ANALISI 1 – LEZIONE 24

Note Title 24/10/2024

LIMITI NOTEVOLI

PADRI $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \left[\frac{0}{0}\right]$

FIGLI $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$ (per $a>0$)

NIPOTI $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

LIMITE DIMENTICATO $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x = 0$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\downarrow\ 1^2}\ \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}}_{\downarrow\ \frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\downarrow\ 1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\downarrow\ 1} = 1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$ Pongo $y=\arctan x$. Quando $x\to 0$ ho che $y\to\arctan 0 = 0$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} = 1$$

Stessa cosa per $\arcsin x$

Dim limiti con esponenziali e logaritmi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

propr. dei log

Ora pongo $y = \frac{1}{x}$. Quando $x \to 0^+$, allora $y \to +\infty$ e quindi diventa

$$\lim_{y\to +\infty} \log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1$$

Analogamente, per $x \to 0^-$ avremo che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to -\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]$$

Uso limite es. precedente

$$= \log e = 1$$

— o — o —

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Pongo $y = e^x - 1$

Quando $x \to 0$, ho che $y \to e^0 - 1 = 0$

Ricavo x : $e^x = y+1 \rightsquigarrow x = \log(y+1)$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

— o — o —

<u>Limite dimenticato</u> : $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log x$ $[0 \cdot (-\infty)]$

Pongo $y = \log x$ da cui $x = e^y$. Quando $x \to 0^+$ ho che $y \to -\infty$ quindi diventa

$$\lim_{y\to -\infty} e^y \cdot y \qquad [0 \cdot (-\infty)]$$

Pongo ora $z = -y$. Quando $y \to -\infty$ ho che $z \to +\infty$ e diventa

$$\lim_{z \to +\infty} e^{-z}(-z) = \lim_{z \to +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0 \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

esponenziale batte potenza

— o — o —

TRUCCO DELL'ESPONENZIALE

Base ed esponente strani : $\boxed{\text{E ALLA!}}$

$$\boxed{A^B = e^{\log(A^B)} = e^{B \log A}}$$

Quindi in particolare $\quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \log f(x)}$

In questo modo gli esponenziali diventano prodotti!

$$\lim_{x \to 0} \frac{7^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \log 7} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \boxed{\frac{e^{x \log 7} - 1}{x \log 7}} \cdot \log 7 = \log 7$$

$\downarrow$ 1 (Pongo $y = x \log 7$)

<u>Esercizio 1</u> $\quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \frac{1}{2} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$

Smontaggio dei limiti notevoli

$$\frac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin(2x)} = \boxed{\frac{e^x - 1}{x}} \boxed{\frac{2x}{\sin(2x)}} \cdot \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\downarrow$ 1 $\quad \downarrow$ 1 $\quad \downarrow$ $\frac{1}{2}$

Pongo $y = 2x$

...

Esercizio 2 $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\arctan x} - \cos x}{\log(1+\sin x)} = 1$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{e^{\arctan x} - \cos x}{\log(1+\sin x)} = \boxed{\frac{\sin x}{\log(1+\sin x)}} \, \frac{e^{\arctan x} - \cos x}{\sin x}$$

$\downarrow$ 1

(basta porre $y = \sin x$)

Esaminiamo l'altro pezzo

$$\frac{e^{\arctan x} - 1 + 1 - \cos x}{\sin x} = \underbrace{\frac{e^{\arctan x} - 1}{\sin x}}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{\frac{1-\cos x}{\sin x}}_{\downarrow\, 0}$$

Facciamoli uno per uno

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{\sin x} = \underbrace{\boxed{\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan x}{x}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow\, 1}$$

($y = \arctan x$)

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \, \frac{x^2}{\sin x} = \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0}$$

Esempio 3 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\cos x)}{\cos x} = \log 2$

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \to 0$ ho che $y \to \cos 0 = 1$, quindi viene

$$\lim_{y\to 1} \frac{\log(1+y)}{y} = \frac{\log(2)}{1} = \log 2$$

[Si poteva vedere dall'inizio perché non è forma indeterminata]

Esempio 4 $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ $1^\infty \rightsquigarrow$ indeterminato

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{\sin^2 x}\log(\cos x)}$$

Ora mi occupo dell' esponente:

$$\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\log(1+\overbrace{\cos x - 1}^{y\to 0})}{\sin^2 x}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+\cos x-1)}{\cos x - 1}}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow \atop -\frac{1}{2}} \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{\sin^2 x}}}_{\downarrow \atop 1} \to -\frac{1}{2}$$

$y = \cos x - 1$

— o — o —