ANALISI 1 — LEZIONE 078

Note Title 21/03/2025

$\boxed{\text{INTEGRALI}}$ $\int_A f(x)\,dx$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{PROPRIO}}$ Serve che

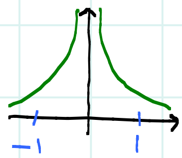
① A sia insieme limitato (contenuto dentro intervallo)

② f sia funzione limitata ($\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$)

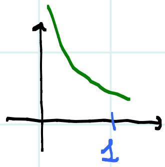
$\boxed{\text{IMPROPRIO}}$ Se mancano uno, o entrambi, gli ingredienti precedenti

Esempi

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ ① OK ② NO



$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ① OK ② NO



$\int_{5}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ① NO ② SI

$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ① NO ② NO

$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$ ① SI ② SI

È un integrale PROPRIO perché $0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ per ogni $x \in (0,1)$

$\boxed{\text{INTEGRALI MONOPROBLEMA}}$ Sono gli integrali che ricadono in una delle seguenti tipologie

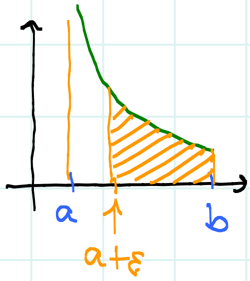
→ zona di integrazione $[a,b]$
funzione da integrare non limitata solo vicino ad un estremo

→ zona di integrazione: semiretta $[a,+\infty)$ oppure $(-\infty,a]$
funzione da integrare limitata

DEFINIZIONI PER INTEGRALI MONOPROBLEMA

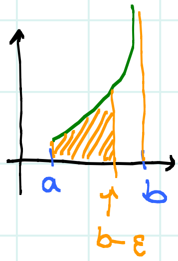
Caso 1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non limitata dalle parti di a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underbrace{\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx}_{\text{A } \varepsilon>0 \text{ fisso, questo è un integrale proprio}}$$



Se il problema fosse in b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$



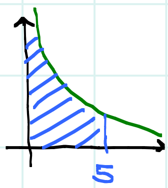
Caso 2 $f : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \underbrace{\int_a^A f(x)\,dx}_{\text{è un integrale proprio perché } f \text{ è limitata}}$$

Se abbiamo $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$, allora

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^a f(x)\,dx$$

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$



$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^5 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2\sqrt{5} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{5}$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\lim_{A \to +\infty} \int_7^A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_7^A = \lim_{A \to +\infty} \left(2\sqrt{A} - 2\sqrt{7}\right) = +\infty$$

Oss. Un integrale improprio monoproblema, essendo definito come limite, ha le solite 4 opzioni
- è un numero reale
- $+\infty$
- $-\infty$
- non esiste

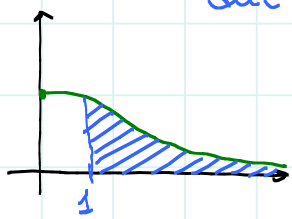
Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \sin x\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left[-\cos x\right]_0^A$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[-\cos A + 1\right] = \text{NON ESISTE}$$

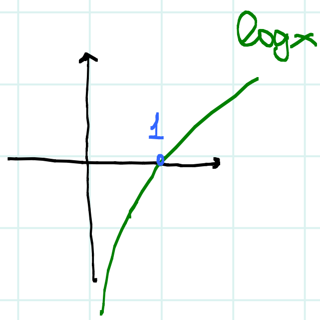
(si dimostra con le due successioni)

Esempio 4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$



$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A \to +\infty} [\underbrace{\arctan A}_{\downarrow\ \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan 1}_{=\ \frac{\pi}{4}}] = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 5 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

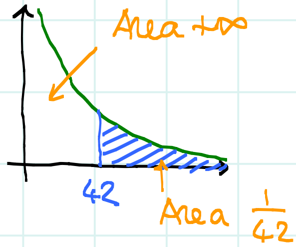


$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log x\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[x\log x - x\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{-\varepsilon\log\varepsilon}_{\downarrow\ 0} + \underbrace{\varepsilon}_{\downarrow\ 0} - 1 = -1$$

E se un integrale ha tanti problemi?

Si spezza in tanti integrali che hanno un problema solo



Esempio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ Ha due problemi

Lo scrivo come $\displaystyle\int_0^{42} + \int_{42}^{+\infty}$ e li

studio separatamente (e il risultato non dipende dal punto di spezzamento)

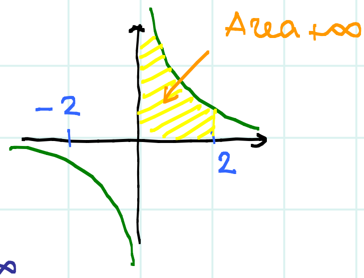
$$\int_{42}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{42}^{A} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{42}^{A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{42}\right) = \frac{1}{42}$$

$$\int_0^{42} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\varepsilon}^{42} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left(-\frac{1}{42} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

Quindi l'integrale globalmente diverge a $+\infty$.

Achtung! Dopo aver fatto lo spezzamento, il risultato finale è la somma dei risultati, con la convenzione che se un pezzo è $+\infty$ e un pezzo è $-\infty$, allora il globale è per definizione indeterminato.



Esempio $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_0^{2} \frac{1}{x}\,dx$

$$\int_0^{2} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} (\log 2 - \log\varepsilon) = +\infty$$

Analogamente $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\infty$. Quindi l'integrale globalmente risulta indeterminato.

La compensazione è VIETATA.