ANALISI 1 — LEZIONE 087

Note Title 14/03/2017

SUCC. PER RICORRENZA NON LINEARI

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ (si può fare la formula esplicita, ma non vogliamo usarla)

Voglio calcolare il limite della succ. Serve un piano.

$\boxed{\text{PIANO}}$
(i) $0 \le x_n \le \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_{n+1} \le x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$
(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ La succ. x_n è decrescente (deb.) per il p.to (ii) e limitata dal basso per il p.to (i).
Quindi (iii) segue dal teo. succ. monotone

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Scrivo la ricorrenza e passo al limite

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & & \ell^3 \end{array}$$

sottosucc. o meglio stessa succ. con indici shiftati di 1 $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ p.to (iii) + continuità di x^3

Quindi $\ell = \ell^3 \rightsquigarrow \ell^3 - \ell = 0, \ \ell(\ell^2 - 1) = 0$
quindi
$\ell = 0 \qquad \ell = 1 \qquad \ell = -1$

$\ell = 1$ e $\ell = -1$: $\downarrow$ incompatibili con la (i)

Quindi necessariamente $\ell = 0$.

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Il fatto che $x_n \geq 0$ è una banale induzione.
Il fatto che $x_n \leq \frac{1}{2}$ pure

[P.B. $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ☺ : Passo induttivo : ipotesi $x_n \leq \frac{1}{2}$
Tesi $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$$x_{n+1} = x_n^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2} \quad]$$

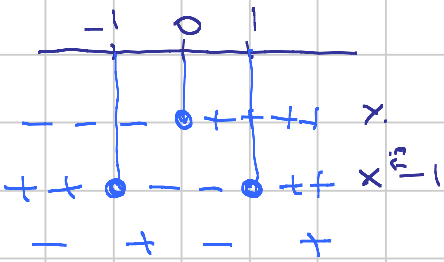
ho usato che
x^3 è deb. cresc.
quindi $x_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_n^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\boxed{\text{Primo metodo: ricorrenza + disequazione}}$

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $x_n^3 \leq x_n$, cioè

$$x_n^3 - x_n \leq 0 \qquad x_n(x_n^2 - 1) \leq 0$$

La soluz. della diseq. $x(x^2-1) \leq 0$ è $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$
quindi mi serve



$$x_n \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

per il p.to (i)
x_n sta qui

$\boxed{\text{Secondo metodo: induzione + applico } f}$

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vado per induz.

$\boxed{n=0}$ $x_1 \overset{?}{\leq} x_0$ sì perché $x_1 = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2} = x_0$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$. Applico $f(x) = x^3$.
Poiché $f(x)$ è deb. crescente ottengo

$$f(x_{n+1}) \le f(x_n)$$
$$\begin{array}{ccc} x_{n+1}^3 & \le & x_n^3 \\ \| & & \| \\ x_{n+2} & \le & x_{n+1} \end{array}$$
, cioè la tesi del passo induttivo.

— o — o —

Esempio 2

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

PIANO

(i) $x_n \ge 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \ge x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

Dim (i) Banale induzione (ma sto già usando la monotonia di $f(x) = x^3$)

Dim (ii) Ricorrenza + diseq. : $x_{n+1} \ge x_n \iff x_n^3 \ge x_n$

$x_n \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

per la (i) sta qui

Induzione + applico f Per induzione $x_1 \ge x_0$ sì $(8 \ge 2)$

P.I. Ipotesi $x_{n+1} \ge x_n \Rightarrow x_{n+1}^3 \ge x_n^3$, cioè $x_{n+2} \ge x_{n+1}$

DIRE PERCHÉ POSSO

Dim (iii) Segue da (ii) + teo. succ. monotone (la stima dal basso non serve a nulla)

Dim (iv) Per assurdo sia $\ell \in \mathbb{R}$. Ragionando come prima ottengo $\ell = \ell^3$, cioè $\ell \in \{0, 1, -1\}$, ma sono tutte incompatibili con (i). Quindi resta solo $\ell = +\infty$.

Esempio 3 $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6} \\ x_0 = 2017 \end{cases}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = 3$

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Passo al limite nella ricorrenza

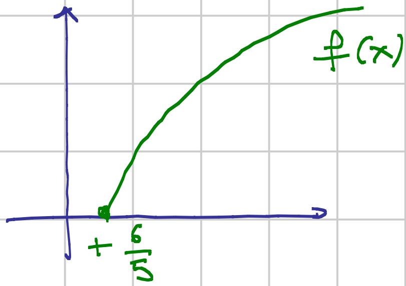
$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \sqrt{5x_n - 6} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{5\ell - 6} \end{array} \rightsquigarrow \ell^2 = 5\ell - 6, \quad \ell^2 - 5\ell + 6 = 0$$

$$\underbrace{\ell = 2}_{\text{incomp. con (i)}} \text{ e } \ell = 3$$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Apro una parentesi: come è fatta $f(x) = \sqrt{5x - 6}$

È monotona crescente.

Quindi (i) lo faccio per induzione



$\boxed{n = 0}$ $x_0 \geq 3$ ovvio $2017 \geq 3$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $x_n \geq 3$

applico $f(x)$ e ottengo grazie alla monotonia

$$x_{n+1} = f(x_n) \geq f(3) = 3,$$ cioè la tesi del passo induttivo

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Lo faccio per induzione + applico $f(x)$

$\boxed{n = 0}$ $x_1 \leq x_0$, cioè $\sqrt{5 \cdot 2017 - 6} \leq 2017$ ... abbondante

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Applico $f(x)$ (posso ...)

e ottengo $\underset{\substack{\| \\ x_{n+2}}}{f(x_{n+1})} \leq \underset{\substack{\| \\ x_{n+1}}}{f(x_n)}$

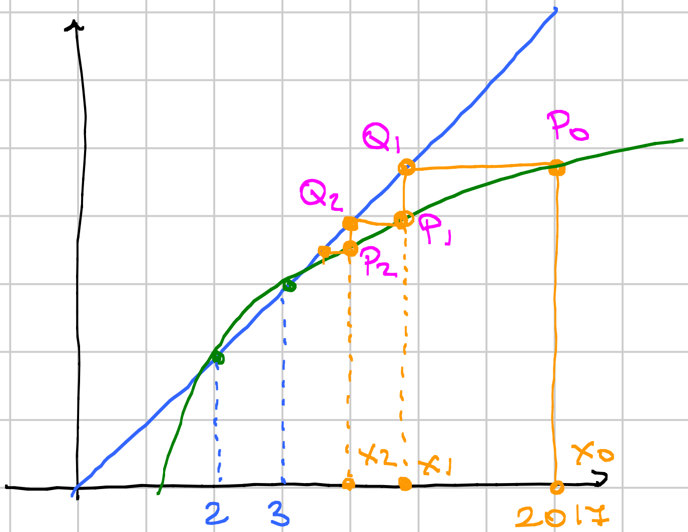
cioè la tesi del passo induttivo.

<u>Esercizio</u> Provare a fare il p.to (ii) con ricorrenza + diseq. (si tratta di risolvere $x_{n+1} \leq x_n$, cioè

$$\sqrt{5x+6} \leq x \text{).}$$

— o — o —

<u>Come ideare un piano</u>... ① Disegno $f(x)$ e disegno la bisettrice $y = x$



Risolvo $f(x) = x$ per avere le intersezioni (tanto serve in fase (iv)) e risolvo $f(x) \leq x$ (che volendo è utile in fase 2).

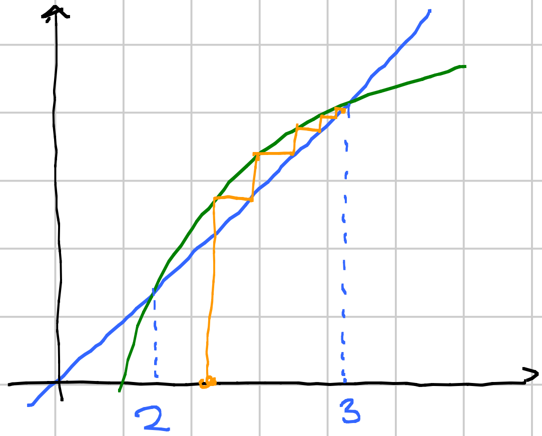
② Segno x_0 sull'asse x

③ Seguo lo slogan "verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice"

④ Le x che ottengo strada facendo sono $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$

Basta osservare che
$$P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$$
$$Q_1 = (x_1, x_1)$$
$$P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$$
$$Q_2 = (x_2, x_2) \quad \text{e così via.}$$

Esempio 4 $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6} \\ x_0 = \sqrt{5} \end{cases}$



$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $\sqrt{5} \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n$ "

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 3$

— o —