ANALISI 1 - LEZIONE 22

Note Title 04/05/2017

SIMBOLI DI LANDAU (Linguaggio degli infinitesimi)

o piccolo | ∼ equiv. asintotica | O grande

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (p.to in cui fare i limiti). Supponiamo per semplicità che $x_0 \in \mathbb{R}$.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite almeno in un intorno di x_0 (eventualmente $\setminus \{x_0\}$)

Proviamo a scrivere $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$

- Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0}$
- Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se $\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1}$
- Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\omega(x)$ è limitata in un intorno di x_0, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ |\omega(x)| \leq M \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

o equivalentemente $\boxed{\limsup_{x \to x_0} |\omega(x)| \in \mathbb{R}}$ $\quad \underbrace{\limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|}$

Quando si può fare

Esempio 1

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$

$\sin x = O(x)$ per $x \to 0$

$\sin x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$\sin x^2 = O(x^2)$ per $x \to 0$

entrambe vere, ma quella sotto dà più informazioni

Brutalmente $f(x) = o(x^{20})$ ⇝ non ci sono potenze con esponente ≤ 20

$f(x) = O(x^{21})$ ⇝ non ci sono potenze con esponente < 21

Esempio 2

$\arctan(x^2) = o(x)$		per $x \to 0$	SI
$\arctan(x^2) = O(x)$		per $x \to 0$	SI
$\arctan(x^2) = o(x^2)$		per $x \to 0$	NO
$\arctan(x^2) = O(x^2)$		per $x \to 0$	SI

Fatto generale: Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ L'ipotesi dice che $f(x) = g(x)\,\omega(x)$ con $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$

Ma allora $\limsup_{x \to x_0} |\omega(x)| = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vale O grande.

Esempio 3 $f(x) = O(x^{2017})$ per $x \to 0$

Allora $f(x) = o(x^\alpha)$ per ogni $\alpha < 2017$ (per $x \to 0$)

Dim. In questo caso posso dividere

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x^{2017}}}}_{\text{limitato}} \underbrace{\boxed{\frac{x^{2017}}{x^\alpha}}}_{\to 0 \text{ se } \alpha < 2017} \longrightarrow 0$$

Esempio 4 $f(x) = x^8 \sin\left(\frac{1}{x^6}\right)$

$f(x) = O(x^2)$ SI $\qquad f(x) = O(x^8)$ SI $\qquad f(x) = o(x^\alpha)\ \forall \alpha < 8$

$\omega(x) = \sin\left(\frac{1}{x^6}\right)$ è limitato pure ovunque

Esempio 5 $\quad \dfrac{5n^3+7n+2}{2n+13} = a_n \qquad a_n = O(n^2)$

$$a_n \sim \frac{5}{2} n^2$$

$a_n = O(n^3)$ SI

$a_n = o(n^3)$ SI (basta dividere e fare il limite)

Esempio 6 $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(e^t)\, dt$

Per $x \to +\infty$ vale $\quad f(x) = O(x)$ e anche $f(x) \sim \frac{\pi}{2} x$

$\boxed{\text{Dim}}$ Per fare l'equivalenza asintotica devo fare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp} \\ (\text{denom} \to +\infty \\ \text{crescente})}}{=} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x) = \frac{\pi}{2}$$

Questo dimostra anche che $f(x) = O(x)$ per $x \to +\infty$, ma potevo più sempl. osservare che

$$0 \le f(x) = \int_0^x \arctan(\ldots)\, dt \le \int_0^x \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{2} x$$

e da questo gratis ottengo $\quad 0 \le \underbrace{\dfrac{f(x)}{x}}_{\omega(x)} \le \dfrac{\pi}{2}$

Per lo stesso motivo $\quad f(x) = O(x) \quad$ per $x \to 0$

e ancora meglio

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} x \quad \text{per } x \to 0$$

Stesso Hôp e viene $\quad \arctan(e^0) = \frac{\pi}{4}$

Esempio 7 Se $f(x) = O(x)$ per $x \to +\infty$, allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Dim. $$\frac{f(x)}{x^2} = \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x}}}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0}$$

Esempio 8 Se $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$
$g(x) = O(h(x))$ per $x \to x_0$

Allora $f(x) = O(h(x))$ per $x \to x_0$

Dim. $f(x) = g(x) \underbrace{\omega_1(x)}_{\text{limit.}}$ $\qquad g(x) = h(x) \underbrace{\omega_2(x)}_{\text{limit.}}$

$$f(x) = h(x) \underbrace{\omega_2(x)\, \omega_1(x)}_{\text{limit.}}$$

Oss. Basta che nell'ipotesi una delle due sia o piccolo, e nella tesi si ha o piccolo.

Esempio 9 $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ $\overset{\text{"SI"}}{\Rightarrow}$ $g(x) \sim f(x)$ per $x \to x_0$

$f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$ $\overset{\text{NO}}{\not\Rightarrow}$ $g(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$

$x^2 = O(x)$ per $x \to 0$, ma $x \neq O(x^2)$ per $x \to 0$

Per l'equiv. asintotica, se posso dividere è ok

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x)}{f(x)} \to 1.$$

Esempio 10 $\quad a_n = |\{x \in [0,n] : \sin x = 0\}|$

numero di elementi

$a_n = O(n)$ o più precisamente $a_n \sim \frac{n}{\pi}$

Esempio 11 $\quad a_n = |\{x \in [0,n] : \sin(x^2) = 0\}|$

Le soluzioni sono $x^2 = k\pi$, quindi $x = \sqrt{k}\sqrt{\pi}$ mi serve

$0 \le x \le n$, cioè $0 \le \sqrt{k}\sqrt{\pi} \le n$, cioè $0 \le k\pi \le n^2$

$0 \le k \le \frac{n^2}{\pi}$

Quindi k può andare da 0 a $\underbrace{\left\lfloor \frac{n^2}{\pi} \right\rfloor}_{\text{parte intera}}$

Quindi

$$a_n = \left\lfloor \frac{n^2}{\pi} \right\rfloor + 1 \implies a_n = O(n^2) \quad a_n \sim \frac{n^2}{\pi}$$

Usando che $\alpha - 1 \le \lfloor \alpha \rfloor \le \alpha$ ottengo

$$\frac{n^2}{\pi} \le a_n \le \frac{n^2}{\pi} + 1$$ Dividendo per n^2 ho la tesi

Esempio 12 $\quad f(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt$ come si comporta a $+\infty$?

Banale: $f(x) = O(x e^{\sqrt{x}})$ per $x \to +\infty$

$$f(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt \le \int_0^x e^{\sqrt{x}}\,dt = x e^{\sqrt{x}}$$

$e^{\sqrt{t}} \le e^{\sqrt{x}} \quad \forall t \in [0,x]$

Vediamo se c'è equiv. asintotica (NO perché è o piccolo)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{e^{\sqrt{x}} + x e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} e^{\sqrt{x}}} = 0$$

Esercizio: $f(x) \sim c\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}$ per un opportuno valore di c.