ANALISI 1 - LEZIONE 61

Note Title 14/12/2024

Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0$$

$$f(x_0+h) = P_n(h) + \boxed{o(h^n)} \quad \text{per } h \to 0$$

resto di PEANO

Brutalmente: posso approssimare (sotto certe ipotesi) $f(x)$ o $f(x_0+h)$ con un polinomio. L'errore che commetto è un o piccolo. Informazione utile nei limiti.

Taylor-Lagrange fornisce un'informazione più quantitativa sul resto

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

resto di Lagrange

dove c è un p.to misterioso compreso tra 0 e x

Brutalmente: il resto alla Lagrange è sostanzialmente il termine successivo dello sviluppo di Taylor, solo che la derivata $(n+1)$-esima non è calcolata in $x=0$, ma in un p.to misterioso c.

Teorema Sia $r>0$ e sia $f:(-r,r) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che f sia derivabile fino all'ordine $n+1$.

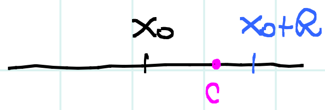
Allora per ogni $x \in (-r,r)$ esiste c, compreso tra 0 e x strettamente, tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

$P_n(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n

Oss. Vale la stessa cosa con centro x_0 qualunque

$$f(x_0+h) = P_n(h) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$$



dove c è un p.to misterioso, che dipende da h, compreso tra x_0 e x_0+h.

Oss. Cosa diventa la formula nel caso $n=0$?

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{P_0(x)} + f'(c)\cdot x$$

cioè $$f(x)-f(0) = f'(c)(x-0)$$
che è il teorema di Lagrange applicato in $[0,x]$.

Esempio 1 Voglio calcolare $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$

Dico che $$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \sim \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{600-1}{6000} = \frac{599}{6000}$$

Domanda: se approssimo $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ con $\frac{599}{6000}$, che errore commetto?

Uso Taylor-Lagrange con $f(x) = \sin x$ e $n=4$. Ottengo

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = \underbrace{\boxed{\frac{599}{6000}}}_{P_4\left(\frac{1}{10}\right)} + \frac{f^{(5)}(c)}{120}\cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{10^5}}}_{x^5}$$

quindi l'errore che commetto è

$$\frac{\boxed{f^{(5)}(c)}}{12.000.000}$$ compreso tra -1 e 1.

Quindi l'errore è dell'ordine di 10^{-7} :)

Riprova $\quad \frac{599}{6000} = 0{,}09983333$ ← errore sulla settima cifra

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = 0{,}0998334$$

<u>Oss.</u> Taylor Lagrange fornisce una stima esplicita dell'errore.

<u>Esempio 2</u> Se voglio calcolare $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ e uso i primi 4 termini di Taylor, cosa posso dire dell'errore?

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\right) \sim 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{720}\cdot\frac{1}{64} = \text{si fa il conto}$$

Per stimare l'errore uso TL con $n = 7$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero di sopra}}}{P_7}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f^{(8)}(c)}{8!}\,\frac{1}{256}$$

$$|\text{errore}| = \frac{|f^{(8)}(c)|}{8!\,256} \leq \frac{1}{10^7}$$

<u>Esempio 3</u> Dimostrare che $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Uso TL con $f(x) = e^x$ e $n = 3$. Ottengo

$$e^x = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(c)}{24}x^4 = P_3(x) + \underbrace{\boxed{\frac{e^c}{24}x^4}}_{\geq 0} \geq P_3(x)$$

e vale il segno di $=$ se e solo se $x = 0$.

Esempio 3 bis Risolvere la disequazione

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Da TL con $n = 2$ sappiamo che

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{P_2(x)} + \frac{e^c}{6} x^3 \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

vale se $x \geq 0$
(è il contrario per $x \leq 0$)

Conclusione: la disug. vale per $x \geq 0$.

Esempio 4 collegato

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(\cos x) - \arctan(\cosh x)}{\sinh^2(\sqrt{x}) \cdot \tan^2(\sqrt{x})}$$

L'argomento di arctan non tende a 0, quindi non si può usare lo sviluppo standard di arctan.

Alternativa: sviluppo arctan in $x_0 = 1$

Alternativa più rapida

$$f(\cos x) - f(\cosh x) = f'(c)\,(\cos x - \cosh x)$$

p.to misterioso
compreso fra $\cos x$ e $\cosh x$

$$\text{Frazione} = \frac{f'(c)\,(\cos x - \cosh x)}{x^2} \boxed{\frac{x^2}{\sinh^2(\sqrt{x}) \cdot \tan^2(\sqrt{x})}} \to -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\sinh^2(\sqrt{x}) \cdot \tan^2(\sqrt{x})}} \to 1$$

$$= \boxed{f'(c)} \boxed{\frac{\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2}}$$

$$\boxed{f'(c)} \to f'(1) = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\frac{\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2}} \to 1$$

Essendo $\boxed{\cos x} \leq c \leq \boxed{\cosh x}$, con $\cos x \to 1$, $c \to 1$, $\cosh x \to 1$

— o — o —