4 Applicazione lineare

Definizione 4.0.1 (Applicazione lineare)**.** *Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Un'applicazione lineare (o mappa lineare) è una mappa $\varphi : V_1 \to V_2$ tale che:*

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V_1$.
2. $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v)$, $\forall v \in V_1$.

Esempio 4.0.1. Alcuni esempi di applicazioni lineari:

- $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$, $\varphi\Big(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\Big) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ con $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ fisso.
- $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \\ \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_n a_n \end{bmatrix}$ con $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ e $\mu_1, \cdots, \mu_n$ fissi.
- $V_1 = \mathbb{R}^n, V_2 = \mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$
- $V_1 = \mathbb{R}[x]_{\leq d}, V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$ quindi è come scrivere $\varphi(f) = f'$.
  E questo va bene perché sono rispettate le proprietà (a) e (b) della definizione sopra.
- $V_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f$ continua $, \int_0^1 f < \infty\}$, $V_2 = \mathbb{R}$. Vediamo che $\varphi(f) = \int_0^1 f$.
  Infatti, anche in questo caso, le proprietà (a) e (b) della definizione sono rispettate.

Sia $\varphi : V_1 \to V_2$ un'applicazione lineare e sia $e_1, \cdots, e_n$ una base di V_1 allora sia $v \in V_1$, $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$. $\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 e_1) + \varphi(\lambda_2 e_2) + \cdots + \varphi(\lambda_n e_n) = \lambda_1\varphi(e_1) + \lambda_2\varphi(e_2) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$. In conclusione, conoscere $\varphi(v) \iff$ conoscere $\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)$ e lineare coordinate di v rispetto $e_1, \cdots, e_n$. Viceversa se faccio $\varphi(e_1) = v_1, \varphi(e_2) = v_2, \cdots, \varphi(e_n) = v_n$ allora $\exists!$ applicazione lineare $\varphi v_1 - \varphi v_2$ con queste proprietà.

Esempio 4.0.2. $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^2$ e le basi standard sono $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Esiste una sola $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big) = \Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)$, $\varphi\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\Big) = \Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\Big)$. Infatti tale φ è dato da $\varphi\Big(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\Big) = \Big(\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}\Big)$

4.1 Nucleo e immagine

Definizione 4.1.1. *Sia $\varphi : V_1 \to V_2$ un'applicazione lineare possiamo definire di φ:*

- ***Il nucleo****: $Ker(\varphi) = \{v \in V_1 \ : \ \varphi(v) = 0\} \subset V_1$ sottospazio.*
- ***L'immagine****: $Im(\varphi) = \{v_2 \in V_2 \ : \ \exists v_1 \in V_1 \ : \ \varphi(v_1) = v_2\} \subset V_2$ sottospazio.*

Esempio 4.1.1. Alcuni esempi di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

1. Per $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
   $Ker(\varphi) = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ $\quad Im(\varphi) = \{\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ x_2 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   $Ker(\varphi) = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ $\quad Im(\varphi) = \{\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \ : \ x_2 \in \mathbb{R}\} = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

3. $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$, $Ker(\varphi) = \{$ polinomi costanti $\} = span(1) \qquad Im(\varphi) = \mathbb{R}[x]_{d-1}$

Teorema 4.1.1. Sia $dim(V_1) < \infty$ e sia $\varphi : V_1 \to V_2$ un'applicazione lineare, allora vale che:

$$dim\, Ker(\varphi) + dim\, Im(\varphi) = dim\, V_1$$

Dimostrazione 4.1.1. Per dimostrare il teorema sopra partiamo prendendo $v_1, \cdots, v_r$ una base di $Ker(\varphi)$ (quindi $dim\, Ker(\varphi) = r$), e $w_1, \cdots, w_s$ una base di $Im(\varphi)$ (quindi $dim\, Im(\varphi) = s$).

Siano poi $\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_s} \in V_1$ tali che $\varphi(\overline{v_1}) = w_1, \cdots, \varphi(\overline{v_s}) = w_s$. Noi dobbiamo dimostrare che $v_1, \cdots, v_r, \overline{v_1}, \cdots, \overline{v_2}$ è una base di V_1 (in questo modo dimostriamo che $dim\, V_1 = r + s$ ed il teorema è verificato).

Verifichiamo l'indipendenza lineare. Supponiamo che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1}\overline{v_1} + \cdots + \lambda_{r+s}\overline{v_s} = 0$. Applichiamo φ: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \varphi(\lambda_{r+1}\overline{v_1} + \cdots + \lambda_{r+2}\overline{v_s}) = 0$ $(\varphi(v_1) = 0\ \forall : i)$. quindi $\lambda_{r+1}\varphi(\overline{v_1}) + \cdots + \lambda_{r+2}\varphi(\overline{v_s}) = 0$ che è come scrivere $\lambda_{r+1}w_1 + \cdots + \lambda_{r+s}w_s = 0 \Longrightarrow \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{r+s} = 0$ perché $w_1, \cdots, w_s$ base.

Quindi $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ ed allora $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ perché $v_1, \cdots, v_r$ è una base di $Ker(\varphi)$.
In fine $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{r+s} = 0$.
$span(v_1, \cdots, v_r, \overline{v_1}, \cdots, \overline{v_s}) = v_1$ tale che sia $v_1 V_1$. $\varphi(v) \in Im(\varphi) \Longrightarrow \exists\, \overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_s}$ tale che $\varphi(v) = \overline{\lambda_1}w_1 + \cdots + \overline{\lambda_s}w_s$. Ma allora $\varphi(v - \overline{\lambda_1}\overline{v_1} - \cdots - \overline{\lambda_s}\overline{v_s}) = \varphi(v) - \overline{\lambda_1}\varphi(\overline{v_1}) - \cdots - \overline{\lambda_s}\varphi(\overline{v_s}) = 0$. Quindi $v - \overline{\lambda_1}\overline{v_1} - \cdots - \overline{\lambda_s}\overline{v_s} \in Ker(\varphi)$, ma allora $v - \overline{\lambda_1}\overline{v_1} - \cdots - \overline{\lambda_s}\overline{v_s} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r\ \forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ perché $v_1, \cdots, v_r$ base di $Ker(\varphi)$. In somma $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \overline{\lambda_1}\overline{v_1} + \cdots + \overline{\lambda_s}\overline{v_s}$

Osservazione 4.1.1. Supponiamo che $v_1, \ldots, v_n$ sia una base di V_1. Allora φ è unicamente determinata dai valori $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$.
Infatti $\forall v \in V_1$ si scrive in modo unico come $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Ma allora

$$\varphi(v) = (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \varphi(\lambda_1 v_1) + \varphi(\lambda_n v_n) = \lambda_1\varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(v_n)$$

Viceversa, dati vettori $w_1, \ldots, w_n \in V_2$, $\exists \varphi : V_1 \to V_2$ lineare tale che $\varphi(v_1) = w_1, \ldots, \varphi(v_n) = w_n$ perché $\varphi(v)$ deve essere $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$.

Esempio 4.1.2. Troviamo $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \text{ e } \varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Un elemento generico di $\mathbf{R}^2$ è:

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Allora abbiamo che:

Esempio 4.1.3. Troviamo $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ e } \varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Usiamo l'elemento generico di $\mathbf{R}^2$ dell'esempio precedente e abbiamo che:

Osservazione 4.1.2. Sappiamo che $dim(V_1) = dim(V_2) = n$. Sia $a_1, \ldots, a_n$ base di V_1 e $a'_1, \ldots, a'_n$ base di V_2.
Sappiamo che $\exists \varphi : V_1 \to V_2$ tale che $\varphi(a_1) = a'_1, \ldots, \varphi(a_n) = a'_n$ e $\exists \psi : V_2 \to V_1$ tale che $\varphi(a'_1) = a_1, \ldots, \varphi(a'_n) = a_n$

Esempio 4.1.4. Dati $V_1 = M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ e $V_2 = \mathbf{R}^4$ e le loro basi:

$$\text{Base di } V_1 : \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \text{ Base di } V_2 : \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi che:

$$\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}\text{ Mentre l'inversa è: }\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

Definizione 4.1.2. *Se $dim(V)=n$, esiste un **isomorfismo** $\varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^n$. Se $a_1,\ldots,a_n$ è una base di V, poniamo*

$$\varphi(a_1)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\varphi(a_2)=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ldots,\varphi(a_n)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

Otteniamo quindi $\forall v\in V_1$:

$$v=\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_na_n \rightsquigarrow \varphi(v)=\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{bmatrix}\ \textit{Inversa: } \psi:\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\lambda_n\end{bmatrix}\mapsto\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_na_n.$$

Esempio 4.1.5. Sia $\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Conoscendo i valori di φ sulla base standard, come si calcola $\varphi(v)$ per $v\in\mathbf{R}^n$ generale?
Ipotizziamo che $n=m=2$. Conosciamo

$$\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}$$

Se abbiamo un vettore generale

$$v=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^2$$

allora

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=b_1\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Bigg)+b_2\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Bigg)=b1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}+b2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_1+a_{12}b_2\\a_{21}b_1+a_{22}b_2\end{bmatrix}$$

Definizione 4.1.3 (Prodotto di una matrice e un vettore colonna)**.** *Sia $A\in M_{m\times m}(\mathbf{R})$, $v\in\mathbb{R}^n$, il loro prodotto è*

$$\begin{bmatrix}a_{11},\ldots,a_{1n}\\\vdots\\a_{m1},\ldots,a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_1+a_{12}b_2+\ldots a_{1n}b_n\\a_{21}b_1+a_{22}b_2+\ldots a_{2n}b_n\\\vdots\\a_{m1}b_1+a_{m2}b_2+\ldots a_{mn}b_n\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^m$$

Esempio 4.1.6. Dati $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbf{R}$, $\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Bigg)=x+2y+3z$. Troviamo $\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\Bigg)=1+2\cdot(-1)+3\cdot1$.

Ma anche:

$$\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Bigg)=1,\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\Bigg)=2,\varphi\Bigg(\begin{bmatrix}10\\0\\1\end{bmatrix}\Bigg)=3$$

Matrice di φ: $A\in M_{1\times3}(\mathbf{R})$, $A=[1,2,3]$

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=[1,2,3]\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot1=2$$

Esempio 4.1.7. Dati $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
Matrice di φ:

Definizione 4.1.4. *Sia $\varphi : V \to W$ un'applicazione lineare dove $dim(V) = n$ e $dim(W) = m$. Sia $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ base di V e $B' = \{a'_1, \ldots, a'_m\}$ base di W. Scriviamo*

$$\varphi(a_1) = a_{11}a'_1 + a_{21}a'_2 + \ldots + a_{m1}a'_m \varphi(a_2) = a_{12}a'_1 + a_{22}a'_2 + \ldots + a_{m2}a'_m \vdots \varphi(a_n) = a_{1n}a'_1 + a_{2n}a'_2 + \ldots + a_{mn}a'_m$$

La matrice di φ rispetto alle basi B, B' è:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(a_1) & \vdots & \varphi(a_2) & \vdots & \ldots & \vdots & \varphi(a_n) \end{bmatrix}$$

Teorema 4.1.2. Se $v = b_1a_1 + \ldots + b_na_n$ è un vettore di V. Le coordinate di $\varphi(v)$ rispetto alla base B' sono date dal vettore

$$A : \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^m$$

Esempio 4.1.8. Dati $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x + 2y$.
La matrice di φ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$ in partenza è:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 A = [1, 2] \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

Se considero la base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ in partenza:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3$$