Esercizi di Analisi Matematica 1

Versione 15 gennaio 2025

Marina Ghisi Massimo Gobbino

Change log

- *Versione 28 settembre 2014.* Iniziato il progetto. Aggiunti primi esercizi su logica elementare.
- *Versione 5 ottobre 2014.* Aggiunto il test del precorso. Aggiunto quasi tutto il materiale relativo ai preliminari. Iniziati i capitoli saper dire e saper fare.
- *Versione 12 ottobre 2014.* Aggiunto due esercizi in Induzione 1 e 2. Iniziati esercizi sui limiti.
- *Versione 19 aprile 2015.* Aggiunto fino alla continuità uniforme.
- *Versione 17 maggio 2015.* Aggiornati saper dire e saper fare fino a fine corso.
- *Versione settembre 2016.* Aggiunti scritti d'esame 2015/16. Restyling generale.
- *Versione marzo 2017.* Sistemati link cliccabili. Corretto errori in Integrali Impropri 5.
- *Versione giugno 2018.* Aggiunti scritti d'esame 2017/18.

To do

- finire gli esercizi sui limiti
- scheda di esercizi diversi sullo studio di funzione (dato il grafico, trovare la funzione)
- esercizi sup/inf/max/min basati su studi di funzione
- esercizi teorici sugli integrali
- completare e sistemare le equazioni differenziali (forse spostare altrove il finale delle lineari omogenee)
- equazioni differenziali: scheda sulla non unicità
- scheda sulle funzioni semicontinue.

Indice

1 Fare prima **11**
Precorso 2002 – Test finale 12

2 Fare **17**
Logica elementare 1 18
Logica elementare 2 19
Logica elementare 3 20
Logica elementare 4 21
Quantificatori 1 22
Quantificatori 2 23
Logica elementare 5 24
Insiemi 1 25
Funzioni 1 26
Funzioni 2 27
Funzioni 3 28
Funzioni 4 29
Funzioni – Esercizi Teorici 1 30
Funzioni – Esercizi Teorici 2 31
Funzioni – Esercizi Teorici 3 32
Induzione 1 33
Induzione 2 34
Funzioni trigonometriche inverse 1 35
Funzioni trigonometriche inverse 2 36
Numeri reali 1 37
Numeri reali 2 38
Quantificatori 3 39
Limiti 1 40
Limiti 2 41
Limiti 3 42
Limiti - Esercizi teorici 1 43
Limiti 4 44
Limiti 5 45
Limiti 6 46
Limiti 7 47
Limiti 8 48
Limiti 9 49

Limiti 10 50
Limiti 11 51
Limiti - Esercizi teorici 2 52
Linguaggio degli infinitesimi 1 – o piccolo 53
Derivate 1 54
Funzioni iperboliche 55
Sviluppi di Taylor 1 56
Sviluppi di Taylor 2 57
Linguaggio degli infinitesimi 2 – Parte principale 58
Limiti 12 59
Limiti 14 60
Serie 1 61
Serie 2 62
Serie 3 63
Serie 4 64
Serie 5 65
Serie 6 66
Serie – Esercizi teorici 67
Funzioni 5 68
Funzioni 6 69
Funzioni 7 70
Funzioni 8 71
Funzioni 9 72
Funzioni 10 73
Funzioni 11 74
Funzioni 12 75
Funzioni 13 76
Funzioni – Esercizi Teorici 4 77
Funzioni – Esercizi Teorici 5 78
Integrali 1 79
Integrali 2 80
Integrali 3 81
Integrali 4 82
Integrali 5 83
Integrali 6 84
Integrali 7 85
Integrali impropri 1 86
Integrali impropri 2 87
Integrali impropri 3 88
Integrali impropri 4 89
Integrali impropri 5 90
Integrali impropri 8 91
Confronti serie-integrali – Esercizi teorici 92
Confronti serie-integrali – Applicazioni 93
Equazioni differenziali – Nomenclatura 1 94
Equazioni differenziali – Nomenclatura 2 95

Equazioni differenziali – Risoluzione 1 96
Equazioni differenziali – Risoluzione 2 97
Equazioni differenziali – Risoluzione 3 98
Equazioni differenziali – Risoluzione 4 99
Equazioni differenziali – Risoluzione 5 100
Equazioni differenziali – Studio 1 101
Equazioni differenziali – Studio 2 102
Equazioni differenziali – Studio 3 103
Equazioni differenziali – Studio 4 104
Equazioni differenziali – Studio 5 105
Successioni per ricorrenza – Lineari 1 106
Successioni per ricorrenza – Lineari 2 107
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 1 108
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 2 109
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 3 110
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 4 111
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 5 112
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 6 113
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 7 114
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 8 115
Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 9 116
Successioni per ricorrenza – Delirio 1 117
Successioni per ricorrenza – Delirio 2 118
Funzioni integrali 1 119
Funzioni integrali 2 120
Liminf e Limsup 1 122
Liminf e Limsup 2 123
Liminf e Limsup 3 124
Topologia sulla retta 1 125
Topologia sulla retta 2 126
Lipschitzianità 1 128
Lipschitzianità 2 129
Uniforme continuità 1 130
Uniforme continuità 2 131
Uniforme continuità n 132
Semicontinuità 1 136
Funzioni convesse 1 137
Funzioni convesse 2 138
Funzioni convesse 3 139
Funzioni convesse 4 140
Funzioni convesse 5 141
Funzioni convesse 6 142
Ricapitolazione – Funzioni inverse 1 143
Ricapitolazione – Funzioni inverse 2 144
Ricapitolazione – Funzioni inverse n 145
Ricapitolazione – Famiglie di funzioni 146

Ricapitolazione – Semicontinuità rivisitata . . . 147
Ricapitolazione – Inviluppi . . . 148

3 Fare solo se . . . 149
Preliminari 1 . . . 150
Preliminari 2 . . . 151
Preliminari 3 . . . 152
Serie . . . 153

4 Saper dire 155
4.1 Preliminari . . . 156
4.1.1 Logica elementare, insiemi e funzioni tra insiemi . . . 156
4.1.2 Funzioni elementari e relativi grafici . . . 156
4.1.3 Insiemi numerici e numeri reali . . . 156
4.2 Limiti . . . 157
4.2.1 Limiti di successioni . . . 157
4.2.2 Successioni per ricorrenza . . . 158
4.2.3 Limiti di funzioni . . . 159
4.2.4 Liminf e limsup . . . 160
4.2.5 Serie . . . 160
4.3 Funzioni e loro grafici . . . 161
4.3.1 Derivate . . . 161
4.3.2 Studio di funzioni . . . 162
4.3.3 Continuità, compattezza, teorema di Weierstrass . . . 162
4.3.4 Teoremi sulle funzioni derivabili . . . 163
4.3.5 Uniforme continuità . . . 164
4.3.6 Funzioni convesse . . . 165
4.4 Integrazione . . . 165
4.4.1 Integrali propri . . . 165
4.4.2 Integrali impropri . . . 166
4.4.3 Equazioni differenziali . . . 167

5 Saper fare 169
5.1 Preliminari . . . 170
5.1.1 Logica elementare, insiemi e funzioni tra insiemi . . . 170
5.1.2 Funzioni elementari e relativi grafici . . . 170
5.1.3 Insiemi numerici e numeri reali . . . 171
5.2 Limiti . . . 171
5.2.1 Limiti di successioni . . . 171
5.2.2 Successioni per ricorrenza . . . 171
5.2.3 Limiti di funzione . . . 172
5.2.4 Liminf e limsup . . . 173
5.2.5 Serie numeriche . . . 174
5.3 Funzioni e loro grafici . . . 174
5.3.1 Derivate . . . 174
5.3.2 Studi di funzione . . . 174

5.4 Integrazione . . . 176
5.4.1 Integrali propri . . . 176
5.4.2 Integrali impropri . . . 177
5.4.3 Funzioni integrali . . . 178
5.4.4 Equazioni differenziali . . . 178

6 Scritti d'esame **181**
Prova in Itinere 2015_PI–1 (28 Novembre 2014) . . . 182
Prova in Itinere 2015_PI–2 (20 Marzo 2015) . . . 183
Prova in Itinere 2015_PI–3 (05 Maggio 2016) . . . 185
Scritto d'esame 2015_1 (04 Giugno 2015) . . . 186
Scritto d'esame 2015_2 (29 Giugno 2015) . . . 187
Scritto d'esame 2015_3 (24 Luglio 2015) . . . 188
Scritto d'esame 2015_4 (03 Settembre 2015) . . . 189
Scritto d'esame 2015_5 (12 Gennaio 2016) . . . 190
Scritto d'esame 2015_6 (02 Febbraio 2016) . . . 191
Prova in Itinere 2017_PI–1 (24 Novembre 2016) . . . 192
Prova in Itinere 2017_PI–2 (6 Aprile 2017) . . . 193
Prova in Itinere 2015_PI–3 (18 Maggio 2017) . . . 195
Scritto d'esame 2017_1 (5 Giugno 2017) . . . 196
Scritto d'esame 2017_2 (26 Giugno 2017) . . . 197
Scritto d'esame 2017_3 (27 Luglio 2017) . . . 198
Scritto d'esame 2017_4 (23 Settembre 2017) . . . 199
Scritto d'esame 2017_5 (22 Gennaio 2018) . . . 200
Scritto d'esame 2017_6 (19 Febbraio 2018) . . . 201

Prefazione

[Farsi venire in mente qualcosa da scrivere qui]

Buon lavoro!

Capitolo 1

Fare prima

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Questo andrebbe fatto prima di iniziare, rispettando tempi e punteggi, per vedere se ci sono "problemi di precorso". Se sì, occorre dare la massima priorità a risolverli quanto prima.

Il cutoff è calcolato su ingegneria, quindi forse potrebbe essere bassino su matematica.

Precorso 2002 – Test finale

Tempo concesso: 120 minuti

Valutazione: risposta errata 0 punti, mancante +2, esatta +5 (sufficienza: 110)

Nota: nelle risposte, "N.P." sta per "nessuna delle precedenti".

1. Se $a/(a+b) = 2$ e $a - b = 3$, allora a vale

   (A) -1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** N.P.

2. $1000^{1000} =$

   (A) 10^{1003} **(B)** 10^{3000} **(C)** 100^{10000} **(D)** N.P.

3. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} =$

   (A) $\sqrt{12}$ **(B)** $\sqrt[4]{12}$ **(C)** $\sqrt[4]{35}$ **(D)** N.P.

4. $\log_3 35 - \log_3 12 =$

   (A) $\log_3(35/12)$ **(B)** $\log_3 23$ **(C)** $\log_3 \sqrt[12]{35}$ **(D)** N.P.

5. $\sin 240° =$

   (A) $-\sqrt{3}/2$ **(B)** $-1/2$ **(C)** $1/2$ **(D)** N.P.

6. La negazione dell'enunciato "Nessuna matricola di ingegneria è in grado di pensare" è

   (A) "Tutte le matricole di ingegneria sono in grado di pensare"
   (B) "Almeno una matricola di ingegneria è in grado di pensare"
   (C) "Tutte le matricole di ingegneria non sono in grado di pensare"
   (D) "Almeno una matricola di ingegneria non è in grado di pensare"

7. Siano $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = |x|$. Allora $f(g(h(x)))$ è uguale a

   (A) $\sin^3 |x|$ **(B)** $\sin\left(|x|^3\right)$ **(C)** $|\sin(x^3)|$ **(D)** N.P.

8. $\log_2(32 \cdot 8^4) =$

   (A) 8 **(B)** 15 **(C)** 17 **(D)** N.P.

9. Se $\cos x = -1/2$ e $x \in [\pi, 2\pi]$, allora x è uguale a

   (A) $5\pi/6$ **(B)** $7\pi/6$ **(C)** $4\pi/3$ **(D)** N.P.

10. Determinare per quale valore del parametro a la retta di equazione $y = 2x + 3$ e la retta di equazione $ax + 2y + 5 = 0$ sono parallele.

    (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** N.P.

11. Il sistema di disequazioni

    $$\begin{cases} (x-2)^2 + 4x \leq 8 \\ 3 - 2x \leq 5 \end{cases}$$

    ha come soluzione

    (A) $(-\infty, -2] \cup [-1, 2]$ **(B)** $[-1, 2]$ **(C)** $[-1, +\infty)$ **(D)** N.P.

12. Siano x e y numeri reali positivi. Allora l'espressione

    $$\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^3 + y^3}{x + y}$$

    è uguale a

    (A) $2x^2 - xy$ **(B)** $2x^2 + xy$ **(C)** $2x^2 - xy - 2y^2$ **(D)** N.P.

13. Nel triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC è lunga 13 ed il cateto AB è lungo 12. La tangente dell'angolo $\widehat{B}$ vale

    (A) $5/13$ **(B)** $5/12$ **(C)** $12/13$ **(D)** N.P.

14. Dividendo il polinomio $x^5 + 3x^2 - x$ per il polinomio $x^2 + 3$ si ottiene come resto

    (A) $8x - 9$ **(B)** $8x + 9$ **(C)** $-x$ **(D)** N.P.

15. L'equazione $x^2 + y^2 - 2x = 9$ rappresenta una circonferenza di raggio

    (A) 3 **(B)** 9 **(C)** $\sqrt{10}$ **(D)** N.P.

16. Determinare quale delle seguenti equazioni ha il maggior numero di soluzioni *reali distinte.*

    (A) $x + 2 = 3x + 7$ **(B)** $x^2 + 2x + 8 = 0$ **(C)** $x^2 + 3x - 8 = 0$
    (D) $x^3 + 3x^2 + 6x + 8 = 0$

17. La disequazione $\log_3(x + 2) \leq 2$ ha come soluzione

    (A) $0 \leq x \leq 7$ **(B)** $0 < x \leq 7$ **(C)** $-2 < x \leq 7$ **(D)** N.P.

18. Da un sondaggio svolto al precorso, risulta che "Tutti gli studenti parsimoniosi, iscritti a Telecomunicazioni, sono lucchesi". Assumendo che il contrario di "parsimoniosi" sia "spendaccioni", quale delle seguenti frasi è *equivalente* alla precedente?

    (A) "Tutti gli studenti lucchesi, iscritti a Telecomunicazioni, sono parsimoniosi"

    (B) "Tutti gli studenti lucchesi e parsimoniosi sono iscritti a Telecomunicazioni"

    (C) "Tutti gli studenti spendaccioni, iscritti a Telecomunicazioni, non sono lucchesi"

    (D) "Tutti gli studenti non lucchesi di Telecomunicazioni sono spendaccioni"

19. La disequazione
$$\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x-2}{x+2}$$
    ha come soluzione

    (A) $x < -2$ **(B)** $x \leq 0$ **(C)** $-1 < x \leq 0$ **(D)** N.P.

20. Siano a e b due numeri reali. Determinare quante delle seguenti tre disuguaglianze
$$a^{2001} < b^{2001} \qquad a^{2002} < b^{2002} \qquad a^{2003} < b^{2003}$$
    implicano necessariamente la disuguaglianza $a < b$.

    (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

21. $\sqrt{8} + \sqrt{18} =$

    (A) $\sqrt{26}$ **(B)** $\sqrt{50}$ **(C)** 12 **(D)** N.P.

22. Il numero di soluzioni *reali distinte* dell'equazione $|x - 3| + |x| = 4$ è

    (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** N.P.

23. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} =$

(A) $\sqrt[5]{6}$ **(B)** $\sqrt[6]{5}$ **(C)** $\sqrt[6]{72}$ **(D)** N.P.

24. Il numero di soluzioni *reali distinte* dell'equazione $\sqrt{2x+3} = x - 1$ è

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** N.P.

25. Il numero di soluzioni *reali distinte* dell'equazione $\cos 2x + \sin x = 0$, contenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$, è

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** N.P.

26. Siano a e b numeri reali positivi. Allora

$$\left(\sqrt[12]{a} - \sqrt[12]{b}\right) \cdot \left(\sqrt[12]{a} + \sqrt[12]{b}\right)$$

è uguale a

(A) $a - b$ **(B)** $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$ **(C)** $\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}$ **(D)** N.P.

27. La disequazione $\tan x > 2 \sin x$ ha come soluzione, nell'intervallo $[0, 2\pi]$,

(A) l'insieme vuoto **(B)** un intervallo **(C)** l'unione disgiunta di due intervalli
(D) l'unione disgiunta di tre intervalli

28. Ciascuno dei quattro cartoncini

$$\boxed{\text{A}} \quad \boxed{\text{B}} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2}$$

reca su una faccia una lettera e sull'altra faccia un intero. Determinare il minimo numero di cartoncini che bisogna girare per essere sicuri che i cartoncini siano stati preparati attenendosi alla regola seguente: "Se una faccia reca una vocale, allora l'altra faccia reca un intero pari".

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

29. L'insieme dei punti (x, y) del piano che verificano le due relazioni $2x + y \geq 20$, $3y - x \geq 4$

(A) tocca solo il primo quadrante **(B)** tocca il primo ed il secondo quadrante
(C) tocca tutti i quadranti **(D)** N.P.

30. L'equazione $x^4 - 3x^2 + \lambda = 0$ ha quattro soluzioni *reali distinte*

(A) per nessun valore di λ **(B)** se e solo se $\lambda < 9/4$
(C) se e solo se $0 < \lambda < 9/4$ **(D)** per ogni valore reale di λ

Capitolo 2

Fare

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Logica elementare 1

Argomenti: logica elementare **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: buon senso, concetto di "necessario" e "sufficiente"

Nei punti successivi viene presentata un'affermazione, che si assume vera (un assioma). Stabilire, sulla base di questa affermazione, se le deduzioni successive sono corrette oppure no.

1. Assioma: "tutti gli studenti di matematica sono strani".

Alberto studia matematica, quindi è strano	
Barbara studia fisica, quindi non è strana	
Clara non è strana, quindi non studia matematica	
Dario è strano, quindi studia matematica	
Elena è strana, quindi non studia fisica	
Esiste almeno uno studente di informatica che non è strano	

2. Assioma: "per superare Analisi 1 è necessario studiare tutti i giorni".

Alberto studia tutti i giorni, quindi supererà Analisi 1	
Barbara ha superato Analisi 1, quindi ha studiato tutti i giorni	
Clara non studia tutti i giorni, quindi non supererà Analisi 1	
Dario non ha superato Analisi 1, quindi non ha studiato tutti i giorni	

3. Assioma: "per superare il test, è sufficiente copiare dal vicino".

Alberto ha superato il test, quindi ha copiato dal vicino	
Barbara non ha superato il test, quindi non ha copiato dal vicino	
Clara ha copiato dal vicino, quindi ha superato il test	
Dario non ha copiato dal vicino, quindi non ha superato il test	
Qualcuno ha superato il test senza copiare dal vicino	
Nessuno ha copiato dal vicino senza superare il test	

4. Assioma: "per laurearsi è necessario e sufficiente pagare una tangente".

Alberto ha pagato la tangente, quindi si laureerà	
Barbara non è disposta a pagare la tangente, quindi non si laureerà	
Clara si è laurata, quindi ha pagato la tangente	
Dario non si è laurato, quindi non ha pagato la tangente	

Logica elementare 2

Argomenti: logica elementare **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: buon senso, concetto di "and" e "vel"

Nei punti successivi viene presentata un'affermazione, che si assume vera (un assioma). Stabilire, sulla base di questa affermazione, se le deduzioni successive sono corrette oppure no.

1. Assioma: "tutti i docenti di matematica sono antipatici e incapaci".

Alberto insegna matematica, quindi è incapace	
Barbara è simpatica, quindi non insegna matematica	
Clara è antipatica e incapace, quindi insegna matematica	
Dario non insegna matematica, quindi è simpatico	
Elena non insegna matematica, quindi è simpatica o capace	
Fabio è simpatico e incapace, quindi non insegna matematica	
Esistono persone antipatiche che non insegnano matematica	
L'antipatia è condizione necessaria per insegnare matematica	

2. Assioma: "tutti gli studenti di matematica amano la musica o lo sport".

Alberto studia matematica, quindi ama lo sport	
Barbara non studia matematica, quindi non ama né la musica, né lo sport	
Clara non ama lo sport, quindi non studia matematica	
Dario ama lo sport, ma non la musica, quindi non studia matematica	
Elena ama lo sport e la musica, quindi non studia matematica	
Fabio non ama né la musica, né lo sport, quindi non studia matematica	
Giovanni studia matematica e ama lo sport, quindi non ama la musica	
Ilaria studia matematica e non ama lo sport, quindi ama la musica	

3. Tutti gli studenti di matematica che amano la Geometria odiano l'Analisi.

Alberto studia matematica e odia l'Analisi, quindi ama la Geometria	
Barbara ama l'Analisi e la Geometria, quindi non studia matematica	
Clara odia l'Analisi e la Geometria, quindi non studia matematica	
Dario ama l'Analisi, quindi odia la Geometria o non studia matematica	
Elisabetta studia matematica e odia la Geometria, quindi ama l'Analisi	
Fabio ama la Geometria e odia l'Analisi, quindi studia matematica	
Giovanni odia l'Analisi e la Geometria, quindi studia matematica	
Ilaria studia matematica e ama l'Analisi, quindi non ama la Geometria	

Logica elementare 3

Argomenti: logica elementare **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: buon senso, concetto di “and” e “vel”

Nei punti successivi viene presentata un’affermazione, che si assume vera (un assioma). Stabilire se le affermazioni successive sono *compatibili* oppure no con quella iniziale.

1. Assioma: “i giovani sono tutti bamboccioni”.

Alberto è giovane e bamboccione	
Barbara è vecchia e bambocciona	
Clara è giovane ma non bamboccciona	
Dario è vecchio ma non bamboccione	
Esistono dei bamboccioni che sono giovani	
Esistono dei bamboccioni che non sono giovani	

2. Assioma: “tutti gli studenti di matematica amano la musica o lo sport”.

Alberto studia matematica, ama lo sport, non ama la musica	
Barbara studia matematica e non ama lo sport	
Clara studia matematica, ama lo sport e ama la musica	
Dario studia fisica e non ama la musica	
Elena studia fisica e ama sia lo sport sia la musica	
Fabio studia matematica, non ama lo sport e non ama la musica	
Tutti gli studenti di matematica odiano lo sport	
Tutti gli studenti che odiano la musica studiano matematica	

3. Assioma: “Alberto studia matematica, è simpatico, odia l’Analisi ma ama l’Aritmetica”.

Tutti gli studenti di matematica che sono simpatici odiano l’Analisi	
Tutti gli studenti di matematica che sono antipatici odiano l’Analisi	
Tutti gli studenti di matematica che odiano l’Analisi sono simpatici	
Tutti gli studenti di matematica che odiano l’Analisi sono antipatici	
Tutti gli studenti simpatici amano l’Analisi	
Tutti gli studenti di matematica che odiano l’Aritmetica sono simpatici	
Tutti gli studenti di matematica che odiano l’Aritmetica sono antipatici	
Esistono studenti simpatici che odiano l’Aritmetica	
Esistono studenti simpatici che amano l’Aritmetica	

Logica elementare 4

Argomenti: logica elementare **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: buon senso, concetto di "and" e "vel", implicazioni

Consideriamo le seguenti quattro affermazioni (assiomi):

A_1	"chi ama l'Analisi o la Geometria è grasso o antipatico"
A_2	"chi ama l'Analisi o la Geometria è grasso e antipatico"
A_3	"chi ama l'Analisi e la Geometria è grasso o antipatico"
A_4	"chi ama l'Analisi e la Geometria è grasso e antipatico"

Nella seguente tabella vengono presentate varie affermazioni. Per ciascuna di esse si chiede di stabilire se, rispetto a ciascuno dei quattro assiomi, sono *deducibili* (cioè seguono necessariamente), oppure sono *indipendenti* (cioè possono essere vere o false senza contraddire l'assioma), oppure sono in *contraddizione* (cioè sono necessariamente false se l'assioma è supposto vero).

	A_1	A_2	A_3	A_4
Tutti quelli che amano l'Analisi sono grassi				
Nessun grasso ama la Geometria				
Tutti i magri odiano l'Analisi				
Tutti i simpatici odiano l'Analisi o la Geometria				
Tutti i magri odiano l'Analisi e la Geometria				
Esiste un simpatico che ama la Geometria				
Tutti i magri simpatici amano l'Analisi				
Chi odia l'Analisi è antipatico				
Marco ama l'Analisi e la Geometria ed è simpatico				
Marina è magra, ama l'Analisi e odia la Geometria				
I magri che amano la Geometria odiano tutti l'Analisi				
Almeno un simpatico odia Analisi e Geometria				

Stabilire quali implicazioni sussistono certamente tra i quattro assiomi (nella tabella le implicazioni sono pensate $P \Rightarrow Q$ con le P rappresentate dalle intestazioni delle righe e le Q dalle intestazioni delle colonne).

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1				
A_2				
A_3				
A_4				

Quantificatori 1

Argomenti: uso dei quantificatori **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: proposizioni, predicati, “per ogni”, “esiste almeno un”

Nella seguente tabella vengono presentati dei predicati e due modi di quantificare il parametro n in essi presente. Stabilire se le proposizioni risultanti sono vere o false.

Predicato	$\exists n \in \mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N}$	Predicato	$\exists n \in \mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N}$
$n^2 \geq 100$			$n^2 \leq 100$		
$n^2 \geq -100$			$n^2 \leq -100$		
$(n+1)^2 = n^2 + 1$			$2^n \geq n^2 + 100$		
$2^n + 3^n = 5^n$			$n^5 \geq n$		

Nella seguente tabella vengono presentati dei predicati che dipendono da due parametri a e b, un insieme numerico dove si intende che questi parametri variano, e sei possibili modi di quantificare i due parametri (supposti appartenenti all'insieme precedente). Stabilire se le proposizioni risultanti sono vere o false.

Predicato	Ambiente	$\exists a\ \exists b$	$\forall a\ \forall b$	$\forall a\ \exists b$	$\forall b\ \exists a$	$\exists a\ \forall b$	$\exists b\ \forall a$
$a \geq b$	$\mathbb{N}$						
$a \geq b$	$\mathbb{Z}$						
$a^2 \geq b$	$\mathbb{N}$						
$a + b \geq 0$	$\mathbb{N}$						
$a + b \geq 2014$	$\mathbb{Z}$						
$a + b \geq 2014$	$\mathbb{N}$						

Nella seguente tabella vengono presentati dei predicati che dipendono da tre parametri a, b e c, che si pensano appartenenti a $\mathbb{Z}$, ed alcuni possibili modi di quantificare i parametri. Determinare se le proposizioni ottenute con tali quantificazioni sono vere o false.

Predicato	Quantif.	V/F	Quantif.	V/F	Quantif.	V/F	Quantif.	V/F
$a \geq b + c$	$\forall b\ \forall c\ \exists a$		$\exists b\ \forall c\ \forall a$		$\exists b\ \exists c\ \exists a$		$\forall b\ \exists c\ \forall a$	
$(a+b)^2 \geq c$	$\exists c\ \forall a\ \forall b$		$\forall a\ \exists b\ \forall c$		$\forall a\ \forall b\ \exists c$		$\forall a\ \exists c\ \forall b$	
$2^a + 2^b = 2^c$	$\forall a\ \forall b\ \exists c$		$\exists a\ \exists b\ \exists c$		$\forall a\ \exists b\ \exists c$		$\forall c\ \exists a\ \exists b$	
$a^2 \geq b - c$	$\forall b\ \exists c\ \forall a$		$\forall a\ \forall b\ \exists c$		$\exists a\ \forall b\ \exists c$		$\forall b\ \forall c\ \exists a$	

Quantificatori 2

Argomenti: linguaggio naturale vs linguaggio matematico **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: proposizioni, predicati, quantificatori

Un corso è frequentato da un gruppo B di ragazzi ed un gruppo G di ragazze. Sia $P(b, g)$ il predicato "al ragazzo b piace la ragazza g". Nelle seguenti due tabelle sono riportate sei affermazioni in linguaggio comune e sei proposizioni formali. Stabilire l'esatta corrispondenza tra le une e le altre.

Ad ogni ragazzo piace almeno una ragazza
C'è una ragazza che piace a tutti i ragazzi
C'è un ragazzo a cui piacciono tutte le ragazze
A tutti i ragazzi piacciono tutte le ragazze
C'è un ragazzo a cui piace almeno una ragazza
Ogni ragazza piace ad almeno un ragazzo

$\forall b \in B \ \forall g \in G \quad P(b, g)$
$\exists b \in B \ \exists g \in G \quad P(b, g)$
$\forall b \in B \ \exists g \in G \quad P(b, g)$
$\forall g \in G \ \exists b \in B \quad P(b, g)$
$\exists b \in B \ \forall g \in G \quad P(b, g)$
$\exists g \in G \ \forall b \in B \quad P(b, g)$

Nelle tabelle seguenti sono descritti quattro insiemi, sia in linguaggio comune sia in termini matematici (facendo riferimento al predicato precedente). Stabilire l'esatta corrispondenza tra le definizioni.

I ragazzi a cui piacciono tutte le ragazze
I ragazzi a cui piace almeno una ragazza
Le ragazze che piacciono a tutti i ragazzi
Le ragazze che piaccio ad almeno un ragazzo

$\{b \in B : \exists g \in G \quad P(b, g)\}$
$\{g \in G : \exists b \in B \quad P(b, g)\}$
$\{g \in G : \forall b \in B \quad P(b, g)\}$
$\{b \in B : \forall g \in G \quad P(b, g)\}$

Una gruppo S di studenti sta preparando un insieme M di materie in un insieme G di giorni. Sia $P(s, m, g)$ il predicato "lo studente s sta preparando la materia m nel giorno g". Tradurre in linguaggio matematico le seguenti affermazioni.

Linguaggio naturale	Matematichese
Ogni giorno almeno uno studente prepara tutte le materie	
Ogni studente prepara almeno una materia al giorno	
C'è un giorno in cui la stessa materia è preparata da tutti gli studenti	
Tutti gli studenti preparano almeno una materia tutti i giorni	
C'è una materia che ogni studente prepara tutti i giorni	
Ogni studente ha una materia che prepara tutti i giorni	
Ogni materia viene preparata almeno un giorno da ogni studente	
Ogni studente dedica almeno un giorno ad ogni materia	

Logica elementare 5

Argomenti: negazione di proposizioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: proposizioni, predicati, quantificatori, implicazione, negazione

Nella tabella seguente sono riportate sei affermazioni in linguaggio naturale, relative ad un concorso cinematografico. Determinare la negazione delle affermazioni, scrivendo la risposta in linguaggio naturale. Prestare la massima attenzione ad evitare ogni possibile ambiguità (il che equivale sostanzialmente ad esprimersi in linguaggio matematico!).

Affermazione	Negazione
Almeno un giudice ha visto almeno un film	
Tutti i giudici hanno visto tutti i film	
Ogni giudice ha visto almeno un film	
Tutti i film sono stati visti da almeno un giudice	
Almeno un giudice ha visto tutti i film	
Un film è stato visto da tutti i giudici	

Nella seguente tabella compaiono $5 + 3$ affermazioni e le loro negazioni. Stabilire l'esatta corrispondenza tra ogni affermazione e la sua negazione.

P_1	Almeno un matematico ama la musica, ma non lo sport
P_2	Tutti i matematici non amano né la musica, né lo sport
P_3	Tutti i matematici che amano lo sport non amano la musica
P_4	Tutti i matematici che non amano lo sport non amano nemmeno la musica
P_5	Almeno un matematico ama la musica oppure lo sport
P_6	Almeno un matematico ama la musica o non ama lo sport
P_7	Ogni matematico ama la musica o lo sport
P_8	Tutti i matematici amano lo sport, ma non la musica
P_9	Almeno un matematico non ama né la musica, né lo sport
P_{10}	Almeno un matematico ama la musica e lo sport

P_{11}	Almeno uno studente non ha superato alcun esame in almeno un anno
P_{12}	Esiste un anno in cui tutti gli studenti non hanno superato lo stesso esame
P_{13}	Ogni anno almeno uno studente ha superato tutti gli esami
P_{14}	Ogni studente ha superato almeno un esame all'anno
P_{15}	Ogni esame è stato superato ogni anno da almeno uno studente
P_{16}	Esiste un anno in cui nessuno studente ha superato tutti gli esami

Insiemi 1

Argomenti: insiemi e operazioni tra insiemi **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: notazioni insiemistiche, prodotto cartesiano, insieme delle parti

Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A = \{2, 4, g, \diamondsuit\}, \qquad B = \{2, g, 7, h, \heartsuit\}, \qquad C = \{\diamondsuit, 7, g\}.$$

Elencare gli elementi dei seguenti insiemi:

Insieme	Elementi	Insieme	Elementi	Insieme	Elementi
$A \cup B$		$C \cup B$		$A \cup B \cup C$	
$A \cap B$		$C \cap A$		$B \cap C$	
$A \cap B \cap C$		$C \cap (A \cup B)$		$A \cup (B \cap C)$	
$A \setminus B$		$B \setminus A$		$A \triangle B$	
$B \setminus C$		$C \setminus A$		$C \setminus (A \cup B)$	
$(A \cup B) \triangle C$		$(A \cap B) \setminus C$		$(A \cup C) \setminus (A \cap C)$	
$(C \setminus A) \setminus B$		$C \setminus (A \setminus B)$		$C \triangle (A \triangle B)$	

Stabilire se le seguenti affermazioni (proposizioni) sono vere o false.

Prop.	V/F	Prop.	V/F	Prop.	V/F
$2 \in A$		$7 \notin A$		$2 \subseteq A$	
$\{2\} \subseteq A$		$\{2\} \in A$		$\{7, 7, g\} \subseteq C$	
$C \subseteq B$		$C \subseteq C$		$C \setminus C \subseteq A$	
$A \subseteq A \cup B$		$A \subseteq A \cap B$		$B \cap C \subseteq C$	
$(2, 2) \in A \times B$		$(2, 7) \in A \times B$		$(7, 2) \in B \times A$	
$(7, 2) \in A \times B$		$(\diamondsuit, \diamondsuit) \in A \times A$		$(\diamondsuit, 2) \notin A^2$	
$(\heartsuit, \heartsuit) \in B \times B$		$(\diamondsuit, \diamondsuit) \notin A \times C$		$(\diamondsuit, \diamondsuit) \in A^2 \cap C^2$	
$\{2, 2\} \in \mathcal{P}(A)$		$\{4, g\} \subseteq \mathcal{P}(A)$		$\{4, g\} \in \mathcal{P}(A)$	
$\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A)$		$A \in \mathcal{P}(A)$		$A \subseteq \mathcal{P}(A)$	
$(2, g) \in \mathcal{P}(A^2)$		$\{2, g\} \in \mathcal{P}(A^2)$		$\{(2, g)\} \in \mathcal{P}(A^2)$	
$\emptyset \in A$		$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$		$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$	

Capire come sono fatti i seguenti insiemi:

$$A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}, \qquad B_1 = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\}, \qquad B_2 = \{x^2 : x \in \mathbb{Z}\}, \qquad B_3 = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\},$$

$$C_1 = \{3x + 1 : x \in \mathbb{N}\}, \qquad C_2 = \{3x + 1 : x \in \mathbb{R}\}, \qquad C_3 = \{3x + 1 : x \in \{2, 4, 7\}\},$$

$$D_1 = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \quad n = m^2\}, \qquad D_2 = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad n = m^2\}.$$

Funzioni 1

Argomenti: iniettività e surgettività **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

Nella seguente tabella vengono presentate varie "leggi" che talvolta definiscono funzioni $f : A \to B$ tra gli insiemi indicati. Stabilire caso per caso se si tratta di funzioni iniettive e/o surgettive (e precisare invece quando non si tratta di funzioni).

Legge	$A \to B$	I/S	$A \to B$	I/S	$A \to B$	I/S
$2x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$		$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	
x^2	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$		$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$	
x^2	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$		$[0, 1] \to [0, 1]$		$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	
x^2	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$		$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$		$[-1, 1] \to [-1, 1]$	
x^3	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$		$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	
x^3	$[-1, 1] \to [-1, 1]$		$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	
x^{-1}	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$		$(0, 1) \to (1, +\infty)$	
$\lvert x - 3\rvert$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$		$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	
2^x	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$		$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$	
2^x	$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$		$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$		$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$	
$\log_2 x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$		$(0, 1) \to \mathbb{R}_{<0}$	
$\sin x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to [-1, 1]$		$[0, \pi] \to [-1, 1]$	
$\sin x$	$[0, \pi/2] \to [0, 1]$		$[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$		$[-\pi/2, 0] \to \mathbb{R}$	
$\sin x$	$[0, 1] \to [0, 1]$		$[0, 2] \to [0, 1]$		$[0, 3] \to [0, 1]$	
$\cos x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to [-1, 1]$		$[0, \pi] \to [-1, 1]$	
$\cos x$	$[0, \pi/2] \to [0, 1]$		$[0, \pi] \to [0, 1]$		$[0, 1] \to [0, 1]$	
$\tan x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$		$(0, \pi/2) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	
$2^{\cos x}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, \pi] \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to [1/2, 2]$	
$\cos(2^x)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to [-1, 1]$		$\mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$	
$\cos^3 x^2$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, \pi] \to [-1, 1]$		$[0, 1] \to [0, 1]$	

Funzioni 2

Argomenti: immagine e controimmagine **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

In ogni riga della seguente tabella vengono presentate delle funzioni, tutte pensate come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si chiede di determinare immagine e controimmagine degli insiemi indicati.

Funzione	D	$f(D)$	E	$f^{-1}(E)$
x^2	$[-2, 1]$		$[-2, 1]$	
x^2	$[1, 2]$		$[1, 2]$	
x^2	$[-2, -1]$		$[-2, -1]$	
$(x-3)^2$	$[0, 1]$		$[0, 1]$	
$x^2 - 3$	$[0, 1]$		$[0, 1]$	
$\|x+2\|$	$[-3, -2]$		$(1, +\infty)$	
$\|\|x\| - 3\|$	$[-1, 4]$		$(1, 4]$	
$\|x^2 - 3\|$	$\{3, 4\}$		$\{3, 4\}$	
$\|x^2 - 3\|$	$[-1, 1]$		$[-1, 1]$	
$\sqrt{\|x\|}$	$(-1, 1)$		$(-1, 1)$	
3^x	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$	
3^x	$(0, 1)$		$(0, 1)$	
3^x	$\{0, 1\}$		$\{0, 1\}$	
$\|2^x - 2\|$	$[0, 2]$		$[0, 2]$	
$2^{\|x\|}$	$(-\infty, 0]$		$[2, 4]$	
$\log_3(9 + \|x+9\|)$	$(-\infty, -1)$		$(1, +\infty)$	
$\sin x$	$(0, 1)$		$(1, 4)$	
$\sin x$	$(0, 3)$		$(-3, 3)$	
$2^{\sin x}$	$\mathbb{R}$		$(2, +\infty)$	
$\sin 2^x$	$(0, 2\pi)$		$[0, 1/2]$	
$\sqrt[4]{\|\cos x\|}$	$[0, 4]$		$[0, 4]$	
$\|\sin x - 1\|$	$[0, \pi]$		$\{1\}$	

Funzioni 3

Argomenti: equazioni con parametro **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

---

Determinare gli insieme costituiti dai valori del parametro reale λ per cui le seguenti equazioni hanno, rispettivamente, zero, una, due o infinite soluzioni (reali distinte).

Equazione	0 sol.	1 sol.	2 sol.	∞ sol.
$x^2 = \lambda$				
$x^{33} = \lambda$				
$x^{2014} = \lambda$				
$8^x = \lambda$				
$\log_7 x = \lambda$				
$\sin x = \lambda$				
$\arctan x = \lambda$				
$\cos^3 x^2 = \lambda$				
$\lvert x-7\rvert = \lambda$				
$\lvert x^2 - x\rvert = \lambda$				
$\log_5 \lvert x\rvert = \lambda$				
$\lvert \log_5 x\rvert = \lambda$				
$x^2 - \lvert x-3\rvert = \lambda$				
$\lvert x-1\rvert + \lvert x-2\rvert = \lambda$				
$\lvert x-1\rvert - \lvert x-2\rvert = \lambda$				
$\lvert \lvert x-7\rvert - 6\rvert = \lambda$				
$7^{\lvert 3-x\rvert} = \lambda$				
$\log_3(x^2+9) = \lambda$				
$\arccos^2(7^{x^3}) = \lambda$				
$3^x = 2^\lambda + \lambda^2$				
$\arccos(x + 2^\lambda) = \lambda$				
$x^2 - x = \lambda^2 - \lambda$				

Funzioni 4

Argomenti: funzioni pari, dispari, periodiche **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

---

Determinare se le seguenti funzioni sono pari/dispari/periodiche (nel caso di funzioni periodiche si richiede di indicare il minimo periodo). Tutte le funzioni si intendono definite sul più grande insieme in cui hanno senso ed a valori in $\mathbb{R}$.

Funzione	Pari	Disp.	Per.	Funzione	Pari	Disp.	Per.
x^{22}				x^{33}			
$x^{22}+x^{33}$				$x^{33}-x^{55}$			
x^{-22}				x^{-33}			
$\sqrt{x}$				$\sqrt[3]{x}$			
$\sqrt{\lvert x\rvert}$				$\lvert\sqrt[3]{x}\rvert$			
$\lvert x^2-x\rvert$				$x^2-\lvert x\rvert$			
$\lvert x^3-x\rvert$				$\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$			
$\sin(x^2)$				$\sin^2 x$			
$\sin(x^3)$				$\sin^3 x$			
$\cos(x^2)$				$\cos^2 x$			
$\cos(x^3)$				$\cos^3 x$			
$\sin x+\cos x$				$\sin\lvert x\rvert$			
$\sin\lvert x\rvert$				$\lvert\sin x\rvert$			
$\cos\lvert x\rvert$				$\lvert\cos x\rvert$			
$\sin(\sin x)$				$\sin(\cos x)$			
$\cos(\sin x)$				$\cos(\cos x)$			
$\arctan\lvert x\rvert$				$\lvert\arctan x\rvert$			
$3^{\sin x}$				$3^{\cos x}$			
$\cos(7x)$				$\tan\lvert x/3\rvert$			
2^{x^2}				$3^{2-\lvert x\rvert}$			
$\arctan(x-\sin x)$				$\sin(2^{\lvert x\rvert})$			
$\arctan(x-\cos x)$				$\sin(2^x)$			

Funzioni – Esercizi Teorici 1

Argomenti: funzioni tra insiemi **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, iniettività, surgettività, composizione

---

1. (Iniettività, surgettività e composizione) Enunciare per bene e dimostrare i seguenti fatti.
   (a) La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva.
   (b) La composizione di due funzioni surgettive è surgettiva.
   (c) La composizione di due funzioni invertibili è invertibile. Come si scrive l'inversa della composizione conoscendo le inverse delle due componenti?
   (d) Se la composizione di due funzioni è iniettiva, allora la più interna è iniettiva.
   (e) Se la composizione di due funzioni è surgettiva, allora la più esterna è surgettiva.

   Generalizzare al caso di composizione di n funzioni.

2. Trovare due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che g non è iniettiva, ma $g \circ f$ lo è.

3. Trovare due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che f non è surgettiva, ma $g \circ f$ lo è.

4. Sia A un insieme, e sia $f : A \to A$ una funzione. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $f \circ f$ è iniettiva. Stessa cosa con "surgettiva". Generalizzare al caso di f composta con se stessa n volte.

5. (Inverse destre e sinistre) Sia $f : A \to B$ una funzione. Determinare tutte le possibili implicazioni tra le seguenti affermazioni:
   (a) f è iniettiva,
   (b) f è surgettiva,
   (c) esiste $g : B \to A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$ (inversa sinistra),
   (d) esiste $g : B \to A$ tale che $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in b$ (inversa destra).

6. (a) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ammetta almeno due inverse sinistre.
   (b) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ammetta almeno due inverse destre.
   (c) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che sia l'inversa di se stessa e tale che $f(n) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Trovare una funzione $f : (0, 1) \to [0, 1]$ che sia invertibile.

7. Siano A un insieme di m elementi e B un insieme di n elementi. Dimostrare che
   (a) esistono funzioni da A in B iniettive se e solo se $m \leq n$,
   (b) esistono funzioni da A in B surgettive se e solo se $m \geq n$.

   Ma stiamo usando qualche ipotesi non scritta su m ed n?

8. Sia A un insieme finito. Dimostrare che una funzione $f : A \to A$ è iniettiva se e solo se è surgettiva.

Funzioni – Esercizi Teorici 2

Argomenti: funzioni tra insiemi **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, iniettività, surgettività, immagine e controimmagine

---

1. Siano A e B due insiemi, e sia $f : A \to B$ una funzione. Supponiamo che esista $g : B \to A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$, e che esista $h : B \to A$ tale che $f(h(b)) = b$ per ogni $b \in B$.

   Possiamo concludere che f è invertibile?

2. Siano A e B due insiemi. Discutere la validità dei seguenti enunciati (hint: uno è vero, l'altro no ma quasi).
   (a) Se esiste $f : A \to B$ iniettiva, allora esiste $g : B \to A$ surgettiva.
   (b) Se esiste $f : A \to B$ surgettiva, allora esiste $g : B \to A$ iniettiva.

3. Sia A un insieme, e sia $f : A \to A$ una funzione tale che $f(f(a)) = f(a)$ per ogni $a \in A$. Indichiamo con $\mathrm{Fix}(A) = \{a \in A : f(a) = a\}$ l'insieme dei punti fissi di f.
   (a) Dimostrare che $f(A) = \mathrm{Fix}(A)$.
   (b) Dimostrare che f è iniettiva se e solo se f è l'identità (cioè $f(a) = a$ per ogni $a \in A$).
   (c) Dimostrare che f è surgettiva se e solo se f è l'identità.
   (d) Indicata con $f^{(n)}$ la funzione f composta con se stessa n volte, dimostrare che $f^{(n)}(a) = f(a)$ per ogni $a \in A$ ed ogni intero positivo n.

4. (Proprietà insiemistiche di immagine e controimmagine)
   (a) Enunciare per bene (quantificando tutto e specificando caso per caso chi sono f, D ed E) e poi dimostrare le eventuali relazioni di inclusione tra
   $$f(D \cup E) \text{ e } f(D) \cup f(E), \qquad f(D \cap E) \text{ e } f(D) \cap f(E),$$
   $$f^{-1}(D \cup E) \text{ e } f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E), \qquad f^{-1}(D \cap E) \text{ e } f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E).$$
   (b) Stessa cosa con la differenza $D \setminus E$ e la differenza simmetrica $D \triangle E$.
   (c) Generalizzare il punto (a) al caso di unioni ed intersezioni di famiglie arbitrarie di sottoinsiemi.
   (d) Enunciare e dimostrare le relazioni tra $f^{-1}(f(D))$ e D e tra $f(f^{-1}(E))$ e E.
   (e) Determinare cosa cambia nelle inclusioni del punto (d), rispetto al caso generale, se si assume che f sia iniettiva e/o surgettiva.

5. Dimostrare che per ogni insieme A si verifica una ed una sola delle seguenti tre possibilità:
   - $A = \emptyset$,
   - esiste un intero positivo n ed una funzione bigettiva $f : A \to \{1, \ldots, n\}$,
   - esiste una funzione $f : A \to A$ iniettiva ma non surgettiva.

   [to be completed]

Funzioni – Esercizi Teorici 3

Argomenti: proprietà qualitative di funzioni reali **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: proprietà di monotonia, funzioni periodiche

---

1. (a) Cosa possiamo dire della somma di due funzioni strettamente crescenti/decrescenti?
   (b) Cosa possiamo dire del prodotto di due funzioni strettamente crescenti/decrescenti? E se aggiungiamo l'ipotesi che siano positive/negative?
   (c) Cosa possiamo dire della composizione di due funzioni strettamente monotone (ci sono quattro casi)? E della composizione di due funzioni debolmente monotone?

2. (Monotonia, iniettività, surgettività)
   (a) Dimostrare che una funzione strettamente monotona è iniettiva (precisare da dove a dove ...).
   (b) Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia strettamente crescente ma non surgettiva.
   (c) Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia iniettiva ma non monotona.

3. Nella seguente tabella vengono presentate quattro implicazioni. Discutere, al variare delle ipotesi di monotonia su f, se tali implicazioni sono vere o false per ogni funzione ed ogni valore di x e y. Ovviamente quando sono vere occorre trovare una dimostrazione, quando sono false un controesempio.

Implicazione	Deb. cresc.	Strett. cresc.	Deb. decr.	Strett. decr.
$f(x) > f(y) \;\Rightarrow\; x > y$				
$f(x) \geq f(y) \;\Rightarrow\; x \geq y$				
$f(x) > f(y) \;\Rightarrow\; x < y$				
$f(x) \geq f(y) \;\Rightarrow\; x \leq y$				

4. (a) Dimostrare che l'insieme dei periodi di una funzione periodica (includendo anche il periodo nullo e quelli negativi) è un sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ (modo raffinato di dire che la somma di due periodi è ancora un periodo).
   (b) Siano f e g due funzioni periodiche con periodi T_f e T_g, rispettivamente. Dimostrare che, se $T_f/T_g \in \mathbb{Q}$, allora le funzioni $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono periodiche. Possiamo dire qualcosa del loro periodo minimo?
   (c) Trovare una funzione periodica non costante per cui non esiste un minimo periodo.

5. (Di solito è facile convincersi che una funzione non è periodica, ma dimostrarlo formalmente può non essere affatto semplice)

   Dimostrare per bene che le seguenti funzioni non sono periodiche:

$$\arctan x, \qquad \sin 2^x, \qquad \sin |x|, \qquad \sin x^2, \qquad \sin x + \sin(\sqrt{2}\,x).$$

Induzione 1

Argomenti: principio di induzione **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: principio di induzione

1. Dimostrare le seguenti identità
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

2. Dimostrare che per ogni $a \neq 1$ si ha che
$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$
Cosa succede nel caso $a = 1$? Estendere il risultato alla somma a segni alterni (con ultimo esponente pari)
$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{2n}.$$

3. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

4. Quantificare e dimostrare le *identità trigonometriche di Lagrange*:
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos(x/2) - \cos[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)}.$$

5. Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ la funzione definita da
$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$
Determinare una formula esplicita per la funzione ottenuta componendo f con se stessa n volte.

6. Una successione è stata definita ponendo $a_0 = 3$, $a_1 = a_0^2$, $a_2 = a_1^2$, $a_3 = a_2^2$, e così via. Determinare a_{2014}.

7. Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti disuguaglianze
$$2^n \geq n, \qquad 2^n \geq n^3, \qquad n! \geq 2^n, \qquad n! \leq 2^{n^2}, \qquad 3^n + 4^n < 5^n.$$

8. Dimostrare che $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$ per ogni intero $n \geq 37$.

9. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ valgono le seguenti disuguaglianze con i binomiali (pensare a quale relazione c'è tra queste disuguaglianze):
$$\binom{2n}{n} \leq 4^n, \qquad \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}, \qquad \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n}}.$$

Induzione 2

Argomenti: principio di induzione **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: principio di induzione

1. (Disuguaglianza di Bernoulli) Dimostrare che per ogni $x > -1$ si ha che
$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Dove interviene l'ipotesi $x > -1$ nella dimostrazione? Che ne è dell'enunciato nel caso $x \leq -1$?

2. Provare a dimostrare che per ogni $x \geq 0$ si ha che
$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
e vedere che succede. Provare invece a dimostrare che
$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Generalizzare questo tipo di disuguaglianze (avendo in mente il Binomio di Newton).

3. (Stime per radici n-esime)
   (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale la stima
   $$\sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$
   Determinare una stima analoga per $\sqrt[n]{a}$ in funzione del parametro $a > 1$.
   (b) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 2$ vale la stima
   $$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

4. Dimostrare che per ogni coppia di interi $1 \leq k \leq n$ vale la disuguaglianza
$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.$$

5. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor,$$
dove $\lfloor \alpha \rfloor$ indica la parte intera del numero reale α, cioè il più piccolo intero $m \leq \alpha$.

6. Dimostrare che
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 \qquad \forall n \geq 1.$$

Funzioni trigonometriche inverse 1

Argomenti: principio di induzione **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: principio di induzione

1. Completare la seguente tabella

$\arcsin(-1)$		$\arccos(-1)$		$\arctan(-1)$	
$\arcsin(0)$		$\arccos(0)$		$\arctan(0)$	
$\arcsin(1)$		$\arccos(1)$		$\arctan(1)$	
$\arcsin(1/2)$		$\arccos(1/2)$		$\arctan(\sqrt{3})$	
$\arcsin(-1/2)$		$\arccos(-1/2)$		$\arctan(-\sqrt{3})$	
$\arcsin(\sqrt{3}/2)$		$\arccos(\sqrt{3}/2)$		$\arctan(1/\sqrt{3})$	
$\arcsin(-\sqrt{3}/2)$		$\arccos(-\sqrt{3}/2)$		$\arctan(-1/\sqrt{3})$	

2. (a) Dimostrare che
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1,1].$$
(b) Dimostrare che
$$\arctan x + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x > 0, \\ -\pi/2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

3. Determinare formule per le seguenti quantità (si raccomanda come sempre di quantificare)
$$\arcsin(-x) = \ldots\ldots\ldots \qquad \arccos(-x) = \ldots\ldots\ldots \qquad \arctan(-x) = \ldots\ldots\ldots$$

4. Dimostrare la *formula di addizione* per l'arcotangente (prima di dimostrarla, occorre in realtà quantificarla per bene ...)
$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$
Dedurne la corrispondente formula di sottrazione.

5. Risolvere l'equazione
$$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Semplificare le seguenti funzioni, scrivendole senza ricorrere a funzioni trigonometriche (occhio in tutti i casi a quantificare le formule):

$\sin(\arcsin x)$		$\sin(\arccos x)$		$\sin(\arctan x)$	
$\cos(\arcsin x)$		$\cos(\arccos x)$		$\cos(\arctan x)$	
$\tan(\arcsin x)$		$\tan(\arccos x)$		$\tan(\arctan x)$	

Funzioni trigonometriche inverse 2

Argomenti: principio di induzione **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: principio di induzione

1. Completare la seguente tabella (se la quantità richiesta non ha senso, farlo presente!):

$\arcsin(\sin(1/2))$		$\arccos(\cos(1/2))$		$\arctan(\tan(1/2))$	
$\arcsin(\sin 1)$		$\arccos(\cos 1)$		$\arctan(\tan 1)$	
$\arcsin(\sin 2)$		$\arccos(\cos 2)$		$\arctan(\tan 2)$	
$\arcsin(\sin 3)$		$\arccos(\cos 3)$		$\arctan(\tan 3)$	
$\arcsin(\sin 4)$		$\arccos(\cos 4)$		$\arctan(\tan 4)$	
$\sin(\arcsin 1/2)$		$\cos(\arccos 1/2)$		$\tan(\arctan 1/2)$	
$\sin(\arcsin 1)$		$\cos(\arccos 1)$		$\tan(\arctan 1)$	
$\sin(\arcsin 2)$		$\cos(\arccos 2)$		$\tan(\arctan 2)$	

2. (a) Disegnare i grafici delle funzioni (precisando in particolare cosa differenzia il primo dal terzo)

$$\arcsin(\sin x), \qquad \arccos(\cos x), \qquad \arctan(\tan x).$$

   (b) Disegnare i grafici delle funzioni

$$\sin(\arcsin x), \qquad \cos(\arccos x), \qquad \tan(\arctan x).$$

3. Nella seguente tabella si considerano alcune restrizioni delle usuali funzioni trigonometriche ad insiemi diversi da quelli standard. Si richiede di dimostrare che tali restrizioni danno luogo a funzioni invertibili e di determinare l'espressione delle funzioni inverse in termini delle funzioni trigonometriche inverse classiche.

Funzione	Definizione	Partenza/Arrivo	Inversa
$\text{mycos}\, x$	$\cos x$	$[8\pi, 9\pi] \to [-1 - 1]$	
$\text{yourcos}\, x$	$\cos x$	$[9\pi, 10\pi] \to [-1 - 1]$	
$\text{hersin}\, x$	$\sin x$	$[7\pi/2, 9\pi/2] \to [-1, 1]$	
$\text{hissin}\, x$	$\sin x$	$[9\pi/2, 11\pi/2] \to [-1, 1]$	
$\text{ourtan}\, x$	$\tan x$	$(15\pi/2, 17\pi/2) \to \mathbb{R}$	

Numeri reali 1

Argomenti: ragionamento astratto, numeri reali **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di campo

1. (a) Dimostrare che un campo in cui $1 = 0$ ha un solo elemento.

   (b) Dimostrare che in un campo con almeno due elementi lo 0 non è invertibile (rispetto al prodotto).

2. (Tutto quello che abbiamo sempre usato, ma che negli assiomi di campo non compare)

   Sia $\mathbb{K}$ un campo. Quantificare bene e dimostrare le seguenti proprietà (attenzione ad usare solo gli assiomi presenti nella definizione di campo).

   - Se $a + c = b + c$, allora $a = b$ (legge di semplificazione per la somma).
   - Se $ac = bc$ e $c \neq 0$, allora $a = b$ (legge di semplificazione per il prodotto).
   - L'elemento 0 è unico.
   - $a \cdot 0 = 0$.
   - Se $ab = 0$, allora $a = 0$ oppure $b = 0$ (legge di annullamento del prodotto).
   - L'opposto è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $a + b = 0$. Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $-a$.
   - $-(-a) = a$.
   - L'elemento 1 è unico.
   - Il reciproco è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$, con $a \neq 0$, esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $ab = 1$ (solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $1/a$).
   - $1/(1/a) = a$ per ogni $a \neq 0$.
   - $(1/a) \cdot (1/b) = 1/(a \cdot b)$.
   - $(-1) \cdot (-1) = 1$.
   - $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ e $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ per ogni a e b in $\mathbb{K}$.
   - $2 + 2 = 4$ (ma cosa vuol dire?).

3. (Tutto quello che abbiamo sempre usato tranquillamente, ma che negli assiomi dei numeri reali non compare)

   Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato. Quantificare bene e dimostrare le seguenti proprietà (attenzione ad usare solo gli assiomi algebrici e di ordinamento e non altre proprietà "usuali").

   - Se $a \geq b$ e $c \geq d$, allora $a + c \geq b + d$ (qual è l'analogo per il prodotto?).
   - Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$.
   - Se $a > 0$, allora $-a < 0$.
   - Se $a > 0$, allora $1/a > 0$.
   - $1 > 0$.
   - $1/2 < 1$.

Numeri reali 2

Argomenti: consolidamento della teoria, ragionamento astratto **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di campo ordinato

---

1. Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti.
   (a) Dimostrare che $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
   (b) Supponendo che anche $A \cap B \neq \emptyset$, dimostrare che $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Trovare un esempio in cui la disuguaglianza è stretta.

2. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia arbitraria di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$. Dimostrare che
$$\sup\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup\{\sup a_i : i \in I\}, \qquad \sup\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \leq \inf\{\sup a_i : i \in I\},$$
dove nel secondo caso assumiamo che l'intersezione di tutti i sottoinsiemi sia non vuota.

3. Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti.
   (a) Definiamo $A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Dimostrare che (attenzione: la formula va un po' interpretata quando ci sono dei $+\infty$)
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$
   (b) Enunciare e dimostrare un risultato analogo per $A - B$.
   (c) Capire perché le cose si complicano per l'insieme $A \cdot B$.

4. Dimostrare che tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ ammettono massimo e minimo.

5. Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, con A a sinistra di B, come nell'assioma di continuità. Dimostrare che il separatore è unico se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esitono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a \leq \varepsilon$.

6. (Densità dei razionali) Se x e y sono numeri reali con $x < y$, allora esiste un numero razionale q tale che $x < q < y$.

7. Dimostrare che per ogni numero reale r si ha che
$$\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < r\} = r.$$

8. (a) Sia $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di intervalli chiusi (cioè con gli estremi compresi) tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   Dimostare che l'intersezione di tutti gli I_n è non vuota.
   (b) Cambia qualcosa se si toglie l'ipotesi che gli intervalli siano chiusi?

9. Sia $G \subseteq \mathbb{R}$ un sottogruppo additivo. Mostrare che o G è denso, o esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che
$$G = \{\alpha z : z \in \mathbb{Z}\}.$$

Quantificatori 3

Argomenti: consolidamento della teoria **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di estremo inferiore e superiore, definizione di limite

---

Nelle righe e nelle intestazioni delle ultime quattro colonne sono riportate delle proprietà di un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto (tecnicamente sono dei predicati con A come parametro). Si chiede di indicare in ogni casella

- $\Uparrow$ se l'affermazione di quella riga implica l'affermazione in testa a quella colonna,
- $\Downarrow$ se l'affermazione di quella riga è implicata dall'affermazione in testa a quella colonna,
- $\Updownarrow$ se sono equivalenti,
- "$\Rightarrow \neg$" se sono incompatibili, cioè se l'affermazione di quella riga implica la negazione dell'affermazione in testa a quella colonna.

Proprietà	$\sup A = +\infty$	$\sup A \in \mathbb{R}$	$\inf A = -\infty$	$\inf A \in \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in A \quad y \geq x$				
$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in A \quad y \geq x$				
$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in A \quad y \geq x$				
$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in A \quad y \geq x$				
$\forall x \in A\ \exists y \in A \quad y \geq x$				
$\exists x \in A\ \forall y \in A \quad y \geq x$				
$\forall x \in A\ \exists y \in A \quad y \geq x+1$				
$\exists x \in A\ \forall y \in A \quad y \geq x+1$				
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in A \quad y > x$				
$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in A \quad y > x$				
$\forall x \in A\ \exists y \in A \quad y > x$				
$\exists x \in A\ \forall y \in A \quad y > x$				

Decifrare le seguenti scritture (le prime inerenti una successione a_n, l'ultima inerente una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq M \qquad\qquad \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq M$$

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq M \qquad\qquad \exists M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq M$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad |7 - a_n| \leq \varepsilon \qquad\qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq n_0 \quad |7 - a_n| \leq \varepsilon$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \qquad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Limiti 1

Argomenti: limiti di successioni **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: teoremi algebrici e di confronto

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite	Successione	Limite
$n^4 + n^3$		$n^4 - n^3$		$n^4 - n^5$	
$2n^2 - 3n^3 + 25$		$10\sqrt{n} + 32 - n$		$n + 2n\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^4}$	
$\dfrac{7-n}{1+n^2}$		$\dfrac{7-n^2}{1+n^2}$		$\dfrac{7-n^3}{1+n^2}$	
$\dfrac{n^3+3n^2+2}{1-5n+3n^3}$		$\dfrac{n^3+3n^4+2}{1-5n+3n^3}$		$\dfrac{n+3n^2+2}{1-5n+3n^3}$	
$\dfrac{n\sqrt{n}+2n}{n+\sqrt{n^3}}$		$\dfrac{n+2\sqrt{n}}{3n+4\sqrt{n}}$		$\dfrac{\sqrt{2n}+\sqrt[3]{3n}}{\sqrt{2n}+\sqrt[3]{7n}}$	
$\dfrac{\sqrt[4]{n}-\sqrt[5]{n}}{\sqrt[6]{n}-\sqrt[7]{n}}$		$\dfrac{\sqrt[4]{n}-n\sqrt[5]{n}}{\sqrt[6]{n}-n\sqrt[7]{n}}$		$\dfrac{\sqrt[4]{n}-\sqrt[5]{n}}{\sqrt[6]{n}-\sqrt[7]{n^2}}$	
$n + \dfrac{n^2+n}{n+3}$		$n - \dfrac{n^2+n}{n+3}$		$\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}$	
$n + \sin n$		$n - \sin n$		$n - \sqrt{n}\cos n^2$	
$\dfrac{\sin n}{n}$		$\dfrac{\sin n^3}{\sqrt{n}}$		$\dfrac{\cos n!}{n^2}$	
$\dfrac{2+\sin n}{n}$		$\dfrac{2+\sin n^2}{n}$		$n(2+\sin n)$	
$\dfrac{\cos n + n^2}{n+\arctan n^2}$		$\dfrac{\cos n^2 + n}{n^2+\arctan n}$		$\dfrac{\cos n^2 + n}{n+\arctan n^2}$	
$\dfrac{n\sin n^2 + n^2\sin n}{(n+1)(n+\sqrt{n^3})}$		$\dfrac{\sin\sqrt[3]{n} - \cos\sqrt[4]{n}}{\sqrt[5]{n}-\sqrt[6]{n}}$		$\dfrac{\cos n + n}{\arctan n + n}$	
$n\left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{n}\right)$		$\dfrac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}{2+\sin n^2}$		$\dfrac{\sqrt{n}}{7+(-1)^n\sin n}$	

Nota. L'esercizio precedente andrebbe svolto almeno due volte: all'inizio dello studio dei limiti, scrivendo per bene tutti i passaggi con le motivazioni formali che li giustificano (teoremi algebrici o di confronto, ed in quale versione), poi più avanti nella preparazione, determinando il risultato di ogni limite in meno di 20 secondi e senza scrivere nulla.

Limiti 2

Argomenti: limiti di successioni **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: criteri del rapporto, della radice, del rapporto $\to$ radice

Calcolare i limiti delle seguenti successioni (esplicitando tutti i dettagli, almeno quando si svolge l'esercizio per la prima volta).

Success.	Limite	Success.	Limite	Success.	Limite	Success.	Limite
$\frac{3^n}{n^3}$		$\frac{3^n}{n!}$		$\frac{n!}{n^n}$		$\frac{3^{n^2}}{n^n}$	
$\frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$		$\frac{n!\cdot 3^n}{n^n}$		$\frac{n!\cdot 3^n}{n^{2n}}$		$\frac{n^{n^2}}{3^{n^3}}$	
$\frac{(n!)^2}{n^n}$		$\frac{(2n)!}{n^n}$		$\frac{(n!)^2}{(2n)!}$		$\frac{(2n)!}{3^{n^2}}$	
$\sqrt[n]{n}$		$\sqrt[n]{n!}$		$\binom{3n}{n}$		$\sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$	
$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$		$\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}$		$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$		$\frac{(2n)!}{n^{3n}}$	

Successione	Limite	Successione	Limite	Successione	Limite
$2^n - n^2$		$3^n - n!$		$n^2 - n! + n^n$	
$\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}$		$\frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$		$\frac{2^n - n!}{n! + n^{22}}$	
$\frac{33^n - n^{33}}{3^{n^2}}$		$\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$		$\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	
$\frac{n!(4n)!}{(2n)!(3n)!}$		$\sqrt[n]{\frac{n!(4n)!}{(2n)!(3n)!}}$		$(5n)! - (2n)!(3n)!$	
$\binom{3n}{n} - 6^n$		$\binom{3n}{n} - 7^n$		$\binom{3n}{n} - \binom{3n}{n+1}$	
$\frac{n! + (3n)^n}{n! - (2n)^{2n}}$		$\frac{\sqrt{n!} + 2^{\sqrt{n}}}{3^n + n^3}$		$\frac{5^n + (-2)^n}{4^n + (-3)^n}$	
$\frac{n^{n!}}{(n!)^n}$		$n^{n!} - (n!)^{n^3}$		$\frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!}$	

Limiti 3

Argomenti: limiti di successioni **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: teoremi algebrici, teoremi di confronto, teoremi rapporto/radice

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, i limiti delle seguenti successioni:
$$\frac{n^3+5n^\alpha+3}{n^4+7n+1}, \qquad \frac{n^2+3\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^\alpha}}, \qquad \frac{n^2+2n+3}{n+5}-\alpha n.$$

2. Calcolare i limiti delle seguenti successioni:
$$\frac{|3n^2-n^3|-7n}{|6n-95|+5n^3}, \qquad \frac{||2-3n^4|-|16-12n^2|-8|}{(n+3)^5-n^5}, \qquad \frac{|n^3+(-1)^n n^2|}{|n^2+(-1)^n n^3|}.$$

3. (a) Calcolare i limiti delle seguenti successioni:
$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=n^2}^{2n^2}\frac{1}{\sqrt[5]{k}}, \qquad \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}.$$
   (b) Determinare per quali valori del parametro reale α le seguenti successioni tendono a zero:
$$n^\alpha\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{k^2}, \qquad \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \qquad n\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{k^\alpha}, \qquad n^\alpha\sum_{k=n}^{n^2}\frac{k^2}{2^k}.$$

4. Dimostrare che il seguente limite esiste ed è reale (più avanti nel corso si chiederà di calcolarlo esplicitamente):
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

5. Calcolare i limiti delle seguenti successioni, giustificando dettagliatamente i passaggi:
$$\sqrt[n]{4^n+n^4}, \qquad \sqrt[n]{4^n+3^n}, \qquad \sqrt[n]{4^n-3^n}, \qquad \sqrt[n]{n!-4^n}.$$

6. Calcolare, al variare del parametro reale α, i limiti delle seguenti successioni:
$$\sqrt[n]{\alpha^n+n^4}, \qquad \sqrt[n]{\alpha^n+4^n}, \qquad \sqrt[n]{\alpha^n+n!}, \qquad \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n}{2^n+\alpha^n}}.$$

7. Dimostrare che le seguenti successioni sono ben definite e calcolarne il limite:
$$(\arctan n-\sin n)^{1/n}, \qquad \left(\arccos\frac{2014}{\sqrt{n}}-\sin n!\right)^{1/n}.$$

8. Calcolare, al variare del parametro reale positivo α, i limiti delle seguenti successioni:
$$\frac{(n!)^{1/\alpha}}{\alpha^n}, \qquad \frac{(n!)^\alpha}{\alpha^{n!}}, \qquad (n!)^{1/n^\alpha}, \qquad [(2n)!]^{1/n^\alpha}.$$

Limiti - Esercizi teorici 1

Argomenti: teoremi algebrici per i limiti **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di limite di successioni

1. (Limiti e valori assoluti) Sia a_n una successione.
   (a) Dimostrare che $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$.
   (b) Dimostrare che, se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $|a_n| \to |\ell|$.
   (c) Discutere l'implicazione opposta del punto precedente.

2. (Limite della somma) Siano a_n e b_n due successioni. Dimostrare i seguenti fatti.
   (a) Se $a_n \to a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b_\infty \in \mathbb{R}$, allora $a_n + b_n \to a_\infty + b_\infty$.
   (b) Se $a_n \to +\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora $a_n + b_n \to +\infty$.
   (c) Se $a_n \to +\infty$ e b_n è limitata superiormente, allora $a_n + b_n \to -\infty$.

3. (Limite del prodotto) Siano a_n e b_n due successioni. Dimostrare i seguenti fatti.
   (a) Se $a_n \to a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b_\infty \in \mathbb{R}$, allora $a_n \cdot b_n \to a_\infty \cdot b_\infty$.
   (b) Se $a_n \to 0$ e b_n è limitata, allora $a_n \cdot b_n \to 0$.
   (c) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to b_\infty \in (0, +\infty)$, allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$.
   (d) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$.
   (e) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste una costante $\nu > 0$ tale che $b_n \geq \nu$ definitivamente, allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$. Capire come e perché questo punto unifica ed estende i due enunciati precedenti.
   (f) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste una costante $\nu < 0$ tale che $b_n \geq \nu$ definitivamente, allora $a_n \cdot b_n \to -\infty$. Dedurre da questo i casi rimanenti.

4. (Limite del reciproco) Sia a_n una successione. Dimostrare i seguenti fatti.
   (a) Se $a_n \to a_\infty \in (0, +\infty)$, allora $1/a_n \to 1/a_\infty$.
   (b) Se $a_n \to +\infty$, allora $1/a_n \to 0^+$.
   (c) Se $a_n \to -\infty$, allora $1/a_n \to 0^-$.
   (d) Se $a_n \to 0^+$, allora $1/a_n \to +\infty$.
   (e) Se $a_n \to 0^-$, allora $1/a_n \to -\infty$.

5. (Limite del quoziente) Capire come i vari casi per limite del quoziente si possano dedurre dal limite del prodotto e del reciproco.

6. (a) Esibire due successioni $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$ e tali che $a_n + b_n$ abbia ciascuno dei quattro possibili comportamenti (limite reale, $+\infty$, $-\infty$, oppure indeterminata).
   (b) Esibire analoghi esempi anche per le altre forme indeterminate.
   (c) Esibire una successione $a_n \to 0$, con $a_n \neq 0$ sempre, tale che $1/a_n$ non ha limite.

Limiti 4

Argomenti: limiti di funzioni **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: funzioni elementari, limiti notevoli, teoremi algebrici e di confronto

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare il limite per x tendente a ciascuno dei valori indicati (se la richiesta non ha senso, accorgersene e segnalarlo).

Funzione	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite
x^{22}	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
x^{33}	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
x^{-22}	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
x^{-33}	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\sqrt{x}$	$-\infty$		0^+		1		$+\infty$	
$\sqrt[5]{x}$	$-\infty$		0^+		1		$+\infty$	
e^x	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
e^{-x}	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\log x$	$-\infty$		0^+		1		$+\infty$	
$\arctan x$	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$x \log x$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\dfrac{\sin x}{x}$	$-\infty$		0		π		$+\infty$	
$\dfrac{1-\cos x}{x^2}$	$-\infty$		0		$\pi/2$		$+\infty$	
$\dfrac{\log(1+x)}{x}$	$-\infty$		-1^+		0		$+\infty$	
$\dfrac{e^x-1}{x}$	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$\dfrac{7^x-1}{x}$	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$\dfrac{\cos x}{x}$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\dfrac{\arccos x}{x}$	-1		0^-		0^+		$+\infty$	
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	

Limiti 5

Argomenti: limiti di funzioni **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: limiti notevoli, confronto di ordini di infinito e di infinitesimo

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare il limite per x tendente a ciascuno dei valori indicati (se la richiesta non ha senso, accorgersene e segnalarlo).

Funzione	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite
$\dfrac{x^3+x}{x^3-x}$	$-\infty$		0		1^+		$+\infty$	
$\dfrac{x^3+2\sqrt{x}}{3x^2-\sqrt{x}}$	$-\infty$		0^+		1		$+\infty$	
x^3-3^x	$-\infty$		0^+		1		$+\infty$	
$x+\log(x^{10})$	$-\infty$		0^-		1		$+\infty$	
$\dfrac{x^2+2^x}{3x^2+3^x}$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\dfrac{x^2+1}{x-1}$	$-\infty$		0		1^-		$+\infty$	
$\dfrac{\log x}{x}$	0^-		0^+		1		$+\infty$	
$\dfrac{x^2-2\log x}{3x^2+\log x}$	$-\infty$		0^+		1		$+\infty$	
$\dfrac{x^2+\sin x}{\arctan x}$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\dfrac{x+2\sin x}{x+3\arctan x}$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\dfrac{2^x+3^{x^2}}{x^3}$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\dfrac{x^2+\cos x}{x-\pi}$	$-\infty$		0		π^-		$+\infty$	
$\dfrac{2\sqrt[3]{x}+\sin x}{\sqrt[3]{x}-\arctan x}$	$-\infty$		0^-		0^+		$+\infty$	
$\dfrac{x+\sin x}{\log x}$	$-\infty$		0^+		1		$+\infty$	

Limiti 6

Argomenti: limiti di funzioni e successioni **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: limiti notevoli, criterio funzioni $\to$ successioni

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni (tutti i limiti si intendono per $x \to 0$).

Funzione	Limite	Funzione	Limite	Funzione	Limite
$\dfrac{\sin(4x)}{3x}$		$\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$		$\dfrac{\sin x^2}{x^2}$	
$\dfrac{\sin(3x)}{x^3}$		$\dfrac{\sin^2(2x)}{x^2}$		$\dfrac{\sin^2(3x^3)}{x^6}$	
$\dfrac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$		$\dfrac{\sin^2(3x)}{\sin(4x^2)}$		$\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$	
$\dfrac{\sin(3x)}{\arctan(7x)}$		$\dfrac{\sin^2 x^2}{x\arctan(2x^3)}$		$\dfrac{\tan x \cdot \sin x}{\arcsin^2(2x)}$	
$\dfrac{e^{3x}-1}{x}$		$\dfrac{e^{\sin x}-1}{\arctan x}$		$\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2(3x)}$	
$\dfrac{\log(1+x^4)}{x^2\tan^2(2x)}$		$\dfrac{\log^4(1+x)}{x^2\tan^2(2x)}$		$\dfrac{\log(1+\sin x)}{e^{3x}-1}$	
$\dfrac{e^{2x}-\cos x}{x}$		$\dfrac{e^{x}-\cos(2x)}{x}$		$\dfrac{e^{2x}-\cos(3x)}{\log(1+\tan x)}$	

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite	Successione	Limite
$n\sin\dfrac{1}{n}$		$n^3\sin\dfrac{1}{n^3}$		$n^2\cos\dfrac{1}{n^2}$	
$n\sin\dfrac{1}{n^2}$		$n^2\sin\dfrac{1}{n}$		$n^2\tan^2\dfrac{1}{n}$	
$n^2\left(\cos\dfrac{2}{n}-1\right)$		$n\left(\cos\dfrac{2}{n^2}-1\right)$		$n\left(\log(n+1)-\log n\right)$	
$n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$		$n\left(\sqrt[n]{7}-1\right)$		$n\left(\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{5}\right)$	

Si raccomanda di svolgere questa scheda di esercizi almeno due volte: la prima subito dopo aver visto i limiti notevoli, esplicitando tutti i dettagli; la seconda dopo aver capito come si usano gli sviluppini, dedicando meno di 20 secondi ad ogni limite e senza scrivere nulla.

Limiti 7

Argomenti: limiti di funzioni e successioni **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: limiti notevoli, criterio funzioni $\to$ successioni

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni (tutti i limiti si intendono per $x \to 0$).

Funzione	Limite	Funzione	Limite
$\dfrac{\sin(2x+x^3)+x}{\arctan(3x-x^5)-x}$		$\dfrac{\cos(x+x^2)-1}{x\sin x + x\log(1+2x)}$	
$\dfrac{e^{x+\sin(2x)}-1}{\arcsin(5x)}$		$\dfrac{5^{x+\sin(2x)}-\cos x}{\arcsin(5x)}$	
$\dfrac{e^{2x}+\cos(3x)-2}{\arctan x + \arcsin x}$		$\dfrac{e^{2x^2}+\cos(3x)-2}{\arctan x^2 + \arcsin x}$	
$\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$		$(\cos x)^{1/\sin^2 x}$	
$\left(1+\sin(2x^2)\right)^{1/\arctan^2 x}$		$\left(1-\sin^2 x\right)^{1/\tan x}$	
$(2-\cos x)^{x/\sin x^3}$		$\left(2-\cos^{30} x\right)^{x^3/\sin x}$	
$\dfrac{1-\cos^2 x^3}{1-\cos^3 x^2}$		$\dfrac{1-\cos^2 x^3}{1-\cos^3 x^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}$	

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite
$\left(\log(2+n^2)-2\log n\right)n^2$		$\left(2-\cos\dfrac{3}{n+n^2}\right)^{n^4}$	
$n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$		$\dfrac{n}{\log n}\left(\sqrt[n]{2n}-1\right)$	
$\left(\cos\dfrac{1}{n+2}-\sqrt[n]{2}\right)^n$		$\left(n+\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}\right)^{1/\log n}$	
$\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n-2^n$		$\left(2+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\right)^n-2^n$	

Si raccomanda di svolgere questa scheda di esercizi almeno due volte: la prima subito dopo aver visto i limiti notevoli, esplicitando tutti i dettagli; la seconda dopo aver capito come si usano gli sviluppini, scrivendo solo lo stretto necessario in tempi rapidi.

Limiti 8

Argomenti: esistenza e non esistenza di limiti **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: uso di successioni e sottosuccessioni per la non esistenza di limiti

---

In ogni riga della seguente tabella è indicata una successione e quattro sue sottosuccessioni (descritte mediante gli indici n_k che ne fanno parte). Si chiede di determinare, ovviamente quando esiste, il limite delle sottosuccessioni.

Successione	n_k	Limite	n_k	Limite	n_k	Limite	n_k	Limite
$(-1)^n$	$2k$		$2k+1$		k^2		$k!$	
$3+(-1)^n$	$3k+2$		$22k+1$		k^2+k		22^k	
$(-n)^n$	$2k$		$2k+1$		k^2		3^k	
$\sin(n\pi/2)$	$2k$		$2k+1$		$4k+1$		$8k-3$	
$\cos(n\pi/6)$	$6k$		$12k$		$12k+3$		$2k+1$	

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite	Successione	Limite
$n^8+(-1)^n n^5$		$n^5+(-1)^n n^8$		$n^5+(-\sqrt{n})^n$	
$2^{\sin(\pi n)}$		$3^{5+\cos(\pi n)}$		$(5+\cos(\pi n))^3$	
$(n-n^2)^n$		$(n^2-n)^n$		$(n-n^2)^{2n+1}$	
$n^2-\cos n^3$		$\left(3+\cos\left(\frac{\pi}{22}n\right)\right)^n$		$\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{22}n\right)\right)^n$	

Calcolare i seguenti limiti di funzione.

Funzione	Limite	Funzione	Limite
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$		$\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x^2$	
$\lim\limits_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x}$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos \frac{1}{\log x}$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin^2(\log x+2)$		$\lim\limits_{x\to-\infty} \log^2(\sin x+2)$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x+\cos \frac{1}{x}$		$\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x+\cos \frac{1}{x}$	
$\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x\cdot\cos \frac{1}{x}$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x\cdot\sin \frac{1}{x}$	

Limiti 9

Argomenti: limiti di funzioni e successioni **Difficoltà**: ⋆ ⋆ ⋆

Prerequisiti: razionalizzazioni, limiti notevoli

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite
$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$		$n\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-2}\right)$	
$\sqrt{2n+1}-\sqrt{n-1}$		$\sqrt{n^2+3n+1}-n$	
$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-1}}$		$\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n}{\sqrt{9n^2+7}-3n}$	
$\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n$		$\dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{4n+7}-\sqrt[3]{4n+8}}$	
$\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n-1}$		$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{4n+7}-\sqrt[3]{4n+7}}$	
$\sqrt[n]{5^n+n^3}-\sqrt[n]{3^n+n^5}$		$\left(\sqrt{5^n+n^5}-\sqrt[n]{5^n+n^3}\right)^{1/n}$	

Calcolare i seguenti limiti di funzione.

Funzione	Limite	Funzione	Limite
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$		$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$	
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x}$		$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^2+1}-1}{\sqrt[3]{2x^2+1}-1}$	
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}{\tan(3x)}$		$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt[3]{x^2+1}-e^x}$	
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2+3x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3+3x}}$		$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{40^x-\sqrt{\cos x}}{\arcsin^4 x+\sin(8x)}$	
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{4^x+3^x}-2^x$		$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{4^x+2^x+x^2}-2^x$	
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt[4]{x^2+x^{3/2}+1}-\sqrt{x}$		$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+3}+x$	
$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\cos x\cdot\cos\frac{1}{x}$		$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$	

Limiti 10

Argomenti: limiti di funzioni **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: limiti notevoli, confronto di ordini di infinito e di infinitesimo

---

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare il limite per x tendente a ciascuno dei valori indicati (se la richiesta non ha senso, accorgersene e segnalarlo).

Funzione	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite	$x \to$	Limite
$\dfrac{\sin(\log x)}{\log x}$	0^+		1		e		$+\infty$	
$\dfrac{\log(x^3+1)}{\log(x^2+1)}$	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$\dfrac{\sin x}{x-\pi}$	$-\infty$		0^+		π		$+\infty$	
$\dfrac{\cos x}{(2x-\pi)^2}$	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		$+\infty$	
$\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$	0^-		0^+		1		$+\infty$	
$\dfrac{\log(x^2-3)}{x^4-x-14}$	$-\infty$		$(\sqrt{3})^+$		2		$+\infty$	
$(x^2+3)^{1/\log x}$	0^+		1^-		1^+		$+\infty$	
$(\sin x)^{\tan^2 x}$	0^+		$(\pi/2)^+$		$(\pi/2)^-$		$+\infty$	
$(\tan x)^{\cos x}$	0^+		$\pi/4$		$(\pi/2)^-$		$-\pi^-$	

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite	Successione	Limite
$\dfrac{(\log n)^n}{n^4 \cdot 4^n}$		$\dfrac{\log(n\log n)}{\log(n\log^3 n)}$		$\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n^3+2}}}{\sqrt[4]{n^3-7}}$	
$\dfrac{27^{\sqrt[3]{n}}}{3^{\sqrt{n}}}$		$\dfrac{\log(1+3^n)}{\log(1+2^n)}$		$(\log n)^n - n^{\log n}$	
$\sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}}$		$\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{2}}$		$\sqrt[2n]{n!}\cdot\arcsin\dfrac{\sqrt{n+2}}{n}$	
$\left(\dfrac{n}{n+6}\right)^n$		$\dfrac{n^{\sqrt{n}}}{(\log n)^{\log n}}$		$\dfrac{(n+3)^n+3^n}{(n+7)^n+10^n}$	

Limiti 11

Argomenti: limiti di funzioni e successioni **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: limiti notevoli, confronto di ordini di infinito e infinitesimo

---

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, i limiti delle seguenti successioni:

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}, \qquad \frac{2^{n^\alpha}}{n^2}, \qquad \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right]n^\alpha,$$

$$n^\alpha\left(\sqrt[n]{n}-1\right), \qquad n^\alpha\left[\log(n^2+7)-\log(n^2+3)\right], \qquad \alpha^n\log\left(\frac{2+3^{-n}}{2+4^{-n}}\right).$$

2. Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha>0$, i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin(\cos x-1)}-1}{x^\alpha},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9^x+\alpha^x}-3^x, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+x^\alpha+7}-\sqrt[3]{x^2+5}.$$

3. Consideriamo i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha+\sin x)^x, \qquad \lim_{x\to+\infty}(\alpha+\sin^2 x)^x, \qquad \lim_{x\to+\infty}(\alpha+\sin x)^{1/x}.$$

Determinare i valori del parametro reale α per cui le funzioni coinvolte nei limiti sono definite per ogni $x>0$ e, per tali valori di α, calcolare il limite.

4. Determinare, al variare dei parametri $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ e $c\in\mathbb{R}$, il

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)^{ax+c}.$$

5. (Limiti di medie p-esime)

   (a) Dimostrare che per ogni coppia (a,b) di numeri positivi valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}=\sqrt{ab},$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}=\max\{a,b\}, \qquad \lim_{p\to-\infty}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}=\min\{a,b\}.$$

   (b) Per ogni n-ulpa di numeri reali positivi $(a_1,\ldots,a_n)$, definiamo la loro media p-esima come

$$M_p(a_1,\ldots,a_n):=\left(\frac{a_1^p+\ldots+a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

   Calcolare il limite della media p-esima per p che tende a 0, $+\infty$ e $-\infty$.

Limiti - Esercizi teorici 2

Argomenti: **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti:

1. (Indeterminatezza delle forme indeterminate per l'esponenziale)
   (a) Esibire due successioni $a_n \to 1$ e $b_n \to +\infty$ e tali che $a_n^{b_n}$ abbia ciascuno dei tre possibili comportamenti in questo caso (limite reale $\ell \geq 0$, $+\infty$, oppure indeterminata).
   (b) Esibire analoghi esempi anche per le altre forme indeterminate per l'esponenziale.
2. (Criterio funzioni $\to$ successioni) La forma generale di questo criterio è brutalmente qualcosa del tipo
$$a_n \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \ \wedge \ \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad f(a_n) \to \ell.$$
   (a) Enunciare rigorosamente (precisando quindi il contesto: dove è definita f, dove stanno i valori della successione, ...) e dimostrare i vari casi del teorema, a seconda che x_0 ed ℓ siano reali, oppure $\pm\infty$.
   (b) Capire quando, nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, bisogna imporre che $a_n \neq x_0$ definitivamente e quando invece questa ipotesi non serve.
3. (Andamenti intermedi) Esibire successioni a_n, b_n e c_n che soddifano le seguenti relazioni
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{a_n} = +\infty,$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{\alpha^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{b_n} = 0 \qquad \forall \alpha > 0,$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{e^{n^\alpha}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{c_n} = 0 \qquad \forall \alpha > 0.$$
4. (Teorema delle *medie di Cesàro*) Data una successione a_n, si definisce la successione delle medie di Cesaro come (sostanzialmente c_n è la media aritmetica di $a_1, \ldots, a_n$)
$$c_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_n.$$
   (a) Dimostrare che, se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $c_n \to \ell$ (stesso limite).
   (b) Utilizzare il punto precedente per ottenere una nuova dimostrazione del fatto che $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (hint: cosa trasforma prodotti in somme?)
   (c) Trovare una successione a_n che non ha limite, ma tale che c_n ha limite.
   (d) Trovare una successione a_n *limitata* per cui c_n non ha limite.

Linguaggio degli infinitesimi 1 – o piccolo

Argomenti: o piccolo **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di o piccolo, limiti notevoli, sviluppini

---

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false (gli o piccolo si intendono per $x \to 0^+$).

Proposizione	V/F	Proposizione	V/F	Proposizione	V/F
$x^2 = o(x)$		$x^2 = o(\sqrt{x})$		$x^2 = o(x\sqrt{x})$	
$\sin(3x^2) = o(x)$		$\sin(3x^2) = o(7x)$		$\sin(3x^2) = o(2x^2)$	
$\cos x = o(1)$		$\sin x = o(\cos x)$		$\cos x = o(\sin x)$	
$\tan^2 x = o(\arctan x)$		$\tan x = o(\arctan^2 x)$		$\tan(x^2) = o(\sin x)$	
$x = o(\log x)$		$x = o(x \log x)$		$x \log x = o(x)$	
$\sin x = o(\sqrt{x})$		$\sin x = o(x\sqrt{x})$		$x = o(\sin \sqrt{x})$	
$\sin(2x) = x + o(x)$		$\sin x = 2x + o(x)$		$\sin(2x) = x + o(2x)$	
$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$		$\sin(x^2) = x^2 + o(x)$		$\sin(x^2) = x^2 + o(1)$	
$\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$		$\sin^2 x = x^2 + o(x)$		$\sin(x^2) = o(x \sin x)$	

Proposizione	V/F	Proposizione	V/F
$\sin x + \cos x = x + o(x)$		$\sin(2e^x - \cos x - 1) = o(x)$	
$e^x - \cos x = x + o(x)$		$e^{2x} - \cos(3x) = -x + o(x)$	
$\log(1 + \tan(3x \sin x)) = 3x^2 + o(x^2)$		$\log(\cos(4x)) = -8\sin^2 x + o(x^2)$	

Stabilire se le seguenti implicazioni sono vere o false per ogni funzione $f(x)$ (tutti gli o piccolo si intendono per $x \to 0$ e tutte le funzioni $f(x)$ si intendono per semplicità definite su tutto $\mathbb{R}$).

- Se $f(x) = x + o(x^4)$, allora $f^2(x) = x^2 + o(x^8)$.
- Se $f(x) = x + o(x^4)$, allora $f^2(x) = x^2 + o(x^5)$.
- Se $f^2(x) = x^4 + o(x^8)$, allora $|f(x)| = x^2 + o(x^8)$.
- Se $f^2(x) = x^4 + o(x^8)$, allora $|f(x)| = x^2 + o(x^6)$.
- Se $f(x) = x + o(x)$, allora $f(f(x)) = x + o(x)$.
- Se $f(x) = x^3 + o(x^5)$, allora $f(f(x)) = x^9 + o(x^{11})$.
- Se $f(x) = x^2 + o(f(x))$, allora $f(x) = x^2 + o(x^2)$.

Derivate 1

Argomenti: calcolo di derivate **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: regole algebriche per il calcolo di derivate

Calcolare la derivata prima e seconda delle funzioni indicate. Sarebbe opportuno anche precisare l'insieme dei punti in cui $f(x)$ è continua, derivabile una volta, derivabile due volte (cosa che comunque sarà l'argomento di un esercizio futuro).

Qualche volta la casella potrebbe essere un po' piccola per far stare la risposta ...

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$\cos(2x)$			$2\cos(3x)$		
$\sin(x^2)$			$\sin^2 x$		
$\cos(e^x)$			$e^{\cos x}$		
$x\sin x$			$\cos(2x)\sin(3x)$		
$xe^x\cos x$			$x^2e^{3x}\cos x$		
$\log^7 x$			$\log(7x)$		
$\dfrac{1}{2x+3}$			$\dfrac{1}{2x^4+3}$		
$\dfrac{x}{3-x}$			$\dfrac{x}{3-x^2}$		
$\sqrt{x}$			$\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}$		
$x^2\sqrt{x}$			$x^7\sqrt[3]{x^5}$		
$\sqrt{x+3}$			$\sqrt[5]{7-2x}$		
$\sqrt{x^2+3x}$			$\sqrt[4]{5-x^7}$		
$\sin(\sqrt{x})$			$\sqrt{\sin x}$		
$\arccos(e^{-x})$			$\log(\sin(e^{x^2}))$		
$7^x+\log 3$			$\log_7 x$		
$\dfrac{\sin x}{\cos(2x)+3}$			$\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x^2-1}}$		
x^x			$x^{\arctan x}$		
$\sqrt{3+\sqrt[5]{3-x^2}}$			$(\sin x)^{(\cos x)^x}$		

Funzioni iperboliche

Argomenti: funzioni iperboliche **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: funzioni iperboliche

1. (Comportamento qualitativo e grafico)
   (a) Calcolare i limiti delle funzioni iperboliche per $x \to \pm\infty$.
   (b) Enunciare e dimostrare le proprietà di simmetria delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.
   (c) Enunciare e dimostrare per via elementare le proprietà di iniettività, surgetività e monotonia delle funzioni iperboliche.
   (d) Tracciare grafici approssimativi delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.
2. (Derivate e sviluppi)
   (a) Determinare le derivate delle funzioni iperboliche e delle relative inverse.
   (b) Enunciare e dimostrare gli analoghi dei limiti notevoli e gli sviluppini per le funzioni iperboliche.
   (c) Determinare gli sviluppi di Taylor di $\sinh x$ e $\cosh x$.
3. (Formulario della trigonometria iperbolica)
   (a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
   $$\cosh x + \sinh x = e^x, \qquad \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$
   (b) Dimostrare la relazione fondamentale
   $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (c) Enunciare e dimostrare le formule di duplicazione per $\sinh x$ e $\cosh x$.
   (d) Enunciare e dimostrare le formule di addizione e sottrazione per $\sinh x$, $\cosh x$ e $\tanh x$.
   (e) Dedurre dalle precedenti le formule "product $\to$ sum" e "sum $\to$ product" della trigonometria iperbolica.
4. Determinare formule esplicite per le funzioni iperboliche inverse in termini di logaritmi.
5. Determinare lo sviluppo di Taylor dell'inversa della funzione $\tanh x$.
6. (Questa domanda richiede un minimo di conoscenza dei numeri complessi)
   Giustificare le relazioni
   $$\cosh x = \cos(ix) \qquad \sinh x = -i \sin(ix)$$
   - utilizzando le definizioni e la forma esponenziale dei numeri complessi,
   - utilizzando formalmente gli sviluppi di Taylor.

Sviluppi di Taylor 1

Argomenti: sviluppi di Taylor con centro nell'origine **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: sviluppi di Taylor, operazioni algebriche con i polinomi di Taylor

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false (gli o piccolo si intendono per $x \to 0^+$).

Proposizione	V/F	Proposizione	V/F
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$		$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$	
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^5)$		$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^2)$	
$\arctan x = x - \frac{x^3}{7} + o(x^2)$		$\arctan x = x - \frac{x^3}{7} + o(x)$	

In ogni riga delle seguenti tabelle sono indicati una funzione $f(x)$ ed un intero positivo n. Si chiede di determinare il polinomio di Taylor $P_n(x)$ (di grado minore o uguale a n) di $f(x)$ con centro nell'origine, ed il più grande intero k per cui vale lo sviluppo $f(x) = P_n(x) + o(x^k)$ per $x \to 0$.

$f(x)$	n	$P_n(x)$	k	$f(x)$	n	$P_n(x)$	k
$x^2(x^3+1)^4$	10			$\cos(2x)$	5		
$\cos^2 x$	5			$\cos(x^2)$	8		
$\log(1+3x^5)$	12			$\sin^3 x$	6		
$\sqrt[3]{1-x}$	3			$\tan x$	5		
$\sqrt{1-2x^2}$	5			$\cos^{20} x$	4		

$f(x)$	n	$P_n(x)$	k
$x^7 \sin(x^5)$	30		
$e^x \sin(2x)$	4		
$\arctan(x^2) \cdot \sin(x^3)$	9		
$\arctan(x + x^3)$	4		
$\log(\cos x + \sin x)$	4		
$\sin(\arctan x)$	5		
$(1+\sin x)^x$	4		
$\arcsin x$	5		

Sviluppi di Taylor 2

Argomenti: sviluppi di Taylor con centro qualunque **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: sviluppi di Taylor, operazioni algebriche con i polinomi di Taylor

---

In ogni riga delle seguenti tabelle sono indicati una funzione $f(x)$ ed un numero reale x_0. Si chiede di determinare il polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine 3 con centro in x_0, cioè l'unico polinomio $P_3(h)$ di grado minore o uguale a 3 tale che $f(x_0 + h) = P_3(h) + o(h^3)$ per $h \to 0$.

$f(x)$	x_0	$P_3(h)$	$f(x)$	x_0	$P_3(h)$
e^x	2		$\log x$	5	
$x^3 - x$	1		x^5	-1	
$\sqrt{2+x}$	0		$(5+x)^{-1}$	0	
$\dfrac{x+5}{x^2+4}$	0		$\dfrac{x+5}{x^2+4}$	3	
$\sin x$	π		$\cos x$	5π	
$\sin x$	$\pi/6$		$\arctan x$	1	
$e^{\cos x}$	0		$\sin(\cos x)$	0	
$\arccos x$	0		$\log(3 + \sin x)$	0	

In ogni riga della seguente tabella sono indicati una funzione $f(x)$, un punto x_0 ed un intero positivo n. Si chiede di determinare il polinomio di Taylor $P_n(h)$ di ordine n di $f(x)$ con centro in x_0, ed il più grande intero k per cui vale lo sviluppo $f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^k)$ per $h \to 0$.

$f(x)$	x_0	n	$P_n(x)$	k
$\sin(x + x^4) \cdot \cos(\log(1+x))$	0	4		
$\sqrt{x}\arctan(x\sqrt{x})$	0	8		
$\sqrt[3]{\cos x}$	0	3		
$\log(1 + \sin^2(e^x - 1))$	0	4		
$\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x}$	4	3		
$x^3 3^{-x}$	1	3		
$\log x - \log(4-x)$	2	3		
$\arctan(e^x)$	0	3		
$\sqrt{\dfrac{e^x+1}{\cos x + 2}}$	0	3		

Linguaggio degli infinitesimi 2 – Parte principale

Argomenti: ordine di infinitesimo e parte principale **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: limiti notevoli, sviluppi di Taylor

Le funzioni indicate nella seguente tabella sono infinitesime per $x \to 0^+$. Determinare il loro ordine di infinitesimo e la parte principale (scrivere solo la parte principale)

Funzione	P. P.	Funzione	P. P.	Funzione	P. P.
$\sin x$		$\sin x^3$		$\sin^3 x$	
$\cos x - 1$		$\cos x^2 - 1$		$\cos^2 x - 1$	
$\cos\sqrt{x} - 1$		$\cos x - e^x$		$\cos x - e^{x^2}$	
$\sin x - x$		$\sin x^2 - x^2$		$\sin^2 x - x^2$	
$\sinh x - 2x$		$\sqrt{x} - \sinh\sqrt{x}$		$\sinh^{22} x - x^{22}$	
$\dfrac{\sin x}{x} - 1$		$(1+x)^{1/x} - e$		$\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$	
$\log x - \log(\sin x)$		$2^x - 2^{\sin x}$		$\cos x - \cos(\sin x)$	
$\arccos(1-x)$		$\sqrt{e^x} - \sqrt[3]{\cos x}$		$\sin(\sinh x) - \sinh(\sin x)$	

Le funzioni indicate nella seguente tabella sono infinitesime per $x \to x_0$. Determinare il loro ordine di infinitesimo e la parte principale (scrivere solo la parte principale)

Funzione	x_0	P. P.	Funzione	x_0	P. P.	Funzione	x_0	P. P.
$\log x - \log 3$	3		$\cos x$	$\pi/2$		$x^2 - x$	1	
$2x^3 - 3x^2 + 1$	1		$3^{x^2} - 3$	1		$\sin x - \cos x$	$\pi/4$	

Le successioni indicate nella seguente tabella sono infinitesime. Determinare il loro ordine di infinitesimo e la parte principale (scrivere solo la parte principale)

Successione	P. P.	Successione	P. P.	Successione	P. P.
$\sqrt[n]{2} - 1$		$1 - \cos\dfrac{1}{n}$		$\sqrt[n]{2} - \cos\dfrac{n+3}{n^2-5}$	
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$		$\sqrt[22]{n+2} - \sqrt[22]{n}$		$\dfrac{n^3+5}{n^3+7} - \sqrt[n]{7}$	
$\left(1 + \dfrac{1}{n^{33}}\right)^{n^{22}}$		$\dfrac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt{3n}}{n}$		$\sqrt[n]{\dfrac{2n+1}{3n-1}} - \sqrt[n]{\dfrac{4n+1}{5n-1}}$	

Limiti 12

Argomenti: Limiti di funzioni e successioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: sviluppi di Taylor

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni (tutti i limiti si intendono per $x \to 0$).

Funzione	Limite	Funzione	Limite
$\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^3}$		$\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$	
$\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^5}$		$\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^6}$	
$\dfrac{x-\sin x}{x-\arctan x}$		$\dfrac{e^x+\cos x-2-x}{\arctan x-\sin x}$	
$\dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}-2}{1-\cos x}$		$\dfrac{\sin x\cdot\sinh x\cdot\tan x}{x-\sin(x+x^3)}$	
trovarne uno		$\dfrac{\log(1+\sin^2 x)-x^2}{\sin^2(\tanh^2 x)-x^5}$	
$\dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}-2}{1-\cos x+x^4}$		$\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin x}+\sqrt[3]{1-\sin x}-2}{1-\cos(\sinh x)+\sin^4 x}$	
$\dfrac{(1+x+x^2)^{1/x}}{1-(3x+1)\cos\sqrt{x}}$		$\dfrac{e^{x+x^3}-e^{\sinh x}}{2\log(1+x+x^2)-2x-3x^2}$	
$\dfrac{\cos(\sinh x)-\cos x}{x\tan(x^3+x)-\arctan x}$		$\dfrac{\sqrt{1+\sin(x^3)}-\sqrt{1+\sinh(x^3)}}{x^2\arctan(x\sin^6 x)+\lvert\sin^7(x^2)\rvert}$	

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite
$n^3\left(\sin\dfrac{1}{n}-\sinh\dfrac{1}{n}\right)$		$n^3\left(\sin\dfrac{1}{n^2}-\sin\dfrac{1}{n^2+n}\right)$	
$n^2\left(1-n\arctan\dfrac{1}{n}\right)$		$\dfrac{2\cos n+n^2-2}{n^4}$	
$n^n\sinh^n\dfrac{1}{n}$		$n^3\sin\dfrac{1}{n}-n^4\arctan\dfrac{1}{n^2}$	
$\dfrac{\log(n^2+3)-2\log n}{\arctan(n+3)-\arctan n}$		$\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2-7n+5}\right)^{(n^2+3)/(n-4)}$	

Limiti 14

Argomenti: limiti di funzioni e successioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutte le tecniche per il calcolo di limiti

Calcolare i seguenti limiti di funzione.

Funzione	Limite	Successione	Limite
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sin\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x+1}\right)$		$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\log(e^x+1)-x\right)$	
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(\arctan x)-\cosh(\arctan x)}{\sinh^2(\sqrt{x})\cdot\tan^2(\sqrt{x})}$		$\displaystyle\lim_{x\to0}\left[1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{x^2}\right]\cdot\frac{1}{x^4}$	
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan(\cos x)-\arctan(\cosh x)}{\sinh^2(\sqrt{x})\cdot\tan^2(\sqrt{x})}$		$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan(x^5)-\arctan^5 x}{x^7}$	
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(\cosh x)-\cos(\sqrt{1+x^2})}{\cosh(\cos x)-\cosh(\sqrt{1-x^2})}$		$\displaystyle\lim_{x\to0}\left[\tan\left(\frac{\arccos x}{2}\right)\right]^{1/x}$	

Calcolare i limiti delle seguenti successioni.

Successione	Limite	Successione	Limite
$\sin^n(\cos(n!+3^n))$		$\displaystyle\frac{n^{n^e}-e^{e^n}}{e^{n^e}-n^{e^n}}$	
$n^2\left(\arctan(n+1)-\arctan n\right)$		$\displaystyle n\left(\sin\frac{n+5}{n+1}-\sin\frac{n+1}{n+5}\right)$	
$\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}-3\sqrt{n}\right]^{1/\log n}$		$\displaystyle\frac{\sqrt[n]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\log n}$	
$\displaystyle n\left(\arcsin\frac{n-1}{n}-\arcsin\frac{n-2}{n}\right)$		$\displaystyle\sqrt{n}\left[\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos\frac{1-n}{n}}\right]$	
$\displaystyle n^2\left(\sqrt[4]{\frac{2n^2+3}{n^2+1}}-\sqrt[4]{\frac{2n^3+3}{n^3+1}}\right)$		$\displaystyle n\left[\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n+1}\right)}-\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n}\right)}\right]$	
$\displaystyle n^4\left(\sqrt[4]{\frac{16n^2-8}{n^2+2}}-\sqrt[3]{\frac{8n^2+1}{n^2+2}}\right)$		$\displaystyle n\sin\left(\frac{n!+1}{n}\pi\right)$	

[to be completed, tanto alla cattiveria non c'e' limite]

Serie 1

Argomenti: convergenza di serie a termini di segno costante **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: criterio del rapporto e della radice

Stabilire se le seguenti serie numeriche sono convergenti oppure no.

Serie	Conv.?	Serie	Conv.?	Serie	Conv.?
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{33}}{3^n}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^{n^2}}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+8)}{n!}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!-2^n}{55^n}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^{(n^2+1)/n}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$		$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n^2}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot n!}{2^n\cdot n^n}$		$\displaystyle\sum_{n=71}^{\infty} \left(\sin\frac{n+1}{n-70}\right)^n$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n^n}{(2+n)^n}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n!+8}{8^n n!+n^8}}$	

Stabilire per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ le seguenti serie numeriche convergono.

Serie	α	Serie	α	Serie	α
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+1)^n$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2\alpha)^n$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan\alpha)^n$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\alpha^{2n}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\log\alpha)^n$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sin(\sin\alpha))^n$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\lvert\alpha\rvert-2)^n$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2}\lvert\alpha\rvert^n$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n^4}{\lvert\alpha\rvert^n}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\lvert\alpha\rvert^{n^2}$	

Serie 2

Argomenti: convergenza di serie a termini di segno costante **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: criterio del rapporto, della radice e del confronto asintotico

Stabilire se le seguenti serie numeriche sono convergenti oppure no.

Serie	Conv.?	Serie	Conv.?	Serie	Conv.?
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-3}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4-4}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2+n^2}}{\sqrt[4]{7+n^7}}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n^2}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{7}-1\right)$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{7}-1\right)^2$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n+3}{n^4+1}$	

Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ le seguenti serie numeriche convergono.

Serie	α	Serie	α	Serie	α
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^\alpha+3}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha+5}{n^8+7}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha+5}{n^{3\alpha}+7}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^\alpha+2}}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha+1}{\sqrt[3]{n^7+1}}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^\alpha$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sinh^2\left(\frac{n^{3\alpha}}{n+2}\right)$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^4}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha^n}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^n}$	

Serie 3

Argomenti: convergenza di serie a termini di segno costante **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: criterio del confronto asintotico (inclusi casi limite), sviluppi di Taylor

---

Stabilire se le seguenti serie numeriche sono convergenti oppure no.

Serie	Conv.?	Serie	Conv.?	Serie	Conv.?
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$		$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$		$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$	
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$		$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$		$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$	
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^7 n}{n^2}$		$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^{\sqrt{n}}}$	

Stabilire se le seguenti serie hanno i termini definitivamente positivi o negativi, quindi studiarne la convergenza.

Serie	P/N	Conv.?	Serie	P/N	Conv.?
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^2 \log n + \sin n}$			$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3\sqrt[3]{n}}{n^2 \log^2 n + 4}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sinh \frac{1}{n}\right)$			$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n^2}\right)$			$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cosh \frac{1}{\sqrt{n}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$		
$\sum_{n=1}^{\infty} (\log(n^4 - 4) - 4 \log n)$			$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cosh \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{n}\right)$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$			$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-3n^2)/(n^2+7)}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$			$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n^3 + 3^n} - 3\right)$		

Serie 4

Argomenti: convergenza di serie a termini di segno qualunque **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: criterio di Leibnitz, assoluta convergenza

Stabilire se le seguenti serie numeriche sono assolutamente convergenti (AC), oppure convergenti ma non assolutamente convergenti (C), oppure non convergenti (N).

Serie	AC/C/N	Serie	AC/C/N	Serie	AC/C/N
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$	
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$		$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$		$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$	
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$		$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$		$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log^2 n}$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$		$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(n!)}{7+n^2}$	

Stesse domande della tabella precedente, avendo cura di giustificare nei dettagli i passaggi (tenendo presente che non esistono criteri del confronto asintotico per serie a segno alterno).

Serie	AC/C/N	Serie	AC/C/N
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-\sin n}{n^4-\arctan n^2}$		$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-\sin n}{n^3-\arctan n^2}$	
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-\sin n}{n^2-\arctan n^2}$		$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3\sqrt{n}+\cos(\pi n)}{n}$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$	
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sinh\left(\frac{n^2+\sin^2(n!)}{n+\sin(n!)}\right)$		$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sinh\left(\frac{n+\sin(n!)}{n^2+\sin^2(n!)}\right)$	

Serie 5

Argomenti: convergenza di serie a termini di segno qualunque **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutti i criteri di convergenza delle serie

Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ le seguenti serie numeriche convergono.

Serie	α	Serie	α
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^\alpha}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha n^2}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\cos n)^\alpha}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{n-n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^\alpha$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^\alpha$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh\frac{3}{n} - \sin\frac{\alpha}{n}\right)$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\cosh n}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \arctan(2^n)$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha \arcsin\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+3^n)}{n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^2\sqrt{\log^\alpha n + 3}}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \log^\alpha\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2}{n^\alpha+1}\right)$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+3} - 1\right)^\alpha$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{-n}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{3n}}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} - n^\alpha}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sinh\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+n^2} - 2}{\alpha^n}$	

Serie 6

Argomenti: convergenza di serie a termini di segno qualunque **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutti i criteri di convergenza delle serie

1. Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ le seguenti serie numeriche convergono:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{n}{n+4}\right)^{\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{n+1}{n^{\alpha}+4}\right).$$

2. Studiare la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ (occhio agli α negativi):
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\left(\alpha^{n}\right)}{n^{\alpha}}.$$

3. Stabilire l'esatto comportamento delle seguenti serie non convergenti, precisando se divergono a $\pm\infty$ o se sono indeterminate:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^{2}+2}{n^{2}+7n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-n\right)^{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{n\cos(\pi n)}-n\right).$$

4. Determinare l'insieme costituito dalle coppie (α,β) di numeri reali per cui converge la serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha}-\arctan(n^{\beta})\right).$$

5. (a) Stabilire se le seguenti serie numeriche sono convergenti e/o assolutamente convergenti (occhio alla differenza tra serie e sommatorie):
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{k^{3}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{k^{2}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{k}\right).$$
   (b) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ le seguenti serie numeriche convergono.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{4n}\frac{1}{k^{\alpha}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^{4}\left(\sum_{k=n}^{n^{2}}\alpha^{k}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sum_{k=n}^{4n}\frac{1}{k^{\alpha}}\right).$$

6. (Produttorie) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ le seguenti produttorie convergono (hint: basta passare ai logaritmi):
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{\alpha}+3}, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}.$$

7. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\sin(2\pi e\cdot n!).$$

Serie – Esercizi teorici

Argomenti: serie numeriche **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sulle serie

1. Stabilire se le seguenti implicazioni sono vere per ogni successione b_n di numeri reali:
$$b_n \to 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n) \text{ converge},$$
$$b_n \text{ monotona e } b_n \to 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+1} - b_n| \text{ converge},$$
$$b_n \to 0^+ \implies \sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+1} - b_n| \text{ converge}.$$

2. (Teorema dei carabinieri per serie) Siano a_n, b_n e c_n tre successioni di numeri reali (senza ipotesi di segno).
   Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che le serie $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano.
   Allora anche la serie $\sum b_n$ converge.

3. (a) Stabilire se le seguenti due implicazioni
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^n - 1) \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - 1) \text{ converge}$$
   sono vere per ogni successione di numeri reali $a_n \geq 1$.

   (b) Stessa domanda per le implicazioni
$$a_n^n \to 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - 1) \text{ converge}.$$

4. (a) Dimostrare che esiste una successione a_n di numeri reali positivi tali che $\sum a_n^{\varepsilon}$ converge per ogni $\varepsilon > 0$.

   (b) Dimostrare che per ogni numero reale $p > 0$ esiste una successione a_n di numeri reali positivi tali che $\sum a_n^{\varepsilon}$ converge se e solo se $\varepsilon > p$.

   (c) Dimostrare che per ogni numero reale $p > 0$ esiste una successione a_n di numeri reali positivi tali che $\sum a_n^{\varepsilon}$ converge se e solo se $\varepsilon \geq p$.

5. Stabilire se il seguente enunciato è vero o falso.

   Sia a_n una successione di numeri reali positivi tale che $\sum a_n$ converge.
   Allora esiste una costante reale c tale che
$$a_n \leq \frac{c}{n} \qquad \forall n \geq 1.$$

Funzioni 5

Argomenti: studio di funzione classico **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: studio globale di funzioni

Studiare in senso classico le seguenti funzioni, tracciandone un grafico approssimativo.

Al solo fine di ottenere una tabella numerica confrontabile, si chiede di indicare quanti sono i punti di massimo/minimo (M/m) locale/globale (l/g) (ovviamente quelli globali sono anche locali), il numero degli asintoti orizzontali, verticali, obliqui (con l'accordo che una stessa retta che è asintoto orizzontale od obliquo a $\pm\infty$ conta due volte), il numero delle zone di convessità/concavità, ed il numero di punti di flesso.

	Max/min				Asintoti			Convessità		
Funzione	m.l.	m.g.	M.l.	M.g.	Or.	Vt.	Ob.	Conv.	Conc.	Fls.
x^3										
$x - x^3$										
$(x^2-1)^2$										
e^{x^2}										
e^{-x^2}										
e^{-x^3}										
$e^{1/x}$										
$e^{-1/x}$										
e^{-1/x^2}										
xe^x										
xe^{-x}										
x^2e^{-x}										
$\arctan x$										
$\arctan(x^2)$										
$\arctan(x^3)$										
$\arctan^2 x$										
$x \arctan x$										

Le funzioni di questo esercizio sono davvero di base, dunque è importante arrivare a coglierne gli aspetti essenziali del grafico in pochi minuti (direi meno di 3).

Funzioni 6

Argomenti: studio di funzione classico **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: studio globale di funzioni

Studiare in senso classico le seguenti funzioni, tracciandone un grafico approssimativo.

Al solo fine di ottenere una tabella numerica confrontabile, si chiede di indicare quanti sono i punti di massimo/minimo (M/m) locale/globale (l/g) (ovviamente quelli globali sono anche locali), il numero degli asintoti orizzontali, verticali, obliqui (con l'accordo che una stessa retta che è asintoto orizzontale od obliquo a $\pm\infty$ conta due volte), il numero delle zone di convessità/concavità, ed il numero di punti di flesso.

	Max/min				Asintoti			Convessità		
Funzione	m.l.	m.g.	M.l.	M.g.	Or.	Vt.	Ob.	Conv.	Conc.	Fls.
$\frac{1}{x}$										
$\frac{x}{x+1}$										
$\frac{1}{x^2}$										
$\frac{1}{x^2+1}$										
$\frac{1}{x^3+1}$										
$\frac{1}{x^2-1}$										
$\frac{x}{x^2+1}$										
$\frac{x}{x^2-1}$										
$\frac{x^2}{x-1}$										
$\frac{x^2}{x^2+1}$										
$\frac{x^2}{x^2-1}$										
$\frac{x^4-x^2+1}{x^3}$										

Vale la stessa nota della scheda di esercizi precedente.

Funzioni 7

Argomenti: studio di funzione classico **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: studio globale di funzioni

Studiare in senso classico le seguenti funzioni, tracciandone un grafico approssimativo.

Al solo fine di ottenere una tabella numerica confrontabile, si chiede di indicare quanti sono i punti di massimo/minimo (M/m) locale/globale (l/g) (ovviamente quelli globali sono anche locali), il numero degli asintoti orizzontali, verticali, obliqui (con l'accordo che una stessa retta che è asintoto orizzontale od obliquo a $\pm\infty$ conta due volte), il numero delle zone di convessità/concavità, ed il numero di punti di flesso.

	Max/min				Asintoti			Convessità		
Funzione	m.l.	m.g.	M.l.	M.g.	Or.	Vt.	Ob.	Conv.	Conc.	Fls.
$\lvert x\rvert^{2/3}$										
$\lvert x\rvert^{4/3}$										
$\sqrt{1+x^2}$										
$\sqrt{1-x^2}$										
$\sqrt{1+x^3}$										
$\sqrt[3]{1+x^2}$										
$\sqrt[3]{1-x^2}$										
$\sqrt[3]{1+x^3}$										
$(1+x^2)^{-1/2}$										
$(1-x^2)^{-1/2}$										
$\log(1+x^2)$										
$x\log x$										
$\log^2 x$										
$(\log x)^{-1}$										
$\dfrac{\log x}{x}$										
$\dfrac{x}{\log x}$										
$\tanh x$										

Vale la stessa nota della scheda di esercizi precedente.

Funzioni 8

Argomenti: massimi e minimi, punti di massimo e di minimo **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: monotonia e segno della derivata, studio globale di funzioni

Determinare massimo e minimo delle funzioni date sugli intervalli indicati, precisando anche la natura dei punti di massimo e di minimo, cioè se sono stazionari interni, singolari interni, o di bordo. Ad esempio, per il minimo, indicare 8 (2/3/1) se il minimo vale 8 ed è raggiunto in 2 punti stazionari interni, 3 punti singolari interni ed un punto di bordo.

Funzione	Insieme	Minimo	Massimo	Insieme	Minimo	Massimo
x^2	$[-1,1]$			$[-1,2]$		
x^2	$[1,3]$			$[-4,-1]$		
$\|x\|$	$[-2,1]$			$[-2,-1]$		
$\sin x$	$[0,\pi]$			$[0,4]$		
$\cos x$	$[-\pi,\pi]$			$[0,4]$		
$\|\cos x\|$	$[-\pi,\pi]$			$[0,4]$		
$\sin \|x\|$	$[-1,1]$			$[-1,2]$		
$x3^{-x}$	$[0,1/2]$			$[0,2]$		
x^3-x^2	$[0,1]$			$[-2,0]$		
$\sqrt[3]{x^2-1}$	$[-1,1]$			$[1,3]$		

Determinare estremo inferiore e superiore delle funzioni date sugli insiemi indicati, precisando di volta in volta se si tratta di minimo e massimo.

Funzione	Insieme	Inf/min	Sup/Max	Insieme	Inf/min	Sup/Max
$\arctan x$	$\mathbb{R}$			$(-\infty,0)$		
$\arctan(x^2)$	$\mathbb{R}$			$(-\infty,0)$		
e^{-x^2}	$[-1,1]$			$\mathbb{R}$		
$x-\arctan x$	$[0,+\infty)$			$[0,1]$		
$\dfrac{1}{x}+x^2$	$(0,+\infty)$			$(0,1)$		
e^x-x	$\mathbb{R}$			$(-1,1)$		
$e^{1/x}$	$(0,1]$			$(-\infty,0)$		

Funzioni 9

Argomenti: iniettività e surgettività **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio locale/globale di funzione, teorema di Weierstrass e varianti

Nella seguente tabella vengono presentate varie "leggi" che talvolta definiscono funzioni $f : A \to B$ tra gli insiemi indicati. Stabilire caso per caso se si tratta di funzioni iniettive e/o surgettive (e precisare invece quando non si tratta di funzioni).

Legge	$A \to B$	I/S	$A \to B$	I/S
$x^{33} + x^{21}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	
$x^{33} - x^{21}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	
$x^{33} + x^{22} + 7$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	
$x^{33} - x^{22} + 7$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$(-\infty, 0] \to \mathbb{R}$	
$x^{44} + x^{33} - 1$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$(-\infty, 0) \to \mathbb{R}$	
$x^{22} + x^{15} - x^4$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	
$x^{22} + x^{15} - x^4$	$[-1, 1] \to [-1, 1]$		$[0, +\infty) \to \mathbb{R}$	
$x^4 - \sin(x^2)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	
$x - \arctan(2x)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to \mathbb{R}$	
$x^3 - \arctan x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[-1, 1] \to [-1, 1]$	
$\sinh x + \arctan(x^3)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	
$\sinh(x^3) + \arctan(x^2)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	
$\sinh(x^5) - \cosh(x^3)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$(-\infty, 0) \to (-\infty, -1)$	
$\sinh(x^2) - \cosh(x^3)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$(-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$	
$\cos^2 x + x^3$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[1, +\infty) \to \mathbb{R}$	
$x^{33} + \log(3 + x^{20})$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to \mathbb{R}$	
$e^{x^2} - e^{x^3}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[1, +\infty) \to \mathbb{R}$	
$\arctan x - \log(1 + x)$	$(-1, +\infty) \to \mathbb{R}$		$(-1, 0) \to (0, +\infty)$	
$x^3 + xe^{-x}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$(0, 1) \to (0, 1)$	
$x^2 + \sin(x^5)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to \mathbb{R}$	
$x^5 + \sin(x^2)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$		$[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	

Funzioni 10

Argomenti: equazioni con parametro **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio globale di funzioni

Determinare gli insieme costituiti dai valori del parametro reale λ per cui le seguenti equazioni hanno, rispettivamente, zero, una, due o tre soluzioni (reali distinte).

Equazione	0 sol.	1 sol.	2 sol.	3 sol.
$e^{-x^2} = \lambda$				
$\operatorname{settcosh} x = \lambda$				
$\frac{1}{x} + \log x = \lambda$				
$\frac{1}{x} - \log x = \lambda$				
$\tanh x = \lambda$				
$(x-3)e^{x+2} = \lambda$				
$\|x-3\|e^{x+2} = \lambda$				
$\|x^2-3\|e^{x+2} = \lambda$				
$x^3 + \lambda x = 2014$				
$e^x = \lambda x$				
$e^x = \lambda x^2$				
$e^x = \lambda\|x\|$				
$e^{\|x\|} = \lambda x$				
$e^{\lambda x} = x^2$				
$x^3 = \lambda(x^2-1)$				
$x^3 = \lambda(x^2+1)$				
$x^2 = \lambda(x^3+1)$				
$\arctan(\lambda x) = x^3$				
$1 + \|x+1\| = \lambda(x-2)$				
$x^x = \lambda$				
$x - (\sin\lambda)\arctan x = 2$				

Funzioni 11

Argomenti: immagine e controimmagine **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

---

Nella seguente tabella sono date delle funzioni ed un po' di insiemi. Si chiede di determinare se le funzioni ammettono minimo e/o massimo sugli insiemi indicati (non è richiesto di calcolarli, ma solo di stabilirne l'esistenza).

Funzione	Insieme	min/Max	Insieme	min/Max	Insieme	min/Max
$2^x - 3^x$	$(-\infty, 0]$		$(-\infty, 0)$		$[0, +\infty)$	
$\log(1 + x^2) - \arctan x$	$\mathbb{R}$		$(0, +\infty)$		$(1, +\infty)$	
$x \sin x + x^2$	$\mathbb{R}$		$(0, +\infty)$		$[0, +\infty)$	
$2^x - x^{20}$	$\mathbb{R}$		$(0, +\infty)$		$(0, 3]$	
$x^2 + e^{x^3}$	$\mathbb{R}$		$(0, +\infty)$		$(-3, 3]$	
$x^{20} - \sin(x^4)$	$\mathbb{R}$		$(0, +\infty)$		$(-20, 20)$	
$\dfrac{x \sin x}{x^3 + 1}$	$[0, +\infty)$		$(-1, 0]$		$(-1, +\infty)$	
$\arctan^2 x - \sin x$	$\mathbb{R}$		$(-1, 0)$		$[10, +\infty)$	

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

Proposizione	V/F
Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $e^{\sqrt{x}} \geq cx^{2014}$ per ogni $x \geq 0$	
Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $e^{\sqrt{x}} \leq cx^{2014}$ per ogni $x \geq 0$	
Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $e^{\sqrt{x}} \leq cx^{2014}$ per ogni $x \in (0, 2014)$	
Esiste una costante $c > 0$ tale che $\cos^2 x + \sin^4 x \geq c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$	
Esiste una costante $c > 0$ tale che $\cos^3 x + \sin^5 x \geq c$ per ogni $x \in [0, \pi/2]$	
Esiste $c > 0$ tale che $x \arctan x + \cos^2 x \geq c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$	
Esiste una costante $c > 0$ tale che $\log x \geq c \sqrt[20]{x}$ per ogni $x > 0$	
Esiste una costante $c > 0$ tale che $\log x \geq c \sqrt[20]{x}$ per ogni $x \in [3, 7]$	
Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\sin(x^2) \leq cx^3$ per ogni $x \geq 0$	
Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $x - \sin x \leq cx^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$	
Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 \leq c(x - \sin x)$ per ogni $x \in [0, 10]$	
Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 \leq c(x - \sin x)$ per ogni $x \in [10, 20]$	

Funzioni 12

Argomenti: equazioni e disequazioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: studio locale e globale di funzioni

1. Studiare, al variare del parametro reale λ, iniettività e surgettività delle seguenti funzioni
$$x + \lambda \sin x, \qquad x + \lambda \arctan x, \qquad x + \sin(\lambda x), \qquad e^x - \lambda \arctan x,$$
pensate come funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

2. Consideriamo l'espressione $x + \sin(x^\lambda)$.
   (a) Dimostrare che, per ogni $\lambda > 0$, l'espressione definisce una funzione $f_\lambda : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
   (b) Studiare iniettività e surgettività della funzione al variare del parametro $\lambda > 0$.

3. (Funzioni elementari e polinomi di Taylor)
   (a) Risolvere le seguenti disequazioni, precisando anche quando vale l'uguaglianza:
$$\sin x \le x, \qquad \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \sin x \ge x - \frac{x^2}{6}.$$
   (b) Enunciare e dimostrare le disuguaglianze che legano le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ ai rispettivi polinomi di Taylor di ogni grado.
   (c) Enunciare e dimostrare le disuguaglianze che legano le funzioni e^x, $\log(1 + x)$ e $\arctan x$ ai rispettivi polinomi di Taylor di ogni grado.

4. Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali $x \ge 0$ e $y \ge 0$ valgono le disuguaglianze
$$\arctan(x + y) \le \arctan x + \arctan y, \qquad \tanh(x + y) \le \tanh x + \tanh y.$$

5. Risolvere le seguenti disequazioni, precisando anche quando vale l'uguaglianza:
$$e^x \le 2x, \qquad 5^x - 3^x - 2^x > 0, \qquad x + 2 \sin x \le 0, \qquad \arctan(x^2) \le x,$$
$$x^{2004} + 2004^x - 2004x < 1, \qquad e^{-x^2+x^4} > \cos(2x), \qquad 2 \arctan x \ge \sin(2x).$$

6. Determinare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:
$$x^3 + x = \lambda, \qquad x^3 - x = \lambda, \qquad x^3 + x = \lambda^3 + \lambda, \qquad x^3 - x = \lambda^3 - \lambda,$$
$$\arctan x = |x|^{\lambda^2+1}, \qquad x^x = 1 + \lambda x, \qquad \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lambda x.$$

7. Determinare, al variare del parametro reale $\lambda > 0$, il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^\lambda = \lambda^x.$$

Funzioni 13

Argomenti: iniettività e surgettività **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: studio locale di funzione, monotonia e segno della derivata

---

1. Dimostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che
$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right| \leq cx \qquad \forall x \geq 0.$$

2. (a) Determinare le migliori costanti c_1 e c_2 tali che
$$c_1 x \leq \arctan x \leq c_2 x \qquad \forall x \in [0, 1].$$
   (b) Determinare la migliore costante c_3 tale che
$$\arctan x \geq \frac{c_3 x}{1+x} \qquad \forall x \geq 0.$$
   (c) Stabilire se è vero che
$$\arctan x \leq \frac{\pi}{2} \frac{x}{1+x} \qquad \forall x \geq 0.$$

3. (a) Determinare per quali esponenti α esiste una costante reale c tale che
$$\log(1+x) \leq c(x - \sin x)^\alpha \qquad \forall x \geq 0.$$
   (b) Determinare per quali esponenti α esiste una costante reale c tale che
$$e^{-1/x^2} \leq cx^\alpha \qquad \forall x > 0.$$

4. Consideriamo l'equazione
$$\sinh x - x^2 \sin x = \lambda.$$
   (a) Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione ammette almeno una soluzione reale.
   (b) Dimostare che esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\lambda \geq \lambda_0$, la soluzione dell'equazione è unica.
   (c) Detta x_n la soluzione corrispondente a $\lambda = n$, calcolare
$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - \log n).$$

5. Consideriamo l'equazione
$$x^2 - \sinh x \cdot \sin x = \lambda.$$
   Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione ammette infinite soluzioni reali.

[To be completed]

Funzioni – Esercizi Teorici 4

Argomenti: teorema di Weiertrass e sue varianti **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: teorema di Weiertrass

1. Determinare se esistono
   (a) una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua che ammette massimo e minimo,
   (b) una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e *limitata* che non ammette né massimo né minimo,
   (c) una funzione $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e *limitata* che non ammette né massimo né minimo,
   (d) una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ limitata, e continua in $[0, 1] \setminus \{1/2\}$, che non ammette né massimo né minimo.

2. (Weierstrass esteso per funzioni periodiche) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica.

   Dimostrare che f ammette massimo e minimo su tutto $\mathbb{R}$.

3. (Weiertrass esteso con condizioni ai limiti)
   (a) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Dimostrare che $\min\{f(x) : x \geq 0\}$ esiste.
   (b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
   Dimostrare che $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ esiste.
   (c) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
   Dimostrare che $\min\{f(x) : x > 0\}$ esiste.
   (d) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che esistano $a \leq x_0 \leq b$ tali che
   $$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$
   Dimostrare che $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ esiste.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che esistano
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}.$$
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è limitata.
   (b) Mostrare con un esempio che non è detta che $f(x)$ ammetta massimo e/o minimo.
   (c) Dimostrare che, se $\ell_1 = \ell_2$, allora necessariamente $f(x)$ ammette massimo o minimo.
   (d) Dimostrare che, se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\ell_1 = \ell_2 = f(x_0)$, allora necessariamente $f(x)$ ammette massimo e minimo.

Funzioni – Esercizi Teorici 5

Argomenti: varianti del teorema di Weiertrass **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: proprietà di monotonia, funzioni periodiche

1. Sia $p(x)$ una funzione polinomiale (cioè un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali visto come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$).

   Determinare tutte le possibili implicazioni tra le seguenti affermazioni.

   (a) Il grado di $p(x)$ è pari.
   (b) Il grado di $p(x)$ è dispari.
   (c) La funzione $p(x)$ è iniettiva.
   (d) La funzione $p(x)$ è surgettiva.
   (e) La funzione $p(x)$ è limitata inferiormente.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f^2(x) - 4f(x) \leq 7$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Dimostrare che, se $f(0) = 0$, allora $f(x)$ è limitata.
   (b) Se $f(-2) = -2$, possiamo dedurre che $f(x)$ è limitata superiormente/inferiormente?

3. Sia $f \in C^1([a, b])$ una funzione tale che $f(a) = f(b) = 0$ e $f'(a) \cdot f'(b) > 0$.

   Dimostrare che esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

4. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia derivabile per $x = 0$ (nel senso che il rapporto incrementale ammette limite destro) e $f'(0) > 0$.

   Dimostrare che $\max\{f(x) : x \geq 0\}$ esiste.

5. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

   (a) Supponiamo che esistano due successioni $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ tali che $f(a_n) \to +\infty$ e $f(b_n) \to -\infty$.

   Dimostrare che l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette infinite soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Determinare se la stessa conclusione vale se assumiamo che a_n e b_n tendano a 0^+.
   (c) Determinare se la stessa conclusione vale se assumiamo che $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0^+$.

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, surgettiva e tale che $f(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$.

   Determinare se possiamo concludere che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica (non costante).

   Dimostrare che $f(x)$ ammette un minimo periodo e descrivere l'insieme di *tutti* i periodi.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva.

   Dimostare che $f(x)$ è strettamente monotona.

Integrali 1

Argomenti: Integrali in una variabile **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: Primitive elementari

Calcolare l'integrale delle seguenti funzioni sugli insiemi indicati. Indicare "N.P." se l'integranda non è limitata nell'insieme proposto (in questo caso l'esercizio diventa un esercizio sugli integrali impropri) e "N.S." se la richiesta non ha senso.

Funzione	**Ins.**	**Integrale**	**Ins.**	**Integrale**	**Ins.**	**Integrale**
$x^2 - x^5$	$[0, 1]$		$[-1, 0]$		$[-1, 1]$	
$\sin x$	$[0, \pi/2]$		$[0, \pi]$		$[-\pi, \pi]$	
e^x	$[0, 1]$		$[-1, 1]$		$[0, \log 7]$	
e^{-x}	$[0, 1]$		$[-1, 1]$		$[0, \log 7]$	
2^{-x}	$[0, 1]$		$[0, 2]$		$[-1, 0]$	
$\sin(3x)$	$[-\pi, 0]$		$[0, \pi/2]$		$[\pi/3, \pi/2]$	
e^{-6x}	$[0, 1]$		$[-1, 0]$		$[-1, 1]$	
$\frac{1}{x^2}$	$[-2, -1]$		$[-1, 0]$		$[1, 2]$	
$\frac{1}{x}$	$[-1, 1]$		$[0, 1]$		$[-2, -1]$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$[0, 1]$		$[-1, 0]$		$[-1, 1]$	
$\sqrt{x}$	$[-1, 1]$		$[0, 1]$		$[0, 4]$	
$\sqrt[3]{x}$	$[-1, 1]$		$[0, 1]$		$[0, 8]$	
$\sqrt{x+3}$	$[0, 3]$		$[1, 6]$		$[6, 13]$	
$\sqrt{3-x}$	$[0, 3]$		$[1, 6]$		$[6, 13]$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$[-1, 1]$		$[0, 1]$		$[1, 9]$	
$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$	$[0, 1]$		$[1, 16]$		$[16, 81]$	

Integrali 2

Argomenti: Integrali in una variabile **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: Primitive elementari, significato geometrico, spezzamento del dominio

---

Calcolare l'integrale delle seguenti funzioni sugli insiemi indicati. Indicare "N.P." se l'integranda non è limitata nell'insieme proposto (in questo caso l'esercizio diventa un esercizio sugli integrali impropri) e "N.S." se la richiesta non ha senso.

Funzione	**Ins.**	**Integrale**	**Ins.**	**Integrale**	**Ins.**	**Integrale**
$\lvert x\rvert$	$[0,1]$		$[-1,0]$		$[-1,2]$	
$\lvert 2-x\rvert$	$[0,2]$		$[0,3]$		$[1,3]$	
$x+\lvert x\rvert$	$[0,1]$		$[-1,0]$		$[-1,2]$	
$\sqrt{\lvert x\rvert}$	$[0,1]$		$[-1,1]$		$[-1,0]$	
$\sqrt{\lvert x-2\rvert}$	$[0,2]$		$[0,3]$		$[-2,2]$	
$\lvert x^2-4\rvert$	$[0,2]$		$[0,3]$		$[-1,4]$	
$\lvert\cos(2x)\rvert$	$[0,\pi]$		$[0,\pi/2]$		$[\pi/6,\pi/2]$	
$\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$	$[-1,1]$		$[-e,-1]$		$[-e^2,-e]$	
$\lvert x^3\rvert-3$	$[-1,0]$		$[-1,1]$		$[-1,2]$	
$\lvert\sin x\rvert$	$[-\pi,\pi]$		$[-\pi,-\pi/2]$		$[-3\pi/4,0]$	
$\sin(\lvert x\rvert)$	$[-\pi,\pi]$		$[-2\pi,0]$		$[0,\pi]$	
$\sin x\cos x$	$[0,\pi/2]$		$[\pi/2,\pi]$		$[-\pi/2,0]$	
$\lvert\sin x\cos x\rvert$	$[0,\pi/2]$		$[\pi/2,\pi]$		$[-\pi/2,\pi]$	
$\sqrt{1-x^2}$	$[-1,1]$		$[-1,0]$		$[0,2]$	
$\cos(2x)\cos(7x)$	$[0,\pi/2]$		$[0,\pi/4]$		$[\pi/6,\pi/3]$	
$\cos(2x)\sin(7x)$	$[0,\pi/2]$		$[0,\pi/4]$		$[\pi/6,\pi/3]$	

Integrali 3

Argomenti: Tecniche di integrazione **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: Integrazione per parti

Determinare una primitiva delle seguenti funzioni. Si consiglia di fare la verifica (derivando) *prima* di andare a vedere la risposta.

Funzione	Primitiva	Funzione	Primitiva
$x \sin x$		xe^x	
$x \sinh x$		$x2^{-x}$	
$x^2 \sin x$		$x^3 \cos(2x)$	
$\sin^2 x$		$\cos^2 x$	
$\log x$		$\arctan x$	
$x \log x$		$\log^2 x$	
$\log^3 x$		$x^7 \log x$	
$\dfrac{\log x}{x^2}$		$\dfrac{\log^2 x}{x^2}$	
$\sin^3 x$		$\cos^3 x$	
$\cos^4 x$		$\sin^5 x$	
$x \log^2 x$		$e^x \sin x$	
$e^{2x} \cos(3x)$		$e^{-3x} \sin x \cos x$	
$\log(x^2 - 1)$		$\log(x^2 + 1)$	
$x \cos^2 x$		$x \arctan x$	
$\dfrac{\arctan x}{x^2}$		$x^3 \arctan x$	
$x \arctan x^2$		$x \arctan^2 x$	

Integrali 4

Argomenti: Tecniche di integrazione **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: Integrazione per parti e per sostituzione

Determinare una primitiva delle seguenti funzioni (e fare la verifica).

Funzione	**Primitiva**	**Funzione**	**Primitiva**
$\sin(x+3)$		$\cos(3x+2)$	
$\sqrt{x+3}$		$\sqrt{2x+5}$	
$\sinh(4x+5)$		$\tan x$	
xe^{x^2}		$x^3\cos(x^4)$	
$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$		$\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$	
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+2}}$		$\dfrac{1}{(x+1)^2}$	
$\dfrac{\log x}{x}$		$\dfrac{\log^7 x}{x}$	
$\dfrac{1}{x\log^3 x}$		$\dfrac{1}{x\log x}$	
$\dfrac{x}{1+x^2}$		$\dfrac{x}{1+x^4}$	
$\dfrac{x^3}{1+x^4}$		$\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$	
$x^3e^{-x^2}$		$x^5e^{2x^3}$	
$\sin x\sqrt{\cos x}$		$\tan(7x)$	
$\log(2x-5)$		$\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$	
$\cos x\cdot e^{\sin x}$		$\sin^3 x\cdot e^{\cos x}$	
$\cos^3 x\sin^4 x$		$\sin(\log x)$	
$\dfrac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$		$\dfrac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}$	

Integrali 5

Argomenti: Tecniche di integrazione **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: Integrazione delle funzioni razionali

Determinare una primitiva delle seguenti funzioni (e fare la verifica).

Funzione	Primitiva	Funzione	Primitiva
$\dfrac{1}{x+3}$		$\dfrac{1}{3x+1}$	
$\dfrac{1}{6x-5}$		$\dfrac{x-5}{x+5}$	
$\dfrac{x^2-5}{x+5}$		$\dfrac{1}{x^2+2x-3}$	
$\dfrac{x}{x^2+1}$		$\dfrac{1}{3x^2+2x-1}$	
$\dfrac{3x+1}{x^2+1}$		$\dfrac{1}{x^2+2x+2}$	
$\dfrac{x}{x^2+2x+2}$		$\dfrac{5x+3}{x^2+2x+2}$	
$\dfrac{1}{x^2+2}$		$\dfrac{1}{x^2+4}$	
$\dfrac{1}{2x^2+1}$		$\dfrac{1}{2x^2+3}$	
$\dfrac{1}{x^2-1}$		$\dfrac{1}{x^2-4}$	
$\dfrac{x^2}{x^2-1}$		$\dfrac{x^2}{x^2+1}$	
$\dfrac{1}{x^2-2}$		$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$	
$\dfrac{x^5}{x^3+1}$		$\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$	
$\dfrac{x^2}{x^4-1}$		$\dfrac{x^5}{x^4-1}$	
$\dfrac{x^6-1}{x^5+x^3}$		$\dfrac{x}{(x+1)^3}$	
$\dfrac{1}{x^2+x+1}$		$\dfrac{x}{x^2+x+1}$	
$\dfrac{x}{x^3+1}$		$\dfrac{1}{x^4+1}$	

Integrali 6

Argomenti: Tecniche di integrazione **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: Sostituzioni razionalizzanti

Determinare una primitiva delle seguenti funzioni (e fare la verifica).

Funzione	Primitiva	Funzione	Primitiva
$\dfrac{1}{1+e^x}$		$\dfrac{1}{1+e^{4x}}$	
$\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$		$\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+e^x}$	
$\dfrac{4^x}{2^x+1}$		$\dfrac{2^x}{4^x+1}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$		$\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$	
$\arcsin x$		$\arccos x$	
$\sqrt{1-x^2}$		$\sqrt{2-x^2}$	
$\sqrt{3-2x^2}$		$x\arcsin x$	
$\sqrt{x^2+1}$		$\sqrt{x^2-1}$	
$x\sqrt{x+1}$		$x\sqrt{x^2-1}$	
$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$		$\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$	
$\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$		$\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$		$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$	
$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$		$\dfrac{1}{\sin x}$	
$\dfrac{\tan^{-1} x}{(1+\sin^2 x)^{3/2}}$		$\dfrac{1}{1+\sin x}$	

Integrali 7

Argomenti: Integrali in una variabile **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: Tutte le tecniche di integrazione

Calcolare l'integrale delle seguenti funzioni sugli insiemi indicati. Indicare "N.P." se l'integranda non è limitata nell'insieme proposto (in questo caso l'esercizio diventa un esercizio sugli integrali impropri) e "N.S." se la richiesta non ha senso.

Funzione	**Ins.**	**Integrale**	**Ins.**	**Integrale**
$\sin^2 x$	$[0, \pi/2]$		$[0, 2\pi]$	
$\cos^2 x$	$[0, \pi/2]$		$[0, 2\pi]$	
$\lvert\lvert x\rvert - 1\rvert$	$[0, 2]$		$[-2, 3]$	
$\lvert x \log x\rvert$	$[1/e, e]$		$[0, 1]$	
$\lvert 4\cos^2 x - 1\rvert$	$[0, 2\pi]$		$[0, \pi/2]$	
$x\lvert\sin x\rvert$	$[0, \pi]$		$[0, 2\pi]$	
$\lvert\cos x + \sin x\rvert$	$[0, \pi]$		$[0, 2\pi]$	
$\lvert x - 3\rvert e^x$	$[0, 3]$		$[0, 4]$	
$\dfrac{1}{\cos x}$	$[0, \pi/4]$		$[-\pi/3, \pi/2]$	
$\arctan(x\cos(e^{\lvert x\rvert} + 9))$	$[-2, 2]$		$[-3, 3]$	
$\sin x\sqrt{1 - \lvert\cos x\rvert}$	$[0, \pi]$		$[\pi/3, \pi/2]$	
$\dfrac{x \arctan x}{(1 + x^2)^2}$	$[0, 1]$		$[-1, 1]$	
$x^2 \sin(\lvert\log x\rvert)$	$[1, e^\pi]$		$[e^{-\pi/4}, 1]$	
$\dfrac{1}{1 + 3\sin^2 x}$	$[0, \pi/2]$		$[0, 2\pi]$	
$\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$	$[0, \pi/4]$		$[0, \pi/2]$	
$\sqrt{\lvert x^2 + 2x - 3\rvert}$	$[0, 1]$		$[1, 3]$	

Integrali impropri 1

Argomenti: studio di integrali impropri **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: definizione di integrale improprio monoproblema

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede l'integrale improprio sugli insiemi indicati. Stabilire (usando la definizione) il comportamento dell'integrale e, nel caso in cui converga, calcolarne esplicitamente il valore. Qualora la richiesta non abbia senso, o non si tratti di un integrale improprio, accorgersene e segnalarlo.

Funzione	Ins.	Comp.	Ins.	Comp.	Ins.	Comp.	Ins.	Comp.
$\frac{1}{x^2}$	$[0,1]$		$[1,+\infty)$		$[-1,0]$		$(-\infty,-1]$	
$\frac{1}{x^3}$	$[0,2]$		$[2,+\infty)$		$[-3,0]$		$(-\infty,-4]$	
$\frac{1}{x}$	$[0,1]$		$[1,+\infty)$		$[-1,0]$		$(-\infty,-1]$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$[0,1]$		$[1,+\infty)$		$[-1,0]$		$[0,2]$	
$\frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}$	$[0,1]$		$[1,+\infty)$		$[-4,0]$		$(-\infty,-4]$	
e^{-x}	$[0,1]$		$[0,+\infty)$		$[-1,+\infty)$		$(-\infty,0]$	
xe^{-x}	$[0,1]$		$[0,+\infty)$		$[-1,+\infty)$		$(-\infty,0]$	
x^3e^{-x}	$[0,1]$		$[0,+\infty)$		$[-1,+\infty)$		$(-\infty,0]$	
e^{3x}	$[0,1]$		$[0,+\infty)$		$(-\infty,3]$		$(-\infty,0]$	
xe^{-x^2}	$[0,1]$		$[0,+\infty)$		$(-\infty,3]$		$(-\infty,0]$	
$\cos x$	$[0,\pi]$		$[0,+\infty)$		$[\pi,+\infty)$		$(-\infty,0]$	
$\cos^2 x$	$[0,\pi]$		$[0,+\infty)$		$[\pi,+\infty)$		$(-\infty,0]$	
$\cos^3 x$	$[0,\pi]$		$[0,+\infty)$		$[\pi,+\infty)$		$(-\infty,0]$	
$x\sin(x^2)$	$[0,\pi]$		$[0,+\infty)$		$[\pi,+\infty)$		$(-\infty,0]$	
$\frac{1}{x^2+1}$	$[0,1]$		$[1,+\infty)$		$(-\infty,-1]$		$(-\infty,0]$	
$\frac{1}{x^2-1}$	$[0,1]$		$[2,+\infty)$		$[-2,-1]$		$(-\infty,-2]$	
$\frac{1}{x^2-2x}$	$[0,1]$		$[1,2]$		$[3,+\infty)$		$(-\infty,-1]$	

Integrali impropri 2

Argomenti: studio di integrali impropri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di integrale improprio, spezzamento in integrali monoproblema

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede l'integrale improprio sugli insiemi indicati. Stabilire in quanti integrali impropri monoproblema occorre spezzare l'integrale dato e determinarne il comportamento complessivo, calcolando esplicitamente il valore nel caso in cui converga. Qualora la richiesta non abbia senso, o non si tratti di un integrale improprio, accorgersene e segnalarlo.

Funzione	Insieme	Pezzi	Comport.	Insieme	Pezzi	Comport.
$\dfrac{x}{1+x^2}$	$(-\infty, 1]$			$\mathbb{R}$		
$\dfrac{x}{1+x^4}$	$(-\infty, 0]$			$\mathbb{R}$		
$\dfrac{\lvert x\rvert}{1+x^4}$	$(-\infty, 0]$			$\mathbb{R}$		
$\dfrac{x}{1-x^2}$	$[1, +\infty)$			$[0, +\infty)$		
$\dfrac{x}{1-x^4}$	$(-\infty, -2]$			$[0, +\infty)$		
$\dfrac{1}{x \log x}$	$[0, 1/e]$			$[0, 2]$		
$\dfrac{1}{x \log^5 x}$	$[0, 1]$			$[e, +\infty)$		
$\dfrac{1}{x \log x \cdot \log(\log x)}$	$[0, 1]$			$[e, +\infty)$		
$\dfrac{x^3-1}{x^4(\sqrt{x}-1)}$	$[0, 1]$			$[1, +\infty)$		
$\dfrac{1}{(x-3)\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$(-\infty, 3]$			$\mathbb{R}$		
$\dfrac{\tan^4 x - 1}{\sqrt{\tan^7 x}}$	$[0, \pi/4]$			$[\pi/4, \pi/2]$		
$\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$	$[0, +\infty)$			$\mathbb{R}$		
$\dfrac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}(4^{\sqrt{x}}-1)}$	$[0, 1]$			$[1, +\infty)$		

Integrali impropri 3

Argomenti: studio di integrali impropri **Difficoltà**: ⋆ ⋆ ⋆

Prerequisiti: criteri di convergenza per integrali impropri

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede l'integrale improprio sugli insiemi indicati. Stabilire in quanti integrali impropri monoproblema occorre spezzare l'integrale dato e determinarne il comportamento complessivo (senza calcolarne esplicitamente il valore nel caso in cui converga). Qualora la richiesta non abbia senso, o non si tratti di un integrale improprio, accorgersene e segnalarlo.

Funzione	Insieme	Pezzi	Comport.	Insieme	Pezzi	Comport.
$\log x$	$[0, e]$			$[0, +\infty)$		
$\sin \frac{1}{x}$	$[0, 2]$			$[0, +\infty)$		
$\frac{1}{\sin x}$	$[0, 1]$			$[-1, 1]$		
$e^{1/x}$	$[-1, 0]$			$[0, 1]$		
e^{-x^2}	$[0, +\infty)$			$\mathbb{R}$		
$\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}$	$[0, +\infty)$			$[0, 1]$		
$\frac{\arctan x - \sin x}{x^2}$	$[0, +\infty)$			$\mathbb{R}$		
$\frac{1}{e^x - 1}$	$[2, +\infty)$			$[0, +\infty)$		
$\frac{\sin x}{e^x - 1}$	$[0, 2]$			$[0, +\infty)$		
$\frac{\lvert\cos x\rvert}{x^2}$	$[1, +\infty)$			$\mathbb{R}$		
$\frac{\lvert\cos x\rvert - 1}{x^2}$	$[-1, 0]$			$\mathbb{R}$		
$\frac{1}{x + \sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$	$[1, +\infty)$			$[0, +\infty)$		
$\sin \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x}$	$[0, 1]$			$[3, +\infty)$		
$\frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$	$[0, +\infty)$			$\mathbb{R}$		

Integrali impropri 4

Argomenti: studio di integrali impropri **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: criteri di convergenza per integrali impropri

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede l'integrale improprio sugli insiemi indicati. Stabilire in quanti integrali impropri monoproblema occorre spezzare l'integrale dato e determinarne il comportamento complessivo (senza calcolarne esplicitamente il valore nel caso in cui converga). Qualora la richiesta non abbia senso, o non si tratti di un integrale improprio, accorgersene e segnalarlo.

Funzione	Insieme	Pezzi	Comport.	Insieme	Pezzi	Comport.
$\dfrac{1}{\log x}$	$[0, 1/2]$			$[0, 1]$		
$\dfrac{1}{\log x}$	$[1, +\infty)$			$[1/2, +\infty)$		
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{\log x}}$	$[0, 7]$			$[1/7, +\infty)$		
$\dfrac{1}{x^2\sqrt{\lvert\log x\rvert}}$	$[0, +\infty)$			$[1/2, +\infty)$		
$\dfrac{1}{\sin x}$	$[0, \pi]$			$[0, 2\pi]$		
$\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x^4 - 1\rvert}}$	$[0, 2]$			$\mathbb{R}$		
$\dfrac{\arctan(x^2)}{x^2 - 1}$	$[1, +\infty)$			$[0, +\infty)$		
$\tan x$	$[0, \pi/2]$			$[0, \pi]$		
$\sqrt[3]{\tan x}$	$[0, \pi/2]$			$[0, \pi]$		
$\dfrac{\log x}{x^4 - 1}$	$[3, +\infty)$			$[0, +\infty)$		
$\dfrac{1}{\sin(\sqrt{x})}$	$[0, 1]$			$[1, \pi^2]$		
$\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\lvert x^2 - 5x + 6\rvert}}$	$[0, +\infty)$			$\mathbb{R}$		
$\dfrac{e^x}{x + 1}$	$[0, +\infty)$			$\mathbb{R}$		

Integrali impropri 5

Argomenti: studio di integrali impropri con parametro **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: criteri di convergenza per integrali impropri

Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ i seguenti integrali convergono.

Integrale	α	Integrale	α	Integrale	α
$\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{x^\alpha + 3}\,dx$		$\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^3 + 3}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{3} \frac{x^3 + 3}{x^\alpha}\,dx$	
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \log x}$		$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \log^2 x}$	
$\displaystyle\int_0^{1} \lvert\log x\rvert^\alpha\,dx$		$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \alpha}$		$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\lvert x^2 - 1\rvert^\alpha}$	
$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\lvert\log x\rvert^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\lvert\log x\rvert^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lvert\log x\rvert^\alpha}\,dx$	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{1} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^\alpha}\,dx$	
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sin^\alpha x}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^3}\,dx$	
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^\alpha}{\sin x}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^\alpha}{\sin x}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{7} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$	
$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\lvert\tan x\rvert^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^2}{\lvert\tan x\rvert^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^\alpha - 1}}\,dx$	

Integrale	α	Integrale	α
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx$	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^3 + x^\alpha}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan x \cdot \sin\frac{1}{x^\alpha}\,dx$	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2^x}{x^\alpha 2^x + \sin x + 4}\,dx$		$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha^x}{x^2 2^x + \sin x + 4}\,dx$	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\right)^\alpha dx$		$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x) - \arctan x}{x^2}\,dx$	

Integrali impropri 8

Argomenti: studio di integrali impropri oscillanti **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: trucco dell'integrazione per parti, metodo dei triangolini (o rettangolini)

---

1. (a) Dimostrare che i seguenti integrali impropri sono convergenti:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx.$$
   (b) Dimostrare che i seguenti integrali impropri sono indeterminati:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{x})\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$
   (c) Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza dei seguenti integrali:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,dx.$$
2. (a) Dimostrare che i seguenti integrali impropri sono divergenti:
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \left|\cos(x^2)\right|\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \left|\sin(x^2)\right|\,dx.$$
   (b) Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza dei seguenti integrali:
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} |\cos(x^\alpha)|\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(x^\alpha)|\,dx.$$
3. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:
$$\int_0^{+\infty} \cos(\log x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(e^x)\,dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\log x}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x\log x)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{\log x}\right)dx,$$
$$\int_0^{+\infty} |\cos(\log x)|\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{0} |\sin(e^x)|\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(e^x)|\,dx.$$
4. Studiare, al variare dei parametri in essi contenuti (pensati come numeri reali positivi) la convergenza dei seguenti integrali impropri:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} x^\beta\cos(x^\alpha)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^\beta\cos(x^\alpha)}{1+x^\gamma}\,dx.$$

Confronti serie-integrali – Esercizi teorici

Argomenti: confronto tra serie ed integrali impropri **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di serie e di integrale improprio

---

1. (Caso di un intervallo, con $f(x)$ decrescente) Siano $M < N$ due numeri naturali, e sia $f : [M, N] \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente decrescente.

   Dimostrare (e visualizzare geometricamente) le seguenti disuguaglianze:

$$f(N) + \int_M^N f(x)\,dx \le \sum_{k=M}^{N} f(k) \le f(M) + \int_M^N f(x)\,dx,$$

$$\sum_{k=M+1}^{N} f(k) \le \int_M^N f(x)\,dx \le \sum_{k=M}^{N-1} f(k).$$

2. (Caso di una semiretta, con $f(x)$ decrescente) Siano M un numero naturale, e sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente decrescente.

   Dimostrare (e visualizzare geometricamente) le seguenti disuguaglianze:

$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=M}^{\infty} f(k) \le f(M) + \int_M^{+\infty} f(x)\,dx,$$

$$\sum_{k=M}^{\infty} f(k) \le \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=M}^{\infty} f(k).$$

   Occhio: precisare bene in che senso esistono gli integrali e le serie, e cosa accade quando il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ è diverso da 0.

3. (Caso di una semiretta, con $f(x)$ prima crescente, poi decrescente) Sia $a > 0$ e sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione debolmente crescente in $[0, a]$ e debolmente decrescente in $[a, +\infty)$.

   Dimostrare (e visualizzare geometricamente) le seguenti disuguaglianze:

$$-f(a) + \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \le \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \le f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

4. (a) Studiare la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \cdot (\log(\log n))^\alpha}.$$

   (b) Generalizzare il risultato.

   (c) Fornire, a seconda che le serie convergano/divergono, una stima dall'alto/basso per le somme parziali. Provare, almeno nel caso della serie armonica generalizzata, a dimostrare per induzione tali stime senza passare dagli integrali.

Confronti serie-integrali – Applicazioni

Argomenti: confronto tra serie ed integrali impropri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di serie e di integrale improprio

---

1. (a) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2^n}^{3^n}\frac{1}{k}.$$
(b) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\arctan\frac{1}{k}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=n}^{n^2}\sin\frac{1}{k}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2^n}^{3^n}\sinh\frac{1}{k}.$$
(c) Sia $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ una funzione con la proprietà che $f(x)=ax+o(x)$ per $x\to 0^+$ per un'opportuna costante $a\in\mathbb{R}$. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{3n}f\left(\frac{1}{k}\right).$$

2. Consideriamo le seguenti successioni:
$$a_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \qquad b_n=\sum_{k=n^2}^{\infty}\frac{1}{k^3}, \qquad c_n=\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{1}{k^3}, \qquad d_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k+\sin k}{\sqrt{k^5+3}}.$$
Dimostrare che sono ben definite e infinitesime per $n\to+\infty$, quindi determinarne ordine di infinitesimo e parte principale.

3. Consideriamo le seguenti successioni:
$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k^7, \qquad b_n=\sum_{k=n^2}^{n^3}k^7, \qquad c_n=\sum_{k=n^2}^{n^3}\sqrt[3]{k}, \qquad d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k^5+3}}{k+\sin k}.$$
Dimostrare che sono divergenti per $n\to+\infty$, quindi determinarne ordine di infinito e parte principale.

4. Consideriamo le seguenti serie convergenti:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+2}{k^7-5k^2+3}.$$
Stimare per ognuna di esse quanti termini dobbiamo sommare per approssimare la somma commettendo un errore inferiore a $1/100$.

5. Determinare un numero razionale che approssimi il numero di Nepero e con un errore inferiore a $1/1000$.

Equazioni differenziali – Nomenclatura 1

Argomenti: classificazione di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: nomenclatura sulle equazioni differenziali

Nella seguente tabella sono presentate varie equazioni differenziali, utilizzando diverse notazioni (l'incognita è $y(x)$, $y(t)$, $x(t)$, $u(t)$, $u(x)$ a seconda dei casi). Per ogni equazione si chiede di determinare l'ordine, se è autonoma (S/N), se è in forma normale (SI: lo è; QUASI: ci si riconduce facilmente; NI: ci si riconduce tranne che per qualche valore; NO), se è lineare, precisando in caso affermativo se è omogenea (H/NH) e se è a coefficienti costanti o variabili (CC/CV). Infine si chiede di determinare se appartiene ad una delle tre classi speciali (VS: variabili separabili, L1: lineare del primo ordine, LC: lineare a coefficienti costanti).

Equazione	Ordine	Autonoma	Forma Norm.	Lineare	Classe speciale
$u'(t) = 7u(t) + t^3$					
$y' = xy^2 + x^5$					
$\dot{x} + 3t = \arctan x$					
$\dot{x} + 3x = \arctan t$					
$\dot{x} + 3x = \arctan \ddot{x}$					
$u''' + t^2 u = 0$					
$u''' + tu^2 = 0$					
$u''' + tu = 0$					
$tu''' + u = 0$					
$u''' + \cos(tu) = 0$					
$y'(x) + 3y(x) = 0$					
$\dot{y} + 3y = \sinh t$					
$u'(t) = u(t)$					
$\dot{y} + x = yx$					
$u' + \arctan u = 0$					
$\dot{u}^2 + \ddot{u} = x^2$					
$\ddot{u}^2 + \dot{u} = x^2$					
$\ddot{u}^3 + \dot{u} = 6$					
$\ddot{u} = u + 1$					
$ty''(t) = y'(t) - t$					
$uu' = u^2 - 1$					

Equazioni differenziali – Nomenclatura 2

Argomenti: classificazione di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: nomenclatura sulle equazioni differenziali

1. Compilare la seguente tabella, seguendo le stesse indicazioni della scheda precedente.

Equazione	Ordine	Autonoma	Forma Norm.	Lineare	Classe speciale
$\log u'' + u' = u$					
$e^t u'(t) = [u(t)]^2$					
$e^t u''(t) = [u(t)]^2$					
$e^{u(t)} u'(t) = t^2$					
$(uu')' = u^3$					

2. Fornire esempi di
   (a) un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non autonoma,
   (b) un'equazione differenziale lineare autonoma non omogenea,
   (c) un'equazione differenziale a variabili separabili autonoma.

3. Stabilire se quelli indicati nella seguente tabella sono problemi di Cauchy oppure no.

Problema	S/N	Problema	S/N	Problema	S/N
$u' = u + 3$ $u(0) = 7$		$u' = u + 3$ $u(7) = 0$		$u' = u + 3$ $u'(0) = 7$	
$u' = u^2 + t$ $u(0) = u(7) = 3$		$u'' = u^2 + t$ $u(0) = u(7) = 3$		$u'' = u^2 + 7$ $u(7) = u'(7) = 0$	
$u'' + 3u = t^2$ $u(6) = 5$ $u'(6) = 8$		$u'' + 3u = t^2$ $u(5) = 6$ $u'(8) = 6$		$u'' + 3u = t^2$ $u(\pi) = 0$ $u'(\pi) = 0$	
$u''' + u = 5$ $u(2) = u'(2) = 3$ $u''(2) = 4$		$u''' + u = 5$ $u(2) = 4$ $u''(2) = 6$		$u''' + u = 5$ $u(2) = u''(2) = 3$ $u'(2) = 4$	

4. Stabilire se le sei funzioni della prima riga sono soluzioni delle cinque equazioni differenziali della seconda riga (la stessa funzione può risolvere più equazioni):

$$e^t, \qquad \sin t, \qquad \sinh t, \qquad \cos(t+8), \qquad t, \qquad 2t^{-1};$$

$$u'' + u = 0, \qquad u'' - u = 0, \qquad 2u'' - u = e^t, \qquad tu'' = u^2, \qquad (u'')^2 + (u')^2 = 1.$$

Equazioni differenziali – Risoluzione 1

Argomenti: equazioni differenziali a variabili separabili **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: tecniche di integrazione, studio di funzione

Per ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy determinare la soluzione ed il suo tempo di vita (L.S.) nel passato e nel futuro. Nella casella sul comportamento asintotico (C.A.), relativamente al passato ed al futuro, indicare il limite nel caso in cui si ha esistenza globale, oppure precisare se si ha blow up (BU) o break down (BD).

			Passato		Futuro	
Equazione	Dato	Soluzione	L.S.	C.A.	L.S.	C.A.
$u' = u^2$	$u(0) = 2$					
$u' = u^2$	$u(0) = -2$					
$u' = t^3u^2$	$u(1) = -2$					
$u' = t^3u^2$	$u(-2) = 0$					
$u' = -u^2$	$u(2) = 3$					
$u' = -u^2$	$u(2) = -3$					
$u' = u^2 + 1$	$u(0) = 1$					
$u' = e^u t$	$u(0) = 20$					
$u' = -e^{-t}u^4$	$u(1) = 0$					
$u' = -e^{-t}u^4$	$u(0) = 1$					
$u' = -u^3$	$u(0) = 2$					
$u' = -u^5 \sin t$	$u(0) = \pi$					
$u' = u^2 - 4$	$u(0) = 4$					
$u' = u^2 - 4$	$u(0) = 1$					
$u' = u^2 - 4$	$u(0) = -2$					
$u' = u^2 - 4$	$u(0) = -4$					
$u' - tu = t$	$u(1) = 1$					
$u' = ut^{-1}$	$u(1) = 2$					
$u' = u^{-1}t$	$u(1) = 2$					
$u' = 7u^{-1}t$	$u(1) = 2$					

Equazioni differenziali – Risoluzione 2

Argomenti: equazioni differenziali a variabili separabili **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: tecniche di integrazione, studio di funzione

Per ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy determinare la soluzione ed il suo tempo di vita (L.S.) nel passato e nel futuro. Nella casella sul comportamento asintotico (C.A.), relativamente al passato ed al futuro, indicare il limite nel caso in cui si ha esistenza globale, oppure precisare se si ha blow up (BU) o break down (BD).

			Passato		Futuro	
Equazione	Dato	Soluzione	L.S.	C.A.	L.S.	C.A.
$u' = u^2 t^{-3}$	$u(1) = 2$					
$u' = u^2 t^{-3}$	$u(1) = -2$					
$u' = t^2 u^{-3}$	$u(1) = 2$					
$u' = t^2 u^{-3}$	$u(1) = -2$					
$u' = u^{-2} t^{-3}$	$u(1) = 2$					
$u' = u^{-3} t^{-2}$	$u(1) = -2$					
$u' = -u^2 t^{-3}$	$u(1) = 2$					
$u' = -t^2 u^{-3}$	$u(1) = 2$					
$u' = -e^{u-t}$	$u(0) = 0$					
$u' = u \log^2 u$	$u(0) = e$					
$u' = u \log^2 u$	$u(0) = 1/e$					
$u' = -u \log^2 u$	$u(2) = e$					
$u' = -u \log^2 u$	$u(2) = 1/e$					
$u' = u \log u$	$u(0) = e^2$					
$u' = u \log u$	$u(0) = 1$					
$u' = u \log u$	$u(0) = 1/e$					
$u' = \cos^2 u$	$u(0) = 0$					
$u' = \cos^2 u$	$u(0) = 1$					
$u' = \cos^2 u$	$u(0) = 7\pi$					

Equazioni differenziali – Risoluzione 3

Argomenti: equazioni differenziali lineari omogenee **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

---

Determinare una base dello spazio delle soluzioni per ciascuna delle equazioni differenziali della seguente tabella.

Equazione	Base	Equazione	Base
$u' + 3u = 0$		$u' - 5u = 0$	
$u'' + 5u' + 6u = 0$		$u'' + 2u' - 8u = 0$	
$u'' + 7u' - 8u = 0$		$u'' = 0$	
$u'' - 4u' = 0$		$u'' - 4u = 0$	
$u'' + 4u' = 0$		$u'' + 4u = 0$	
$u'' + 6u' + 9u = 0$		$u'' + 6u' + 10u = 0$	
$u'' + 6u' + 13u = 0$		$16u'' + 8u' + u = 0$	
$u''' + u'' + u' + u = 0$		$u''' + 8u'' = 0$	
$u''' + 8u' = 0$		$u''' + 8u = 0$	
$u^{IV} - u = 0$		$u^{IV} + 9u = 0$	
$u^{IV} - 2u'' + u = 0$		$u^{IV} + 2u'' + u = 0$	

In ogni riga della seguente tabella sono riportate un'equazione differenziale e una o più condizioni aggiuntive di vario tipo. Si chiede di dimostrare che l'equazione ammette esattamente una soluzione che verifica tali condizioni aggiuntive e di determinare esplicitamente tale soluzione.

Equazione	Condizione/i	Soluzione
$u'' - u = 0$	$u(-1) = u(1) = 2$	
$u'' + u = 0$	$u(0) = u'(\pi) = 2$	
$u'' - 6u' + 5u = 0$	$\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-t} u(t) = 5$	
$u'' + 4u' - 5u = 0$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\, dt = 46$	
$u''' - 17u'' + 2014u' = 0$	$\displaystyle\lim_{t \to +\infty} u(t) = 46$	

Equazioni differenziali – Risoluzione 4

Argomenti: equazioni differenziali lineari non omogenee **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti

Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali.

Equazione	Soluzione	Equazione	Soluzione
$u' + 3u = e^{2t}$		$u' + 4u = \sin t$	
$u' + 5u = \cos(2t)$		$u' + 6u = t^2 + 1$	
$u' + 3u = e^{-3t}$		$u' + 3u = t^2 e^t$	
$u' + 3u = t^2 e^{-3t}$		$u' - 2u = t \sin t$	
$u' - 2u = e^t \sin t$		$u' - u = 1$	
$u' - 5u = e^{2t} + \sin t$		$u' - 5u = 7 + te^{5t}$	

Equazione	Soluzione
$u'' - u' - 2u = t^2 + e^{3t} + \cos(2t)$	
$u'' - u' - 2u = 5 + t \sin t$	
$u'' - u' - 2u = \cosh t + e^{2t} + 6^t$	
$u'' - u' - 2u = t^2(e^t + e^{2t})$	
$u'' + 4u' + 4u = \sinh(2t) + \cosh(3t)$	
$u''' - 3u'' = t^2 + 7 - 2\sin^2 t$	
$u''' - 3u' = t^2 + 7 - 2\sin^2 t$	
$u'' + 4u = \sin t + \cos(2t)$	

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare la soluzione che verifica le condizioni iniziali $u(0) = u'(0) = 0$.

Equazione	Soluzione
$u'' - 3u' + 2u = e^t + e^{2t} + e^{3t}$	
$u'' - 4u' + 4u = \cos^3 t$	
$u'' + u = \dfrac{1}{1 + \sin t}$	

Equazioni differenziali – Risoluzione 5

Argomenti: equazioni differenziali lineari di ordine uno **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: equazioni differenziali lineari del prim'ordine a coefficienti variabili

1. Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali.

Equazione	Soluzione	Equazione	Soluzione
$u' + tu = t^3$		$u' + u \sin t = \sin(2t)$	
$u' - u = e^t$		$u' + e^t u = e^{2t}$	
$u' + \dfrac{u}{t+1} = t^2$		$u' + u = \dfrac{1}{2 + e^t}$	

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t) + \frac{2u(t)}{t} = \cos t.$$

   (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione.

   (b) Dimostrare che esiste un'unica funzione $u \in C^1(\mathbb{R})$ che soddisfa l'equazione per ogni $t \neq 0$.

3. (Equazione di Bernoulli)

   (a) Dimostrare che l'equazione differenziale

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)[u(t)]^\alpha,$$

   dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni date e $\alpha \neq 1$ è un parametro reale, può essere ricondotta ad un'equazione lineare mediante il cambio di variabili $v = u^{1-\alpha}$.

   (b) Trovare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = 2u - 3u^2 \\ u(0) = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u' = 2u - \dfrac{3t}{u^2} \\ u(0) = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u' = u \arctan t - u^5 \sin t \\ u(3) = 0 \end{cases}$$

4. (Valore soglia) Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'(t) - 2u(t) = \arctan t, \qquad u(0) = \alpha.$$

   Dimostrare che esiste un numero reale α_0 con questa proprietà:

   - per $\alpha < \alpha_0$ la soluzione tende a $-\infty$ quando $t \to +\infty$,
   - per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione ha limite finito quando $t \to +\infty$,
   - per $\alpha > \alpha_0$ la soluzione tende a $+\infty$ quando $t \to +\infty$.

Equazioni differenziali – Studio 1

Argomenti: equazioni differenziali con parametri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: equazioni a variabili separabili, studio di funzioni con parametri

---

In ogni riga della seguente tabella è indicato un problema di Cauchy, con dato iniziale dipendente da un parametro α. Si chiede di determinare per quali valori del parametro la soluzione ha esistenza globale, blow up o break down (nel passato e nel futuro).

		Passato			Futuro		
Equazione	Dato	E.G.	B.U.	B.D.	E.G.	B.U.	B.D.
$u' = u^2$	$u(0) = \alpha$						
$u' = -u^2$	$u(0) = \alpha$						
$u' = u^{20}$	$u(\pi) = \alpha$						
$u' = -u^{20}$	$u(\pi) = \alpha$						
$u' = u^{33}$	$u(0) = \alpha$						
$u' = -u^{33}$	$u(0) = \alpha$						
$u' = u \log u$	$u(0) = \alpha$						
$u' = u \log^3 u$	$u(0) = \alpha$						
$u' = u^3 e^{-t}$	$u(0) = \alpha$						
$u' = u^{-3} e^{-t}$	$u(1) = \alpha$						
$u' = u^{-3} e^{-t}$	$u(\alpha) = 1$						
$u' = u^2 \sin t$	$u(0) = \alpha$						
$u' = u^3 \sin t$	$u(0) = \alpha$						
$u' = u^3 \sin^2 t$	$u(0) = \alpha$						

[to be completed]

Equazioni differenziali – Studio 2

Argomenti: equazioni differenziali con parametri **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: formule risolutive, studio di funzioni con parametri

---

Consideriamo le seguenti proprietà:

P1	esiste almeno una soluzione non nulla limitata
P2	esiste almeno una soluzione non nulla limitata per tempi positivi
P3	tutte le soluzioni sono limitate per tempi positivi
P4	esiste almeno una soluzione che tende a 77 per $t \to +\infty$
P5	esiste almeno una soluzione non nulla che ha integrale convergente in $[0, +\infty)$

Determinare ora, per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, i valori del parametro reale α per cui le varie proprietà risultano verificate.

Equazione	P1	P2	P5	P5	P5
$u'' + \alpha u' = 0$					
$u'' + \alpha u = 0$					
$u'' + 2u = \sin(\alpha t)$					
$u'' + \alpha u' + 7u = 0$					
$u'' + 7u' + \alpha u = 0$					

[to be completed]

Equazioni differenziali – Studio 3

Argomenti: equazioni differenziali con parametri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle equazioni differenziali e non solo

---

1. (Reverse engineering)

   (a) Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare un'equazione differenziale autonoma del primo ordine (in forma normale) di cui sono soluzione:

   $$u_1(t) = \frac{t}{t+1}, \qquad u_2(t) = \sinh t, \qquad u_3(t) = \log(t+5), \qquad u_4(t) = \arctan t.$$

   (b) Determinare un'equazione differenziale autonoma (in forma normale) che ha tra le sue soluzioni le seguenti tre funzioni: t, $\sin t$, e^{-3t}.

   (c) Determinare un'equazione differenziale autonoma (in forma normale) che ha tra le sue soluzioni le seguenti tre funzioni: t^3, $\sin^2 t$, 7^t.

   (d) Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare un'equazione differenziale autonoma del secondo ordine (in forma normale) di cui sono soluzione:

   $$u_1(t) = \cosh t, \qquad u_2(t) = t^2, \qquad u_3(t) = t^4, \qquad u_4(t) = \frac{t^2}{t^2+1}.$$

   (e) Dimostrare che le funzioni di cui al punto precedente non possono essere soluzioni, definite su tutto $\mathbb{R}$, di equazioni differenziali autonome del primo ordine.

2. (Cambi di variabili) Determinare, per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 0$:

   $$u' = (u+t)^2, \qquad u' = (t^2+u)^3 - 2t, \qquad u' = 1 + t^2 e^{-u}.$$

3. Determinare la soluzione generale del problema di Cauchy

   $$t^2 u''(t) + atu'(t) + bu(t) = 0$$

   al variare dei parametri a e b.

4. (Autovalori della derivata seconda) Sia $\ell > 0$ un parametro reale (supporre inizialmente $\ell = \pi$). Consideriamo l'equazione differenziale

   $$u''(t) = \lambda u(t).$$

   Determinare per quali valori di λ l'equazione ammette almeno una soluzione non nulla che soddisfa ciascuno dei seguenti set di *condizioni al bordo*:

   (a) (Condizioni al bordo periodiche) $u(0) = u(\ell)$ e $u'(0) = u'(\ell)$,

   (b) (Condizioni al bordo di Dirichlet) $u(0) = u(\ell) = 0$,

   (c) (Condizioni al bordo di Neumann) $u'(0) = u'(\ell) = 0$,

   (d) (Condizioni al bordo miste) $u(0) = 0$ e $u'(\ell) = 0$.

Equazioni differenziali – Studio 4

Argomenti: equazioni differenziali con parametri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle equazioni differenziali e non solo

---

1. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u'(t) = -a(t)u(t),$$
dove $a : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ è una funzione continua.
Dimostare che tutte le soluzioni dell'equazione tendono a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se
$$\int_0^{+\infty} a(t)\,dt \to +\infty.$$
Serve davvero l'ipotesi che $a(t)$ sia sempre maggiore o uguale a 0?

2. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u'(t) = a(t)[u(t)]^2,$$
dove $a : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ è una funzione continua.
Dimostare che tutte le soluzioni con $u(0) > 0$ hanno blow up in tempo finito (nel futuro) se e solo se
$$\int_0^{+\infty} a(t)\,dt \to +\infty.$$
Serve davvero l'ipotesi che $a(t)$ sia sempre maggiore o uguale a 0?

3. (Equazioni del primo ordine con rhs di tipo potenza) Sia $p > 1$ un numero reale.
   (a) Consideriamo il problema di Cauchy
   $$u'(t) = |u(t)|^p, \qquad u(0) = \alpha$$
   Dimostrare che (nel futuro), la soluzione ha esistenza globale se $\alpha \leq 0$ e blow up in tempo finito se $\alpha > 0$.
   (b) Studiare in maniera analoga il problema di Cauchy
   $$u'(t) = -|u(t)|^p, \qquad u(0) = \alpha.$$

4. (Condizione di Osgood) Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'(t) = f(u(t)), \qquad u(0) = \alpha > 0,$$
dove $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ è una funzione continua.
Dimostrare che (nel futuro) la soluzione ha esistenza globale se e solo se
$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx = +\infty.$$

Equazioni differenziali – Studio 5

Argomenti: equazioni differenziali con parametri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle equazioni differenziali e non solo

---

1. (Esistenza di soluzioni limitate e risonanza)
   (a) Consideriamo l'equazione differenziale
   $$u''(t) - 7u(t) = f(t).$$
   Dimostrare che, se $f(t)$ è una funzione continua e limitata, allora l'equazione ammette esattamente una soluzione limitata su tutta la retta.
   (b) Consideriamo l'equazione differenziale
   $$u''(t) + 7u(t) = f(t).$$
   Dimostrare che esiste una funzione $f(t)$ continua e limitata e tale che l'equazione non ammette nessuna soluzione limitata su tutta la retta.
2. (Esistenza di soluzioni limitate e/o periodiche) Consideriamo l'equazione differenziale
   $$u'(t) + au(t) = f(t),$$
   dove a è un parametro reale ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.
   (a) Dimostrare che, se $a \neq 0$, se $f(t)$ è limitata allora l'equazione ammette sempre esattamente una soluzione limitata su tutta la retta.
   (b) Dimostrare che, se $a = 0$, allora le soluzioni sono tutte limitate o tutte illimitate, ed entrambi i casi si possono realizzare per opportune scelte di $f(t)$.
   (c) Dimostrare che, qualunque sia il valore di a, se $f(t)$ è periodica allora l'equazione ammette esattamente una soluzione periodica.
3. (Very lateral thinking) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
   $$u' = \frac{u}{t + u^2}.$$

Successioni per ricorrenza – Lineari 1

Argomenti: successioni per ricorrenza lineari **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: formule per ricorrenze lineari, omogenee e non omogenee

Determinare la formula generale per le seguenti successioni per ricorrenza.

Ricorrenza	Formula	Ricorrenza	Formula
$x_{n+1} = 5x_n$		$x_{n+1} = -3x_n$	
$x_{n+1} = 2x_n + 3$		$x_{n+1} = -3x_n + 2$	
$x_{n+1} = x_n + 4$		$x_{n+1} = -x_n + n$	
$x_{n+1} = 2x_n - n^2$		$x_{n+1} = x_n + 3n + 1$	
$x_{n+1} = 3x_n - 2^n$		$x_{n+1} = 3x_n - 3^n$	
$x_{n+1} = 5x_n - n2^n$		$x_{n+1} = x_n + n2^n$	
$x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1}$		$x_{n+1} = -7x_n + 10x_{n-1}$	
$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$		$x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1}$	
$x_{n+1} = x_n - x_{n-1}$		$x_{n+1} = -x_{n-1}$	

Per ciascuna ricorrenza, determinare la soluzione che verifica le condizioni indicate.

Ricorrenza	Condizioni	Formula esplicita
$x_{n+1} = 2x_n + 5$	$x_0 = 8$	
$x_{n+1} = x_n - n$	$x_0 = 7$	
$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$	$x_0 = 0,\ x_1 = 1$	
$x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1} + n + 2^n$	$x_0 = 0,\ x_1 = 0$	
$x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n + 3^n$	$x_0 = 1,\ x_1 = 2$	

Determinare le successioni che verificano le ricorrenze e le condizioni indicate.

Sistema	Condizioni	Formula esplicita
$a_{n+1} = 4a_n - b_n$ $b_{n+1} = 2a_n + b_n$	$a_0 = 1$ $b_0 = -3$	
$a_{n+1} = a_n + b_n + 3^n$ $b_{n+1} = 4a_n + b_n + n^2$	$a_0 = 0$ $b_0 = 0$	

Successioni per ricorrenza – Lineari 2

Argomenti: successioni per ricorrenza lineari **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: formule per ricorrenze lineari, omogenee e non omogenee

---

1. Consideriamo la ricorrenza $x_{n+1} = 3x_n + 7x_{n-1}$. Determinare se il seguente enunciato è vero o falso.

   Per ogni coppia di numeri naturali distinti i e j, e per ogni coppia di numeri reali a e b, esiste un'unica successione che soddisfa la ricorrenza e verifica le condizioni $x_i = a$ e $x_j = b$.

2. Sia x_n una successione *limitata* tale che $x_0 = 1$ e $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 3x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   Determinare x_3.

3. Sia a_n la successione definita ponendo $a_1 = 2015$, $a_2 = 2014$, e poi per ricorrenza
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \qquad \forall n \geq 1.$$
   Determinare $a_{2015} - 2a_{2014}$.

4. Sia a_n una successione di numeri *interi* tale che $a_{2015} \neq 0$ e
$$2a_{n+2} - 7a_{n+1} + 3a_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Determinare a_{25}/a_{22}.

5. Sia x_n una successione di numeri reali *positivi* che soddisfano la relazione ricorrente
$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = n^{2015} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Determinare i possibili valori del limite di a_{n+1}/a_n.

6. Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali tali che $a_{n+1} = 2b_n$ e $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ per ogni intero positivo n. Sappiamo che $a_{2015} = 3$ e che la successione b_n è limitata.

   Determinare b_{3333}.

7. Sia a_n la successione definita per ricorrenza ponendo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e
$$a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Determinare la massima potenza di 2 che divide a_{2015}.

8. (Lateral thinking) Determinare la formula esplicita per la successione definita per ricorrenza ponendo $x_0 = 3$ e poi
$$x_{n+1} = 7 + \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 1

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: successioni per ricorrenza autonome (piani con monotonia o distanza)

In ogni riga della seguente tabella sono date una ricorrenza ed un dato iniziale. Si chiede di determinare se la successione risultante è monotona o definitivamente monotona (indicare ↑, ↓, =, D ↑, D ↓, D = a seconda dei casi), l'eventuale limite della successione, ed i suoi estremi inferiore e superiore.

Ricorrenza	Dato x_0	Monot	Limite	Inf	Sup
$x_{n+1} = x_n^3$	$2/3$				
$x_{n+1} = x_n^3$	$3/2$				
$x_{n+1} = x_n^3$	$-2/3$				
$x_{n+1} = x_n^3$	$-3/2$				
$x_{n+1} = 2x_n^4$	$1/2$				
$x_{n+1} = 2x_n^4$	2				
$x_{n+1} = 2x_n^4$	$-1/2$				
$x_{n+1} = 2x_n^4$	-20				
$x_{n+1} = 5\sqrt{x_n}$	1				
$x_{n+1} = 5\sqrt{x_n}$	0				
$x_{n+1} = 5\sqrt{x_n}$	2015				
$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10}$	0				
$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10}$	2015				
$x_{n+1} = x_n^2 + 1$	-1000				
$x_{n+1} = x_n^2 - 6$	-3				
$x_{n+1} = x_n^2 - 6$	-4				
$x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + x_n}{2}$	4				
$x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + x_n}{2}$	$-1/4$				
$x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + x_n}{2}$	-4				

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 2

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: successioni per ricorrenza autonome (piani con monotonia o distanza)

In ogni riga della seguente tabella sono date una ricorrenza ed un dato iniziale. Si chiede di determinare se la successione risultante è monotona o definitivamente monotona (indicare ↑, ↓, =, $D\uparrow$, $D\downarrow$, $D =$ a seconda dei casi), l'eventuale limite della successione, ed i suoi estremi inferiore e superiore. Se la successione non è ben definita, accorgersene e segnalarlo.

Ricorrenza	Dato x_0	Monot	Limite	Inf	Sup
$x_{n+1} = \arctan x_n$	2015				
$x_{n+1} = e^{x_n} - 1$	-2015				
$x_{n+1} = e^{x_n} - 1$	$1/2015$				
$x_{n+1} = \log(1 + x_n)$	2015				
$x_{n+1} = \log(1 + x_n)$	$-1/2$				
$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + x_n^2}$	$-1/2$				
$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + x_n^2}$	2015				
$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 7x_n - 5}$	$6/7$				
$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 7x_n - 5}$	$499/700$				
$x_{n+1} = \left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)^2$	1				
$x_{n+1} = x_n^2 + \sqrt{x_n}$	$1/2015$				
$x_{n+1} = x_n + \sin x_n$	6π				
$x_{n+1} = x_n + \sin x_n$	6				
$x_{n+1} = x_n + \sin x_n$	$-1/2015$				
$x_{n+1} = \arctan(x_n^2)$	7π				
$x_{n+1} = \left(1 + \dfrac{x_n}{4}\right)\sqrt{x_n}$	2015				
$x_{n+1} = \left(1 + \dfrac{x_n}{4}\right)\sqrt{x_n}$	$1/2015$				

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 3

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: successioni per ricorrenza spiraleggianti (due tipi di piano)

In ogni riga della seguente tabella sono date una ricorrenza ed un dato iniziale x_0. Si chiede di determinare l'eventuale limite della successione, ed i suoi estremi inferiore e superiore.

Ricorrenza	Dato x_0	Limite	Inf	Sup
$x_{n+1} = 1/x_n$	2015			
$x_{n+1} = 1/x_n$	1			
$x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n}$	$1/2$			
$x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n}$	$1/2015$			
$x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n}$	2			
$x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n}$	2015			
$x_{n+1} = 9/x_n^2$	2			
$x_{n+1} = 9/x_n^2$	$3^{2/3}$			
$x_{n+1} = \dfrac{7}{5+2x_n}$	0			
$x_{n+1} = \dfrac{7}{5+2x_n}$	2015			
$x_{n+1} = \dfrac{7}{3+4x_n}$	0			
$x_{n+1} = -\dfrac{x_n^2+x_n}{2}$	$-1/2$			
$x_{n+1} = \dfrac{\lvert x_n-3\rvert}{2}$	2^{2015}			
$x_{n+1} = 1-\cos x_n$	$\pi/2$			
$x_{n+1} = x_n^2 - x_n$	$1/2$			
$x_{n+1} = 2^{1-x_n}$	-2015			
$x_{n+1} = \displaystyle\int_{x_n}^{0} e^{-t^4-1}\,dt$	18			

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 4

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: successioni per ricorrenza non autonome

In ogni riga della seguente tabella sono date una ricorrenza ed un dato iniziale x_1. Si chiede di determinare il limite della successione

Ricorrenza	Dato x_1	Limite	Ricorrenza	Dato x_1	Limite
$x_{n+1} = nx_n$	1		$x_{n+1} = x_n \arctan n$	1/2015	
$x_{n+1} = (x_n)^n$	2		$x_{n+1} = (x_n)^n$	1/2	
$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\sqrt{n+3}}$	2015		$x_{n+1} = \dfrac{(-1)^n x_n}{\sqrt[4]{n+2}}$	2015	
$x_{n+1} = \dfrac{x_n+8}{n+3}$	2015		$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+3}+8$	2015	
$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+3}+\sqrt{n}$	2015		$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+3}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$	2015	
$x_{n+1} = \dfrac{x_n+8n}{n+3}$	2015		$x_{n+1} = \dfrac{x_n+8n}{n^2+3}$	2015	
$x_{n+1} = \dfrac{n^{10}}{2^n}\,x_n$	2015		$x_{n+1} = \dfrac{n^{10}}{2^n}\,x_n+8$	0	
$x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n}$	2015		$x_{n+1} = n\sqrt[n]{x_n}$	2015	
$x_{n+1} = \log(1+nx_n)$	2		$x_{n+1} = \log(1+nx_n)$	2^{-2015}	
$x_{n+1} = \arctan(nx_n)$	2015		$x_{n+1} = \arctan(nx_n)$	2^{-2015}	
$x_{n+1} = \sqrt[n]{1+x_n}$	2015		$x_{n+1} = \sqrt[n]{n+x_n}$	2015	
$x_{n+1} = \dfrac{nx_n+2}{2n+3}$	2015		$x_{n+1} = \dfrac{nx_n+2}{n+3}$	2015	
$x_{n+1} = n-x_n^2$	1		$x_{n+1} = n-3^{x_n}$	1	

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 5

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle successioni per ricorrenza

In ogni riga della seguente tabella è data una ricorrenza. Si chiede di determinare per quali valori del dato iniziale x_1 la successione risultante è limitata superiormente (L.S.), limitata inferiormente (L.I.), definitivamente strettamente crescente ($D\uparrow$), definitivamente strettamente decrescente ($D\downarrow$), definitivamente costante ($D=$).

Ricorrenza	L.S.	L.I.	$D\uparrow$	$D\downarrow$	$D=$
$x_{n+1} = x_n^2$					
$x_{n+1} = x_n^2 + 1$					
$x_{n+1} = x_n^2 + \dfrac{1}{4}$					
$x_{n+1} = (x_n)^n$					
$x_{n+1} = x_n - x_n^2$					
$x_{n+1} = \dfrac{x_n - x_n^2}{2}$					
$x_{n+1} = 2\sqrt{2x_n - 3}$					
$x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2} + 2 - x_n$					
$x_{n+1} = x_n^3 - 6x_n^2 + 12x_n - 6$					
$x_{n+1} = \dfrac{4x_n}{3 + x_n^2}$					
$x_{n+1} = x_n^2 - x_n$					
$x_{n+1} = \displaystyle\int_0^{x_n} e^{-t^2}\,dt$					
$x_{n+1} = \displaystyle\int_{x_n}^{2x_n} e^{-t^2}\,dt$					
$x_{n+1} = \arctan(nx_n)$					

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 6

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle successioni per ricorrenza (e non solo)

In ogni riga della seguente tabella sono dati una ricorrenza ed un dato iniziale x_1. A partire dalla successione x_n così definita, si costruisce poi una serie (che si intende sempre per n che va da 1 a infinito), di cui occorre stabilire se converge oppure no, ed una nuova successione y_n, di cui si chiede di calcolare il limite.

Ricorrenza	Dato x_1	Serie	Conv.?	y_n	Limite
$x_{n+1} = x_n^3 + x_n^2$	50	$\sum x_n^{-1}$		$n^5 x_n^{-1}$	
$x_{n+1} = x_n^3 + x_n^2$	1/50	$\sum x_n$		$5^n x_n$	
$x_{n+1} = \dfrac{\arctan x_n}{2}$	2015	$\sum x_n$		$n^{2015} x_n$	
$x_{n+1} = \log(1 + x_n^2)$	2015	$\sum x_n$		$n^n x_n$	
$x_{n+1} = \dfrac{x_n + 4}{3}$	0	$\sum \lvert x_n - 2 \rvert$		$\sqrt[n]{x_n}$	
$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$	5	$\sum (x_n - 4)$		$10^n (x_n - 4)$	
$x_{n+1} = \arctan\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$	1	$\sum x_n$		$\sqrt[n]{x_n}$	
$x_{n+1} = \arctan\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$	1	$\sum 8^n x_n$		$\dfrac{\sqrt[n]{x_n}}{n}$	
$x_{n+1} = \dfrac{5x_n + 7}{3n + 1}$	2015	$\sum x_n^2$		$n x_n$	

[To be completed]

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 7

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle successioni per ricorrenza e non solo

1. Dare un significato, posto che lo abbiano, alle seguenti scritture:

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}} \qquad\qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

2. (a) Dimostrare che l'equazione $\cos x = x$ ammette un'unica soluzione reale ℓ.
   (b) Dimostrare che la successione definita per ricorrenza da $x_{n+1} = \cos x_n$ tende ad ℓ per ogni valore del dato iniziale.
   (c) Determinare il limite di $|x_n - \ell|^{1/n}$ al variare del dato iniziale.

3. Consideriamo la successione per ricorrenza definita da (occhio alla differenza tra x_{n+1} e $x_n + 1$)

$$x_{n+1} = \int_{x_n}^{x_n+1} e^{-t^2}\, dt, \qquad x_0 = \alpha.$$

   Dimostrare che la successione tende ad un limite reale indipendente da α.

4. Studiare, al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$, la successione per ricorrenza definita da

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{x_n}, \qquad x_2 = \alpha.$$

5. Studiare il comportamento delle seguenti successioni per ricorrenza al variare del dato iniziale x_1:

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1}x_n, \qquad x_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+1}x_n, \qquad x_{n+1} = \frac{n^2 x_n + 2}{n^2+1}.$$

6. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n} + \frac{1}{n}, \qquad x_1 = \alpha > 0.$$

   (a) Dimostrare che la successione ha sempre un limite reale indipendente da α.
   (b) Dimostrare che la successione è sempre definitivamente decrescente.

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 8

Argomenti: valori soglia successioni per ricorrenza **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle successioni per ricorrenza e non solo

---

1. (Classico esempio di valore soglia) Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right), \qquad x_1 = \alpha.$$

Dimostrare che esiste $\alpha_0 > 0$ con questa proprietà:

- per $\alpha > \alpha_0$ la successione tende a $+\infty$,
- per $0 \leq \alpha < \alpha_0$ la successione è definitivamente decrescente e tende a 0,
- per $\alpha = \alpha_0$ la successione è debolmente crescente e tende a 1.

2. Verificare che le seguenti successioni per ricorrenza hanno un "effetto soglia" simile all'esercizio precedente al variare del dato $x_1 > 0$:

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{10n!}, \qquad x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n^2, \qquad x_{n+1} = (\arctan x_n)^{n+100}.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = n x_n^2, \qquad x_1 = \alpha \geq 0.$$

Dimostrare che esiste $\alpha_0 > 0$ con questa proprietà:

(a) per $\alpha > \alpha_0$ la successione tende a $+\infty$, e $a^{-n} x_n \to +\infty$ per ogni $a > 0$,

(b) per $0 \leq \alpha < \alpha_0$ la successione tende a 0, e $a^n x_n \to 0$ per ogni $a > 0$,

(c) per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione tende ancora a 0, ma più lentamente: in tal caso determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale.

4. Verificare che le seguenti successioni per ricorrenza hanno un "effetto soglia" simile all'esercizio precedente al variare del dato $x_1 > 0$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n \sqrt{x_n}}{n!}, \qquad x_{n+1} = 2n^3 x_n^2.$$

5. Dimostrare che esiste un'unica successione debolmente crescente e limitata tale che

$$x_{n+1} = x_n^3 - \arctan n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Successioni per ricorrenza non lineari – Studio 9

Argomenti: successioni per ricorrenza senza limite **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle successioni per ricorrenza e non solo

1. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{2x_n + 1}, \qquad x_0 = -\frac{\sqrt{50}}{7}.$$
   (a) Dimostare che x_n è ben definita ed è un numero irrazionale per ogni $n \in \mathbb{N}$ (capire in particolare perché va dimostrato che è ben definita).
   (b) Determinare il limite di x_n.
   (c) Dimostrare che esistono infiniti valori di x_0 per cui la successione non risulta ben definita.

2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = |2x_n - 3|, \qquad x_0 = \sqrt{2}.$$
   (a) Dimostrare che $x_n \in [0, 3]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Dimostare che x_n è un numero irrazionale per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Dimostrare che x_n non ha limite.

3. Consideriamo l'*equazione logistica*
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \qquad x_0 \in (0, 1),$$
   dove a è un parametro reale.
   (a) Dimostrare che per $a \in [0, 4]$ si ha che $x_n \in (0, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Dimostrare che per $a \in [0, 1]$ tutte le soluzioni sono decrescenti e tendono a 0.
   (c) Dimostrare che per $a \in (1, 2]$ tutte le soluzioni tendono ad uno stesso limite $\ell > 0$ e sono definitivamente monotone.
   (d) Dimostrare che per $a \in (2, 3]$ tutte le soluzioni tendono ad uno stesso limite $\ell > 0$ ma sono definitivamente monotone se e solo se sono definitivamente costanti.
   (e) Dimostrare che per $a \in (3, 4]$ tutte le soluzioni che non sono definitivamente costanti non hanno limite.

4. Consideriamo la ricorrenza
$$x_{n+1} = x_n + 10 \sin x_n.$$
   (a) Dimostrare che esistono successioni che la verificano e tendono a $+\infty$ o a $-\infty$.
   (b) Dimostrare che esistono successioni che la verificano e non hanno limite.
   (c) Dimostrare che le uniche successioni che la verificano ed hanno limite reale sono quelle definitivamente costanti.

Successioni per ricorrenza – Delirio 1

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: $\star\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sulle successioni per ricorrenza e non solo

---

1. (Media aritmetico-geometrica) Fissati due numeri reali positivi α e β, costruiamo per ricorrenza le successioni a_n e g_n ponendo $a_0 = \alpha$, $b_0 = \beta$ e poi, per ogni $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2}, \qquad g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}.$$
   (a) Dimostrare che a_n e g_n tendono ad uno stesso limite reale, detto *media aritmetico-geometrica* di α e β.
   (b) Dimostrare che per ogni $\alpha > 0$ e ogni $\ell > 0$, esiste un unico $\beta > 0$ tale che la media aritmetico-geometrica di α e β è uguale ad ℓ.

2. Dimostrare che per ogni $\ell \geq 0$ esiste una successione $x_n \to \ell$ tale che
$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2} \qquad \forall n \geq 1.$$
   E se non ci fosse il quadrato al *denominatore*?

3. Sia a_n una successione di numeri reali positivi che tende ad un limite reale positivo ℓ (non abbiamo nessuna ipotesi di monotonia su a_n). Consideriamo la ricorrenza
$$x_{n+1} = a_n x_n^p,$$
   dove p è un parametro reale positivo.
   (a) Dimostrare che per $p \in (0, 1)$ tutte le soluzioni con dato iniziale positivo hanno lo stesso limite (e determinare tale limite).
   (b) Dimostrare che per $p > 1$ compare un "effetto soglia" (precisando di cosa si tratta).
   (c) Cosa accade per $p = 1$?

4. Consideriamo la ricorrenza
$$x_{n+1} = a_n x_n^p,$$
   dove p è un parametro reale positivo, e a_n è una successione di numeri reali positivi.
   (a) Dimostrare che per ogni $p > 0$ esiste una successione a_n di numeri positivi per cui tutte le soluzioni della ricorrenza con $x_0 > 0$ tendono a $+\infty$.
   (b) Determinare se esiste una successione a_n di numeri positivi tale che per ogni $p > 0$ tutte le soluzioni della ricorrenza con $x_0 > 0$ tendono a $+\infty$.

5. Studiare le seguenti successioni per ricorrenza al variare dei dati iniziali x_0 e x_1:
$$x_{n+2} = |x_{n+1}| + x_n^2, \qquad x_{n+2} = |x_n| + x_{n+1}^2, \qquad x_{n+2} = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n+1}}.$$

Successioni per ricorrenza – Delirio 2

Argomenti: studio di successioni per ricorrenza non lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle successioni per ricorrenza e non solo

1. (a) Dimostrare che esiste un'unica successione x_n limitata tale che
$$x_{n+1} = \frac{1}{n} - 2x_n \qquad \forall n \geq 1.$$
   (b) Dimostrare che tutte le soluzioni della ricorrenza
$$x_{n+1} = \frac{1}{n} - x_n \qquad \forall n \geq 1$$
   sono limitate, ma una sola di esse ha limite.

   (c) (Sempre lineari sono ...) Vedere un'analogia tra questo esercizio e le equazioni differenziali, ed arrivare a scrivere una formula "esplicita" per le successioni richieste.

2. (a) Calcolare ordine di infinitesimo e parte principale della successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \arctan x_n, \qquad x_0 = 2015.$$
   (b) Stessa domanda per la successione
$$x_{n+1} = \log(1 + x_n), \qquad x_0 = 2015.$$
   (c) Enunciare e dimostrare un risultato che generalizzi i due punti precedenti.

   (d) (Fantascienza) Vedere un'analogia tra questo esercizio e le equazioni differenziali.

3. Siano date due successioni $a_n \to 1/2$ e $b_n \to 1$. Determinare il limite delle soluzioni della ricorrenza
$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n.$$

4. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n} + \frac{1}{n^{2015}}, \qquad x_{2015} = 2015^{-2015}.$$
   Determinare ordine di infinitesimo e parte principale della successione $x_n - 1$.

5. (a) Consideriamo la ricorrenza
$$x_{n+1} = \arctan x_n + \frac{1}{n}, \qquad x_1 = -2015^{2015}.$$
   Dimostrare che $x_n \to 0$ e determinarne ordine di infinitesimo e parte principale.

   (b) Stesse domande per la ricorrenza
$$x_{n+1} = \int_{x_n}^{1/n} e^{-t^2}\, dt \qquad x_1 = 2015^{2015}.$$

Funzioni integrali 1

Argomenti: studio di funzioni integrali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: integrali, integrali impropri, studio globale di funzioni

Studiare le seguenti funzioni integrali, tracciandone un grafico approssimativo.

Al solo fine di ottenere una tabella confrontabile, si chiede di indicare l'insieme degli x per cui è definita (Dom.), se si tratta di una funzione limitata inferiormente (L.I.) e/o superiormente, se ammette minimo e/o massimo globali (non è richiesto di calcolarli), il numero degli asintoti orizzontali (A.Or.), verticali (A.Vt.), obliqui (A.Ob.) (con l'accordo che una stessa retta che è asintoto orizzontale od obliquo a $\pm\infty$ conta due volte), il numero di punti di flesso.

Funzione	Dom.	L.I.	L.S.	Min	Max	A.Or.	A.Vt.	A.Ob.	Fls.
$\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$									
$\displaystyle\int_0^x \arctan^{20} t\,dt$									
$\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt$									
$\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$									
$\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$									
$\displaystyle\int_1^x \frac{e^t-7}{t}\,dt$									
$\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$									
$\displaystyle\int_{1/2}^x \frac{1}{\log t}\,dt$									
$\displaystyle\int_2^x \frac{t-1}{\log t}\,dt$									
$\displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$									
$\displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{1}{\arctan t}\,dt$									

[Memo: controllare che i flessi vengano ...]

Funzioni integrali 2

Argomenti: studio di funzioni integrali **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: integrali, integrali impropri, limiti, studio globale di funzioni

1. Determinare ordine di infinitesimo e parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) = 2\int_0^x e^{t^5-t^6}\,dt - \int_0^{x^2} \sin(t^2)\,dt - 2x.$$

2. Risolvere la disequazione
$$\arctan x > \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$$
   (a) Tracciare un grafico approssimativo, determinando in particolare quanti sono i punti stazionari.
   (b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 5 di $f(x)$ con centro nell'origine.
   (c) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} f(x).$$

4. (a) Dimostrare che l'espressione
$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{y}{\sqrt{y^3+1}\,\log(1+y)}\,dy$$
   definisce una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Calcolare, al variare del parametro reale positivo α, i seguenti due limiti:
$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}.$$
   (c) Determinare se $f(x)$ è Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$ oppure no.

5. (a) Dimostrare che l'espressione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$$
   definisce una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Stabilire se $f(x)$ è limitata inferiormente e/o superiormente su tutto $\mathbb{R}$.

(c) Stabilire se $f(x)$ ammette massimo e/o minimo su tutto $\mathbb{R}$.

(d) Stabilire se $f(x)$ ammette massimo e/o minimo su $[0, +\infty)$.

6. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_{x}^{x^3} \sqrt{y} \arctan^2 y \, dy.$$

(a) Dimostrare che $f(x)$ ammette minimo in $[0, +\infty)$.

(b) Determinare ordine di infinitesimo e parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

(c) Dimostrare che la successione $1/f(n)$ è infinitesima; determinarne quindi ordine di infinitesimo e parte principale.

(d) Dimostare che per ogni $\lambda > 0$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette un'*unica* soluzione reale.

(e) Detta x_n l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = n$, determinare l'ordine di infinito e la parte principale di x_n.

Liminf e Limsup 1

Argomenti: liminf e limsup di successioni **Difficoltà**: ⋆ ⋆ ⋆

Prerequisiti: liminf e limsup di successioni, tutto sui limiti

Calcolare il liminf ed il limsup delle seguenti successioni.

Successione	Liminf	Limsup	Successione	Liminf	Limsup
$(-1)^n$			$(-1)^n \arctan n$		
$(n^7 - n + 3)^n$			$(n^7 - n^{33} + 7)^n$		
$\cos(\pi n)$			$\sin(\pi n)$		
$\arctan\left[(n - n^2)^n\right]$			$\arctan\left[(n^2 - n)^n\right]$		
3^{-n^n}			$3^{(-n)^n}$		
$\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$			$\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \arctan n$		
$\cos\left(\frac{\pi n}{22}\right)$			$\left(2 - \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)^n$		
$\frac{(-1)^n n + 3}{8n + (-1)^n}$			$\frac{n + 3(-1)^n}{(-1)^n 8n + 5}$		
$\frac{(-1)^n n^2 + \sin n}{n + \sqrt{n}}$			$\frac{(-1)^{n^2} n + \sin n}{n + \sqrt{n}}$		
$\frac{(-1)^n \sqrt{n} + \sin n}{n + \sqrt{n}}$			$\frac{n + \sin n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$		
$\frac{3n - (-1)^n n^2}{3 + n \log(2^n + 1)}$			$\sqrt[n]{3^n + (-1)^n n^3}$		

Calcolare liminf e limsup delle seguenti successioni al variare del parametro reale $\alpha > 0$:

$$n^8 + (-1)^{n^3} n^\alpha, \qquad \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^n \qquad \sqrt{n}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 4n^\alpha,$$

$$(-1)^n n + \alpha^n, \qquad \left(\alpha + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)^n, \qquad \sqrt{n}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \alpha\sqrt{n},$$

$$(-\alpha)^n + 3^n, \qquad (-\alpha)^n + n^\alpha, \qquad \alpha^{n\cos(\pi n)}.$$

Liminf e Limsup 2

Argomenti: liminf e limsup di successioni e funzioni **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: tutto su liminf e limsup

Calcolare il liminf ed il limsup delle seguenti funzioni.

Funzione	$x \to$	Liminf	Limsup	$x \to$	Liminf	Limsup
$\sin x$	$+\infty$			$-\infty$		
$\cos(x^2)$	$+\infty$			$-\infty$		
$\cos^2 x$	$+\infty$			0		
$\sin(\log x)$	$+\infty$			0^+		
$e^{-x}\sin(x^2)$	$+\infty$			$-\infty$		
$e^{-x}\sin^2 x$	$+\infty$			$-\infty$		
$e^{\sin^2 x}$	$+\infty$			$-\infty$		
$\sin x + \cos x$	$+\infty$			0^+		
$\sin^3 x + \cos^3 x$	$+\infty$			0^+		
$\sin^{88} x + \cos^{88} x$	$+\infty$			$-\infty$		
$1 - \sin(\arctan(\sin x))$	$+\infty$			0^+		
$\sin x \cdot \cos \frac{1}{x}$	$+\infty$			0^-		
$\sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$	$-\infty$			0^+		
$\cos x \cdot \cos \frac{1}{x}$	$+\infty$			0^+		
$\cos x \cdot \sin \frac{1}{x}$	$+\infty$			0^-		
$\cos x + \cos \frac{1}{x}$	$+\infty$			0^+		
$\sin x + \sin \frac{1}{x}$	$-\infty$			0^+		
$\cos x + \cos^2 \frac{1}{x}$	$+\infty$			0^-		
$\frac{\sin(x^3)}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$+\infty$			0^-		

Liminf e Limsup 3

Argomenti: liminf e limsup di funzioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: liminf e limsup di successioni e funzioni, tutto sui limiti

---

1. (a) Enunciare e dimostrare la formula che lega liminf e limsup della successione $-a_n$ a liminf e limsup della successione a_n.
   (b) Stessa cosa più in generale per la successione λa_n, con λ numero reale.
   (c) Ancora più in generale, sia $b_n \to b_\infty \in (0, +\infty)$. Enunciare e dimostrare la formula che lega liminf e limsup della successione $a_n b_n$ a liminf e limsup della successione a_n.

2. Siano a_n e b_n due successioni. Supponiamo che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.
   Dimostrare che
   $$\liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \ell + \liminf_{n\to+\infty} b_n, \qquad \limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \ell + \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

3. Siano a_n e b_n due successioni, e siano A e B due numeri reali tali che
   $$\liminf_{n\to+\infty} a_n \geq A, \qquad \liminf_{n\to+\infty} b_n \geq B, \qquad \limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq A + B.$$
   Dimostrare che le successioni a_n e b_n hanno limite.

4. Consideriamo la nota relazione
   $$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$
   (a) Trovare un esempio in cui tutte e tre le disuguaglianze sono strette.
   (b) Dati 4 numeri reali $a \leq b \leq c \leq d$, è sempre possibile fare in modo che questi 4 numeri siano i 4 termini della catena di disuguaglianze precedente?

5. Consideriamo la nota relazione
   $$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
   (a) Trovare un esempio in cui tutte e tre le disuguaglianze sono strette.
   (b) Dati 4 numeri reali $a \leq b \leq c \leq d$, è sempre possibile fare in modo che questi 4 numeri siano i 4 termini della catena di disuguaglianze precedente?

6. [Questo andra' a finire nella sezione di ricapitolazione, ma cosi' non lo dimentico]
   Stabilire se l'implicazione
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \implies \liminf_{n\to+\infty}(1 + a_n)^n = 1.$$
   è vera per ogni successione a_n di numeri reali positivi.

Topologia sulla retta 1

Argomenti: **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti:

In ogni riga della seguente tabella viene presentato un sottoinsieme A della retta, e si chiede di determinarne la parte interna $\mathrm{Int}(A)$, la chiusura $\mathrm{Clos}(A)$, la frontiera ∂A, l'insieme dei punti isolati $\mathrm{Isol}(A)$, l'insieme dei punti di accumulazione $D(A)$.

A	$\mathrm{Int}(A)$	$\mathrm{Clos}(A)$	∂A	$\mathrm{Isol}(A)$	$D(A)$
$[0,2]$					
$(0,2)$					
$[0,2)$					
$(0,2]$					
$\{0,2\}$					
$\mathbb{R}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{Z}$					
$\emptyset$					
$(0,1)\cup(1,2)$					
$[0,1)\cup(1,2)$					
$(0,1)\cup\{2\}$					
$\mathbb{Q}\cap(0,2)$					
$\mathbb{Q}\cap[0,2]$					
$\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{n}\right\}$					
$\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right]$					
$\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$					

Topologia sulla retta 2

Argomenti: **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti:

---

1. (a) Dimostrare che valgono le seguenti inclusioni

$$\operatorname{Int}(A) \subseteq A \subseteq \operatorname{Clos}(A), \qquad \operatorname{Isol}(A) \subseteq A.$$

   (b) Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze, con unioni *disgiunte*:

$$\operatorname{Int}(A) \cup \partial A = \operatorname{Clos}(A) = \operatorname{Isol}(A) \cup D(A).$$

   (c) Dimostrare che valgono le seguenti inclusioni

$$\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Clos}(A), \qquad \operatorname{Clos}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(A).$$

   Dedurne che A è aperto/chiuso se e solo se il suo complememtare è chiuso/aperto.

2. (Inclusioni) Supponiamo che $A \subseteq B$ siano due sottoinsiemi della retta.

   Enunciare e dimostrare le eventuali relazioni di inclusione che sussistono tra i rispettivi insiemi dei punti interni, aderenti, di frontiera, isolati e di accumulazione.

3. (Unioni e intersezioni)

   (a) Quantificare per bene e dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B), \qquad \operatorname{Int}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Int}(A_i).$$

   Dedurne che l'*intersezione finita* di aperti è ancora un aperto, e che l'*unione arbitraria* di aperti è ancora un aperto.

   (b) Quantificare per bene e dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\operatorname{Clos}(A \cup B) = \operatorname{Clos}(A) \cup \operatorname{Int}(B), \qquad \operatorname{Clos}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Clos}(A_i).$$

   Dedurne che l'*unione finita* di chiusi è ancora un chiuso, e che l'*intersezione arbitraria* di chiusi è ancora un chiuso.

   (c) Dimostrare che opportuni esempi che l'intersezione arbitraria di aperti può non essere aperta, e l'unione arbitraria di chiusi può non essere un chiuso.

4. Per ciascuna delle seguenti relazioni, trovare un sottoinsieme A che la verifica:

$$\partial A = A \neq \emptyset, \qquad \operatorname{Int}(\partial A) \neq \emptyset, \qquad D(A) = \partial A \neq \emptyset.$$

5. Dimostrare che gli unici sottoinsiemi della retta che sono contemporaneamente aperti e chiusi sono i sottoinsiemi banali $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.

6. (Caratterizzazione con le successioni) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme e sia $x_\infty \in \mathbb{R}$. Dimostrare che valgono le seguenti caratterizzazioni:

   (a) $x_\infty \in \text{Int}(A)$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_\infty$ si ha che $x_n \in A$ definitivamente,

   (b) $x_\infty \in \text{Clos}(A)$ se e solo se esiste una successione $x_n \to x_\infty$ tale che $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

   (c) $x_\infty \in \partial(A)$ se e solo se esiste una successione $x_n \to x_\infty$ tale che $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed esiste una successione $y_n \to x_\infty$ tale che $y_n \notin A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

   (d) $x_\infty \in \text{Isol}(A)$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_\infty$, con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che $x_n = x_\infty$ definitivamente.

   (e) $x_\infty \in D(A)$ se e solo se esiste una successione $x_n \to x_\infty$ tale che $x_n \in A$ e $x_n \neq x_\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

7. (Costruzioni reiterate)

   (a) Determinare un insieme A per cui i seguenti sette insiemi sono tutti distinti:

$$A, \qquad \text{Int}(A), \qquad \text{Clos}(A), \qquad \text{Int}(\text{Clos}(A)), \qquad \text{Clos}(\text{Int}(A)),$$
$$\text{Int}(\text{Clos}(\text{Int}(A))), \qquad \text{Clos}(\text{Int}(\text{Clos}(A))).$$

   (b) Determinare se è possibile ottenere ulteriori insiemi diversi dai precedenti procedendo nella costruzione.

   (c) Determinare il massimo numero possibile di insiemi distinti nella successione

$$A, \qquad \partial A, \qquad \partial(\partial A), \qquad \partial(\partial(\partial A)), \qquad \ldots$$

   (d) Determinare il massimo numero possibile di insiemi distinti nella successione

$$A, \qquad D(A), \qquad D(D(A)), \qquad D(D(D(A))), \qquad \ldots$$

8. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Cosa possiamo dire dell'intersezione di tutti gli aperti che contengono A?

9. Nella seguente tabella, le intestazioni delle colonne sono cinque insiemi e le intestazioni delle righe sono tre proprietà di una successione di insiemi I_n. In ogni casella si chiede di stabilire se esiste una successione I_n di *intervalli aperti* in $\mathbb{R}$ che verifica la proprietà di quella riga per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che ha come intersezione l'insieme di quella colonna.

Proprietà	$[0,1]$	$(0,1)$	$[0,1)$	$\{0\}$	$\emptyset$
$I_{n+1} \subseteq I_n$					
$I_{n+1} \subseteq I_n$ e $I_{n+1} \neq I_n$					
$\text{Clos}(I_{n+1}) \subseteq I_n$					

Lipschitzianità 1

Argomenti: funzioni lipschitziane **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: studio di funzioni, massimi e minimi

In ogni riga sono assegnati una funzione ed un po' di insiemi. Si chiede di stabilire se la funzione è Lipschitziana sugli insiemi indicati ed, in caso affermativo, di trovare esplicitamente la costante di Lipschitz negli insiemi stessi.

Funzione	Insieme	Lipschitz?	Insieme	Lipschitz?	Insieme	Lipschitz?
x^2	$[0, 2]$		$[-3, 2]$		$[1, +\infty)$	
x^2	$(0, 2)$		$(-3, 2)$		$(1, +\infty)$	
e^x	$[-1, 1]$		$[0, +\infty)$		$(-\infty, 0)$	
e^{-x^2}	$[-1, 1]$		$\mathbb{R}$		$[1, 4]$	
$\sin x$	$[0, 1]$		$[0, +\infty)$		$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$[0, 1]$		$[0, 2]$		$(0, 3)$	
$\arctan x$	$(0, 1)$		$(1, 2)$		$\mathbb{R}$	
$\sin(2x)$	$[0, 1]$		$(0, 1/5)$		$[0, +\infty)$	
$\lvert x\rvert$	$[0, 1]$		$[-3, -1]$		$\mathbb{R}$	
$\sqrt{x}$	$[0, 1]$		$[1, 2]$		$[1, +\infty)$	
$\sqrt[3]{x}$	$[0, 1]$		$[-3, -2]$		$(-\infty, -1]$	
$\log x$	$(0, 1)$		$(1, 2)$		$(2, +\infty)$	
$\dfrac{1}{x}$	$(0, 1)$		$(0, +\infty)$		$(3, +\infty)$	
$\lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R}$		$(3\pi/4, 5\pi/4)$		$(\pi/4, 3\pi/4)$	
$e^{-1/x}$	$(0, 1)$		$(0, +\infty)$		$(-\infty, -1)$	
$x\log x$	$(0, 1)$		$(1, +\infty)$		$[1, e]$	
x^2	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Q}$		$\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{n}\right\}$	
$\sqrt{x}$	$\mathbb{N}$		$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{2n\}$		$\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{n}\right\}$	

Lipschitzianità 2

Argomenti: funzioni lipschitziane **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio di funzioni, massimi e minimi

In ogni riga sono assegnati una funzione ed un po' di insiemi. Si chiede di stabilire se la funzione è Lipschitziana sugli insiemi indicati (S/N). In caso affermativo, *non* è richiesto il calcolo della costante di Lipschitz.

Funzione	Insieme	Lipschitz?	Insieme	Lipschitz?	Insieme	Lipschitz?
$x^7 e^{-x^2}$	$[0,1]$		$[0,+\infty)$		$\mathbb{R}$	
$e^{-\sqrt{x}}$	$[0,1]$		$[1,+\infty)$		$\mathbb{N}$	
$xe^{-\sqrt{x}}$	$[0,1]$		$[1,+\infty)$		$\mathbb{N}$	
$\dfrac{x^3}{x^3+1}$	$(-1,0)$		$(0,1)$		$(1,+\infty)$	
$\dfrac{x^4}{x^3+1}$	$(-1,0)$		$(0,1)$		$(1,+\infty)$	
$\dfrac{x^5}{x^3+1}$	$(-1,0)$		$(0,1)$		$(1,+\infty)$	
$\log(8+x^8)$	$[0,1]$		$\mathbb{R}$		$\mathbb{Q}$	
$\tanh x$	$[5,7]$		$(0,1)\cup(1,3)$		$\mathbb{R}$	
$x^2 \arctan x$	$(-1,1)$		$(-\infty,0)$		$(0,+\infty)$	
$x\arctan(x^2)$	$(-1,1)$		$(-\infty,0)$		$(0,+\infty)$	
$x\sin x$	$[0,\pi]$		$[\pi/2,3\pi/2]$		$[\pi,+\infty)$	
$\sin(x^2)$	$[0,\pi]$		$[\pi/2,3\pi/2]$		$[\pi,+\infty)$	
$\|\sin x\|^{1/2}$	$[0,\pi]$		$[\pi/2,3\pi/2]$		$[\pi,+\infty)$	
$x\|\sin x\|^{1/2}$	$[0,\pi]$		$[\pi/2,3\pi/2]$		$[\pi,+\infty)$	
$\sin(\sqrt{x})$	$[0,\pi]$		$[\pi,2\pi]$		$[\pi,+\infty)$	
$\cos(\sqrt{x})$	$[0,\pi]$		$[\pi,2\pi]$		$[\pi,+\infty)$	
$\dfrac{\sin x}{x}$	$(0,1)$		$(1,2)$		$(2,+\infty)$	
x^x	$(0,1)$		$(1,2)$		$(2,+\infty)$	

Uniforme continuità 1

Argomenti: funzioni uniformemente continue **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: uniforme continuità, lipschitzianità, studi di funzione

In ogni riga sono assegnati una funzione ed un po' di insiemi. Si chiede di stabilire se la funzione è Lipschitziana e/o uniformemente continua sugli insiemi indicati (S/N).

Funzione	Insieme	Lip?	U.C.?	Insieme	Lip?	U.C.?
x^2	$[-7, 3]$			$\mathbb{R}$		
$\sqrt{x}$	$(5, +\infty)$			$[0, +\infty)$		
$\log x$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\arcsin x$	$[0, 1/2]$			$[0, 1]$		
$x \log x$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\dfrac{x}{\log x}$	$(0, 1/2)$			$(2, +\infty)$		
$\dfrac{1}{\log x}$	$(0, 1/2)$			$(2, +\infty)$		
$\sqrt{1 + x^3}$	$[-1, 1]$			$[1, +\infty)$		
$\dfrac{\sqrt{1 + x^3}}{x}$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\cos(x^2)$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\dfrac{\sin(x^2)}{x}$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\dfrac{\sin(x^3)}{x}$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\|\cos x\|^{1/2}$	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
x^x	$(0, 1)$			$(1, +\infty)$		
$\dfrac{e^{-1/x}}{x^{10}}$	$(0, +\infty)$			$(-\infty, 0)$		
$\dfrac{e^x - 1}{x}$	$(0, +\infty)$			$(-\infty, 0)$		

Uniforme continuità 2

Argomenti: moduli di continuità **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: uniforme continuità, lipschitzianità, hölderianità

1. Consideriamo le seguenti funzioni integrali:
$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \qquad \int_0^x \frac{\arctan t}{|t-3|^{1/3}}\,dt, \qquad \int_0^x \frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{t}}\,dt, \qquad \int_1^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt.$$
Determinare se si tratta di funzioni uniformemente continue in $(0,10)$ ed in $(0,+\infty)$.

2. Dimostrare che la disuguaglianza
$$\big||y|^\alpha - |x|^\alpha\big| \le |y-x|^\alpha \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$
vale se e solo se $\alpha \in (0,1]$.

3. Consideriamo le funzioni
$$\sqrt[3]{\sin x}, \qquad \sqrt[3]{\cos x}, \qquad \cos\left(\sqrt[3]{x}\right), \qquad \sqrt[3]{1+x^2}, \qquad \sqrt[3]{\arctan x - \sin x}.$$
Stabilire, per ciascuna di esse, i valori di $\alpha\in(0,1]$ per cui appartiene agli spazi $C^{0,\alpha}((0,1))$ e $C^{0,\alpha}((0,+\infty))$.

4. (Condizione sufficiente per l'Hölderianità mediante elevamento a potenza)
Sia $A\subseteq\mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.
   (a) Dimostrare che, se $f(x)$ è continua e $|f(x)|^2$ è Lipschitziana, allora $f(x)$ è $1/2$-Hölder.
   (b) Generalizzare il punto precedente ad esponenti di Hölderianità arbitrari.
   (c) Dimostrare che non vale il viceversa, cioè che $f(x)$ può essere $1/2$-Hölder senza che $|f(x)|^2$ sia Lipschitziana.

5. Studiare, sia in $(0,1)$ sia in $(0,+\infty)$, l'uniforme continuità, l'Hölderianità e la Lipschitzianità delle seguenti funzioni integrali:
$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\arctan(\sqrt{t})}, \qquad \sqrt[3]{x}\int_x^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt, \qquad \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad \int_0^x \frac{dt}{|\log t|^{1/2}}.$$

6. Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze, determinare la più piccola costante c per cui sono verificate per ogni coppia di numeri reali x e y:
$$\left|ye^{-y^2} - xe^{-x^2}\right| \le c|y-x|,$$
$$\big||\sin(3y)|^{1/2} - |\sin(3x)|^{1/2}\big| \le c|y-x|^{1/2},$$
$$\left|\sqrt{1+\sin y} - \sqrt{1+\sin x}\right| \le c|y-x|.$$

Uniforme continuità n

Argomenti: moduli di continuità **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: uniforme continuità, lipschitzianità, hölderianità

---

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica e continua.

   Dimostrare che f è uniformemente continua.

2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, e siano $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Supponiamo che f sia α-Hölderiana e β-Hölderiana.

   Dimostrare che f è γ-Hölderiana per ogni $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

3. (Valoro assoluto) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*.

   Dimostrare che $f(x)$ è uniformemente continua (o Lipschitziana, o Hölderiana) se e solo se $|f(x)|$ è uniformemente continua (o Lipschitziana, o Hölderiana con lo stesso esponente).

4. (Passaggi all'unione) Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi tali che $\max A = \min B$ (si intende quindi che quel massimo e quel minimo esistono).

   Sia $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua sia in A sia in B.

   (a) Dimostrare che f è uniformemente continua in $A \cup B$.

   (b) Dimostrare un risultato analogo sostituendo uniformemente continua con Lipschitziana o Hölderiana.

   (c) I risultati continuano a valere senza l'ipotesi che $\max A = \min B$?

5. Enunciare per bene e dimostrare che la composizione di funzioni uniformemente continue è ancora uniformemente continua.

6. Cosa possiamo dire della somma, del prodotto e della composizione di funzioni hölderiane?

7. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Stabilire se le seguenti implicazioni sono vere o false.

   (a) Se f e g sono uniformemente contine, allora $f(x) \cdot g(x)$ è uniformemente continua.

   (b) Se f e g sono uniformemente contine e limitate, allora $f(x) \cdot g(x)$ è uniformemente continua.

   (c) Se f e g sono uniformemente contine, e g è limitata, allora $f(x) \cdot g(x)$ è uniformemente continua.

8. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e *limitate*. Stabilire se le seguenti implicazioni sono vere o false.

   (a) Se f è uniformemente contina, allora $f(g(x))$ è uniformemente continua.

   (b) Se g è uniformemente contina, allora $f(g(x))$ è uniformemente continua.

9. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Stabilire se esistono delle implicazioni tra le seguenti proprietà:

   (P1) f è uniformemente continua,

   (P2) esiste ed è reale il
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

   (P3) esiste ed è reale il
   $$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x+1) - f(x) \right].$$

10. Trovare una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che sia

    (a) derivabile ovunque ma con derivata discontinua in almeno un punto,

    (b) Lipschitziana ma con derivata che non esiste in almeno un punto,

    (c) α-Hölderiana per ogni $\alpha \in (0, 1)$ ma non Lipschitziana,

    (d) α-Hölderiana se e solo se $\alpha \leq 1/7$,

    (e) α-Hölderiana se e solo se $\alpha < 1/7$,

    (f) uniformemente continua ma non α-Hölderiana per nessun $\alpha \in (0, 1)$.

11. Trovare una funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ che sia

    (a) continua e limitata, ma non uniformemente continua,

    (b) α-Hölderiana se e solo se $\alpha = 1/7$,

    (c) α-Hölderiana se e solo se $1/77 \leq \alpha \leq 1/7$,

    (d) α-Hölderiana se e solo se $1/77 < \alpha < 1/7$,

    (e)

12. (Funzioni su insiemi strani) Trovare un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ed una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che

    (a) f è continua e f^2 è uniformentente continua, ma f non è uniformentente continua,

    (b) f è uniformemente continua ma non sublineare,

    (c)

13. Studiare, al variare dei parametri reali positivi a e b, l'uniforme continuità e la Lipschitzianità in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$ delle seguenti funzioni:
    $$x^a \arctan(x^b), \qquad x^a \cos(x^b), \qquad |\sin(x^a)|^b, \qquad \frac{\sin(x^a)}{x^b}.$$

14. Studiare, al variare dei parametri reali positivi a e b, la regolarità negli spazi $C^{k,\alpha}((0, 1))$ e $C^{k,\alpha}((0, +\infty))$ della funzione
    $$f(x) = x^a \sin\left(\frac{1}{x^b}\right).$$

15. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$
converge.
   (a) Dimostrare che
$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) \leq 0 \leq \limsup_{x\to+\infty} f(x).$$
   (b) Mostrare con un esempio che il limite potrebbe non esistere.
   (c) Dimostrare che il limite esiste necessariamente se f è uniformemente continua.

16. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) = f(2x)$ per ogni $x > 0$.
   (a) Dimostrare che, se f è uniformemente continua, allora f è costante.
   (b) E se invece f è solo continua?

17. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua, e sia x_n una successione tale che
$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Dimostrare che il limsup della successione $\sqrt[n]{|x_n|}$ è reale.
   (b) Possiamo sempre concludere che la successione $\sqrt[n]{|x_n|}$ ammette limite?

18. (Moduli di continuità in generale)
Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ogni $r > 0$ poniamo
$$\omega(r) := \sup\{|f(y) - f(x)| : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ |y - x| \leq r\}.$$
   (a) Determinare una funzione continua per cui $\omega(r) = +\infty$ per ogni $r > 0$.
   (b) Dimostrare che $\omega(r)$ è debolmente crescente (anche tenendo conto che può valere $+\infty$).
   (c) Dimostrare che $\omega(r)$ è subadditiva (anche tenendo conto che può valere $+\infty$), cioè
$$\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b) \qquad \forall a > 0,\ \forall b > 0.$$
   (d) Dimostrare che, se f è limitata, allora $\omega(r)$ è reale per ogni $r > 0$.
   (e) Trovare una funzione limitata per cui $\omega(r)$ non tende a 0 quando $r \to 0^+$.
   (f) Dimostrare che, se f è uniformemente continua, allora esiste r_0 tale che $\omega(r)$ è reale per ogni $r \in (0, r_0)$ e inoltre
$$\lim_{r\to 0^+} \omega(r) = 0.$$

19. (Definizione "invertita") Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x e y reali vale l'implicazione
$$|f(x) - f(y)| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x - y| < \varepsilon.$$
Determinare quali delle seguenti affermazioni possono essere dedotte.

(a) f è uniformemente continua.

(b) f è iniettiva.

(c) f è surgettiva.

(d) f è monotona.

20. (Decadimento dell'oscillazione: un tuffo nell'analisi n) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e ogni $r > 0$ definiamo l'oscillazione

$$\operatorname{osc}(x_0, r) := \sup \{f(x) : x \in [x_0 - r, x_0 + r]\} - \inf \{f(x) : x \in [x_0 - r, x_0 + r]\} .$$

Supponiamo che esistano due costanti $r_0 > 0$ e $\nu \in (0, 1)$ tali che

$$\operatorname{osc}(x_0, r) \leq \nu \operatorname{osc}(x_0, 2r) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall r \in (0, r_0).$$

Dimostrare che f è Hölderiana in $\mathbb{R}$.

Semicontinuità 1

Argomenti: **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: di tutto, di più

1. (Funzioni caratteristiche) Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice funzione caratteristica di A la funzione

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Dimostrare che

(a) la funzione $\chi_A(x)$ è semicontinua inferiormente se e solo se A è aperto,

(b) la funzione $\chi_A(x)$ è semicontinua superiormente se e solo se A è chiuso.

Funzioni convesse 1

Argomenti: funzioni convesse **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di funzione convessa

---

1. Dimostrare direttamente, cioè usando la definizione, che
   (a) la funzione $f(x) = x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$,
   (b) la funzione $f(x) = 1/x$ è convessa in $(0, +\infty)$,
   (c) la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è concava in $[0, +\infty)$,
   (d) la funzione $f(x) = |x|$ è convessa in $\mathbb{R}$.
2. Sia A un insieme convesso, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
   Stabilire cosa possiamo dire delle seguenti funzioni:
   $$f(3x), \qquad 3f(x), \qquad f(-3x), \qquad -3f(x), \qquad f(x-3), \qquad f(3-x).$$
3. (Operazioni tra funzioni convesse) Vengono qui presentate quattro situazioni da indagare a tutto campo (mostrando controesempi, fatti generali, o enunciati validi sotto ulteriori ipotesi particolari).
   (a) Somma di due funzioni convesse.
   (b) Prodotto di due funzioni convesse.
   (c) Composizione di due funzioni convesse.
   (d) Inversa di una funzione convessa.
4. Determinare tutte le funzioni convesse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che (le condizioni si intendono da esaminare una per una)
   (a) sono anche concave,
   (b) sono limitate superiorente,
   (c) soddisfano
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$
5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
   (a) Dimostrare che il massimo viene assunto sul bordo, cioè
   $$\max\{f(x) : x \in [a, b]\} = \max\{f(a), f(b)\}.$$
   (b) Determinare cosa possiamo concludere se esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che
   $$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Funzioni convesse 2

Argomenti: **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti:

---

1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Stabilire tutte le implicazioni tra le seguenti proprietà:
   (P1) la funzione $f(x)$ è convessa,
   (P2) il *sopra-grafico* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A,\ y \geq f(x)\}$ è un sottoinsieme convesso del piano,
   (P3) per ogni $M \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{x \in A : f(x) \leq M\}$ è convesso.

2. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^1 tale che $f(0) \leq 0$.
   Dimostrare che $f(x) \leq x f'(x)$ per ogni $x \geq 0$.

3. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione concava tale che $f(0) = 0$.
   Dimostrare che la funzione $x \to \dfrac{f(x)}{x}$ è decrescente per $x > 0$.

4. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione concava tale che $f(0) \geq 0$.
   Dimostrare che f è subadditiva, cioè
   $$f(a + b) \leq f(a) + f(b) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Dimostrare che ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa ammette limite in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per $x \to \pm\infty$. Tali limiti possono essere entrambi reali?

6. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa con integrale improprio su $[0, +\infty)$ convergente.
   Dimostrare che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

7. Sia A un insieme convesso, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
   Dimostrare che f è semicontinua superiormente in tutto A.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
   (a) Cosa possiamo dire delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$?
   (b) E se f è strettamente convessa?

9. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni strettamente convesse.
   Determinare quante possono essere, al massimo, le componenti connesse (cioè brutalmente i "pezzi") dell'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > g(x)$.

10. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x \in \mathrm{Int}(A)$ esista $m \in \mathbb{R}$ (eventualmente diverso da punto a punto) tale che
    $$f(y) \geq f(x) + m(y - x) \qquad \forall y \in A.$$
    Possiamo concludere che $f(x)$ è una funzione convessa?

Funzioni convesse 3

Argomenti: **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti:

1. (Convessità e moduli di continuità)
   (a) Fornire un esempio di una funzione convessa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ che sia uniformemente continua ma non lipschitziana.
   (b) Fornire un esempio di una funzione *strettamente* convessa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia lipschitziana.
   (c) Dimostrare che una funzione convessa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua se e solo se è lipschitziana.
2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
   (a) Dimostrare che un punto $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ è un punto di minimo assoluto se e solo se $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$.
   (b) Mostrare con opportuni esempi che il punto di minimo assoluto potrebbe non esistere o non essere interno ad A.
3. Sia $[a,b]$ un intervallo, e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e convessa.
   (a) ("Rolle convesso") Dimostrare che, se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$.
   (b) ("Lagrange convesso") Dimostrare più in generale che esistono sempre almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ ed una costante $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ tali che
   $$f(b) - f(a) = m(b-a).$$
4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
   (a) Dimostrare che la derivata destra $f'_+(x)$ è continua a destra in $\mathrm{Int}(A)$, cioè
   $$\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathrm{Int}(A).$$
   (b) Enunciare un risultato analogo per la derivata sinistra.
   (c) Dimostrare che, se f è derivabile in $\mathrm{Int}(A)$, allora f è necessariamente di classe C^1 in $\mathrm{Int}(A)$.
5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *midpoint convex* se
   $$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in A,$$
   che è come dire che verifica la condizione di convessità solo per $\lambda = 1/2$.
   (a) Dimostrare che una funzione continua e midpoint convex è convessa.
   (b) (Per esperti) Dimostrare che esistono funzioni midpoint convex ma non convesse.

Funzioni convesse 4

Argomenti: disuguaglianze di convessità **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: funzioni concave e convesse, disuguaglianza di Jensen

---

1. (Casi speciali di disuguaglianza tra le medie)

   (a) Interpretare la disuguaglianza tra media aritmetica e media quadratica (AM–QM)
   $$(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
   in almeno due modi:
   - come caso particolare della disuguaglianza di Jensen,
   - come caso speciale della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

   (b) Interpretare la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica (AM–GM)
   $$(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in (0, +\infty)^n$$
   come caso particolare della disuguaglianza di Jensen.

   (c) Interpretare la disuguaglianza tra media armonica e media aritmetica (HM–AM)
   $$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + \ldots + x_n} \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in (0, +\infty)^n$$
   in almeno due modi:
   - come caso particolare della disuguaglianza di Jensen,
   - mettendo in mezzo opportunamente la media geometrica.

   (d) Osservare che AM–QM è l'unica che non richiede la positività degli argomenti.

2. Siano α, β, γ le ampiezze degli angoli di un triangolo (misurate in radianti).

   (a) Dimostrare che
   $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

   (b) Cosa possiamo dire del valore minimo possibile per la somma dei tre seni?

3. Dimostrare che
   $$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$
   per ogni quaterna di numeri reali positivi (a, b, c, d) tali che $a + b + c + d = 1$.

4. Dimostrare che per ogni intero positivo n si ha che
   $$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^{x_1 + \ldots + x_n} \leq x_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{x_n}$$
   per ogni n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di numeri reali positivi.

Funzioni convesse 5

Argomenti: disuguaglianze di convessità **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: funzioni concave e convesse, disuguaglianza di Jensen

1. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{\pi}{4}x \leq \arctan x \leq x \qquad \forall x \in [0,1].$$

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \qquad \forall x \in [0,\pi/2].$$

2. (Media p-esima di due numeri) Dati due numeri reali positivi a e b, definiamo la loro media p-esima come

$$M_p(a,b) := \begin{cases} \sqrt{ab} & \text{se } p = 0, \\ \left(\dfrac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p} & \text{se } p \neq 0. \end{cases}$$

   (a) Riconoscere che opportuni valori di p danno origine alla media aritmetica, geometrica, armonica, quadratica, cubica.

   (b) Dimostrare che la funzione $p \to M_p(a,b)$ è crescente (strettamente se $a \neq b$).

   (c) Dimostrare che la funzione $p \to M_p(a,b)$ è continua.

   (d) Determinare il limite di $M_p(a,b)$ per $p \to \pm\infty$.

   (e) Studiare l'uniforme continuità e la lipschitzianità della funzione $p \to M_p(a,b)$.

   (f) (Ma sarà vero/fattibile?) Dimostrare che la funzione $p \to M_p(a,b)$ è concava per $p \leq 0$ e convessa per $p \geq 0$.

3. (Media p-esima di n numeri) Estendere i risultati dell'esercizio precedente alla media p-esima di n numeri reali positivi, definita per $p \neq 0$ come

$$M_p(a_1, \ldots, a_n) := \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{2}\right)^{1/p}$$

e per $p = 0$ come ... (non provare ad estendere l'ultimo punto).

Funzioni convesse 6

Argomenti: disuguaglianze di Bernoulli, Young, Hölder **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: funzioni concave e convesse, disuguaglianza di Jensen

1. (Disuguaglianze alla Bernoulli)
   (a) Interpretare come disuguaglianza di convessità la classica disuguaglianza di Bernoulli
   $$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > -1.$$
   (b) Stabilire per quali $n \in \mathbb{N}$ la disuguaglianza precedente vale anche per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Dimostrare la disuguaglianza più generale
   $$(1+x)^\alpha \geq 1+nx \qquad \forall \alpha \geq 1,\ \forall x > -1.$$
   (d) Dimostrare che per $\alpha \in (0,1)$ la disuguaglianza precedente vale con il verso opposto.
2. (Disuguaglianze alla Young)
   (a) Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali positivi p e q con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ si ha che
   $$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad \forall a > 0,\ \forall b > 0.$$
   (b) Più in generale, sia n un intero positivo, e sia $(p_1, \ldots, p_n)$ una n-upla di numeri reali positivi tali che
   $$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1.$$
   Dimostrare che
   $$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \frac{1}{p_1}a_1^{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n}a_n^{p_n} \qquad \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (0, +\infty)^n.$$
3. (Disuguaglianze alla Hölder come generalizzazioni di Cauchy-Schwarz)
   (a) Siano p e q numeri reali positivi tali che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dimostrare che
   $$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \leq (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{1/p}(b_1^q + \ldots + b_n^q)^{1/q}$$
   per ogni scelta delle n-uple di numeri reali positivi. $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$.
   (b) Enunciare per bene e dimostrare un'analoga disuguaglianza con tre n-uple:
   $$a_1b_1c_1 + \ldots + a_nb_nc_n \leq (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{1/p}(b_1^q + \ldots + b_n^q)^{1/q}(c_1^r + \ldots + c_n^r)^{1/r}.$$
   (c) Capire come il tutto si generalizza ad un numero arbitrario di n-uple.

Ricapitolazione – Funzioni inverse 1

Argomenti: funzioni inverse **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: di tutto, di più

---

1. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + e^x$.
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è invertibile in un intorno di $x = 0$, cioè esistono due numeri reali $r > 0$ e $\delta > 0$ tali che $f(x)$, pensata come $f : (-r, r) \to (1 - \delta, 1 + \delta)$, risulta invertibile.
   (b) Detta $g(x)$ l'inversa, calcolare $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$.
   (c) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 di $g(x)$ con centro in $x_0 = 1$.
2. Consideriamo la funzione $f(x) = 2x + \sin x$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Dimostrare che ammette una funzione inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che g è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$.
   (c) Calcolare $g'(2\pi)$ e $g''(4\pi)$.
   (d) Calcolare i seguenti limiti
   $$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}.$$
3. Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$.
   (a) Determinare il più grande insieme convesso che contiene $x = 1$ sul quale un'opportuna restrizione di $f(x)$ risulta invertibile.
   (b) Detta $g(x)$ l'inversa di cui al punto precedente, determinare il polinomio di Taylor di grado 2 di $g(x)$ con centro in 0.
   (c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio
   $$\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx.$$
4. Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + 2x$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Dimostrare che ammette una funzione inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che $g(x)$ è di classe C^∞.
   (c) Deterinare ordine di infinitesimo e parte principale di $g(x)$ per $x \to 0$.
   (d) Deterinare ordine di infinito e parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$.
   (e) Calcolare
   $$\lim_{x \to 0} \frac{g(\arctan x) - x}{x \sin^2 x}.$$

Ricapitolazione – Funzioni inverse 2

Argomenti: funzioni inverse **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: di tutto, di più

1. Sia $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva, e sia B l'immagine di f. Possiamo concludere che l'inversa $g : B \to [0, 1] \cup [2, 3]$ è continua?
2. Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione invertibile.
   (a) Dimostrare che, se $f(x)$ è continua, allora $f(0) = 0$ e $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.
   (b) Dimostarre che entrambe le conclusioni del punto precedente possono essere contemporaneamente false se non si assume la continuità.
3. Consideriamo le funzioni
$$f_1(x) = \log(1 + \arctan x) + 7\sinh(x^2), \qquad f_2(x) = x\cosh x + \tan^2 x.$$
   (a) Dimostrare che sono entrambe invertibili in un intorno di $x = 0$.
   (b) Dette $g_1(x)$ e $g_2(x)$ le loro inverse, determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della funzione $g_1(x) - g_2(x)$.
4. Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 3x$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Dimostrare che esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(g(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Determinare il più piccolo numero reale r per cui esiste un'*unica* funzione $g : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $f(g(x)) = x$ per ogni $x > r$.
   (c) Determinare il più piccolo numero reale r per cui esiste una funzione *continua* $g : (r, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $f(g(x)) = x$ per ogni $x > r$.
5. Consideriamo la funzione $f(x) = x + \sin x$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Dimostrare che ammette una funzione inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che la funzione $g(x) - x$ è periodica.
   (c) Determinare i punti in cui $g(x)$ è derivabile.
   (d) Trovare le soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$.
   (e) Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x)$ per $x \to 0$.
   (f) Studiare l'uniforme continuità di $g(x)$ su tutto $\mathbb{R}$.
   (g) Studiare l'hölderianità di $g(x)$ sugli intervalli limitati.

Ricapitolazione – Funzioni inverse n

Argomenti: **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: di tutto, di più

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\arctan t}\,dt.$$
   (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(g(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che la funzione $g(x)$ è di classe C^∞.
   (c) Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $g(x)$ con centro in 0.
   (d) Studiare l'uniforme continuità e la lipschitzianità di $g(x)$ su tutto $\mathbb{R}$.
   (e) Dimostrare che $g(x)$ è concava in $[0, +\infty)$.
   (f) Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza degli integrali impropri
$$\int_{-\infty}^{0} [g(x)]^\alpha\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{[g(x)]^\alpha}\,dx.$$

2. (Regolarità delle inverse di polinomi) Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n, sia $[a, b]$ un intervallo, e sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$P(g(x)) = x \qquad \forall x \in [a, b].$$
Dimostrare che $g(x)$ è hölderiana di esponente $1/n$ in $[a, b]$.

Ricapitolazione – Famiglie di funzioni

Argomenti: max e sup di famiglie di funzioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: di tutto, di più

---

1. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Definiamo

$$M(x) := \max\{f(x), g(x)\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Stabilire se i seguenti enunciati sono veri (ed in tal caso formire una dimostrazione) o falsi (ed in tal caso fornire un controesempio).

(a) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue, allora $M(x)$ è continua.

(b) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili, allora $M(x)$ è derivabile.

(c) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono semicontinue inferiormente/superiormente, allora $M(x)$ è semicontinua inferiormente/superiormente.

(d) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono uniformemente continue in $\mathbb{R}$, allora $M(x)$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

(e) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono convesse in $\mathbb{R}$, allora $M(x)$ è convessa in $\mathbb{R}$.

(f) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili secondo Riemann in un certo intervallo $[a, b]$, allora $M(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

(g) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono lipschitziane in $\mathbb{R}$ con una certa costante L, allora $M(x)$ è lipschitziana in $\mathbb{R}$ con la stessa costante L.

(h) Nelle stesse ipotesi del punto precedente, può accadere che la costante di lipschitz di $M(x)$ (quella ottimale) sia strettamente minore delle costanti di lipschitz di $f(x)$ e $g(x)$ (quelle ottimali)?

2. Sia I un insieme, sia M un numero reale, sia $[a, b]$ in intervallo, e sia $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni $f_i : [a, b] \to (-\infty, M]$ (che è come dire che le funzioni sono *equilimitate* superiormente). Definiamo

$$S(x) := \sup\{f_i(x) : i \in I\} \qquad \forall x \in [a, b].$$

Stabilire se i seguenti enunciati sono veri o falsi.

(a) Se tutte le $f_i(x)$ sono continue, allora $S(x)$ è continua.

(b) Se tutte le $f_i(x)$ sono semicontinue inferiormente/superiormente, allora $S(x)$ è semicontinua inferiormente/superiormente.

(c) Se tutte le $f_i(x)$ sono convesse, allora $S(x)$ è convessa.

(d) Se tutte le $f_i(x)$ sono integrabili secondo Riemann, allora $S(x)$ è integrabile secondo Riemann.

(e) Se tutte le $f_i(x)$ sono lipschitziane, allora $S(x)$ è lipschitziana.

(f) Se tutte le $f_i(x)$ sono lipschitziane con una stessa costante L, allora $S(x)$ è lipschitziana con la stessa costante L.

Ricapitolazione – Semicontinuità rivisitata

Argomenti: **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: di tutto, di più

---

1. (Caratterizzazione della semicontinuità in termini di sopra/sotto-livelli) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è semicontinua inferiormente se e solo se per ogni $M \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq M\}$ è chiuso.
   (b) Dimostrare che $f(x)$ è semicontinua superiormente se e solo se per ogni $M \in \mathbb{R}$ il sopralivello $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq M\}$ è chiuso.
   (c) Rifrasare i punti precedenti per funzioni $f : A \to \mathbb{R}$.

2. (Caratterizzazione della semicontinuità in termini di sopra/sotto-grafico) Partiamo con due definizioni.
   - Un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice chiuso se, comunque si scelgano due successioni convergenti $x_n \to x_\infty$ e $y_n \to y_\infty$ con $(x_n, y_n) \in B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che anche $(x_\infty, y_\infty) \in B$.
   - Data una qualunque funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si definisce il suo *sopra-grafico* come l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano con $y \geq f(x)$ ed il suo *sotto-grafico* come l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano con $y \leq f(x)$.

   Dimostrare che
   (a) una funzione è semicontinua inferiormente se e solo se il suo sopragrafico è chiuso,
   (b) una funzione è semicontinua superiormente se e solo se il suo sottografico è chiuso,
   (c) una funzione è continua se e solo se il suo grafico è chiuso.

3. (Inf-convoluzione) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata inferiormente. Per ogni $\lambda > 0$ definiamo la funzione
$$f_\lambda(x) := \inf \{f(y) + \lambda|y - x| : y \in \mathbb{R}\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Dimostrare che, se f è semicontinua inferiormente, allora l'inf è sempre un minimo.
   (b) Dimostare che le funzioni $f_\lambda(x)$ sono tutte lipschitziane.
   (c) Dimostrare che $f_\lambda(x)$ è dedolmente crescente rispetto a λ, cioè
$$f_\lambda(x) \leq f_\mu(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall \mu > \lambda > 0.$$
   (d) Determinare sotto quali condizioni si ha che
$$f(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} f_\lambda(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (e) Formulare una teoria analoga per la sup-convoluzione.
   (f) Formulare una teoria analoga per convoluzioni del tipo
$$g_\lambda(x) := \inf \left\{f(y) + \lambda|y - x|^2 : y \in \mathbb{R}\right\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ricapitolazione – Inviluppi

Argomenti: un tuffo (ehm, full immersion) nell'analisi n **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: di tutto, di più

---

1. (Rilassamento) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Definiamo $\mathcal{G}$ come l'insieme di tutte le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono semicontinue inferiormente e tali che $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   Supponiamo che $\mathcal{G} \neq \emptyset$ e definiamo il *rilassato* di $f(x)$ come la funzione

   $$\overline{f}(x) := \sup \{g(x) : g \in \mathcal{G}\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Dimostrare che $\overline{f} \in \mathcal{G}$, cioè che $\overline{f}(x)$ è la più grande funzione semicontinua inferiormente che sia minore o uguale ad $f(x)$. Dedurre che il sup nella definizione è in realtà un max.

   (b) Dimostrare che vale l'uguaglianza

   $$\overline{f}(x) = \inf \left\{ \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) : x_n \to x \right\}.$$

   (c) Dimostrare che nella formula precedente l'inf è in realtà un minimo.

   (d) Capire perché in generale

   $$\overline{f}(x) \neq \liminf_{y \to x} f(y).$$

   (e) Esibire una funzione $f(x)$ per cui $\mathcal{G} = \emptyset$.

2. (Convessificata) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Definiamo $\mathcal{C}$ come l'insieme di tutte le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono convesse e tali che $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Definiamo $\mathcal{L}$ come l'insieme di tutte le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono del tipo $mx + n$ (cioè sostanzialmente rette) e tali che $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   Supponiamo che $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e definiamo il *convessificato* di $f(x)$ come la funzione

   $$f^*(x) := \sup \{g(x) : g \in \mathcal{C}\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Dimostrare che $f^* \in \mathcal{C}$, cioè che $f^*(x)$ è la più grande funzione convessa che sia minore o uguale ad $f(x)$. Dedurre che il sup nella definizione è in realtà un max.

   (b) Dimostrare che vale l'uguaglianza

   $$f^*(x) = \sup \{g(x) : g \in \mathcal{L}\},$$

   cioè che nella definizione di inviluppo convesso ci si ò limitare a fare il sup su tutte le rette.

Capitolo 3

Fare solo se . . .

. . . tutto il resto risulta noioso

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Preliminari 1

Argomenti: predicati e proposizioni **Difficoltà**: forthcoming

Prerequisiti: tutto su predicati, proposizioni, connettivi logici

1. Date due proposizioni P e Q, determinare le tavole di verità associate alle proposizioni sotto indicate (il simbolo $\neg$ sta per `not`):

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$P \lor Q$

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$P \land Q$

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$P \Rightarrow Q$

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$P \Leftrightarrow Q$

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$P \lor \neg Q$

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$\neg(P \land Q)$

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$\neg P \Rightarrow \neg Q$

		P	
		V	F
Q	V		
	F		

$P \Rightarrow \neg Q$

2. Quante sono le possibili tavole di verità ottenute a partire da due proposizioni P e Q? Per ciascuna di esse, scrivere una proposizione che la realizza (ovviamente la realizzazione non è univoca).

3. Siano date due proposizioni P e Q.

   (a) Scrivere una proposizione equivalente a $P \lor Q$ (cioè che ha la stessa tavola di verità) facendo uso solo di $\land$ e $\neg$.

   (b) Scrivere una proposizione equivalente a $P \land Q$ facendo uso solo di $\lor$ e $\neg$.

   (c) Scrivere una proposizione equivalente a $P \Rightarrow Q$ facendo uso solo di $\lor$, $\land$ e $\neg$.

   (d) Scrivere una proposizione equivalente a $P \Rightarrow Q$ facendo uso solo di $\land$ e $\neg$.

   Sarebbe opportuno cercare di convincersi dell'equivalenza anche "a buon senso", al di là del formalismo della tavola di verità.

4. Consideriamo la proposizione "$\exists!\, x \in \mathbb{N} \quad 3x = 333$". Scrivere una proposizione che esprima lo stesso concetto senza usare il quantificatore $\exists!$ ma usando …

   (a) … solo $\exists$, $\forall$, $\lor$, $\land$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,

   (b) … solo $\exists$, $\forall$, $\land$, $\neg$.

5. Sia $P(x, y, z)$ un predicato che dipende da tre parametri. Quante proposizioni diverse possiamo ottenere quantificando in vario modo (con $\exists$ oppure $\forall$) i tre parametri?

Preliminari 2

Argomenti: insiemi e funzioni tra insiemi **Difficoltà**: forthcoming

Prerequisiti: operazioni tra insiemi, definizione formale di funzione

1. (Easy math made difficult) Decifrare le seguenti scritture
$$A = \{n \in \mathbb{N} : n > 1 \wedge P(n)\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} : n > 1 \wedge Q(n)\},$$
in cui i predicati $P(n)$ e $Q(n)$ sono definiti da
$$P(n) = \forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N} \quad (ab = n) \Rightarrow \left[(a = n) \vee (b = n)\right],$$
$$Q(n) = \forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N} \quad (\exists c \in \mathbb{N} \quad ab = nc) \Rightarrow \left[(\exists c \in \mathbb{N} \quad a = nc) \vee (\exists c \in \mathbb{N} \quad b = nc)\right].$$
2. Listare gli elementi dei seguenti insiemi:

$\mathcal{P}(\emptyset)$		$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$		$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$	

3. (Insieme vuoto e prodotto cartesiano)
   (a) L'insieme $\emptyset \times \emptyset$ è vuoto?
   (b) Se A è un insieme non vuoto, gli insiemi $A \times \emptyset$ e $\emptyset \times A$ sono necessariamente vuoti?
4. (Funzioni ed insieme vuoto)
   (a) Quante sono le funzioni $f : \emptyset \to \emptyset$? Se ce ne sono, sono iniettive e/o surgettive?
   (b) Dato un insieme $A \neq \emptyset$, quante sono le funzioni $f : A \to \emptyset$? Se ce ne sono, sono iniettive e/o surgettive?
   (c) Dato un insieme $A \neq \emptyset$, quante sono le funzioni $f : \emptyset \to A$? Se ce ne sono, sono iniettive e/o surgettive?
5. (Algebra di Bool)
Sia X un insieme, e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme costituito dai sottoinsiemi di X. Per ogni A e B in $\mathcal{P}(X)$ definiamo la loro "somma" $A \oplus B$ ed il loro "prodotto" $A \otimes B$ nel seguente modo:
$$A \oplus B = A \bigtriangleup B, \qquad A \otimes B = A \cap B.$$
   (a) Dimostrare che $(\mathcal{P}(X), \oplus, \otimes)$ è un anello commutativo con identità.
   (b) Determinare chi sono gli elementi neutri della somma e del prodotto, chi è l'opposto (additivo) di un elemento, e quali sono gli elementi invertibili (rispetto al prodotto).
   (c) Mostrare che $A^2 = A$ e $A \oplus A = 0$ per ogni elemento $A \in \mathcal{P}(X)$ (premessa: capire cosa vogliono dire il quadrato e lo zero).
   (d) Domanda euristica: capire cosa ci sta sotto questa buffa struttura (cioè perché mai uno dovrebbe sospettare che quanto enunciato ai punti precedenti è vero).

Preliminari 3

Argomenti: ?? **Difficoltà**: forthcoming

Prerequisiti: definizione assiomatica dei numeri reali, induzione

1. Si dice che in un campo ordinato $\mathbb{K}$ vale la *proprietà archimedea* se per ogni $a \in \mathbb{K}$ e per ogni $b \in \mathbb{K}$, con $a > 0$, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.
   (a) Dimostrare che in $\mathbb{R}$ vale la proprietà archimedea.
   (b) Dimostrare che esistono campi ordinati in cui non vale la proprietà archimedea (ovviamente in tali campi non può valere nemmeno l'assioma di continuità).
2. Enunciare rigorosamente e dimostrare che esiste un "unico" campo ordinato in cui vale l'assioma di continuità.
3. In un campo ordinato $\mathbb{K}$ possiamo definire l'intervallo chiuso di estremi a e b come come l'insieme $I_{a,b} = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}$. Diciamo che in $\mathbb{K}$ vale la NINI (nonempty intersection of nested intervals) se ogni famiglia I_n di intervalli chiusi ognuno contenuto nel precedente (cioè $I_{n+1} \subseteq I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) ha intersezione non vuota.

   Dimostrare che in un campo ordinato vale la NINI se e solo se vale l'assioma di continuità.
4. (Questo esercizio richiede le basi di Hamel)

   Dimostrare che esistono due funzioni periodiche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
   $$f(x) + g(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
5. Dimostrare che per ogni intero positivo k esiste un polinomio monico $p_k(x)$ di grado k e coefficienti interi tale che
   $$\sum_{i=0}^{n} i^k = \frac{p_k(n)}{k!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Serie

Argomenti: serie numeriche **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle serie

1. Dimostrare che il criterio del confronto asintotico non vale senza ipotesi di segno, cioè esistono due successioni a_n e b_n (quest'ultima sempre diversa da 0) con $a_n/b_n \to 1$ tali che $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno comportamenti diversi.

2. (a) Sia a_n una successione di numeri reali positivi tali che $\sum a_n$ converge. Dimostrare che esiste una successione di numeri reali $\lambda_n \to +\infty$ tali che $\sum \lambda_n a_n$ converge.

   (b) Sia λ_n una successione di numeri reali tali che $\lambda_n \to +\infty$. Dimostrare che esiste una successione a_n di numeri reali positivi tali che $\sum a_n$ converge, mentre $\sum \lambda_n a_n$ non converge.

   (c) Sia λ_n una successione di numeri reali tali che $\lambda_n \to +\infty$. Dimostrare che esiste una successione a_n di numeri reali positivi tali che $\sum a_n$ converge, mentre $\sum \lambda_n^\varepsilon a_n$ non converge per ogni $\varepsilon > 0$.

3. Consideriamo la seguente doppia implicazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan(a_n) \text{ converge.}$$

   Discutere la validità delle due implicazioni

   (a) nel caso in cui $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

   (b) senza ipotesi sul segno di a_n.

4. Stabilire se la seguente implicazione è vera per ogni coppia di successioni *monotone* a_n e b_n di numeri reali positivi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n + b_n} = +\infty.$$

5. Stabilire se il seguente enunciato è vero o falso.

   Per ogni successione a_n di numeri reali positivi tali che $\sum a_n$ converge, esistono due successioni b_n e c_n di numeri reali positivi, ed esistono due successioni monotone m_k ed n_k di numeri interi tali che

   - $a_n = b_n + c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
   - per ogni $k \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti due stime:

$$\sum_{i=m_k}^{\infty} b_i \leq e^{-m_k^3}, \qquad \qquad \sum_{i=n_k}^{\infty} c_i \leq e^{-n_k^3}.$$

Capitolo 4

Saper dire

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Sostanzialmente domande da orale, cioè guida allo studio della teoria.

4.1 Preliminari

4.1.1 Logica elementare, insiemi e funzioni tra insiemi

P–1 Definizione di prodotto cartesiano ed insieme delle parti.

P–2 Definizione formale di funzione.

P–3 Definizione di funzione iniettiva, surgettiva, bigettiva.

P–4 Definizione di funzione inversa.

P–5 Definizione di inversa destra e sinistra e legami con iniettività e surgettività.

P–6 Legami tra iniettività/surgettività della composizione di due o più funzioni e iniettività/surgettività delle singole funzioni.

P–7 Definizione di immagine e controimmagine.

P–8 Proprietà insiemistiche di immagine e controimmagine.

4.1.2 Funzioni elementari e relativi grafici

P–9 Definizione di funzione pari e funzione dispari.

P–10 Definizione di funzione periodica e minimo periodo.

P–11 Definizione di funzione monotona.

P–12 Definizione e proprietà di esponenziale e logaritmo.

P–13 Definizione e proprietà delle funzioni trigonometriche inverse: arcsin, arccos, arctan.

P–14 Definizione, grafici, intepretazione geometrica e proprietà delle funzioni iperboliche.

P–15 Definizione delle funzioni iperboliche inverse e formule esplicite in termini di logaritmi.

P–16 Definizione formale di esponenziale via equazione funzionale: unicità sui razionali, monotonia, continuità.

P–17 Confronto tra le varie definizioni formali di esponenziale (via equazione funzionale, come limite, come somma di una serie, come soluzione di una equazione differenziale).

4.1.3 Insiemi numerici e numeri reali

P–18 Enunciare il principio di induzione.

P–19 Enunciare gli assiomi di Peano.

P–20 Unicità dei numeri naturali: enunciato e dimostrazione.

P–21 Costruzione degli interi a partire dai naturali.

P–22 Costruzione dei razionali a partire dagli interi.

P–23 Definizione assiomatica dei numeri reali. Enunciato preciso del teorema di esistenza ed unicità dei reali.

P–24 Deduzione delle proprietà usuali dei numeri reali a partire dagli assioni.

P–25 Costruzione dei reali via sezioni di Dedekind o semirette sinistre di razionali.

P–26 Unicità dei numeri reali: enunciato e dimostrazione.

P–27 Definizione di maggioranti, minoranti, insiemi limitati superiormente/inferiormente.

P–28 Definizione di massimo/minimo per un sottoinsieme dei reali.

P–29 Definizione di estremo inferiore e superiore per un sottoinsieme dei reali.

P–30 Dimostrazione che un sottoinsieme non vuoto dei reali ammette sempre estremo superiore e inferiore (eventualmente $\pm\infty$).

P–31 Caratterizzazione di estremo inferiore e superiore.

P–32 In ogni sottoinsieme dei reali esistono successioni (con opportuna monotonia) che tendono a inf/sup: enunciato e dimostrazione.

4.2 Limiti

4.2.1 Limiti di successioni

L–1 Definizione di limite per successioni (quattro casi).

L–2 Saper negare affermazioni come "$a_n \to +\infty$" oppure "a_n ha limite reale".

L–3 Dimostrare che una successione che ha limite reale è limitata.

L–4 Dimostrare che una successione che tende a $+\infty$ è limitata inferiormente (e analogo nel caso di limite $-\infty$).

L–5 Dimostrare un qualunque enunciato nello spirito della permanenza del segno (ad esempio: se $a_n \to \sqrt{2}$, allora $1 \leq a_n \leq 2$ definitivamente).

L–6 Teorema di confronto a due: enunciato e dimostrazione.

L–7 Teorema di confronto a tre (detto anche dei carabinieri): enunciato e dimostrazione.

L–8 Teorema algebrico per la somma: enunciato e dimostrazione dei vari casi.

L–9 Teorema algebrico per il prodotto: enunciato e dimostrazione dei vari casi.

L–10 Teorema algebrico per il rapporto: enunciato e dimostrazione dei vari casi.

L–11 Controesempi che mostrano che le forme indeterminate del teorema algebrico possono produrre qualunque risultato finale.

L–12 Teorema delle successioni monotone: enunciato e dimostrazione.

L–13 In numero e (limitatezza e monotonia della successione che lo definisce).

L–14 Irrazionalità nel numero e.

L–15 Criterio della radice per i limiti di successione: enunciato, dimostrazione, controesempi quando il limite della radice è 1.

L–16 Criterio del rapporto per i limiti di successione: enunciato, dimostrazione, controesempi quando il limite del rapporto è 1.

L–17 Criterio rapporto $\to$ radice per i limiti di successione: enunciato, dimostrazione, esempio in cui la radice ha limite ma il rapporto no.

L–18 Dimostrazione dei vari limiti "da tabellina": potenze, esponenziali, fattoriali, confronto di ordini di infinito, radici n-esime di polinomi e fattoriali.

L–19 Criterio funzioni $\to$ successioni: enunciato e dimostrazione nei vari casi.

L–20 Definizione di sottosuccessione.

L–21 Limiti di sottosuccessione: enunciato e dimostrazione nei vari casi.

L–22 Saper fornire esempi di successioni che non hanno limite e di loro sottosuccessioni che invece hanno limite.

L–23 Successione di Cauchy e completezza dei numeri reali: definizioni, enunciato, dimostrazione.

L–24 Formula di Stirling: enunciato e dimostrazione.

L–25 Prodotto di Wallis: enunciato e dimostrazione.

4.2.2 Successioni per ricorrenza

L–26 Struttura dell'insieme delle soluzioni di una ricorrenza lineare omogenea (con dimostrazione nel caso in cui le radici del polinomio caratteristico sono distinte).

L–27 Formula generale per la ricorrenza lineare del prim'ordine $x_{n+1} = ax_n + b$: enunciato e dimostrazione.

L–28 Legami tra $f'(\ell)$ in un punto in cui $f(\ell) = \ell$ e comportamento della successione per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$ in un intorno di ℓ.

4.2.3 Limiti di funzioni

L–29 Definizione di limite per funzioni (tutti i casi): si scelgono due elementi x_0 ed ℓ nell'insieme $\{4, 5^+, 7^-, +\infty, -\infty\}$ e bisogna saper dire il significato di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

L–30 Definizione di funzione continua in un punto.

L–31 Definizione di funzione continua in un insieme.

L–32 Dimostrazione del limite notevole fondamentale legato alla definizione del numero e.

L–33 Dimostrazione del limite notevole fondamentale per la funzione $\sin x$.

L–34 Enunciato e dimostrazione dei limiti notevoli che si deducono dai due fondamentali.

L–35 Forme indeterminate per l'esponenziale: quali sono e come si deducono dalle forme indeterminate per il prodotto.

L–36 Controesempi che mostrano che le forme indeterminate dell'esponenziale possono produrre qualunque risultato finale.

L–37 Definizione di o piccolo.

L–38 Principali proprietà di o piccolo: enunciato e dimostrazione.

L–39 Definizione di O grande.

L–40 Principali proprietà di O grande: enunciato e dimostrazione.

L–41 Definizione di equivalenza asintotica.

L–42 Principali proprietà dell'equivalenza asintotica: enunciato e dimostrazione.

L–43 Rapporti tra o piccolo, O grande ed equivalenza asintotica: enunciati e dimostrazioni.

L–44 Enunciato della formula di Taylor con resto di Peano e formula per il polinomio di Taylor (sia con centro in 0, sia con centro in un generico x_0).

L–45 Enunciato della formula di Taylor con resto di Lagrange e formula per il polinomio di Taylor (sia con centro in 0, sia con centro in un generico x_0).

L–46 Unicità del polinomio di Taylor: enunciato e dimostrazione.

L–47 Polinomi di Taylor delle funzioni elementari: enunciato e dimostrazione.

L–48 Polinomi di Taylor delle funzioni trigonometriche inverse: deduzione a partire dai polinomi di Taylor delle rispettive derivate.

L–49 Definizione di ordine di infinitesimo/infinito e parte principale.

4.2.4 Liminf e limsup

L–50 Liminf e limsup di successioni: definizioni.

L–51 Caratterizzazione di liminf e limsup di successioni.

L–52 Criteri del confronto e dei carabinieri in termini di liminf e limsup: enunciato e dimostrazione.

L–53 Enunciare e dimostrare cosa accade quando liminf e limsup coincidono.

L–54 Liminf e limsup di sottosuccessioni: enunciato e dimostrazione.

L–55 Relazioni tra liminf/limsup e minlim/maxlim per successioni: enunciato e dimostrazione.

L–56 Criterio della radice per i limiti di successione in versione liminf/limsup: enunciato e dimostrazione.

L–57 Criterio del rapporto per i limiti di successione in versione liminf/limsup: enunciato e dimostrazione.

L–58 Criterio rapporto $\to$ radice per i limiti di successione in versione liminf/limsup: enunciato e dimostrazione.

L–59 Liminf e limsup della somma: enunciato, dimostrazione, controesempi.

L–60 Liminf e limsup del prodotto di due successioni, una delle quali ha limite: enunciato e dimostrazione in qualche caso.

L–61 Liminf e limsup di funzioni: definizioni.

L–62 Relazioni tra liminf/limsup e minlim/maxlim per funzioni: enunciato (in vari casi) e dimostrazione.

L–63 Teorema di Cesaro-Stolz (caso $0/0$): enunciato e dimostrazione.

L–64 Teorema di Cesaro-Stolz (caso ∞/∞): enunciato e dimostrazione.

L–65 Teorema della medie di Cesaro: enunciato, dimostrazione, esempi, controesempi.

4.2.5 Serie

L–66 Definizione di serie e somme parziali. Esempi di serie che hanno i 4 possibili comportamenti.

L–67 Condizione necessaria per la convergenza di una serie: enunciato e dimostrazione.

L–68 Esempio di serie telescopica.

L–69 Comportamento di una serie geometrica al variare del parametro: enunciato e dimostrazione.

L–70 Criterio del confronto per la convergenza di una serie: enunciato e dimostrazione.

L–71 Criterio della radice per la convergenza di una serie: enunciato e dimostrazione.

L–72 Criterio del rapporto per la convergenza di una serie: enunciato e dimostrazione.

L–73 Criterio del confronto asintotico per la convergenza di una serie (casi standard e casi limite): enunciato e dimostrazione.

L–74 Criterio di condensazione di Cauchy: enunciato e dimostrazione.

L–75 Comportamento di una serie armonica generalizzata al variare del parametro: enunciato e dimostrazione mediante il criterio di condensazione di Cauchy.

L–76 Comportamento di una serie armonica generalizzata al variare del parametro: enunciato e dimostrazione mediante il confronto serie-integrali.

L–77 Criterio di Leibnitz: enunciato e dimostrazione.

L–78 Definizione di serie assolutamente convergente. Legami tra assoluta convergenza e convergenza: enunciato e controesempi.

L–79 Lemma dei "carabinieri per serie": enunciato e dimostrazione.

L–80 Definizione di serie assolutamente convergente. Legami tra convergenza ed assoluta convergenza: enunciato e dimostrazione mediante il lemma dei "carabinieri per serie".

L–81 Definizione di serie assolutamente convergente. Legami tra convergenza ed assoluta convergenza: enunciato e dimostrazione per completezza.

L–82 Lemma di sommazione parziale di Abel e criterio di convergenza di Dirichlet per serie: enunciato, dimostrazione, esempi di applicazione.

L–83 Proprietà di riordinamento per serie: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

L–84 Enunciato delle proprietà di raggruppamento per serie.

4.3 Funzioni e loro grafici

4.3.1 Derivate

D–1 Definizione e significato geometrico del rapporto incrementale.

D–2 Definizione di derivata e suo significato geometrico.

D–3 Definizione di differenziale.

D–4 Equivalenza tra derivata e differenziale: enunciato e dimostrazione.

D–5 Retta tangente ad un grafico: equazione.

D–6 Retta tangente ad un grafico: unicità ed interpretazione in termini di ordine di contatto.

D–7 Derivate delle funzioni elementari: dimostrazione tramite limite del rapporto incrementale e mediante differenziale.

D–8 Derivata di somma, prodotto per una costante e prodotto: enunciato e dimostrazione tramite rapporto incrementale e tramite differenziale.

D–9 Derivata del reciproco e del quoziente: enunciato e dimostrazione.

D–10 Derivata delle funzioni inverse elementari: enunciato e dimostrazione.

D–11 Derivata della funzione composta: enunciato e dimostrazione.

D–12 Derivata della funzione inversa: enunciato e dimostrazione.

D–13 Regolarità della funzione inversa vs regolarità della funzione di partenza: enunciato e dimostrazione.

D–14 Proprietà di Darboux delle derivate: enunciato e dimostrazione.

D–15 Mostrare che esistono funzioni con derivata discontinua in un punto, ma che hanno in quel punto polinomi di Taylor di ogni ordine.

4.3.2 Studio di funzioni

D–16 Cosa possiamo dire sulla crescenza/decrescenza di una funzione se conosciamo il segno della sua derivata *in un punto* (enunciato, dimostrazione, controesempi)?

D–17 Legami tra crescenza/decrescenza di una funzione e il segno della sua derivata *in un intervallo* (enunciato, dimostrazione, controesempi).

D–18 Legami tra *stretta* monotonia e segno della derivata in un intervallo, assumendo anche che la derivata si possa annullare (enunciato, dimostrazione, controesempi).

D–19 Criterio delle derivate successive per lo studio locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario: enunciato e dimostrazione.

D–20 Asintoti orizzontali, verticali, obliqui: come si definiscono e come si calcolano.

4.3.3 Continuità, compattezza, teorema di Weierstrass

D–21 Definizione di punto interno, aderente, di frontiera, isolato, di accumulazione.

D–22 Quattro definizioni equivalenti di funzione continua in un punto.

D–23 Equivalenza tra continuità per successioni e continuità ε/δ: definizioni, enunciato, dimostrazione.

D–24 Continuità della composizione di funzioni continue: enunciato e dimostrazione(i?).

D–25 Teorema di esistenza degli zeri: enunciato e dimostrazione utilizzando inf/sup.

D–26 Teorema di esistenza degli zeri: enunciato e dimostrazione per bisezione.

D–27 Immagine di una funzione continua su un intervallo: enunciato e dimostrazione.

D–28 Compattezza per sottoinsiemi della retta: tre definizioni equivalenti.

D–29 Dimostrare che un sottoinsieme della retta è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato.

D–30 Dimostrare che un sottoinsieme della retta è compatto per ricoprimenti se e solo se è chiuso e limitato.

D–31 Teorema di Bolzano-Weierstrass: definizioni, enunciato, dimostrazione.

D–32 Teorema di Weierstrass per funzioni continue: enunciato e controesempi nel caso in cui le ipotesi non sono verificate.

D–33 Teorema di Weiestrass per funzioni continue: enunciato e dimostrazione.

D–34 Dimostrare che le funzioni continue mandano compatti in compatti, ma non chiusi in chiusi e limitati in limitati.

D–35 Teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue: definizioni, enunciato, dimostrazione.

D–36 Derivata di una funzione nei punti di massimo/minimo: enunciato e dimostrazione.

D–37 Variante del teorema di Weiertrass per funzioni periodiche: enunciato e dimostrazione.

D–38 Varianti del teorema di Weiertrass con condizioni sui limiti al bordo: enunciato e dimostrazione.

4.3.4 Teoremi sulle funzioni derivabili

D–39 Teorema di Rolle: enunciato, dimostrazione, interpretazione geometrica, esempi che mostrano l'ottimalità delle ipotesi.

D–40 Teorema di Cauchy: enunciato e dimostrazione.

D–41 Teorema di Lagrange: enunciato, dimostrazione, interpretazione geometrica, esempi che mostrano l'ottimalità delle ipotesi.

D–42 Teorema di De L'Hôpital (caso 0/0): enunciato (anche in versione liminf/limsup) e dimostrazione.

D–43 Teorema di De L'Hôpital (caso ∞/∞): enunciato (anche in versione liminf/limsup) e dimostrazione.

D–44 Formula di Taylor con resto di Peano: enunciato e dimostrazione.

D–45 Formula di Taylor con resto di Lagrange: enunciato e dimostrazione.

D–46 Disuguaglianze classiche tra funzioni elementari e rispettivi polinomi di Taylor: enunciato e dimostrazione nei vari casi.

D–47 Definizione di funzione lipschitziana ed intepretazione in termini di rapporti incrementali.

D–48 Legami tra lipschitzianità e derivata prima: enunciato, dimostrazione, esempi e controesempi.

D–49 Legami tra iniettività e monotonia per funzioni continue: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–50 Continuità della funzione inversa: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

4.3.5 Uniforme continuità

D–51 Definizione di funzione uniformemente continua.

D–52 Legami tra uniforme continuità e lipschitzianità: enunciato, dimostrazione, esempi.

D–53 Somma di funzioni uniformemente continue: enunciato e dimostrazione.

D–54 Prodotto di funzioni uniformemente continue: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–55 Le funzioni uniformemente continue sono sublineari: enunciato e dimostrazione.

D–56 Le funzioni continue che hanno limite all'infinito sono uniformemente continue: enunciato e dimostrazione.

D–57 Teorema di Heine-Cantor: enunciato e dimostrazione.

D–58 Teorema di estensione per funzioni uniformemente continue: enunciato e dimostrazione.

D–59 Definizione di funzione hölderiana.

D–60 Dimostrare che la funzione $|x|^\alpha$ è α-hölderiana.

D–61 Spiegare perché l'hölderianità non si definisce per esponenti maggiori di 1.

D–62 Somma di funzioni hölderiane: enunciato e dimostrazione.

D–63 Prodotto di funzioni hölderiane: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–64 Composizione di funzioni hölderiane: enunciato e dimostrazione.

D–65 Teoremi di rincollamento per funzioni uniformemente continue o hölderiane: enunciato e dimostrazione.

D–66 Legami tra lipschitzianità, hölderianità, uniforme continuità su insiemi limitati: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–67 Legami tra lipschitzianità, hölderianità, uniforme continuità su insiemi generali: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–68 Legami tra hölderianità e lipschitzianità di un'opportuna potenza: enunciato, dimostrazione, esempi e controesempi.

D–69 Definizione di modulo di continuità e sue principali proprietà.

4.3.6 Funzioni convesse

D–70 Sottoinsiemi convessi della retta: definizione e struttura.

D–71 Funzioni convesse e strettamente convesse: definizioni algebriche e interpretazione geometrica.

D–72 Dimostrare che il massimo tra due funzioni convesse è ancora una funzione convessa.

D–73 Derivata destra e sinistra di funzioni convesse: definizioni, esistenza, monotonia.

D–74 Legami tra convessità e continuità: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–75 Legami tra convessità e derivata prima: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–76 Legami tra convessità e derivata seconda: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

D–77 Funzioni convesse e retta tangente al grafico: enunciati, dimostrazioni, esempi.

D–78 Disuguaglianza di Jensen: enunciato e dimostrazione.

D–79 Disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica: enunciato e dimostrazione.

D–80 Disuguaglianza tra media aritmetica e media p-esima: enunciato e dimostrazione.

D–81 Disuguaglianza tra le medie in generale: quadro della situazione e passi della dimostrazione via Jensen.

D–82 Disuguaglianza di Young: enunciato e dimostrazione.

D–83 Disuguaglianza di Hölder a due o più specie: enunciato e dimostrazione.

4.4 Integrazione

4.4.1 Integrali propri

I–1 Definizione di integrale (via step functions e integrale inferiore/superiore).

I–2 Definizione di integrale alla Darboux (via step functions costruite con inf e sup).

I–3 Definizione di integrale alla Riemann (via tagged partitions).

I–4 Stima dell'errore che si commette approssimando l'integrale di una funzione lipschitziana (o hölderiana, o uniformemente continua) con una somma di Riemann.

I–5 Confronto tra integrale alla Riemann ed alla Darboux: enunciato e dimostrazione.

I–6 Linearità dell'integrale: enunciato e dimostrazione.

I–7 Integrale del valore assoluto: enunciato e dimostrazione.

I–8 Integrale del prodotto: enunciato e dimostrazione.

I–9 Teorema della media integrale: enunciato e dimostrazione.

I–10 Teorema fondamentale del calcolo integrale: enunciato e dimostrazione.

I–11 Integrabilità delle funzioni monotone: enunciato e dimostrazione.

I–12 Integrabilità delle funzioni continue: enunciato e dimostrazione.

I–13 Dimostrazione dell'integrabilità della funzione $\sin(1/x)$ in $[0, 1]$.

I–14 Formula di integrazione per parti: enunciato e dimostrazione.

I–15 Formula di integrazione per sostituzione: enunciato e dimostrazione.

I–16 Scrittura di una funzione razionale come somma di fratti semplici: enunciato e dimostrazione.

I–17 Dimostrare che ogni funzione integrabile si può approssimare con funzioni regolari in modo che l'integrale del valore assoluto della differenza risulti piccolo a piacere.

4.4.2 Integrali impropri

I–18 Definizione di integrale improprio nei casi monoproblema.

I–19 Dimostrazione della convergenza/divergenza degli integrali impropri classici (e^{-x}, x^{-a}, $x^{-1}|\log x|^{-a}$, $(1 + x^2)^{-1}$) su vari insiemi.

I–20 Mostrare con un esempio che, nel caso di integrali impropri indeterminati, un "buco infinitesimo" intorno al punto problematico può produrre limiti diversi a seconda di come è fatto il buco.

I–21 Dimostrare la convergenza/divergenza degli integrali oscillanti classici, con o senza valori assoluti.

I–22 Integrali oscillanti: enunciato e dimostrazione dell'equivalente del criterio di Dirichlet per la convergenza delle serie.

I–23 Funzione Gamma di Eulero come estensione del fattoriale ai reali: enunciato e dimostrazione.

I–24 Legami tra convergenza dell'integrale improprio su una semiretta e limite di una funzione all'infinito: enunciati (eventualmente sotto ipotesi aggiuntive), dimostrazioni, esempi, controesempi.

4.4.3 Equazioni differenziali

I–25 Scrivere la forma generale di un'equazione differenziale, di un'equazione differenziale in forma normale, di un'equazione differenziale lineare omogenea o non omogenea (a coefficienti costanti o variabili), di un'equazione differenziale a variabili separabili.

I–26 Enunciato e dimostrazione del teorema di esistenza e di unicità per equazioni differenziali a variabili separabili (e giustificazione della procedura per trovare la soluzione).

I–27 Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea (con dimostrazione).

I–28 Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare non omogenea (con dimostrazione).

I–29 Soluzioni di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine 2: formula risolutiva e giustificazione formale nei tre casi.

I–30 Equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti variabili: enunciato e dimostrazione della formula risolutiva.

I–31 Formula risolutiva per equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti variabili: giustificazione sia mediante fattore integrante, sia mediante variazione delle costanti.

Capitolo 5

Saper fare

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Sostanzialmente operazioni con cui familiarizzare per poter affrontare gli esercizi.

5.1 Preliminari

5.1.1 Logica elementare, insiemi e funzioni tra insiemi

1. Saper trasformare espressioni dal linguaggio naturale in linguaggio matematico.
2. Saper distinguere una proposizione da un predicato, e aver chiaro come l'uso dei quantificatori trasformi predicati in proposizioni.
3. Essere consapevoli che l'ordine in cui i parametri vengono quantificati cambia profondamente il significato di una proposizione.
4. Saper negare una proposizione, anche contenente quantificatori, implicazioni, e connettivi come "and" e "vel".
5. Saper utilizzare con padronanza le notazioni insiemistiche, in particolare le relazioni di appartenenza ed inclusione (avendone capito la differenza).
6. Saper interpretare una descrizione di un insieme fatta per elenco o per proprietà.
7. Saper utilizzare il prodotto cartesiano e l'insieme delle parti.

5.1.2 Funzioni elementari e relativi grafici

1. Aver chiara, e saper utilizzare, l'interpretazione grafica di iniettività e surgettività per funzioni reali.
2. Aver chiara, e saper utilizzare, l'interpretazione grafica di immagine e controimmagine per funzioni reali.
3. Saper stabilire se una funzione è pari, dispari, periodica.
4. Sapere come si comportano le funzioni pari, dispari, periodiche rispetto a somma, prodotto, composizione.
5. Saper stabilire se una funzione è monotona.
6. Sapere come si comportano le funzioni monotone rispetto a somma, prodotto, composizione.
7. Aver familiarità con le funzioni elementari e le relative funzioni inverse: potenze, esponenziali, logaritmi, valore assoluto.
8. Aver familiarità con le funzioni trigonometriche e le funzioni trigonometriche inverse.
9. Saper passare dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x) \pm c$, $f(x \pm c)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $cf(x)$, $f(cx)$.
10. Saper interpretare graficamente le equazioni. Saper utilizzare le proprietà di iniettività e surgettività nella risoluzione di equazioni.

11. Saper interpretare graficamente le disequazioni. Saper utilizzare le proprietà di monotonia nella risoluzione di disequazioni.

12. Conoscere le proprietà delle funzioni iperboliche e delle relative funzioni inverse: formule esplicite, grafici, limiti, derivate e sviluppi di Taylor, proprietà algebriche.

13. Saper ricavare le formule esplicite per le funzioni iperboliche inverse in termini di logaritmi.

5.1.3 Insiemi numerici e numeri reali

1. Aver chiaro il principio di induzione e saperlo utilizzare.

2. Aver familiarità con gli insiemi numerici $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e le proprietà algebriche delle operazioni in essi definite.

3. Saper stabilire se un sottoinsieme dei reali è limitato inferiormente/superiormente, se ha massimo/minimo, e chi sono i suoi inf/sup.

5.2 Limiti

5.2.1 Limiti di successioni

1. Avere chiaro il significato dei termini "frequentemente" e "definitivamente".

2. Saper utilizzare i teoremi algebrici e di confronto per il calcolo dei limiti.

3. Saper confrontare ordini di infinito mediante i criteri del rapporto, della radice, e rapporto $\to$ radice.

4. Saper individuare e confrontare i classici ordini di infinito.

5. Saper dedurre alcuni limiti di successioni dai corrispondenti limiti di funzioni (criterio funzioni $\to$ successioni).

6. Saper utilizzare le sottosuccessioni per mostrare che una successione non ha limite.

5.2.2 Successioni per ricorrenza

1. Saper trovare la formula esplicita per una successione per ricorrenza lineare omogenea di ordine qualunque (quando si sanno trovare le radici del polinomio caratteristico).

2. Saper scrivere una successione per ricorrenza lineare omogenea in termini di potenze di una matrice e saper dedurre da questa scrittura la formula generale.

3. Saper scrivere una successione per ricorrenza lineare omogenea in termini di potenze di x in un'opportuno spazio di polinomi e saper dedurre da questa scrittura la formula generale.

4. Saper trovare una soluzione qualunque di una ricorrenza lineare non omogenea di ordine qualunque con termine non omogeneo di tipo polinomiale o esponenziale (o prodotto di un polinomio ed un esponenziale).

5. Conoscere l'interpretazione geometrica delle successioni per ricorrenza (del primo ordine) e saperla utilizzare per formulare un piano per lo studio.

6. Successioni per ricorrenza non lineari: saper determinare (almeno nei casi più semplici, ad esempio quelli autonomi) quali sono i possibili limiti, posto che esistano.

7. Successioni per ricorrenza autonome: saper riconoscere quando si può applicare un piano con la monotonia e saperlo effettivamente portare a termine.

8. Successioni per ricorrenza autonome: saper riconoscere quando si può applicare un piano con la distanza dal presunto limite e saperlo effettivamente portare a termine.

9. Successioni per ricorrenza autonome: saper utilizzare il piano con la distanza od il criterio del rapporto per stabilire la velocità di convergenza al limite.

10. Successioni per ricorrenza spiraleggianti: saper impostare e portare al termine sia il piano con la distanza, sia il piano con le due sottosuccessioni.

11. Successioni per ricorrenza autonome: saper utilizzare la lipschitzianità della funzione che compare nella ricorrenza per lo studio della successione.

12. Successioni per ricorrenza autonome: avere idea dei legami tra la stabilità dei punti fissi e la derivata in tali punti della funzione che appare nella ricorrenza.

13. Successioni per ricorrenza non autonome: avere idea dei principali piani per trattarle (criterio del rapporto, monotonia, limitatezza più carabinieri).

14. Saper riconoscere, e studiare nei casi più semplici, l'effetto soglia per le successioni per ricorrenza.

15. Saper stimare quanto velocemente una successione per ricorrenza converge/diverge, e saper utilizzare queste informazioni per lo studio di opportuni limiti o serie costruiti a partire dalla successione iniziale.

16. Saper utilizzare i teoremi di Cesaro-Stolz per trattare limiti che hanno a che fare con successioni per ricorrenza.

5.2.3 Limiti di funzione

1. Saper utilizzare i teoremi algebrici e di confronto per i limiti di funzione.

2. Aver chiaro come alcuni limiti di funzione (ad esempio il confronto tra ordini di infinito o il limite che "definisce" il numero e) si possano dedurre dagli analoghi limiti per le successioni (criterio successioni $\to$ funzioni).

3. Saper "smontare" una forma indeterminata per ricondurla ad opportuni limiti notevoli.

4. Aver chiaro come si applicano i cambi di variabile ai limiti di funzione.

5. Saper trasformare un'espressione con base ed esponente qualunque in un'espressione in cui la base è il numero e.

6. Saper "razionalizzare" espressioni contenenti differenze di radici.

7. Saper dimostrare che un limite non esiste utilizzando opportune le successioni.

8. Saper utilizzare opportuni cambi di variabile per trasformare un qualunque limite in un limite per $x \to 0$ oppure $x \to +\infty$.

9. Avere chiaro il linguaggio degli infinitesimi (o piccolo, O grande, equivalenza asintotica) e saperne trarre vantaggio nel calcolo dei limiti.

10. Conoscere gli sviluppini delle funzioni elementari e saperli utilizzare per il calcolo dei limiti.

11. Sapere quando si può, e soprattutto quando non si può, applicare il teorema di De L'Hôpital per il calcolo di limiti di funzione.

12. Avere molto chiaro cosa vuol dire fare un limite metà per volta, ed evitare assolutamente di farlo.

13. Conoscere gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari, sia con centro in 0, sia con centro in un punto x_0 qualunque.

14. Saper calcolare lo sviluppo di Taylor di somma, prodotto e composizione di 2 funzioni. Aver chiaro in particolare quali limitazioni si applicano alla composizione.

15. Saper calcolare ordini di infinitesimo/infinito e parti principali.

16. Saper utilizzare gli sviluppi di Taylor nel calcolo dei limiti (e sapere anche quando non si possono applicare).

17. Aver chiaro e saper utilizzare il linguaggio topologico. Saper determinare i punti interni, aderenti, di frontiera, isolati e di accumulazione per un dato insieme. Saper stabilire se un insieme è aperto o chiuso, e saperne determinare la frontiera, la chiusura, la parte interna, il derivato.

18. Saper gestire unioni/intersezioni finite/arbitrarie di aperti/chiusi.

5.2.4 Liminf e limsup

1. Saper agire in due fasi (stima più opportune sottosuccessioni) per il calcolo di liminf e limsup, sia nel caso delle successioni, sia nel caso delle funzioni.

2. Saper gestire liminf/limsup di somme o prodotti, avendo chiaro cosa si semplifica e cosa no quando uno dei due è in realtà un limite.

5.2.5 Serie numeriche

1. Saper riconoscere e studiare una serie telescopica.
2. Saper verificare la condizione necessaria per la convergenza di una serie.
3. Saper applicare i criteri per lo studio di una serie a termini di segno costante: radice, rapporto, confronto, confronto asintotico (casi standard e casi limite).
4. Saper applicare il criterio di Leibnitz per lo studio di serie a segno alterno.
5. Saper applicare il criterio dell'assoluta convergenza, e saper capire quando è più comodo rispetto al criterio di Leibnitz.
6. Saper applicare il criterio di Dirichlet per lo studio di serie a segno variabile.
7. Aver chiari i limiti e gli ordini di infinito ed infinitesimo in modo da saperli applicare operativamente nello studio della convergenza delle serie.

5.3 Funzioni e loro grafici

5.3.1 Derivate

1. Aver chiari i rapporti tra limiti notevoli, sviluppini e derivate delle funzioni elementari.
2. Conoscere le regole di derivazione e saperle applicare per calcolare la derivata di una funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari tramite operazioni algebriche e/o composizioni.
3. Saper calcolare la derivata della funzione inversa di una funzione data (in un punto di cui si riesce a calcolare la controimmagine).
4. Saper calcolare le derivate successive e lo sviluppo di Taylor di una funzione inversa.
5. Saper stabilire se una funzione data (anche definita a tratti o con valori assoluti) è derivabile o meno in un punto usando, se serve, la definizione.
6. Conoscere la proprietà di Darboux delle derivate e saperla utilizzare per stabilire la derivabilità o la non derivabilità di una funzione in un punto.
7. Saper costruire funzioni di classe C^∞ che hanno un comportamento assegnato su semirette o intervalli dati.

5.3.2 Studi di funzione

1. Sapere cosa si può dedurre, e cosa non si può dedurre, dal segno della derivata di una funzione *in un punto*.
2. Saper dedurre le zone di monotonia di una funzione da uno studio del segno della sua derivata prima.

3. Saper dedurre l'iniettività o meno di una funzione da uno studio del segno della sua derivata, anche nei casi in cui la derivata si può annullare.

4. Avere chiari i legami tra monotonia e inietività, con o senza ipotesi di continuità.

5. Saper dedurre il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto stazionario dal suo sviluppo di Taylor in quel punto.

6. Saper utilizzare lo sviluppo di Taylor in un punto per il calcolo della derivata k-esima in quel punto.

7. Saper utilizzare il teorema dei valori intermedi per stabilire che certe equazioni hanno soluzioni.

8. Saper studiare iniettività/surgettività di una funzione *guardando gli elementi strettamente necessari* (continuità, opportuni limiti agli estremi, eventuale segno della derivata).

9. Saper utilizzare il teorema di Weierstrass per dedurre l'esistenza del max/min di una funzione.

10. Saper utilizzare opportune varianti del teorema di Weiertrass (con condizioni sui limiti al bordo) per dedurre l'esistenza del max/min anche quando le ipotesi del teorema di Weiertrass classico non sono soddisfatte.

11. Aver chiaro che la ricerca dei punti di max/min coinvolge tre categorie di candidati: punti stazionari interni, punti singolari interni, bordo.

12. Saper fare uno studio globale di funzioni, determinando gli elementi essenziali in un tempo ragionevole.

13. Aver chiaro quali elementi di uno studio di funzioni sono essenziali nel problema che si sta considerando e quali invece sono perfettamente inutili.

14. Saper determinare gli eventuali asintoti orizzontali, verticali ed obliqui di una funzione.

15. Saper determinare gli eventuali punti di flesso di una funzione.

16. Saper dedurre le zone di convessità/concavità di una funzione, e trovare gli eventuali punti di flesso, da uno studio del segno della derivata seconda.

17. Sapere utilizzare uno studio di funzioni per risolvere equazioni o disequazioni non elementari, anche dipendenti da parametri, avendo ben chiari i pericoli che si corrono quando si confrontano due grafici.

18. Saper utilizzare uno studio di funzioni per risolvere problemi di inf/sup/max/min.

19. Saper utilizzare uno studio di funzioni per trattare problemi che riguardano successioni, ad esempio la ricerca di inf/sup/max/min oppure stabilire l'eventuale monotonia (sempre o definitivamente).

20. Conoscere e saper utilizzare le disuguaglianze classiche che confrontano le funzioni elementari con i rispettivi polinomi di Taylor.

21. Aver chiara l'intepretazione geometrica della lipschitianità in termini di pendenza del grafico.

22. Saper stabilire la lipschitzianità o meno di una funzione da uno studio della derivata prima.

23. Saper interpretare certe disuguaglianze in due variabili come disuguaglianze di lipschitzianità.

24. Saper utilizzare la formula di Taylor con resto di Lagrange per approssimare i valori di funzioni date in punti dati.

25. Saper utilizzare la formula di Taylor con resto di Lagrange per dimostrare disuguaglianze classiche.

26. Saper utilizzare la formula di Taylor con resto di Lagrange per dedurre la convergenza delle serie di Taylor delle funzioni elementari in opportuni insiemi.

27. Saper stabilire se una funzione data, in un insieme assegnato, è uniformemente continua, hölderiana, lipschitziana. Avere chiari i legami tra queste nozioni ed i vari strumenti per dimostrarle o confutarle.

5.4 Integrazione

5.4.1 Integrali propri

1. Saper riconoscere le primitive elementari che si ottengono leggendo al contrario le tabelle di derivate.

2. Saper utilizzare l'integrazione per parti per calcolare la primitiva di funzioni che sono prodotto di polinomi per esponenziali, seni o coseni.

3. Saper calcolare, mediante le formule trigonometriche product-to-sum, la primitiva di funzioni che sono prodotto di due o più funzioni trigonometriche.

4. Saper calcolare la primitiva di funzioni che contengono logaritmi o arcotangenti mediante il trucco dell'"1 nascosto".

5. Saper utilizzare praticamente l'integrazione per sostituzioni, sia nel caso di integrali indefiniti (senza estremi), sia nel caso di integrali definiti (con estremi).

6. Saper calcolare la primitiva di potenze di seno e coseno, avendo ben chiaro come il caso dell'esponente dispari si trasformi per sostituzione in un integrale polinomiale.

7. Saper scrivere una funzione razionale come somma di fratti semplici.

8. Saper applicare l'algoritmo per l'integrazione di funzioni razionali.

9. Saper sfruttare le simmetrie dell'integranda (pari, dispari, periodica) per semplificare il calcolo di integrali definiti.

10. Saper calcolare l'integrale di $\sin^2 x$ o $\cos^2 x$ su intervalli i cui estremi sono multipli interi di $\pi/2$ senza ricorrere ad una primitiva.

11. Saper determinare, mediante sostituzioni razionalizzanti, le primitive di funzioni razionali di esponenziali.

12. Saper determinare, mediante sostituzioni razionalizzanti, le primitive di funzioni razionali che coinvolgono radici n-esime di polinomi di primo grado.

13. Conoscere, e saper utilizzare, le varie sostituzioni razionalizzanti che permettono di trattare integrali contenenti radici quadrate di polinomi di secondo grado. Avere chiara l'interpretazione di tali sostituzioni in termini di parametrizzazione razionale del grafico.

14. Sapere quando utilizzare, e quando evitare, le formule parametriche per il calcolo di integrali che coinvolgono funzioni trigonometriche.

5.4.2 Integrali impropri

1. Saper distinguere un integrale improprio da un integrale proprio.

2. Saper studiare la convergenza di un integrale improprio monoproblema applicando la definizione.

3. Saper spezzare un integrale improprio generale in un numero sufficiente di integrali impropri monoproblema.

4. Aver chiaro che l'integrale di $1/x$ in $[-1, 1]$ è improprio ed indeterminato.

5. Saper utilizzare i criteri classici (confronto, confronto asintotico, assoluta integrabilità) per lo studio di integrali impropri.

6. Saper gestire i casi limite nel criterio del confronto asintotico.

7. Avere chiaro che per gli integrali impropri non vale l'analogo della condizione necessaria per la convergenza di una serie (ma nel vale una versione indebolita).

8. Saper gestire integrali impropri con problemi in punti diversi dall'origine.

9. Saper utilizzare il confronto serie-integrali per stimare serie e/o code di serie.

10. Saper utilizzare l'integrazione per parti per lo studio di integrali oscillanti.

11. Saper utilizzare il medodo dei triangolini o dei rettangolini per lo studio di integrali oscillanti.

5.4.3 Funzioni integrali

1. Saper studiare funzioni integrali, determinandone un grafico approssimativo, ordini di infinitesimo o infinito, sviluppi di Taylor, limiti . . .

5.4.4 Equazioni differenziali

1. Data un'equazione differenziale: determinare l'ordine, stabilire se è autonoma oppure no, se è o si può portare in forma normale, se è a variabili separabili, se è lineare (omogenea o non omogenea) ed eventualmente se è a coefficienti costanti.

2. Saper riconoscere un problema di Cauchy.

3. Saper stabilire, almeno in casi semplici, se un problema di Cauchy rientra sotto le ipotesi del teorema di esistenza oppure del teorema di esistenza ed unicità.

4. Saper riconoscere un'equazione differenziale a variabili separabili e saperla risolvere esplicitamente quando questo è possibile. Sapere in particolare come muoversi nella fase di "ricavare" nel caso in cui la funzione da invertire non sia iniettiva.

5. Data la soluzione di un'equazione differenziale, saperne trovare l'intervallo massimale di esistenza ed il tempo di vita (nel passato e nel futuro). Nel caso in cui non vi sia esistenza globale, stabilire se si ha blow up o break down.

6. Saper utilizzare il teorema di unicità della soluzione per stabilire che certe zone del piano sono off-limits per le soluzioni di un dato problema di Cauchy.

7. Sapere determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione di un'equazione differenziale lineare senza risolverla.

8. Saper risolvere un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea di ogni ordine (quando si sanno trovare le radici del polinomio caratteristico).

9. Saper trovare una soluzione di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea di ogni ordine con termine forzante di tipo particolare (esponenziale, trigonometrico, polinomio, o prodotti dei precedenti).

10. Saper applicare il metodo di variazione delle costanti.

11. Saper risolvere un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti variabili, sia utilizzando il metodo del fattore integrante, sia mediante variazione delle costanti.

12. Saper studiare le soluzioni di un'equazione differenziale esplicitamente risolubile al variare del dato o dei dati iniziali (studiare vuol dire stabilire se si ha esistenza globale o meno, trovare il tempo di vita, stabilire se si ha blow up o break down, tracciare un grafico qualitativo).

13. Avere familiarità con il fenomeno dei "valori soglia" che spesso compaiono nello studio delle equazioni differenziali.

14. Saper trasformare un sistema di equazioni differenziali lineari in una singola equazione differenziale di ordine opportuno.

15. Saper trasformare un'equazione differenziale di ordine superiore in un sistema di equazioni differenziali di ordine uno.

16. Avere idea dei legami tra le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari (a coefficienti costanti) ed autovalori e autovettori della matrice corrispondente.

Capitolo 6

Scritti d'esame

[Spiegare il significato ovvio di questo capitolo]

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 28 Novembre 2014

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x) = |2^{-x} - 1|$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Calcolare l'immagine e la controimmagine di $(-\infty, 1]$.

2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4, con centro nell'origine, della funzione
$$f(x) = e^{\sin(2x)}.$$

4. Calcolare
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n \cdot (-1)^n}{5^n}.$$

(Problemi da 8 punti)

5. Studiare, al variare del parametro reale λ, l'iniettività e la surgettività della funzione $f_\lambda : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\lambda(x) = \log x - \lambda \arctan x.$$

6. Consideriamo la successione
$$a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n^2}.$$
   (a) Determinare se definitivamente si ha che $a_n > 0$ oppure $a_n < 0$.
   (b) Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^\alpha.$$

7. (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ esiste una costante $c > 0$ tale che
$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0. \tag{*}$$
   (b) Determinare se esiste una costante $c > 0$ tale che
$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$
   (c) Detta c_n la più grande costante reale per cui vale la (*), calcolare il limite della successione $c_n \cdot n!$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 20 Marzo 2015

(Problemi da 3 punti)

1. Determinare una primitiva della funzione $\cos^7 x$.

2. Stabilire se l'espressione
$$\int_0^1 \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$
rappresenta un numero reale, ed in caso affermativo calcolarlo esplicitamente.

3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$u''(t) - 2u'(t) = \cos^2 t.$$

4. Le successioni a_n e b_n sono definite ponendo $a_0 = b_0 = 0$, e poi per ricorrenza
$$a_{n+1} = 3a_n + b_n + 5^n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n.$$
Calcolare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$.

(Problemi da 8 punti)

5. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{e^{-t}}{1-u} \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Trovare la soluzione del problema nel caso $\alpha = 0$, precisando se si ha (per tempi positivi) esistenza globale, blow up o break down.

   (b) Determinare per quali valori di α si ha esistenza globale nel futuro.

6. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$
   (a) Determinare per quali valori reali di x è ben definita.

   (b) Determinare se per $x > 0$ la funzione è limitata superiormente/inferiormente e se ammette massimo/minimo (ed in caso affermativo determinare i punti di massimo/minimo).

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = 5x_n - x_n^2 - 4, \qquad\qquad x_0 = \alpha.$$

   (a) Nel caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare il limite di x_n.

   (b) Determinare per quali valori di α la successione ha limite reale.

   (c) Tornando al caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|\log|x_n||}{n}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 05 Maggio 2016

1. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ a & \text{se } x = 0, \\ \sin x \cdot \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   (a) Determinare per quali valori del parametro reale a la funzione risulta semicontinua inferiormente o superiormente su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) Studiare l'uniforme continuità, la lipschitzianità e l'hölderianità di $f(x)$ in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin(x^2) + \int_0^x \frac{\arctan t}{t}\, dt.$$

   (a) Calcolare il polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine 6 con centro in $x = 0$.

   (b) Dimostrare che $f(x)$ è invertibile in un intorno dell'origine e calcolare il polinomio di Taylor dell'inversa di ordine 3 con centro in $x = 0$.

   (c) Stabilire se esiste un numero reale A tale che la restrizione di $f(x)$ alla semiretta $[A, +\infty)$ è iniettiva.

   (d) Stabilire se esiste un numero reale λ tale che

$$\limsup_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda \log x] < +\infty.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 04 Giugno 2015

---

1. Determinare per quali valori del parametro reale $a > 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sinh n}{a^n + n^3}$$
risulta convergente.

2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = -\frac{x_n}{2} + x_n^6.$$
   (a) Studiare il comportamento della successione nel caso $x_0 = -2$.
   (b) Studiare il comportamento della successione nel caso $x_0 = -1/2$.

3. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \int_x^{x+\sin x} \frac{1}{\log(1+t)}\, dt.$$
   (a) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   (b) Stabilire se la funzione è uniformemente continua e/o lipschitziana in $(0, +\infty)$.
   (c) Determinare se $f(x)$ ammette minimo in $(0, +\infty)$.
   (d) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$.
   (e) (Bonus question) Determinare se $f(x)$ ammette massimo in $(0, +\infty)$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'(t) + \frac{2u(t)}{t} = \cos t, \qquad u(\pi) = \alpha.$$
   (a) Determinare la soluzione generale del problema, ed il relativo intervallo massimale di esistenza.
   (b) Determinare gli eventuali valori di α per cui la soluzione risulta limitata in $(0, +\infty)$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 29 Giugno 2015

---

1. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^4}{\arctan(x^3)} - \frac{\alpha x^3}{\arctan^2 x}.$$

Determinare, in funzione del parametro $\alpha > 0$, ordine di infinito/infinitesimo e parte principale per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{\arctan x_n}{x_n + 3}.$$

   (a) Determinare, nel caso $x_0 = 2015$, il limite di x_n.

   (b) Determinare, nel caso $x_0 = 2015$, il limite di $\sqrt[n]{x_n}$.

   (c) Determinare se esistono valori $x_0 \neq 0$ per cui la successione risulta costante.

3. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{2 + t^4}.$$

   (a) Determinare quanti sono i valori di λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ non ha soluzioni.

   (b) Determinare quanti sono i valori di λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione.

   (c) Determinare se $f(x)$ è lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$.

   (d) (Bonus question) Determinare per quali valori reali del parametro α si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_{2015}^{+\infty} [f(x)]^\alpha \, dx.$$

4. Determinare la soluzione generale del problema di Cauchy

$$u''(t) + u(t) = \cos^3 t.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 24 Luglio 2015

1. Calcolare, al variare del parametro reale a, il limite della successione
$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^a}.$$

2. Determinare le migliori costanti c_1 e c_2 per cui
$$\frac{c_1 x}{x+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{c_2 x}{x+1} \qquad \forall x > 0.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{x_n + n}{n^2+1}, \qquad x_1 > 0.$$
   (a) Determinare il limite della successione x_n.
   (b) Determinare il limite della successione nx_n.

4. Consideriamo gli integrali
$$I_1(\alpha) := \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha\sqrt{1+x^\alpha}}\,dx, \qquad I_2(\alpha) := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{1+x^\alpha}}\,dx.$$
   (a) Studiare la convergenza di $I_1(\alpha)$ e $I_2(\alpha)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.
   (b) Calcolare il valore di $I_2(1)$.
   (c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale β, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} [I_2(n)]^\beta.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 03 Settembre 2015

1. Studiare, al variare del parametro reale a, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \int_0^{1/n} \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt.$$

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \arctan^{70} x + \log|1 + x^{77}| - 77x^{77}.$$
   (a) Calcolare la derivata 2015-esima nel punto $x = 0$.
   (b) Dimostrare che l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione reale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) Dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno quattro soluzioni reali.
   (d) Dimostrare che l'equazione $f(x) = \lambda$ ha soluzione unica per ogni λ sufficientemente grande.

3. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{\log(1 + x)}{x}.$$
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è monotona.
   (b) Dimostrare che $f(x)$ è lipschitziana con costante minore o uguale a 1.
   (c) (Bonus question) Dimostrare che la successione definita per ricorrenza da $x_{n+1} = f(x_n)$ ammette limite reale per ogni dato iniziale $x_0 > 0$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = (u^2 + 1)e^{-t}, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Determinare la soluzione particolare nel caso particolare $\alpha = 0$, specificando anche se (nel futuro) si ha esistenza globale, blow-up o break-down.
   (b) Determinare per quali valori del parametro α la soluzione ha esistenza globale nel futuro.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 12 Gennaio 2016

---

1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2016}+2}{2^{\sqrt{n}}}.$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{x^2+x}{1+\lambda e^x} = 1.$$

(Si intende che per avere una soluzione il denominatore deve essere diverso da zero)

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \int_0^{x_n} \frac{\arctan t}{t^6+1}\, dt, \qquad x_0 = \alpha > 0.$$

   (a) Determinare il limite della successione.

   (b) Determinare il limite della successione $n^{3n} x_n$.

   (c) (Bonus question) Stabilire se esiste un intero positivo n_0, indipendente da α, tale che

$$x_n \leq \frac{1}{2016^{2016}} \qquad \forall n \geq n_0.$$

4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u' = 7u + t + 4$$

che sono uniformemente continue in $[0, +\infty)$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 02 Febbraio 2016

---

1. Calcolare il
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^{2x} - \cos(2x)}{\sin(x+x^3) - x}.$$

2. Determinare quante sono le soluzioni reali dell'equazione
$$\log|x+1| = \arctan x.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = 2\arctan(nx_n), \qquad x_1 = 1.$$
   (a) Dimostrare che $x_n \geq 1$ per ogni $n \geq 1$.
   (b) Determinare il limite della successione.
   (c) Detto ℓ il limite della successione, studiare la convergenza della serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (\ell - x_n).$$
   (d) (Bonus question) Studiare il limite della successione definita dalla stessa ricorrenza al variare del dato iniziale $x_1 > 0$.

4. Consideriamo la funzione $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt.$$
   Stabilire se la funzione è
   (a) limitata,
   (b) uniformemente continua,
   (c) iniettiva.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 24 Novembre 2016

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x) = 2^{|x-1|}$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Calcolare l'immagine e la controimmagine di $[0, 2)$.
2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\cosh(3n)}$.
3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 10, con centro nell'origine, della funzione
   $$f(x) = \arctan\left(\log(1 - x^3)\right).$$
4. Consideriamo la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n^3}{n^a},$$
   dove a è un parametro reale positivo.
   Determinare per quali valori del parametro si ha convergenza e per quali valori si ha assoluta convergenza.

(Problemi da 8 punti)

5. Determinare ordine di infinitesimo e parte principale della successione
   $$\sqrt[n]{n+3} - \sqrt[n]{n}.$$
6. Consideriamo, al variare del parametro reale λ, la funzione $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
   $$f_\lambda(x) = x - \arctan(\lambda x).$$
   Determinare per quali valori del parametro la funzione risulta iniettiva e/o surgettiva.
7. Consideriamo l'equazione
   $$x^5 - x\log(1 + x^2) + \sin(x^4) = n.$$
   (a) Dimostrare che per $n = 0$ l'equazione ammette almeno tre soluzioni.
   (b) Dimostrare che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che l'equazione ammette una soluzione unica x_n per ogni $n \geq n_0$.
   (c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza della serie
   $$\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n - n^a)^2.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 6 Aprile 2017

(Problemi da 3 punti)

1. Determinare una primitiva della funzione $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

2. Calcolare
$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\,dx.$$

3. Determinare per quali valori del parametro reale positivo a si ha convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^a}\,dx.$$

4. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da $x_0 = 2016$, $x_1 = 2017$, e
$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 5x_n + 7^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Calcolare il limite di $7^{-n}x_n$.

(Problemi da 8 punti)

5. Studiare la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} x^{18}\cos(x^{30})\,dx.$$

6. (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy (precisando l'intervallo massimale di esistenza)
$$u' + \frac{u}{1+t} = \arctan t, \qquad u(0) = 1.$$
(b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$u'' + \frac{u'}{1+t} = 0.$$

(c) (Bonus question) Determinare se l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{u'}{1+t} = \arctan t$$

ammette soluzioni limitate per $t \geq 0$.

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{4+x_n} + \frac{a}{n}, \qquad x_1 = \frac{1}{2017},$$

dove a è un parametro reale.

(a) Determinare, nel caso $a = 0$, il limite della successione.

(b) Dimostrare che, nel caso $a = 1/100$, la successione è definitivamente monotona.

(c) (Ultra bonus) Sempre nel caso $a = 1/100$, determinare il limite della successione $(x_n)^n$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 18 Maggio 2017

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \int_{x^2}^{x^6} \frac{\arctan t}{\sqrt{t} + t^4}\, dt.$$
   (a) Determinare se $f(x)$ ammette massimo e/o minimo per $x > 0$.
   (b) Studiare uniforme continuità e lipschitzianità di $f(x)$ in $(0, +\infty)$.
   (c) Determinare per quali valori del parametro reale positivo α si ha convergenza dell'integrale
$$\int_1^{+\infty} [f(x)]^\alpha\, dx.$$
   (d) (Bonus question) Determinare per quali valori del parametro reale β l'espressione
$$\varphi(x) = f(x) + \beta \sinh(x^3)$$
   definisce una funzione $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ invertibile e, nei casi in cui succede, studiare l'hölderianità in $(0, +\infty)$ della funzione inversa.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) = 7 \arctan x + \sin(x^2).$$
   (a) Dimostrare che esistono due numeri reali positivi a e b per cui $f(x)$, vista come funzione $f : [-1, 1] \to [-a, b]$, risulta invertibile.
   (b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 con centro nell'origine dell'inversa della restrizione di $f(x)$ considerata al punto precedente.
   (c) Determinare per quali valori del parametro reale $M \geq 0$ l'insieme
$$\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M\}$$
   risulta compatto.
   (d) Stabilire se $f(x)$ è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 5 Giugno 2017

---

1. Consideriamo la successione

$$a_n = \left(\frac{n}{n+4}\right)^n - \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n}.$$

   (a) Dimostrare che a_n è infinitesima.

   (b) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di a_n.

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin(x^4) + x^7.$$

   (a) Determinare se $f(x)$ è convessa in $(2017, +\infty)$.

   (b) Determinare se esistono valori reali di λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette esattamente una soluzione reale.

   (c) Determinare se esiste una costante reale c tale che

$$f(x) \leq c \sinh x \qquad \forall x \geq 0.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{|x_n^3 - x_n|}{n + x_n^2}, \qquad\qquad x_0 = 2017.$$

   (a) Determinare il limite della successione.

   (b) Determinare il limite della successione $2^n x_n$.

   (c) (Bonus question) Determinare il limite della successione $n! \cdot x_n$.

4. Studiare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^7 + 7}\, dt.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 26 Giugno 2017

1. Determinare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la parte principale della successione
$$\frac{1}{n} - \arcsin\left(\frac{2n+3}{\alpha n^2+3}\right).$$

2. Determinare per quali valori del parametro reale λ l'equazione
$$x + x^2 = \arctan(\lambda x + x^2)$$
ammette un'unica soluzione reale.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = x_n^7 + 7\arctan(x_n^2), \qquad x_0 = \alpha.$$
   (a) Determinare se esistono valori di α per cui la successione tende a $+\infty$.
   (b) Determinare se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la successione è infinitesima.
   (c) Determinare se esistono valori $\alpha < 0$ per cui la successione è infinitesima.
   (d) (Bonus question) Determinare se esistono valori α per cui $x_{2017!} < 0$ e $x_n \to +\infty$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'(t) = \frac{u(t)}{t} + \frac{7}{t^3}, \qquad u(1) = \alpha.$$
   (a) Determinare la soluzione generale del problema, ed il relativo intervallo massimale di esistenza.
   (b) Determinare gli eventuali valori di α per cui si ha convergenza dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} u(t)\,dt.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 27 Luglio 2017

---

1. Consideriamo la successione
$$a_n = \sqrt[n]{(n+3)^n - n^n}.$$
   (a) Dimostrare che a_n non è limitata superiormente.
   (b) Determinare l'ordine di infinito e la parte principale di a_n.

2. Consideriamo, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la funzione $f_\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\alpha(x) = x^4 - \alpha x^3 \log(1 + x).$$
   (a) Dimostrare che per ogni numero reale $\lambda \geq 0$ l'equazione $f_\alpha(x) = \lambda$ ammette almeno una soluzione.
   (b) Determinare per quali valori di α la funzione $f_\alpha(x)$ è iniettiva.
   (c) (Bonus question) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 2$ la funzione $f_n(x)$ ammette un unico punto di minimo $x_n > 0$, e studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x_n}.$$

3. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \int_x^{2x} \log t \cdot \arctan t \, dt.$$
   (a) Studiare la lipschitzianità e l'uniforme continuità di $f(x)$ in $(0, 1)$.
   (b) Studiare la lipschitzianità e l'uniforme continuità di $f(x)$ in $(1, +\infty)$.

4. Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ si ha convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x) - e^{-2x^2}}{x^\alpha \log(1 + x)} \, dx.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 23 Settembre 2017

1. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha} \arctan n,$$
dove $\alpha > 0$ è un parametro reale.
   (a) Determinare per quali valori di α la serie converge assolutamente.
   (b) Determinare per quali valori di α la serie converge.

2. Determinare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione
$$e^{1/x} = \lambda x^2.$$

3. Consideriamo, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la funzione $f_\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definita da
$$f_\alpha(x) = \int_x^{x+x^\alpha} \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\, dt.$$
   (a) Determinare, al variare di α, il limite di $f_\alpha(x)$ per $x \to +\infty$.
   (b) (Bonus question) Determinare se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = f_\alpha(x_n), \qquad x_0 = 2017$$
risulta *limitata* e *non infinitesima*.

4. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u'' + u' - 2u = \cosh t.$$
   (a) Determinare la soluzione generale.
   (b) Determinare per quali valori del parametro reale α la soluzione con dati iniziali
$$u(0) = \alpha, \qquad u'(0) = 0$$
risulta limitata inferiormente su tutto $\mathbb{R}$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 22 Gennaio 2018

---

1. Determinare l'insieme delle coppie (a, b) di numeri reali positivi per cui si ha convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt[n]{a + \frac{3}{n}} - 1 \right|^b.$$

2. Consideriamo l'equazione
$$\sin x = \lambda x^2.$$
   (a) Dimostrare che per ogni valore reale positivo di λ l'equazione ammette un'unica soluzione nell'intervallo $(0, \pi)$.
   (b) Dimostrare che esistono valori di λ per cui l'equazione non ammette soluzioni $x > 0$.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = n^\alpha \cdot \arctan\left(\frac{x_n}{n}\right), \qquad x_1 = 2018.$$
   (a) Determinare il limite della successione nel caso $\alpha = 1/2$.
   (b) Sempre nel caso $\alpha = 1/2$, stabilire il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$
   (c) (Bonus question) Stabilire se la successione risulta infinitesima nel caso $\alpha = 1$.

4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$u'' = u + \frac{1}{e^t + 1}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 19 Febbraio 2018

1. Determinare ordine di infinitesimo e parte principale della successione

$$\log(n + \arctan n) - \log(n - \arctan n).$$

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \cosh(\sin x) - \cos(\sinh x).$$

   (a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[0, 1]$.

   (b) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{|f(x)|^a}\, dx.$$

   (c) (Bonus question) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 2018^{-2018}$.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{\arctan x_n}{1 + x_n}, \qquad x_0 = \alpha > 0.$$

   Determinare il limite della successione al variare del parametro reale positivo α.

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^4} e^{-t} \arctan(t^3)\, dt.$$

   (a) Determinare se si tratta di una funzione uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) Determinare se ammette massimo e/o minimo su tutto $\mathbb{R}$.