Eq. Diff. Lineari del primo ordine

$$\boxed{u'(t) + a(t)u(t) = b(t)}$$

con $a(t)$ e $b(t)$ due funzioni date, per esempio continue, in un certo intervallo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Soluzione generale

$$u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante arbitraria}}}{c}\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \underbrace{\int e^{A(s)} b(s)\, ds}_{\text{primitiva qualunque di } e^{A(s)} b(s)}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$

Conseguenza: sappiamo risolvere con formula esplicita se sappiamo fare le primitive di $a(t)$ e di $e^{A(t)} b(t)$

Se abbiamo il dato iniziale $u(t_0) = u_0$, allora la soluzione generale diventa (calcolando c)

$$u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vecchio}}}{u_0}\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds}_{\text{integrale tra } t_0 \text{ e } t}$$

dove

$$A(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva esplicita}}}{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

Programma: → verificare che la formula funziona
→ capire come può venire in mente
→ applicare in esempi

Verifica che funziona

$$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds$$

Sostituisco $t = t_0$

$$u(t_0) = u_0 \cdot e^0 + e^0 \cdot 0 = u_0$$ cond. iniziale ok

Verifico l'equazione:

$$u'(t) = u_0 e^{-A(t)} (-a(t)) + e^{-A(t)} (-a(t)) \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds + \cancel{e^{-A(t)}} \cdot \cancel{e^{A(t)}}\, b(t)$$

$$= -a(t) \left\{ u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds \right\} + b(t)$$

$$= -a(t)\, u(t) + b(t)$$

Come può venire in mente la formula?

1° modo: via FATTORE INTEGRANTE

Parto dall'equazione $u'(t) + a(t)\, u(t) = b(t)$

Prendo una qualunque primitiva $A(t)$ di $a(t)$ e moltiplico tutto per $\boxed{e^{A(t)}}$ ← fattore integrante

$$\boxed{u'(t)\, e^{A(t)} + u(t)\cdot a(t)\, e^{A(t)}} = b(t)\, e^{A(t)}$$

questo è una derivata

$$\left[u(t)\, e^{A(t)} \right]' = b(t)\, e^{A(t)}$$

Ma allora $\quad u(t)\, e^{A(t)} = \int b(s)\, e^{A(s)}\, ds + c$

costante arbitraria

Moltiplicando per $e^{-A(t)}$ trovo

$$u(t) = e^{-A(t)} \int b(s)\, e^{A(s)}\, ds + c\, e^{-A(t)}$$

:)

— ∘ — ∘ —

2° modo Essendo l'equazione lineare, la soluzione generale si scriverà nella forma

parametro

$$u(t) = \bar{u}(t) + c\, \underline{v(t)}$$

soluzione qualunque dell' eq. non omogenea

sol. non nulla dell' eq. omogenea associata

Trovo $v(t)$ risolvendo $\quad v'(t) + a(t)\, v(t) = 0$, ma questa è

$$v'(t) = -a(t)\, v(t)$$

cioè a variabili separabili

$$\frac{dv}{dt} = -a(t)\, v \;\rightsquigarrow\; \frac{dv}{v} = -a(t)\, dt \;\rightsquigarrow\; \log|v| = -A(t) + c$$

$$\rightsquigarrow\; |v(t)| = e^{-A(t)+c} = e^{c}\cdot e^{-A(t)}$$

$$\rightsquigarrow\; v(t) = \boxed{\pm e^{c}}\, e^{-A(t)}$$

nuova costante

Per calcolare una soluzione qualunque della non omogenea, uso il metodo di variazione delle costanti, cioè la cerco del tipo

$$\bar{u}(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$$

quello che prima era una costante, ora è una funzione

Faccio il conto

$$\bar{u}'(t) = c'(t)\, e^{-A(t)} + c(t)\, e^{-A(t)}(-a(t))$$

Sostituisco nell' eq. $\bar{u}' + a(t)\,\bar{u} = b(t)$:

$$c'(t)\, e^{-A(t)} - \cancel{a(t)\, c(t)\, e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)\, c(t)\, e^{-A(t)}} = b(t)$$

$$\rightsquigarrow \quad c'(t) = e^{A(t)}\, b(t) \quad \rightsquigarrow \quad c(t) = \int e^{A(s)}\, b(s)\, ds$$

da cui la formula iniziale.

— o — o —

Esempio 1 $\quad u' + t u = t^3 \qquad a(t) = t \qquad b(t) = t^3$

Fattore integrante: $A(t) = \frac{1}{2}t^2$. Quindi moltiplico per $\boxed{e^{+\frac{1}{2}t^2}}$

$$u' e^{+\frac{1}{2}t^2} + t u e^{+\frac{1}{2}t^2} = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\left[u e^{\frac{1}{2}t^2}\right]' = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} \qquad \text{quindi}$$

$$u e^{\frac{1}{2}t^2} = \int t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}\, dt = \int \underbrace{t^2}_{G} \cdot \underbrace{t e^{\frac{1}{2}t^2}}_{f}\, dt$$

$$= \underset{G}{t^2} \cdot \underset{F}{e^{\frac{1}{2}t^2}} - \int \underset{g}{2t}\, \underset{F}{e^{\frac{1}{2}t^2}}\, dt = t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2 e^{\frac{1}{2}t^2} + c$$

Ricavando otteniamo

$$\boxed{u(t) = t^2 - 2 + c\,e^{-\frac{1}{2}t^2}}$$ ← soluzione generale

$\boxed{\text{Metodo alternativo}}$ Sappiamo che la soluzione sarà

$$u(t) = \bar{u}(t) + c\,v(t)$$

Ora $v(t)$ lo trovo risolvendo l'omogenea: $v' + tv = 0$

$$v' = -tv \rightsquigarrow \frac{dv}{dt} = -tv \rightsquigarrow \frac{dv}{v} = -t\,dt \rightsquigarrow \log|v| = -\frac{1}{2}t^2$$

$$\rightsquigarrow v(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Per trovare $\bar{u}(t)$ vado per tentativi $\quad u' + tu = t^3$

la cerco del tipo $\bar{u}(t) = at^2 + bt + c$

$$\underbrace{2at + b}_{\bar{u}'} + \underbrace{at^3 + bt^2 + ct}_{t\bar{u}} = t^3$$

$a = 1$	coeff t^3	$a = 1$	
$b = 0$	coeff t^2	$b = 0$	$\bar{u}(t) = t^2 - 2$
$2a + c = 0$	coeff t	$c = -2$	
$b = 0$	termine noto		

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\quad u' + \frac{2}{t}u = \sin t \qquad a(t) = +\frac{2}{t} \qquad b(t) = \sin t$

$A(t) = +2\log t \qquad$ (mettiamo di essere per $t > 0$)

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{2\log t} = t^2$

Quando moltiplico :

$$t^2 u' + 2t\, u = t^2 \sin t$$

$$[t^2 u]' = t^2 \sin t$$

$$t^2 u(t) = \underbrace{\int t^2 \sin t \, dt}_{} + c$$

in 2 passaggi per parti si fa

$$\boxed{u(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int s^2 \sin s \, ds}$$

— o — o —