per $n \geq 27$, ma con la definizione elastica è ok

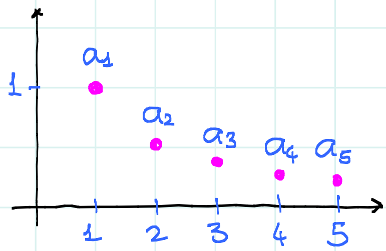
$d_n = \dfrac{1}{n-5}$ ⇝ per $n=5$ non ha senso, ma ok con definizione elastica $\forall n \geq 6$

$e_n = \sqrt{2024-n}$ ⇝ va male da 2025 in poi, quindi NON è una successione.

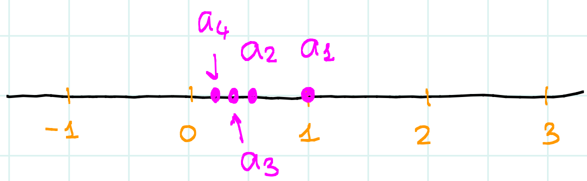
Come visualizzare una successione

Pensiamo ad $a_n = \dfrac{1}{n}$ (ok per ogni $n \geq 1$)

1. Pensiamo al "grafico", cioè ai punti (n, a_n) del piano cartesiano



2. Pensiamo alla retta reale, e segniamo i punti corrispondenti ad a_n



3. Pensiamo alla retta e allo scorrere del tempo
Dopo n secondi si accende una lampadina in a_n e resta accesa per un secondo.

— o — o —

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Andremo a definire $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n}$ limite di a_n per n che tende all'infinito

Ci sono quattro possibilità

1. $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$
2. $a_n \to +\infty$
3. $a_n \to -\infty$
4. a_n non ha limite (cioè il limite non esiste)

Definizioni nei quattro casi

Def. di ④ : Nessuno dei precedenti :)

Def. di ② : si dice che $a_n \to +\infty$ o $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \underbrace{a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0}_{a_n \geq M \text{ definitivamente}}}$$

anche enorme

M da un certo punto in poi la succ. sta a dx

Intuitivamente: le lampadine si accendono sempre più a destra

Def. di ③ : si dice che $a_n \to -\infty$ o $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M \text{ definitivamente}}$$

anche enormemente negativo

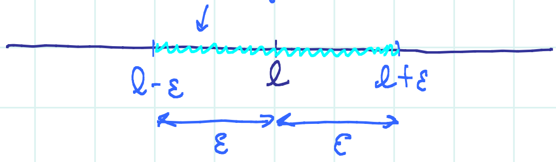
<u>Def. di</u> ① : si dice che $a_n \to \ell$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$, se

(intuitivamente: con il passare del tempo le lampadine si accendono sempre più vicino ad ℓ)

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \le a_n \le \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente}}$$

anche molto vicino a 0

a_n definitivamente sta qua



Altro modo di dire la stessa cosa

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad |a_n - \ell| \le \varepsilon \quad \text{definitivamente}}$$

$|a_n - \ell|$ = distanza tra a_n ed ℓ

<u>Due varianti di</u> ①

- Si dice che $a_n \to \ell^+$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell^+$ se

  "a_n tende ad ℓ da destra" cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell < a_n \le \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

STRETTA

- Si dice che $a_n \to \ell^-$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell^-$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \le a_n < \ell \quad \text{definitivamente}$$

STRETTA

Leggende metropolitane

① Se $a_n \to +\infty$, vuol dire che a_n è definitivamente monotona?

No! Basta pensare a Penelope ... 2 passi avanti, 1 indietro

$2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5$

② Se $a_n \to 0$, è vero che $a_n \to 0^+$ oppure $a_n \to 0^-$?

No! Basta pensare a $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

La distanza da 0 diventa sempre più piccola, ma sono alternativamente a dx e sx

③ Se $a_n \to 0^+$, è vero che a_n è definitivamente monotona?

No! Basta pensare a $\frac{1}{\text{Penelope}}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \dots$

Questa alterna passi nelle due direzioni

④ Se $a_n \to 0$ e a_n è $\boxed{\text{debolmente}}$ decrescente, è vero che $a_n \to 0^+$?

No! Se $a_n = 0$ definitivamente, allora è debolm. crescente, tende a 0, ma non a 0^+ per via della disuguaglianza stretta nella definizione $(\ell < a_n \leq \ell + \varepsilon)$

Oss. Se ci fosse "strettamente", allora sarebbe vero.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 17

Note Title 17/10/2024

Strumenti per il calcolo di limiti (versione BABY)

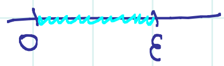
1. Definizione (si usa quasi mai)
2. Teoremi di confronto
3. Teoremi algebrici
4. Tabelline di limiti notevoli

Esempio 1 $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Uso la definizione: devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^2 \geq M$ definitivamente

- Se $M \leq 0$, allora $n^2 \geq M$ sempre, cioè $\forall n \in \mathbb{N}$
- Se $M > 0$, allora $n^2 \geq M$ per ogni $n \geq \sqrt{M}$ e questo accade definitivamente

Esempio 2 $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$



Uso la definizione: devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitivamente

La disuguaglianza $0 < \frac{1}{n}$ è vera $\forall n \geq 1$

La seconda $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ è vera $\underset{\substack{\text{molt. per } n \\ (\text{posso} \dots)}}{\Longleftrightarrow}$ $1 \leq n\varepsilon$ $\underset{\substack{\text{diviso per } \varepsilon \\ (\text{posso} \dots)}}{\Longleftrightarrow}$ $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

e anche questa è vera definitivamente.

Teoremi di confronto

CONFRONTO A 2 Siano a_n e b_n due succ. tali che

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora
- se $a_n \to +\infty$, allora anche $b_n \to +\infty$
- se $b_n \to -\infty$, allora anche $a_n \to -\infty$

[Ogni altra implicazione è abusiva]

CONFRONTO A 3 (Teorema dei CARABINIERI)

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente}$$

Supponiamo che $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$ (stesso $\ell \in \mathbb{R}$)

Allora anche $b_n \to \ell$ (stesso ℓ degli altri).

(Se i due laterali vanno nello stesso posto, allora ci va pure il centrale. I due laterali sono i carabinieri)

Dim. confronto a 2 Facciamo il caso in cui $a_n \to +\infty$

Ipotesi: $a_n \to +\infty$ Tesi: $b_n \to +\infty$

Fissato $M \in \mathbb{R}$, per ipotesi sappiamo che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_n \geq M \qquad \forall n \geq n_0$$

D'altra parte $b_n \geq a_n$, quindi pure

$$b_n \geq M \qquad \forall n \geq n_0.$$

[Stessa cosa nel caso in cui $b_n \to -\infty$].

Dim. confronto a 3

Ipotesi: $a_n \to \ell$
$c_n \to \ell$
$a_n \le b_n \le c_n$ definitiv.

Tesi: $b_n \to \ell$

Fissiamo il solito $\varepsilon > 0$. Dalle ipotesi sappiamo che

$\ell - \varepsilon \boxed{\le} a_n \le \ell + \varepsilon$ definitiv. (diciamo $\forall n \ge n_1$)

$\ell - \varepsilon \le c_n \boxed{\le} \ell + \varepsilon$ definitiv. (diciamo $\forall n \ge n_2$)

$a_n \boxed{\le} b_n \boxed{\le} c_n$ definitiv. (diciamo $\forall n \ge n_3$)

Allora per ogni $n \ge \max\{n_1, n_2, n_3\}$ si avrà che

$$\ell - \varepsilon \le a_n \le b_n \le c_n \le \ell + \varepsilon$$

e quindi

$$\ell - \varepsilon \le b_n \le \ell + \varepsilon$$

che è quello che volevo.

— o — o —

Esempio 3 $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Proviamo ad usare la definizione: devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $2^n \ge M$ definitivamente

Uno può dire che

- se $M \le 0$, allora $2^n \ge M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- se $M > 0$, allora $2^n \ge M$ se e solo se $n \ge \log_2 M$ e questo è vero definitivamente.

Per fare questo dobbiamo aver definito $\log_2 x$.
Per farlo serve che $f(x) = 2^x$, vista come $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è surgettiva.
Per dimostrare la surgettività, serve sapere prima che $2^n \to +\infty$.

Dimostrazione ufficiale del limite: partiamo da

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > -1$$

La uso con $x = 1$ e ottengo $\quad 2^n \geq n+1$

(volendo lo potevo dimostrare direttamente per induzione).

Ora concludo per confronto a 2

$$\underbrace{2^n}_{\to +\infty} \geq \underbrace{\boxed{n+1}}_{\to +\infty}$$

per confronto

(qui posso usare la definizione)

Esempio 3-bis $\quad a^n \longrightarrow +\infty \quad$ per ogni $a > 1$

Dim $\quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad$ uso $\quad x = a-1$, che è > 0

$$\underbrace{a^n}_{\to +\infty} \geq \underbrace{\boxed{1+(a-1)n}}_{\to +\infty}$$

(si fa bene per definizione)

per confronto

RETTA REALE ESTESA $\quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Su $\overline{\mathbb{R}}$ possiamo, entro certi limiti, estendere le classiche operazioni algebriche.

Ad esempio

- $7 + (+\infty) = +\infty$
  $12 \cdot (+\infty) = +\infty$
  $+\infty + (+\infty) = +\infty$
- $8 - (+\infty) = -\infty$
  $-\dfrac{\infty}{2} = -\infty$
  $\dfrac{1}{-\infty} = 0 \quad (0^-)$

$+\infty + (-\infty)$ BOH $\qquad 0 \cdot (+\infty)$ BOH $\qquad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$\boxed{\text{Teoremi algebrici}}$ (Enunciato molto brutale)

Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

(maniera veloce di includere i tipi ①, ②, ③).

Allora

$$a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$$
$$a_n - b_n \to \ell_1 - \ell_2$$
$$a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

$\boxed{\text{TRANNE}}$ nei casi in cui l'operazione richiesta tra ℓ_1 ed ℓ_2 non ha senso ($+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, dividere per 0, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Achtung! Cosa succede nei casi che rientrano nel TRANNE?

Siamo di fronte ad una FORMA INDETERMINATA, che non vuol dire tipo 4, ma solo che il limite finale non dipende solo dal limite di a_n e di b_n)

Esempio Se $a_n \to 7$ e $b_n \to +\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n}$ può fare quello che gli pare, a seconda di chi sono a_n e b_n.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 18

Note Title 17/10/2024

Tabellina di limiti

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ \searrow 0^+ & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

(si dimostrano usando la definizione)

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ \searrow 0^+ & \text{se } \alpha\in(0,1) \end{cases}$$

Il caso $\alpha>1$ si dimostra a partire da $\alpha^n \geq 1+(\alpha-1)n$

Il caso $\alpha \in (0,1)$ si deduce dal precedente osservando che

$\alpha^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}$ ora se $\alpha\in(0,1)$, allora $\frac{1}{\alpha}>1$, quindi $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \to +\infty$ e $\frac{1}{+\infty}=0$

[Caso speciale: $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$]

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} n^3-n^2$ $(+\infty-\infty = \text{forma indet.})$

Osservo che $n^3-n^2 = \underset{\downarrow\atop +\infty}{n^2}\,\underbrace{(n-1)}_{\downarrow\atop +\infty} \to +\infty$ per teo. algebrico

Esempio 1-bis $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-n$ $(+\infty-\infty = \text{forma indet.})$

Osservo che $\sqrt{n}-n = \underset{\downarrow\atop +\infty}{\sqrt{n}}\,\cdot\,\underset{\downarrow\atop -\infty}{(1-\sqrt{n})} \to -\infty$

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+7n}{7n^2+4}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty} = \text{forma indet.}\right]$

$$\frac{n^2+7n}{7n^2+4} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{7}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(7+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{7}{n}\nearrow 0}{7+\frac{4}{n^2}\searrow 0} \to \frac{1}{7}$$

Esempio 3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2-8n}{3n-4n\sqrt{n}}$ $\left[\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty} = \text{tutto indet.}\right]$

SLOGAN: CHI COMANDA SI RACCOGLIE

$$\frac{5n^2-8n}{3n-4n\sqrt{n}} = \frac{n^2\left(5-\frac{8}{n}\right)}{n\sqrt{n}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}-4\right)} = \underset{\downarrow\, +\infty}{\sqrt{n}}\ \frac{5-\frac{8}{\sqrt{n}}\nearrow 0}{\underset{\downarrow\, 0}{\frac{3}{\sqrt{n}}}-4} \to -\frac{5}{4}$$

Quindi il limite è $-\infty$.

Esempio 4 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Osservo che $-1 \leq \sin n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Divido per n conservando i versi perché $n>0$, almeno definitiv.

$$\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{n}} \leq \boxed{\frac{\sin n}{n}} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\frac{\sin n}{n}} \rightsquigarrow 0$$

(per carabinieri)

Esempio 5 $\displaystyle\frac{\cos(n!+2^n)}{3^n+n^2} \to 0$

$$-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1$$

quindi

$$\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{3^n+n^2}} \leq \underset{\rightsquigarrow\, 0}{\boxed{\frac{\cos(\text{Mostro})}{3^n+n^2}}} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{3^n+n^2}}$$

Esempio 6 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$

Brutal mode: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 2^0 = 1$

Abbiamo usato che se $a_n \to \ell$, allora $2^{a_n} \to 2^{\ell}$. Se volessi dimostrare questo, mi servirebbe prima sapere che $\sqrt[n]{2} \to 1$

Dimostrazione senza fatti misteriosi. Partiamo dalla Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Voglio avere 2 a dx, quindi uso $x = \frac{1}{n}$. Viene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

Facendo la radice n-esima : $1+\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$, ma allora

$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2}$ appena dimostrata

$$1 \leq \sqrt[n]{2} \leq 1+\frac{1}{n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

Esempio 6-bis $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a>0}$ → Tabellina

Se $a \geq 1$ possiamo scrivere la Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$ e ottenere

$$\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \geq a \quad \text{e quindi}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n} \quad \text{e si conclude con i carabinieri}$$

Se $a \in (0,1)$, allora $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ con $b = \frac{1}{a}$ e quindi $b>1$

Esempio 7 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$ ⇝ Tabellina

Abbiamo dimostrato in una lezione precedente che

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$$ [Un pezzo del binomio di Newton]

Voglio fare venire n a dx, quindi uso $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$

Così abbiamo ottenuto che $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq n$, cioè

$$\underbrace{\boxed{1}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\boxed{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}}}_{\downarrow 1}$$

Esempio 8 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{20}-20n^{17}+\cos(n)} = 1$

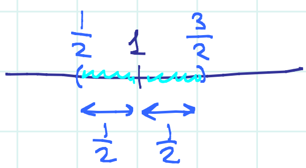
Brutal mode: $\sqrt[n]{\ldots} = \sqrt[n]{n^{20}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{20} \to 1^{20} = 1.$

Rigorosamente: raccolgo n^{20} dentro la radice

$$\sqrt[n]{n^{20}\left(1-\frac{20}{n^3}+\frac{\cos(n)}{n^{20}}\right)} = \underbrace{\boxed{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{20}}}_{\downarrow 1} \cdot \sqrt[n]{1-\underbrace{\frac{20}{n^3}}_{\downarrow 0}+\underbrace{\frac{\cos(n)}{n^{20}}}_{\downarrow 0}}$$

C'è da giustificare bene che, se $a_n \to 1$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
Se $a_n \to 1$, allora definitivamente

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$$



quindi $$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{3}{2}}}_{\downarrow 1}$$

ANALISI 1 – LEZIONE 19

Note Title 19/10/2024

→ Teorema successioni monotone

→ Il numero e

Def. Sia $\{a_n\}$ una succ. di numeri reali. Si dice che a_n è

- strett. crescente se $a_{n+1} > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ } sempre più a dx
- debol. crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ "
- strett. decrescente se $a_{n+1} < a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ } sempre più a sx
- debol. decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$ "

Oss Se a_n è strett. cresc., allora a_n è anche debolm. cresc.
" decresc " decresc.

Oss. La stessa definizione si può enunciare dicendo che a_n è

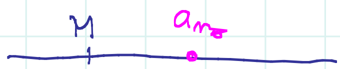
- strett. crescente se $a_m > a_n$ $\forall m > n$
- debolm. " $a_m \geq a_n$ $\forall m > n$
- strett. decr. $a_m < a_n$ $\forall m > n$
- debolm. decr $a_m \leq a_n$ $\forall m > n$

In tutti questi casi la succ. si dice MONOTONA.

Teorema successioni monotone | Caso crescente

Sia a_n una succ. debolm. crescente (se lo è strett., ancora meglio)
Allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (solo 2 casi su 4)
Inoltre $\ell = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Versione decrescente: sia a_n una succ. debolm. decrescente.
Allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Inoltre $\ell = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$



$\boxed{\text{Dim. caso crescente}}$ Ci sono due casi

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. Devo dim. che $a_n \to +\infty$.
  Mi viene dato $M \in \mathbb{R}$. Per caratt. di sup $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
  $a_{n_0} \geq M$. Per la debole crescenza $a_n \geq M$ per ogni $n \geq n_0$,
  quindi definitivamente

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \ell \in \mathbb{R}$. Devo dimostrare che $a_n \to \ell$, cioè
  $\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon \qquad$ definitivamente
  Per caratterizzazione di sup, $a_n \leq \ell$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi
  la disug. di dx è gratis.
  Inoltre, sempre per caratt. di sup.,
  esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq \ell - \varepsilon$.

  Ma allora $a_n \geq \ell - \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$ grazie alla debole
  crescenza.

— o — o —

Esercizio Capire la dimostrazione e riscriverla nel caso decrescente.

— o — o —

$\boxed{\text{IL NUMERO } e \text{ (NUMERO DI NEPERO)}}$

$\boxed{\text{Teorema}}$ La successione

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è debolmente crescente e compresa tra 2 e 3.
Per il teorema delle succ. monotone ha un limite, che si
indica con la lettera e, compreso tra 2 e 3

$$e = 2{,}718\ldots$$

$\boxed{\text{Dim. che } e_n \geq 2 \quad \forall n \geq 1}$ $\qquad (1+x)^n \geq 1+nx \qquad x = \frac{1}{n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$$

più facile che $e_{n+1} \geq e_n$

$\boxed{\text{Dim. che } e_n \text{ è debolm. crescente}}$ Dim. che $\boxed{e_n \geq e_{n-1}}$

$$e_n \geq e_{n-1} \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \qquad \left[\cdot \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right]$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \underbrace{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}\ \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$ con $x = -\frac{1}{n^2}$ (serviva $x > -1$ e qui lo è, almeno per $n \geq 2$)

$\boxed{\text{Dimostrazione che } e_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

binomio di Newton

Cerchiamo di stimare ogni termine

$\boxed{k=1}$ $\quad \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$

$\boxed{k=2}$ $\quad \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} = \frac{\boxed{n(n-1)}}{2!}\frac{1}{\boxed{n^2}} \leq \frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2}$ $\qquad \leq 1$ denom. $\geq$ numeratore

$\boxed{k=3}$ $\displaystyle \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{3!} \leq \frac{1}{4}$ $\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \leq 1$

⋮ in generale

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ termini}}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Le disuguaglianze di destra seguono dal fatto che $\boxed{k! \geq 2^{k-1}}$, cosa che è un facile esercizio per induzione.

MORALE: $\displaystyle \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ per ogni $k = 1, \ldots, n$.

Quindi

$$e_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

l'esponente di 2 va da 0 a $n-1$

SHIFT degli indici

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

uso che $\displaystyle \sum_{k=0}^{i} a^k = \frac{a^{i+1}-1}{a-1}$ (dimostrato a suo tempo per induzione)

$$= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

— o — o —

Oss. La disug. usata precedentemente è

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \text{per ogni } k = 1, \ldots, n$$

Questa volendo si dimostra a parte per induzione.

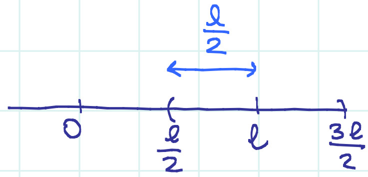
ANALISI 1 – LEZIONE 20

Note Title 19/10/2024

Teoremi di tipo permanenza del segno

Se $a_n \to \ell > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di limite con $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$



Ottengo che

$$\ell - \underbrace{\frac{\ell}{2}}_{\varepsilon} \leq a_n \leq \ell + \underbrace{\frac{\ell}{2}}_{\varepsilon} \quad \text{definitiv.}$$

Questo dimostra che $a_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$ definitiv.

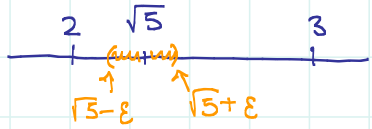
Se $a_n \to +\infty$, allora $a_n > 0$ definitiv.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di lim. con $M = 2024$ e ottengo che

$$a_n \geq 2024 \quad \text{definitiv.}$$

Se $a_n \to \sqrt{5}$, allora $2 \leq a_n \leq 3$ definitiv.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta prendere $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che



$$2 < \sqrt{5} - \varepsilon \quad \text{e} \quad \sqrt{5} + \varepsilon < 3$$

Sappiamo che definitiv. $\sqrt{5} - \varepsilon \leq a_n \leq \sqrt{5} + \varepsilon$

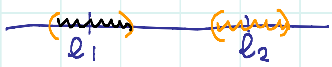
— o — o —

Teorema misterioso (Unicità del limite)

Ogni successione ha uno e uno solo dei possibili comportamenti ①, ②, ③, ④

Se inoltre è di tipo ①, allora il valore del limite ℓ è unico

Definitivamente dovrebbe stare in due intervalli disgiunti!



Tre criteri per i limiti di successioni

→ Criterio della RADICE

→ Criterio del RAPPORTO

→ Criterio RAPPORTO → RADICE

CRITERIO DELLA RADICE Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ definitiv. (serve per fare le radici)

(ii) $\sqrt[n]{a_n} \to L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora

- se $L < 1$, allora $a_n \to 0$
- Se $L > 1$ (incluso il caso $L = +\infty$), allora $a_n \to +\infty$
- Se $L = 1$, allora BOH.

CRITERIO DEL RAPPORTO Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n > 0$ definitiv. (serve per fare i rapporti)

(ii) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora ... esattamente come nel caso della radice.

<u>Come si usano operativamente ?</u>

Devo fare il limite di a_n ma non sono capace.

Magari sono capace di calcolare il limite di

$$\sqrt[n]{a_n} \qquad \text{oppure di} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se uno di questi due lo so fare, e viene che esiste ed è $\neq 1$, allora ho la risposta per quanto riguarda il limite di a_n.

$\boxed{\text{CRITERIO RAPPORTO} \to \text{RADICE}}$

Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n > 0$ definitivamente

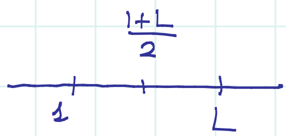
(ii) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow L \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L$ (stesso L, compreso il caso $L=1$)

$\boxed{\text{Dim. radice}}$

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to L \in \mathbb{R}$ con $L > 1$.

Allora per le storie di permanenza del segno, si avrà che



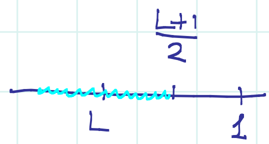
$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{L+1}{2} \quad \text{definitiv.}$$

Ma allora $\underbrace{a_n}_{+\infty} \geq \underbrace{\boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^n}}_{+\infty \text{ perché base fissa } > 1}$ definitiv.

quindi $a_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{Caso 1-bis}}$ Se $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$, allora $\sqrt[n]{a_n} \geq 2024$ definitiv., quindi $a_n \geq 2024^n$ definitiv, ...

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Se $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L < 1$, allora definitivamente

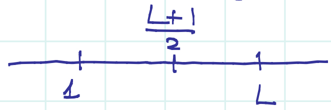


$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2}$$

e quindi $\underbrace{\boxed{0}}_{0} \leq \underbrace{a_n}_{0 \text{ per i carabinieri}} \leq \underbrace{\boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^n}}_{0 \text{ esponenziale con base fissa in } [0,1)}$ definitivamente

— o — o —

$\boxed{\text{Dim rapporto}}$ Facciamo solo il caso $L > 1$ (l'altro è uguale)



Per i soliti discorsi sappiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{L+1}{2} \quad \text{definitiv., diciamo per } n \geq n_0$$

Allora $\quad a_{n_0+1} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right) a_{n_0}$ $\quad$ (posso molt. perché sono >0)

$$a_{n_0+2} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right) a_{n_0+1} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$$

$$a_{n_0+3} \geq \dots \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^3 a_{n_0}$$

e quindi per induzione $\quad \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{a_{n_0+k}}} \geq \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^k a_{n_0}}}}$

— o — o —

Esempio 1 $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^2} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$

Proviamo con il rapporto con $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{n^2+2n+1} \longrightarrow 3 > 1 \quad \rightsquigarrow \quad a_n \longrightarrow +\infty$$

Più in generale: $\quad \boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1 \text{ e } b \geq 0}$

Tabellina: esponenziale con base >1
batte le potenze

Rapporto diventa

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)^b} \cdot \frac{n^b}{a^n} = a \cdot \underset{1}{\underset{\downarrow}{\boxed{\left(\frac{n}{n+1}\right)^b}}} \longrightarrow a > 1$$

Esempio 2 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2024^n} = +\infty}$ Tabellina: fattoriale batte esponenziale

Rapporto con $a_n = \frac{n!}{2024^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2024^{n+1}} \cdot \frac{2024^n}{n!} = \frac{1}{2024}(n+1) \longrightarrow +\infty > 1$$

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n}!} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1 \quad \rightsquigarrow \quad a_n \longrightarrow +\infty$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 21

Note Title 19/10/2024

Esempio 1 $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} = +\infty$

[Occhio: le torri di esponenziali si interpretano da in alto a dx, cioè

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} \quad]$$

Achtung! Esponenziale perde da fattoriale se ha come esponente n.

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{n^2}} = \frac{3^{\cancel{n^2}+2n+1} \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!} \cdot 3^{\cancel{n^2}}}$

$$= \frac{3^{2n+1}}{n+1} \to +\infty > 1, \text{ quindi } a_n \to +\infty$$

Esempio 2 $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$ ⇝ Tabellina

Uso rapporto → radice con $a_n = n!$

se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to L$ (stesso L)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \to +\infty \implies \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$$

Esempio 3 $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}}$ Tabellina

Osservo che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$, quindi provo rapporto → radice con $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{(n+1)^n\,\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

Esempio 4 $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{2n}} = \frac{27}{4}$

Rapporto $\to$ Radice con $a_n = \binom{3n}{2n} = \frac{(3n)!}{(2n)!\, n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{(2n+2)!\,(n+1)!} \cdot \frac{(2n)!\, n!}{(3n)!}$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(3n)!}}$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \to \frac{27}{4}$$

(Basta raccogliere n in ogni parentesi)

Esempio 5 $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \frac{4}{e^2}$

Lo scrivo come $\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$

Ora uso il rapporto $\to$ radice con $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2\,(n+1)^{2n}} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}}}_{\downarrow\ 4} \underbrace{\boxed{\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}}}}_{\downarrow\ \frac{1}{e^2}}$$

Ho usato che $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \to e^2$

Esempio 6 $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = 0$

Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} < 1 \rightsquigarrow a_n \to 0$$

Esempio 7 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$$

$a_1=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}$ $\quad a_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$ $\quad a_3=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}$ ...

Esempio 7bis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=+\infty$

$\boxed{\text{Dim. del 7}}$ $\quad 0\leq \text{somma}\leq \underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{\text{termine più grande}}\cdot\underbrace{\boxed{(n+1)}}_{\text{numero dei termini}}$

A questo punto è fatta per i carabinieri $\frac{n+1}{n^2}\to 0$

$\boxed{\text{Dim del 7-bis}}$ $\quad \text{somma}\geq \underbrace{\boxed{(n+1)}}_{\text{numero di termini}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{\text{termine più piccolo}}$

Ora basta osservare che $\frac{n+1}{\sqrt{2n}}\to+\infty$

Esempio 8 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{7^n-n^{2000}\cdot 5^n+n}=7$

Brutal mode: $\sqrt[n]{\dots}\sim\sqrt[n]{7^n}=7$

Raccolgo 7^n: $\displaystyle\sqrt[n]{\dots}=\underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_{=7}\cdot\sqrt[n]{1-\underbrace{\boxed{n^{2000}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n}}_{\downarrow\, 0}+\underbrace{\boxed{\frac{n}{7^n}}}_{\downarrow\, 0}}$

$$\frac{n^{2000}}{\left(\frac{7}{5}\right)^n}$$

e da qui si chiude.

ANALISI 1 – LEZIONE 22

Note Title 24/10/2024

Limiti di funzioni Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

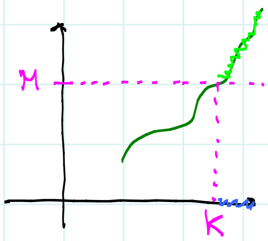
Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione

Andremo a definire

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x)}$ $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ con } x_0 \in \mathbb{R}}$

Limite per $x \to +\infty$ Prerequisito: $\sup D = +\infty$, cioè D non è limitato superiormente

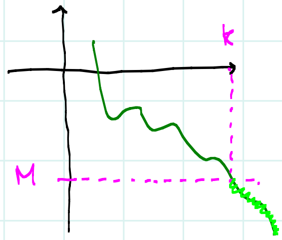
Ci sono le solite 4 possibilità



Def Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

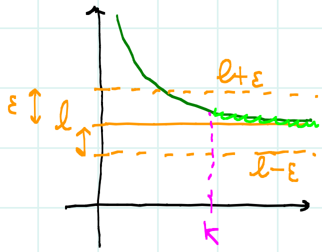
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M$ $\forall x \in D$ con $x \geq K$



Def. Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in D$ con $x \geq K$



Def. Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

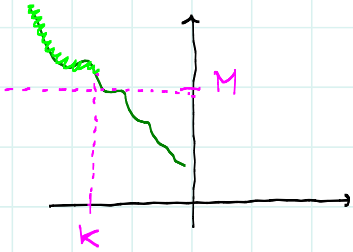
$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ $\forall x \in D$ con $x \geq K$

$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

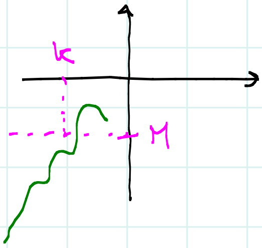
Def. Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste se non rientra in nessuno dei casi precedenti

$\boxed{\text{Limite per } x \to -\infty}$ Prerequisito: $\inf D = -\infty$, cioè D non limitato inferiormente



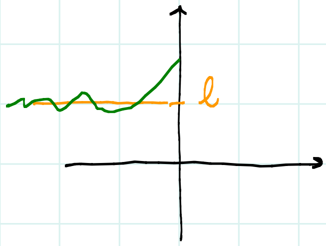
Def. Si dice che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M$ $\forall x \in D$ con $x \leq K$



Def. Si dice che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in D$ con $x \leq K$



Def. Si dice che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ $\forall x \in D$ con $x \leq K$
$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Def. Si dice .... non esiste ... se ... nessuno dei precedenti

Valgono le solite varianti con ℓ^+ ed ℓ^-.
Ad esempio

$f(x)$ tende a ℓ da sx o dal basso

- si dice che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{\ell^-}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \boxed{<} \ell$ $\forall x \in D$ con $x \geq K$

stretto

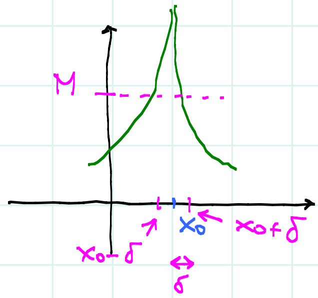
- Si dice che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell^+$ se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell \boxed{<} f(x) \leq \ell + \varepsilon$ $\forall x \in D$ con $x \leq K$

$\boxed{\text{Limite per } x \to x_0}$ Prerequisito: per ogni $\delta > 0$ l'insieme $[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D$ contiene almeno un punto diverso da x_0, cioè

$$\boxed{[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset}$$

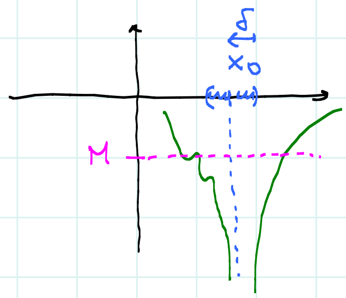
In questo caso si dice che x_0 è un $\boxed{\text{punto di accumulazione}}$ per D



Def. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

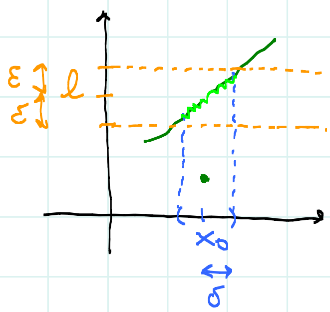
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$
$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \underbrace{\{x_0\}}$

↑ il limite se ne frega del valore della funzione in x_0
Anzi: $f(x_0)$ potrebbe non essere nemmeno definito



Def. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$
$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \{x_0\}$



Def. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

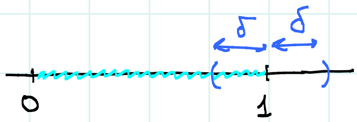
$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$
$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \{x_0\}$

Def. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste ... nessuno dei precedenti

<u>Oss.</u> Se $f : \overbrace{(0,1)}^{D} \to \mathbb{R}$, allora non ha senso calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Ha senso calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ quando $x_0 \in [0,1]$ estremi COMPRESI

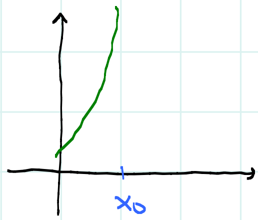


Ogni intervallo $[1-\delta, 1+\delta]$ interseca D in un p.to $\neq 1$.
Questo vuol dire che 1 è un p.to di accumulazione per $(0,1)$.

$\boxed{\text{Varianti}}$ Si possono definire $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

x tende a x_0 da dx/sx

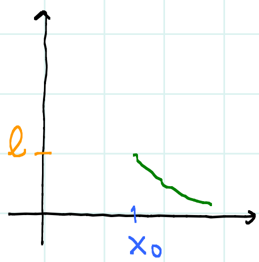
- Si dice che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ se



$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$
$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0) \cap D$

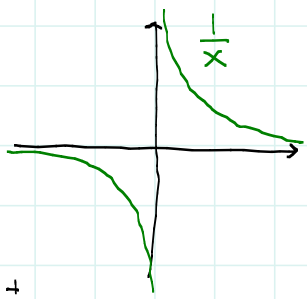
escluso (guardo solo quello che succede a sx di x_0)

- Si dice che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^-$ se



$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell$
$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta] \cap D$

<u>Esempio</u> Prendiamo $f(x)$ con $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

ANALISI 1 – LEZIONE 23

Note Title 24/10/2024

Strumenti elementari per il calcolo di limiti di funzioni

- → teoremi di confronto a 2 e a 3
- → teoremi algebrici

esattamente come con le successioni

- → funzioni continue
- → limiti notevoli
- → cambi di variabile

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione
Si dice che f è continua in $x_0 \in D$ se succede una di queste due cose

→ x_0 è isolato in D, cioè se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D = \{x_0\}$
(cioè se in tutto l'intervallo x_0 è l'unico elemento di D)

→ x_0 è un p.to di accumulazione per D e

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

operativamente: per fare il limite basta sostituire il valore

Volendo scrivere in simboli, la definizione diventa

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \text{t.c.} \;\; f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D}$$

"quando x è vicino a x_0, allora $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$"

Metateorema (Molto misterioso) Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua in tutti i p.ti in cui non presenta problemi burocratici di definizione (denominatori $= 0$, radice (roba < 0), log (roba ≤ 0) e così via)

Cosa servirebbe per dimostrarlo

1. Le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione (va fatto caso per caso)
2. Teoremi algebrici (somma, prodotto, quoziente)
3. La composizione di funzioni continue è continua.

Esempio $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\cos x + \sqrt{x})}{2^{x^2} + \arctan(\sin x)} = 0$

per colpa di $\sqrt{x}$

Quando $x \to 0$, allora
$$\cos x \to \cos 0 = 1$$
$$\sqrt{x} \to \sqrt{0} = 0$$
$$2^{x^2} \to 2^0 = 1$$
$$\arctan(\sin x) \to \arctan(\sin 0) = 0$$

Quindi tutto tende a $\displaystyle\frac{\log(1)}{1} = 0$

In poche parole, bastava sostituire $x = 0$ e non c'erano problemi

Oss. $\log x = \ln x$ si intende $\log_e x$

numero di Nepero

$\operatorname{Log} x = \log_{10} x$

L maiuscola

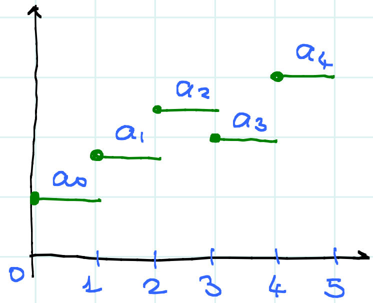
$\boxed{\text{Criterio successioni} \to \text{funzioni}}$ (I limiti di successioni aiutano i limiti di funzioni)

Esempio $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^{100}} = +\infty$ per lo stesso motivo per cui

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n^{100}} = +\infty$$

Lemma Consideriamo una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ che sia costante a tratti di lunghezza 1, cioè

$$f(x) = a_n \qquad \forall x \in [n, n+1)$$



Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} a_n$

Dim. Qualunque cosa che la successione fa per $n \geq n_0$, la funzione $f(x)$ lo fa per $x \geq x_0$

— o — o —

Usando il lemma dimostriamo per bene che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^{100}} = +\infty$$

Facciamo un confronto. Se $x \in [n, n+1)$, allora

$$f(x) = \frac{2^x}{x^{100}} \geq \frac{2^n}{(n+1)^{100}}$$

← numeratore + piccolo
← denominatore + grande

$\frac{2^x}{x^{100}} \to +\infty$ per confronto a due

$\frac{2^n}{(n+1)^{100}} \to +\infty$ per il criterio del rapporto

Esempio 2 $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (per analogia con le succ.)

$\boxed{\text{Dim}}$ Quando $x \in [n, n+1)$, allora

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}_{\text{base + piccola}}{}^n \quad \leftarrow \text{esponente + piccolo}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}}_{\to 1}$$

Occhio! Questo non basta perché mi serve fare i carabinieri

$$\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}}_{\downarrow\, e} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\downarrow\, e}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}_{\downarrow\, 1}$$

<u>Esempio di cambio di variabili</u> $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Occhio: ora $x \to -\infty$ [viene qualcosa del tipo $1^{-\infty}$]

Pongo $y=-x$. Quando $x\to-\infty$, ho che $y\to+\infty$. Diventa

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

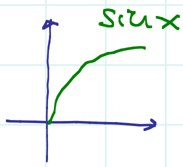
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}}_{\downarrow\, e}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}}_{\downarrow\, 1} = e$$

Volendo nell'ultimo limite si poteva fare un ulteriore cambio di variabili ponendo $z=y-1$. Ora quando $y\to+\infty$ ho che $z\to+\infty$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e$$



<u>Esempio</u> $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ $[1^\infty]$

Pongo $y=\dfrac{1}{\sin x}$. Quando $x\to0^+$ ho che $\sin x\to0^+$, quindi $\dfrac{1}{\sin x}\to+\infty$ e quindi diventa

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 24

Note Title 24/10/2024

LIMITI NOTEVOLI

PADRI $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

FIGLI $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a \quad (\text{per } a>0)$

NIPOTI $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

LIMITE DIMENTICATO $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x = 0$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1^2}\underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}}_{\to \frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$$

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x\to 0$ ho che $y \to \arctan 0 = 0$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} = 1$$

Stessa cosa per $\arcsin x$

$\boxed{\text{Dim limiti con esponenziali e logaritmi}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

propr. dei log

Ora pongo $y = \frac{1}{x}$. Quando $x \to 0^+$, allora $y \to +\infty$ e quindi diventa

$$\lim_{y\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1$$

Analogamente, per $x \to 0^-$ avremo che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to-\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]$$

Uso limite leg. precedente

$$= \log e = 1$$

— o — o —

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Pongo $y = e^x - 1$

Quando $x \to 0$, ho che $y \to e^0 - 1 = 0$

Ricavo x : $e^x = y + 1 \rightsquigarrow x = \log(y+1)$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

— o — o —

<u>Limite dimenticato</u> : $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log x \quad [0\cdot(-\infty)]$

Pongo $y = \log x$ da cui $x = e^y$. Quando $x \to 0^+$ ho che $y \to -\infty$ quindi diventa

$$\lim_{y\to-\infty} e^y \cdot y \qquad [0\cdot(-\infty)]$$

Pongo ora $z=-y$. Quando $y \to -\infty$ ho che $z \to +\infty$ e diventa

$$\lim_{z\to+\infty} e^{-z}(-z) = \lim_{z\to+\infty} -\frac{z}{e^z} = 0 \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

esponenziale batte potenza

— o — o —

TRUCCO DELL'ESPONENZIALE

Base ed esponente strani : E ALLA!

$$\boxed{A^B = e^{\log(A^B)} = e^{B\log A}}$$

Quindi in particolare $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log f(x)}$

In questo modo gli esponenziali diventano prodotti!

$$\lim_{x\to0}\frac{7^x-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{x\log7}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\underbrace{\boxed{\frac{e^{x\log7}-1}{x\log7}}}_{\to 1}\cdot\log7 = \log 7$$

(Pongo $y = x\log 7$)

Esercizio 1 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin(2x)} = \frac{1}{2} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$

Smontaggio dei limiti notevoli

$$\frac{e^x-1}{\sin(2x)} = \frac{e^x-1}{x}\,\frac{x}{\sin(2x)} = \underbrace{\boxed{\frac{e^x-1}{x}}}_{\to1}\,\underbrace{\boxed{\frac{2x}{\sin(2x)}}}_{\to1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{\to\frac{1}{2}}$$

Pongo $y=2x$

<u>Esercizio 2</u> $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - \cos x}{\log(1+\sin x)} = 1$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{e^{\arctan x} - \cos x}{\log(1+\sin x)} = \boxed{\frac{\sin x}{\log(1+\sin x)}} \frac{e^{\arctan x} - \cos x}{\sin x}$$

$\downarrow$ 1 (basta porre $y = \sin x$)

Esaminiamo l'altro pezzo

$$\frac{e^{\arctan x} - 1 + 1 - \cos x}{\sin x} = \frac{e^{\arctan x} - 1}{\sin x} + \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$\downarrow$ 1 $\quad\downarrow$ 0

Facciamoli uno per uno

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{\sin x} = \boxed{\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x}} \boxed{\frac{\arctan x}{x}} \boxed{\frac{x}{\sin x}}$$

$\downarrow$ 1 ($y = \arctan x$) $\quad\downarrow$ 1 $\quad\downarrow$ 1

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{x^2}{\sin x} = \boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}} \boxed{\frac{x}{\sin x}} \boxed{x}$$

$\downarrow \frac{1}{2} \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 0$

<u>Esempio 3</u> $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} = \log 2$

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \to 0$ ho che $y \to \cos 0 = 1$, quindi viene

$$\lim_{y\to 1} \frac{\log(1+y)}{y} = \frac{\log(2)}{1} = \log 2$$

[Si poteva vedere dall'inizio perché non è forma indeterminata]

Esempio 4 $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ $1^\infty \rightsquigarrow$ indeterminato

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{\sin^2 x}\log(\cos x)}$$

Ora mi occupo dell'esponente:

$$\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\log(1+\overbrace{\cos x - 1}^{y\to 0})}{\sin^2 x}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+\cos x-1)}{\cos x-1}}}_{\downarrow\ 1} \underbrace{\boxed{\frac{\cos x-1}{x^2}}}_{\downarrow\ -\frac{1}{2}} \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{\sin^2 x}}}_{\downarrow\ 1} \to -\frac{1}{2}$$

$y = \cos x - 1$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 25

Note Title 26/10/2024

$\boxed{\text{LIMITE } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Supponiamo di sapere che $\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Dividendo per $\sin x$ troviamo (tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ si ha che $\sin x > 0$)

$$\underbrace{\boxed{1}}_{\downarrow\ 1} \leq \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\downarrow\ 1} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\downarrow\ 1} \qquad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

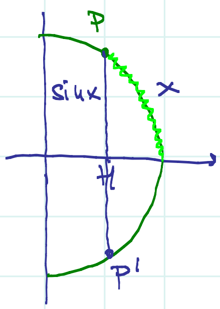
Per i carabinieri avremmo che $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ e quindi anche

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

Per $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$ basta osservare che $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari, cioè $f(-x) = f(x)$ e quindi il lim per $x \to 0^+$ è uguale a quello per $x \to 0^-$.

Quindi tutto sta a dimostrare che

$$\boxed{\sin x \leq x \leq \tan x \qquad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})}$$

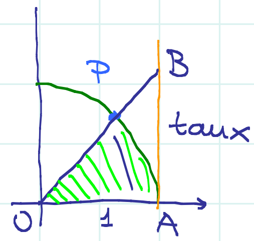


Guardando la figura:

lungh. segmento $PP' = 2\sin x$

lungh. arco $PP' = 2x$

Basta dire che lungh. segm. $\leq$ lungh. arco



Area triangolo $OAB = \frac{1}{2}\tan x$

Area settore OPA : Area cerchio $= x : 2\pi$

Area settore $= \frac{x \cdot \pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$

Area sett. $\leq$ Area OAB

$\boxed{\text{CRITERIO FUNZIONI} \to \text{SUCCESSIONI}}$ I limiti di funzione aiutano i limiti di successioni

Esempio $\lim_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n}$ [$+\infty \cdot \sin 0 = +\infty \cdot 0 \rightsquigarrow$ forma indet.]

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \to +\infty$ ho che $x \to 0^+$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\boxed{\text{Enunciato}}$ Sia $\{a_n\}$ una successione.
Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto
Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (può essere anche $\pm\infty$)

Supponiamo che

(i) $x_n \longrightarrow x_0$

(ii) $x_n \in D$ ~~defitiv~~definitivamente e $x_n \neq x_0$

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $f(x_n) \longrightarrow \ell$

[Brutalmente: pongo $x = x_n$ e ho che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \text{]}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Facciamo per semplicità il caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$.
Devo dim. che $f(x_n) \to \ell$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

Per l'ipotesi (iii) sappiamo che $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D \setminus \{x_0\}$$

D'altra parte per le ipotesi (i) e (ii) sappiamo che

$x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $x_n \in D$ e $x_n \neq x_0$ definitiv. $\square$

Idea: per n grande x_n è vicino a x_0
e quando x_n è vicino a x_0, $f(x_n)$ è vicino a ℓ.

Esempio 2 $\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{26} - 1\right)$ $[+\infty \cdot (1-1) = +\infty \cdot 0]$

$$n\left(\sqrt[n]{26} - 1\right) = \frac{\sqrt[n]{26} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{26^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \qquad \text{Pongo } x = \frac{1}{n} \ldots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{26^x - 1}{x} = \log 26$$

Esempio 3 $\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ $[+\infty \cdot 0]$

$$n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}\log n} - 1}{\frac{1}{n}} = \underbrace{\boxed{\frac{e^{\frac{1}{n}\log n} - 1}{\frac{1}{n}\log n}}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\boxed{\log n}}_{\downarrow \atop +\infty}$$

Per dire che il primo tende a 1 serve che $x = \frac{\log n}{n} \to 0$
e questo è vero perché le potenze battono i logaritmi.

FATTO GENERALE

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = 0 \qquad \forall a > 0 \quad \forall b > 0}$$

idem per le successioni

Per dimostrarlo pongo $y = \log x$, da cui $x = e^y$.
Osservo che $y \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e quindi diventa

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y^a}{(e^y)^b} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^a}{(e^b)^y} = 0$$

perché esponenziale batte potenza

$e^b > 1$ poiché $b > 0$.

Esempio 4 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(5+2^x)}{x} = \log 2$

I log che perdono dalle potenze sono quelli che hanno x come argomento

Brutalmente: $\frac{\log(5+2^x)}{x} \sim \frac{\log(2^x)}{x} = \frac{x \cdot \log 2}{x} = \log 2$

Rigorosamente: $\frac{\log(5+2^x)}{x} = \frac{\log\left[2^x \cdot \left(1+\frac{5}{2^x}\right)\right]}{x}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. log}}}{=} \frac{x\log 2 + \log\left(1+\frac{5}{2^x}\right)}{x} = \log 2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\boxed{\log\left(1+\frac{5}{2^x}\right)}}_{\downarrow\, \log 1 = 0}$$

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

$a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$

Analog: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$)

Esempio 5 $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Voglio dim. che tende a 0: basta che dim. che

$$\left|\frac{1-\cos x}{\tan x}\right| \cdot \left|\sin \frac{1}{x}\right| \to 0$$

$$\underset{\downarrow\, 0}{0} \le \left|\frac{1-\cos x}{\tan x}\right| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le \underbrace{\left|\frac{1-\cos x}{\tan x}\right|}_{\downarrow\, 0}$$

$$\frac{1-\cos x}{\tan x} = \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\tan x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 26

Note Title 26/10/2024

$\boxed{\text{SOTTOSUCCESSIONI}}$ Sia a_n una succ. di numeri reali.
Una sottosuccessione si ottiene prendendo solo alcuni termini della successione

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad \dots$$

Più formalmente, data una successione n_k di interi ≥ 0 strettamente crescente, posso considerare la sottosucc.

$$a_{n_k}$$

n_k sono gli indici che sto pescando: nell'esempio $0, 2, 3, 6, 8$

Esempi

a_{2n} = sottosucc. dei termini con indice pari
$= a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

a_{2n+1} = ... termini con indice dispari
$= a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$

$a_{n^2} = a_0, a_1, a_4, a_9, \dots$

$\boxed{\text{Fatto fondamentale}}$ Se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (quindi siamo nei casi ①, ②, ③ della def. di limite)
allora $\boxed{\text{tutte}}$ le sue sottosuccessioni $\to \ell$ (stesso ℓ)

$\boxed{\text{CONSEGUENZA}}$ Se una succ. $\{a_n\}$ ha due sottosuccessioni che hanno limiti ℓ_1 ed ℓ_2 DIVERSI, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n$ NON esiste (quindi tipo ④)

Se esistesse il limite di a_n, tutte le sottosucc. dovrebbero avere lo stesso limite.

$\boxed{\text{Operativamente}}$ Come dimostro che $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste?

Basta trovare due sottosucc. con limiti diversi!

Esempio 1 $\quad a_n = (-1)^n \qquad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Basta osservare che $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$

Essendo diversi, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste.

Esempio 2 $\quad \lim_{n\to+\infty} (3n - n^2)^n \qquad [(-\infty)^{+\infty}]$

$$a_{2n} = (6n - 4n^2)^{2n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{l'esponente è pari}\\ A^{\text{pari}} = (-A)^{\text{pari}}}}{=} (4n^2 - 6n)^{2n} \longrightarrow +\infty \qquad (+\infty^{+\infty})$$

$$a_{2n+1} = (6n+3 - (2n+1)^2)^{2n+1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{esponente dispari}\\ \rightsquigarrow \text{ il } - \text{ esce fuori}}}{=} -[(2n+1)^2 - (6n+3)]^{2n+1} \to -\infty \qquad -[+\infty]^{+\infty}$$

Ancora una volta il limite non esiste.

Esempio 3 $\quad \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}_{a_n} \qquad 0, \underset{a_1}{1}, 0, -1, 0, \underset{a_5}{1}, 0, -1, \dots$

L'idea è che il limite non esiste

$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Avrei potuto fare anche $\quad a_{4n+3} = \dots = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \to -1$

—o—o—

$\boxed{\text{Analogo per le funzioni}}$ Come dimostro che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste?

(si intende che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$)

Basta che trovo due successioni $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$

quello dove tende x

tali che $f(a_n) \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ con $\ell_1 \neq \ell_2$

$f(b_n) \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

[Se fosse che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per quanto visto alla lez. prec. anche $f(a_n)$ e $f(b_n)$ tenderebbero allo stesso ℓ]

__Esempio 4__ $\lim_{x \to +\infty} \cos(x^2)$

L'idea è che il limite non esiste. Devo trovare

$a_n \to \boxed{+\infty}$ $\qquad \cos(a_n^2) \to \ell_1$

$b_n \to \boxed{+\infty}$ $\qquad \cos(b_n^2) \to \ell_2$

sto facendo il lim. per $x \to +\infty$

Posso prendere $a_n = \sqrt{2\pi n} \to +\infty$ e $\cos(a_n^2) = \cos(2\pi n) = 1 \to 1$

$b_n = \sqrt{\pi + 2\pi n} \to +\infty$ e $\cos(b_n^2) = \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \to -1$

__Esempio 5__ $\lim_{x \to \boxed{0^+}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

L'idea è che non esiste. Devo trovare

$a_n \to \boxed{0^+}$ $\qquad \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \to \ell_1$ $\qquad \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) \to \ell_2$

$b_n \to \boxed{0^+}$ $\qquad$ con $\ell_1 \neq \ell_2$

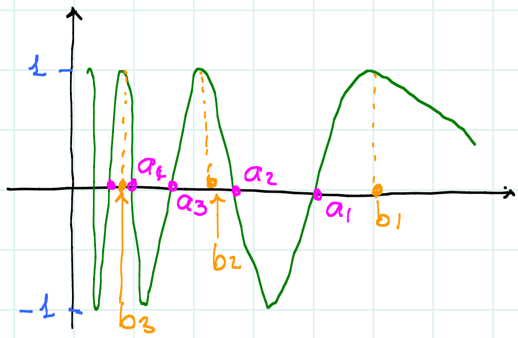
Posso prendere $a_n = \dfrac{1}{\pi n}$ così $a_n \to 0^+$ e

$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin(\pi n) = 0 \to 0$

$b_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ così $b_n \to 0^+$ e $\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$= 1 \to 1$

Interpretazione grafica



Volendo potevo usare $c_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$ così $c_n \to 0^+$ e $\sin\left(\frac{1}{c_n}\right) \to -1$

Esempio 6 $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x} \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x \cdot \cos\frac{1}{x}$

$= 0 \qquad$ Non esiste

Per il 1° limite usiamo il trucco del valore assoluto

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \leq |\sin x| \cdot \overbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}^{\leq 1} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{|\sin x|}}$$

Per i carabinieri $\lim\limits_{x\to 0^+} |\sin x| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| = 0$, e quindi lo stesso vale senza i valori assoluti

Per dimostrare la non esistenza del secondo, cerco

$a_n \to 0^+$ t.c. $\cos a_n \cdot \cos\frac{1}{a_n} \to \ell_1$

con $\ell_1 \neq \ell_2$

$b_n \to 0^+$ t.c. $\cos b_n \cdot \cos\frac{1}{b_n} \to \ell_2$

$a_n = \frac{1}{2\pi n}$ così $a_n \to 0^+$ e

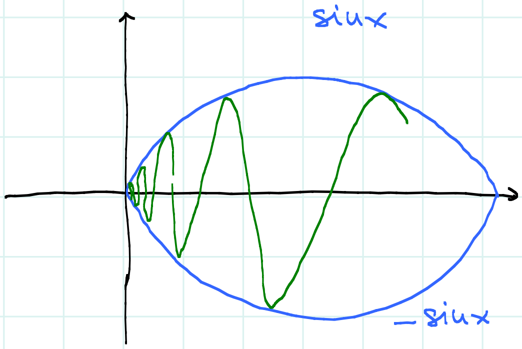
$$\cos a_n \cdot \cos \frac{1}{a_n} = \cos\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \cdot \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1} = \cos\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \to \underset{=1}{\cos 0}$$

$b_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$ così $b_n \to 0^+$ e

$$\cos b_n \cdot \cos \frac{1}{b_n} = \cos\left(\frac{1}{2\pi n+\pi}\right) \cdot \underbrace{\cos(2\pi n + \pi)}_{=-1}$$

$$= -\cos\left(\frac{1}{2\pi n+\pi}\right) \to -\cos 0 = -1$$

Come è fatto il grafico di $\sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$?



$\boxed{\sin x} \cdot \boxed{\sin \frac{1}{x}}$

smorza le oscillazioni quando $x \to 0^+$

fa oscillare sempre di + quando $x \to 0^+$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 27

Note Title 26/10/2024

Esercizio 1 $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-25}\right)$ $[+\infty-\infty]$

Idea: $\sqrt{A}-\sqrt{B} = (\sqrt{A}-\sqrt{B})\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-25}\right)\frac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = \frac{\cancel{x}+3-\cancel{x}+25}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-25}} \to 0 \quad \left[\frac{28}{+\infty}\right]$$

Esercizio 2 $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-\cos x}+x$ $[+\infty-\infty]$

Achtung! Non pensare nemmeno di fare $\sqrt{\dots}+x \sim \sqrt{x^2}+x$
$= x+x = 2x \to -\infty$

L'errore è che $\sqrt{x^2}=x$ va bene per x positivi, in generale
$\sqrt{x^2} = |x|$

Poniamo $y=-x$ così diventa lim per $y\to+\infty$:

$$\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y^2-y-\cos y}-y \qquad \text{Razionalizzando}$$

cos è pari

$$\sqrt{\dots}-y\ \frac{\sqrt{\dots}+y}{\sqrt{\dots}+y} = \frac{\cancel{y^2}-y-\cos y-\cancel{y^2}}{\sqrt{y^2-y-\cos y}+y} \to -\frac{1}{2}$$

Nell'ultimo passaggio ho raccolto y sopra e sotto

$$\frac{\cancel{y}\left(-1-\boxed{\frac{\cos y}{y}}\right)}{\cancel{y}\left(\sqrt{1-\frac{1}{y}-\frac{\cos y}{y^2}}+1\right)} \to -\frac{1}{2}$$

$\frac{\cos y}{y}\to 0$, $\frac{1}{y}\to 0$, $\frac{\cos y}{y^2}\to 0$

$$-\frac{1}{y}\le\frac{\cos y}{y}\le\frac{1}{y} \quad \dots \qquad -\frac{1}{y^2}\le-\frac{\cos y}{y^2}\le\frac{1}{y^2} \quad \dots$$

Esempio 3 $\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2+3}$

Prima: $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$

Ora: $A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

Uso questa relazione con $A = \sqrt[3]{n^2+n}$ e $B = \sqrt[3]{n^2+3}$

Quindi devo moltiplicare e dividere per A^2+AB+B^2

$$\sqrt[3]{\ldots} - \sqrt[3]{\ldots} \quad \frac{\sqrt[3]{(n^2+n)^2} + \sqrt[3]{(n^2+n)(n^2+3)} + \sqrt[3]{(n^2+3)^2}}{\ldots}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}-3}{\sqrt[3]{(n^2+n)^2} + \sqrt[3]{(\ )(\ )} + \sqrt[3]{(n^2+3)^2}} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \to 0$$

$$\sim \frac{n}{n^{4/3}}$$

Esempio 4 $\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{n^2+5} \longrightarrow -\infty$

Brutalmente è: $\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^2} = n^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{2}{3}} \longrightarrow -\infty$ perché $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

Esempio 5

$\dfrac{e^{2x}-\cos(3x)}{\log(1+\tan x)}$	2

$\boxed{x \to 0}$

Successione	Li
$n^2 \cos \dfrac{1}{n^2}$	$+\infty$
$n^2 \tan^2 \dfrac{1}{n}$	1
$n(\log(n+1) - \log n)$	1
$n(\sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{5})$	$\log\left(\frac{7}{5}\right)$

$$\frac{e^{2x}-\cos(3x)}{\log(1+\tan x)} = \underbrace{\boxed{\frac{\tan x}{\log(1+\tan x)}}}_{1} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\tan x}}}_{1} \left[\underbrace{\boxed{\frac{e^{2x}-1}{x}}}_{2} - \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos(3x)}{x^2}}}_{\frac{9}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{0}\right]$$

$y = \tan x$

$\underbrace{n^2}_{+\infty} \underbrace{\cos\frac{1}{n^2}}_{1} \to +\infty$

$n^2 \tan^2\frac{1}{n} = \dfrac{\tan^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \left[\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right]^2 \to 1$

$x = \frac{1}{n}$

$n\left(\log(n+1) - \log n\right)$ $[+\infty \cdot (+\infty - \infty)]$

$= n \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \to \underbrace{\log e}_{=1}$

$\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \dfrac{\log(1+x)}{x} \ldots$

$n\left(\sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{5}\right) = n\left(\sqrt[n]{7} - 1\right) - n\left(\sqrt[n]{5} - 1\right)$

$\to \log 7 - \log 5 = \log\frac{7}{5}$ (Vedi lez. 25)

— o — o —

$(n+\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})^{1/\log n}$

Brutale : $\sim n^{\frac{1}{\log n}} = e^{\frac{1}{\log n}\cdot \log n} = e$ ☺

$\boxed{n^{\frac{1}{\log n}}} \boxed{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^{2/3}}\right)^{\frac{1}{\log n}}}$

$\shortparallel$ e $\qquad 1^0 = 1$

— o — o —

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\tan(3x)}$	$\frac{1}{6}$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt[3]{x^2+1}-e^x}$	0

$\dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \cos x}{\tan(3x)} \cdot \dfrac{\sqrt{1+\sin x} + \cos x}{\sqrt{1+\sin x} + \cos x} = \dfrac{1+\sin x - \cos^2 x}{\tan(3x)} \underbrace{\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\ldots} + \cos x}}}_{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{1+\sin x - \cos^2 x}{\tan(3x)} = \underbrace{\boxed{\dfrac{3x}{\tan(3x)}}}_{1} \left[\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin x}{3x}}}_{\frac{1}{3}} + \dfrac{1-\cos^2 x}{3x}\right]$

$\dfrac{1-\cos^2 x}{3x} = \underbrace{\boxed{\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}}}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\boxed{x}}_{0}$

$$\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt[3]{x^2+1}-e^x}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}+1}=\underbrace{\boxed{\frac{\cos x-1}{x^2}}}_{\downarrow\,-\frac{1}{2}}\;\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}-e^x}\;\underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}}}_{\downarrow\,\frac{1}{2}}$$

Dico che il centrale tende a 0

$$\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}-e^x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+e^x\sqrt[3]{x^2+1}+e^{2x}}{\dots}$$

$$=\frac{\overset{0}{\uparrow}{x}\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+e^x\sqrt[3]{x^2+1}+e^{2x}\right]^{\nearrow 3}}{\underbrace{\boxed{\frac{x^2+1-e^{3x}}{x}}}_{\downarrow\,-1}}$$

[e^{3x} corretto dopo video]

$$\frac{x^2+1-e^{3x}}{x}=x-\frac{e^{3x}-1}{x}\longrightarrow -3$$

— o — o —

ANALISI I – LEZIONE 28

Note Title 07/11/2024

Esempio motivazionale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\arctan(2\sin x)} - \cos(\tan x) + \log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{\arcsin(3x^2) - 7|x\sin x| + 5\tan x} = \frac{4}{5}$$

Divido e moltiplico sopra e sotto per x

$$\frac{\boxed{\dfrac{e^{\arctan(2\sin x)}-1}{x}}_{\to 2} + \boxed{\dfrac{1-\cos(\tan x)}{x}}_{\to 0} + \boxed{\dfrac{\log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{x}}_{\to 2}}{\boxed{\dfrac{\arctan(3x^2)}{x}}_{\to 0} - 7\boxed{\dfrac{|x\sin x|}{x}}_{\to 0} + 5\boxed{\dfrac{\tan x}{x}}_{\to 1}}$$

Facciamo i 6 limiti

$$\frac{\tan x}{x} \to 1$$

$$\frac{\arcsin(3x^2)}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\arcsin(3x^2)}{3x^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{3x^2}{x}}}_{\to 0}$$

[Nel video c'è arctan invece che arcsin]

$$\frac{|x\sin x|}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché} \\ x\to 0^+}}{=} \frac{\cancel{x}\sin x}{\cancel{x}} \to 0$$

$$\frac{\log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})}}}_{\to 1} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\,\boxed{\sin(2\sqrt{x})}}{\boxed{2\sqrt{x}}}_{\to 1} \frac{2\sqrt{x}}{\cancel{x}} \to 2$$

$$\frac{e^{\arctan(2\sin x)}-1}{x} = \underbrace{\frac{e^{\arctan(2\sin x)}-1}{\arctan(2\sin x)}}_{\to 1} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(2\sin x)}{2\sin x}}}_{\to 1} \frac{2\,\boxed{\sin x}}{\boxed{x}}_{\to 1} \to 2$$

L'ultimo con il cos per esercizio ...

$\boxed{\text{SIMBOLI DI LANDAU}}$ (Linguaggio degli infinitesimi)

o piccolo (utile per fare i limiti)
O grande (utile per altre cose)
$\sim$ equivalenza asintotica (pericolosa per fare i limiti)

$\boxed{\text{o piccolo}}$ Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto
Siano $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$ due funzioni
Sia x_0 un p.to in cui fare i limiti ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$)

Def. Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se esiste una funzione $\omega: D \to \mathbb{R}$
omega piccolo

tale che

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \qquad \forall x \in D$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

[In poche parole: $f = g \cdot$ qualcosa che tende a 0 per $x \to x_0$]

Def. (Quasi equivalente) Supponiamo di poter dividere per $g(x)$ (cioè $g(x) \neq 0$ per x vicini e diversi da x_0).
Allora $f(x) = o(g(x))$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

[Brutalmente: pensando che $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 per $x \to x_0$, questo dice che "f batte g" quando vengono messe a confronto]

Esempio 1 (in tutti gli esempi prendiamo $x_0 = 0$)

$$\underset{f(x)}{\sin^2 x} = o(\underset{g(x)}{x}) \quad \text{per } x \to 0$$

Con la def. quasi equivalente posso dividere per x e devo verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{\sin x}}_{\downarrow\, 0}$$

Con la def. ufficiale sarebbe

$$\underset{f(x)}{\sin^2 x} = \underset{g(x)}{x} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin^2 x}{x}}}_{\omega(x) \to 0 \text{ per } x \to 0}$$

Esempio 2 $\quad \arctan(x^2) = o(\sin x) \quad$ per $x \to 0$

Posso dividere per $\sin x$ e con la def. quasi equivalente verifico che

$$\frac{\arctan(x^2)}{\sin x} = \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(x^2)}{x^2}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0$$

Esempio 3 $\quad \underset{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = o\left(\underset{g(x)}{\frac{1}{\sin^3 x}}\right) \quad$ per $x \to 0$

Oss. In questo esempio $f(x)$ e $g(x)$ non tendono a 0 per $x \to 0$

Uso def. ufficiale $\quad \underset{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \underset{g(x)}{\frac{1}{\sin^3 x}} \; \underset{\omega(x)}{\frac{\sin^3 x}{x^2}}$

$$\omega(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \sin x \to 0 \quad \text{per } x \to 0.$$

$\boxed{\text{Proprietà di o piccolo}}$ Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$
$$f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

$\boxed{f_1 + f_2}$ Per ipotesi

$$f_1(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) \qquad \lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = \lim_{x \to x_0} \omega_2(x) = 0$$
$$f_2(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$$

Ma allora

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{[\omega_1(x) + \omega_2(x)]}_{\omega_3(x) \to 0 \text{ perché somma...}}$$

Quindi $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$

Stessa cosa per la differenza

$\boxed{7 f_1}$ $$7 f_1(x) = 7 g(x) \cdot \omega_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{7\omega_1(x)}_{= \omega_3(x) \to 0}$$

Quindi $7 f_1(x) = o(g(x))$ e più in generale

$$a f_1(x) = o(g(x)) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}$$

$\boxed{f_1 \cdot f_2}$ $$f_1(x) \cdot f_2(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) \cdot g(x) \cdot \omega_2(x)$$
$$= g(x)^2 \cdot \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x) \to 0}$$

Quindi $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x)^2)$

$\boxed{\dfrac{f_1}{f_2}}$ $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot \omega_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot \omega_2(x)} = \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \text{BOH}$$

supp. di poter dividere

[Brutalmente: se f_1 e f_2 battono entrambe g, non ho informazioni per sapere chi vince tra f_1 ed f_2]

Riassunto brutale

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$
$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$
$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH}$$
$$o(o(g)) = o(g)$$

Transitività di o piccolo

Supponiamo che $f(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$
$h(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Allora
$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

Per ipotesi $f(x) = h(x) \cdot \omega_1(x)$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = \lim_{x \to x_0} \omega_2(x) = 0$
$h(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$

Ma allora
$$f(x) = g(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x) \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0}$$

<u>Altra proprietà</u> Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$, allora
$\sin(f(x)) = o(g(x))$ per $x \to 0$
(almeno nel caso in cui $f(x) \to 0$)

Per ipotesi $f(x) = g(x)\,\omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$

Ma allora
$$\sin(f(x)) = \sin(g(x) \cdot \omega(x))$$
$$= \frac{\sin(g(x) \cdot \omega(x))}{g(x) \cdot \omega(x)}\, g(x) \cdot \omega(x)$$
$$= g(x) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin(g(x) \cdot \omega(x))}{g(x) \cdot \omega(x)}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{\omega(x)}}_{\downarrow\, 0}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 29

Note Title 07/11/2024

$\boxed{\text{SVILUPPINI}}$ Per le funzioni elementari valgono i seguenti sviluppi

$\sin x = x + o(x)$ $\cos x = 1 + o(x)$

$\tan x = x + o(x)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\arctan x = x + o(x)$ $e^x = 1 + x + o(x)$

$\arcsin x = x + o(x)$ $\log(1+x) = x + o(x)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

[tutti per $x \to 0$]

$\boxed{\sin x = x + o(x)}$ Vuol dire che $\overbrace{\sin x - x}^{f(x)} = o(\underset{g(x)}{x})$

Usando la def. quasi equivalente diventa

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x - x}{x} = \frac{\sin x}{x} - 1 \to 1 - 1 = 0$$

Stessa cosa per tutti quelli sulla sx (altro modo di dire i limiti notevoli)

$\boxed{\cos x = 1 + o(x)}$ Devo verificare che $\cos x - 1 = o(x)$, cioè

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow\ -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\ 0} \to 0$$

$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$ Devo verificare che

$$\underbrace{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}_{f(x)} = o(\underset{\uparrow\ g(x)}{x^2})$$ cioè (def. quasi equiv.)

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow\ -\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \to 0 \quad \ddot\smile$$

Analogamente gli sviluppini di e^x e di $\log(1+x)$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x) \text{ per } x\to 0 \quad \text{per ogni } \alpha\in\mathbb{R} \text{ (qualunque!)}}$$

Devo verificare che $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x = o(x)$ per $x \to 0$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x}{x} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha = \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{x} - \alpha$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)}}}_{\downarrow\ 1} \cdot \alpha\underbrace{\boxed{\frac{\log(1+x)}{x}}}_{\downarrow\ 1} - \alpha \to \alpha - \alpha = 0.$$

[Pongo
$y = \alpha\log(1+x)$
e osservo che
$y \to 0$]

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + \arctan x + \cos x - 1}{e^x - 1} = 2$

Uso gli sviluppini

$\sin x = x + o(x)$ $\qquad\qquad \cos x = 1 + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$ $\qquad\qquad e^x = 1 + x + o(x)$

Sostituisco

$$\frac{x + o(x) + x + o(x) + o(x)}{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}} = \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{2 + \overbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}^{0}}{1 + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}_{0}} \to 2$$

Esempio 2 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)+\sin(x^2)}{\sqrt{1+x}-\cos x} = 6$

$\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) = o(x)$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

$\cos x = 1 + o(x)$

Sostituendo tutto...

$$\frac{3x + o(x) + o(x)}{\cancel{1} + \frac{1}{2}x + o(x) - \cancel{1} - o(x)} = \frac{3x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)} = \frac{3 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}}{\frac{1}{2} + \boxed{\frac{o(x)}{x}}} \to 6$$

$\frac{o(x)}{x} \to 0$

Oss. Per ogni $a > 1$ vale che $x^a = o(x)$ per $x \to 0$, quindi

$x^2 = o(x)$ $x\sqrt{x} = o(x)$ $x^{2024} = o(x)$ ...

$x^a = x \cdot \boxed{x^{a-1}}$, $x^{a-1} \to 0$ se $a > 1$

Più in generale:

$x^a = o(x^b)$ per $x \to 0$

se e solo se $a > b$ (se divido diventa x^{a-b} che tende a 0 se e solo se $a > b$)

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) = o(x)$ cerchiamo di capire

$\boxed{\sin(x^2) = o(x)}$ Basta dividere ... $\dfrac{\sin(x^2)}{x} = \boxed{\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}} \cdot \boxed{x}$, $\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$, $x \to 0$

$\boxed{\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)}$ Dallo sviluppino sappiamo che

$\sin x = x + o(x)$

cioè $\sin x = x + x\omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$ per $x \to 0$

Ma allora

$$\sin(x^2) = x^2 + x^2 \underbrace{\omega(x^2)}_{\to 0 \text{ per } x \to 0}$$

e questo dice proprio che $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$.

Volendo posso anche scrivere

$$\sin(x^2) = x \underbrace{[\, x + x\,\omega(x^2)\,]}_{\omega_1(x) \to 0 + 0 \cdot 0 = 0}$$

Questo è un altro modo di verificare che $\sin(x^2) = o(x)$

Esempio 3 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) + \tan^2(5x)}{\log(1 + \arctan(2x))} = \frac{3}{2}$

Brutalmente è come se fosse $\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

Basta usare gli sviluppini

$$\sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$

$$\tan^2(5x) = (5x + o(x))^2 = 25x^2 + 10x\,o(x) + o(x)^2 = o(x)$$

$$\log(1 + \arctan(2x)) = \arctan(2x) + o(\arctan(2x))$$

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

$$= 2x + o(x) + \underbrace{o(\arctan(2x))}_{\text{Sarà vero che è } o(x)\ ?}$$

Giustifichiamo per bene

$$o(\arctan(2x)) = \arctan(2x) \cdot \omega(x)$$

$$= x \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(2x)}{x} \cdot \omega(x)}}_{\omega_1(x) \to 2 \cdot 0 = 0}$$

Esempio 4
$$\frac{e^{\arctan(2\sin x)} - \cos(\tan x) + \log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{\arcsin(3x^2) - 7|x\sin x| + 5\tan x}$$

→ Intanto è $\frac{0}{0}$: sotto tutti tendono a 0, sopra i due 1 se ne vanno

→ Chi c'è sotto? $\tan x = x + o(x)$

$x \sin x = o(x)$ ⇝ spazzatura

$\arcsin(3x^2) = o(x)$ [Nel video c'è arctan invece che arcsin]

Sotto c'è $5x + o(x)$

→ Sopra gli 1 se ne vanno ed è come se fosse

$e^{\cdots} = 1 + 2x + o(x)$ $\cos(\tan x) = 1 + o(x)$

$\log(1+\dots) \sim \log(1+2x) \sim 2x$

Quindi sopra c'è $4x$.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 30

Note Title 07/11/2024

$\boxed{\text{Equivalenza asintotica}}$ Siano $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ ed x_0 come nella definizione di o piccolo

Def. Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se

"f è asintoticamente equivalente a g"

esiste $\omega: D \to \mathbb{R}$ tale che
$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \quad \text{per ogni } x \in D$$
e
$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1$$

La definizione quasi equivalente (quando posso dividere per g) è che
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

[Brutalmente: $f(x)$ e $g(x)$ pareggiano quando $x \to x_0$]

Sviluppini in versione equivalenza asintotica:

$\sin x \sim x$ $\qquad$ $\cos x \sim 1$

$\tan x \sim x$ $\qquad$ $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$\arctan x \sim x$ $\qquad$ $e^x \sim 1 + x$

$\arcsin x \sim x$ $\qquad$ $\log(1+x) \sim x$

$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$

[Sono gli stessi di prima senza o piccolo]

$\boxed{\text{Achtung! Achtung!}}$ Usare l'equivalenza asintotica nel calcolo dei limiti è ESTREMAMENTE PERICOLOSO

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Se $f(x) = x + o(x)$ allora
$$f(ax) = ax + o(x)$$

$$f(x) = x + x\omega(x) \rightsquigarrow f(ax) = ax + x\omega(ax)$$
$$= ax + x \cdot \underbrace{\boxed{a\omega(ax)}}_{\omega_1(x) \to 0}$$

Se $f(x) = x + o(x)$, allora
$f(x^3) = x^3 + o(x^3)$ (e idem con altre potenze)

$$f(x) = x + x\omega(x) \rightsquigarrow f(x^3) = x^3 + \underbrace{\boxed{x^3\omega(x^3)}}_{o(x^3)}$$

Se $f(x) = x + o(x)$, allora $f(x)^2 = x^2 + o(x^2)$

$$f(x) = x + x\omega(x) \rightsquigarrow f(x)^2 = x^2 + 2x^2\omega(x) + x^2\omega(x)^2$$
$$= x^2 + \underbrace{x^2 \underbrace{[2\omega(x) + \omega(x)^2]}_{\to 0}}_{o(x^2)}$$

Se $f(x) = x^2 + o(x^3)$, allora $f(x)^2 = x^4 + o(x^5)$

$$f(x) = x^2 + x^3\omega(x) \rightsquigarrow f(x)^2 = x^4 + 2x^5\omega(x) + x^6\omega(x)^2$$
$$= x^4 + x^5 \underbrace{[2\omega(x) + x\omega(x)^2]}_{\to 0}$$

Se avessi scritto $f(x)^2 = x^4 + o(x^4)$ era sbagliato?
Sono entrambe scritture corrette, ma quella sopra dà più informazioni

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$ Ok!
$\sin(x^2) = x^2 + o(x)$ Corretta, ma buffa
È buffa perché $x^2 = o(x)$ e quindi tanto varrebbe scrivere
$$\sin(x^2) = o(x)$$

Brutalmente: $o(x)$ si mangia tutti gli x^a con $a > 1$.

Esempio 1

$$\frac{\sin(2x+x^3)+x}{\arctan(3x-x^5)-x} \qquad \Bigg| \qquad \Bigg\| \qquad \frac{\cos(x+x^2)-1}{x\sin x + x\log(1+2x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x+x^3)+x}{\arctan(3x-x^5)-x} = \frac{3}{2}$$

Brutalmente: $\dfrac{2x+x^3+x}{3x-x^5-x} \sim \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

$$\sin(2x+x^3) = 2x+\underset{\downarrow \atop o(x)}{x^3} + \underset{\downarrow \atop o(x)}{o(2x+x^3)} = 2x+o(x)$$

Come giustificare che $o(2x+x^3) = o(x)$?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $\quad o(2x+x^3) = (2x+x^3)\,\omega(2x+x^3)$

$$= x\,\underbrace{\boxed{(2+x^2)\,\omega(2x+x^3)}}_{=\,\omega_1(x)\to 0}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\quad \dfrac{o(2x+x^3)}{x} = \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\dfrac{o(2x+x^3)}{2x+x^3}}}\ \underset{\downarrow \atop 2}{\boxed{\dfrac{2x+x^3}{x}}} \to 0$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ $\quad o(2x+x^3) \overset{?}{=} o(2x)+o(x^3) = o(x)+o(x) = o(x)$

È vero che $o(g_1+g_2) = o(g_1)+o(g_2)$?

$$o(g_1+g_2) = (g_1(x)+g_2(x))\,\omega(x) = \underbrace{g_1(x)\,\omega(x)}_{=\,o(g_1)} + \underbrace{g_2(x)\cdot\omega(x)}_{=\,o(g_2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x+x^2)-1}{x\sin x + x\log(1+2x)} \qquad \left[\sim \frac{1-\frac{1}{2}(x+x^2)^2-1}{x^2+2x^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} \sim -\frac{1}{6} \right]$$

$\sin x = x + o(x)$ $\qquad$ $x \sin x = x^2 + x\,o(x) = x^2 + o(x^2)$

$x\,o(x) = x \cdot x \cdot \omega(x) = x^2 \omega(x) = o(x^2)$

$\log(1+2x) = 2x + o(x) \rightsquigarrow x \log(1+2x) = 2x^2 + x\,o(x)$

$= 2x^2 + o(x^2)$

Denominatore $= x^2 + o(x^2) + 2x^2 + o(x^2) = 3x^2 + o(x^2)$

$\cos(x+x^2) = 1 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o((x+x^2)^2) \overset{?}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\cos t \quad = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

$(x+x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4 = x^2 + o(x^2)$

Analogamente

$o((x+x^2)^2) = o(x^2+2x^3+x^4) = o(x^2) + o(2x^3) + o(x^4)$

$= o(x^2)$.

Oss. Ha senso o piccolo per le successioni?

Certo, solo che va fatto per $n \to +\infty$

Esempio $\qquad n^2 = o(n^3)$ per $n \to +\infty$

$n^2 = n^3 \cdot \boxed{\frac{1}{n}} \to 0$ $\qquad$ e quindi è vero!!

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ A zero comandano le potenze piccole, a ∞ comandano le potenze grandi

$f(x) = \dfrac{x + x^5}{\sin(2x) - 3x^5}$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ $\quad \left[\dfrac{x+o(x)}{2x+o(x)}\right]$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ $\quad \left[\dfrac{x^5}{-3x^5} \to -\frac{1}{3}\right]$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 31

Note Title 09/11/2024

DERIVATA E DIFFERENZIALE

Setting: $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

$f : D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$

Supponiamo per semplicità che x_0 sia p.to $\boxed{\text{INTERNO}}$ a D

cioè $\exists\, \delta > 0$ t.c. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq D$

Def. (Derivata) Si dice che f è derivabile in x_0 se $\boxed{\text{esiste ed è reale}}$ il

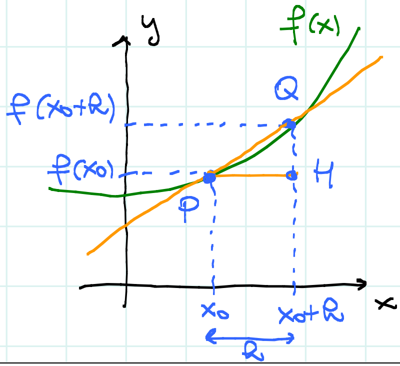
$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Quando il limite esiste ed è reale si indica con una delle seguenti notazioni

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \dot{f}(x_0)$$

Oss. Se la derivata esiste in ogni $x_0 \in D$ allora possiamo considerare la funzione $x \longrightarrow f'(x)$

Def. L'oggetto di cui stiamo facendo il limite si chiama $\boxed{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}}$



h = incremento della variabile x

$f(x_0 + h) - f(x_0)$ = corrispondente incremento della variabile y

Interpretazione geometrica Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta PQ

$$\text{rapp. increm.} = \frac{QH}{PH}$$

Quando $h \to 0$, intuitivamente la retta PQ tende alla retta tangente al grafico nel p.to P.
Quindi

$$\boxed{f'(x_0) = \text{coeff. angolare della retta tangente al grafico di } f(x) \text{ nel p.to } P = (x_0, f(x_0)).}$$

Retta tangente Passa per P e ha coeff. angolare $f'(x_0)$, quindi la sua equazione

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

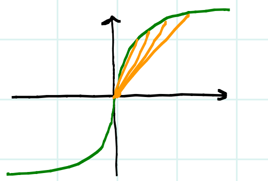
Oss. La derivata $f'(x_0)$ non è obbligata ad esistere

Esempio 1 Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e prendiamo $x_0 = 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \qquad \left[\frac{1}{0^+}\right]$$

$\sqrt[3]{x}$



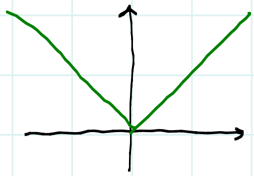
Brutalmente è dovuto al fatto che la retta tangente al grafico in $x = 0$ è verticale

Esempio 2 $f(x) = |x|$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \; ; \; \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Quindi $\lim\limits_{h\to 0}$ non esiste



Brutalmente: da dx la retta tangente vorrebbe avere coeff. ang. $= 1$, da sx vorrebbe -1.

— o — o —

<u>Def</u>. (Differenziale) Stesso setting delle derivate.
Si dice che f è $\boxed{\text{differenziabile}}$ in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \to 0^-}$$

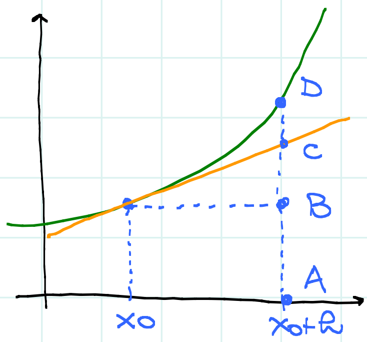
In tal caso si chiama differenziale di f in x_0 l'applicazione lineare $h \to \alpha h$

Teorema Sempre solito setting.
Allora f è derivabile in x_0 se e solo se f è differenziabile in x_0. Inoltre in tal caso $\alpha = f'(x_0)$.

<u>Interpretazione geometrica</u>

$f(x_0+h) = AD \qquad f(x_0) = AB$

$f'(x_0) \cdot h = BC$



$$\underbrace{f(x_0+h)}_{AD} = \underbrace{f(x_0)}_{AB} + \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{BC} + \underbrace{o(h)}_{CD}$$

Cosa succede a destra quando $h \to 0$

- $f(x_0)$ non cambia
- $f'(x_0) \cdot h$ tende a 0 in maniera proporzionale ad h (cioè linearmente in h) (se divido h per 7, anche BC viene diviso per 7)
- CD tende a 0 ma più velocemente di h.

Dim teorema

1ª freccia Ipotesi: f derivabile in x_0

Tesi: f differenziabile in x_0 con $\alpha = f'(x_0)$.

Devo dim. che $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \to 0$

cioè $f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h = o(h)$ per $h \to 0$

Uso def. quasi equivalente cioè divido per h e faccio i limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, f'(x_0)} - f'(x_0) = 0$$

2ª freccia Ipotesi: f diff. in x_0, cioè

$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$

Tesi: $f'(x_0)$ esiste e vale α ← corretto dopo video

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sostituisco} \\ f(x_0+h)}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \alpha + \underbrace{\boxed{\frac{o(h)}{h}}}_{\downarrow\, 0} = \alpha = f'(x_0)$$

Teorema Stesso setting di sempre.
Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0

Dim Devo dim. che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Spostiamo il limite in 0 ponendo $h = x - x_0$ $(x = x_0 + h)$
Quando $x \to x_0$ abbiamo che $h \to 0$ e quindi dobbiamo dim. che

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Basta osservare che

$$f(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{h}}_{0} + \underbrace{\boxed{f(x_0)}}_{f(x_0)} \longrightarrow f(x_0)$$

— o — o —

Oss. Se f è continua in x_0, non è detto che sia derivabile (pensare a $|x|$).

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 32

Note Title 09/11/2024

Regole di derivazione

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$[a f(x)]' = a f'(x)$$

La derivata è un' applic. lineare (da dove a dove ?)

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{g(x)^2}$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivate delle funzioni elementari

$[\text{costante}]' = 0$ $\qquad [x^n]' = n\,x^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$

$[x^\alpha]' = \alpha\,x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$[e^x]' = e^x \qquad [\log x]' = \frac{1}{x} \qquad [a^x]' = a^x \cdot \log a \quad a > 0$

$[\sin x]' = \cos x \qquad [\cos x]' = -\sin x \qquad [\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2} \qquad [\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivata della somma Siano $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in D$ un p.to interno.

Poniamo $s: D \to \mathbb{R}$ definita da $s(x) = f(x) + g(x)$.

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0

Allora s è derivabile in x_0 e $s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Dim. via rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} + \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}}_{g'(x_0)} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dim. via differenziale Per ipotesi sappiamo che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

per $h \to 0$

Sommando ottengo

$$\underbrace{f(x_0+h) + g(x_0+h)}_{s(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{s(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]}_{\substack{\text{per forza è} \\ s'(x_0)}} h + \underbrace{o(h)}_{\substack{\text{uso che} \\ o(h)+o(h)=o(h)}}$$

Derivata del prodotto Convenendi come sopra ... $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

Allora $p'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Dim. via rapp. increm.

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(x_0+h) - p(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h}$$

[aggiungo e tolgo sopra un qualunque termine misto]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{\boxed{f(x_0+h)}}_{\downarrow\, f(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, g'(x_0)} + \underbrace{\boxed{g(x_0)}}_{\downarrow\, g(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \right]$$

per la continuità della fine lez. 30

$$= f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0)$$

$\boxed{\text{Dim. via diff.}}$ Per ipotesi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)\cdot h + o(h)$$

Le moltiplico tra di loro:

$$\underbrace{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)}_{p(x_0+h)} = f(x_0)\cdot g(x_0) \qquad \rightsquigarrow p(x_0)$$

$$+ [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)]h \qquad \rightsquigarrow p'(x_0)\cdot h$$

$$+ \boxed{o(h)}$$

↑ tutti gli altri 6 termini del prodotto sono $o(h)$ [scriverli e convincersene con calma]

$\boxed{\text{Derivata del reciproco}}$ $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ Serve che il denominatore sia $\neq 0$

$\boxed{\text{Dim. via rapp. incrementale}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h}}}_{\downarrow\, -f'(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{1}{f(x_0)\cdot f(x_0+h)}}}_{\downarrow\, \frac{1}{f(x_0)^2}}$$

$\boxed{\text{Quoziente}}$ Anche qui serve denom. $\neq 0$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]'$$ uso regola del prodotto

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}\right]'$$ uso su $g(x)$ la regola del reciproco

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\left[-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right]$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Differenza e prodotto per una costante $\leadsto$ esercizio.

$\boxed{\text{Composizione}}$ Vediamo cosa succede con i rapp. increm.

$\boxed{\text{Non dimostrazione}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)}}}_{\to g'(f(x_0))}\ \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\to f'(x_0)}$$

Nel primo osservo che il denominatore tende a 0, quindi pongo

$$k = f(x_0+h) - f(x_0)$$

Ma allora $f(x_0+h) = f(x_0)+k$ e quindi la prima frazione diventa

$$\frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k}$$

Quando $k\to 0$, questa tende a $g'(f(x_0))$.

Oss. Il problema nella dim. è che potrei aver moltiplicato e diviso per 0.

ANALISI 1 — LEZIONE 33

Note Title 09/11/2024

Derivate di alcune funzioni elementari

$\boxed{f(x) = x^2}$ Via rapp. increm.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

Via diff.
$$\underbrace{(x_0+h)^2}_{f(x_0+h)} = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + 2x_0 \cdot h + \underbrace{h^2}_{o(h)}$$

per forza è $f'(x_0)$

Idem con il cubo (e altre potenze intere)

$$(x_0+h)^3 = x_0^3 + \underbrace{3x_0^2}_{f'(x_0)} \cdot h + \underbrace{\boxed{3x_0 h^2 + h^3}}_{o(h)}$$

$\boxed{f(x) = e^x}$ Via rapp. increm.

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \underbrace{\boxed{\frac{e^h - 1}{h}}}_{1} = e^{x_0}$$

Via diff.
$$e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot \underbrace{e^h}_{\text{sviluppino}} = e^{x_0}(1 + h + o(h))$$

$$= e^{x_0} + \underbrace{e^{x_0}}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h)$$

$\boxed{f(x) = \sin x}$ $\boxed{\text{Via rapp. increm.}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$ Formula SUM → PRODUCT

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin x_0 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h}}}_{\to 0} + \cos x_0 \underbrace{\boxed{\frac{\sin h}{h}}}_{\to 1} \right] = \cos x_0$$

$\boxed{\text{Via diff.}}$

$$\begin{aligned} \sin(x_0+h) &= \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h \\ &= \sin x_0 \,(1+o(h)) + \cos x_0\,(h + o(h)) \\ &= \sin x_0 + \underbrace{\cos x_0}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h) \end{aligned}$$

$\boxed{f(x) = \cos x}$ Via differenziale:

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos(x_0+h)}_{f(x_0+h)} &= \cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h \\ &= \cos x_0 \,(1+o(h)) - \sin x_0\,(h+o(h)) \\ &= \underbrace{\cos x_0}_{f(x_0)} \underbrace{- \sin x_0}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h) \end{aligned}$$

$\boxed{f(x) = \tan x}$

$$[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]'$$ Uso regola per quoziente

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \rightsquigarrow \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\rightsquigarrow 1 + \tan^2 x$$

$\boxed{f(x) = \log x}$ $\boxed{\text{Via rapp. increm.}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log(x_0)}{h} \underset{\uparrow \text{propr. log.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}} \cdot x_0 = \frac{1}{x_0}$$

$\downarrow$ 1 pongo $y = \frac{h}{x_0}$ e vedo che $y \to 0$

$\boxed{\text{Via diff.}}$ $$\log(x_0+h) = \log\left[x_0 \cdot \frac{x_0+h}{x_0}\right]$$

sviluppino $\log(1+t) = t + o(t)$

$$= \log x_0 + \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

$$= \log x_0 + \underset{\uparrow f'(x_0)}{\frac{1}{x_0}} \cdot h + o(h)$$

$\boxed{\text{Morale della favola}}$ → Derivate delle funzioni elementari
→ Limiti notevoli
→ Sviluppini

sono tre facce della stessa medaglia

$\boxed{f(x) = a^x}$ $$[a^x]' = [e^{x\log a}]'$$ regola della composizione

$$= e^{x\log a}[x\log a]' = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x$$

$\boxed{f(x) = x^\alpha}$ $$[x^\alpha]' = [e^{\alpha \log x}]'$$ ... composizione ...

$\uparrow \alpha \in \mathbb{R}$

$$= e^{\alpha\log x} \cdot [\alpha \log x]' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x}$$
$$= \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$\boxed{\text{Funzioni inverse}}$ Sia $f(x)$ una funzione che ammette una funzione inversa $g(x)$

[occorrerebbe precisare da dove a dove]

cioè $f(g(x)) = x$.

$\boxed{\text{Supponendo}}$ che tutto sia derivabile, avremmo che

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \text{cioè} \quad \boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

Teorema (misterioso) Se f è derivabile e il denominatore è diverso da 0, allora vale la formula.

$\boxed{f(x) = \tan x \text{ e quindi } g(x) = \arctan x}$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\arctan x)} \underset{[\tan x]' = 1 + \tan^2 x}{=} \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$\boxed{f(x) = e^x \text{ e quindi } g(x) = \log x}$

$$[\log x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(\log x)} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

$\boxed{f(x) = \sin x \text{ e quindi } g(x) = \arcsin x}$

$\cos = \sqrt{1 - \sin^2}$

$$[\arcsin x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Oss. Abbiamo usato che $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$
Questa formula è corretta nel primo e quarto quadrante, cioè per $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Fortunatamente abbiamo usato la formula con $\alpha = \arcsin x$, che assume solo valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La dimostrazione per $\arccos x$ è analoga.

Esempi (Calcolo di derivate)

$f(x) = \cos(e^x)$

$f'(x) = -\sin(e^x)\cdot e^x$ (composizione)

$f''(x) = -\cos(e^x)\, e^x \cdot e^x - \sin(e^x)\cdot e^x$ composizione e prodotto

$= -e^{2x}\cos(e^x) - e^x \sin(e^x)$

$f(x) = \arctan(\log(1+x^2))$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\log^2(1+x^2)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+3x} = (x^2+3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+3x)^{-\frac{2}{3}}(2x+3) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+3x)^2}}\cdot(2x+3)$$

$f(x) = x^{\sin x}$ $\quad f'(x) = [e^{\sin x \cdot \log x}]'$

$$= [e^{\sin x\cdot \log x}]\cdot\left(\cos x\cdot \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\log x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\sin x - 1}\cdot \sin x + x^{\sin x}\cdot \log x\cdot\cos x$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 34

Note Title 14/11/2024

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con } x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Teorema (misterioso) Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$, esistenza delle derivate, possibilità di dividere per $g(x)$ e $g'(x)$)

(ii) il limite sopra sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

oppure $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$ (gli eventuali segni si portano fuori)

(iii) esista

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{(primi 3 casi)}$$

Allora $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \text{(stesso } \ell\text{)}.$$

Operativamente Devo fare $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ma è una forma indet.

Provo a fare $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(1) Se questo non esiste, allora BOH (manca ipotesi (iii))

(2) Se esiste e fa $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche quello iniziale fa ℓ

(3) Se è ancora una forma indeterminata, posso provare a reiterare usando $f''(x)/g''(x)$ e così via.

Esempio 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1} = 0$

No! Non è forma indeterminata, quindi non posso usare Hôp.

In realtà il limite non esiste perché

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x} = +\infty \quad \left[\frac{1}{0^+}\right] \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x} = -\infty \quad \left[\frac{1}{0^-}\right]$$

Esempio 2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin x}{x} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\cos x}{1} = \text{N.E.}$

No! Quando $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, allora BOH, cioè quello iniziale può esistere o no a seconda dei casi

In realtà $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3 + \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 0} = 3$$

Ricordiamo che $\displaystyle\underbrace{\boxed{-\frac{1}{x}}}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 0} \le \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0}$ per $x\to+\infty$.

Oss. Dal p.to di vista pratico il teo. di De L'Hôpital è poco utile nel calcolo dei limiti, perché facendo derivate di solito "le funzioni si complicano".

Esempio 3 $\lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ $[+\infty \cdot 0]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ \left[\frac{0}{0} \leadsto \text{Hôp}\right]}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Si poteva fare senza? Sì, ma occorre usare che

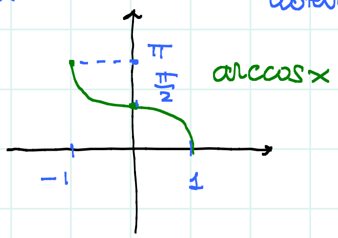
$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

(vedi lez. funz. trigon. inverse)

A questo punto diventa

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \arctan \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ y = \frac{1}{x}}}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{\arctan y}{y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite notevole}}}{=} 1$$

Esempio 4 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$



Usando De L'Hôpital provo a calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}+2x-x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{2}$$

(raccolgo x nella radice al denominatore)

Oss. Abbiamo così dimostrato che

$$\boxed{\arccos(1-x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + o(\sqrt{x})} \qquad \text{per } x \to 0^+$$

(basta usare la definizione)

Esempio 5 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x + x^4}{x^3}$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ (limiti notevoli)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1}\right) + x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ (Equiv. asintotica) Uso che $\sin x \sim x$

$$\frac{x - \sin x + x^4}{x^3} \sim \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^4}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \to 0$$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ (Hôpital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x + x^4}{x^3} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + 4x^3}{3x^2} \underset{\left[\frac{0}{0} \leadsto \text{Hôp}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 12x^2}{6x} \underset{\left[\frac{0}{0} \leadsto \text{Hop}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 24x}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{OPS!}$$

Esempio 6 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2}$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ (limiti notevoli)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x - x + x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\underbrace{\boxed{\frac{e^x - 1}{x}}}_{\to 1} + \underbrace{\boxed{\frac{1 - \cos x}{x^2}}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{x}_{\to 0} - 1\right] + x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ (Equiv. asintotica) $e^x \sim 1 + x$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

Sostituisco

$$\frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + x^2}{x^2} \to \frac{3}{2} \quad \text{OPS}$$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ (Hôpital)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x - 1 + 2x}{2x} \underset{\text{Hôp}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{Doppio OPS}$$

$\boxed{\text{MORALE}}$ NON SI FANNO I LIMITI METÀ PER VOLTA

NON SI USA L'EQUIVALENZA ASINTOTICA

ANALISI 1 — LEZIONE 35

Note Title 14/11/2024

Esempi precedenti tenendo conto di o piccolo

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3} \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x = x + o(x)}}{=} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + x^4}{x^3} = \frac{x^4 + o(x)}{x^3} = \underbrace{x}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x^3}}}_{\downarrow\, \text{BOH} :(}$$

$$\frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2} =$$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} + x^2}{x^2} = \frac{3}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x^2}}}_{\downarrow\, \text{BOH} :(} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x^2)}{x^2}}}_{\downarrow\, 0}$$

— o — o —

SVILUPPI DI TAYLOR Caso con centro in $x_0 = 0$ (McLAURIN)

Idea generale: data una funzione $f(x)$, definita almeno in un intorno dell'origine, cioè in $(-r, r)$ per qualche $r > 0$, sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$ tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0^+}$$

Il polinomio $P_n(x)$ ha grado $\leq n$.

Brutalmente: posso sostituire $f(x)$ con $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$
(n lo scelgo io a seconda delle esigenze)

Teorema misterioso Sia $r>0$, sia $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$ una funzione, sia $n\in\mathbb{N}$.

Supponiamo che f sia derivabile n volte in $(-r,r)$ (basta un pelino meno in realtà).

Allora $P_n(x)$ esiste ed è dato dalla formula

derivata n-esima

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Abbiamo quindi la seguente formula

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad \text{per } x\to 0}$$

Formula di Taylor di $f(x)$ con centro in $x_0=0$ e resto di PEANO (o piccolo)

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$ (Funzione dispari $\rightsquigarrow$ solo potenze dispari)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$ (Funzione pari: potenze pari)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$ (Funzione dispari)

reale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \underbrace{\alpha}_{\binom{\alpha}{1}} x + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}}_{\binom{\alpha}{2}}x^2 + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}}_{\binom{\alpha}{3}}x^3 + \ldots$$

Esempio 1 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^4}{x^3}$

Ho x^3 al denominatore, quindi lo scontro finale è su x^3.
Quindi sviluppo tutto con $n=3$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P_3(x)} + o(x^3) \qquad (\text{Taylor di } \sin x \text{ con } n=3)$$

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + x^4 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}} \to -\frac{1}{6}$$

$$\frac{o(x^3)}{x^3} \to 0$$

Esempio 2 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2}$

Uso gli sviluppi con $n=2$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Sostituisco:

$$\frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - o(x^2) - \cancel{x} + x^2}{x^2} = \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= 2 + \boxed{\frac{o(x^2)}{x^2}} \to 2$$

$$\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$$

Come decido a quale n mi fermo? Bisogna andare per tentativi.
Tuttavia
- $\to$ se mi fermo troppo presto (n troppo piccolo) mi viene BOH
- $\to$ se mi fermo troppo tardi va bene uguale, ma mi trovo tanti termini inutili

Esempio precedente con sviluppi di ordine 4 $(n=4)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Quindi

$$\frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cancel{\frac{x^4}{24}} \cancel{-1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^4}{24}} - \cancel{x} + o(x^4) + x^2}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2} = 2 + \underbrace{\boxed{\frac{x}{6}}}_{\to 0} + \boxed{\frac{o(x^4)}{x^2}} \to 0$$

Oss. Questo limite NON si poteva fare con i limiti notevoli, perché coinvolge il termine $\frac{x^2}{2}$ nello sviluppo di e^x.

Esempio $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x - 2 - x}{\arctan x - \sin x}$

$\boxed{\text{Taylor con } n=3}$ Vado in tabellina

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Sostituisco:

$$\frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{2} - \cancel{x} + o(x^3)}{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \to -1$$

ANALISI 1 — LEZIONE 36

Note Title 14/11/2024

Giustificazione alcuni sviluppi delle funzioni elementari

Formula generale $\quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Quindi basta calcolare le derivate successive

$\boxed{\text{Oss.}}$ Il polinomio $P_{n+1}(x)$ si ottiene dal $P_n(x)$ semplicemente aggiungendo il termine con x^{n+1}.

$\boxed{f(x) = e^x}$ $\quad f^{(k)}(x) = e^x \rightsquigarrow f^{(k)}(0) = 1$. Quindi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

$\boxed{f(x) = \sin x}$

$$f(x) = \sin x = f^{(4)}(x) = \ldots = f^{(2024)}(x)$$
$$f'(x) = \cos x = f^{(5)}(x)$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad \vdots$$
$$f'''(x) = -\cos x$$

Quando sostituisco $x=0$ trovo $\underset{\uparrow}{0}, 1, \underset{\uparrow}{0}, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, \underset{\uparrow}{0}, -1, \ldots$

pari

Quindi solo termini dispari, presi a segno alterno, con il fattoriale sotto.

$\boxed{f(x) = \cos x}$ Stessa cosa shiftata di 1, quindi quando sostituisco $x=0$ trovo

$$\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, \underset{\uparrow}{0}, \underset{\uparrow}{1}, 0, -1, \underset{\uparrow}{0}, \ldots$$

dispari

$\boxed{f(x) = \log(1+x)}$ Cerchiamo di capire le derivate

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -6 \frac{1}{(1+x)^4} \qquad f^{(5)}(x) = 24 \frac{1}{(1+x)^5}$$

Congettura $\quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$

Questa si dimostra per induzione

$\boxed{k=1}$ $\quad f'(x) = (-1)^0 \, 0! \frac{1}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x}$:)

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$ Ipotesi: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$

Derivo: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(-k) \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$

$$= (-1)^k k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$$ che è proprio la tesi

Sostituendo $x=0$ troviamo $\quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad \forall k \geq 1$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \underset{\uparrow\, f(0)=0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{k-1}}_{\substack{-1 \text{ sui pari} \\ 1 \text{ sui dispari}}} \frac{1}{k} x^k$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

— o — o —

$\boxed{\text{Operazioni con i polinomi di Taylor}}$

Supponiamo

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

(stesso n, per $x \to 0$)

$\boxed{f(x) \pm g(x)}$ Sommando ottengo

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + \underbrace{o(x^n)}$$

somma o differenza di $o(x^n)$ è sempre $o(x^n)$

$\boxed{a f(x) \text{ con } a \in \mathbb{R}}$ $\quad a f(x) = a P_n(x) + o(x^n)$

$\boxed{f(x) \cdot g(x)}$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (P_n(x) + o(x^n))(Q_n(x) + o(x^n)) \\ &= P_n(x) \cdot Q_n(x) \\ &\left.\begin{aligned} &+ P_n(x) \cdot o(x^n) + Q_n(x) \cdot o(x^n) \\ &+ o(x^n) \cdot o(x^n) \end{aligned}\right] o(x^n) \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{f(x) \cdot g(x) = P_n(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)}$$

nel calcolare il prodotto mi posso limitare ai termini di grado $\leq n$

Esempio 1 $\quad e^x \cdot \arctan x \qquad$ Taylor con $n = 4$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Calcolo le derivate fino alla 4^a e uso la formula (auguri!) ☺

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso sviluppi elementari

potevo anche non metterlo

$$e^x \cdot \arctan x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Esempio 2 $\quad \log(1+x)\cdot \sin^2 x \qquad n=5$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$2\cdot x \cdot \left(-\frac{x^3}{6}\right) \rightsquigarrow$ doppio prodotto

$$\log(1+x)\cdot \sin^2 x = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)$$

$$= x^3 - \cancel{\frac{x^5}{3}} - \frac{x^4}{2} + \cancel{\frac{x^5}{3}} + o(x^5)$$

(tutti gli altri termini hanno grado ≥ 6)

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

Nel fare il prodotto considero solo i termini di grado ≤ 5 !!!

Domanda: se $f(x) = \log(1+x)\cdot \sin^2 x$

Quanto valgono

$$f'''(0),\ f^{(4)}(0),\ f^{(5)}(0) \quad ?$$

Risposta: $6, -12, 0$

Perché?

$$f(x) = f(0) + \dots + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$x^3 \quad - \quad \frac{x^4}{2} \quad + \quad 0\cdot x^5$$

Quindi per forza $\dfrac{f'''(0)}{6} = 1 \rightsquigarrow f'''(0) = 6$

$$\frac{f^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow f^{(4)}(0) = -12$$

$$\frac{f^{(5)}(0)}{120} = 0 \rightsquigarrow f^{(5)}(0) = 0$$

Quali sono corretti ?

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ OK (Taylor con $n=3$)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ Ok (Taylor con $n=4$)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$ NO : manca $\frac{x^5}{120}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$ Ok, ma buffo

$\sin x = x - 6x^3 + o(x^2)$ Ok, ma buffo

$o(x^2)$ si mangia x^3 e resta Taylor con $n=2$.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 37

Note Title 16/11/2024

Operazioni con i polinomi di Taylor (centro in $x_0 = 0$)

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$
$$a f(x) = a P_n(x) + o(x^n)$$
$$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{P_n(x) \cdot Q_n(x)}_{} + o(x^n)$$

↑ basta calcolare i termini fino al grado n

Composizioni

Casi facili
$$f(ax) = P_n(ax) + o(x^n) \qquad a \in \mathbb{R}$$
$$f(x^a) = P_n(x^a) + o(x^{an}) \qquad a > 0$$

Verifica della seconda Per ipotesi
$$f(x) = P_n(x) + x^n \omega(x) \qquad \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$$

Quindi
$$f(x^a) = P_n(x^a) + (x^a)^n \omega(x^a)$$
$$= P_n(x^a) + \boxed{x^{an} \underbrace{\omega(x^a)}_{\omega_1(x)}} \rightsquigarrow o(x^{an})$$

$$\lim_{x \to 0} \omega_1(x) = \lim_{x \to 0} \omega(x^a) = \lim_{y \to 0} \omega(y) = 0$$

↑ uso che $a > 0$

Caso generale $\boxed{f(g(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)}$

ok, purché $g(0) = 0$ e quindi anche $Q_n(0) = 0$

Nel calcolo di $P_n(Q_n(x))$ basta considera i termini di grado $\leq n$

Verifica Ipotesi: $f(x) = P_m(x) + x^n \omega(x)$

Quindi

$$f(g(x)) = P_m(g(x)) + [g(x)]^n \omega(g(x))$$

L'ultimo termine lo scrivo come

$$[g(x)]^n \omega(g(x)) = \left[\frac{g(x)}{x}\right]^n x^n \boxed{\omega(g(x))}$$

$\left[\frac{g(x)}{x}\right] = \left[\frac{Q_n(x)+o(x^n)}{x}\right]$

$\omega(g(x)) \to 0$ pongo $y = g(x)$ e so che $g(0) = 0$

numero perché $Q_n(x)$ non ha il termine noto, quindi x si semplifica

Quindi l'ultimo termine è $x^n \cdot$ roba che tende a 0, quindi a sua volta $o(x^n)$.

Vediamo il primo termine: $P_m(g(x)) = P_m(Q_n(x) + o(x^n))$
$= P_m(Q_n(x)) + o(x^n)$

secondo punto importante

Il secondo punto è vero " termine a termine "

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} P_m(Q_n(x) + o(x^n)) = a_0 & \\ + a_1 (Q_n(x) + o(x^n)) & \rightsquigarrow a_1 Q_n(x) + o(x^n) \\ + a_2 (Q_n(x) + o(x)^n)^2 & \rightsquigarrow a_2 Q_n(x)^2 + o(x^n) \\ + a_3 (\qquad\qquad)^3 & \rightsquigarrow a_3 Q_m(x)^3 + o(x^n) \\ + \dots & \rightsquigarrow \dots \end{aligned}$$

— o — o —

Esempio 1 $e^{\sin x}$ $n = 4$

Parto da $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^{\sin x} \underset{\substack{\uparrow \\ t=\sin x}}{=} 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o(\sin^4 x)$$

Al posto di ogni $\sin x$ sostituisco lo sviluppo di $\sin x$:

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}(\quad)^2 + \frac{1}{6}(\quad)^3 + \frac{1}{24}(\quad)^4 + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{6}(x^3) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$o(\sin^4 x) = \sin^4 x \cdot \omega(x) = x^4 \underbrace{\boxed{\frac{\sin^4 x}{x^4}\,\omega(x)}}_{1 \cdot 0} = o(x^4)$$

Esempio 2 $\quad \cos(\sin x) \qquad n = 4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underbrace{o(x^5)}$$

la funzione è pari, quindi le restanti potenze saranno dal 6 in poi

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^{5,99})$$

Esempio 3 $\quad \sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}(\cos x)^3 + \boxed{o(\cos^3 x)}$

$= o(1)$ e si mangia TUTTO

Non posso farlo come sopra perché la funzione dentro non fa 0 in 0.

Sviluppi di Taylor con centro in x_0 generico

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: D \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in D$, sia $n \in \mathbb{N}$.
Allora sotto opportune ipotesi vale lo sviluppo

$$\boxed{f(x_0+h) = P_n(h) + o(h^n) \qquad \text{per } h \to 0}$$

dove

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^n$$

Altro modo di scriverlo: pongo $x = x_0 + h$, cioè $h = x - x_0$
e diventa

$$\boxed{f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0}$$

Da dove arriva tutto questo?
Considero la funzione $g(h) = f(x_0+h)$
Scrivo Taylor per $g(h)$:

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

e ora calcolo le derivate di g in $h=0$:

$g(0) = f(x_0)$

$g'(h) = f'(x_0+h) \quad \rightsquigarrow \quad g'(0) = f'(x_0)$

$g''(h) = f''(x_0+h) \quad \rightsquigarrow \quad g''(0) = f''(x_0)$

e così via.

Esempio 4 Sviluppare $\sin x$ con centro in $x_0 = \frac{\pi}{6}$ e $n = 3$

$\boxed{\text{1° modo}}$ Uso la formula e ottengo

$$f\left(\frac{\pi}{6}+h\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)h + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)h^2 + \frac{1}{3!}f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)h^3 + o(h^3)$$

Calcolo le derivate: $f(x) = \sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Quindi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3) \quad \text{per } h \to 0$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso formula di addizione per $\sin x$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos h + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin h$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^3)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)$$

Esempio 5 Sviluppare $\log x$ con centro in $x_0 = 5$ e $n = 4$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Faccio tutte le derivate e le calcolo in $x_0 = 5$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\log(5+h) = \log\left[5\cdot\left(1+\frac{h}{5}\right)\right]$

$$= \log 5 + \log\left(1+\frac{h}{5}\right) = \log 5 + \frac{h}{5} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{25} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{125} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{625} + o(h^4)$$

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 38

Note Title 16/11/2024

Funzioni iperboliche Seno, Coseno, Tangente iperbolica

Def.
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Simmetrie

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$ ⇝ Dispari

$\cosh(-x) = \cosh(x)$ ⇝ Pari

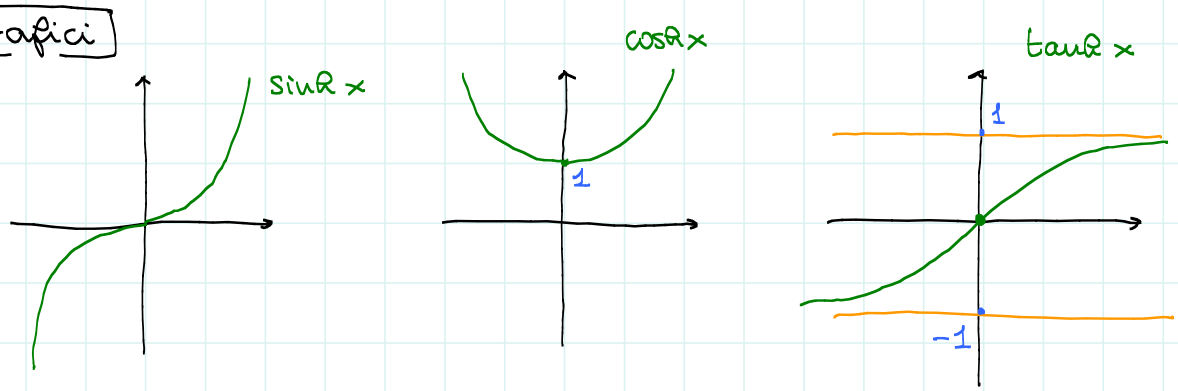
$\tanh(-x) = -\tanh(x)$ ⇝ Dispari

Le funzioni non sono periodiche, anzi

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

Grafici



Quadrati

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Quindi

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

relazione fondamentale

$\boxed{\text{Duplicazione}}$ Sommando i due quadrati trovo

$$\boxed{\sinh^2 x + \cosh^2 x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \cosh(2x)}$$

$$\boxed{\sinh(2x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = 2\sinh x \cdot \cosh x}$$

simili alla trigonometria classica

$$2\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$$

$\boxed{\text{Derivate}}$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \boxed{\sinh x}$$

senza il segno −

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2}$$

$$= 1 - \tanh^2 x$$

diverso dalla trigo classica

$\boxed{\text{Taylor}}$ $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4} \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

come $\cos x$, solo con tutti i segni +

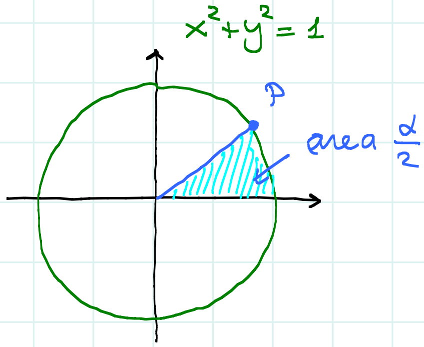
Analogamente $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Oss. $\cosh x + \sinh x = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

si prende i pezzi pari di e^x — si prende i pezzi dispari

Interpretazione geometrica

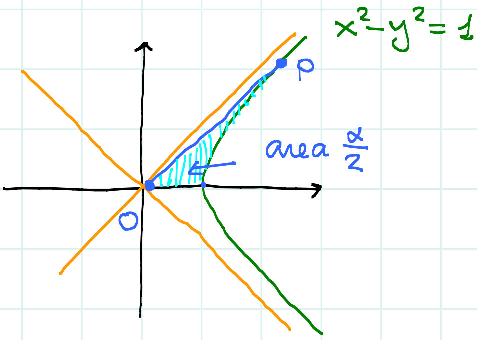
Trigonometria classica



$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ dove $\frac{\alpha}{2}$ è l'area del settore in figura

Trigonometria iperbolica

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, scelgo P sull'iperbole in modo che il settore in figura abbia area $\frac{\alpha}{2}$



Si può dimostrare che P esiste e $P = (\cosh\alpha, \sinh\alpha)$.

Dall'interpretazione geometrica è chiaro che $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ sono crescenti per $\alpha \geq 0$.

Si vede anche che $\tanh\alpha$ = coeff. angolare della retta OP tende a 1 quando $\alpha \to +\infty$

Funzioni iperboliche inverse Settsinh x, Settcosh x, Setttanh x

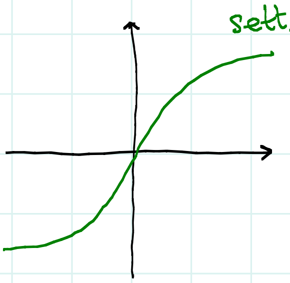
$\boxed{\text{Settsinh } x}$ $f(x) = \sinh x$ è iniettiva e surgettiva come
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

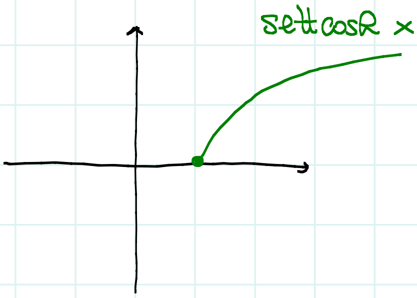
Quindi la sua inversa $\boxed{g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ è $g(x) = \text{Settsinh } x$

$\boxed{\text{Settcosh } x}$ $f(x) = \cosh x$ è iniettiva e surgettiva come
$f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$

Quindi l'inversa $g(x) = \text{Settcosh } x$ è definita come
$g: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

Analogamente Setttanh: $(-1, 1) \to \mathbb{R}$





$\boxed{\text{Formula per settcosh}}$ Dato $y \geq 1$, devo trovare $x \geq 0$ tale che

$\cosh x = y$, cioè $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = y$

Pongo $e^x = z$ e mi trovo $\underset{\substack{\uparrow \\ e^x}}{z} + \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-x}}}{\dfrac{1}{z}} = 2y$, cioè $z^2 + 1 = 2yz$

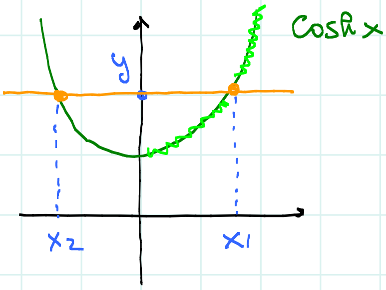
cioè $z^2 - 2yz + 1 = 0$. Questa si risolve

$z = y \pm \underbrace{\sqrt{y^2 - 1}}_{\text{ok se } y \geq 1}$ Scelgo quella con il segno +, perché l'altra si verifica essere < 1.

Ora $e^x = z = y + \sqrt{y^2 - 1}$ da cui

$$\boxed{x = \text{Settcosh } y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)}$$

Oss. È giusto che venissero due valori di z



$$x_1 = \log\big(\underbrace{y+\sqrt{y^2-1}}_{\geq 1}\big) \rightsquigarrow \text{si verifica che } x \geq 0$$

$$x_2 = \log\big(y-\sqrt{y^2-1}\big)$$

Esercizio Trovare formule analoghe per $\operatorname{Settsinh} x$ e $\operatorname{Setttanh} x$

Oss. $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Se sommo e divido per due: $$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cosh(i\theta)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(i\theta)$$

almeno formalmente.

Brutalmente: $\cosh x$ e $\sinh x$ sono la versione immaginaria di $\cos x$ e $\sin x$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 39

Note Title 16/11/2024

Esempio 1 $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$ centro $x_0 = 1$ $n = 3$

$$f(1+h) = (1+h)^3\, 3^{-1-h} = (1+h)^3 \frac{1}{3} 3^{-h} = \frac{1}{3}(1+h)^3 e^{-h\log 3}$$

$$= \frac{1}{3}(1+3h+3h^2+h^3)\left(1-\log 3\cdot h + \frac{1}{2}\log^2 3 \cdot h^2 - \frac{1}{6}\log^3 3\cdot h^3 + o(h^3)\right)$$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ con $t = -h\log 3$

Ora basta moltiplicare tutto tenendo solo i termini di grado ≤ 3

Esempio 2 $f(x) = \arctan x$ centro $x_0 = 1$ $n = 2$

Qui bisogna fare le derivate

$$f(1+h) = f(1) + f'(1)\cdot h + \frac{1}{2}f''(1)h^2 + o(h^2)$$

$f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \rightsquigarrow f''(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$$

Esempio 3 $f(x) = \arctan(e^x)$ centro $x_0 = 0$ $n = 2$

$\arctan t = t + o(t^2) \rightsquigarrow \arctan(e^x) = e^x + o(e^{2x})$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

No! Perché e^x non tende a 0 quando $x \to 0$.

Il problema sopra è che non è vero che $o(e^{2x}) = o(x^2)$

In realtà $o(e^{2x}) = o(1)$ e questo si mangia tutto

Modo corretto: uso sviluppo di $\arctan x$ con centro in 1

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$$

$$\arctan(e^x) = \arctan\Big(1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\text{Questo è un } h \to 0}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$$

$$+ \underbrace{o\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right)}_{\downarrow \text{ Davvero è } o(x^2)}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \cancel{\frac{x^2}{4}} - \cancel{\frac{x^2}{4}} + o(x^2)$$

Per l'ultima volta scriviamo il conto

$$o\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right) = \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \omega(x)$$

$$= x^2 \underbrace{\boxed{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}\right)^2 \omega(x)}}_{\downarrow\, 0} = o(x^2)$$

Esempio 4 Ricordiamo gli sviluppi delle potenze

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Vediamo alcuni casi speciali

$\boxed{\alpha = -1}$ $\quad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots} \qquad \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots}$$

Esempio 5 $f(x) = \tan x$ centro $x_0 = 0$ $n = 5$

1° modo Mi calcolo le derivate fino alla quinta!

2° modo $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{t}}$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\underbrace{\left(1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)\right)}_{1-t}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)$$

e ora basta moltiplicare tenendo solo i termini di grado ≤ 5

3° modo Lo sviluppo di $\tan x$ sarà del tipo

$$\tan x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$$

Ora sappiamo che

$$\tan(\arctan x) = x$$

ma

$$x = \tan(\arctan x) = \arctan x + a(\arctan x)^3 + b(\arctan x)^5 + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 + b(\quad)^5 + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ax^3 - ax^5 + bx^5 + o(x^5)$$

Quindi per forza $a = \frac{1}{3}$ (per mandare via x^3)

$b = a - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ (per mandare via x^5)

funzione dispari

Concludo che $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

Esempio 6

$\dfrac{\sin x}{x} - 1$	$(1+x)^{1/x} - e$	$\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

Calcolare le parti principali per $x \to 0$.

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) - 1$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3) \cancel{-1} = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$$

Nota bene: $\dfrac{o(x^4)}{x} = \dfrac{x^4\omega(x)}{x} = x^3\omega(x) = o(x^3)$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} - e$$

$$= e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - e$$

$$= e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - e$$

$$= e \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2} + o(x)}}_{e^t \text{ con } t \to 0} - e$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) - e$$

$$= e - \frac{e}{2}x + o(x) - e = -\frac{e}{2}x + o(x)$$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{x}{6} + o(x)$$

Come lo giustifico bene? Semplifico x^2 e mi trovo

$$\frac{\frac{x}{6} + o(x)}{1 + o(x)} = \left(\frac{x}{6} + o(x)\right) \cdot \frac{1}{1 + o(x)} \rightsquigarrow \text{uso sviluppo per } \frac{1}{1+t} = 1 - t + \ldots$$

Esempio 7

$$\sqrt[22]{n+2}-\sqrt[22]{n}$$

$$\sqrt[22]{n+2}-\sqrt[22]{n}=\sqrt[22]{n}\left(\sqrt[22]{1+\frac{2}{n}}-1\right)$$

$$=\sqrt[22]{n}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{22}}-1\right]$$

$$=\sqrt[22]{n}\left[\cancel{1}+\frac{1}{11n}-\cancel{1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{11}\frac{1}{n^{21/22}}+o\left(\frac{1}{n^{21/22}}\right)$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 40

Note Title 21/11/2024

SERIE Sia a_n una successione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad = \text{somma degli infiniti termini della successione}$$

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Poniamo

$S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ... e più in generale

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

SOMMA PARZIALE (S_n)

sommatoria = somma di un numero finito di termini (sono $n+1$ termini)

Si pone quindi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n}$$

Da buon limite, ci sono 4 possibilità:

1. $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$: si dice che la serie converge a ℓ

2-3. $S_n \to +\infty$ opp. $S_n \to -\infty$: si dice che la serie diverge a $\pm\infty$

4. S_n non ha limite: si dice che la serie è indeterminata.

Esempi banali

[1] $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo caso $S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $S_n \to 0$, quindi la serie converge a 0.

[2] $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Adesso $S_n = (n+1)$, quindi $S_n \to +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

[3] $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(+1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$. Allora $S_n = 1$ per n pari e $S_n = 0$ per n dispari, quindi S_n non ha limite, quindi la serie è indeterminata.

Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \text{indeterminata}$$

$\boxed{\text{Variante}}$ $\sum_{n=42}^{\infty} a_n$. In questo caso poniamo

$$S_{42} = a_{42}, \qquad S_{43} = a_{42} + a_{43} \qquad S_{44} = a_{42} + a_{43} + a_{44}, \ldots$$

e ancora una volta poniamo $\displaystyle\sum_{n=42}^{\infty} a_n = \lim_{m\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=42}^{m} a_k}_{\text{nuovo } S_m \text{, definito per } m \geq 42.}$

$\boxed{\text{Semplici proprietà algebriche}}$

$\boxed{1}$ Somma Se a_n e b_n sono due successioni, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

(mega proprietà associativa)

con tutte le cautele tipiche del limite della somma (in particolare il caso $+\infty - \infty$)

$\boxed{2}$ Prodotto per una costante Se a_n è una successione e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

(mega proprietà distributiva)

(con tutte le cautele dei prodotti in $\overline{\mathbb{R}}$)

Achtung! Non è vero che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \overset{\text{NO}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Non vale nemmeno che $a_0 b_0 + a_1 b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$

Due tipi speciali di serie : → serie telescopiche

→ serie geometriche

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{\underbrace{n=2}} \frac{1}{n^2-n}$

↑ per $n=0$ e $n=1$ il denominatore si annulla

Esperimento : $S_2 = a_2 = \frac{1}{2}$, $S_3 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$$S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Sembra ragionevole che $S_n = \frac{n-1}{n}$

Provo per induzione : passo base $n=2$ già fatto.

Passo induttivo :

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ipotesi}}}{=} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n^2+n}$$

$$= \frac{n^2 \cancel{-1} \cancel{+1}}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Conclusione : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

Spiegazione alternativa : osservo che $a_n = \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)}$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Quindi

$$S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{5}\right) + \dots$$

Ognuno si semplifica con il successivo, tranne l'1 iniziale.

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

Osservo che $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$

Quindi $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$

$= (\cancel{\log 2} - \underset{0}{\log 1}) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\log 4 - \cancel{\log 3}) + \ldots + (\log(n+1) - \log n)$

$= \log(n+1)$ (formalmente si dimostra per induzione)

Conclusione: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\log(n+1)}_{S_n} = +\infty$

Serie telescopica: quando accade questo "effetto cancellazione".

$\boxed{\text{SERIE GEOMETRICHE}}$ Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$ = somma di tutte le potenze di a $= 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$

In questo caso $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \underbrace{\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}_{\substack{\text{almeno nel}\\ \text{caso in cui } a \neq 1}}$ (dimostrato a suo tempo per induzione)

Adesso basta fare il limite di S_n, il quale dipende da a

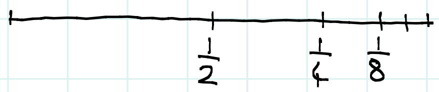
- Se $a > 1 \rightsquigarrow S_n \to +\infty$
- Se $a \in (-1, 1) \rightsquigarrow S_n \to \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$
- Se $a < -1 \rightsquigarrow S_n$ non ha limite ($\pm\infty$ a seconda che n pari o dispari)
- Se $a = -1 \rightsquigarrow S_n$ non ha limite ugualmente (è il caso $(-1)^n$)

- Se $a = 1 \rightsquigarrow S_n = n+1 \to +\infty$ (è il caso $a_n = 1$ trattato all'inizio).

Conclusione

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1,1) \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Discorso di ZENONE}}$



La freccia deve fare ∞ cose, quindi NON arriva mai

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)}_{\substack{\text{serie geometrica} \\ \text{con } a = \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 41

Note Title 21/11/2024

Studio della convergenza di una serie

Data una serie, la formula esplicita per S_n non si riesce quasi mai a trovare (tranne casi telescopici o molto speciali).

Domanda: come stabilisco se una serie converge o no senza avere la formula esplicita?
Una volta che si sa che converge, possiamo chiederci come approssimare la somma con un errore piccolo a piacere.

Strumenti — Condizione necessaria

Serie a termini positivi

- → criterio radice
- → criterio rapporto
- → criterio del confronto
- → criterio confronto asintotico
  - * casi standard
  - * casi limite

Serie a segno variabile

- → criterio di LEIBNITZ
- → Carabinieri per serie
- → Convergenza assoluta
- → DIRICHLET

CONDIZIONE NECESSARIA Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \to 0$

Dim Basta osservare che $a_n = \underset{\downarrow \atop \ell}{S_n} - \underset{\downarrow \atop \ell}{S_{n-1}} \to \ell - \ell = 0$. □

Come si usa? Devo studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Intanto calcolo $\lim_{n\to+\infty} a_n$

- Se il limite non viene 0 (cioè viene altro oppure non esiste), allora di sicuro la serie NON converge (e restano libere tre possibilità: diverge a $\pm\infty$, oppure indeterminata)
- Se il limite viene 0, allora la serie può convergere (ma non è obbligata a farlo, e restano aperte tutte le 4 possibilità)

SERIE A TERMINI POSITIVI

Supponiamo che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Se $a_n \leq 0$ sempre, basta raccogliere -1 e ci si riconduce al caso $a_n \geq 0$ sempre).

Allora i comportamenti possibili sono solo 2:

→ converge ad un numero $\ell \geq 0$

→ diverge a $+\infty$

Dim. Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora S_n è debolmente crescente e quindi, per il teorema sulle succ. monotone, le uniche possibilità sono

$$S_n \to \ell \in \mathbb{R}$$
$$S_n \to +\infty.$$

Esempio 1
$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^2+3n+5}{5n^2+7}}}_{a_n} = +\infty$$

Infatti: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{5}$, quindi manca la condizione necessaria, quindi la serie non può convergere.
Essendo a termini positivi, l'unica possibilità è che diverga a $+\infty$.

Oss. Se sotto c'era n^3 non potevo dire nulla (per ora).

Oss. In tutto questo basta che $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE
(in tal caso S_n è debolm. crescente definitivamente, e tutto funziona allo stesso modo).

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano a_n e b_n due successioni con $0 \leq a_n \leq b_n$ definitiv.
Allora valgono queste due implicazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Idea della dim. Chiamiamo S_m^a e S_m^b le somme parziali delle due serie.

Supponiamo per semplicità che $0 \leq a_n \leq b_n$ sia vera $\forall n \in \mathbb{N}$ e non solo definitivamente.
Allora

$$S_m^a \leq S_m^b \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \implies S_m^a \to +\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto} \\ \text{per i limiti}}}{\implies} S_m^b \to +\infty \implies \sum_{m=0}^{\infty} b_m = +\infty$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \text{ converge} \implies S_m^b \to \ell \in \mathbb{R} \implies S_m^a \text{ non possono tendere a } +\infty$$

$\implies$ dal momento che S_m^a ha un limite, essendo monotona, quel limite è reale

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

CRITERIO DELLA RADICE Supponiamo che $a_n \geq 0$ definitiv. e

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \quad \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Allora

- Se $\ell > 1$, allora la serie diverge a $+\infty$
- Se $\ell < 1$, " " converge
- Se $\ell = 1$, allora BOH ☹

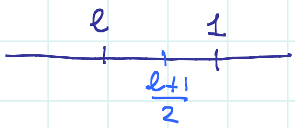
CRITERIO DEL RAPPORTO Stessa cosa con $a_n > 0$ definitiv., e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$$

Dim. criterio radice Ci sono due casi

1° caso Se $\ell > 1$, allora $a_n \to +\infty$, quindi niente cond. nec., quindi non può convergere, quindi diverge a $+\infty$ (è l'unica possibilità essendo a termini ≥ 0)

2° caso Se $\ell < 1$, allora $a_n \to 0$, quindi cond. nec. OK, quindi potrebbe convergere, ma non basta.
Ricordando la dim. per i limiti, se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1$ allora



$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \quad \text{definitiv.}$$

quindi

$$0 \leq a_n \leq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{b_n} \quad \text{definitiv.}$$

Ora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è una geometrica con parametro $\in (-1,1)$

e quindi converge. Ma allora per confronto anche la serie di a_n converge.

Oss. La dim. del criterio del rapporto è analoga.

Esercizio 1
$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}}_{a_n}$$

Criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n}\,\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}} = \frac{4}{5}\underbrace{\left\{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}\right\}^{1/n}}_{\downarrow \atop 1^0=1} \to \frac{4}{5} < 1$$

$\rightsquigarrow$ la serie converge

Esercizio 2
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{-n^3}$$

Criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^4}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{-n^2} = \overset{1 \atop \uparrow}{\boxed{\sqrt[n]{n^4}}}\,\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}_{\downarrow \atop e^3}} \to \frac{1}{e^3} < 1$$

$\rightsquigarrow$ la serie converge.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 42

Note Title 21/11/2024

$\boxed{\text{CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO}}$ (casi standard)

Siano a_n e b_n due successioni con

$a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty)$$

(diverso da 0 e da $+\infty$)

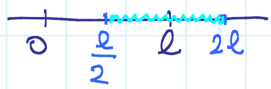
Allora le due serie hanno lo stesso tipo di comportamento, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

Nel caso in cui convergono, il numero a cui convergono può essere diverso.

<u>Operativamente</u> Devo studiare $\sum a_n$, e spero di trovare una $\sum b_n$ che conosco per cui $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0$ e $\neq +\infty$

$\boxed{\text{Dim}}$ Poiché $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0$ e $\neq +\infty$



allora definitivamente $\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$, cioè

$$\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2\ell\, b_n \quad \text{definitiv.}$$

(ho potuto moltiplicare senza cambiare le disug. perché $b_n > 0$).

Se $\sum b_n = +\infty$, allora $\sum \frac{\ell}{2} b_n = +\infty$, e quindi $\sum a_n = +\infty$ per la disug. di sinistra.

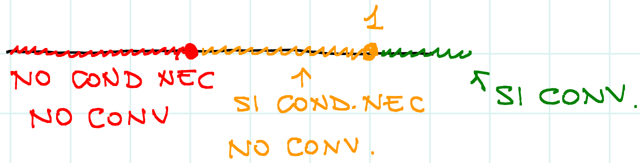
Se $\sum b_n$ conv., allora anche $\sum 2\ell b_n$ conv., e quindi $\sum a_n$ conv. per la disug. di destra.

Serie armoniche generalizzate (armonica vera: quella con $a=1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

Oss. In entrambi i casi la cond. nec. è sempre verificata quando $a>0$



Come si dimostra questa tabellina?

* criterio di condensazione di CAUCHY
* disuguaglianze e confronti
* confronti serie - integrali (che vedremo un giorno)

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+3n^2-7}$

$a_n \to 0$, quindi può convergere.
Inoltre $a_n \geq 0$ definitiv.

Brutale: $a_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ $\rightsquigarrow$ armonica generalizzata con $a=2>1$ $\rightsquigarrow$ converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\dfrac{n+5}{n^3+3n^2-7}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2(n+5)}{n^3+3n^2-7} \to 1 \quad \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, che converge in quanto armonica generalizzata con $a = 2 > 1$.

<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ voglio dimostrare davvero che converge

Faccio il confronto asintotico con $b_n = \dfrac{1}{n^2-n}$

dopo aver osservato che a_n e b_n sono positive definitivamente.

Ora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2-n}{n^2} \to 1 \quad \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix}$$

Quindi $\sum \frac{1}{n^2}$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^2-n}$, che avevamo visto convergere essendo telescopica.

<u>Conseguenza</u> Poiché $\dfrac{1}{n^a} \leq \dfrac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$ e ogni $a \geq 2$

l'esempio precedente dimostra la convergenza dell'armonica generalizzata almeno quando $a \geq 2$ (resta aperto il range $(1,2)$).

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

Confronto asintotico con $b_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Tutta roba positiva e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log(1+x)} = 1 \quad \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix}$$

Quindi $\sum \frac{1}{n}$ si comporta come $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, che diverge in quanto telescopica

Conseguenza Poiché $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 1$ e per ogni $a \leq 1$

questo dimostra che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge per ogni $a \leq 1$.

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n}$

Intanto $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Per ora è $\frac{+\infty-\infty}{+\infty}$

Brutale: $a_n = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{3}{n(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} \sim \frac{\text{cost}}{n^{3/2}}$

Ora $3/2 > 1$, quindi converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{n(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} \cdot n\sqrt{n} = \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \to \frac{3}{2} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, che converge.

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sinh\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$

Brutale: $a_n \sim n\left(\cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6n^3}\right) \sim n \cdot \frac{1}{3n^3} \sim \frac{1}{3n^2}$

$\sinh t = t + \frac{1}{6}t^3 + \ldots$ $\rightsquigarrow$ converge perché $2 > 1$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \ldots$

Rigoroso: confronto asint. con $\frac{1}{n^2}$

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{7} - 1\right)$ (Intanto $a_n \to 0$ e $a_n \geq 0$)

$a_n = \sqrt[n]{7} - 1 = 7^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log 7} - 1 \sim \cancel{1} + \frac{1}{n}\log 7 - \cancel{1}$

quindi si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 43

Note Title 23/11/2024

$\boxed{\text{Criterio confronto asintotico}}$

Siano a_n e b_n due successioni con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

<u>Caso standard</u> Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \to \ell \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso tipo di comportamento.

<u>Casi limite</u> Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0$$

Allora [$\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ definitiv., quindi $a_n \leq b_n$ definitiv]

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$
$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. Allora [$\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ definitiv, quindi $a_n \geq b_n$ definitiv.]

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$
$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \text{BOH}$$

<u>Esempio 1</u> (Facile) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{a_n}$

Provo confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$. Osservo che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n} \cdot n = \log n \to +\infty \quad \text{(caso limite)} \qquad [a_n \geq b_n \text{ defin.}]$$

Ora $\sum \frac{1}{n}$ diverge (armonica con $a=1$) $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Esempio 2 (Facile) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$

Provo C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$. Osservo che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2 \log n} \cdot n^2 = \frac{1}{\log n} = 0 \quad \text{(caso limite)}$$

[$\frac{a_n}{b_n} \to 0$ quindi $a_n \leq b_n$ definitiv.]

Ora $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge (armonica con esponente $a = 2$)

Quindi $\sum a_n$ converge.

Esempio 3 (Più delicato) $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\log n}{n^2}}}_{a_n}$

$\boxed{\text{Tentativo 1}}$ C.A. con $\frac{1}{n^2} = b_n$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n^2 = \log n \to +\infty \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \geq 1 \ \dots \ a_n \geq b_n \text{ defin.} \right]$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ BOH ☹

$\boxed{\text{Tentativo 2}}$ C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n = \frac{\log n}{n} \to 0 \quad \text{(potenza batte log)}$$

[$\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ ... $a_n \leq b_n$ defin.] $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

$\Rightarrow \sum a_n$ BOH ☹

$\boxed{\text{Tentativo 3}}$ C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{4/3}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n^{4/3} = \frac{\log n}{n^{2/3}} \to 0 \quad \text{(potenza batte log)}$$

Come prima $a_n \leq b_n$ definitiv.

Ora però

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{4/3}} \text{ converge perché } \frac{4}{3} > 1$$

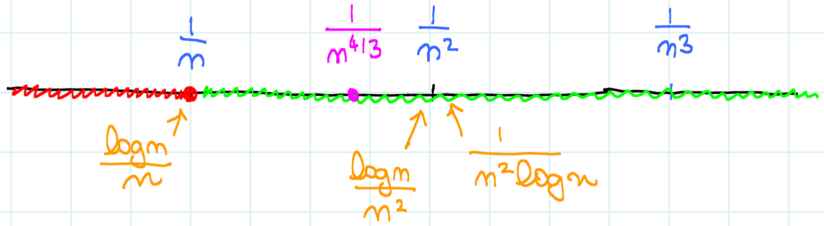
Quindi $\sum a_n$ converge

Interpretazione brutale dei 3 esempi

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\quad \sum \frac{\log n}{n}$ diverge ancora di più, perché $\log n$ rende i termini più grandi

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\quad \sum \frac{1}{n^2 \log n}$ converge ancora di più, perché $\log n$ "collabora" a rendere i termini più piccoli

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\quad \sum \frac{\log n}{n^2}$ Ora $\log n$ "rema contro la convergenza" perché rende i termini più grandi. Tuttavia $\log n$ è debole, quindi sposta poco rispetto a $\frac{1}{n^2}$



Quello che abbiamo dimostrato nell'esempio 3 è che $\frac{\log n}{n^2}$ sta a destra di $\frac{1}{n^{4/3}}$.

Oss. Invece di $\frac{4}{3}$ potevo usare un qualunque esponente in $(1,2)$

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Tentativo 1 Criterio della radice $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \to 1 \Rightarrow$ BOH ☹

Tentativo 2 C.A. con $b_n = \dfrac{1}{n^{2024}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2024}}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{e^{2024 \log n}}{e^{\sqrt{n}\log 2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}\log 2 - 2024 \log n}} \to 0$$

$\uparrow$ $\sqrt{n}$ batte $\log n$

Quindi $a_n \leq b_n$ definitiv. Poiché $\sum b_n$ converge (armonica con $a = 2024$) anche $\sum a_n$ converge

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

Osserviamo che $\log n \geq 5$ definitivamente (potevo mettere 2 o 2024)

Quindi

$$n^{\log n} \geq n^5 \text{ defin.}$$

e quindi

$$\frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^5} \quad \text{definitiv.}$$

Ora $\sum \frac{1}{n^5}$ converge, quindi anche $\sum \frac{1}{n^{\log n}}$ converge

Esempio 6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

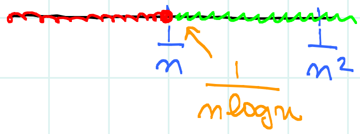
$$(\log n)^{\log n} = e^{\log n \cdot \log(\log n)} \qquad A^B = e^{B \log A}$$

$$= \left(e^{\log n}\right)^{\log(\log n)} = n^{\log(\log n)}$$

Quindi

$$\sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}} = \sum \frac{1}{n^{\log(\log n)}}$$ e si conclude come nell'esempio prec.

Oss. Se prendiamo $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$



Lo spostamento è verso destra, ma basta per convergere ?

No! Però i c.a. attuali non bastano per trattare questo caso, che è in tabellina per conto suo.

Ricordo che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^a}$$

converge se e solo se $a > 1$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 44

Note Title 23/11/2024

Serie con termini di segno variabile

→ CRITERIO DI LEIBNITZ (serie a segno alterno)
→ CRITERIO ASSOLUTA CONVERGENZA
(→ DIRICHLET)

Criterio di Leibnitz Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$$

Supponiamo che

(i) $\alpha_n \geq 0$ almeno definitiv. (questo dice che $(-1)^n \alpha_n$ è a segno alterno)

(ii) $\alpha_n \to 0$ (sostanzialmente è la cond. necessaria)

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ almeno definitiv. (debole decrescenza di α_n)

Allora la serie converge.

Criterio dell'assoluta convergenza

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Oss. Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, allora BOH.

Oss. Quando studiamo $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, abbiamo a disposizione

tutti gli strumenti per le serie a termini ≥ 0.

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$

armonica a segni alterni

Applico Leibnitz con $\alpha_n = \frac{1}{n}$.

(i) $\alpha_n \geq 0$ ☺

(ii) $\alpha_n \to 0$ ☺

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ se e solo se $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ vero $\forall n \geq 1$ ☺

$\rightsquigarrow$ la serie converge

Potevo usare l'assoluta convergenza?

NO! Infatti $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty \rightsquigarrow$ BOH

Oss. Allo stesso modo si trattano le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$$

Queste: → convergono assolutamente per $a > 1$

→ convergono comunque per $a > 0$ per Leibnitz

→ non verificano nemmeno la cond. nec. se $a \leq 0$

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

Non converge assolutamente poiché $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n} = +\infty$, volendo per confronto con $b_n = \frac{1}{n}$

Posso applicare Leibnitz con $\alpha_n = \frac{1}{\log n}$

(i) $\alpha_n \geq 0$ ☺ (ii) $\alpha_n \to 0$ ☺

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ se e solo se $\frac{1}{\log(n+1)} \leq \frac{1}{\log n}$ ☺

perché $\log x$ è crescente

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\cos(n!) - \sin(2^n)+5}{n^2-7n+125}}}_{\alpha_n} \cdot (-1)^n$

Applico Leibnitz

(i) $\alpha_n \geq 0$ definitivamente perché numeratore ≥ 3 e denom $\to +\infty$

(ii) $\alpha_n \to 0$

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ ⇝ auguri! ☹

Proviamo con assoluta convergenza

$$|a_n| = |(-1)^n \alpha_n| = \frac{\cos(n!) - \sin(2^n) + 5}{n^2-7n+125}$$

almeno definitiv., cioè appena il denom diventa >0

Ora

$\sum |a_n|$ converge perché

$$\frac{\cos(n!) - \sin(2^n) + 5}{n^2-7n+125} \leq \underbrace{\frac{14}{n^2-7n+125}}$$

potevo mettere anche 7

La serie con questo termine converge per C.A. con $\frac{1}{n^2}$

Quindi la serie iniziale converge.

Esempio 3 facilitato $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(n!)}{n^3}}_{a_n}$ converge

Osservo che $|a_n| = \dfrac{|\cos(n!)|}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$

Ora $\sum \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow \sum \dfrac{|\cos(n!)|}{n^3} \Rightarrow \sum \dfrac{\cos(n!)}{n^3}$

criterio del confronto per serie a termini ≥ 0

assoluta convergenza

Achtung! Non basta dire $\frac{\cos(n!)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ conv. $\Rightarrow \sum \frac{\cos(n!)}{n^3}$ converge per confronto.

Infatti il confronto vale solo per serie a termini ≥ 0, e la prima non lo è.

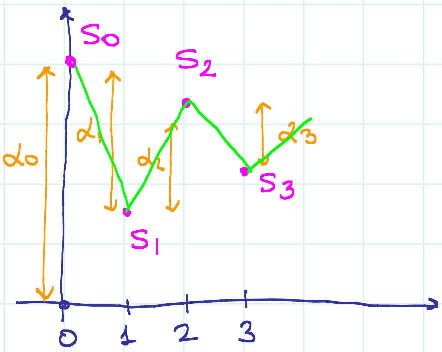
$\boxed{\text{Dim. Leibnitz}}$ Rappresentiamo graficamente le somme parziali

$S_0 = \alpha_0$

$S_1 = \alpha_0 - \alpha_1$

$S_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$

$S_3 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$



Idea : $S_{2n} \searrow$ e $S_{2n+1} \nearrow$

$\boxed{S_{2n} \text{ decresce}}$ $S_{2n+2} = S_{2n} \underbrace{- \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2}}_{\leq 0 \text{ per (iii)}} \leq S_{2n}$

$\boxed{S_{2n+1} \text{ cresce}}$ $S_{2n+3} = S_{2n+1} + \underbrace{\alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+3}}_{\geq 0 \text{ per (iii)}} \geq S_{2n+1}$

$\boxed{S_{2n+1} \leq S_0}$ (tutti i dispari sono più piccoli di S_0)

$S_{2n+1} = S_{2n} - \alpha_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$

sui pari decresce

$\boxed{S_{2n} \geq S_1}$ $S_{2n} = S_{2n-1} + \alpha_{2n} \geq S_{2n-1} \geq S_1$

sui dispari decresce

Per il teo. delle successioni monotone

$$S_{2n} \longrightarrow \ell_p \in \mathbb{R} \qquad\qquad S_{2n+1} \longrightarrow \ell_d \in \mathbb{R}$$

Resta da dimostrare che $\ell_p = \ell_d$. Per questo basta osservare che

$$\begin{array}{ccccc} S_{2n+1} & - & S_{2n} & = & -\alpha_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ell_d & - & \ell_p & = & 0 \end{array}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Carabinieri per serie}}$ Siano a_n, b_n, c_n tre succ. tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitiv.}$$ (nessuna ipotesi di segno)

Supponiamo che $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano.
Allora anche $\sum b_n$ converge

$\boxed{\text{Dim}}$ 1° passo $\sum (c_n - a_n)$ converge (diff. di due serie che convergono)

2° passo Osserviamo che

$$0 \underset{\uparrow \atop a_n \leq b_n}{\leq} b_n - a_n \underset{\uparrow \atop b_n \leq c_n}{\leq} c_n - a_n$$

Ora $\sum (c_n - a_n)$ converge, quindi anche $\sum (b_n - a_n)$ converge
(confronto tra serie a termini positivi)

3° passo $$\sum b_n = \underbrace{\sum a_n}_{\substack{\text{converge} \\ \text{per ipotesi}}} + \underbrace{\sum (b_n - a_n)}_{\substack{\text{converge per} \\ \text{il 2° passo}}}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. assoluta conv.}}$ $$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$
Per ipotesi le due laterali convergono, quindi converge la centrale.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 45

Note Title 23/11/2024

Esercizio 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\log(n^4+4) - 4\log n]$

$$a_n = \log(n^4+4) - 4\log n = \log\left(\frac{n^4+4}{n^4}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{4}{n^4}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \log(1+t)\sim t \\ \text{per } t\sim 0}}{\sim} \frac{4}{n^4} \Rightarrow \text{converge perché } 4>1$$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^4}$ ... $\frac{a_n}{b_n} \to 4 \neq 0, \neq +\infty$

Esercizio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$

Ricordiamo che $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x>0$, quindi

$$\frac{\pi}{2} - \arctan n = \arctan\frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan x\sim x \\ \text{per } x\sim 0}}{\sim} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$ e si riduce a

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}} \to 1$$

↗ come prima num $= \arctan\frac{1}{n}$

↘ usare De L'Hôp dopo essere passati alle funzioni

Esercizio 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n^3+3^n} - 3\right)}_{a_n \geq 0}$

$$a_n = \sqrt[n]{3^n\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} - 3 = 3\left[\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$$

$$= 3\left[e^{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} - 1\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \log(1+t)\sim t}}{\sim} 3\left[e^{\frac{n^2}{3^n}} - 1\right] \underset{\substack{\uparrow \\ e^t\sim 1+t}}{\sim} \frac{3n^2}{3^n}$$

Ora $\sum \frac{n^2}{3^n}$ converge per il criterio della radice o del rapporto, quindi la serie iniziale converge.

Rigoroso: devo fare C.A. con $b_n = \frac{n^2}{3^n}$ e vedo che $\frac{a_n}{b_n} \to 3$.

Esempio 4

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ | $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^3+1}}$

Manca la cond. necessaria
a_n NON ha limite perché
$a_{2n} \to 1$
$a_{2n+1} \to -1$

$|a_n| = \frac{n}{n^2+1}$
$\sim \frac{1}{n}$
$\Rightarrow \sum |a_n| = +\infty$
$\Rightarrow$ BOH

$|a_n| = \frac{n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$
$\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow$
$\sum a_n$ converge
(assoluta convergenza)

Per la 2ª l'unica speranza è Leibnitz con $d_n = \frac{n}{n^2+1}$

(i) $d_n \geq 0$ ☺ (ii) $d_n \to 0$ ☺

(iii) $d_{n+1} \leq d_n$ cioè $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$ almeno definitiv.

Svolgo bovinamente i conti

$$(n+1)(n^2+1) \overset{?}{\leq} n(n^2+2n+2)$$

$$\cancel{n^3}+\cancel{n}+\cancel{n^2}+1 \overset{?}{\leq} \cancel{n^3}+\cancel{2}n^2+\cancel{2}n \rightsquigarrow n^2+n \geq 1 \quad ☺$$

Quindi converge per Leibnitz, ma non converge assolutamente

Esempio 5

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$
1	2	3

(1) $|a_n| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto} \\ \text{tra serie a} \\ \text{termini } \geq 0}}{\Longrightarrow} \sum \frac{|\cos n|}{n^2} \text{ conv.} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{assoluta} \\ \text{convergenza}}}{\Longrightarrow} \sum \frac{\cos n}{n^2} \text{ conv.}$$

(2) Non è nemmeno a segni variabili!

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2+\sin n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}$$

basta questo per concludere
con il confronto a 2

Guai ad usare $\sin n \sim n$!!!

(3) $\frac{2+\sin n}{n} \geq \frac{1}{n} > 0 \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{2+\sin n}{n} = +\infty$

Esempio 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+1}{n^3-4n+6}$

Assoluta convergenza: NO perché $|a_n| \sim \frac{1}{n}$:)

"Unica" speranza: Leibnitz, ma c'è il problema della monotonia.

Alternativa più astuta: $\frac{n^2+3n+1}{n^3-4n+6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{n} + \frac{\cancel{n^3}+3n^2+n-\cancel{n^3}+4n-6}{n(n^3-4n+6)}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{3n^2+5n-6}{n(n^3-4n+6)}$$

Adesso so che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dots = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{Leibnitz tranquillo}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{3n^2+5n-6}{n(n^3-4n+6)}}}_{\text{convergenza assoluta}}$$

$\sim \frac{3}{n^2}$

Esempio 7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{a}$ Per quali $a>0$ converge?

$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}$ quindi $a_n \sim \left(\frac{1}{6n^3}\right)^{a} = \frac{1}{6^a}\cdot\frac{1}{n^{3a}}$

$\sin x \sim x-\frac{1}{6}x^3$

e questa converge quando $3a>1$, cioè $a>\frac{1}{3}$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3a}}$

Esempio 8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sinh\frac{3}{n}-\sin\frac{a}{n}\right)$ Per quali $a>0$ converge?

$\sinh\frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}$ $\sin\frac{a}{n}\sim\frac{a}{n}$

Quindi $a_n \sim \frac{3-a}{n}$. Se $a\neq 3$ si comporta come $\sum\frac{1}{n}$, quindi diverge

Se $a=3$, entrano in gioco i termini successivi, cioè

$\sinh\frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}+\frac{1}{6}\frac{27}{n^3}$ $\sin\frac{3}{n}\sim\frac{3}{n}-\frac{1}{6}\frac{27}{n^3}$

$\sinh t = t+\frac{1}{6}t^3$

Quindi $a_n \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{n^3} = \frac{9}{n^3}$ e quindi la serie converge.

Esempio 9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a\cdot\arcsin\left(\frac{n^8}{2^n}\right)$ Per quali $a>0$ converge?

$n^a\cdot\arcsin\left(\frac{n^8}{2^n}\right) \sim n^a\cdot\frac{n^8}{2^n} = \frac{n^{a+8}}{2^n}$

$\arcsin x\sim x$ per $x\sim 0$

e $\displaystyle\sum\frac{n^{a+8}}{2^n}$ converge $\forall a\geq 0$

per il criterio della radice o del rapporto.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 46

Note Title 28/11/2024

SERIE DI POTENZE Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

c_n: numeri dati: coefficienti

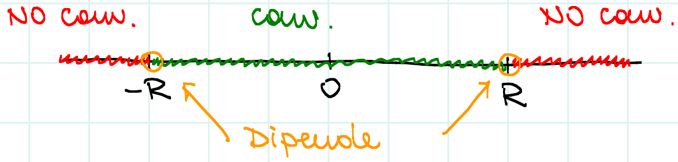
Brutalmente: polinomio di grado ∞: $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

Domande ① Per quali valori $x \in \mathbb{R}$ converge?
② Quando converge, a cosa converge?

Oss. Di sicuro converge per $x = 0$ e converge al termine noto c_0.

Teorema 1 (Raggio di convergenza)
Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ con questa proprietà.
(1) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < R$ la serie converge, e anzi converge assolutamente
(2) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > R$ la serie non converge, anzi non verifica nemmeno la cond. nec.
(3) Per $|x| = R$, cioè $x = \pm R$, dipende dai casi (può anche andare diverso in $\pm R$)

Oss. La situazione è descritta dal seguente disegno



La zona di convergenza è un intervallo centrato nell'origine, con o senza estremi a seconda dei casi

$\boxed{\text{Casi speciali}}$

- Se $R = 0$ la serie converge a c_0 per $x = 0$ e per $x \neq 0$ non c'è nemmeno la cond. necessaria
- Se $R = +\infty$ la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

<u>Oss</u>. Nella dim. si porrebbe $R = \sup\{x \geq 0 : \text{la serie converge in } x\}$.

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ (Formula per il raggio di convergenza)

Supponiamo che esista

$$\boxed{L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (la formula si interpreta: se $L = 0$, allora $R = +\infty$; se $L = +\infty$, allora $R = 0$)

<u>Oss</u>. Se il limite non esiste, R esiste comunque per il Teorema 1, solo che non è dato da quella formula, ma da una analoga con $\boxed{\text{limsup}}$ invece di lim

↑ molto più avanti nel corso

$\boxed{\text{Dim.}}$ Consideriamo la nostra serie $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{c_n x^n}}_{= a_n}$

Consideriamo $|a_n|$ e applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|c_n|} \to |x| \cdot L$$

Ora abbiamo due casi

- Se $|x| \cdot L > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, allora $|a_n| \to +\infty$, quindi non c'è cond. necessaria
- Se $|x| \cdot L < 1$, allora $\sum |a_n|$ converge, ma allora $\sum a_n$ converge per assoluta convergenza. Oss: $|x| \cdot L < 1 \iff |x| < \frac{1}{L}$.

$\boxed{\text{Soliti 3 esempi}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$c_n = 1 \qquad\qquad c_n = \frac{1}{n} \qquad\qquad c_n = \frac{1}{n^2}$$

$$c_0 = 0 \qquad\qquad c_0 = 0$$

In tutti e 3 i casi $\sqrt[n]{|c_n|} \to \overset{L}{\overset{\shortparallel}{1}}$, quindi $R = \frac{1}{1} = \frac{1}{L}$

→ Nel primo caso abbiamo una serie geometrica che converge per $x \in (-1,1)$ e la somma fa $\frac{1}{1-x}$

→ Nel secondo caso la serie converge per $x \in [-1, 1)$

converge per Leibnitz

armonica con $a=1$ ⇝ diverge

→ Nel terzo caso la serie converge per $x \in [-1, 1]$

assoluta conv. grazie ad n^2

— o — o —

Data una serie di potenze, chiamiamo $f(x)$ la sua somma, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \forall x \in \text{zona convergenza}$$

$\boxed{\text{Teorema 3}}$ (Regolarità della somma)

La funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte all'interno del raggio di convergenza (diciamo se $R > 0$). Inoltre tutte le sue derivate si calcolano "derivando la serie", cioè ad esempio

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} \qquad\qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)\, x^{n-2}$$

e così via. Tutte le serie delle derivate hanno lo stesso raggio di conv. di quella iniziale (ma il comp. in $\pm R$ può cambiare)

SERIE DI TAYLOR Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte, consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Questa si chiama serie di Taylor di $f(x)$ con centro in $x_0 = 0$, ed è la serie di potenze che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Teorema 4 Sotto opportune ipotesi la serie di Taylor di $f(x)$ converge proprio ad $f(x)$ per ogni x appartenente alla zona di convergenza (eventualmente anche negli estremi)

E le opportune ipotesi? Le funzioni per cui sono soddisfatte si chiamano ANALITICHE.
Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari usando composizioni e/o operazioni algebriche sono analitiche.

Esempio Consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

In questo caso $c_n = \frac{1}{n!}$, quindi $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 = L$

Dal teorema 2 sappiamo che $R = \frac{1}{L} = +\infty$, quindi la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ grazie al teorema 1.
Ora osserviamo che è la serie di Taylor di e^x, quindi per il Teorema 4 converge ad e^x. In particolare mettendo $x = 1$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 47

Note Title 28/11/2024

Esempio 1 Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

La serie sappiamo che converge per Leibnitz. A cosa converge?
Cosa ci ricorda? Sembra

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad \text{con} \quad x = 1$$

Ma questa è la serie di Taylor di $\log(1+x)$, che quindi è la somma della serie nella zona di convergenza.
Qual è la zona di convergenza? Calcolo R. In questo caso

$$c_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \rightsquigarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 = L \rightsquigarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie converge di sicuro per $x \in (-1, 1)$.
Vediamo gli estremi
- → per $x = 1$ converge per Leibnitz
- → per $x = -1$ diventa $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$ che diverge a $-\infty$.

Quindi la zona di convergenza è $(-1, 1]$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x) \qquad \boxed{\forall x \in (-1, 1]}$$

zona di convergenza

In particolare $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$

Oss. Se metto $x = 2$ la serie non converge, e in particolare la sua somma non fa $\log 3$

Oss. In questo caso il raggio di convergenza non poteva essere più di 1 perché $\log(1+x)$ ha problemi per $x < -1$.

Esempio 2 Calcolare $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Questa ci ricorda $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$

e quindi $\boxed{\text{se tutto va bene}}$ la somma richiesta è $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

se $x=1$ è all'interno della zona di conv. della serie di potenze

Scriviamo per bene la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

Per quali x converge? In questo caso

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pm \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

quindi $\sqrt[n]{|c_n|}$ non ha limite perché sui pari tende a 0, e sui dispari tende a 1.

Quindi il teorema 2 nell'immediato non si applica.

Osservo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \underset{x^2=y}{=} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^n$$

L'ultima si vede che converge per $y \in (-1,1)$ più eventualmente agli estremi, quindi quella iniziale converge per $x \in (-1,1)$ più eventualmente agli estremi.

→ per $x = 1$ e per $x = -1$ converge per Leibnitz.

Conclusione

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad \boxed{\forall x \in [-1, 1]}$$

zona di convergenza

$\boxed{\text{Delirio}}$ Nell'esempio 2 la funzione $\arctan x$ non ha mai problemi di definizione, quindi perché la sua serie di Taylor si rifiuta di convergere per $|x| > 1$.
Chi è la derivata di $\arctan x$? $\frac{1}{1+x^2}$

Ora $\frac{1}{1+x^2}$ ha problemi in $x = \pm i$, e i dista 1 dall'origine.

Moralmente: $\arctan x$ ha problemi in $\pm i$, perché ce li ha la sua derivata, quindi il raggio di convergenza non può essere più di 1.

Oss. Abbiamo detto che $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
Derivando trovo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

già lo sapevamo per la geometrica

e questo è un esempio del Teorema 3.

Esempio 3 Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

Intanto $c_n = n$, quindi $\sqrt[n]{|c_n|} \to 1 = L$, quindi $R = \frac{1}{L} = 1$
Negli estremi $x = \pm 1$ non converge, perché manca cond. nec.
Quindi la serie data converge $\iff x \in (-1, 1)$
La serie è

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = x\,(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)$$
$$= x\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)' = (*)$$

Ora

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = x\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \underset{\text{geometrica}}{=} x \cdot \frac{1}{1-x}$$

Quindi $\quad (*) = x \left(\frac{x}{1-x}\right)' = x\,\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$

Esempio 4 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ $\quad$ Quanto fa la somma

Oppure calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$

Pongo $y = \frac{x}{3}$ e diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \dots$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots$$

Quindi quella originaria è $-\log(1-y)$, quindi tornando in x diventa

$$-\log\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -\log \frac{3-x}{3} = \log \frac{3}{3-x}$$

Tutto questo vale all'interno della zona di convergenza.
Al solito $c_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$, quindi

$\sqrt[n]{|c_n|} \to \frac{1}{3} = L$ e quindi $R = 3$. Guardo gli estremi:

→ per $x = 3$ diventa $\sum \frac{1}{n}$ e diverge
→ per $x = -3$ diventa $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ e converge per Leibnitz.

Conclusione: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n} = \log\left(\frac{3}{3-x}\right) \quad \forall x \in [-3, 3)$

In particolare per $x = 1$ converge a $\log \frac{3}{2}$.

Esempio 5 $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$ $\quad \rightsquigarrow R = +\infty$

$$x + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^9}{4!} + \frac{x^{13}}{6!} = x\left(1 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{12}}{6!} + \dots\right)$$

$$= x \cdot \cosh(x^2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 48

Note Title 28/11/2024

Esercizio 1 Polinomio di Taylor di grado 30 di $f(x) = x^7 \cdot \arctan x^5$

Fare le derivate non serve! $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^6)$

$$\arctan(x^5) = x^5 - \frac{x^{15}}{3} + \frac{x^{25}}{5} + \underline{o(x^{30})}$$

qui posso mettere anche $o(x^{34})$ perché il successivo sarebbe x^{35}

$$x^7 \arctan(x^5) = x^{12} - \frac{x^{22}}{3} + \frac{x^{32}}{5} + o(x^{41})$$

$$= x^{12} - \frac{x^{22}}{3} + o(x^{31})$$

non posso fare meglio perché il termine successivo ha x^{32}

Esercizio 2 Taylor di ordine 4 di $(1+\sin x)^x = e^{x \log(1+\sin x)}$

$$1+\sin x = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\log(1+\sin x) = \log\Big(1+ \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}_{t}\Big) \qquad \log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}(\ldots)^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$x\log(1+\sin x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{x\log(1+\sin x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4\right) + \frac{1}{2}(\ldots)^2 + o(x^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

— o — o —

Esempio 3 Taylor di $f(x) = \frac{x+8}{x^2+3}$ centro in $x_0 = 0$ e $n = 4$

$$\frac{x+8}{x^2+3} = \frac{8+x}{3+x^2} = \frac{1}{3}\,\frac{8+x}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3}(8+x)\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} = (\star)$$

Ricordo che $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$

$$\star = \frac{1}{3}(8+x)\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + o(x^4)\right) =$$ faccio il conto salvando solo gli esponenti ≤ 4

Esempio 4 Taylor di $f(x) = \frac{x+8}{x^2+3}$ con centro in $x_0 = 1$ e $n = 3$

$$f(1+h) = \frac{1+h+8}{(1+h)^2+3} = \frac{h+9}{h^2+2h+4} = \frac{9+h}{4+2h+h^2}$$

$$= \frac{1}{4}(9+h)\frac{1}{1+\underbrace{\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}}_{t}} = \frac{1}{4}(9+h)\Big[\overset{1}{1} \overset{-\,t}{-\left(\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right)} \overset{+\,t^2}{+\left(\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}\right)^2} \overset{-\,t^3}{-(\ldots)^3} + o(h^3)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}(9+h)\Big(1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{doppio prodotto}}}{\frac{h^3}{4}} - \frac{h^3}{8}\Big) + o(h^3)$$

Ora basta moltiplicare

Esempio 5 Parte principale in 0 di $2^x - 2^{\sin x}$

$$2^x = e^{x\log 2} = \cancel{1} + \cancel{x\log 2} + \cancel{\frac{1}{2}(x\log 2)^2} + \cancel{\frac{1}{6}(x\log 2)^3} + o(x^3)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \ldots$$

$$2^{\sin x} = e^{\log 2 \cdot \sin x} = e^{\log 2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}$$

$$= 1 + \log 2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}(\dots)^2 + \frac{1}{6}(\dots)^3 + o(x^3)$$

$$= \cancel{1} + \cancel{\log 2\, x} - \frac{\log 2}{6} x^3 + \cancel{\frac{1}{2}(\log 2\, x)^2} + \cancel{\frac{1}{6}(\log 2\, x)^3} + o(x^3)$$

Quando vado a fare la differenza resta solo

$$2^x - 2^{\sin x} = + \frac{\log 2}{6} x^3 + o(x^3)$$

Esempio 6 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x - \arctan x}$

Numeratore $= \dfrac{\log 2}{6} x^3 + o(x^3)$ Denominatore $= \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

Quindi $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\dots}{\dots} = \frac{\log 2}{2} = \log \sqrt{2}$

Esempio 7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt[n]{2} - 2^{\sin \frac{1}{n}}\right]^{\alpha}$ per quali α converge ?

Brutale: $2^{\frac{1}{n}} - 2^{\sin \frac{1}{n}} \sim \dfrac{\log 2}{6} \cdot \dfrac{1}{n^3}$

quindi elevato alla α diventa $\sim [\dots]^{\alpha} \dfrac{1}{n^{3\alpha}}$ quindi converge

$\iff 3\alpha > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{3}$

Esempio 7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^{33}}\right)^{n^{22}}$

$$a_n = e^{n^{22} \log\left(1 + \frac{1}{n^{33}}\right)} \sim e^{n^{22} \cdot \frac{1}{n^{33}}} = e^{\frac{1}{n^{11}}} \to 1$$

$\Rightarrow$ manca la condizione necessaria

Volendo si fa anche con i limiti notevoli

$$n^{22} \log\left(1+\frac{1}{n^{33}}\right) = n^{22} \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^{33}}\right)}{\frac{1}{n^{33}}}}}_{\downarrow \, 1} \cdot \frac{1}{n^{33}} \to 0$$

$\boxed{7\text{-bis}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^{33}}\right)^{n^{22}} - 1\right]^{\alpha}$ con $\alpha > 0$

Adesso il termine generale tende a 0. Come?

$$\left(1+\frac{1}{n^{33}}\right)^{n^{22}} - 1 = e^{n^{22}\log\left(1+\frac{1}{n^{33}}\right)} - 1$$

$$\sim e^{\frac{1}{n^{11}}} - 1 \sim \frac{1}{n^{11}}$$

Quindi converge $\iff 11\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{11}$

Esempio 8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(\frac{n^3+7}{n^{\alpha}+77}\right)$ conv. $\iff \alpha = 3$

$\alpha < 3 \implies a_n \to +\infty \implies$ NO cond. nec. $\implies$ ☹

$\alpha > 3 \implies a_n \to -\infty \implies$ NO cond. nec. $\implies$ ☹

$\alpha = 3$ $\quad \log\left(\frac{n^3+7}{n^3+77}\right) = \log\left(\frac{n^3+77-70}{n^3+77}\right)$

$$= \log\left(1 - \frac{70}{n^3+77}\right) \sim -\frac{70}{n^3+77}$$

$\implies$ la serie è a termini definitivamente negativi e converge per C.A. con $\frac{1}{n^3}$. ☺

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 49

Note Title 30/11/2024

$\boxed{\text{TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI}}$

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione

è importante che sia intervallo, estremi inclusi

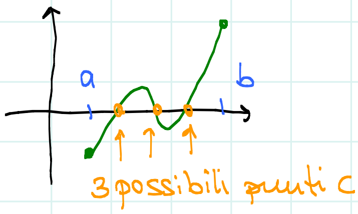
Supponiamo che

(i) f è continua in $[a,b]$

(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè f ha valori di segno diverso in a e b)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

<u>Oss</u>. Il punto c non è obbligato ad essere unico



<u>Oss</u>. È fondamentale che siamo sui reali. Sui razionali potrebbe non valere. Esempio: $f(x) = x^2 - 2$ è negativa in 0, è positiva in 5, ma non si annulla in nessun $x \in \mathbb{Q}$.

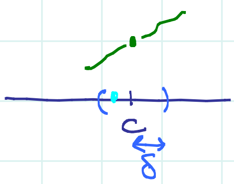
$\boxed{\text{Dim}}$ Buiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Definiamo

$$c := \inf \underbrace{\{x \in [a,b] \text{ t.c. } f(x) > 0\}}$$

Questo insieme non è $\emptyset$ perché contiene almeno il p.to b

Dico che $f(c) = 0$. Se non fosse, sarebbe $f(c) > 0$ oppure $f(c) < 0$. Vediamo che in entrambi i casi si arriva ad un assurdo.

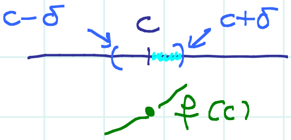
$\boxed{f(c) > 0}$ Essendo f continua, per la permanenza del segno



esisterebbe $\delta > 0$ t.c. $f(x) > 0$ per ogni $x \in [c-\delta, c+\delta]$.

Ma allora ci sarebbero punti $x < c$ in cui $f(x) > 0$, e quindi c non sarebbe l'inf.

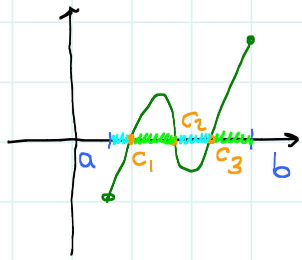
$\boxed{f(c)<0}$ Anche in questo caso esisterebbe $\delta>0$ t.c. $f(x)<0$ per ogni $x\in[c-\delta, c+\delta]$.



D'altra parte, per caratterizzazione dell'inf, per ogni $\delta>0$ deve esistere $c<x<c+\delta$ tale $f(x)>0$. Ma questo è impossibile perché f è negativa in un intervallino a destra di c.

— o — o —

Oss. Capiamo bene la definizione di c.



$c = \inf\{x\in[a,b] : f(x)>0\}$

↑ c_1

Avrei potuto definire

$c = \sup\{x\in[a,b] : f(x)<0\}$

↑ c_3

Avrei anche potuto definire

$c = \inf\{x\in[a,b] : f(x)\geq 0\}$

$c = \sup\{x\in[a,b] : f(x)\leq 0\}$

Esercizio ① Provare a fare la dimostrazione usando le altre tre definizioni di c

② Trovare un esempio di una funzione per cui le 4 definizioni danno 4 c diversi.

$\boxed{\text{Corollario 1}}$ Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e sia $\lambda\in\mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) $f(a)<\lambda$ e $f(b)>\lambda$ (o viceversa)

Allora esiste almeno un $c\in(a,b)$ t.c. $f(c)=\lambda$

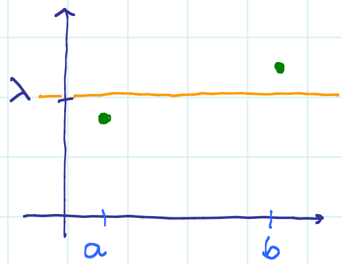
Dim: basta considerare $g(x)=f(x)-\lambda$ e applicare il teorema.

$\boxed{\text{Corollario 2}}$ Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo (con o senza estremi) oppure una semiretta (con o senza estremo) oppure tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo

$$\inf\{f(x) : x \in I\} \quad e \quad \sup\{f(x) : x \in I\}$$

Se f è continua, allora assume tutti i valori compresi tra inf e sup, estremi esclusi



$\boxed{\text{Dim}}$ Sia $\inf < \lambda < \sup$

Allora esiste

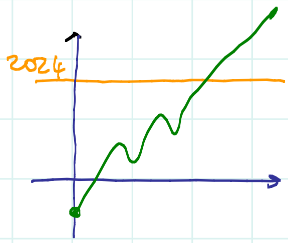
$a \in I$ tale che $f(a) < \lambda$

ed esiste

$b \in I$ tale che $f(b) > \lambda$

Ma allora in (a, b) esiste almeno un c tale che $f(c) = \lambda$.

<u>Esempio 1</u> Dimostrare che l'equazione



$$x^2 - \log(7 + x^{20}) + \sin(x^3) = 2024$$

ha almeno una soluzione reale

La funzione a sx è una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Basta trovare

$a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < 2024$ e $b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(b) > 2024$

posso usare $a = 0$

in quanto $f(0) = -\log 7 < 0$

Per quanto riguarda b, sappiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

quindi $\forall M \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\exists x \in \mathbb{R}}$ t.c. $f(x) \geq M$.

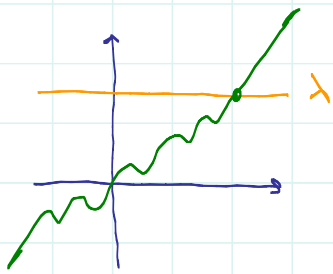
anzi $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. è vero per ogni $x \geq k$

La uso con $M = 3000$ e ho finito ☺.

Esempio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3 + x^{30}} - x^{20}$$

Domanda: f è surgettiva?



$\boxed{\text{Ovviamente}}$ Devo dimostrare che

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \ \text{t.c.} \ f(x) = \lambda$$

Basta trovare $a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < \lambda$ e
$b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(b) > \lambda$

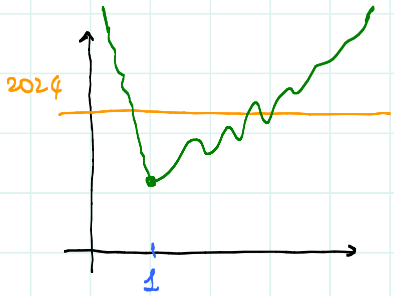
Come prima la fatica la fa la definizione di limite perché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Esempio 3 L'equazione

$$\arctan x + e^x - \log x = 2024$$

ha almeno DUE soluzioni reali



Osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e
↑ per colpa o merito di e^x

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad (\text{per colpa o merito di } \log x)$$

Infine $f(1) = \frac{\pi}{4} + e < 2024$.

Quindi ci sarà almeno una soluzione $x \in (0,1)$ e almeno una soluzione $x > 1$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 50

Note Title 30/11/2024

$\boxed{\text{Teoremi di monotonia}}$ Legami tra monotonia e segno della derivata prima.

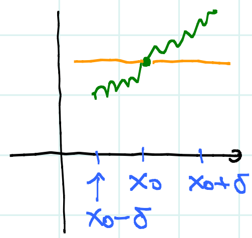
$\boxed{\text{MONOTONIA 1}}$ (Segno della derivata in un punto)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta > 0$, e sia $f : (x_0-\delta, x_0+\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f'(x_0) > 0$ (esiste ed è positiva).

Allora esiste $\delta_0 \in (0, \delta)$ tale che

$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta_0)$$
$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0-\delta_0, x_0)$$



(Un po' a dx di x_0 la funzione di più
" " " sx " " di meno)

Achtung! Non ho detto che $f(x)$ è monotona in $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$

$\boxed{\text{Dim}}$ Ricordiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f'(x_0) > 0$, allora per la solite permanenze del segno, esiste $\delta_0 > 0$ t.c.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \qquad \forall\, h \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$$

Quando $h > 0$, vuol dire che $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$ per $h \in (0, \delta_0)$.

Quando $h < 0$, vuol dire che $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$, cioè $f(x_0-h) < f(x_0)$ per $h \in (-\delta_0, 0)$.

— o — o —

MONOTONIA 2 (Segno della derivata in un intervallo)

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in tutto l'intervallo.

Allora valgono le seguenti implicazioni

$$\boxed{f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f \text{ è debolm. cresc. in } (a,b)}$$

$$\boxed{f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f \text{ è strett. cresc. in } (a,b)}$$

Achtung! L'implicazione mancante è falsa

$$\boxed{f \text{ strett. cresc} \overset{\text{FALSA}}{\implies} f'(x) > 0 \text{ in } (a,b)}$$

Esempio: $f(x) = x^3$ è strett. cresc., ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

Resta vero che

$$f \text{ strett. cresc. in } (a,b) \implies f \text{ debolm. cresc. in } (a,b) \implies f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$$

Teorema misterioso (Teorema di Lagrange)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

↑ intervallo con estremi

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$

(ii) f derivabile in (a,b) (se è derivabile in $[a,b]$, ancora meglio)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)}$$

$\boxed{\text{Dim di monotonia 2, usando Lagrange}}$

$\boxed{f' \geq 0 \Rightarrow \text{debolm. cresc.}}$ Prendo due punti qualunque c e d in (a,b), con c<d.

Applico Lagrange nell'intervallo [c,d]. Ottengo

$$f(d)-f(c) = \overbrace{(d-c)}^{>0} \cdot \overbrace{f'(s)}^{\geq 0}$$

punto misterioso in (c,d)

Quindi $f(d)-f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$

$\boxed{f' > 0 \Rightarrow \text{strett. cresc.}}$ Come sopra

$$f(d)-f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(s)}_{>0} > 0 \rightsquigarrow f(d) > f(c)$$

$\boxed{\text{debolm. cresc.} \Rightarrow f' \geq 0}$ Per ogni $x_0 \in (a,b)$ vale

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\geq 0}}{h} \geq 0$$

lo faccio solo da dx (potrei anche da sx)

segno +

perché è limite di frazioni ≥ 0

(Da sx sarebbe stato $\frac{\leq 0}{< 0}$ e quindi ancora frazione ≥ 0)

<u>Oss.</u> Nell'ultimo caso, se f era strett. cresc. il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ era strett. pos. per ogni $h \neq 0$ ammissibile

Tuttavia $\boxed{\text{LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE}}$

Classico: $\frac{1}{x^2} > 0$ sempre, ma $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\boxed{\text{MONOTONIA 3}}$ (Annullamento sporadico)

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b).

Supponiamo che

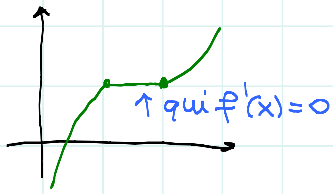
(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

(ii) $f'(x)$ non si annulla in un intero intervallo

(annullamento sporadico, cioè $f'(x)$ ha come soluzione dei punti, magari anche infiniti, ma non un intero intervallo)

Allora f è strett. monotona.

$\boxed{\text{Dim}}$ Da monotonia 2 sappiamo già che f è debolm. cresc. Se non fosse anche strett. cresc., per forza ci sarebbero dei tratti piatti, ma allora in tutto quell'intervallo $f'(x) = 0$



Esempio 1 Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x + \sin x$$

Dimostrare che f è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile!

Per la surgettività basta osservare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

e poi si chiude per il teorema dei valori intermedi.

[La continuità segue dal solito meta-teorema ...]

Per l'iniettività dimostriamo che f è strett. cresc.

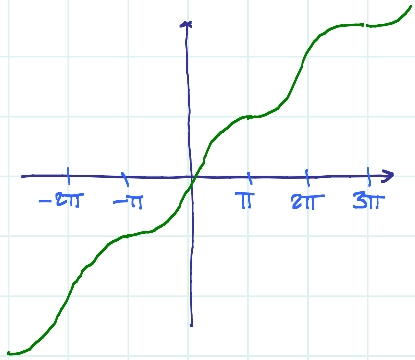
$$f'(x) = 1 + \cos x$$

Ora $1 + \cos x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e questo darebbe la debole crescenza.

Dove si annulla $f'(x)$? $f'(x) = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi$

$\Rightarrow$ annullamento sporadico $\Rightarrow$ f è strett. cresc. per monotonia 3.

Il grafico è grosso modo come a destra



Esempio 2 Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ l'equazione

$$x - \arctan x = \lambda$$

ha esattamente una soluz. $x > 0$.

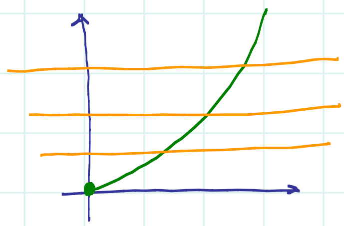
Analogamente: $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva

Surgettiva: segue da $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Iniettiva: segue da strett. cresc. perché

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x > 0$$

e quindi posso usare monotonia 2.



— o — o —

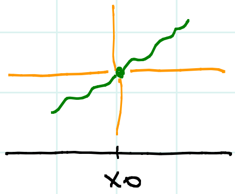
ANALISI 1 – LEZIONE 51

Note Title 30/11/2024

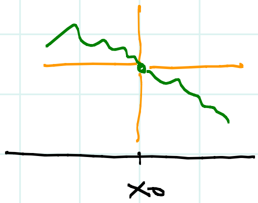
STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

Capire come è fatto il grafico di $f(x)$ vicino ad un p.to x_0

Monotonia 1 fornisce la risposta quando $f'(x_0) > 0$ oppure $f'(x_0) < 0$

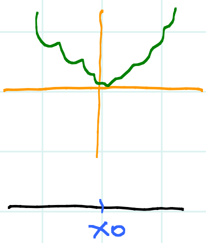


$f'(x_0) > 0$

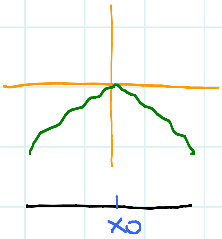


$f'(x_0) < 0$

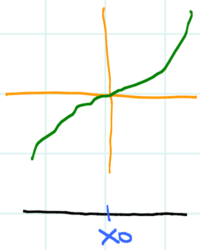
Cosa può succedere quando $f'(x_0) = 0$. Quattro scenari standard



MIN. LOC.



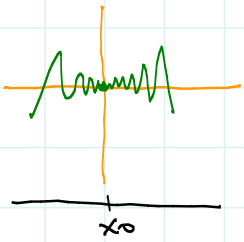
MAX. LOC.



flesso a tan. orizz. ascendente

flesso a tan. oriz. discendente

più uno patologico



← Nessuno dei precedenti

<u>Domanda</u> : quando $f'(x_0) = 0$, come stabilisco in quale scenario mi trovo ?

Teorema (Criterio delle derivate successive)

Supponiamo che esista un intero positivo k tale

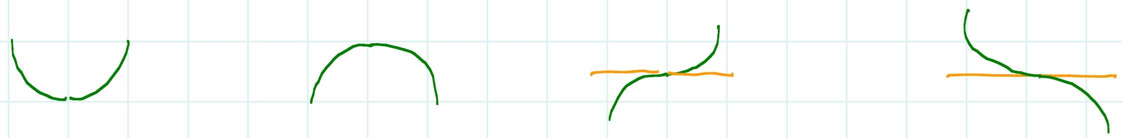
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

(la derivata k-esima è la prima che NON si annulla in x_0)

Allora la situazione è descritta dal seguente schema

$\boxed{k \text{ pari}}$ → $f^{(k)}(x_0) > 0$, $f^{(k)}(x_0) < 0$

$\boxed{k \text{ dispari}}$ → $f^{(k)}(x_0) > 0$, $f^{(k)}(x_0) < 0$



Oss. Il quinto scenario si può presentare

→ o quando tutte le derivate di ogni ordine si annullano in x_0

→ o quando le derivate smettono di esistere prima di trovarne una $\neq 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Taylor! Vediamo un paio di scenari. Da Taylor sappiamo che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k}_{\text{primo termine non nullo}} + o(h^k) \qquad \text{per } h \to 0$$

da cui

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$$

e dividendo mi ritrovo

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \boxed{\frac{o(h^k)}{h^k}}$$

$\downarrow$ 0

da cui

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Si aprono vari scenari

$\boxed{k \text{ pari e } f^{(k)}(x_0) > 0}$ Il limite è positivo quindi esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k} > 0 \qquad \forall h \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\}$$

Poiché k è pari, il denom. è sempre >0, quindi deve essere num. >0, quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ sia a dx sia a sx

$\boxed{k \text{ dispari e } f^{(k)}(x_0) < 0}$ Il limite è negativo quindi esiste $\delta > 0$ t.c

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k} < 0 \qquad \forall h \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\}$$

Per $h \in (0,\delta)$ il denom. è >0, quindi num. <0, quindi $f(x_0+h) < f(x_0)$

Per $h \in (-\delta, 0)$ il denom. è <0 (qui uso k dispari), quindi num. >0, quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$

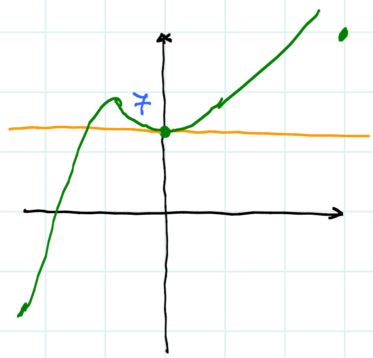
Analogamente negli altri due casi

— o — o —

$\boxed{\text{In pratica}}$ Quando $f'(x_0)=0$, la funzione f si comporta vicino ad x_0 come il primo termine non nullo nel suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $\quad f(x) = x^{33} + x^{22} + 7$

Dico che l'equazione $f(x)=7$ ha almeno due soluzioni reali



La soluzione $x=0$ si vede a occhio

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Per lo studio locale, $f(x)$ si comporta vicino a $x=0$ come $7 + x^{22}$

primo termine di Taylor dopo la costante

quindi in $x=0$ c'è un p.to di min. locale

A questo punto è chiaro che esiste $c<0$ t.c. $f(c)=7$.

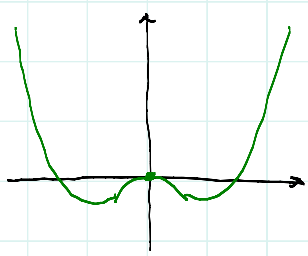
Non ci sono altre soluzioni per $x>0$?

Basta dim. che è strett. crescente in $(0,+\infty)$

$$f'(x) = 22x^{21} + 33x^{32} > 0 \qquad \text{per } x>0 \text{ (monotonia 2)}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = x^4 - \sin(x^2)$

Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva



Basta osservare che è pari

Dico che $f(x) = 0$ ha almeno 3 soluzioni

Come è fatta vicino a 0? Taylor:

$$f(x) = -x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

quindi 0 è un pto di max locale

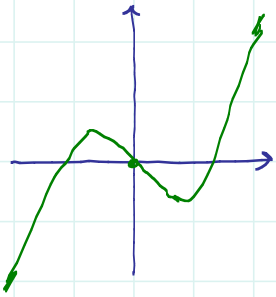
Quindi è negativa in un intorno dx e sx di $x=0$, ma poi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

quindi attraversa nuovamente l'asse x

Esempio 3 $\quad f(x) = x^3 - \arctan x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

iniettiva? Surgettiva?



Surgettiva: quasi gratis da $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

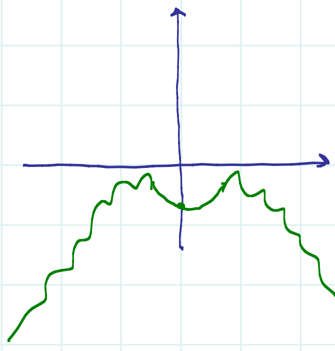
Vicino a $x=0$ abbiamo $f(x) \sim -x$

quindi $f'(0) = -1$, quindi

$\left.\begin{array}{l} \to f(x) < 0 \text{ un po' a dx di } x=0 \\ \to f(x) > 0 \quad \text{"} \quad \text{sx di } x=0 \end{array}\right\}$ monotonia ↓

Addio iniettività

Esempio 4 $\quad f(x) = \sin(x^2) - \cosh(x^3)$



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comanda } \cosh(x^3)}}{=} -\infty$$

Vicino a $x=0$ si ha $f(x) \sim -1 + x^2$

$\Rightarrow$ Addio iniettività

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 52

Note Title 05/12/2024

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: capire il grafico di una funzione in tutta la zona di definizione

ROAD MAP:
1. Eventuali simmetrie (pari / dispari / periodica)
2. Zona di definizione e continuità
3. Limiti agli estremi della zona di definizione
4. Zeri e segno
5. Derivata prima e zone di monotonia
6. P.ti di max / min locali e globali
7. Eventuali asintoti
8. Derivata seconda, zone di convessità / concavità, flessi
9. LIPSCHITZIANITÀ

Esempio $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

① Funzione dispari $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$

$\rightsquigarrow$ il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

② Definita quando $x^2-1 \neq 0$, cioè $x^2 \neq 1$, cioè $x \neq \pm 1$.
La zona di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$
In questa zona $f(x)$ è continua per il metateorema.

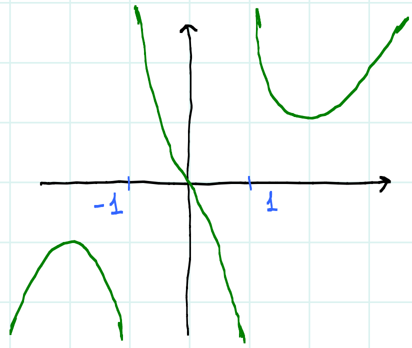
③ Limiti agli estremi, cioè a $\pm\infty$ e a ± 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty \quad \left[\frac{1}{0^+}\right] \qquad \lim_{x\to-1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty \quad \left[\frac{-1}{0^+}\right]$$

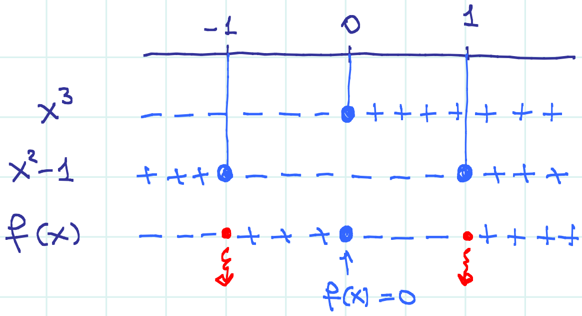
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty \quad \left[\frac{1}{0^-}\right] \qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty \quad \left[\frac{-1}{0^-}\right]$$

Rappresentiamo graficamente quello che già sappiamo.
Il grafico che ci aspettiamo è quello a destra, ma potrebbe essere molto più complicato



④ Zeri e segno:
risolvere l'equazione $f(x)=0$
risolvere le disequazioni $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

In generale studio il segno di $\frac{x^3}{x^2-1}$.
Per farlo studio separatamente numeratore e denominatore



Riassumendo:
$f(x)=0 \iff x=0$
$f(x)>0 \iff x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$
$f(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

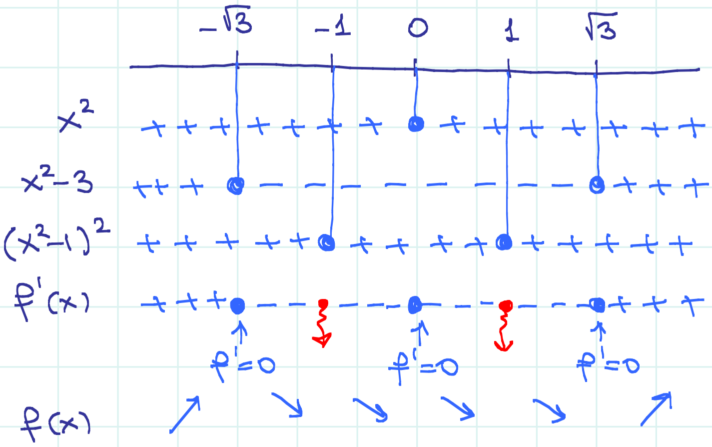
I risultati del p.to ④ sono coerenti con l'ipotesi di grafico che avevamo dopo il p.to ③ :)

⑤ Studio di $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Ora devo studiare zeri e segno di $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

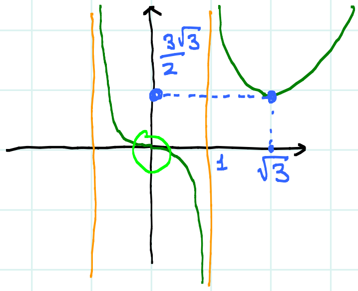


Dallo studio della derivata prima abbiamo ulteriori conferme al grafico tracciato precedentemente. In particolare $f(x)$

→ cresce in $(-\infty, -\sqrt{3})$
→ decresce in $(-\sqrt{3}, -1)$
→ decresce in $(-1, 1)$
→ decresce in $(1, \sqrt{3})$
→ cresce in $(\sqrt{3}, +\infty)$

Achtung! Non è vero che $f(x)$ decresce in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
Ad esempio $f(-1,2) < f(-0,8)$.
Non posso applicare i teoremi di monotonia nell'intervallo $[-1.2, -0.8]$ perché non è vero che f è derivabile in tutto l'intervallo.

⑥ Max / Min locali globali   Dal p.to ⑤ sappiamo che



$x = \sqrt{3}$ è un p.to di min. locale
$x = -\sqrt{3}$ è un p.to di max. locale

Già dallo studio dei limiti sapevamo che max / min globali NON ESISTONO

Volendo posso calcolare la y dei p.ti di max / min.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Oss. Sappiamo che $f'(x) = 0$ per

$x = -\sqrt{3}$ → p.to max loc.

$x = 0$ → p.to di flesso a tang. orizz. discendente

$x = \sqrt{3}$ → p.to min. loc.

Potevo da subito sapere che $x = 0$ era quello che è ?

Certo! Bastava lo studio locale in $x = 0$

Taylor: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -x^3(1+x^2+o(x^2))$

$\frac{1}{1-t} = 1+t+o(t)$

$= -x^3 + o(x^3)$

Questo bastava per sapere che $f(x)$ si comporta come $-x^3$ vicino a $x = 0$.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 53

Note Title 05/12/2024

$\boxed{\text{ASINTOTI}}$ → Verticali
→ Orizzontali
→ Obliqui

Def. → La retta $x = x_0$ è asintoto $\boxed{\text{verticale}}$ per $f(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

→ La retta $y = y_0$ è asintoto $\boxed{\text{orizzontale}}$ per $f(x)$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

(asintoto orizz. per $x \to +\infty$) (asintoto orizz. per $x \to -\infty$)

→ La retta $y = mx_0 + n$ è asintoto $\boxed{\text{obliquo}}$ per $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Analogamente, la stessa retta è asintoto obliquo per $x \to -\infty$ se

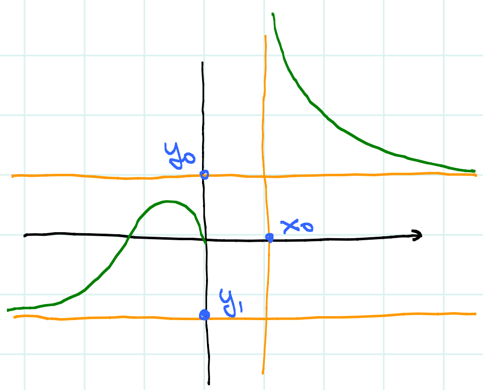
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0.$$

$\boxed{\text{Graficamente}}$ Nel disegno

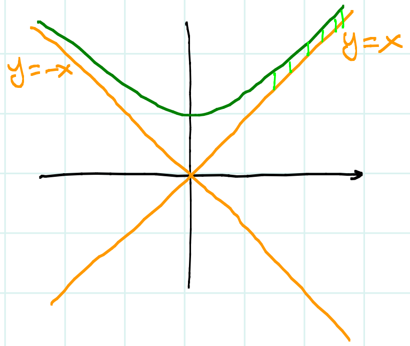
$x = x_0$ è asintoto verticale

$y = y_0$ è asintoto orizz. per $x \to +\infty$

$y = y_1$ è asintoto orizz. per $x \to -\infty$



Nel nuovo disegno



- $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$
  (la differenza tra $f(x)$ e la retta tende a 0 per $x \to +\infty$)
- $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

Oss. Gli asintoti orizz. sono il caso speciale $m=0$ di quelli obliqui.

$\boxed{\text{Come trovo gli asintoti?}}$

- Quelli verticali si vedono facendo i limiti agli estremi della zona di definizione
- Quelli orizzontali facendo i limiti per $x \to \pm\infty$
- Quelli obliqui sono più delicati.

Proposizione (come trovare gli asintoti obliqui)
La retta $y = mx+n$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se e solo se esistono i seguenti due limiti (e sono reali):

$$\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx}$$

risultato limite prec.

Discorso del tutto analogo per $x \to -\infty$.

Oss. Se esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora questo coincide con m, almeno nei casi in cui $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to +\infty$

$\boxed{\text{Dim}}$ Stiamo calcolando $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ usando De L'Hôpital.

$\boxed{\text{Dim. Prop.}}$ Bisogna dimostrare due cose

Primo: se $y = mx + n$ è asintoto obliquo, cioè $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - n) = 0$, allora m ed n sono dati dalle formule scritte nell'enunciato. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{f(x)-mx-n}{x}}}_{\downarrow\ \frac{0}{+\infty}=0} + \underbrace{\boxed{\frac{mx+n}{x}}}_{\downarrow\ m} \Bigg) = m$$

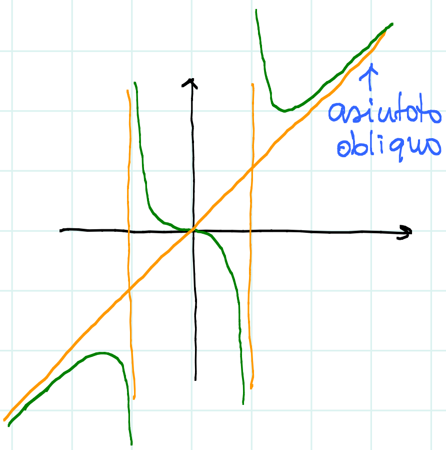
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{f(x) - mx - n}_{\downarrow\ 0} + n) = n$$

Secondo: se esistono m ed n dati dalle formule dell'enunciato, allora la retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{f(x) - mx}_{n} - n) = n - n = 0$$

— o — o —

Back to esempio lez. precedente



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Le rette $x = \pm 1$ sono due asintoti verticali.

Non ci sono asintoti orizz.

Obliqui? Vediamo!

Uso le formule della prop.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2-1} = 0$$

⇝ La retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

Analogamente: La stessa retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

Sappiamo anche che $f(x)$ sta sopra l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$
Perché?
Dal conto precedente $f(x) - x = \dfrac{x}{x^2-1} > 0$ per $x > 1$

—o—o—

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x^2+3x+25}$

Questa è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

Basta dimostrare che $x^2+3x+25 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
Vero perché $\Delta = 9 - 4 \cdot 25 < 0$.

Non ci sono asintoti verticali
Non ci sono asintoti orizz. perché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

Obliqui? Vediamo...

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+25}}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+25} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{\dots} + x}{\sqrt{\dots} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x + 25 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x+25} + x} = \frac{3}{2} = n \quad :)$$

Stesso limite con sviluppini:

$$\sqrt{x^2+3x+25}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{25}{x^2}}-1\right) \qquad \sqrt{1+t}\sim 1+\frac{1}{2}t$$

$$= x\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\cancel{1}\right)$$

$$= \frac{3}{2}+o(1) \to \frac{3}{2}$$

$\rightsquigarrow$ La retta $y = x+\frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$

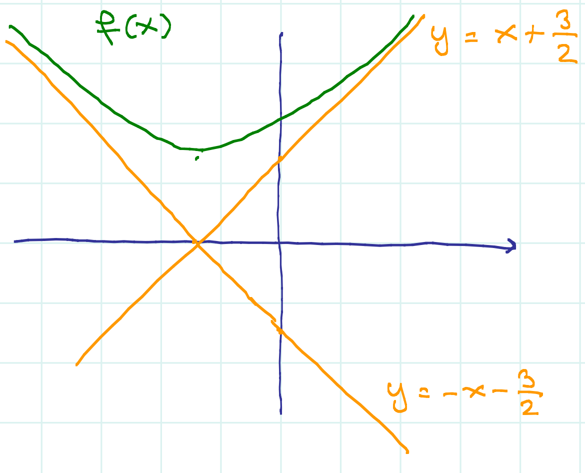
Per $x\to-\infty$ il discorso è analogo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+25}}{x} = -1 \qquad (\text{Fare il cambio } y=-x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+25}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{\ldots}-x}{\sqrt{\ldots}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+3x+25-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x+25}-x} \to -\frac{3}{2} \qquad (\text{Fare il cambio})$$

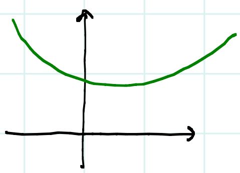
$\rightsquigarrow$ La retta $y=-x-\frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$



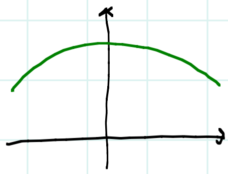
ANALISI 1 – LEZIONE 54

Note Title 05/12/2024

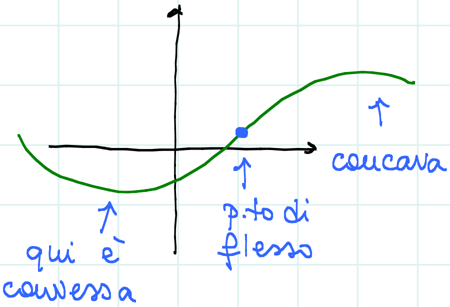
FUNZIONI CONVESSE / CONCAVE



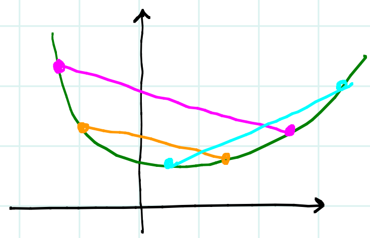
CONVESSA



CONCAVA

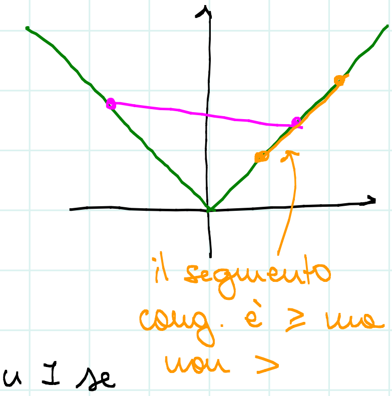


Def. geometrica Una funzione è convessa in una certa zona se, per ogni coppia di p.ti del grafico in quella zona, il grafico sta al di sotto del segmento che li congiunge



Concava ... il grafico sta al di sopra di ogni segmento congiungente

Debolmente / strettamente convessa : a seconda che il segmento sia $>$ oppure $\geq$

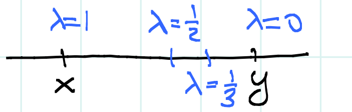


Esempio $f(x) = |x|$ è convessa, ma non strettamente convessa

Def rigorosa Sia $f : I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo, una semiretta, oppure tutto $\mathbb{R}$. Allora f si dice convessa in I se

$$\boxed{f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad \forall \lambda \in [0,1]}$$

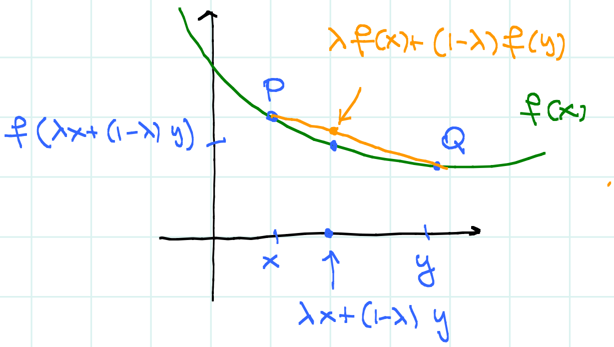
Perché è la stessa cosa?



Consideriamo due numeri reali x e y.
Allora $\lambda x+(1-\lambda)y$, al variare di $\lambda\in[0,1]$ rappresenta tutto il segmento di estremi x e y (per $\lambda=0$ viene y, per $\lambda=1$ viene x, per $\lambda=\frac{1}{2}$ viene $\frac{x+y}{2}$ = p.to medio)

Quindi $f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ è il valore di f in un p.to generico del segmento di estremi x e y.
Si può verificare che $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ è il valore della retta che passa per i p.ti $(x,f(x))$ e $(y,f(y))$ calcolata in $\lambda x+(1-\lambda)y$.

Quindi la disuguaglianza è $f\leq$ retta
$P=(x,f(x))$, $Q=(y,f(y))$



Come capisco se $f(x)$ è convessa o concava in una certa zona?

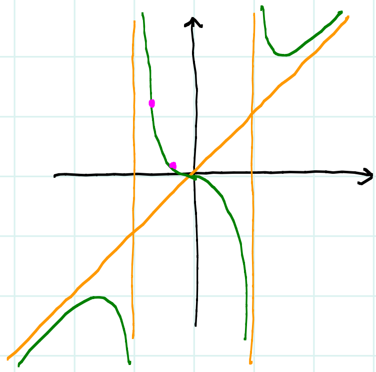
Teorema (misterioso) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che esistano derivata prima e seconda in $[a,b]$. Allora valgono le seguenti implicazioni.

$$\boxed{f''(x)\geq 0\quad\forall x\in[a,b]\iff f\text{ convessa in }[a,b]}$$

$$\boxed{f''(x)>0\quad\forall x\in[a,b]\implies f\text{ strett. convessa in }[a,b]}$$

Oss ① Vale enunciato analogo con la concavità e $f''\leq 0$
② L'implicazione mancante in generale è falsa
($f(x)=x^4$ è strett. conv., ma $f''(x)=12x^2$ si annulla per $x=0$)

$\boxed{\text{Back to esempio lez. 52}}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$



Cosa ci aspettiamo da $f''(x)$?

$f''(x) > 0$ per $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$
$f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2-1)} \cdot 2x \;(x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{4x^5} - 4x^3 - 6x^3 + 6x - \cancel{4x^5} + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

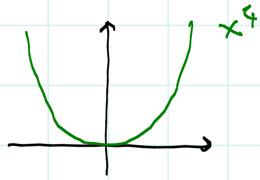
Studio il segno

		-1		0		1	
x	$- - -$		$- -$	0	$+ +$		$+ + +$
x^2+3	$+ + +$		$+ +$		$+ +$		$+ + +$
$(x^2-1)^3$	$+ + +$	0	$- -$		$- -$	0	$+ + +$
$f''(x)$	$- - -$		$+ + +$	0	$- - -$		$+ + + +$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$

Lo studio di $f''(x)$ conferma il grafico di sopra.

$\boxed{\text{P.ti di flesso}}$ Sono i p.ti di confine tra le zone di convessità e le zone di concavità.
Quando esiste $f''(x)$, sono i p.ti in cui $f''(x)$ cambia segno (positiva prima, neg. dopo o viceversa)
In quei p.ti in particolare $f''(x) = 0$.

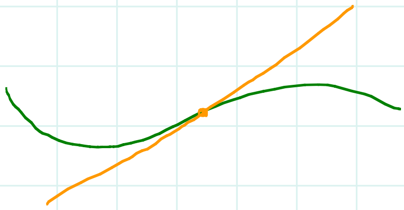
Achtung! I p.ti in cui $f''(x) = 0$ NON sono per forza p.ti di flesso

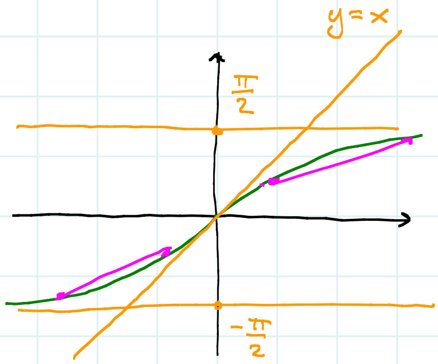


Esempio $f(x) = x^4 \rightsquigarrow f''(x) = 12x^2$

Quindi $f''(0) = 0$ ma $x = 0$ non è un p.to di flesso e $f(x) = x^4$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$.

Oss. geometrica Nei p.ti di flesso il grafico di $f(x)$ "attraversa la retta tangente"





Esempio $f(x) = \arctan x$

$y = \frac{\pi}{2}$ asint. oriz. a $+\infty$

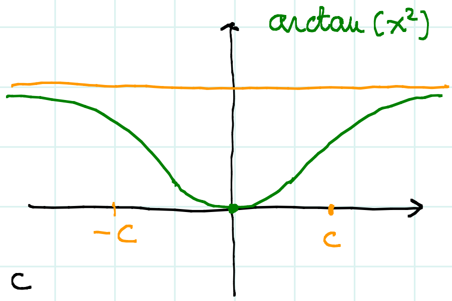
$y = -\frac{\pi}{2}$ " " a $-\infty$

convessa in $(-\infty, 0)$

concava in $(0, +\infty)$

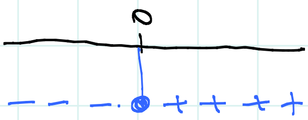
$x = 0$ p.to di flesso

Calcolare $f''(x)$ e avere conferma della previsione

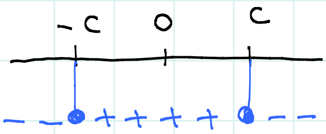


Esempio 2 $f(x) = \arctan(x^2)$

Ci aspettiamo



$f'(x)$



$f''(x)$

Cercare conferma con i conti :)

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 55

Note Title 07/12/2024

FIL ROUGE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

$$\begin{array}{ccccccc} W & \Rightarrow & R & \Rightarrow & C & \Rightarrow & L \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & H & & M \\ & & & & \Downarrow & & \\ & & & & T & & \end{array}$$

WEIERSTRASS	HOPITAL
ROLLE	TAYLOR
CAUCHY	MONOTONIA
LAGRANGE	

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.
Si dice che M è il massimo di f in A, e si scrive

$$M = \max \underbrace{\{ f(x) : x \in A \}}_{\text{Questo insieme è } f(A)}$$

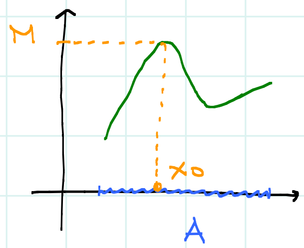
se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$

(ii) esiste almeno un $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$.

In tal caso tutti gli x_0 del p.to (ii) si chiamano p.ti di max.

Achtung! Il massimo M è "una y"
I p.ti di max sono "delle x"



Oss. ① Il max M non è obbligato ad esistere
Se esiste è unico

② I p.ti di max esistono se e solo esiste il max, e non sono obbligati ad essere unici

③ Discorsi analoghi valgono per $\min\{ f(x) : x \in A \}$.

Esempio 1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$

$\max\{ \sin x : x \in \mathbb{R} \} = 1$ p.ti di max: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\min\{ \quad " \quad \} = -1$ p.ti di min: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

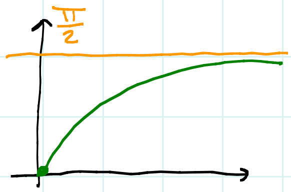
Esempio 2

$\max\{\arctan x : x \geq 0\}$ NON ESISTE

$\min\{\arctan x : x \geq 0\} = 0$

$\sup\{\arctan x : x \geq 0\} = \frac{\pi}{2}$

P.to di min: $x = 0$



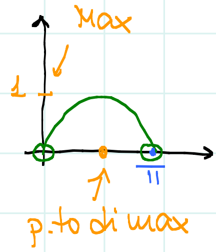
Esempio 3

$\max\{\sin x : x \in (0,\pi)\} = 1$

$\min\{\sin x : x \in (0,\pi)\}$ NON ESISTE

$\inf\{\quad \text{"} \quad\} = 0$

P.to di max : $x = \frac{\pi}{2}$



$\boxed{\text{Teorema di WEIERSTRASS}}$ (Versione edulcorata)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[a,b]$.

Allora

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$
$$\min\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

esistono per forza.

Oss. È davvero essenziale che

- l'intervallo contenga gli estremi,
- sia davvero un intervallo e non ad esempio una semiretta,
- f sia continua ovunque in $[a,b]$.

$\boxed{\text{Come trovo il max / min ?}}$ I p.ti di max/min. ricadono in una di queste 3 categorie

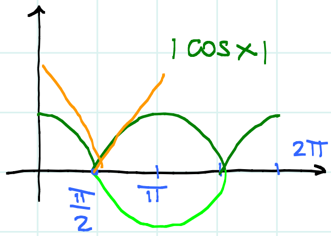
① P.ti STAZIONARI INTERNI: p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x) = 0$

② P.ti SINGOLARI INTERNI: p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste

③ P.ti del BORDO: $x = a$ oppure $x = b$

Operativamente: trovo tutti i p.ti che stanno nelle 3 categorie, poi sostituisco nella funzione: dove vale di più è il max, dove vale di meno è il min.

Esempio 4 $\max\{|\cos x| : x \in [0, 2\pi]\}$



Max = 1

P.ti di max:

$x = 0 \to$ bordo

$x = \pi \to$ staz. interno

$x = 2\pi \to$ bordo

$$\min\{|\cos x| : x \in [0, 2\pi]\} = 0$$

P.ti di min

$x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ $\to$ singolari interni

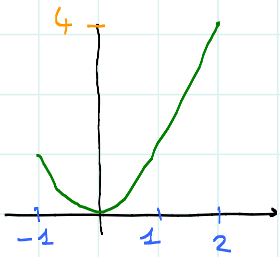
Come dimostro che $f(x) = |\cos x|$ non è derivabile in $x = \frac{\pi}{2}$?
Faccio vedere che il rapporto incrementale ha limiti diversi per $h \to 0^+$ e per $h \to 0^-$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2}+h)| - \overbrace{|\cos\frac{\pi}{2}|}^{0}}{h} = \frac{\sin h}{h} \to 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2}+h)| - |\cos\frac{\pi}{2}|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1$$

$|\cos x| = \cos x$ prima di $\frac{\pi}{2}$

Esempio 5 $\max\{x^2 : x \in [-1, 2]\} = 4$

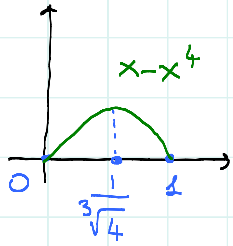


p.to di max: $x = 2 \rightsquigarrow$ bordo

$$\min\{x^2 : x \in [-1, 2]\} = 0$$

p.to di min: $x = 0 \rightsquigarrow$ staz. interno

Esempio 6
$$\max\{x-x^4 : x\in[0,1]\} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$
$$\min\{\underbrace{x-x^4}_{f(x)} : x\in[0,1]\} = 0$$



Consideriamo i 3 tipi di candidati

→ Staz. interni : $f'(x)=0$

$1-4x^3=0 \rightsquigarrow \boxed{x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$ (è interno, quindi ok)

→ Sing. interni : $\emptyset$:)

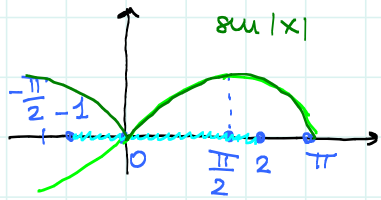
→ Bordo : $\boxed{x=0}$ e $\boxed{x=1}$

Ora confronto i 3 candidati:

$f(0)=0$ $\quad f(1)=0$ $\quad f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

p.ti di min. $\qquad$ p.to di max

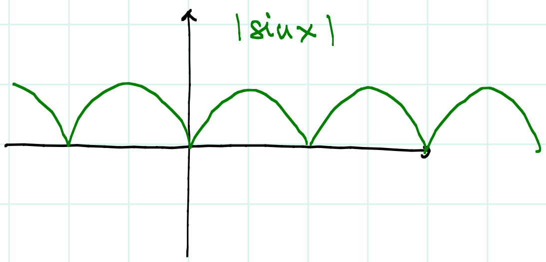
Esempio 7
$$\max\{\sin|x| : x\in[-1,2]\} = 1$$
$$\min\{\sin|x| : x\in[-1,2]\} = 0$$



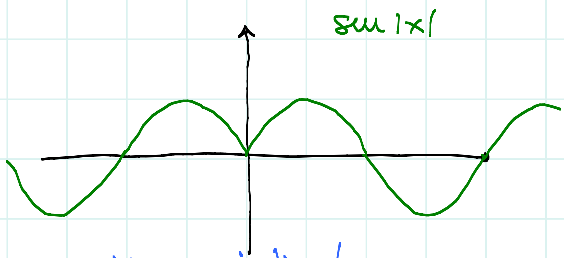
P.to di max : $x=\frac{\pi}{2}$ $\rightsquigarrow$ staz. interno

P.to di min : $x=0$ $\rightsquigarrow$ sing. interno

Achtung! Occhio a distinguere $|\sin x|$ e $\sin|x|$



Periodica di periodo π



Non periodica!

$=\sin x$ per $x>0$ e poi ribaltata per parità per $x<0$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 56

Note Title 07/12/2024

Teorema (attribuito a FERMAT)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Sia $f: (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) $f'(x_0)$ esista

(ii) $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

(cioè x_0 è un p.to di max)

Allora $f'(x_0) = 0$.

Stessa cosa se x_0 è un p.to di min.

$\boxed{\text{Dim}}$ Usiamo monotonia 1

- Supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Allora $f(x) > f(x_0)$ un po' a dx di x_0, e quindi x_0 non può essere p.to di max
- Supponiamo che $f'(x_0) < 0$. Allora $f(x) < f(x_0)$ un po' a sx di x_0, e anche in questo caso x_0 non può essere p.to di max.
- Resta solo $f'(x_0) = 0$.

Dal teorema precedente segue la ricerca dei p.ti di max/min.

Consideriamo $\max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Weierstrass ci dice che esiste almeno un p.to di max x_0.

Dove può trovarsi?

→ sul bordo (cioè $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$) ⇝ categoria bordo

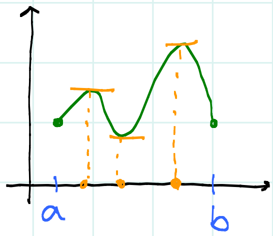
→ $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ non esiste ⇝ sing. interno

→ $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ esiste. Ma allora per il teorema precedente si avrà $f'(x_0) = 0$ ⇝ stazionario interno

Oss. Nella dim. del teo. è fondamentale potersi muovere sia a dx, sia a sx, quindi essere interni.

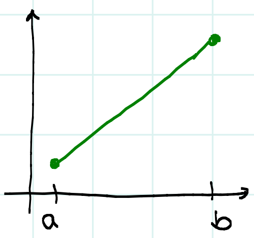
$\boxed{\text{TEOREMA DI ROLLE}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.
Supponiamo che
(i) f è continua in $[a,b]$ (estremi compresi)
(ii) f è derivabile in (a,b) (non serve che f sia derivabile agli estremi, ma se lo è va bene uguale)
(iii) $f(a) = f(b)$.
Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Oss. Il p.to c non è obbligato ad essere unico.

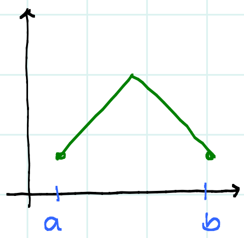


$\boxed{\text{Dim}}$ Per W sappiamo che esistono p.ti di max e di min
→ se almeno uno di questi è interno, allora per il teo. precedente lo possiamo prendere come c
→ se non sono interni sia il max sia il min, allora per l'ipotesi (iii) la funzione è costante (perché il max valore è uguale al min valore). Ma allora $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a,b)$.

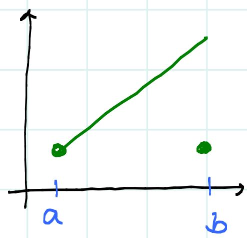
Oss. Tutte e 3 le ipotesi servono davvero



(iii) serve



(ii) serve
$f'(x)$ esiste ovunque tranne in un p.to



(i) serve
$f(x)$ è continua ovunque tranne in b

TEOREMA DI CAUCHY Siano $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo

(i) f e g continue in $[a,b]$ (con estremi)

(ii) f e g derivabili in (a,b) (se lo sono anche in $[a,b]$ ancora meglio, però non serve)

Allora esiste $c\in(a,b)$ tale che

$$\boxed{(f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c)}$$ 1ª tesi

Se inoltre vale che

(iii) $g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in(a,b)$,

allora $g(b)\neq g(a)$ e posso dividere ottenendo

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$ 2ª tesi

Dim Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = (g(b)-g(a))\,f(x) - (f(b)-f(a))\,g(x)$$

Osserviamo che $\varphi(x)$ è una combinazione lineare di $f(x)$ e $g(x)$, quindi

→ φ è continua in $[a,b]$,

→ φ è derivabile in (a,b).

Dico che $\varphi(a)=\varphi(b)$. Facciamo la verifica

$$(g(b)-g(a))\,f(a) - (f(b)-f(a))\,g(a) \overset{?}{=}$$
$$(g(b)-g(a))\,f(b) - (f(b)-f(a))\,g(b)$$

Svolgiamo il conto:

$$\boxed{g(b)f(a)} - \cancel{g(a)f(a)} \boxed{- f(b)g(a)} + \cancel{f(a)g(a)} \overset{?}{=}$$

$$\cancel{g(b)f(b)} \boxed{- g(a)f(b)} - \cancel{f(b)g(b)} + \boxed{f(a)g(b)}$$

Ma allora φ verifica le ipotesi di Rolle, quindi esiste $c \in (a,b)$ tale che $\varphi'(c) = 0$.

Ma

$$\varphi'(x) = (g(b)-g(a))\,f'(x) - (f(b)-f(a))\,g'(x)$$

e quindi

$$\varphi'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c) - (f(b)-f(a))\,g'(c) = 0$$

e questa è la prima tesi.

Se ora supponiamo anche che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora per forza $g(b) \neq g(a)$. Perché? Se fosse $g(b) = g(a)$, allora potrei applicare Rolle a g e dedurre che esiste almeno un $c \in (a,b)$ con $g'(c) = 0$.

— o — o —

Oss. Se ci sono solo le ipotesi (i) e (ii), la seconda tesi può essere falsa.

L'esempio classico è con $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ e $[a,b] = [-1,1]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{0}{2}$$

Tuttavia non c'è nessun p.to in cui $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 0$

perché f' si annulla solo in 0 e lì si annulla pure g', quindi viene uno $0/0$.

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema di LAGRANGE}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.
Supponiamo che
(i) f continua in $[a,b]$
(ii) f derivabile in (a,b)
} soliti commenti
Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Applico Cauchy con $g(x) = x$. La seconda tesi (e posso perché $g'(x) = 1 \neq 0$ ovunque) diventa

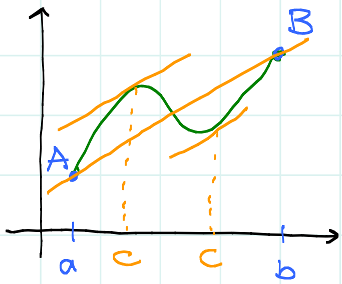
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \rightsquigarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$$

che è la tesi di Lagrange!

— o — o —

Interpretazione geometrica Scriviamo la tesi come

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{coeff. angolare della retta } AB} = \underbrace{f'(c)}_{\text{coeff. ang. retta tang. in } c}$$



I p.ti c sono quelli in cui la retta tangente è parallela alla retta AB

Se A e B sono alla stessa altezza diventa ROLLE

In questo senso Lagrange è la versione "storta" di ROLLE.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 57

Note Title 07/12/2024

VARIANTI DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS

Come dim. che max/min esistono anche se non sono verificate le ipotesi

Achtung! Quando le ipotesi di W non sono verificate, max e/o min possono esistere lo stesso

Esempio 1 $\max\left\{ \frac{\log(7+\sin x)}{\cos^2 x+5} : x\in\mathbb{R}\right\}$ esiste ?

Osserviamo che $f(x)$ è definita e continua per ogni $x\in\mathbb{R}$ (denominatore ≥ 5 sempre e $7+\sin x \geq 6$ sempre).
Inoltre $f(x)$ è 2π-periodica e questo basta per concludere.
Infatti per W. vero esiste

$$M = \max\{f(x) : x\in[0,2\pi]\}$$

Ma allora M è max su tutto $\mathbb{R}$ perché i valori assunti sono sempre gli stessi.

Fatto generale Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è periodica e continua, allora ammette max e min su tutto $\mathbb{R}$.

Dim. Basta prendere max e min. in un periodo, e quelli lo sono dappertutto.
I p.ti di max/min. sono infiniti (almeno 1 per periodo)

Esempio 1 bis f come nell'esempio 1. Allora esiste

$$\min\{f(x) : x\in \underbrace{(-1,27)}_{\text{in questo intervallo cade un intero periodo } [0,2\pi]}\}$$

$\boxed{\text{WEIERSTRASS GENERALIZZATO}}$ (Una delle tante varianti)

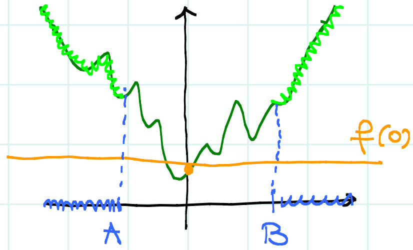
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora per forza esiste

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$



$\boxed{\text{Dim}}$ Prendiamo un valore a caso, ad esempio $f(0)$.

Poiché $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, esiste $B > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) \qquad \forall x \geq B$$

Poiché $f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$, esiste $A < 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) \qquad \forall x \leq A$$

Per W. classico so che esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

Dico che m in realtà è minimo ovunque, cioè che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti

- se $x \in [A, B]$, allora $f(x) \geq m$ per definizione di m
- se $x > B$, allora

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per def.} \\ \text{di } B}}{\geq} f(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } 0 \in [A,B] \\ \text{e } m \text{ è il minimo in } [A,B]}}{\geq} m$$

- se $x < A$, allora vale lo stesso discorso.

Analogamente, esiste il massimo su tutto $\mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

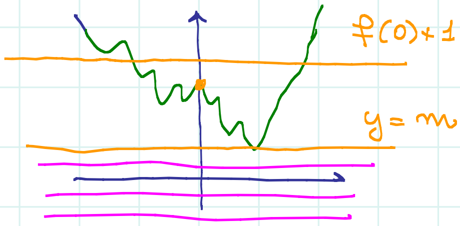
Esempio 1 La funzione

$$f(x) = x^2 - \sin(x^6) + \cos(x^{20}) \cdot x$$

è surgettiva come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Banalmente NO, perché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, quindi per

W generalizzato esiste il minimo su tutto $\mathbb{R}$, e i valori più piccoli di m non vengono presi



È iniettiva?

NO! Basta considerare l'equazione

$$f(x) = f(0) + 1$$

Questa ha almeno una soluzione positiva e almeno una soluzione negativa (basta applicare il teorema di esistenza degli zeri in due intervalli opportuni).

$\boxed{\text{VARIANTE}}$ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

(i) $f(0) = 5$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 8$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 6$

Cosa possiamo dire di max e min su tutto $\mathbb{R}$?

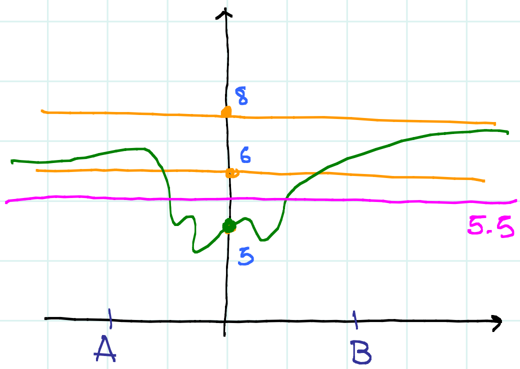
Non è iniettiva!

Ad esempio l'equazione

$$f(x) = 5.5$$

ha almeno una soluzione $x > 0$

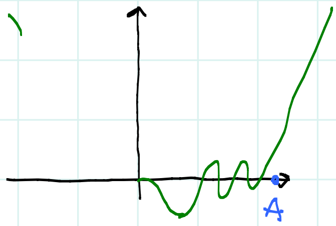
e almeno una soluzione $x < 0$



Il max potrebbe non esistere (in tal caso il sup sarebbe ∞).
Vedi figura.
È intuitivo che il min. esiste per forza. Come dimostrarlo?
Come nella dim. di prima avremo che
- esiste $B > 0$ t.c. $f(x) \geq 5.5$ per ogni $x \geq B$
- esiste $A < 0$ " " " $x \leq A$

A questo punto il min. in $[A, B]$ è anche minimo su tutto $\mathbb{R}$

— o — o —

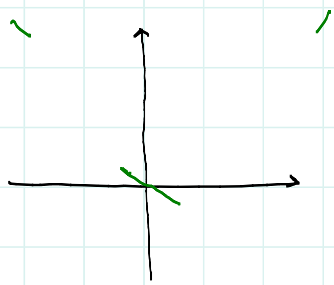


Esempio $f(x) = x^{20} - \sin(x^4)$
max / min su tutto $\mathbb{R}$ e su $(0, +\infty)$

Essendo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ sappiamo

che su tutto $\mathbb{R}$ max non esiste e min sì
Su $(0, +\infty)$ non c'è il max perché $\sup = +\infty$
Il minimo esiste perché vicino a 0 si comporta come $-x^4$, quindi un po' a dx di $x = 0$ diventa negativa e quindi la battaglia per il minimo si gioca in $[0, A]$ dove A è tale che

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq A$$



Esempio $f(x) = \log(1+x^2) - \arctan x$
tutto $\mathbb{R}$ oppure $(0, +\infty)$

Ancora una volta

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Vicino a 0 si comporta come $-x$, quindi diventa neg. un po' a dx di $x = 0$ e si chiude come prima ☺

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 58

Note Title 12/12/2024

Alcuni motivi per fare uno studio di funzione:

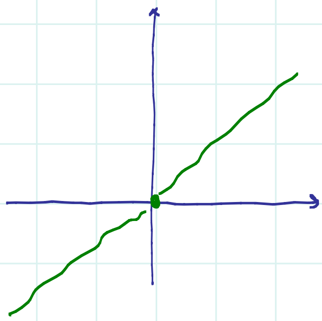
- → capire iniettività e/o surgettività
- → trovare max / min
- → risolvere equazioni del tipo $f(x)=0$ oppure $f(x)=\lambda$
- → risolvere disequazioni.

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\sin x \leq x$.

Pongo $f(x) = x - \sin x$ e cerco di capire dove $f(x) \geq 0$.
La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
[Volendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e questo dice che f è surgettiva]

Osservo che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1-\cos x$
Ora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ se e solo se $\cos x = 1$, cioè se e solo se $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, cioè $f'(x)$ si annulla sporadicamente.
Monotonia 3 ⇒ f è strett. crescente.
A questo punto sappiamo che

$f(x) > 0$ per $x > 0$
$f(x) < 0$ per $x < 0$.



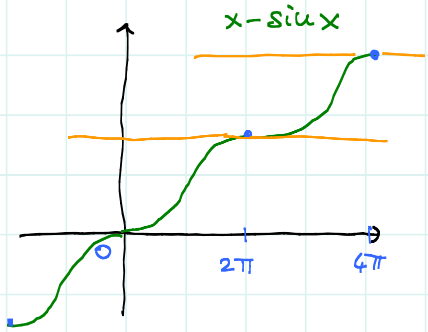
Conclusione:

$$\sin x \leq x \qquad \forall\, x \geq 0$$

e vale il segno di uguale se e solo se $x=0$

— o — o —

Oss. In realtà sappiamo meglio come è fatto il grafico di $x - \sin x$.
Tutti i p.ti $x = 2k\pi$ sono p.ti stazionari, cioè $f'(x) = 0$, e sono p.ti di flesso a tangente orizzontale ascendente

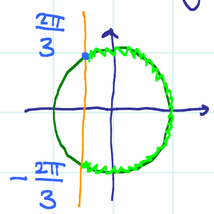


Oss. La disug. $\sin x \le x$ si vede anche geometricamente dalla circonferenza trigonometrica (vedi lezione sul limite di $\frac{\sin x}{x}$).

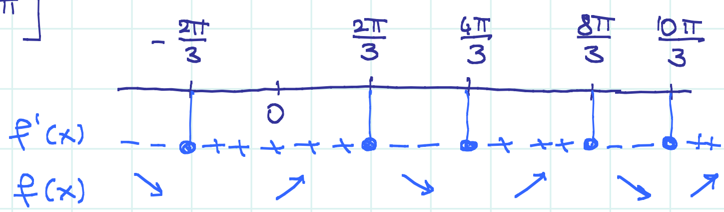
Esempio 2 Risolvere l'equazione $x + 2\sin x = 0$

Come prima $f(x) = x + 2\sin x$ e osserviamo che è una funzione dispari e surgettiva. Inoltre $f(0) = 0$, quindi $x = 0$ è una soluz.
Calcolo $f'(x) = 1 + 2\cos x$, che può diventare negativa.
Studio il segno di $f'(x)$.

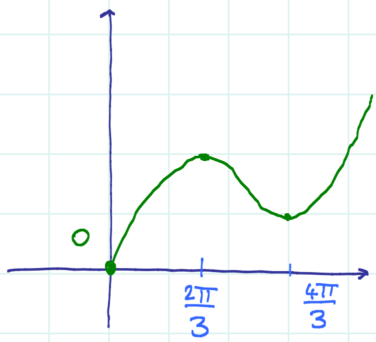
$$f'(x) \ge 0 \iff 1 + 2\cos x \ge 0$$
$$\iff \cos x \ge -\frac{1}{2}$$



$$\iff x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$$



Quindi, partendo da $x = 0$, la funzione
→ cresce fino a $x = \frac{2\pi}{3}$
→ poi decresce fino a $x = \frac{4\pi}{3}$.
Va sotto zero? Basta sostituire

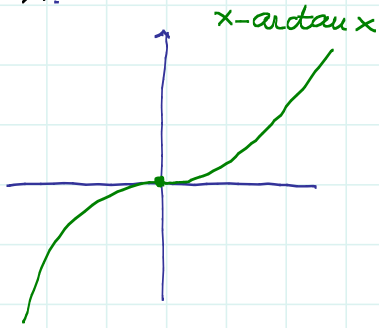


$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 4 - \sqrt{3} > 0$$

→ poi cresce fino a $\frac{8\pi}{3}$ e da quel p.to in poi non può più annullarsi perché di certo non si annulla quando $x > 2$

Conclusione: l'unica soluzione di $x + 2\sin x = 0$ è $x = 0$

Esempio 3 Risolvere la disequazione $\arctan x \leq x$.



Considero $f(x) = x - \arctan x$

Funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari e surgettiva

Anche in questo caso $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 - 1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

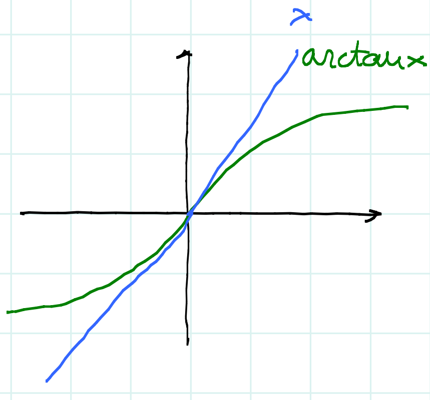
Quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Monotonia 3 $\rightsquigarrow$ f è strett. crescente

Conclusione: $\arctan x < x \quad \forall x > 0$

$\arctan x > x \quad \forall x < 0$

(in $x = 0$ vale l'uguaglianza)

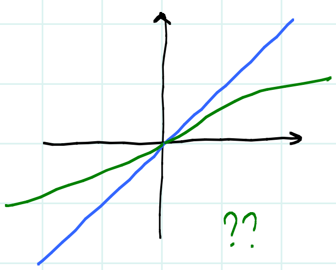


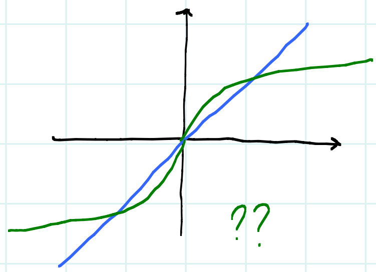
Oss. In termini di grafici sovrapposti

La situazione è quella qui a destra

Achtung! È molto pericoloso sovrapporre due grafici !!

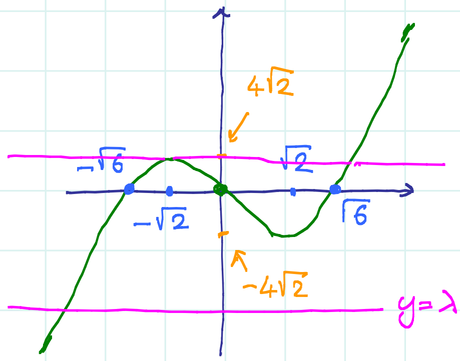
Nessuno può escludere situazioni diverse





Esempio 4 Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di

$$x^3 - 6x = \lambda$$

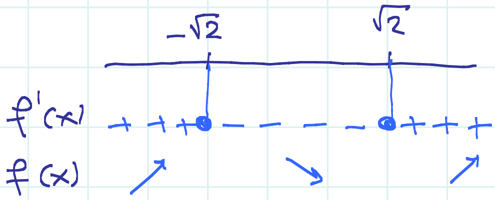


Considero la funzione $f(x) = x^3 - 6x$.
Questa come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari e surgettiva
Osservo che

$$f(x) = -6x + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$

quindi vicino all'origine si comporta come $-6x$.
Calcolo

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$$



$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \quad \text{per disparità}$$

Conclusione: l'equazione ha

→ 1 soluzione se $\lambda < -4\sqrt{2}$ oppure $\lambda > 4\sqrt{2}$
→ 2 soluzioni se $\lambda = \pm 4\sqrt{2}$
→ 3 soluzioni se $-4\sqrt{2} < \lambda < 4\sqrt{2}$.

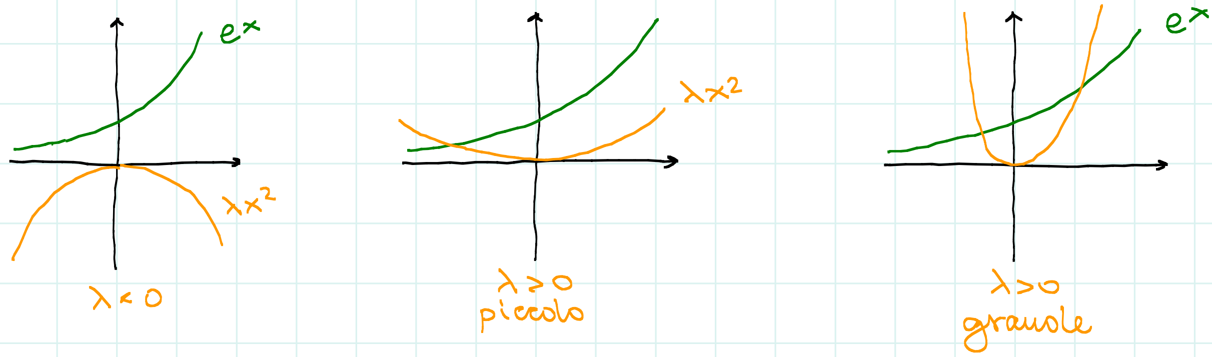
— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 59

Note Title 12/12/2024

Esempio 1 Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di
$$e^x = \lambda x^2$$

Esplorazione brutale



Mi aspetto
- → per $\lambda \leq 0$ ⇝ nessuna sol.
- → per $\lambda > 0$ piccolo ⇝ una sol. negativa
- → per $\lambda > 0$ grande ⇝ due sol., una pos. e una neg.

Problema: stabilire quando si passa da una situazione alla successiva

$\boxed{\text{SLOGAN : ISOLARE IL PARAMETRO}}$ $\quad \dfrac{e^x}{x^2} = \lambda$

Dividere per x^2 è pericoloso se $x=0$, ma tanto $x=0$ non è mai soluzione, quindi no problem.

Adesso studio la funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

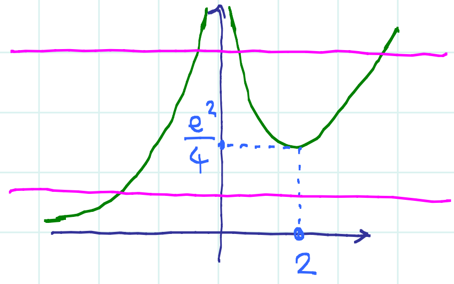
Nessuna simmetria

Definita per $x \neq 0$ e sempre > 0.

espon. batte potenza

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+ \ \left(\frac{0}{+\infty}\right) \qquad \lim_{x \to 0} f(x) \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

Da queste sole info. ci aspettiamo un grafico come in figura.

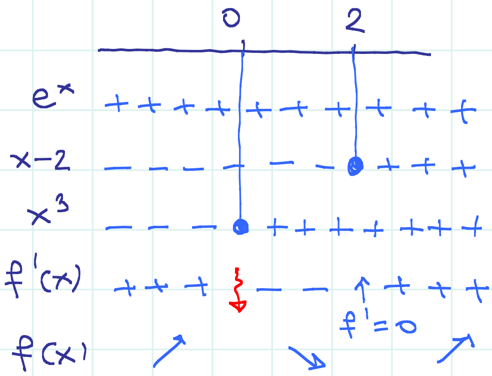


Cerchiamo il p.to di min per $x > 0$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x (x-2)}{x^3}$$

Studiamo il segno



Dallo studio di $f'(x)$ scopriamo che $x=2$ è il p.to di min. loc.

$$f(2) = \frac{e^2}{4}$$

Conclusione

→ per $\lambda \leq 0$ ⇝ 0 soluzioni

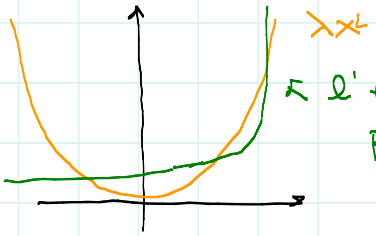
→ per $0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$ ⇝ 1 soluzione, che è negativa

→ per $\lambda = \frac{e^2}{4}$ ⇝ 2 soluzioni, una positiva e una negativa

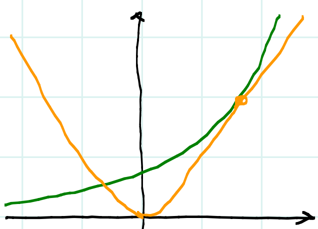
→ per $\lambda > \frac{e^2}{4}$ ⇝ 3 soluzioni, una negativa e due positive.

OPS, il brutale ha sbagliato :(Perché?

Per λ grande la situazione è questa



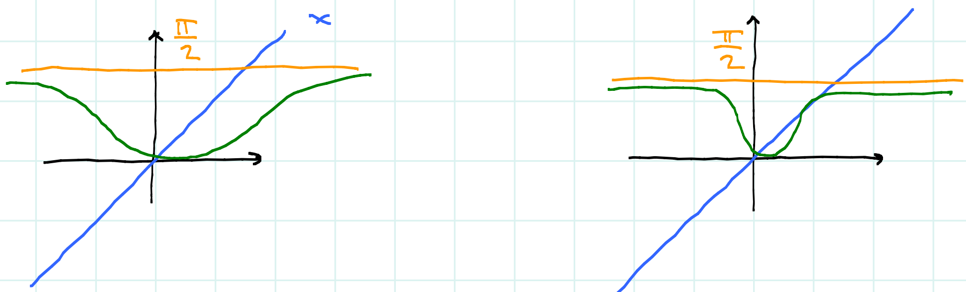
↖ l'esponenziale alla fine cresce più della parabola



$\lambda = \frac{e^2}{4}$ ⇝ tangenza tra parabola ed espon.

$\boxed{\text{Morale}}$ Mai sovrapporre due grafici!

Esempio 2 Risolvere $x = \arctan(x^2)$

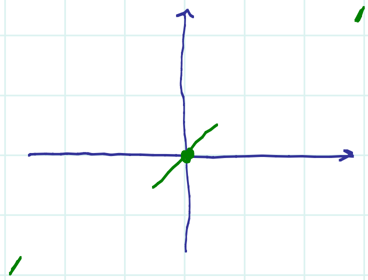


Quale dei disegni è quello corretto?

Studio la funzione $f(x) = x - \arctan(x^2)$.

Nessuna simmetria, come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva, poi $f(0) = 0$

Se fosse monotona, saremmo ☺



$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4}$$

$$= \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

Il denominatore è >0, ma il numeratore? Non è evidente...

Idea: studio la funzione $g(x) = x^4 - 2x + 1$.

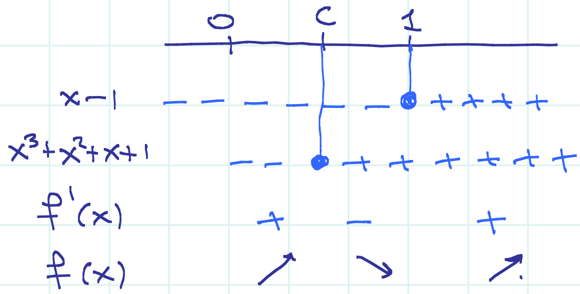
Si vede a occhio un p.to in cui si annulla: $x = 1$, quindi si può scomporre

$$\begin{array}{l|l} x^4 \quad -2x+1 & x-1 \\ \hline -x^4+x^3 & x^3+x^2+x-1 \\ \hline x^3-2x+1 & \\ -x^3+x^2 & \\ \hline x^2-2x+1 & \\ -x^2+x & \\ \hline -x+1 & \end{array}$$

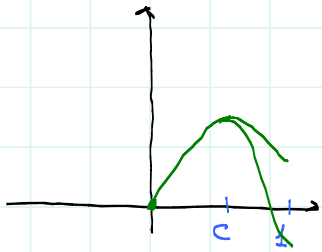
Conclusione (per ora): $x^4-2x+1 = (x-1)(x^3+x^2+x-1)$

Ora chiamo $h(x) = x^3+x^2+x-1$

Per $x \geq 0$ questa funzione è crescente, perché somma di funzioni crescenti. Inoltre $h(0) = -1$ e $h(1) = 2$, quindi si annulla per un certo $c \in (0,1)$. Quindi la situazione è questa

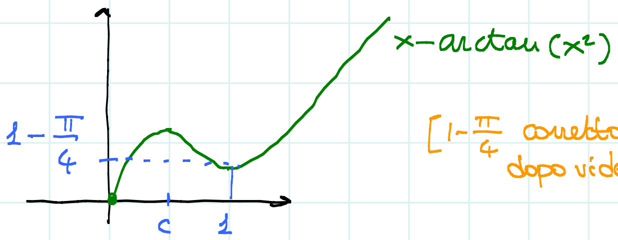


Domanda: in $x=1$ si ha $f(1) > 0$ oppure $f(1) < 0$?



$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ di poco

La situazione è questa

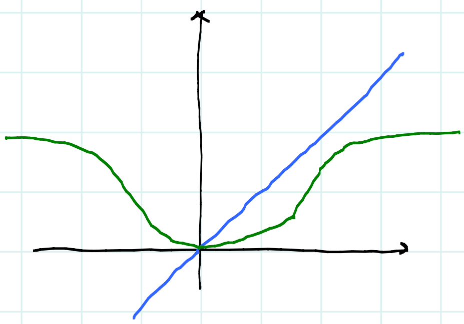


[$1-\frac{\pi}{4}$ corretto dopo video]

Per $x<0$ non c'è problema perché $f(x)$ è somma di due termini negativi.

Conclusione $\quad \arctan(x^2) \leq x$ se e solo $x > 0$

e vale il segno di uguale se e solo se $x=0$.



Oss. Per $x>0$ i due grafici

→ per un po' si allontanano

→ poi si avvicinano, ma non abbastanza

→ poi si ri-allontanano definitivamente.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 60

Note Title 12/12/2024

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

<u>Def.</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.
Si dice che f è $\boxed{\text{Lipschitziana in } A}$ se esiste un numero reale L tale che

$$\boxed{|f(y)-f(x)| \leq L\,|y-x| \qquad \forall x \in A \ \forall y \in A}$$

In tal caso il più piccolo valore di L per cui la disuguaglianza è vera si chiama $\boxed{\text{costante di Lip. di } f \text{ in } A}$.

<u>Oss.</u> Brutalmente, la Lip. permette di controllare la differenza tra $f(x)$ e $f(y)$ in termini della differenza tra x e y.

<u>Esempio 1</u> $f(x) = x^2$ è Lip. in $\mathbb{R}$?

NO! Prendo la def. con $x = 0$ e $y = n$ e trovo

$$|f(n) - f(0)| \leq L\,|n-0|$$
$$n^2 \leq L n$$

il che non può essere vero per n grande (L deve essere lo stesso)

<u>Esempio 2</u> $f(x) = x^2$ è Lip. in $[0, 100]$?

SI! Perché
$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |y^2 - x^2| \\ &= |x+y| \cdot |y-x| \\ &\leq 200\,|y-x| \end{aligned}$$

cioè in questo caso funziona la definizione con $L = 200$ ☺

Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[0,1]$?

No! Supponiamo $|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq L|y-x|$ $\forall x$ e y in $[0,1]$
Me la gioco con $x=0$ e $y=\frac{1}{n}$ e ottengo

$$\sqrt{\frac{1}{n}} \leq L\frac{1}{n} \qquad \text{cioè} \qquad \sqrt{n} \leq L$$

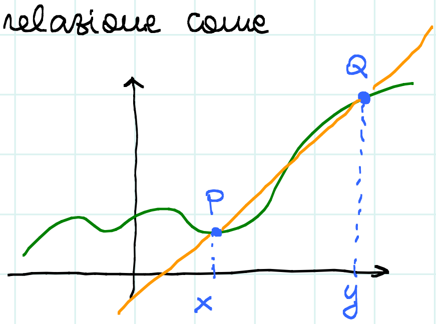
che non può essere vera per n grande.

— o — o —

Interpretazione geometrica Scriviamo la relazione come

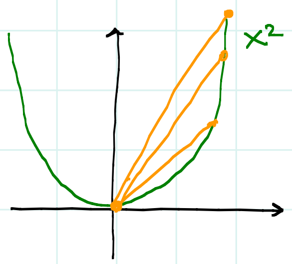
$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \text{coeff. angolare della retta } PQ$$

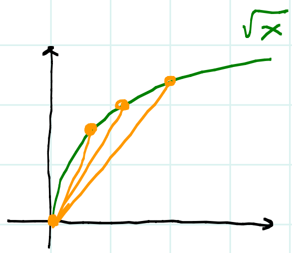


Quindi f è Lip. in una certa zona se e solo le rette che congiungono due p.ti qualunque del grafico in quella zona hanno coeff. ang. limitato, cioè hanno pendenza limitata

Ripensiamo agli esempi precedenti



I coeff. angolari NON sono limitati!



Più il secondo estremo si avvicina a 0, e più la retta diventa pendente (e il coeff. angolare tende a $+\infty$)

Esempio 4 $f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[1,+\infty)$?

Sì! (L'idea è che non posso fare rette troppo pendenti)

$$|f(y)-f(x)| = |\sqrt{y}-\sqrt{x}| = |\sqrt{y}-\sqrt{x}| \frac{\sqrt{..}+\sqrt{..}}{\sqrt{..}+\sqrt{..}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot |y-x|$$

$$\leq \frac{1}{2} |y-x|$$

denom. più piccolo

possibile costante L

— o — o —

LIPSCHITZIANITÀ E DERIVATA PRIMA

Teorema Supponiamo che

(i) A sia un intervallo, una semiretta, oppure tutto $\mathbb{R}$

(ii) $f: A \to \mathbb{R}$ sia derivabile.

Allora f è Lip. in A se e solo se $f'(x)$ è limitata in A e inoltre la costante di Lip. di f in A è data da

$$\boxed{L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prima parte : derivata limitata $\Rightarrow$ Lipschitziana

Per il teo. di Lagrange $f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(c)$

p.to misterioso tra x e y

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y-x|$$

$$\leq L\,|y-x|$$

limitazione sulla derivata

Seconda parte : f lip. con costante L $\Rightarrow$ $|f'(x)| \leq L$ ovunque in A

Basta usare la definizione

$$|f'(x_0)| = \lim_{h\to 0} \underbrace{\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right|}_{\substack{\text{questo è } \leq L \text{ sempre} \\ \text{se } f \text{ è Lip. con costante} \\ L}} \leq L.$$

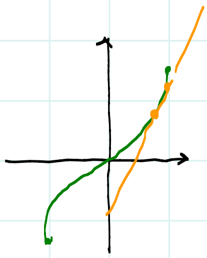
$\boxed{\text{Disuguaglianze classiche di Lip.}}$

$$\left.\begin{array}{l} |\sin y - \sin x| \leq |y-x| \\ |\cos y - \cos x| \leq |y-x| \\ |\arctan y - \arctan x| \leq |y-x| \end{array}\right\} \text{per ogni } x \text{ e } y \text{ reali}$$

Tutte queste disuguaglianze si riducono a dimostrare che le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$ sono Lip. con costante 1, che a sua volta si riduce a dire che le derivate sono comprese tra $+1$ e -1

$$\sin x \rightsquigarrow \cos x \in [-1,1]$$
$$\cos x \rightsquigarrow -\sin x \in [-1,1]$$
$$\arctan x \rightsquigarrow \frac{1}{1+x^2} \in (0,1]$$

<u>Esempio 5</u> $f(x) = \arcsin x$ è Lip. in $(-1,1)$?



No! Se lo fosse, la derivata dovrebbe essere limitata in $(-1,1)$, ma

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

non è limitata perché $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$.

Esempio 5 bis $f(x) = \arcsin x$ è Lip. in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$?

SI! E la costante di Lip è

$$\sup\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denominatore} \\ \text{+ piccolo possibile}}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \nwarrow L$$

Esempio 6 $f(x) = x^{20} \log(7 + \sin x) \cdot e^{-x}$

è Lip. in $[0, +\infty)$?

SI! Basta calcolare $f'(x)$ e osservare che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

perché in tutti i termini c'è e^{-x}.

A questo punto $f'(x)$ è limitata per i soliti Weierstrass generalizzati.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 61

Note Title 14/12/2024

Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0$$

$$f(x_0+h) = P_n(h) + \boxed{o(h^n)} \quad \text{per } h \to 0$$

resto di PEANO

Brutalmente: posso approssimare (sotto certe ipotesi) $f(x)$ o $f(x_0+h)$ con un polinomio. L'errore che commetto è un opiccolo. Informazione utile nei limiti.

Taylor-Lagrange fornisce un'informazione più quantitativa sul resto

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}$$

resto di Lagrange

dove c è un p.to misterioso compreso tra 0 e x

Brutalmente: il resto alla Lagrange è sostanzialmente il termine successivo dello sviluppo di Taylor, solo che la derivata $(n+1)$-esima non è calcolata in $x=0$, ma in un p.to misterioso c.

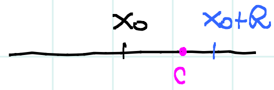
Teorema Sia $r>0$ e sia $f : (-r,r) \to \mathbb{R}$
Supponiamo che f sia derivabile fino all'ordine $n+1$.
Allora per ogni $x \in (-r,r)$ esiste c, compreso tra 0 e x strettamente, tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}$$

$P_n(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n

Oss. Vale la stessa cosa con centro x_0 qualunque

$$f(x_0+h) = P_n(h) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, h^{n+1}$$



dove c è un p.to misterioso, che dipende da h, compreso tra x_0 e x_0+h.

Oss. Cosa diventa la formula nel caso $n=0$?

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{P_0(x)} + f'(c)\cdot x$$

cioè $\quad f(x)-f(0) = f'(c)\,(x-0)$

che è il teorema di Lagrange applicato in $[0,x]$.

Esempio 1 Voglio calcolare $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$

Dico che $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \sim \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{600-1}{6000} = \frac{599}{6000}$$

Domanda: se approssimo $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ con $\frac{599}{6000}$, che errore commetto?

Uso Taylor-Lagrange con $f(x)=\sin x$ e $n=4$. Ottengo

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = \underbrace{\boxed{\frac{599}{6000}}}_{P_4\left(\frac{1}{10}\right)} + \frac{f^{(5)}(c)}{120}\cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{10^5}}}_{x^5}$$

quindi l'errore che commetto è

$$\frac{\boxed{f^{(5)}(c)}}{12.000.000}$$

compreso tra -1 e 1.

Quindi l'errore è dell'ordine di 10^{-7} :)

Riprova $\quad \frac{599}{6000} = 0{,}099833333$

errore sulla settima cifra

$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = 0{,}0998334$

Oss. Taylor Lagrange fornisce una stima esplicita dell'errore.

Esempio 2 Se voglio calcolare $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ e uso i primi 4 termini di Taylor, cosa posso dire dell'errore?

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\right) \sim 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{720}\cdot\frac{1}{64} = \text{si fa il conto}$$

Per stimare l'errore uso TL con $n = 7$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero di sopra}}}{P_7}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f^{(8)}(c)}{8!}\,\frac{1}{256}$$

$$|\text{errore}| = \frac{|f^{(8)}(c)|}{8!\,256} \leq \frac{1}{10^7}$$

Esempio 3 Dimostrare che $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Uso TL con $f(x) = e^x$ e $n = 3$. Ottengo

$$e^x = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(c)}{24}x^4 = P_3(x) + \underbrace{\boxed{\frac{e^c}{24}x^4}}_{\geq 0} \geq P_3(x)$$

e vale il segno di $=$ se e solo se $x = 0$.

Esempio 3 bis Risolvere la disequazione

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Da TL con $n = 2$ sappiamo che

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{P_2(x)} + \frac{e^c}{6} x^3 \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

vale se $x \geq 0$
(è il contrario per $x \leq 0$)

Conclusione: la disug. vale per $x \geq 0$.

Esempio 4 collegato

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(\cos x) - \arctan(\cosh x)}{\sinh^2(\sqrt{x}) \cdot \tan^2(\sqrt{x})}$$

L'argomento di arctan non tende a 0, quindi non si può usare lo sviluppo standard di arctan.
Alternativa: sviluppo arctan in $x_0 = 1$

Alternativa più rapida

$$f(\cos x) - f(\cosh x) = f'(c)\,(\cos x - \cosh x)$$

p.to misterioso
compreso fra $\cos x$ e $\cosh x$

$$\text{Frazione} = \frac{f'(c)\,(\cos x - \cosh x)}{x^2} \boxed{\frac{x^2}{\sinh^2(\sqrt{x}) \cdot \tan^2(\sqrt{x})}} \to -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\sinh^2(\sqrt{x}) \cdot \tan^2(\sqrt{x})}} \to 1$$

$$= \boxed{f'(c)} \boxed{\frac{\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2}}$$

$$\boxed{f'(c)} \to f'(1) = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\frac{\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2}} \to 1$$

Essendo $\boxed{\cos x} \leq c \leq \boxed{\cosh x}$, con $\cos x \to 1$, $c \to 1$, $\cosh x \to 1$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 62

Note Title 14/12/2024

Esercizio 1 Calcolare $\max\left\{\frac{n^3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$n=0 \rightsquigarrow 0 \quad n=1 \rightsquigarrow \frac{1}{2} \quad n=2 \rightsquigarrow \frac{8}{4}=2 \quad \dots$

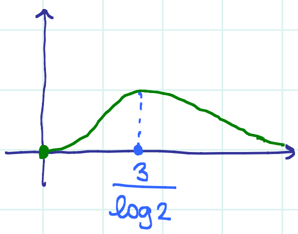
$\boxed{1^a \text{ osservazione}}$ Il massimo esiste. Poniamo $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ e osserviamo che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
Di conseguenza $a_n \leq \frac{1}{4}$ definitivamente, diciamo per $n \geq n_0$.
Quindi, poiché già sappiamo che $a_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, per il massimo se la giocano solo i termini

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$$

che sono un numero finito.

$\boxed{2^a \text{ osservazione}}$ Considero la funzione $f(x) = \frac{x^3}{2^x} = x^3 \cdot 2^{-x}$

Come ci aspettiamo sia fatta per $x \geq 0$?

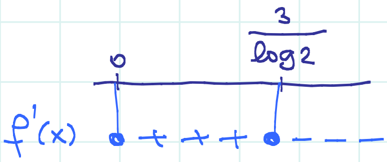


Studio

$$f'(x) = 3x^2\, 2^{-x} - x^3 \cdot 2^{-x} \log 2$$

$$= x^2\, 2^{-x} (3 - x\log 2)$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo $3 - x\log 2$

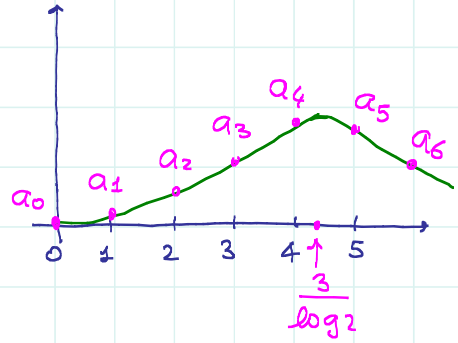


La successione a_n sono i p.ti del grafico con x intero, quindi a_n all'inizio cresce, poi inizia a decrescere e da lì in poi andrà sempre più giù verso 0.

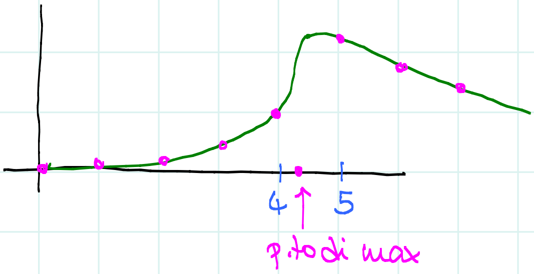
MAX

$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = 2 \quad a_3 = \frac{3^3}{8} = \frac{27}{8} \quad a_4 = \frac{64}{16} = \boxed{4} \quad a_5 = \frac{125}{32} < 4$

Un disegno più accurato



Achtung! Non è sempre vero che il massimo in n si ottiene per il valore di n più vicino al p.to di max per $x \geq 0$.



← Se la giocano sempre il p.to prima e il p.to dopo.

Esempio 2 Calcolare il max della successione

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{4}, \quad \sqrt[5]{5}, \quad \dots \qquad \sqrt[n]{n} \text{ con } n \geq 1$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Il max esiste! $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$

Quindi definitivamente, diciamo per $n \geq n_0$, avremo che

$$a_n < \sqrt{2}$$

Quindi per il max se la giocano solo i termini

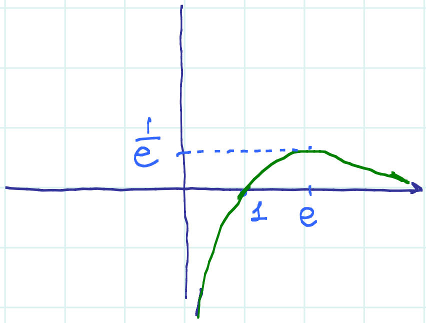
$$a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$$

che sono un numero finito

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n}$, il che ci spinge a studiare $f(x) = \frac{\log x}{x}$

Studio rapido

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



Per $x \leq 0$ non ha senso

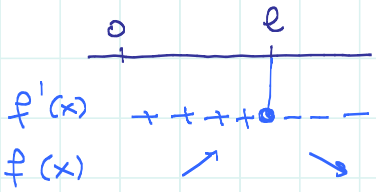
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left[\frac{-\infty}{0^+}\right] = -\infty$

$f(x) < 0$ per $x \in (0,1)$

$f(x) > 0$ per $x > 1$

Chi è il pto di max per $x>0$?

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$



Come nell'esempio precedente, la succ. a_n prima cresce per un po', poi da 3 in poi decresce.
Quindi per il max se la giocano $n=2$ e $n=3$. Vince $\sqrt[3]{3}$ perché

$\sqrt[3]{3} \overset{?}{>} \sqrt{2}$ ... elevo alla sesta ... $3^2 \overset{?}{>} 2^3$ ☺

Esempio 3 Dimostrare che esiste una costante c tale che

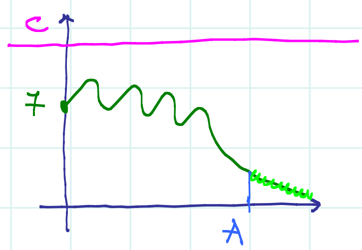
$$(x^3+7) \le c\,(x^4+1) \qquad \forall x \ge 0$$

Osservo che $x^4+1 \ge 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi posso dividere ottenendo un'espressione equivalente:

$$\underbrace{\boxed{\frac{x^3+7}{x^4+1}}}_{f(x)} \le c \qquad \forall x \ge 0$$

vanno bene tutti i c più grandi del max

Quindi devo dimostrare che il grafico di $f(x)$ sta sotto una retta.
Studio in maniera minimalista $f(x)$.
In questo caso esiste



$$\max\{f(x) : x \ge 0\}$$

per il "solito" Weierstrass generalizzato ... esiste $A>0$ t.c.

$$f(x) \le 1 \qquad \forall x \ge A$$

Quindi per il max se la giocano solo gli $x \in [0, A]$

Esempio 4 Esiste una costante c tale che

$$x^3+7 \leq c\,(x^2+1) \qquad \forall x \geq 0 \; ?$$

NO! Dovrebbe essere $\boxed{\dfrac{x^3+7}{x^2+1}} \leq c \quad \forall x \geq 0$

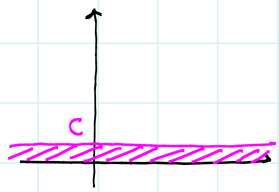
però questa funzione $\to +\infty$ per $x \to +\infty$

Esempio 4 bis Esiste $c \dots$ $\quad x^3+7 \leq c\,(x^2+1) \quad \forall x \in [20, 137]$?

Sì, basta prendere $c = \max\left\{ \dfrac{x^3+7}{x^2+1} : x \in [20, 137] \right\}$
che esiste ed è finito per W.

Esempio 5 Dimostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\cos^2 x + \sin^{42} x \geq c \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ $f(x) = \text{LHS}$ è periodica di periodo π

Quindi per W. generalizzato ammette minimo
(il min su $[0, \pi]$ è anche minimo su tutto $\mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Il minimo m è il valore per un qualche $x_0 \in [0, \pi]$.
Può essere $m < 0$? No perché $f(x) \geq 0$ sempre.
Può essere $m = 0$? No perché dovrebbe essere $\cos^2 x_0 = 0$ e
$\sin^{42} x_0 = 0$, cioè $\sin x_0 = \cos x_0 = 0$
Quindi $m > 0$ e questo è un buon c.

Achtung! Non basta dire $f(x) > 0$ sempre, quindi $\min > 0$
(pensare a $\frac{1}{x}$ per $x \geq 1$) $\leftarrow$ non esiste una costante $c > 0$ che sta sotto il grafico

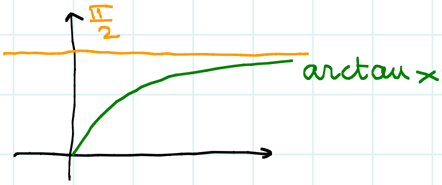
ANALISI 1 – LEZIONE 63

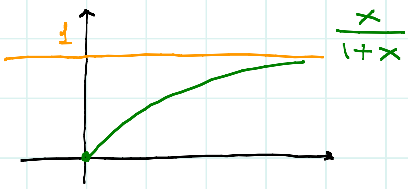
Note Title 14/12/2024

Esercizio 1 Determinare la migliore costante c tale che

$$\arctan x \geq c \, \frac{x}{1+x} \qquad \forall x \geq 0$$

Esplorazione





Dividendo troviamo (problemino per $x=0$, ma per $x=0$ ogni c è ok)

$$\frac{\arctan x}{x}(1+x) \geq c \qquad \forall x > 0$$

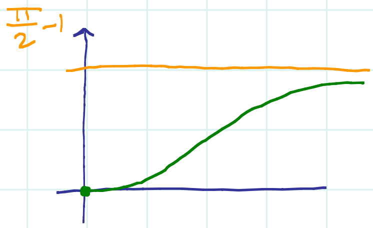
Il miglior c che posso usare è il minimo, o per lo meno l'inf. di $f(x)$ al variare di $x > 0$.

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Di sicuro $c \leq 1$. Basta fare $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ quindi al max c può essere.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Spero che $c = 1$ vada bene, cioè $\arctan x \geq \frac{x}{1+x}$ per ogni $x \geq 0$.

Studio

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x}$$

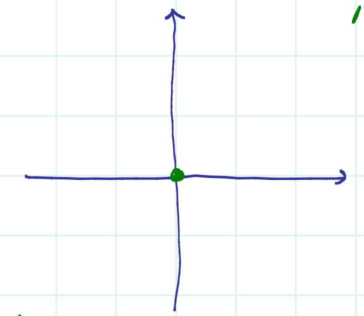


$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\cancel{1}+2x+\cancel{x^2}-\cancel{1}-\cancel{x^2}}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} > 0$$

Esercizio 2 $\underbrace{\sin h\, x - x^2 \sin x}_{f(x)} = \lambda$

(a) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione



Basta osservare che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

perché comanda $\sin h\, x$

(b) Se λ è abbastanza grande, allora la soluzione è unica

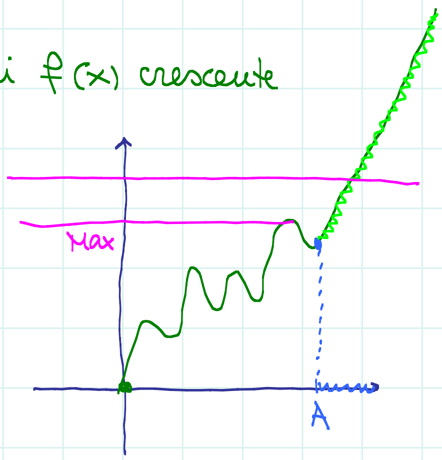
Idea: $f(x)$ può oscillare per colpa di $x^2 \sin x$, ma

$$f'(x) = \cos h\, x - 2x\sin x - x^2\cos x$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$$

Quindi $f'(x) > 0$ definitivamente, quindi $f(x)$ crescente definitivamente



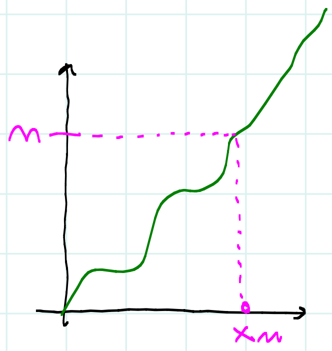
Diciamo che esiste $A > 0$ t.c.
$f(x)$ è strett. cresc. per $x \geq A$.

Questo ci dice che l'intersezione è unica per ogni $\lambda \geq$ del massimo di $f(x)$ per $x \leq A$. Questo max esiste per il solito W. generalizzato.

Perché per $\lambda >$ Max la soluzione è unica?
$\rightarrow$ Esiste, non può essere $\leq A$, e dopo A la $f(x)$ è crescente.

(c) Per n sufficientemente grande, definiamo x_n come la soluzione (unica per n grande) di

$$\sinh x - x^2 \sin x = n$$



Calcolare $\lim_{n \to +\infty} (x_n - \log n)$

È evidente che $x_n \to +\infty$, ma quindi il limite richiesto è $+\infty - \infty$.

Problema: non ho una formula per x_n!

Brutal mode: $\underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}\ - x^2 \sin x = n$

$$\sim \frac{e^x}{2} = n \leadsto e^x = 2n \leadsto x = \log 2n$$
$$= \log 2 + \log n$$

quindi è ragionevole che $x_n - \log n \to \log 2$.

Come dimostro tutto questo rigorosamente?

Spero che valga qualcosa del tipo

$$\log(2n - \sqrt{n}) \leq x_n \leq \log(2n + \sqrt{n})$$

Se dimostro questa, allora

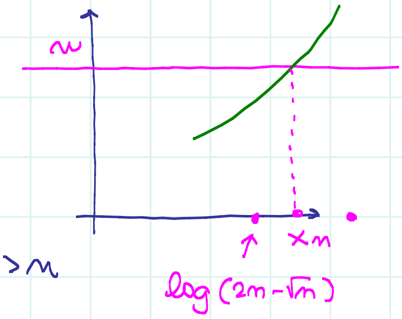
$$\underbrace{\log(2n - \sqrt{n}) - \log n}_{\downarrow \atop \log 2} \leq \underbrace{x_n - \log n}_{\downarrow \atop \log 2} \leq \underbrace{\log(2n + \sqrt{n}) - \log n}_{\downarrow \atop \log 2}$$

Come dimostro la disuguaglianza?

Basta far vedere che $f(\log(2n - \sqrt{n})) < n$ e $f(\log(2n + \sqrt{n})) > n$

Entrambe queste disuguaglianze si verificano facilmente.

Prendiamo la seconda



$$\sinh(\log(2n+\sqrt{n})) - \log^2(2n+\sqrt{n})\,\sin(\ ) > n$$

$$\frac{e^{\log(2n+\sqrt{n})} - e^{-\log(2n+\sqrt{n})}}{2} - \log^2(2n+\sqrt{n})\,\sin(\ ) \overset{?}{>} n$$

$$\frac{2n+\sqrt{n} - \frac{1}{2n+\sqrt{n}}}{2} - \log^2(\ )\,\sin n \geq n$$

Basta osservare che LHS $\to +\infty$ per merito di $\sqrt{n}$ che si mangia tutto il resto e quindi definitivamente LHS > 0.

— o — o —

Disuguaglianze "alla Taylor". Di solito ci sono disuguaglianze che legano le funzioni ai loro polinomi di Taylor.

Già visti: $\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$

$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$

} Si dimostravano studiando la differenza

Dico che $\cos x \leq 1 \quad \forall x \geq 0$

$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0 \quad \rightsquigarrow f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = -\sin x + x \geq 0$

$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \geq 0 \quad \rightsquigarrow g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$

$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

ANALISI 1 – LEZIONE 64

Note Title 16/12/2024

Cauchy $\Rightarrow$ De L'Hôpital $\Rightarrow$ Taylor

$\boxed{\text{Teorema}}$ (De L'Hôpital $\frac{0}{0}$) Sia $f : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

$g : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$

Supponiamo che

(i) f e g continue e derivabili in (x_0, x_0+r)

(ii) $g'(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r)

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$

(iv) esista $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \qquad (\text{stesso } \ell)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamo il caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$ (i casi $\ell = +\infty$ e $\ell = -\infty$ sono analoghi)

Per l'ipotesi (iv) sappiamo che

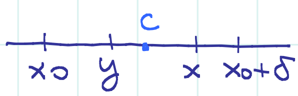
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

Dico che vale

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

lo stesso δ che andava bene per le derivate

Considero un qualunque $y \in (x_0, x)$



Applico il teo. di Cauchy nell'intervallo $[x,y]$. Ottengo

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon] \leftarrow \text{perché } c \in (x_0, x_0+\delta)$$

p.to misterioso in (x,y)
lo stesso c sopra e sotto

Quindi

$$\ell-\varepsilon \le \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \le \ell+\varepsilon$$

e ora passiamo al limite per $y \to x_0^+$ e grazie all'ipotesi (iii)

$$\ell-\varepsilon \le \frac{f(x)}{g(x)} \le \ell+\varepsilon$$

Abbiamo usato le ipotesi (i) e (ii) per poter scrivere Cauchy.

— o — o —

<u>Oss.</u> Se fosse stato $\ell = +\infty$ si partiva da

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq M \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

e poi si procedeva allo stesso.

Discorso analogo per i casi di $\lim\limits_{x \to x_0^-}$ o anche $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$

(provare a scriverne qualcuno per esercizio).

— o — o —

$\boxed{\text{De L'Hôpital } \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Taylor}}$

$$f(x) = P_m(x) + o(x^m) \qquad \text{resto di Peano}$$

$$f(x) = P_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} x^{m+1}$$

dove $$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

$\boxed{\text{Proprietà fond. del polinomio di Taylor}}$

$P_n(0) = f(0)$ $\qquad$ $P_n'(0) = \text{coeff. di } x = f'(0)$

$P_n''(0) = f''(0)$ $\qquad$ $P_n'''(0) = f'''(0)$

Le derivate del polinomio di $\overbrace{\text{Taylor}}^{P_n(x)}$, calcolate in $x=0$, coincidono con le derivate di $f(x)$ fino all'ordine n

Motivo brutale: quando derivo i volte un polinomio, e poi sostituisco $x=0$, quello che ottengo è il coeff. di x^i moltiplicato per $i!$ (i termini di grado $< i$ spariscono, quelli di grado $> i$ conservano almeno una x che sparisce quando sostituisco $x=0$)

Quindi, sia nel caso Peano sia nel caso Lagrange, posso considerare la funzione differenza

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$$

e osservare che

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0. \qquad (\star)$$

$\boxed{\text{Conclusione PEANO}}$ Sia φ una funzione che soddisfa $(\star)$.

Allora $\quad \varphi(x) = o(x^n) \quad$ per $x \to 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^m} \underset{\left[\frac{0}{0}: \text{H\^op}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x)}{m\, x^{m-1}} \underset{\left[\frac{0}{0}; \text{H\^op}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(x)}{m(m-1)\, x^{m-2}}$$

$$= \dots = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(m-1)}(x)}{m!\; x} \underset{\left[\frac{0}{0}: \text{H\^op}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!} = 0$$

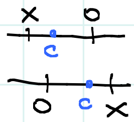
[Formalmente si sistema per induzione]

<u>Oss.</u> (da matematici risparmiosi) Che ipotesi abbiamo usato?
Apparentemente abbiamo usato che φ ha m derivate in un intorno di 0.
In realtà basta che
→ φ abbia $m-1$ derivate in un intorno di $x=0$,
→ la derivata m-esima basta in $x=0$

Basta osservare che l'ultimo passaggio è il rapporto incrementale per $\varphi^{(m-1)}(x)$, cioè

$$\varphi^{(m)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(m-1)}(x) - \overbrace{\varphi^{(m-1)}(0)}^{0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(m-1)}(x)}{x}$$

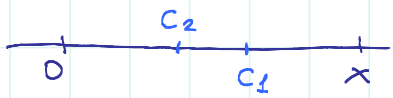
$\boxed{\text{Conclusione LAGRANGE}}$ Sia φ una qualunque funzione che verifica $(\star)$.



Allora per ogni x esiste c, compreso tra 0 ed x tale che

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}\, x^{m+1}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Basta applicare varie volte il teorema di Lagrange.
Supponiamo per fissare le idee che $x > 0$.
Allora



$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{n+1}-0^{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy}}}{=} \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\,c_1^{n}}$$

$$= \frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(0)}{(n+1)c_1^{n}-(n+1)\cdot 0^{n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy}}}{=} \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)\cdot n\, c_2^{n-1}}$$

Procedendo allo stesso modo ad ogni passaggio trovo un nuovo "c" e aumento di 1 l'ordine di derivazione sopra e sotto.
Dopo $(n+1)$ passaggi mi ritrovo

$$\frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!\cdot 1}$$

che è proprio quello che volevo.

<u>Oss.</u> Qui come ipotesi abbiamo usato che φ ha $n+1$ derivate in tutto un intorno di $x=0$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 65

Note Title 16/12/2024

UNICITÀ DEL POLINOMIO DI TAYLOR

Una stessa funzione non può avere due polinomi di Taylor diversi di grado n.

Supponiamo che $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$
$f(x) = \hat{P}_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

Facendo la differenza avremmo

$$\underbrace{P_n(x) - \hat{P}_n(x)}_{\text{polinomio di grado } \leq n} = o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

Fatto fondamentale: un polinomio di grado $\leq n$ non può essere $o(x^n)$, a meno che non sia tutto nullo

termine di grado più piccolo

$$\frac{a_k x^k + \text{roba di grado maggiore}}{x^n}$$

non può tendere a 0 se $k \leq n$ e $a_k \neq 0$

— o — o —

Se f ha tutte le derivate previste, allora il polinomio è quello dato dalla formula solita.

Oss. Può succedere che f non abbia tutte le derivate previste, ma tuttavia abbia il polinomio di Taylor di un certo grado, e addirittura di tutti i gradi possibili (non sarà dato dalla formula)

Possibile esempio: $f(x) = x^{2025} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^{3000}}\right)$ estesa ponendo $f(0) = 0$

Si verifica che $f(x) = o(x^{2024})$, quindi $P_{2024}(x)$ è il polinomio nullo.

Tuttavia non esiste nemmeno $f''(0)$ (qui bisogna fare il conto)

— o — o —

<u>Notazione</u>: classi di regolarità. Si dice che $f \in C^k$ in un certo intervallo (a,b) o anche $f \in C^k(\mathbb{R})$ se f in quella zona ammette tutte le derivate fino all'ordine k e quelle sono continue nella zona prevista.

Varianti

$C^\infty \rightsquigarrow$ tutte le derivate esistono e sono continue

$C^\omega \rightsquigarrow C^\infty$ e inoltre f è la somma della sua serie di Taylor (funzione ANALITICA)

omega

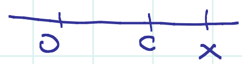
<u>Esempio 1</u> La funzione $f(x) = e^x$ è analitica su tutto $\mathbb{R}$, quindi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fissato per semplicità $x > 0$, per Taylor-Lagrange sappiamo che

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \frac{\boxed{e^c}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$f^{(n+1)}(c)$



Osserviamo che

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}}}$$

quando $n \to +\infty$
(fattoriale batte potenza)

Quindi, qualunque sia x, il resto tende a 0 per $n \to +\infty$

<u>Oss</u>. La stessa dimostrazione funziona con $\sin x$ e $\cos x$, quindi le serie di Taylor convergono alla funzione stessa per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 2 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Fatto 1 La serie di potenze converge solo per $x \in (-1, 1]$

Fatto 2 Taylor-Lagrange vale per ogni $x > -1$ perché vale in tutta la zona dove $f(x)$ ha le derivate previste.
Come la mettiamo?

Prendiamo $n = 2024$. Viene

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^{2024}}{2024} + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(2025)}(c)}{2025!} x^{2025}}}_{\text{resto}}$$

Quando avevamo fatto la formula per le derivate, veniva del tipo

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,(-1)^{n+1} \frac{1}{(1+x)^n}$$

per cui $\quad \text{resto} = \frac{1}{2025} \frac{1}{(1+c)^{2024}} x^{2025}$

Ora non c'è più il fattoriale al denominatore che batte la potenza.
Quindi se $x = 15$ non c'è garanzia che il resto sia piccolo.
Discorso diverso se $x \in (-1, 1)$.

— o — o —

Esercizio $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}}$

Assoluta convergenza: ☹ perché $|a_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

Spero in Leibnitz, ma devo dim. che $\frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}}$ è decrescente, o equivalentemente che $\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$ è definitivamente crescente.

Modo facile: pongo $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$ e dim. che $f'(x) \geq 0$ per x grandi

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/4}} = \frac{2\sqrt[4]{x} - 1}{4x^{3/4}}$$

e questo è > 0 appena $\sqrt[4]{x} > \frac{1}{2}$.

Esempio (che Leibnitz e "circa" non vanno d'accordo)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}}}_{a_n}$$

Questa diverge a $+\infty$

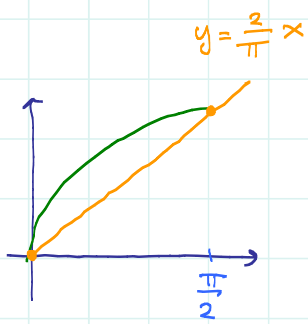
Brutale: $a_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, quindi converge per Leibnitz NO! NO!

Realtà: $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{converge per Leibnitz}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Diverge a } +\infty}$$

Esercizio Sappiamo che $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$.

Dimostriamo che

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x \qquad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$



Potremmo fare lo studio di funzioni.

Cerchiamo di vederlo geometricamente

Osserviamo che la retta $y = \frac{2}{\pi} x$ passa per l'origine e per $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Sappiamo che le funzioni concave stanno sopra le rette congiungenti due p.ti del grafico.

Ora $f(x) = \sin x$ è concava in $[0, \pi]$ perché

$$f''(x) = -\sin x \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in [0, \pi].$$

— o — o —