# ANALISI 1 — LEZIONE 011

Note Title 05/10/2024

## Presentazione funzioni elementari e relative inverse

**POTENZE** La funzione $f(x) = x^2$, vista come $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile (vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è non iniettiva, non surgettiva, pari e non monotona).

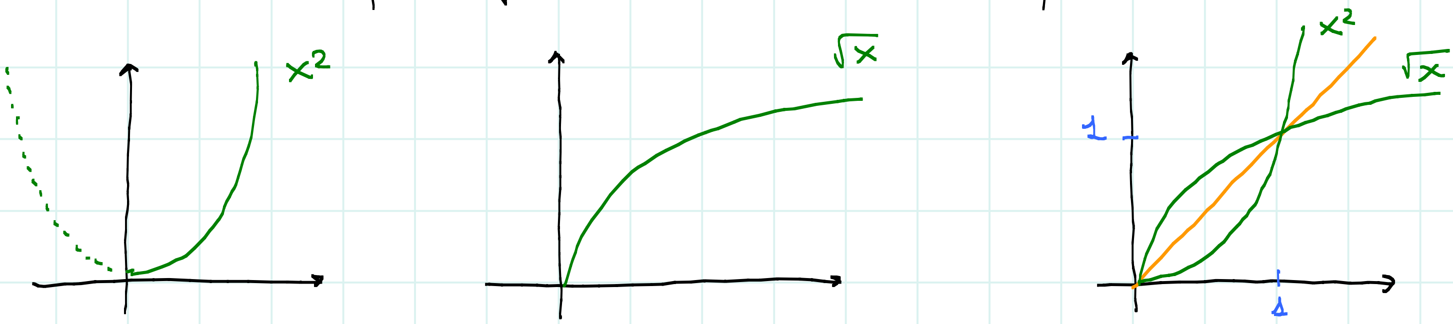
La sua inversa è una $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ e si chiama radice quadrata $g(x) = \sqrt{x}$

Oss. $g(x) = \sqrt{x}$ prende in INPUT reali $\geq 0$ e restituisce reali $\geq 0$

Quindi $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{-4}$ non ha senso (sui reali)

e non $\pm 2$ o altro

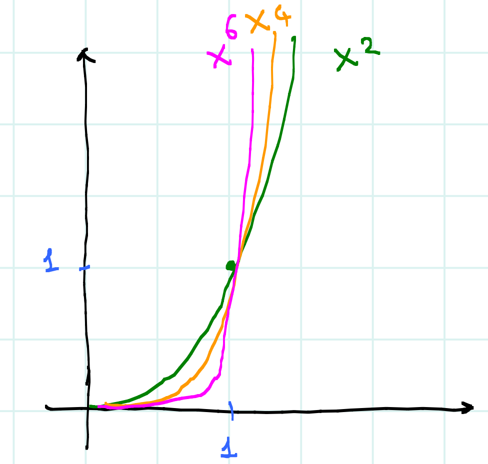
Stesso discorso per $f(x) = x^k$ con $k$ intero positivo PARI.

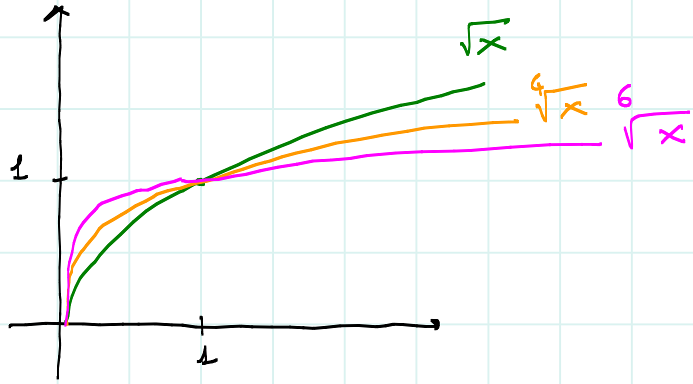



**FATTO GENERALE** I grafici di $f$ e della sua inversa sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice $y = x$

[Se $y = f(x)$, cioè $(x, y) \in$ Grafico di $f$ allora $x = g(y)$, cioè $(y, x) \in$ Grafico di $g$]

## Grafico comparativo



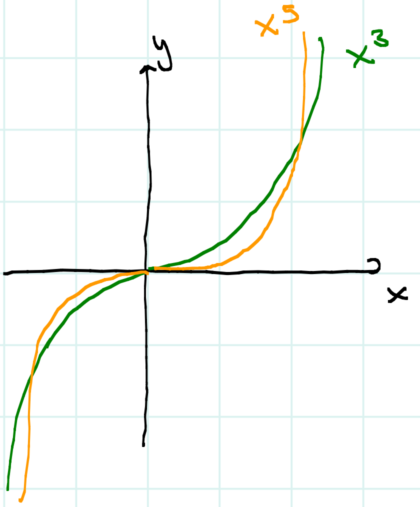



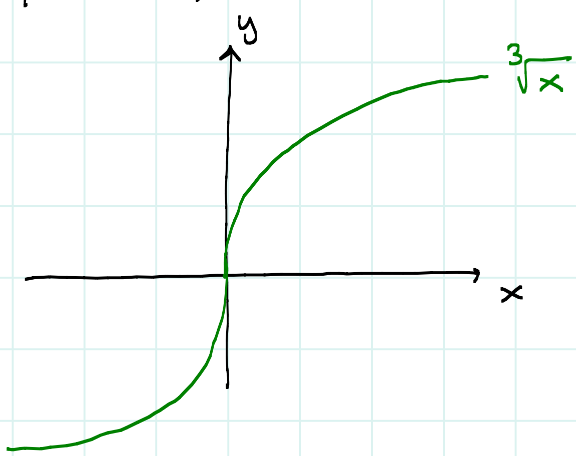

$\boxed{\text{Potenze DISPARI}}$ La funzione $f(x) = x^3$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari $[\, (-x)^3 = -x^3 \,]$, strett. crescente quindi iniettiva, surgettiva, quindi invertibile.

La sua inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ è una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è pure lei dispari e strett. crescente, oltre che iniettiva e surgettiva.

Stessa cosa per $f(x) = x^k$ con $k$ intero positivo dispari

Oss. $g(x) = \sqrt[3]{x}$ prende in INPUT reali qualunque e restituisce reali qualunque $\quad \sqrt[3]{-8} = -2$




Esercizio $\quad \sqrt[3]{x+4} = \sqrt[3]{2x-3} \rightsquigarrow x+4 = 2x-3 \rightsquigarrow x = 7$

Ok perché $\sqrt[3]{x}$ è iniettiva

$\sqrt[6]{x+4} = \sqrt[6]{2x-3} \rightsquigarrow x+4 = 2x-3 \rightsquigarrow x = 7$

NB: lo posso fare, ma mi devo accertare che quello che sta sotto sia $\geq 0$ (basta sostituire $x=7$ alla fine)

# ESPONENZIALI

$x^7 \rightsquigarrow$ potenza (base variabile, espon. FISSO)

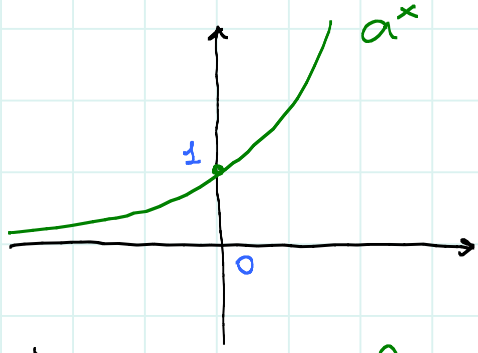
$7^x \rightsquigarrow$ esponenziale (esponente variabile)

$x^{\sin x} \rightsquigarrow$ esponenziale

**Fatto** Per ogni $\boxed{a>1}$ fisso, la funzione $f(x)=a^x$ vista come

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$$

è strett. crescente, iniettiva e surgettiva (nessuna simmetria), quindi invertibile.




L'inversa è $g: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ è

$$g(x) = \log_a x$$

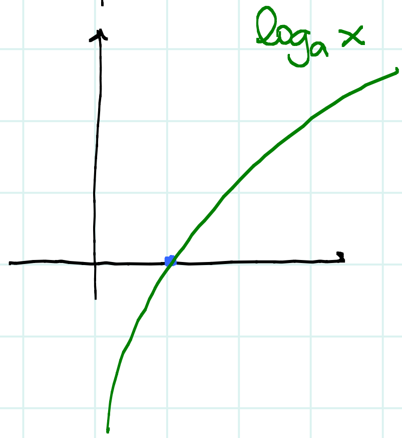
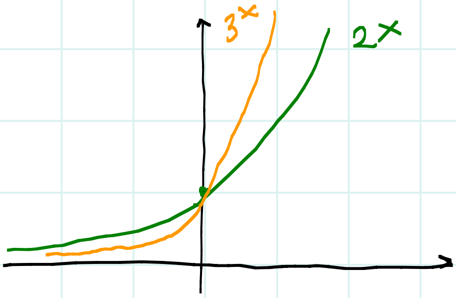
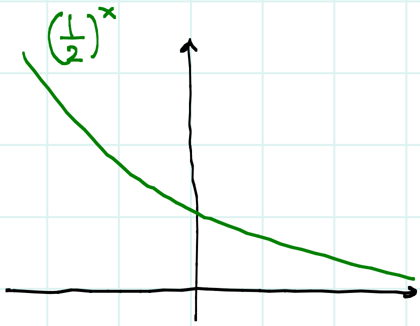



Grafico comparato




Per ogni $\boxed{a \in (0,1)}$ la funzione

$f(x) = a^x$ è, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$,

$\to$ strett. decrescente

$\to$ iniettiva

$\to$ surgettiva

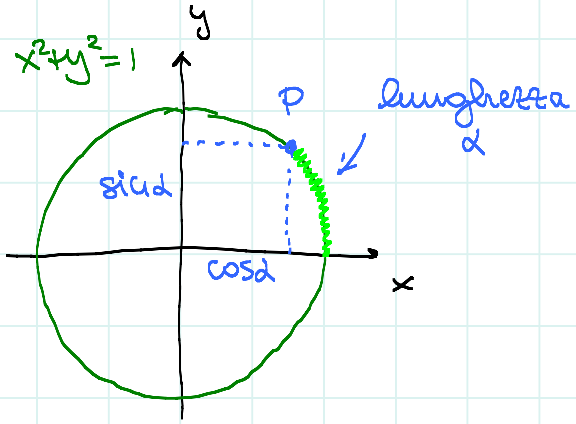
e l'inversa è ancora $g: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ e $g(x) = \log_a x$

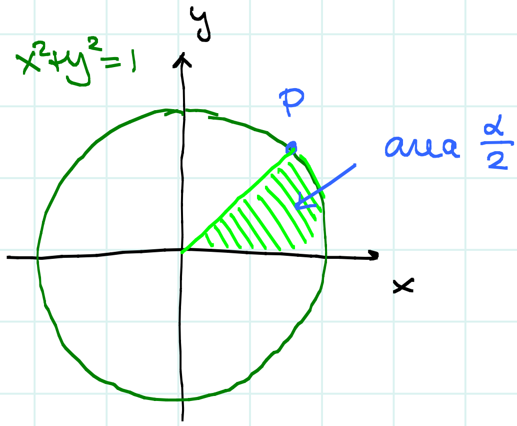
**Esempi** $3^{6x+4} = 9 \rightsquigarrow \cancel{3}^{6x+4} = \cancel{3}^2$ (posso eliminare il 3 perché $3^x$ è iniettiva)

$\rightsquigarrow 6x+4 = 2 \rightsquigarrow 6x = -2 \rightsquigarrow x = -\frac{1}{3}$

# FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Si possono definire via arco o via area




Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, prendiamo P sulla circ. tale che l'arco abbia lunghezza α, oppure il settore abbia area $\frac{\alpha}{2}$.

Le coordinate di P sono $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Si pone poi

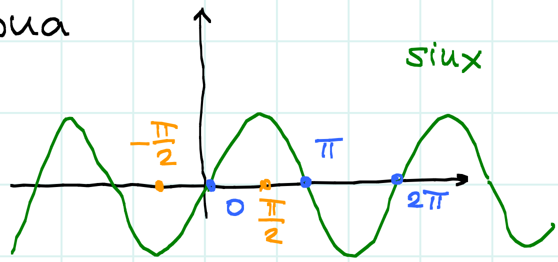
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\boxed{\text{SENO}}$ La funzione $f(x) = \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

→ periodica con periodo minimo $2\pi$

→ dispari

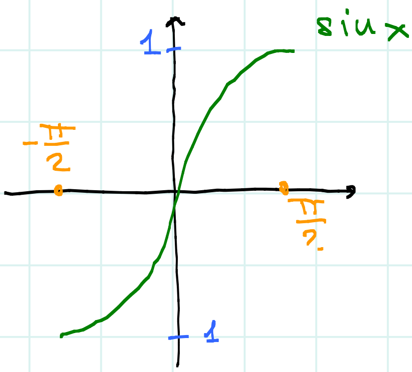
→ né iniettiva, né surgettiva, né monotona




Vista come $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ diventa

→ strett. crescente

→ iniettiva e surgettiva




L'inversa è $g: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e si chiama

$$g(x) = \arcsin x$$

↑ INPUT: $x \in [-1,1]$

OUTPUT $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{\text{COSENO}}$ La funzione $f(x) = \cos x$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

→ periodica (periodo min $2\pi$)

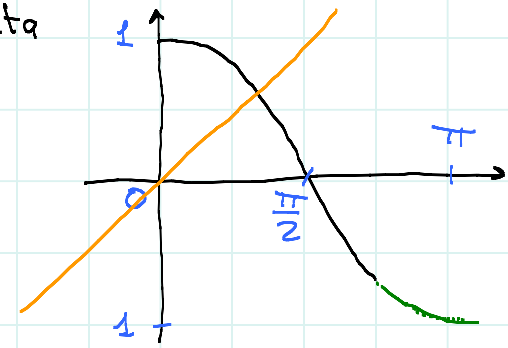
→ pari

→ NON iniettiva, NON surg., NON monotona

Vista come $f: [0,\pi] \to [-1,1]$ diventa

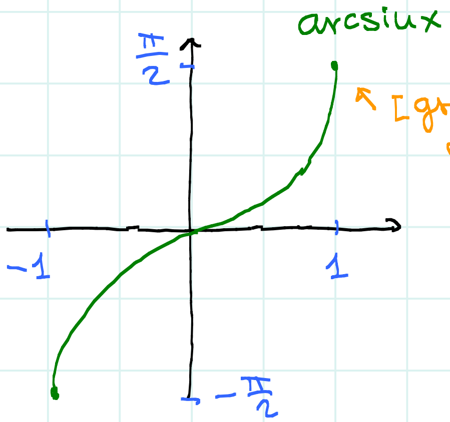
→ strett. decresc.

→ invertibile

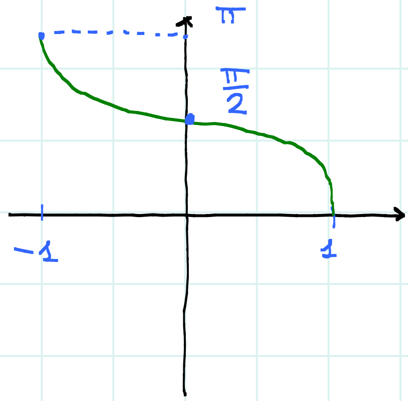



L'inversa $g: [-1,1] \to [0,\pi]$ è

$$g(x) = \arccos x$$




[grafico corretto dopo video]




— o — o —