8 Asintoti

8.1 Asintoto orizzontale

Definizione 8.1.1 (Asintoto orizzontale)**.** *Data una $f : A \to \mathbb{R}$, un $a \in \mathbb{R}$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (finito) si dice che f ha un* ***asintoto orizzontale*** *di equazione $y = l$ per x che tende a $\pm\infty$.*

Esempio 8.1.1. Prendiamo $f(x) = e^x$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

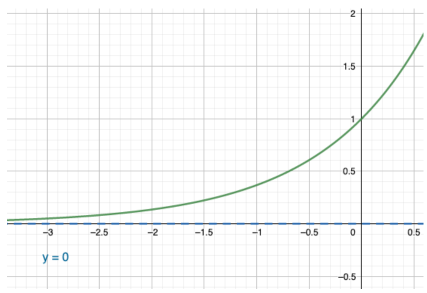

Figure 36: Asintoto orizzontale di e^x

Andiamo come prima cosa a calcolare il limite: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Possiamo così vedere che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

Come possiamo notare nell'immagine a fianco (asintoto segnato dalla linea blu in basso).

Esempio 8.1.2. Facciamo un altro esempio prendendo questa volta $f(x) = \arctan(x)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Anche qui compre prima cosa calcoliamo il limite sia vero $+\infty$ che verso $-\infty$ della funzione:
$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

Vediamo dunque due asintoti con equazioni $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ rispettivamente con $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Possiamo vedere i due asintoti nell'immagine a fianco (rette in blu).

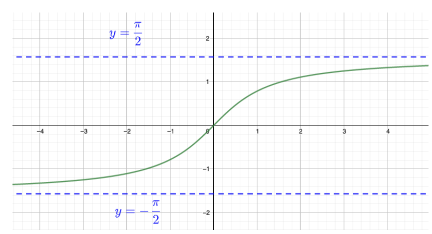

Figure 37: Asintoto orizzontale di $\arctan(x)$

8.2 Asintoto verticale

Definizione 8.2.1 (Asintoto verticale)**.** *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$. Se f diverge per x che tende a x_0 da destra o da sinistra (o da entrambe le parti) si dice che f ha un* ***asintoto verticale*** *di equazione $x = x_0$.*

Esempio 8.2.1. Prendiamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita come $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Andiamo a calcolare nel punto di discontinuità, che è lo 0, il limite sia da destra che da sinistra:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \ \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Vediamo dunque la f ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$. Possiamo vedere l'asintoto nell'immagine a fianco (asintoto verticale segnato in blu).

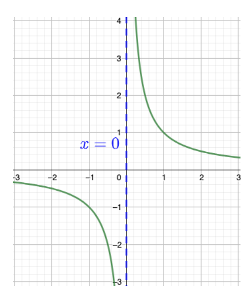

Figure 38: Asintoto verticale di $\frac{1}{x}$

Osservazione 8.2.1. Una funzione al massimo ha 2 asintoti orizzontali (uno a $+\infty$ ed uno a $-\infty$) ma può anche avere ∞ asintoti verticali, come nel caso di $f(x) = \tan(x)$ che ha ∞ asintoti verticali.

8.3 Asintoto obliquo

Definizione 8.3.1 (Asintoto obliquo)**.** *Data una $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Se esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ con $m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, e se esiste anche $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = q$ con $q \in \mathbb{R}$ allora si dice che f ha un **asintoto obliquo** di equazione $y = mx + q$ per $x \to +\infty$. Lo stesso vale con $x \to -\infty$.*

Esempio 8.3.1. Facciamo un esempio di calcolo dei asintoto obliquo con $f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x-5}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x} = 2$, quindi $m = 2$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2-2x(x-5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+2+10x}{x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{13x+2}{x-5} = 13$

Abbiamo dunque che esiste un asintoto obliquo di equazione $y = 2x + 13$ per $x \to +\infty$

Osservazione 8.3.1. Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui (uno a $+\infty$ ed uno a $-\infty$). Inoltre non può avere contemporaneamente un asintoto orizzontale ed uno obliquo "dalla stessa parte".

Esempio 8.3.2. Prendiamo $f(x) = 3x + 5\log(x)$ definita come $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Proviamo ora a calcolare l'asintoto obliquo.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+5\log(x)}{x} = 3 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\log(x)}{x} = 3 + 0 = 3$ quindi $m = 3$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x + 5\log(x) - 3x = 5\log(x) = +\infty$.

Visto che la q non torna un numero finito vediamo che questa funzione non ha asintoto obliquo.