ANALISI 1 — LEZIONE 020

Note Title 13/10/2016

CRITERIO FUNZIONI → SUCCESSIONI (I limiti di funzioni aiutano i limiti di successioni)

Esempio operativo $\lim_{n\to+\infty} \underset{\downarrow\ +\infty}{n} \underbrace{\sin\frac{1}{n}}_{\downarrow\ \sin 0 = 0}$ $[+\infty\cdot 0]$

$$n\sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $y=\frac{1}{n}$ e osservo che per $n\to+\infty$ si ha che $y\to 0^+$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

Il criterio dice che questo si può fare.

Enunciato Sia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia a_n una successione.
Supponiamo che

(i) $a_n \longrightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

(ii) $a_n \in D\setminus\{x_0\}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ (o almeno definitivamente)

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$

Brutal mode: pongo $x=a_n$ e osservo che per $n\to+\infty$ si ha $x\to x_0$ quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Sarebbero 9 casi... ne facciamo uno, ad esempio quello $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$.

Voglio dimostrare che $f(a_n) \to \ell$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Per ipotesi (iii) so che $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$, quindi $\exists\, \delta > 0$ t.c.
$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$

Dico che definitivamente si ha che $a_n \in (\underbrace{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]}_{a_n \text{ sta qui per ipotesi (i)}} \cap \underbrace{D) \setminus \{x_0\}}_{a_n \in D \setminus \{x_0\} \text{ per ipotesi (ii)}}$

— o — o —

Oss. Tutti i cambi di variabile nei limiti si dimostrano in questo stesso modo.

Esercizio Provare a dimostrare un altro caso, ad esempio $x_0 = -\infty$, $\ell = +\infty$.

— o — o —

$\boxed{\text{TRUCCO DEL PASSAGGIO ALL'ESPONENZIALE}}$

Serve in situazioni del tipo $a_n^{b_n}$ oppure $[f(x)]^{g(x)}$

Base ed esponenti strani? $\boxed{\text{e-ALLA}}$!

$$\boxed{a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}} \qquad \text{CANE} = e^{\log \text{CANE}} \qquad \text{CANE} = a_n^{b_n}$$

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

Esempio 1 $\quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}}}_{1} \cdot \log a = \log a$$

Pongo $y = x\log a \to 0$

Esempio 2 $\quad \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{2016}-1\right) \qquad +\infty\,(1-1) = +\infty\cdot 0$

$$n\left(\sqrt[n]{2016}-1\right) = \frac{2016^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{2016^x-1}{x} \to \log 2016$$

$x = \frac{1}{n}$

quindi $x\to 0$

Morale: grazie ad E-alla i limiti con base ed esponente variabile si riducono a limiti di prodotti

Teorema algebrico per l' esponenziale (versione succ.)

Se $a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$(a_n)^{b_n} \to (\ell_1)^{\ell_2}$$

TRANNE nei casi $\quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad (+\infty)^0$

che sono quelli in cui $b_n\cdot\log a_n$ è una forma indetermin. per il prodotto.

Dim $\quad a_n^{b_n} = e^{b_n\cdot\log(a_n)} \to e^{\ell_2\cdot\log \ell_1} = \ell_1^{\ell_2}$

uso continuità di esponenziale e logaritmo.

Esempio 3 $\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ $+\infty\,(1-1)$

$$n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = \frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \boxed{\frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}}} \cdot \boxed{\log n} \to +\infty$$

$\boxed{\frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}}} \to 1$ $\quad \boxed{\log n} \to +\infty$

pongo $x = \frac{\log n}{n}$ e osservo che $x \to 0$ per cui è il solito limite notevole

Esempio 4 $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$ $\left[1^{+\infty} = \text{forma indet.} \right]$

Basta fare il limite dell'esponente dopo e-alla

$$\frac{\log(\cos x)}{\tan^2 x} = \boxed{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}\;\boxed{\frac{x^2}{\tan^2 x}} \to -\frac{1}{2}$$

$\boxed{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} \to -\frac{1}{2}$ (vedi lezione 18) $\quad \boxed{\frac{x^2}{\tan^2 x}} \to 1$

Quindi il limite originale è $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Esempio 5 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log \sin(x^2)}{\log(\arctan x)}$

Esempio 4.5 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log x}$ $\left[\frac{\log 0}{\log 0} = \frac{-\infty}{-\infty} \right]$

$$\frac{\log(\sin x)}{\log x} = \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x} \cdot x\right)}{\log x} = \frac{\log x + \log \frac{\sin x}{x}}{\log x}$$

$$= 1 + \frac{\boxed{\log \frac{\sin x}{x}}}{\boxed{\log x}}$$

$\boxed{\log \frac{\sin x}{x}} \to \log 1 = 0$ $\quad \boxed{\log x} \to -\infty$

$$\to 1 + 0 = 1$$

Back to esempio 5:

$$\frac{\log(\sin(x^2))}{\log(\arctan x)} = \frac{\log\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x^2\right)}{\log\left(\frac{\arctan x}{x}\cdot x\right)} =$$

$$\frac{\log\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right) + 2\log x}{\log\left(\frac{\arctan x}{x}\right) + \log x} \Rightarrow \text{raccolgo } \log x \text{ sopra e sotto}$$

$$\to 2$$

<u>Esempio 6</u> $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\log(1+\tan x)} = 1$

$$\frac{e^{\sin x} - 1 + 1 - \cos x}{\log(1+\tan x)} = \frac{\boxed{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}\cdot\boxed{\frac{\sin x}{x}}\cdot \cancel{x} + \boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}\cdot \boxed{x}\cdot\cancel{x}}{\boxed{\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x}}\cdot\boxed{\frac{\tan x}{x}}\cdot\cancel{x}}$$

$\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \to 1$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, $x \to 0$

$y = \tan x$: $\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x} \to 1$, $\frac{\tan x}{x} \to 1$

$$\to \frac{1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0}{1\cdot 1} = 1$$

<u>Esempio 7</u> $\frac{\sqrt[n]{7} - \cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} \to \log 7$

$$\frac{\sqrt[n]{7} - \cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} = \frac{7^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} = \frac{7^x - \cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{7^x - 1 + 1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\boxed{\frac{7^x-1}{x}}\cdot\cancel{x} + \boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}\cdot\boxed{x}\cdot\cancel{x}}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}\cdot\cancel{x}} \to \log 7$$

$\frac{7^x-1}{x} \to \log 7$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, $x \to 0$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$