Basi ORTOGONALI e ORTONORMALI (risp. al prod. scalare standard)

Def. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice

- **ORTOGONALE** se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$
- **ORTONORMALE** se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

(cioè la base è ortogonale)

(cioè i vettori della base hanno tutti norma 1)

Esempio classico La base canonica

Proprietà fondamentale Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive come

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

dove

$$\boxed{c_i = \langle v, v_i \rangle}$$

Se la base è solo ortogonale allora

$$\boxed{c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}}$$

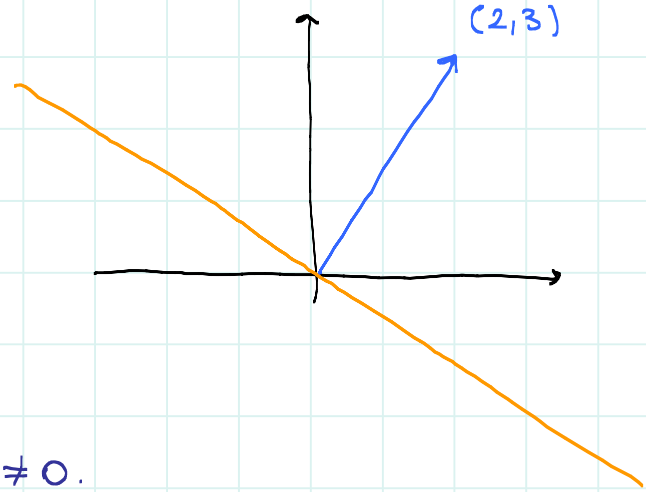
Dim Prendiamo $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$.

Ora facciamo il prod. scalare con un certo v_i:

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= c_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{=0} + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{=0} \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \end{aligned}$$

Da qui si ricava c_i. ☺

<u>Esempio 1</u> Trovare le basi ortogonali di $\mathbb{R}^2$ che contengano il vettore $(2,3)$



Un possibile esempio è

$v_1 = (2,3) \qquad v_2 = (-3,2)$

Un altro esempio

$v_1 = (2,3) \qquad v_2 = (3,-2)$

Tutti gli esempi sono del tipo

$v_1 = (2,3) \qquad v_2 = a(3,-2) \quad \text{con } a \neq 0.$

<u>Oss.</u> Ogni base ortogonale la posso ortonormalizzare semplicemente dividendo per la la norma

<u>Esempio 2</u> $\quad v_1 = (2,3) \qquad v_2 = (-3,2) \longrightarrow$ ORTOGONALE

$$\hat{v}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) \qquad \hat{v}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \longrightarrow \text{ORTONORMALE}$$

Ora $\|\hat{v}_1\|^2 = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle = \|\hat{v}_2\|^2 = 1.$

<u>Esempio 2 bis</u> Calcolare le componenti di $(-3,7)$ rispetto alla base $v_1 = (2,3) \quad v_2 = (-3,2)$

$\boxed{\text{Bovino}}$ $\quad (-3,7) = a(2,3) + b(-3,2) \rightsquigarrow$ risolvo

$\boxed{\text{Usando che è ortogonale}}$

$$a = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{\langle (-3,7),(2,3) \rangle}{13} = \frac{15}{13}$$

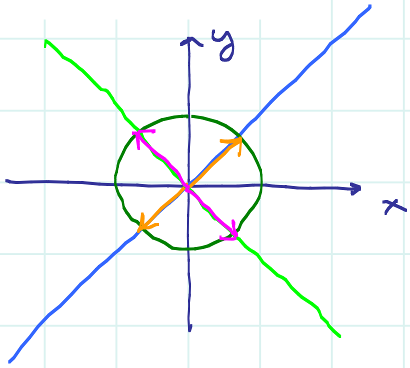
$$b = \frac{\langle (-3,7),(-3,2) \rangle}{13} = \frac{23}{13}$$

Verifica: $\frac{15}{13}(2,3) + \frac{23}{13}(-3,2) = \left(\frac{30}{13} - \frac{69}{13}, \frac{45}{13} + \frac{46}{13}\right) = (-3,7)$:)

5. Sia $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $v_2 \in V$.

6. Sia $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Determinare per quali valori dei parametri a e b esiste una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 = (3, a, b)$, $v_2 \in W$ e $v_3 \in W$.

(5) v_2 deve essere del tipo $a(1,1) = (a,a)$



Se voglio che abbia norma 1, deve essere

$1 = a^2 + a^2 = 2a^2 \rightsquigarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Per v_2 ho 2 possibilità

$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad$ $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

I possibili v_1 sono $\qquad v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

In conclusione le possibili basi sono 4

(6) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$

Vogliamo una base ortogonale con

$v_1 = (3, a, b) \qquad v_2 \in W \qquad v_3 \in W$

Proviamo a scrivere W come span

$W = \text{Span}\{(1,0,1), (1,1,3)\}$

↑ ↑ base di W, ma non è ortogonale.

Se la voglio ortogonale, posso prendere $(1,0,1)$ e poi cercare (a,b,c) tale che

$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{matrix} (a,b,c) \perp (1,0,1) \\ (a,b,c) \in W \end{matrix}$ $\qquad$ $\begin{matrix} c = -a \\ 2a + 2b = 0 \end{matrix}$

$a = 1, b = -1, c = -1 \rightsquigarrow (1,-1,-1)$

Quindi possiamo prendere $v_2 = (1,0,1)$ $v_3 = (1,-1,-1)$

Ora devo trovare un v_1 del tipo $(3,a,b)$ che sia $\perp$ a v_2 e v_3.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Bovino $\begin{cases} 3+b=0 & \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\ 3-a-b=0 & \langle v_1, v_3 \rangle = 0 \end{cases}$ $\quad b=-3$, $a=6$

Quindi $v_1 = (3,6,-3)$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,2,-1)$ questo vettore è $\perp$ a $(1,0,1)$ e $(1,-1,-1)$

Tutti i suoi multipli hanno stessa proprietà, quindi prendiamo $(3,6,-3)$

<u>Solito esempio</u> Trovare le componenti di $\underset{v}{(5,1,4)}$ rispetto alla base $\underset{v_1}{(3,6,-3)}$, $\underset{v_2}{(1,0,1)}$, $\underset{v_3}{(1,-1,-1)}$.

Facciamo solo la seconda componente

$$b = \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = \frac{9}{2}$$

10. Determinare una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che contiene il vettore $(1,2,2,1)$ e tale che $(1,1,0,-1) \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Fare in maniera che i vettori coinvolti abbiano tutte le componenti intere.

Possiamo iniziare prendendo $v_1 = (1,2,2,1)$

Cerchiamo v_2 del tipo

$$(1,1,0,-1) + a\,(1,2,2,1) = (1+a, 1+2a, 2a, -1+a)$$

Cosa deve succedere? $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1+a+2+4a+4a-1+a = 2+10a = 0 \rightsquigarrow a = -\frac{1}{5}$$

Quindi posso prendere $v_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

Volendolo a coord. intere $\quad v_2 = (4,3,-2,-6)$

Verifica: $\langle v_1, v_2 \rangle = 4+6-4-6 = 0$:)

È vero che $(1,1,0,-1) \in \text{Span}((1,2,2,1),(4,3,-2,-6))$?

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Provare a risolvere

$$(1,1,0,-1) = a(1,2,2,1) + b(4,3,-2,-6)$$

Se ce la faccio, allora ok

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Costruisco una matrice in cui li metto come righe o colonne e spero che abbia rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tutti i minori 3×3 devono fare 0!

$\text{Det} = -4+8-6+2 = 0 \leftarrow$ Col_1 è comb. lin di Col_2 e Col_3

$\text{Det} = 4-12+2+6 = 0 \leftarrow$ Col_4 è " " Col_2 e Col_3

Bovinamente troveremmo v_3 e v_4.

— o — o —