ANALISI 1 - LEZIONE 89

Note Title 29/03/2025

$\boxed{\text{Metodo di variazione delle costanti}}$ = ultima spiaggia

Esempio $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{5t}$

Col tentativo: $u(t) = ae^{5t} \quad \dot{u}(t) = 5ae^{5t} \quad \ddot{u}(t) = 25ae^{5t}$

$\rightsquigarrow 25ae^{5t} + 25ae^{5t} + 6ae^{5t} = e^{5t} \rightsquigarrow 56a = 1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{56}$ ☺

Metodo generale: cerco una soluzione del tipo

$$u(t) = a(t)e^{-2t} + b(t)e^{-3t}$$

quelle che sarebbero costanti nella soluz. generale dell' omog. ora diventano funzioni incognite

Faccio i conti ☹ : $\dot{u}(t) = \underbrace{\dot{a}(t)e^{-2t}} - 2a(t)e^{-2t} + \underbrace{\dot{b}(t)e^{-3t}} - 3b(t)e^{-3t}$

Impongo come prima condizione che i termini con $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$ si annullino:

$$\boxed{\dot{a}(t)e^{-2t} + \dot{b}(t)e^{-3t} = 0} \qquad 1^a \text{ equazione}$$

Calcolo $\ddot{u}$ tenendo conto della condizione appena imposta

$$\ddot{u}(t) = -2\dot{a}(t)e^{-2t} + 4a(t)e^{-2t} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} + 9b(t)e^{-3t}$$

Sostituisco $u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$ nell' equazione data

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = -2\dot{a}(t)e^{-2t} + \cancel{4a(t)e^{-2t}} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} + \cancel{9b(t)e^{-3t}}$$
$$\cancel{-10\,a(t)e^{-2t}} \cancel{-15\,b(t)e^{-3t}}$$
$$\cancel{+6\,a(t)e^{-2t}} \cancel{+6\,b(t)e^{-3t}}$$
$$= e^{5t}$$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ se ne devono andare. Resta

$$\boxed{-2\dot{a}(t)e^{-2t} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} = e^{5t}} \quad 2^a \text{ equazione}$$

Abbiamo quindi due equazioni nelle incognite $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$.
Risolvendo trovo $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$ e poi basta integrare

$$\begin{cases} \dot{a}(t)e^{-2t} + \dot{b}(t)e^{-3t} = 0 & \cdot\, e^{3t} \\ -2\dot{a}(t)e^{-2t} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} = e^{5t} & \cdot\, e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a}(t)e^{t} + \dot{b}(t) = 0 \\ -2\dot{a}(t)e^{t} - 3\dot{b}(t) = e^{8t} \end{cases} \qquad 3\cdot 1^a + 2^a \rightsquigarrow \dot{a}(t)e^{t} = e^{8t}$$
$$\rightsquigarrow \dot{a}(t) = e^{7t}$$
$$\rightsquigarrow a(t) = \frac{1}{7}e^{7t}$$

Dalla prima equazione $\dot{b}(t) = -\dot{a}(t)e^{t} = -e^{7t}\cdot e^{t} = -e^{8t}$
$$b(t) = -\frac{1}{8}e^{8t}$$

Conclusione: $u(t) = a(t)e^{-2t} + b(t)e^{-3t}$

$$= \frac{1}{7}e^{7t}\cdot e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{8t}\cdot e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{7}e^{5t} - \frac{1}{8}e^{5t} = \boxed{\frac{1}{56}e^{5t}}$$

Oss. Per ottenere lo stesso risultato sono serviti molti conti.

Esempio 2

$$u'' - u' - 2u = t^2 + e^{3t} + \cos(2t)$$

Trovare la soluzione generale

Prima guardo l'omogenea : $\ddot{u} - \dot{u} - 2u = 0$

$\rightsquigarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightsquigarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightsquigarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}$

La parte omogenea ha come soluzione

$$c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

Cerco una soluzione della non omogenea del tipo

$$u(t) = \underbrace{at^2 + bt + c}_{\text{produrre } t^2} + \underbrace{d e^{3t}}_{\text{produrre } e^{3t}} + \underbrace{e\cos(2t) + f\sin(2t)}_{\text{produrre } \cos(2t)}$$

Calcolo $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$, poi sostituisco e trovo a, b, c, d, e, f.

Oss. Posso fare i tentativi separati per produrre i 3 pezzi e poi sommare

$u(t) = at^2 + bt + c \qquad \dot{u}(t) = 2at + b \qquad \ddot{u}(t) = 2a$

Sostituisco: $\ddot{u} - \dot{u} - 2u = 2a - 2at - b - 2at^2 - 2bt - 2c = t^2$

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2a - 2b = 0 \\ 2a - b - 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ 2c = 2a - b = -\frac{3}{2} \qquad c = -\frac{3}{4} \end{array}$$

Per produrre t^2 serve $\quad -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \quad$ (verifica!)

Analogo per produrre gli altri

Esempio 3 $\quad \ddot{u} - \dot{u} - 2u = 5 + t \sin t$

Per produrre 5 basta $\quad u(t) = -\frac{5}{2}$

Per produrre $t \sin t$ servirà

$$u(t) = a t \sin t + b t \cos t + c \sin t + d \cos t$$

In generale, se c'è polinomio $\cdot \sin(\alpha t)$ provo con

polinomio $\cdot \sin(\alpha t)$ + polinomio $\cdot \cos(\alpha t)$

Esempio 4

1	$u'' - u' - 2u = \cosh t + e^{2t} + 6^t$
2	$u'' - u' - 2u = t^2(e^t + e^{2t})$
3	$u'' + 4u' + 4u = \sinh(2t) + \cosh(3t)$

1.1 $\quad e^{2t} \quad \rightsquigarrow$ è soluzione dell'omogenea, quindi il tentativo è

$u(t) = a t e^{2t} \quad \rightsquigarrow$ trovo a

1.2 $\quad \cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \quad$ ma e^{-t} è soluzione dell'omogenea

Tentativo: $\quad a e^t + b t e^{-t}$

1.3 $\quad 6^t \quad$ Tentativo: $a 6^t$

$\wr$

$e^{\log 6 \cdot t} \qquad a e^{\log 6 \cdot t}$

2.1 $\quad$ Ottenere $t^2 e^t \quad \rightsquigarrow$ provo $(at^2 + bt + c)e^t$

2.2 $\quad$ Ottenere $t^2 e^{2t} \quad \rightsquigarrow$ se provo $(at^2 + bt + c)e^{2t}$ va male

perché e^{2t} è soluzione dell'omogenea

Il tentativo corretto è $t(at^2+bt+c)e^{2t}$

(3) $\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u = \sinh(2t) + \cosh(3t)$

$x^2+4x+4=0 \rightsquigarrow x=-2$ con molteplicità 2

Sol. omogenea: $u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$

$\cosh(3t) = \dfrac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}$:)

$\sinh(2t) = \dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}$ crea problemi

Tentativo per $e^{-2t} \rightsquigarrow u(t) = at^2e^{-2t}$

— o — o —