Es 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x - x^2}{(\log(1+x))^3} = \frac{1-1-0-0}{0^3} = \frac{0}{0}$$

F.I.

Usiamo Taylor: usiamo le approssimazioni di grado 3.

($\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ $\Rightarrow (\log(1+x))^3 \sim x^3 \dots$

si può approssimare con

quindi facciamo in modo di avere un $o(x^3)$ sopra)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\Rightarrow (\log(1+x))^3 = (x + o(x))^3 = x^3 + 3x^2 o(x) + 3x\, o(x)^2 + o(x)^3$$

$$= x^3 + 3o(x^3) + 3o(x^3) + o(x^3)$$

$$= x^3 + o(x^3)$$

Sostituendo nel limite trovo

$$\frac{e^x - \cos x - \sin x - x^2}{(\log(1+x))^3} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6}\right) - \cancel{x^2} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{2x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\frac{1}{3}+0}{1+0} = \frac{1}{3}$$

$\frac{o(x^3)}{x^3} \to 0$

Es 2: $f: (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$f(x) = \frac{e^x+e^{-x}-2}{x}$$

ha degli asintoti ?

No. Vediamolo:

Asintoto verticale in 0?

(oss.: la $f(x)$ e' dispari, $f(-x) = \frac{e^{-x}+e^{+x}-2}{-x} =$

$$= -\frac{e^x+e^{-x}-2}{x} = -f(x)$$

quindi basta vedere cosa succede per $x>0$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x} = \frac{1+1-2}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad t\to 0$$

per $t=x$ e $t=-x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Sostituiamo:
$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x} = \frac{\left(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \cancel{-2}}{x}$$

$$= \frac{x^2 + o(x^2)}{x} = x + o(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 .$$

Quindi non c'è un asintoto verticale.

(bastava sviluppare anche al 1° ordine...)

Asintoto orizzontale o obliquo?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x} = \frac{+\infty + 0 - 2}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to +\infty} \left(1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{e^x}}_{\to 0}\right) = +\infty \cdot (1 + 0 + 0) = +\infty$$

gerarchia degli ∞.

$\rightsquigarrow$ No asintoto orizz.

Obliquo?
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}\left(1 + e^{-2x} - \frac{2}{e^x}\right)$$

$$\overset{\downarrow}{+\infty} \qquad \overset{\downarrow}{0} \qquad \overset{\downarrow}{0}$$

$$= +\infty \cdot (1+0+0) = +\infty.$$

$\Rightarrow$ No asintoto obliquo.

Es 3: pol di Taylor di grado 3 centrato in $x_0 = 0$

di $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

$$f(x) = (1+x)^{-1}$$

Usando

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3)$$

con $\alpha = -1$ viene

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2} x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$= \boxed{1 - x + x^2 - x^3} + o(x^3)$$

polinomio di Taylor con $n=3$.

Es 4: $$\lim_{x \to 0^+} (x - \sin x)^{\frac{1}{\log x}}$$

$$(x - \sin x)^{\frac{1}{\log x}} = e^{\log (x - \sin x)^{\frac{1}{\log x}}} =$$

$$= e^{\frac{1}{\log x} \cdot \log(x-\sin x)}$$

posso fare il limite dell'esponente (perché e^x è continua)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x-\sin x)}{\log x} = \frac{\log(0-0)}{\log 0^+} = \frac{-\infty}{-\infty} \quad F.I.$$

Potrei usare Taylor con $\sin x$. Si può anche usare de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x-\sin x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x-\sin x} \cdot (1-\cos x)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\cos x)}{(x-\sin x)} = \frac{0(1-0)}{0-0} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

$$(\text{Hôpital}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1}\cdot(1-\cos x) + x(\sin x)}{1-\cos x} = \frac{1-1+0\cdot 0}{1-1} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + \sin x + x\cos x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x + x\cos x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} + \frac{x\cos x}{\sin x} \right) = 2 + 1 \cdot \cos 0 =$$

$$= 2 + 1 \cdot 1 = 3.$$

$$\frac{x}{\sin x} \to 1$$

(limite notevole)

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \right)$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1$$

Es 5: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x + \sin x)^3$

È iniettiva e/o suriettiva?

$f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Per la suriettività, basta calcolare i limiti agli estremi del dominio.

La $f(x)$ è dispari: $f(-x) = (2(-x) + \sin(-x))^3 =$

$$= (-(2x + \sin x))^3 =$$

$$= (-1)^3 (2x + \sin x)^3 =$$

$$= -(2x + \sin x)^3 = -f(x).$$

Basta calcolare $\lim_{x\to +\infty} (2x + \underbrace{\sin x}_{\text{limitata}})^3 = (+\infty)^3 = +\infty.$

$$2x \to +\infty$$

Segue visto che $f(x)$ e' dispari, che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
(e dal teo dei valori intermedi)
e da questo segue che $f(x)$ e' suriettiva.

Per l'iniettività conviene studiare la crescenza (o meno) della funzione.

Notiamo che $\underset{\substack{\parallel \\ (2x+\sin x)^3}}{f(x)}$ e' crescente se e solo se lo e' $2x+\sin x$ (perché $g(x) = x^3$ e' strettamente crescente)

Se $h(x) = 2x + \sin x$

$h'(x) = 2 + \cos x$

visto che $-1 \leq \cos x \leq 1$, si ha che

$$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{2-1} \leq 2 + \cos x \leq \underset{\substack{\parallel \\ 3}}{2+1}$$, quindi e' sempre > 0.

Segue che $h'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x)$ e' strettam. crescente su tutto $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (2x+\sin x)^3$ e' strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Quindi è anche iniettiva.

Essendo suriettiva e iniettiva, è biunivoca.

ES 6 : $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

Ha asintoti, e di che tipo?

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^2}_{0} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{limitata tra } -1 \text{ e } 1} = 0 \qquad \text{(visto in precedenza)}$$

Quindi non c'è asintoto verticale in 0
(e nemmeno in altri punti, visto che $f(x)$ è continua nel suo dominio).

Orizzontale?

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

No orizzontale. Obliquo?

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}} \sin\frac{1}{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(x \sin\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$\sin t = t + o(t)$$
$$t \to 0$$

$t = \frac{1}{x}$ ($x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ quindi ok)

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad = \lim_{x\to+\infty} x\left(\cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\cancel{1} + x\, o\left(\frac{1}{x}\right) \cancel{-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot o(1) = +\infty \cdot 0 \;??$$

aumento la precisione

$$\sin(t) = t + o(t^2)$$

$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e usando questo sviluppo
$x \to +\infty$ viene $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\cancel{1} + x\, o\left(\frac{1}{x^2}\right) \cancel{-1}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{=} = \lim_{x\to+\infty} \frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

Quindi $q = 0$, e c'è un asintoto obliquo $y = mx + q$ $o(1)$ (per def. di o)

$$= 1 \cdot x + 0 = x.$$

Es 7: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per } x \le 1 \\ 3 - 2\alpha x^2 & x > 1 \end{cases}$$

Per quali α è derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

L'unico potenziale problema è per $x = 1$.

Tanto vale imporre che $f(x)$ sia continua in 1 (perché derivabile $\Rightarrow$ continua).

$$f(1) = 1 + 1 = 2 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - 2\alpha x^2) = 3 - 2\alpha \cdot 1^2 = 3 - 2\alpha$$

Quindi f è continua se e solo se $\underbrace{3 - 2\alpha}_{\lim_{x \to 1^+} f(x)} = \underbrace{2}_{f(1)}$

$$2\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

L'unica possibilità è che $\alpha = \frac{1}{2}$.

Devo vedere se per $\alpha = \frac{1}{2}$ $f(x)$ è derivabile per $x = 1$

$$\alpha = \frac{1}{2} \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 3 - x^2 & x > 1 \end{cases}$$

Teorema visto

$$f'_-(1) = 1 \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} -2x$$

$x > 1$

$$(x+1)' = 1 \qquad (3-x^2)' = -2x \qquad = -2$$

Visto che $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$ sono diversi, la $f(x)$ per $\alpha = \frac{1}{2}$ non è derivabile in $x = 1$.

Quindi per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$ succede che $f(x)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Es 8: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Si ha che $f'_-(1) = 1$.

Infatti: per un teo visto a lezione, basta fare $\lim_{x \to 1^-} f'(x)$ e per $x \leq 1$ succede che $f'(x) = x' = 1$

Quindi $f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1.$

(senza usare il teorema, si può calcolare il limite del rapporto incrementale ...).

(se ho $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x^3+1 & 0 < x \leq 1 \\ 2x^7 & 1 < x \end{cases}$

$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$

etc.

$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$)

Es. 9

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$

$f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$= \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right).$

$g(t) = t \cdot \log(t)$

$h(x) = 1+\frac{1}{x}$

$f(x) = g\left(1+\dfrac{1}{x}\right).$

$g'(t) = \log(t) + t \cdot \dfrac{1}{t}$

$f'(x) = g'\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(1+\dfrac{1}{x}\right)'$

$= \underbrace{\left(\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+1\right)}_{>0} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$$= \log(t) + 1$$

$$1 + \frac{1}{x} > 1$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \log(1) = 0$$

Si ha che $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ e' strettamente decrescente su tutto il dominio.

Segue che non ha punti di minimo locale.

Es 10 :

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x^2+1}} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

E' strettamente crescente :

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x^2+1}} + x \cdot e^{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)'$$

$$= e^{\frac{1}{x^2+1}} + x e^{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \left(-\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x^2+1}} \left(1 + x \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x^2+1}} \left(1 - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x^2+1}}\left(\frac{(x^2+1)^2-2x^2}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2}\left(x^4+1+\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}\right) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Segue che $f(x)$ e' strettam. crescente su $\mathbb{R}$.