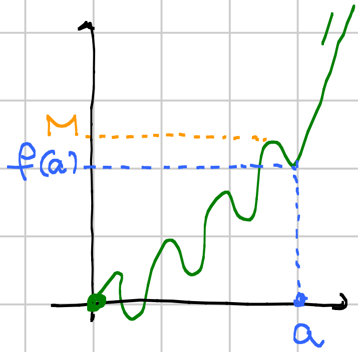
ANALISI 1 — LEZIONE 044

Esempio 1 Consideriamo l'equazione

$$\underbrace{x^3 \cos(x^2) + \sinh x}_{f(x)} = \lambda$$

→ Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ l'eq. ha almeno una sol. $x > 0$.



Basta osservare che f è continua, $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ per merito di $\sinh x$

→ Dimostrare che $\exists \lambda_0 > 0$ t.c. la sol. $x > 0$ è unica per ogni $\lambda \geq \lambda_0$.

Idea: • $f'(x)$ sarà positiva per ogni $x \geq a$
• in $[0, a]$ la funzione ha un max M
• per $\lambda > M$ la soluzione è unica

Rigorosamente: $f'(x) = 3x^2 \cos(x^2) - 2x^4 \sin(x^2) + \cosh x$

Osservo che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, quindi per defin. esiste $a > 0$ t.c.

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \geq a$$

ed in particolare f è strett. cresc. in $[a, +\infty)$.
Pongo

$$M := \max \{ f(x) : x \in [0, a] \} \qquad \text{(esiste per W.)}$$

Cosa succede per $\lambda > M$? Sappiamo che $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione. Questa sol. non può essere in $[0, a]$, quindi è $> a$, quindi nella zona di iniettività, quindi è unica.

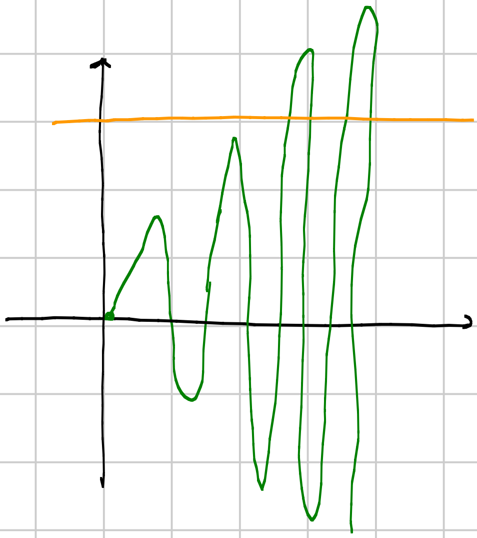
Si può analogamente partire supponendo che $f(x_1) = f(x_2) = \lambda > M$...

— o — o —

Esempio 2 $\qquad x^2 + \sin x + x^3 \cos(x^2) = \lambda$

Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ ci sono infinite soluzioni $x > 0$

Idea: quando x cresce, la funzione $f(x)$ ha infinite oscillazioni sempre più ampie.



Punto essenziale: esistono 2 successioni

$$a_n \to +\infty \quad \text{e} \quad b_n \to +\infty$$

tali che

$$f(a_n) \to +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) \to -\infty$$

[Posso prendere per esempio $a_n = \sqrt{2\pi n}$, $b_n = \sqrt{\pi + 2\pi n}$]

Ora si può dimostrare che, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste almeno una soluzione dell' eq. maggiore di M. Questo implica che le sol. sono infinite.

Poiché $a_n \to +\infty$ e $f(a_n) \to +\infty$, allora definitivam. si avrà che

$$a_n > M \quad \text{e} \quad f(a_n) > \lambda$$

Poiché $b_n \to +\infty$ e $f(b_n) \to -\infty$, allora defin.

$$b_n > M \quad \text{e} \quad f(b_n) < \lambda$$

Quindi ho trovato p.ti $> M$ in cui f vale $+$ o $-$ di λ. Concludo con il teorema dei valori intermedi.

—o—o—

Esempio 3 Dimostrare che esiste una costante c tale che

$$x^4 + x^2 \sin x + \arctan(e^x) \le c \sinh x \qquad \forall x \ge 2016$$

Idea: posso dividere per $\sinh x$ (che è >0 per $x \geq 2016$).
Ottengo

$$\boxed{\frac{x^4 + x^2 \sin x + \arctan(e^x)}{\sinh x}} \overset{?}{\leq} c \qquad \forall x \geq 2016$$

$f(x)$

Questo è come dire che $f(x)$ è limitata superiormente in $[2016, +\infty)$
Questo a sua volta segue dal fatto che f è continua e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad (\text{basterebbe } \in \mathbb{R})$$

$\to$ la costante c ottimale è $\max_{x \geq 2016} f(x)$, e questo esiste, ma

va dimostrato con le solite varianti di W (basta trovare un $x \geq 2016$ in cui $f(x) > 0$).

Esempio 4 $\qquad x^{33} + x^4 \sin x \leq c(\sinh x - x)^a \qquad \forall x \geq 0$

Domanda: per quali $a > 0$ esiste c tale che

Risposta: se e solo se $a \leq \frac{5}{3}$. Ci sono due sottoproblemi

$x^{33} + x^4 \sin x \leq c(\sinh x - x)^a \quad \forall x \geq 1 \quad \rightsquigarrow$ ok per ogni $a > 0$

$x^{33} + x^4 \sin x \leq c(\sinh x - x)^a \quad \forall x \in [0,1] \quad \rightsquigarrow$ ok solo per $a \leq \frac{5}{3}$

La disuguaglianza in $x \geq 1$ è come l'esercizio 3.
La seconda è ovvia in $x = 0$. Per $x \in (0,1]$ posso dividere e ottengo

$$\boxed{\frac{x^{33} + x^4 \sin x}{(\sinh x - x)^a}} \leq c \qquad \forall x \in (0,1]$$

$f(x)$

Oss. $\sinh x - x > 0$ per $x > 0$ perché la derivata è $\cosh x - 1 > 0$

Ci stiamo chiedendo se $f(x)$ è limitata in $(0,1]$. L'unica cosa che può andare storta è il limite per $x \to 0^+$.

Ora

$$f(x) = \frac{x^5 + o(x^5)}{\left(\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^a}$$

quindi $\to$ per $a > \frac{5}{3}$ il limite è $+\infty$

$\to$ per $a = \frac{5}{3}$ il limite è $6^{5/3}$

$\to$ per $a < \frac{5}{3}$ il limite è 0.

la funzione $f(x)$ è limitata in $(0,1]$

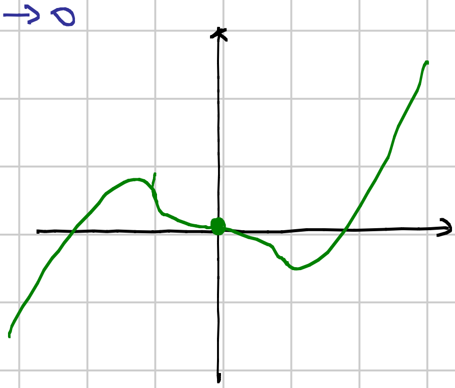
Fatto generale: $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ continua e $\lim_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
Allora f è lim. sup. in $(0,1]$

Dim: è la solita storia, ma va fatta.

— o — o —

Esempio 5 $\quad x^{33} - x^4 \sin x = 0$ ha almeno 3 soluz. reali.

$x = 0$ è soluzione, $f(x) = -x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$
$\Rightarrow$ flesso tang. oriz. disc. nell'origine
con i limiti all'infinito si conclude



Oss. Il numero di sol. è dispari e finito (dipende dall'essere i limiti $\pm\infty$, ma non è ovvio e andrebbe dimostrato).

— o — o —