ANALISI 1 — LEZIONE 29

SVILUPPINI Per le funzioni elementari valgono i seguenti sviluppi

$\sin x = x + o(x)$ $\cos x = 1 + o(x)$

$\tan x = x + o(x)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\arctan x = x + o(x)$ $e^x = 1 + x + o(x)$

$\arcsin x = x + o(x)$ $\log(1+x) = x + o(x)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

[tutti per $x \to 0$]

$\boxed{\sin x = x + o(x)}$ Vuol dire che $\overbrace{\sin x - x}^{f(x)} = o(\underset{g(x)}{x})$

Usando la def. quasi equivalente diventa

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x - x}{x} = \frac{\sin x}{x} - 1 \to 1 - 1 = 0$$

Stessa cosa per tutti quelli sulla sx (altro modo di dire i limiti notevoli)

$\boxed{\cos x = 1 + o(x)}$ Devo verificare che $\cos x - 1 = o(x)$, cioè

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow\, -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0} \to 0$$

$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$ Devo verificare che

$$\underbrace{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}_{f(x)} = o(\underset{\uparrow\, g(x)}{x^2})$$ cioè (def. quasi equiv.)

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow\, -\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \to 0 \quad \ddot\smile$$

Analogamente gli sviluppini di e^x e di $\log(1+x)$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x) \text{ per } x\to 0 \quad \text{per ogni } \alpha\in\mathbb{R} \text{ (qualunque!)}}$$

Devo verificare che $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x = o(x)$ per $x\to 0$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x}{x} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha = \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{x} - \alpha$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)}}}_{\downarrow\, 1} \; \alpha\underbrace{\boxed{\frac{\log(1+x)}{x}}}_{\downarrow\, 1} - \alpha \to \alpha - \alpha = 0.$$

[Pongo $y = \alpha\log(1+x)$ e osservo che $y\to 0$]

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + \arctan x + \cos x - 1}{e^x - 1} = 2$

Uso gli sviluppini

$\sin x = x + o(x)$ $\qquad$ $\cos x = 1 + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$ $\qquad$ $e^x = 1 + x + o(x)$

Sostituisco

$$\frac{x + o(x) + x + o(x) + o(x)}{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}} = \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{2 + \overbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}^{0}}{1 + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}_{0}} \to 2$$

Esempio 2 $\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x) + \sin(x^2)}{\sqrt{1+x} - \cos x} = 6$

$\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) = o(x)$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

$\cos x = 1 + o(x)$

Sostituendo tutto...

$$\frac{3x + o(x) + o(x)}{\cancel{1} + \frac{1}{2}x + o(x) - \cancel{1} - o(x)} = \frac{3x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)} = \frac{3 + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}_{\to 0}}{\frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}_{\to 0}} \to 6$$

Oss. Per ogni $a > 1$ vale che $x^a = o(x)$ per $x \to 0$, quindi

$x^2 = o(x) \qquad x\sqrt{x} = o(x) \qquad x^{2024} = o(x) \ldots$

$$x^a = x \cdot \underbrace{\boxed{x^{a-1}}}_{\to 0 \text{ se } a>1}$$

Più in generale:

$$x^a = o(x^b) \quad \text{per } x \to 0$$

se e solo se $a > b$ (se divido diventa x^{a-b} che tende a 0 se e solo se $a > b$)

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) = o(x)$ cerchiamo di capire

$\boxed{\sin(x^2) = o(x)}$ Basta dividere... $\dfrac{\sin(x^2)}{x} = \underbrace{\boxed{\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\to 0}$

$\boxed{\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)}$ Dallo sviluppino sappiamo che

$\sin x = x + o(x)$

cioè $\quad \sin x = x + x\omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$ per $x \to 0$

Ma allora

$$\sin(x^2) = x^2 + x^2 \underbrace{\omega(x^2)}_{\to 0 \text{ per } x \to 0}$$

e questo dice proprio che $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$.

Volendo posso anche scrivere

$$\sin(x^2) = x \underbrace{\left[x + x\,\omega(x^2)\right]}_{\omega_1(x) \to 0 + 0 \cdot 0 = 0}$$

Questo è un altro modo di verificare che $\sin(x^2) = o(x)$

<u>Esempio 3</u> $\quad \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) + \tan^2(5x)}{\log(1 + \arctan(2x))} = \frac{3}{2}$

Brutalmente è come se fosse $\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

Basta usare gli sviluppi

$$\sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$

$$\tan^2(5x) = (5x + o(x))^2 = 25x^2 + 10x\,o(x) + o(x)^2 = o(x)$$

$$\log(1 + \arctan(2x)) = \arctan(2x) + o(\arctan(2x))$$

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

$$= 2x + o(x) + \underbrace{o(\arctan(2x))}_{\text{Sarà vero che è } o(x)\,?}$$

Giustifichiamo per bene

$$o(\arctan(2x)) = \arctan(2x) \cdot \omega(x)$$

$$= x \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(2x)}{x} \cdot \omega(x)}}_{\omega_1(x) \to 2 \cdot 0 = 0}$$

Esempio 4

$$\frac{e^{\arctan(2\sin x)} - \cos(\tan x) + \log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{\arcsin(3x^2) - 7|x\sin x| + 5\tan x}$$

→ Intanto è $\frac{0}{0}$: sotto tutti tendono a 0, sopra i due 1 se ne vanno

→ Chi c'è sotto ?

$\tan x = x + o(x)$

$x\sin x = o(x)$ ⇝ spazzatura

$\arcsin(3x^2) = o(x)$ [Nel video c'è arctan invece che arcsin]

Sotto c'è $5x + o(x)$

→ Sopra gli 1 se ne vanno ed è come se fosse

$e^{\cdots} = 1 + 2x + o(x)$ $\quad\quad$ $\cos(\tan x) = 1 + o(x)$

$\log(1 + \dots) \sim \log(1+2x) \sim 2x$

Quindi sopra c'è $4x$.

— o — o —