ANALISI 1 - LEZIONE 60

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è **Lipschitziana in A** se esiste un numero reale L tale che

$$\boxed{|f(y) - f(x)| \leq L\,|y - x| \qquad \forall x \in A \ \forall y \in A}$$

In tal caso il più piccolo valore di L per cui la disuguaglianza è vera si chiama **costante di Lip. di f in A**.

Oss. Brutalmente, la Lip. permette di controllare la differenza tra $f(x)$ e $f(y)$ in termini della differenza tra x e y.

Esempio 1 $f(x) = x^2$ è Lip. in $\mathbb{R}$?

NO! Prendo la def. con $x = 0$ e $y = n$ e trovo

$$|f(n) - f(0)| \leq L\,|n - 0|$$
$$n^2 \leq L n$$

il che non può essere vero per n grande (L deve essere lo stesso)

Esempio 2 $f(x) = x^2$ è Lip. in $[0, 100]$?

SI! Perché

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |y^2 - x^2| \\ &= |x+y| \cdot |y - x| \\ &\leq 200\,|y - x| \end{aligned}$$

cioè in questo caso funziona la definizione con $L = 200$:)

Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[0,1]$?

No! Supponiamo $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \le L|y-x|$ $\forall x$ e y in $[0,1]$

Me la gioco con $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$ e ottengo

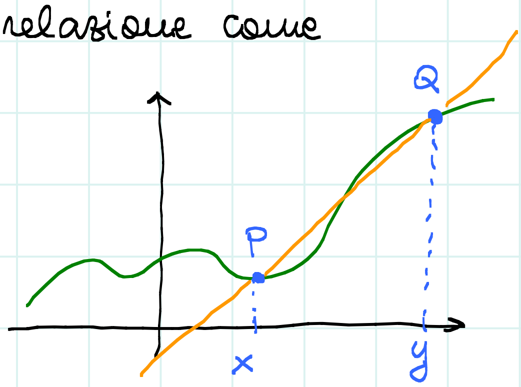
$$\sqrt{\frac{1}{n}} \le L\frac{1}{n} \qquad \text{cioè} \qquad \sqrt{n} \le L$$

che non può essere vera per n grande.

— o — o —

Interpretazione geometrica Scriviamo la relazione come

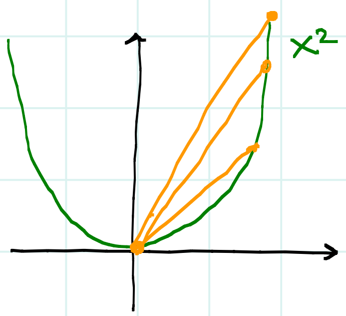
$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \le L$$

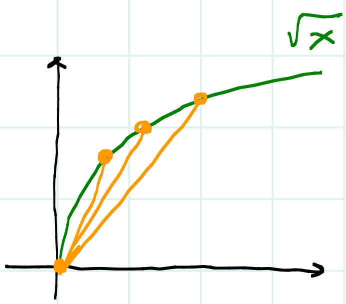


$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \text{coeff. angolare della retta } PQ$$

Quindi f è Lip. in una certa zona se e solo le rette che congiungono due p.ti qualunque del grafico in quella zona hanno coeff. ang. limitato, cioè hanno pendenza limitata

Ripensiamo agli esempi precedenti





I coeff. angolari NON sono limitati!

Più il secondo estremo si avvicina a 0, e più la retta diventa pendente (e il coeff. angolare tende a $+\infty$)

Esempio 4 $f(x)=\sqrt{x}$ è Lip. in $[1,+\infty)$?

Sì! (L'idea è che non posso fare rette troppo pendenti)

$$|f(y)-f(x)| = |\sqrt{y}-\sqrt{x}| = |\sqrt{y}-\sqrt{x}| \frac{\sqrt{..}+\sqrt{..}}{\sqrt{..}+\sqrt{..}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot |y-x|$$

$$\underset{\text{denom. più piccolo}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{possibile costante } L} |y-x|$$

— o — o —

LIPSCHITZIANITÀ E DERIVATA PRIMA

Teorema Supponiamo che

(i) A sia un intervallo, una semiretta, oppure tutto $\mathbb{R}$

(ii) $f: A \to \mathbb{R}$ sia derivabile.

Allora f è Lip. in A se e solo se $f'(x)$ è limitata in A e inoltre la costante di Lip. di f in A è data da

$$\boxed{L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\}}$$

Dim. Prima parte: derivata limitata $\Rightarrow$ Lipschitziana

Per il teo. di Lagrange $f(y)-f(x) = (y-x)\cdot f'(c)$

p.to misterioso fra x e y

$$|f(y)-f(x)| = |f'(c)|\cdot|y-x|$$
$$\leq L\,|y-x|$$

limitazione sulla derivata

Seconda parte: f Lip. con costante $L \Rightarrow |f'(x)| \leq L$ ovunque in A

Basta usare la definizione

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \underbrace{\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right|}_{\substack{\text{questo è } \le L \text{ sempre} \\ \text{se } f \text{ è Lip. con costante} \\ L}} \le L .$$

$\boxed{\text{Disuguaglianze classiche di Lip.}}$

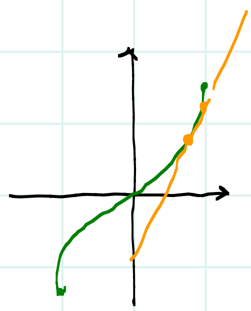
$$\left.\begin{array}{l} |\sin y - \sin x| \le |y-x| \\ |\cos y - \cos x| \le |y-x| \\ |\arctan y - \arctan x| \le |y-x| \end{array}\right\} \text{per ogni } x \text{ e } y \text{ reali}$$

Tutte queste disuguaglianze si riducono a dimostrare che le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$ sono Lip. con costante 1, che a sua volta si riduce a dire che le derivate sono comprese tra $+1$ e -1

$$\sin x \rightsquigarrow \cos x \in [-1, 1]$$

$$\cos x \rightsquigarrow -\sin x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x \rightsquigarrow \frac{1}{1+x^2} \in (0, 1]$$



__Esempio 5__ $f(x) = \arcsin x$ è Lip. in $(-1,1)$?

No! Se lo fosse, la derivata dovrebbe essere limitata in $(-1,1)$, ma

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

non è limitata perché $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty$.

Esempio 5 bis $f(x) = \arcsin x$ è Lip. in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$?

SI! E la costante di Lip è

$$\sup\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \leftarrow L$$

denominatore + piccolo possibile

Esempio 6 $f(x) = x^{20} \log(7+\sin x) \cdot e^{-x}$

è Lip. in $[0,+\infty)$?

SI! Basta calcolare $f'(x)$ e osservare che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

perché in tutti i termini c'è e^{-x}.

A questo punto $f'(x)$ è limitata per i soliti Weierstrass generalizzati.

— o — o —