A.A. 2018/2019

Corso di Algebra Lineare

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE

Note Title 28/09/2018

1. Spazi vettoriali e applicazioni lineari
2. Geometria analitica
3. Sistemi lineari
4. Prodotti scalari

MATRICI

Geometria analitica e vettori

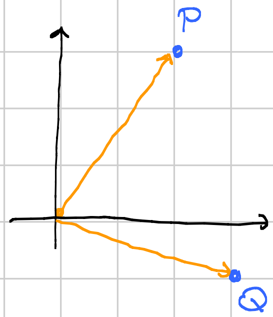
Spazio che si considera: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, o più in generale $\mathbb{R}^n$.
Gli elementi hanno risp., 2, 3, ..., n coordinate

Posso identificare i p.ti del piano con coppie di numeri

$P = (2,3)$

$Q = (3,-1)$

componenti



Posso pensare i punti come "vettori" che hanno punto di applicazione nell'origine e "freccia" nel p.to in questione

Con un po' di astrazione posso pensare a vettori a n componenti

Notazione: in $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow (x,y)$

in $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow (x,y,z)$

$\vdots$

in $\mathbb{R}^{28} \rightsquigarrow (x_1, x_2, \dots, x_{28})$

— o — o —

Operazioni tra vettori
- somma (differenza)
- prodotto per uno scalare
- prodotto scalare
- norma

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Siano x e y in $\mathbb{R}^n$. Diciamo

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

Allora si definisce

$$\vec{x} \pm \vec{y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n)$$

$\boxed{\text{PRODOTTO PER UNO SCALARE}}$ Prodotto tra un vettore e un numero ~~no~~ ottengo un vettore

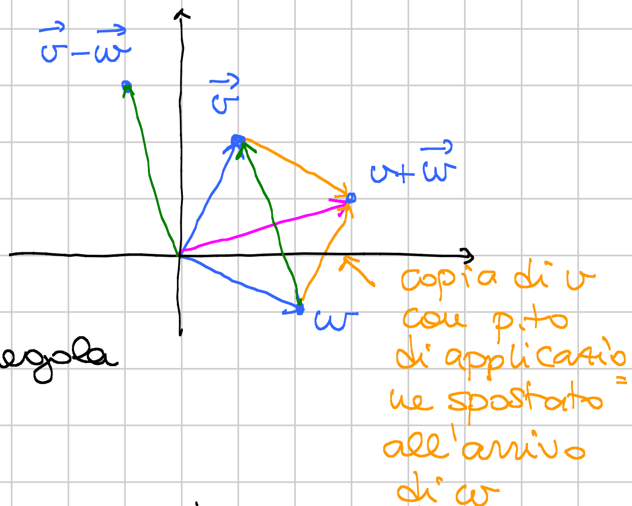
$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

<u>Interpretazione geom. nel piano</u>

$$\vec{v} = (1,2)$$
$$\vec{w} = (2,-1)$$

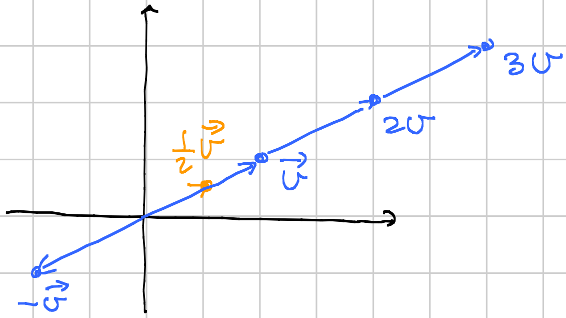
$$\vec{v} + \vec{w} = (3,1)$$



La somma si ottiene con la regola del parallelogramma

$\vec{v} - \vec{w} = (-1,3)$ = vettore che aggiunto a w produce v.

Moltiplicare un vettore per un numero = dilatarlo ($\lambda>1$) o contrarlo ($\lambda<1$)



Molt. per $\lambda<0$ = ribaltare rispetto all'origine

Oss. Fare $\vec{v}-\vec{w}$ è come fare $\vec{v}+(-1)\cdot\vec{w}$
(la differenza si ottiene dalla somma e dal prodotto per -1)

$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE}}$ (tra 2 vettori) [Più avanti: prod. sc. CANONICO]

INPUT: 2 vettori OUTPUT: numero

$\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$

$$\underbrace{\vec{x}\cdot\vec{y}}=\underbrace{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}=\boxed{x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n}$$

sinonimi

Esempio $\vec{x}=(1,0,2,-1)$ $\vec{y}=(3,5,-1,0)$

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=1\cdot3+0\cdot5+2\cdot(-1)+(-1)\cdot0=3-2=1.$$

— o — o —

$\boxed{\text{NORMA DI UN VETTORE}}$

Dato $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ la sua NORMA è il numero

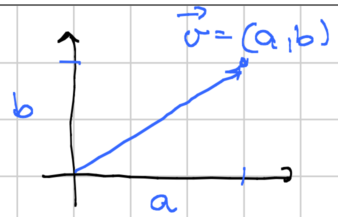
$$\boxed{\|\vec{x}\|=|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}}$$

(lunghezza del vettore)

Pitagorone a n variabili

$$\|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2} = \text{lunghezza}$$

↑ Pitagora



Oss. $\|\vec{x}\| = \sqrt{\underbrace{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}_{\text{Prodotto scalare di } \vec{x} \text{ con se stesso}}}$

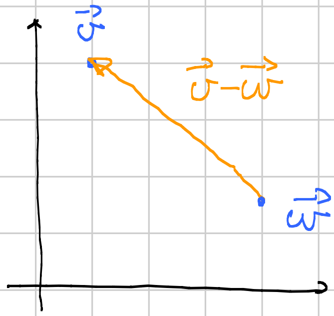
— o — o —

DISTANZA TRA DUE VETTORI

Dati $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ definiamo

$$\boxed{\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}}$$

— o — o —



Proprietà del prodotto scalare

① $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$

Dim. $x_1 \cdot (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + \dots + x_n (y_n + z_n)$

$= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + \dots + x_n y_n + x_n z_n$

$= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$

② $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda x_1 \cdot y_1 + \lambda x_2 \cdot y_2 + \dots + \lambda x_n y_n$

$= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

$= \lambda \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

— o — o —

NORMA DI SOMMA E DIFFERENZA

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle$$

spezzo 2ª somma

$$= \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{y} \rangle$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \underbrace{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$$

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$$

$$\boxed{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$$

Si possono anche dim. con i puntini:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \ldots + (x_n+y_n)^2$$

$$= \underbrace{x_1^2} + \underbrace{2x_1y_1} + \underbrace{y_1^2} + \underbrace{x_2^2} + \underbrace{2x_2y_2} + \underbrace{y_2^2} + \ldots + \underbrace{x_n^2} + \underbrace{2x_ny_n} + \underbrace{y_n^2}$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Esercizi Provare a scrivere

$$\|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\|^2 \qquad \|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|^2 \qquad \|2\vec{x}+3\vec{y}\|^2$$

$$\|2\vec{x}-\vec{y}+3\vec{z}\|^2$$

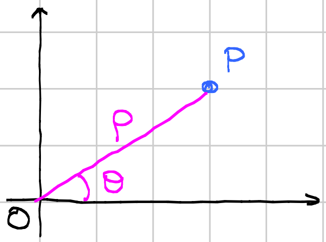
Achtung! $\|-19\vec{x}\| = 19\|\vec{x}\|$ (e NON -19 !!!)

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 02

Note Title 28/09/2018

COORDINATE POLARI NEL PIANO

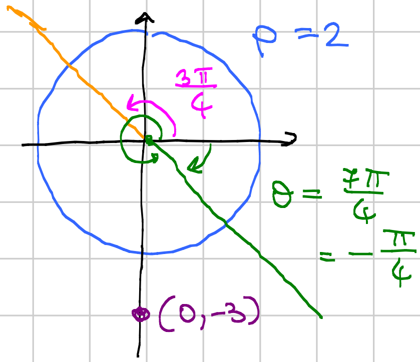


Modo alternativo di descrivere i punti del piano

Un punto è determinato da ρ, θ dove

- ρ indica la distanza dall'origine O (numero reale ≥ 0)
- θ indica l'angolo che OP forma con il semiasse positivo delle x. (essendo un angolo, è definito a meno di multipli di 2π)

Esempio Descrive tutti i p.ti del piano che verificano $\rho = 2$



Descrivere tutti i p.ti tali che $\theta = \frac{3\pi}{4}$

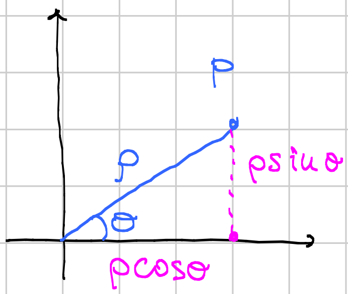
Quali sono le coord. polari di $(0,-3)$?

$\rho = 3 \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$ opp. $\frac{3\pi}{2}$

Formule di passaggio polari ⇝ cartesiane

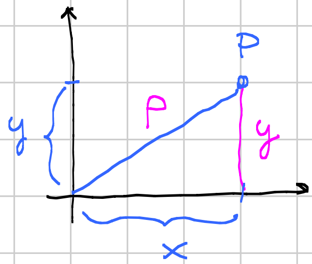
Se conosco ρ e θ, come trovo x e y?

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta}$$



Formule di passaggio cartesiane ⇝ polari

Conosco x e y, e voglio trovare ρ e θ



$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$$ Norma del vettore

Come trovo θ? Guardo il disegno!

Achtung! Occhio alle formule per θ!

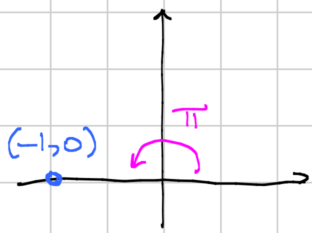
Parto da $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$... dividendo trovo

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Esempio $P = (\underset{x}{\underset{\shortparallel}{-1}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{0}})$ ⇝ $\tan\theta = \frac{y}{x} = 0$ ⇝

$\theta = 0$ è una soluzione

MA È SBAGLIATA!!



Se uso la formula $\tan\theta = \frac{y}{x}$ devo stare attento a

- il fatto che x potrebbe annullarsi
- ci sono sempre 2 valori di θ che vanno bene, e solo uno è quello buono (guardare il disegno)

Achtung! Il θ dell'origine non è ben definito...

—o—o—

$\boxed{\text{Significato geometrico del prod. scalare}}$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Via coordinate polari.

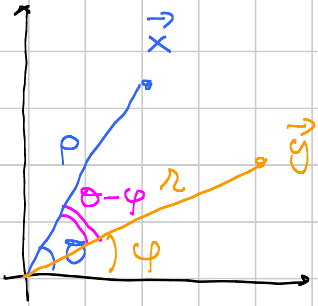
Prendiamo due vettori nel piano

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{y} = (y_1, y_2)$

Siano ρ e ϑ le coord. pol. di $\vec{x}$ $\qquad$ $x_1 = \rho\cos\vartheta \qquad x_2 = \rho\sin\vartheta$

Siano r e φ le coord. pol. di $\vec{y}$ $\qquad$ $y_1 = r\cos\varphi \qquad y_2 = r\sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\
&= \rho\cos\vartheta \cdot r\cos\varphi + \rho\sin\vartheta \cdot r\sin\varphi \\
&= \rho r\,(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi) \\
&= \rho r \cos(\vartheta - \varphi) \\
&= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\vartheta - \varphi)
\end{aligned}
$$



Conseguenza 1

$$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\text{angolo compreso})}$$

Conseguenza : se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono due vettori non nulli (diversi dall'origine, quindi con almeno una componente non nulla) allora

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \iff \cos(\vartheta - \varphi) = 0$$

$\iff$ i due vettori sono perpendicolari

Conseguenza 2

$$\boxed{|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

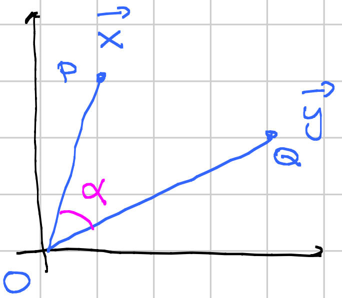
DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY – SCHWARZ

valore assoluto di un numero

norme di un vettore

"Dim"
$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| = \big|\, \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos(\ldots)\big|$$
$$= \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\underbrace{|\cos(\ldots)|}_{\leq 1}$$
$$\leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Guardo il triangolo OPQ



- $OP = \|\vec{x}\|$
- $OQ = \|\vec{y}\|$
- $PQ = \|\vec{x}-\vec{y}\|$ (o $\|\vec{y}-\vec{x}\|$, che è lo stesso)

Precorso ⤳ teorema del coseno (teorema di CARNOT)

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,OP\cdot OQ\cdot\cos\alpha$$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \cancel{\|\vec{x}\|^2} + \cancel{\|\vec{y}\|^2} - 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\alpha$$
$$\|$$
$$\cancel{\|\vec{x}\|^2} + \cancel{\|\vec{y}\|^2} - 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

Otteniamo nuovamente

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\alpha$$

↑ angolo compreso

Disuguaglianza di Cauchy – Schwarz

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Dim Per ogni $t \in \mathbb{R}$ considero $\|\vec{x} + t\vec{y}\|^2 \geq 0$
Sviluppo il conto

$$\|\vec{x} + t\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|t\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, t\vec{y} \rangle$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + t^2 \|\vec{y}\|^2 + 2t \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$= \|\vec{y}\|^2 t^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle t + \|\vec{x}\|^2$$

$$A t^2 + 2Bt + C \geq 0 \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Un polinomio di secondo grado che è sempre ≥ 0 ha per forza $\Delta \leq 0$ (altrimenti avrebbe...)

$$\Delta = B^2 - AC \leq 0, \quad \text{cioè} \quad B^2 \leq AC, \quad \text{cioè}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$$

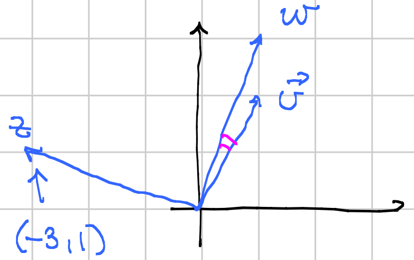
Facendo la radice a dx e sx, e osservando che

$$\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} = |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \quad \text{(Ricorso!!)}$$

otteniamo la tesi, senza usare argomenti geometrici

— o — o —

<u>Esempio</u> Calcolare l'angolo tra $(1,2)$ e $(1,3)$



$\vec{v} = (1,2) \qquad \vec{w} = (1,3)$

$$\underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{\substack{= \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ = \\ 7}} = \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\substack{= \\ \sqrt{5}}} \cdot \underbrace{\|\vec{w}\|}_{\substack{= \\ \sqrt{10}}} \cdot \cos(\text{angolo})$$

Quindi $\cos(\text{angolo}) = \dfrac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{7}{5\sqrt{2}} = \dfrac{7}{7,\text{poco}} \sim 1$

$$\langle \vec{v}, \vec{z} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{z}\| \cdot \cos(\text{angolo})$$

$$\overset{\shortparallel}{-1} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\dots)$$

$$\cos(\text{angolo}) = -\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}} < 0$$

Coseno $< 0 \rightsquigarrow$ <u>Angolo ottuso</u>

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 03

Note Title 02/10/2018

Equazione della retta

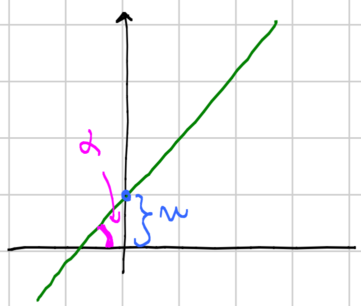
Rappresentazione cartesiana

→ esplicita $y = mx + n$
→ implicita $ax + by + c = 0$

	PRO	CONTRO
Esplicita	• due rette diverse hanno m o n diversi • comunque scelgo m ed n ottengo una retta	• Non si rappresentano rette verticali $x = a$
Implicita	• tutte le rette, anche verticali, si rappresentano	• la rappresentazione non è unica • non è vero che ottengo una retta per ogni scelta di a, b, c (ad esempio $a = b = 0$, $c = 5$ non va bene)

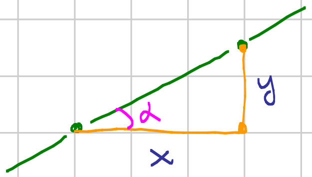
Passare dall'una all'altra è un facile conto.

Significato geometrico di m ed n nella esplicita $\boxed{y = mx + n}$



n = p.to staccato sull'asse y
m = coeff. angolare = tangente dell'angolo tra retta e semiasse positivo delle x

<u>Esercizio</u> La retta passante per $(2018, 35)$, $(2019, 42)$
ha coeff. angolare $m = 7$
(un quadretto a dx = 7 quadretti in alto)



$$m = \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

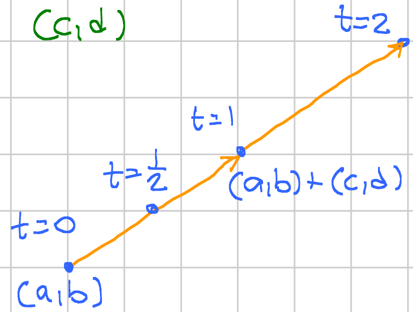
— o — o —

$\boxed{\text{Rappresentazione parametrica}}$ $\boxed{(a,b) + t\,(c,d)}$

parametro

$\boxed{(a+tc,\ b+td)}$

Interpretazione brutale: $(a,b) + t\,(c,d)$ rappresenta la posizione al tempo t di un omino.
Al tempo $t=0$ l'omino si trova in (a,b) ⇝ p.to iniziale
Al tempo $t=1$ " " " $(a,b)+(c,d)$, quindi
il suo spostamento è descritto dal vettore (c,d)



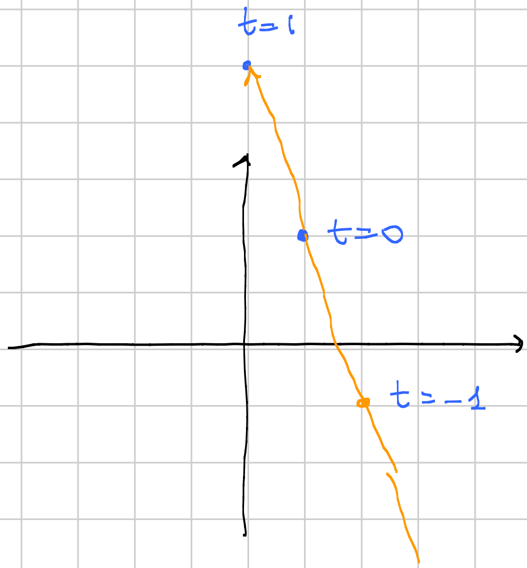
Più che l'equazione di una retta,
la rappr. parametrica indica
un possibile modo di percorrerla

<u>Esempio</u> Disegnare la retta

$$(1,2) + t\,(-1,3)$$

$t=0$ ⇝ $(1,2)$
$t=1$ ⇝ $(1,2) + (-1,3) = (0,5)$

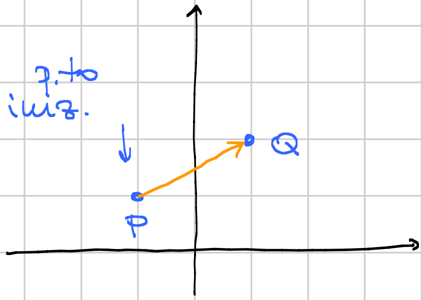
$t=-1$ ⇝ $(1,2) - 1\,(-1,3)$
$= (2,-1)$



Esempio Descrivere parametricamente la retta che passa per $\underset{P}{(-1,1)}$ e $\underset{Q}{(1,2)}$

$(-1,1) + t\,(2,1)$

$(-1,1)$: uno dei due punti $\qquad (2,1)$: $Q-P$



Esistono altre rappr. parametriche della stessa retta

$\underset{Q}{(1,2)} + t\,\underset{P-Q}{(-2,-1)}$: parto da Q e vado verso P

$(-1,1) + t\,(4,2)$: stessa della prima rappresentazione, solo percorsa a velocità doppia

Il coeff. angolare della retta è $\frac{1}{2}$.

— o — o —

Fatto generale Per la retta $(a,b) + t\,(c,d)$ il coeff. angolare è

$$\boxed{m = \frac{d}{c}}$$

se $c \neq 0$

(se mi sposto in orizz. di c, mi sposto in verticale di d)

Se $c = 0$, vuol dire che la retta è verticale

— o — o —

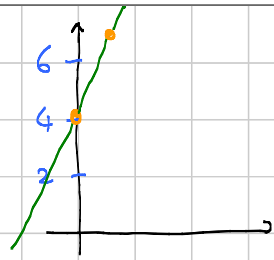
$\boxed{\text{Passaggio cartesiana} \rightsquigarrow \text{parametrica}}$

$y = 3x + 4$ $\rightsquigarrow$ calcolo 2 p.ti a scelta e poi come sopra

$x = 0 \rightsquigarrow (0,4) \quad P \qquad\qquad P + t\,(Q-P)$

$x = 1 \rightsquigarrow (1,7) \quad Q \qquad\qquad (0,4) + t\,(1,3)$

Passaggio parametrica ⇝ cartesiana



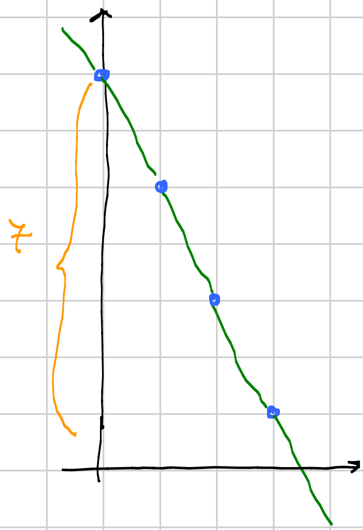
$(2,3) + t\,(1,-2)$

1° modo Sostituisco $t=0$ e $t=1$ (o altri 2 valori "comodi")
e trovo due pti
$(2,3)$ e $(3,1)$
Scrivo con formule da precorso la retta per quei due p.ti

2° modo Scrivo la param. come $(\underbrace{2+t}_{x}, \underbrace{3-2t}_{y})$

Dalla 1ª ottengo $2+t = x$ ⇝ $t = x-2$
Sostituisco nella 2ª : $y = 3-2t = 3-2(x-2) = 3-2x+4$

$$\boxed{y = 7-2x}$$

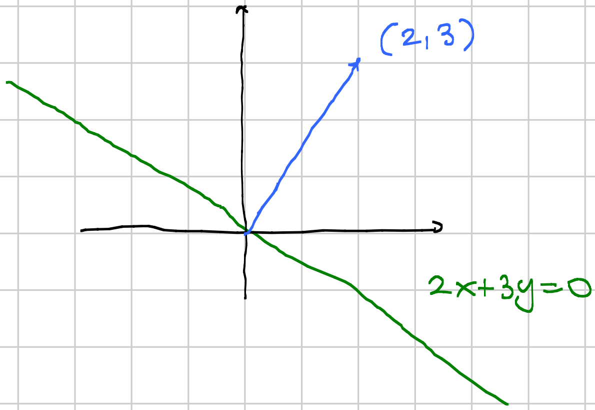


Rette passanti per l'origine

In cartesiana $y = mx$ ⇝ esplicita
$ax+by = 0$ ⇝ implicita
$\| $
$\langle (a,b), (x,y) \rangle = 0$ sono tutti i vettori (x,y) che sono perpend. ad (a,b)

Significato geom. di (a,b) nella implicita = vettore perpend. alla retta

Esempio : $2x+3y=0$



$y = -\frac{2}{3}x$

In forma parametrica diventa

$(0,0)+t(3,-2)$ oppure $(0,0)+t(-3,2)$

Fatto generale Una possibile parametrizzazione di $ax+by=0$ è

$(0,0)+t(-b,a)$ oppure $(0,0)+t(b,-a)$

N.B. La direzione è un vettore perpendicolare al vettore (a,b)

— o — o —

Fatto generale

- Forma esplicita : due rette con lo stesso coeff. ang. sono //
- Forma implicita : la retta $ax+by+c=0$ e la retta $ax+by=0$ sono parallele (se passo in esplicita ottengo lo stesso m)

Quindi in generale, data la retta $ax+by+c=0$, il vettore (a,b) è sempre un vettore $\perp$ alla direzione della retta

Esempio $5x+4y+3=0$

La direzione è $\perp$ a $(5,4)$, quindi una possibile direzione è $(-4,5)$.
Mettendo $y=0$ trovo $x=-\frac{3}{5}$, quindi la retta passa per $(-\frac{3}{5},0)$

e la forma parametrica è $\boxed{(-\frac{3}{5},0)+t(-4,5)}$

Esercizio Determinare l'angolo compreso fra la retta $\underbrace{y=2x}_{r_1}$ e la retta $\underbrace{x+5y=7}_{r_2}$

Scrivo r_1 ed r_2 in parametrica

r_1 : $(0,0)+t(1,2)$

r_2 : $(7,0)+t(-5,1)$

p.to a caso della retta

Basta calcolare l'angolo fra le due direzioni

$$\langle (1,2),(-5,1)\rangle = \|(1,2)\|\cdot\|(-5,1)\|\cdot\cos(\text{angolo})$$

$$-5+2$$

$$-3 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos(\text{angolo})$$

$$\cos(\text{angolo}) = \frac{-3}{\sqrt{130}}$$ $\leftarrow$ è il maggiore dei 2 angoli

(Disegnare le 2 rette per rendersi conto che è plausibile)

— o — o —

[Ultimo esempio corretto dopo video]

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 04

Note Title 02/10/2018

SISTEMI LINEARI

Un'equazione lineare è un'equazione in cui compaiono solo somme di multipli delle incognite (combinazioni lineari delle incognite)

<u>Esempio</u> $2x + 3y - 5z = 0$

incognite

Un sistema lineare è un sistema di equazioni lineari

<u>Esempi</u> $\begin{cases} 2x+3y-5z=0 \\ x+7z=0 \end{cases}$ 2 equ., 3 incognite

$\begin{cases} x+5y=6 \\ x-3y=4 \\ 5x+2y=7 \end{cases}$ 3 equ., 2 incognite

Notazione: a sx le comb. lin. delle incognite, a dx gli eventuali termini noti

<u>Classificazione</u> Un sistema si dice

- OMOGENEO se a dx ho tutti 0
- NON OMOGENEO altrimenti

<u>Esempio</u> $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=4 \end{cases} \rightsquigarrow x = y+4 \overset{1^a}{\rightsquigarrow} 2y+8+3y=5$

$5y = -3$

$y = -\frac{3}{5} \rightsquigarrow$ trovo x

Per un sistema lineare possono accadere 3 cose

1. Il sistema ha una soluzione unica
2. Il sistema non ha soluzioni (è impossibile)
3. Il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un certo numero di parametri

Esempio 1
$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$$

1^a equ. $-$ $3\cdot 2^a$ equ : $-x=-1 \rightsquigarrow x=1$
da cui facilmente anche $y=1$

$(x,y)=(1,1)$ è l'unica soluzione

Esempio 2
$$\begin{cases} 2x+4y=5 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Bovina sostituzione $2x=5-4y$ $\quad x=\frac{5}{2}-2y$

Sostituisco nella 2^a: $3\left(\frac{5}{2}-2y\right)+6y=7$

$$\frac{15}{2}-\cancel{6y}+\cancel{6y}=7 \rightsquigarrow \frac{15}{2}=7$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Più astuto: moltiplico la 1^a per 3 e la 2^a per 2

$$6x+12y=15$$
$$6x+12y=14$$

Da qui è più evidente l'impossibilità

Esempio 3
$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$$

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ $x = 3 - 2y$ $\rightsquigarrow$ nella 2^a: $2(3-2y)+4y = 6$

$$\cancel{6} - \cancel{4y} + \cancel{4y} = \cancel{6}$$

Tutte le volte che $x = 3-2y$ il sistema è risolto

Le soluzioni sono infinite del tipo $(3-2t, t)$
dove t è un parametro che può assumere ogni valore
Per $t=5$ ottengo $(x,y) = (-7, 5)$

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ La 2^a equazione è "il doppio della prima", quindi tutte le soluz. della prima sono soluz. della 2^a.

<u>Esempio 4</u>
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$

Ricopio la 1^a equazione, poi cerco di eliminare la x dalla 2^a

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 & \quad 1^a \text{ ricopiata} \\ \quad\;\; -5y + 7z = -2 & \quad 2^a - 2\cdot 1^a \end{cases}$$

A z posso dare un valore qualunque
$z = t$. Dalla 2^a ricavo

$$-5y = -2 - 7z = -2 - 7t \quad \text{da cui} \quad y = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}t$$

Dalla 1^a ricavo

$$x = 5 - 2y + 3z = 5 - \frac{4}{5} - \frac{14}{5}t + 3t = \frac{21}{5} + \frac{1}{5}t$$

Sol. generale è $\left(\frac{21}{5} + \frac{1}{5}t, \frac{2}{5} + \frac{7}{5}t, t\right)$

$$= \left(\frac{21}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) + t\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1\right)$$

Esempio 5
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 5 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & 1^a \text{ ricopiata} \\ -3y - 4z = 5 & 2^a - 1^a \\ -4y - 5z = 1 & 3^a - 2\cdot 1^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & 1^a \text{ ricopiata} \\ -3y - 4z = 5 & 2^a \text{ ricopiata} \\ z = -17 & 3\cdot 3^a - 4\cdot 2^a \end{cases}$$

$$3(-4y-5z) - 4(-3y-4z) = \cancel{-12y} - 15z + \cancel{12y} + 16z = z$$

Dalla 3^a so che $z = -17$. Sostituisco nella 2^a e trovo

$$-3y = 5 + 4z = 5 - 68 = -63 \qquad y = +21$$

Dalla 1^a $\quad x = -2y - 3z \quad$ e lo trovo

— o — o —

Se riesco a portare un sistema nella forma A SCALA, allora poi risolvo facilmente partendo dal basso.

— o — o —

Oss. Il primo passaggio fatto (ricopio la 1^a e elimino la x sotto) è equiv. a ricavare x dalla prima e sostituire nelle altre)

Il secondo passaggio è equivalente a ricavare y dalla 2^a e sostituire nella 3^a.

— o — o —

Esempio 6
$$\begin{cases} 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + 3z = 1 \\ x + z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 2 & 1^a \text{ ricopiata} \\ 2y + 3z = 1 & 2^a \text{ ricopiata} \\ -y + 2z = 3 & 3^a - 1^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + 3z = 1 \\ 7z = 7 & 2^a + 2 \cdot 3^a \end{cases}$$

$z = 1 \qquad 2y = 1 - 3z = -2 \rightsquigarrow y = -1$

$x = 2 - y + z = 4$

$$(x, y, z) = \boxed{(4, -1, 1)}$$

La verifica costa 30 secondi !!!

Esempio 7
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Dalla 3^a ricavo $z = 3$. Dalla 1^a ottengo $x = 1 + 2z - 3y$
$= 7 - 3y$

Il sistema ha infinite soluzioni e posso fissare come parametro y

$y = t, \quad z = 3, \quad x = 7 - 3t$

La soluzione generale è $(x, y, z) = (7 - 3t, t, 3)$
$= (7, 0, 3) + t(-3, 1, 0)$

Oss. La variabile libera è legata alla presenza di un "gradino da 2" nella forma a scala.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 05

Titolo nota 02/10/2018

Algoritmo di GAUSS (o GAUSS – JORDAN)

Matrice associata ad un sistema

Esempio
$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y = 6 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

coeff. delle variabili — termini noti

Invece di lavorare sul sistema, lavoro direttamente sulla tabella di numeri.

"Lavorare alla Gauss" vuol dire fare 2 tipi di operazioni

- Scambio di 2 righe
- Sostituire una riga R_j con $aR_j + bR_i$

  Di questa seconda operazione ci sono due versioni
  → versione ultraortodossa : per forza $a = 1$
  → versione permissiva : basta $a \neq 0$

Obiettivo: portare la matrice in forma "a scala"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ -3y + 2z &= -4 \end{aligned}$$

Fisso $z = t$. Ottengo $+3y = +4 + 2z$

$$y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}z = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t$$

Dalla 1ª equ. trovo x in funzione di t

Le operazioni alla Gauss non alterano le sol. di un sistema

$\boxed{\text{Dim}}$ $\begin{matrix} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} R_j = 0 \\ R_i = 0 \end{matrix}$

2ª operazione $\begin{matrix} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} R_i = 0 \\ aR_j + bR_i = 0 \end{matrix}$ (riga ricopiata)

Se è vero a sx, allora banalmente è vero a dx
Se è vero a dx, allora è vero a sx.
Infatti, se $R_i = 0$ e $aR_j + bR_i = 0$, allora per forza $aR_j = 0$
ma essendo $a \neq 0$, per forza $R_j = 0$.

— o — o —

$\boxed{\text{Matrice a scala}}$ Tutte le righe sono del tipo

$$\underbrace{0\,0 \ldots 0\,0}_{\text{zeri iniziali}} \quad \underset{\text{numero } \neq 0}{*} \quad \underbrace{* * * *}_{\text{altra roba, magari anche nulla}}$$

Nella prima riga possono non essere zeri iniziali.
Le ultime righe possono essere solo zeri
In ogni riga c'è almeno uno zero iniziale in più rispetto alla riga precedente (tranne con le righe di tutti zeri al fondo)

Il tizio non nullo dopo gli zeri iniziali si chiama $\boxed{\text{PIVOT}}$ della riga.

$\boxed{\text{Fatto fondamentale}}$ Lavorando alla Gauss, posso portare ogni matrice nella forma a scala.
Una volta che la matrice è a scala, risolvo partendo dal basso.

SISTEMI E MATRICI A SCALA

1. Un sistema non ha soluzione se mi ritrovo una riga con il PIVOT in fondo a dx
2. Un sistema ha sol. unica se "tutti i gradini sono da 1". Questo è possibile, ma non garantito, solo se il numero delle eq. coincide con quello delle incognite
3. Un sistema ha ∞ sol. se ci sono dei gradini da + di 2. In questo caso posso assegnare a piacere le variabili nelle cui colonne non compaiono i pivot.

Esempio 1

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 5 \\ 3z = 1 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{2}(5 - z) = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

$y = t$ libero

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{3}, t, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) + t\,(0, 1, 0)$$

Esempio 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & w \end{array} \end{array}$$

y e w sono variabili libere

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + w = 0 \\ 3z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$z = \frac{1 - 5w}{3} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}w$$

$$x = \frac{1}{2}(-2y - z - w) = -y - \frac{z}{2} - \frac{w}{2}$$

$$= -y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}w\right) - \frac{w}{2}$$

$$x = -y - \frac{1}{6} + \frac{5}{6}w - \frac{1}{2}w = -y - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}w$$

Posso assegnare liberamente $y = t$ e $w = s$ e ottengo

$$(x,y,z,w) = \left(-\frac{1}{6} - t + \frac{1}{3}s,\ t,\ \frac{1}{3} - \frac{5}{3}s,\ s\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + t(-1,1,0,0) + s\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{5}{3}, 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + t(-1,1,0,0) + s\,\underbrace{(1,0,-5,3)}$$

posso farlo perché i multipli di un certo v sono gli stessi di $3v$

— o — o —

Variante di JORDAN all'algoritmo di Gauss.
Lavorando dal basso, dopo aver ridotto a scala possiamo mettere degli 0 sopra tutti i pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se non voglio essere ultraortodosso, posso anche passare a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$1^a - 3^a \rightsquigarrow x = 2$

$2 \cdot 2^a - 3 \cdot 3^a \rightsquigarrow y = \frac{7}{2}$

$\rightsquigarrow z = \frac{1}{2}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 06

Note Title 05/10/2018

MUTUA POSIZIONI DI DUE RETTE NEL PIANO

Date due rette r_1 ed r_2 nel piano, ci sono 3 possibità

- r_1 ed r_2 coincidono (l'intersezione sono ∞ punti)
- r_1 parallela ad r_2 (" è l'insieme $\emptyset$)
- r_1 ed r_2 incidenti (" è un unico p.to)

Nel 3° caso vorremmo : → trovare il p.to di intersezione
→ trovare gli angoli formati dalle rette

Stabilire mutua posizione = trovare le intersezioni
= risolvere sistema lineare

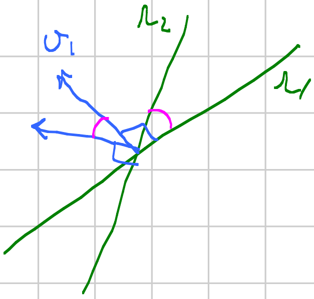
$\boxed{\text{Caso 1}}$ Se di r_1 ed r_2 conosco la forma cartesiana, allora per intersecarle metto a sistema

<u>Esempio</u> $r_1 : \ 2x+3y+5=0$
$r_2 : \ y = -x+2$

$$\begin{cases} 2x+3y+5=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y+5=0 \\ -y-9=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 11 \\ y = -9 \end{matrix}$$

Le rette sono incidenti e si intersecano in $(11,-9)$

Se voglio l'angolo tra le 2 rette, sarebbe comodo averle in forma parametrica (a quel punto calcolo angolo tra le direzioni)



Oss. Angolo tra 2 rette = angolo tra i vettori $\perp$ alle due direzioni

Ora un vettore perpendicolare alla direzione di una retta è il vettore (a,b) nella scrittura

$$ax + by + c = 0$$

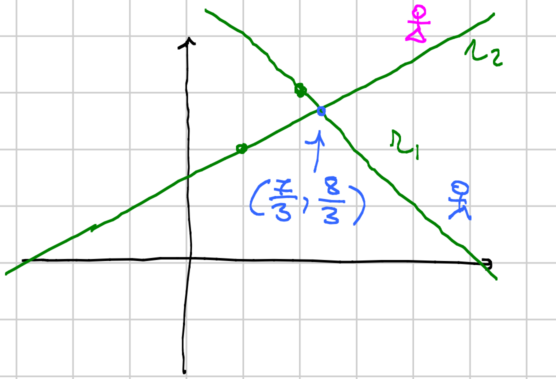
Nell' esempio le 2 equazioni sono

$$2x + 3y + 5 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_1 = (2,3)$$
$$x + y - 2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_2 = (1,1)$$

$$\cos(\text{angolo compreso}) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Mi è data la forma parametrica di r_1 ed r_2

$r_1 = (2,3) + t(-1,1)$ $\qquad$ $r_2 = (1,2) + t(2,1)$



1° modo: porto in cartesiana e lavoro lì

2° modo: scrivo le due rette usando parametri diversi

$r_1 : (2-t, 3+t)$ $\qquad$ $r_2 : (1+2t, 2+t)$ $\qquad$ $(1+2s, 2+s)$

$2-t = 1+2s$ prime componenti $\qquad$ $2s + t = 1$
$3+t = 2+s$ seconde componenti $\qquad$ $-s + t = -1$

$2s + t = 1$ $\qquad$ $2s = 1 - t = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $s = \frac{2}{3}$
$3t = -1$ $\qquad$ $t = -\frac{1}{3}$

Sostituendo i valori di t ed s nelle 2 param. trovo l'intersezione

$r_1 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$ $r_2 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$ ☺

Oss. Risolvere quel sistema vuol dire trovare due istanti di tempo t ed s, eventualm. diversi in cui 🚶 e 🚶 si trovano a passare per lo stesso punto.

Esercizio Vedere che viene uguale passando in cartesiane.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ Conosco r_1 in cartesiana e r_2 in parametrica

1° modo : le porto entrambe nella stessa forma

2° modo $r_1 : x - 2y + 3 = 0$ $r_2 = (5, 1) + t(-3, 2)$

$r_2 : (\underbrace{5 - 3t}_{= x}, \underbrace{1 + 2t}_{= y})$

Sostituisco nella 1ª eq. e trovo

$(5 - 3t) - 2(1 + 2t) + 3 = 0$

$5 - 3t - 2 - 4t + 3 = 0$ $7t = 6$ $t = \frac{6}{7}$

Sostituisco t nella r_2 e trovo x e y ⇝ verifico che risolvano r_1

—o—o—

Esercizio Trovare b in modo che

$r_1 : x - y + 3 = 0$

$r_2 : (-1, 3) + t(1, b)$ ⇝ $(-1 + t, 3 + bt)$

siano parallele

$-1 + t - (3 + bt) + 3 = 0$ ⇝ $-1 + t - \cancel{3} - bt + \cancel{3} = 0$ ⇝ $\boxed{b = 1}$

Altro modo di fare lo stesso esercizio:
→ direzione di r_2 : $(1, b)$
→ direzione di r_1 : $(1, 1)$ (dedotto dalla implicita: vedi lezione 3?)

Due rette sono // in forma parametrica se e solo se le loro direzioni sono l'una multipla dell'altra.

— o — o —

$\boxed{\text{RETTE NELLO SPAZIO}}$ ⇝ Si trattano bene in parametrica

- Retta per l'origine : sono tutti i multipli di 1 vettore dato

$$\boxed{t\vec{v}} \quad \text{con } \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

Esempio $\quad t\,(5, 1, -2) = (5t, t, -2t)$

- Retta per un p.to qualunque : basta cambiare il p.to di partenza

Esempio $\quad (1, 0, 2) + t\,(5, -1, 6) = (1 + 5t, -t, 2 + 6t)$

In generale sarà del tipo

$$\boxed{\underset{\uparrow\ \text{p.to partenza}}{\vec{w}} + t\underset{\uparrow\ \text{Direzione}}{\vec{v}}} \qquad \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

Esercizio Scrivere la retta dello spazio passante per $\underset{P}{(5, 1, -3)}$ e $\underset{Q}{(2, 4, -3)}$

$$P + t(Q - P) = (5, 1, -3) + t\,(-3, 3, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l}(5, 1, -3) + t\,(-1, 1, 0) \\ (2, 4, -3) + t\,(-1, 1, 0)\end{array}\right\} \text{vanno bene uguale}$$

Mutua posizione di 2 rette nello spazio

Due rette r_1 ed r_2 possono essere
- coincidenti (infinite intersezioni)
- incidenti (intersezione unica)
- parallele (nessuna intersezione, direzioni "multiple")
- SGHEMBE (nessuna intersezione, direzioni completamente diverse)

Esempio $(2+t, -1, 3-t)$ $\qquad (2,1,-1)+t(5,1,3)$

$(2,-1,3)+t(1,0,-1) \qquad (2+5t, 1+t, -1+3t)$

$$\begin{array}{lll} 2+t = 2+5s & 5s-t=0 & t=-10 \\ -1 = 1+s & s=-2 & \leadsto s=-2 \\ 3-t = -1+3s & 3s+t=4 & t=10 \end{array}$$

NO: il sistema non ha soluzione

Le due rette sono sghembe

Esempio $r_1: (5-t, 2t, 1+3t) \qquad r_2: (t, -t, at)$

↓ passa per l'origine

Trovare (se esistono) i valori di a per cui risultano incidenti

$$\begin{cases} 5-t = s \\ 2t = -s \\ 1+3t = as \end{cases} \qquad \begin{array}{l} s+t=5 \\ s+2t=0 \\ as-3t=1 \end{array}$$

R_2-R_1: $\underbrace{t=-5 \quad s=10}$

↓

sostituisco nella 3ª e trovo

$10a+15=1$

$\leadsto 10a=-14 \leadsto a=-\frac{7}{5}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 07

Titolo nota 05/10/2018

PIANI NELLO SPAZIO → Forma cartesiana
→ Forma parametrica

Piani che passano per l'origine

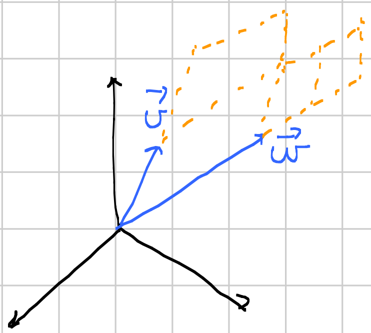
$(a,b,c) =$ vettore $\perp$ al piano

Eq. cartesiana : $\boxed{ax+by+cz=0}$

$$\langle (a,b,c), (x,y,z) \rangle$$

Quindi sto cercando tutti i vettori (x,y,z) dello spazio che sono perpendicolari al vettore (a,b,c) dato.
Ovviamente deve essere $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, cioè almeno una componente deve essere non nulla.

Eq. parametrica : $\boxed{t\vec{v} + s\vec{w}}$ dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori del piano che non sono l'uno multiplo dell'altro



In questo modo costruisco tutto il piano che passa per l'origine e per i punti corrisp. a $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esempio $\quad t(2,3,4) + s(-1,3,2)$

$$= (2t-s,\ 3t+3s,\ 4t+2s)$$

"Con un parametro descrivo una retta, con due parametri descrivo un piano"

Piani che non passano necessariamente per l'origine

Eq. cartesiana: $ax+by+cz+d=0$

passa per l'origine $\Leftrightarrow d=0$

Eq. parametrica: $\vec{u}+t\vec{v}+s\vec{w}$

p.to di partenza

due direzioni che "generano il piano"

— o — o —

Mutua posizione di due piani

- coincidenti (infinite intersezioni, dip. da 2 parametri)
- paralleli (nessuna intersezione
- incidenti (infinite intersezioni, dipendenti da 1 solo parametro)

Come interseco due piani?

Dipende dalla forma in cui li conosco

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Se conosco le 2 forme cartesiane, metto a sistema e risolvo ☺

Esempio $\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 3y-7z=-6 \end{cases}$ ⇝ z variabile libera

$z=t$; $3y=7z-6=7t-6$ ⇝ $y=\frac{7}{3}t-2$

$x=4+y-3z=4+\frac{7}{3}t-2-3t=2-\frac{2}{3}t$

Quindi il sistema ha infinite soluzioni

$$(x,y,z) = \left(2-\tfrac{2}{3}t,\ \tfrac{7}{3}t-2,\ t\right)$$

$$= (2,-2,0) + t\left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{3}, 1\right) \quad \text{MA ANCHE}$$

$$\boxed{(2,-2,0) + t(-2,7,3)}$$

Forma parametrica della retta intersezione dei due piani

Che angolo formano i due piani tra di loro?

È lo stesso angolo che formano i vettori $\perp$ ai piani, nel nostro caso

$$(1,-1,3) \qquad\qquad (2,1,-1)$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Conosco le due forme parametriche

<u>1º modo</u>: passo in cartesiana (ok, ma come si fa?)

<u>2º modo</u> meglio passare in cartesiana ☺

<u>Come passo tra le varie forme</u>?

$\boxed{\text{1º caso}}$: conosco cartesiana e voglio parametrica

Devo trovare tre punti del piano $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ e poi scrivo

$$\vec{P} + t(\vec{Q}-\vec{P}) + s(\vec{R}-\vec{P})$$

<u>Esempio</u> $\quad 2x+y-3z=7$

Trovo un p.to qualunque del piano : $(0,7,0)$
Quindi il piano sarà del tipo

$$(0,7,0)+t\vec{v}+s\vec{w}$$

devono essere $\perp$ al vettore $(2,1,-3)$ che sappiamo essere $\perp$ al piano

Non resta che trovare 2 vettori $\perp$ a $(2,1,-3)$ e che non siano uno multiplo dell'altro

$(0,3,1)=\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $\vec{w}=(3,0,2)$

Eq. parametrica : $\boxed{(0,7,0)+t\,(0,3,1)+s\,(3,0,2)}$

Potevo anche scegliere $\vec{w}=(-1,2,0)$

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Conosco la parametrica e voglio la cartesiana

Esempio $\qquad (5,1,0)+t\,(2,1,1)+s\,(-1,3,1)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ riscrivo la parametrica

$$(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{5+2t-s}},\ \underset{y}{\underset{\shortparallel}{1+t+3s}},\ \underset{z}{\underset{\shortparallel}{t+s}})$$

Il piano sarà $\quad ax+by+cz+d=0$. Sostituisco

$$a\,(5+2t-s)+b\,(1+t+3s)+c\,(t+s)+d=0$$

$$\begin{aligned}
2a+b+c&=0 &&(\text{coeff. di } t)\\
-a+3b+c&=0 &&(\text{coeff. di } s)\\
5a+b+d&=0 &&(\text{termine noto})
\end{aligned}$$

Risolvendo trovo a,b,c

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

d è param libero

d = parametro libero

$$+26c = 14d \rightsquigarrow c = \frac{7d}{13}$$

$$7b = -3c \rightsquigarrow b = -\frac{3}{7}c = -\frac{3}{13}d$$

$$2a = -b - c = \frac{3}{13}d - \frac{7}{13}d = -\frac{4}{13}d \rightsquigarrow a = -\frac{2}{13}d$$

Potendo scegliere d a piacimento, prendo $d = 13$ e trovo

$$\boxed{-2x - 3y + 7z + 13 = 0}$$

$\boxed{2^{\circ}\text{ modo}}$ Osservo che (a, b, c) deve essere $\perp$ ai due vettori che moltiplicano t e/o s, cioè

$$(2, 1, 1) \quad \text{e} \quad (-1, 3, 1)$$

Esiste una FORMULA MISTERIOSA che fornisce un vettore $\perp$ a due vettori dati

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)}$$

La applico ai 2 vettori dati

$(-2, -3, 7)$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x : 1\cdot 1 - 1\cdot 3 = -2 \\ y : 2\cdot 1 - 1\cdot(-1) = 3 \rightsquigarrow \text{cambio segno} : -3 \\ z : 2\cdot 3 - 1\cdot(-1) = 7 \end{array}$$

Trovati (a, b, c) sostituisco un p.to e trovo d.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 08

Note Title 09/10/2018

MATRICI

Def.
- Una matrice è una tabella rettangolare di numeri
- Indichiamo con $M_{n\times m}$ l'insieme delle matrici con n righe ed m colonne
- Se $A \in M_{n\times m}$ (di solito indichiamo le matrici con lettere maiuscole), allora l'elemento che sta nella riga i e colonna j si indica con

$$A_{i,j} \qquad \text{oppure} \qquad a_{i,j}$$

Esempio
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$$
righe colonne

$A_{1,2} = 5$ $\qquad A_{2,3} = 4$ $\qquad A_{3,2}$ NON HA SENSO

Casi speciali di matrice

① se $n = 1$, c'è una sola riga, e la matrice si chiama VETTORE RIGA

② Se $m = 1$ si chiama VETTORE COLONNA

③ Se $n = m = 1$, la matrice è un solo numero

$(1\ 5\ 7\ 9) \in M_{1\times 4}$ $\qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}$

vettore riga $\qquad$ vettore colonna

Semplici operazioni con le matrici

- SOMMA Se A e B sono matrici della stessa dimensione, allora somma e differenza si definiscono termine a termine

$$\boxed{(A \pm B)_{i,j} := A_{i,j} \pm B_{i,j}}$$

- PRODOTTO MATRICE · NUMERO Se $A \in M_{m \times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora λA si definisce moltiplicando tutto per λ

$$\boxed{(\lambda A)_{i,j} := \lambda A_{i,j}}$$

- MATRICE TRASPOSTA Se $A \in M_{m \times n}$, allora la trasposta è la matrice A^t ottenuta scambiando righe e colonne, dunque $A^t \in M_{n \times m}$

$$\boxed{(A^t)_{i,j} := A_{j,i}}$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Ad esempio $(A^t)_{1,2} = A_{2,1}$ e così via.

Esercizio Quando posso calcolare $A + A^t$?

Se e solo se A è quadrata, cioè $A \in M_{n \times n}$.
In caso contrario A e A^t hanno dim. diverse, e quindi non si possono sommare.

— o — o —

PRODOTTO DI MATRICI

Siano $A \in M_{n\times m}$ e $B \in M_{m\times k}$ due matrici (il numero di righe della seconda = numero di colonne della prima).

Allora posso definire il prodotto $AB \in M_{n\times k}$

tante righe come la prima — tante col. come la 2a

e si definisce "moltiplicando righe per colonne".

Esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 16 & 22 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}}_{AB}$$

Per ottenere l'elemento in posizione 1,1 ho moltiplicato, come fosse un prodotto scalare, la 1ª riga con la 1ª colonna

Formalmente, se $A \in M_{n\times m}$ e $B \in M_{m\times k}$, allora

$$\boxed{(AB)_{i,j} := \sum_{r=1}^{m} A_{i,r} \cdot B_{r,j}} \qquad \begin{matrix} i \in \{1,\dots,n\} \\ j \in \{1,\dots,k\} \end{matrix}$$

i-esima riga della 1ª matrice — j-esima colonna della seconda matrice

Buone notizie Il prodotto ha molte proprietà attese. Ad esempio, se le dimensioni sono compatibili

- è distributivo $(A+B)C = AC + BC$ (facile verifica)
  $A(B+C) = AB + AC$

- si distribuisce rispetto al prodotto per una costante

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$ (facile verifica)

- è associativo : $A(BC) = (AB)C$

[Dimostrazione fastidiosa, e segue dall'uguaglianza

$$(ABC)_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} A_{i,r} B_{r,s} C_{s,j}$$

in qualunque ordine io esegua le operazioni

se $A \in M_{n \times m}$, $B \in M_{m \times k}$, $C \in M_{k \times \ell}$]

$\boxed{\text{BRUTTA NOTIZIA}}$ Il prodotto di matrici NON è commutativo per due motivi

1 - Se posso calcolare AB, non è detto che possa calcolare BA

2 - Se anche potessi calcolarlo (ad esempio quando A e B sono matrici quadrate della stessa dim) può succedere che $AB \neq BA$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 17 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Domanda : quando posso fare $A \times A$

Se e solo se A è quadrata.

— o — o —

Caso speciale: se moltiplico una matrice per un vettore colonna ottengo un altro vettore colonna

$A \in M_{m\times n}$ $\quad B \in M_{n\times 1}$ $\quad \rightsquigarrow \quad AB \in M_{m\times 1}$

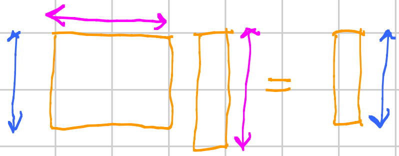
Esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 7 & 1 & 4\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix}2x+3y+5z\\ 7x+y+4z\end{pmatrix}$$

Fatto fondamentale

Ogni sistema lineare si può scrivere nella forma

$$\boxed{Ax = b}$$



dove

- $A \in M_{m\times n}$ è la matrice dei coefficienti
- $x \in M_{n\times 1}$ è il vettore colonna delle incognite
- $b \in M_{m\times 1}$ è il vettore colonna dei termini noti

Nota bene: il sistema ha m equazioni (cioè tante quante le righe di A e di b) ed n incognite (tante quante le colonne di A e le righe di x).

— o — o —

MATRICI SPECIALI

- Matrice nulla = matrice con tutti 0
- Matrice identità = matrice quadrata $n\times n$ con tutti 1 sulla diag. principale e 0 altrove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×2

<u>Proprietà della matrice identità</u>

Se $I \in M_{n \times n}$ è la matrice identità, allora

$$\boxed{I \cdot A = A \cdot I = A \qquad \forall A \in M_{n \times n}}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 09

Note Title 09/10/2018

Esercizio 1 Verifichiamo che se A ed I sono matrici $n \times n$ con I = matrice identità = matrice identica, allora

$$AI = IA = A$$

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

descrizione formale della matrice I

A questo punto

$$(AI)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} A_{i,r} \cdot I_{r,j} = A_{i,j}$$

l'unico che vale 1 è quello con $r = j$

$$(IA)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} I_{i,r} \cdot A_{r,j} = A_{i,j}$$

l'unico $\neq 0$ è quello con $r = i$

Esercizio 2 Siano $A \in M_{n \times m}$ e $B \in M_{m \times k}$.
Posso calcolare AB.
Per le trasposte vale $A^t \in M_{m \times n}$ e $B^t \in M_{k \times m}$
Posso sempre moltiplicare $B^t A^t$ e viene

$$\boxed{(AB)^t = B^t A^t}$$

Dim. $[(AB)^t]_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{r=1}^{m} A_{j,r} B_{r,i}$

$$= \sum_{r=1}^{m} B_{r,i} \cdot A_{j,r}$$

$$= \sum_{r=1}^{m} (B^t)_{i,r} (A^t)_{r,j} = (B^t \cdot A^t)_{i,j}$$

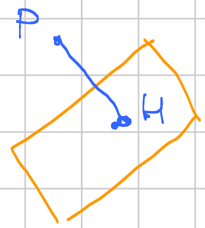
Indici corretti dopo video

— o — o —

Esercizio 3 Consideriamo il piano $2x+3y-z=4$
Consideriamo il p.to $P=(1,2,-1)$

- Scrivere l'equazione della retta passante per P e $\perp$ al piano

So che che il vettore $(2,3,-1)$ è $\perp$ al piano. Lo uso come vettore direzione e trovo



retta: $(1,2,-1)+t\,(2,3,-1)$

- Calcolare la proiezione di P sul piano.
La proiezione è il p.to H in cui la retta di prima interseca il piano

Devo fare intersezione retta/piano. Retta: $(1+2t,\ 2+3t,\ -1-t)$
e sostituisco nel piano

$$2x+3y-z=4 \rightsquigarrow 2(1+2t)+3(2+3t)-(-1-t)=4$$
$$2+4t+6+9t+1+t=4$$
$$14t=-5 \rightsquigarrow t=-\frac{5}{14}$$

Sostituendo il valore di t
nella parametrica trovo il punto: $\left(1-\frac{5}{7},\ 2-\frac{15}{14},\ -1+\frac{5}{14}\right)$

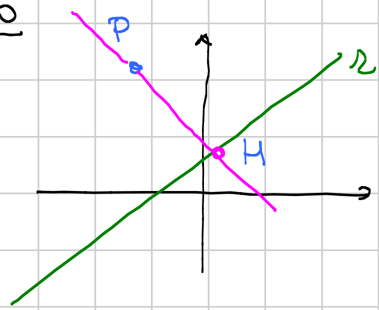
- Calcolare la distanza tra P ed il piano

Basta calcolare la norma di $P-H$.

- Dato $Q=(1,1,1)$, calcolare l'intersezione fra il piano e la retta PQ

retta PQ: $P+t\,(Q-P)$ e poi come sopra
$P+t\,(P-Q)$ andava bene uguale perché è la stessa retta percorsa al contrario.

Distanza di un p.to da una retta nel piano



Percorso: → scrivo retta per $P \perp$ ad r
→ interseco e trovo H
→ calcolo $\|P-H\|$

Se retta : $ax+by+c=0$
punto : (x_0,y_0)

⇝ conto ⇝ $$\boxed{\text{dist} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

N.B.: il denom. è di sicuro $\neq 0$

Distanza di un punto da un piano nello spazio

Piano : $ax+by+cz+d=0$ Punto : (x_0,y_0,z_0)

Strategia: → scrivo retta r per P e $\perp$ al piano

$$(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)$$

→ interseco retta e piano (come prima) e trovo H
→ calcolo $\|P-H\|$

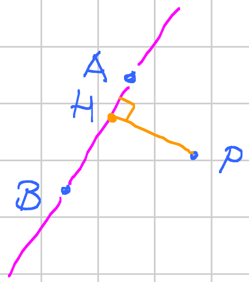
Facendo il conto trovo

$$\boxed{\text{dist} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

— o — o —

Distanza punto - retta nello spazio

Esercizio 4 $P = (1,0,2)$ retta passante per $A = (2,1,3)$ e $B = (-1,0,1)$



Scrivo la retta in parametrica

$$A + t(B-A) = (2,1,3) + t(-3,-1,-2)$$
$$= (2,1,3) + t(3,1,2)$$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Scrivo l'eq. del piano che passa per P ed è $\perp$ alla retta

Il piano sarà $\underbrace{3x + y + 2z}_{\text{usato direzione retta}} = d$

Trovo d sostituendo P: $3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 7 = d$

L'eq. del piano è $\boxed{3x + y + 2z = 7}$

Interseco piano e retta e trovo H

$$3(2+3t) + (1+t) + 2(3+2t) = 7 \rightsquigarrow 6 + 9t + \cancel{1} + t + \cancel{6} + 4t = \cancel{7}$$

$\rightsquigarrow 14t = -6 \rightsquigarrow t = -\frac{3}{7} \rightsquigarrow$ sostituisco nella parametrica e ho H.

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Considero un punto Q variabile sulla retta

$$Q = (2+3t, 1+t, 3+2t)$$

Scrivo il vettore $Q - P = (1+3t, 1+t, 1+2t)$

Impongo che $Q-P$ sia $\perp$ alla direzione della retta, cioè $(3,1,2)$ $\rightsquigarrow$ dovrebbe venire H

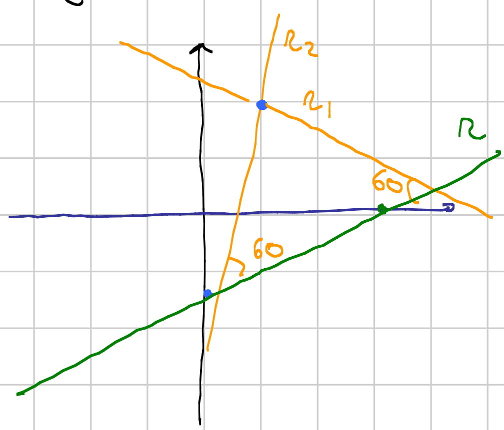
$$\langle (1+3t, 1+t, 1+2t), (3,1,2) \rangle = 0$$

$$3(1+3t) + (1+t) + 2(1+2t) = 0$$
$$3+9t+1+t+2+4t = 0 \rightsquigarrow 14t = -6 \rightsquigarrow t = -\frac{3}{7}$$

Concludo facendo la distanza di P da H.

— o — o —

Esercizio 5 Consideriamo nel piano la retta $x-2y=3$. Scrivere le due rette per $(1,2)$ che formano con la retta data un angolo di $60°$.



$r: x-2y=3 \rightsquigarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

Direzione di r: $(2,1)$

Sia (a,b) la direzione di r_1 ed r_2

Allora

angolo compreso $= 60°$

cioè $\cos = \frac{1}{2}$

$$\frac{\langle (a,b),(2,1)\rangle}{\|(a,b)\| \cdot \|(2,1)\|} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{2a+b}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow 4(2a+b)^2 = 5(a^2+b^2) \rightsquigarrow 16a^2+4b^2+16ab = 5a^2+5b^2$$

$$\rightsquigarrow 11a^2+16ab-b^2 = 0 \rightsquigarrow a = \frac{-8b \pm \sqrt{64b^2+11b^2}}{11}$$
$$= \left(\frac{-8 \pm \sqrt{75}}{11}\right) b$$
$$= \left(\frac{-8 \pm 5\sqrt{3}}{11}\right) b$$

Posso porre tranquillamente $b = 11$ e ottengo $a = -8 \pm 5\sqrt{3}$

Quindi in parametrica le 2 rette richieste sono

$$(1,2) + t\,(-8 \pm 5\sqrt{3},\ 11)$$

Dalla parametrica trovo facilmente la cartesiana.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 10

Note Title 09/10/2018

<u>Esercizio</u> Rette per $(1,2)$ che formano angolo di $60°$ con la retta $x-2y=3$

Lavoro in cartesiana. Le rette richieste hanno eq. $y=mx+n$ (più eventualmente quella verticale).
Calcolo l'angolo tra le 2 rette

$x-2y-3=0$

$-mx+y-n=0$

Basta fare l'angolo tra $\underbrace{(1,-2) \text{ e } (-m,1)}_{\text{vettori } \perp \text{ alle direzioni}}$

$$\frac{\langle (1,-2),(-m,1)\rangle}{\|(1,-2)\|\cdot\|(-m,1)\|} = \frac{-m-2}{\sqrt{5}\,\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{2}$$

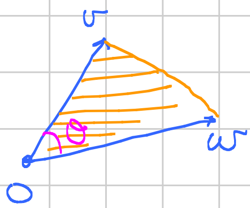
$\rightsquigarrow 4(m+2)^2 = 5(m^2+1) \rightsquigarrow 4m^2+16m+16 = 5m^2+5$

$\rightsquigarrow m^2-16m-11=0 \rightsquigarrow m = 8\pm\sqrt{75} = 8\pm 5\sqrt{3}$

— o — o —

$\boxed{\text{AREA DEL TRIANGOLO}}$ Direttamente nello spazio.

Calcolare l'area del triangolo passante per l'origine e per i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$



$\boxed{\text{1° modo}}$ Uso formula trigonometrica

Area $= \frac{1}{2}$ lato · lato · sin (angolo compreso)

$$= \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\|\cdot \sin\theta = \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Usando la formula per $\cos\theta$ otteniamo

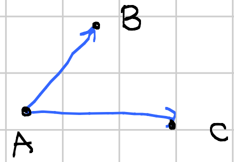
$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\|\sqrt{1-\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2}}$$

Facendo il denominatore otteniamo

$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{\|v\|^2\cdot\|w\|^2-\langle v,w\rangle^2}}$$

Formula valida in ogni dimensione

Cosa succede voglio l'area del triangolo per 3 p.ti dati A, B, C



Basta applicare la formula con

$v = B-A$ e $w = C-A$

oppure con

$v = B-C$ e $w = A-C$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\boxed{\text{FUNZIONA SOLO IN } \mathbb{R}^3}$

Partendo da v e w, calcolo il vettore $\perp$ usando la formula misteriosa.

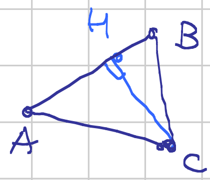
$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (v_2w_3-v_3w_2,\ v_3w_1-v_1w_3,\ v_1w_2-v_2w_1)$$

Ora succede miracolosamente che

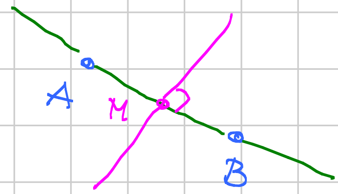
$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|\text{vettore ottenuto}\|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(v_2w_3-v_3w_2)^2+(\ldots)^2+(\ldots)^2}$$

Verifiche bovine possibili
① Il vettore ottenuto con la formula è $\perp$ a v e w
② Sommando i quadrati ottengo quello che c'era sotto la radice nella 1ª formula, e cioè

$$(v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2)-(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)^2$$



$\boxed{\text{3° modo}}$ Calcolo base ed altezza.
Se scelgo AB come base, allora
$AB = \|A-B\| = \|B-A\|$
Per calcolare l'altezza basta trovare la distanza di C dalla retta AB, problema che abbiamo già risolto



Esercizio Calcolare l'asse del segmento di estremi $(2,3)$ e $(12,17)$

$$M = \frac{(2,3)+(12,17)}{2} = (7,10)$$

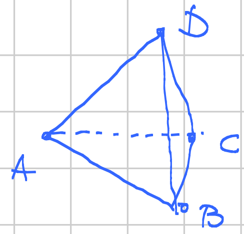
Direzione retta AB : $B-A = (10,14)$
Direzione asse : $(-14,10)$

Asse : $(7,10)+t(-7,5)$ $\rightsquigarrow$ se voglio passo in cartesiana

Se voglio il centro della circ. circoscritta ad un triangolo

Basta intersecare 2 assi qualunque

Esercizio In $\mathbb{R}^3$, calcolare il volume del tetraedro che ha 4 vertici A, B, C, D dati



Volume $= \frac{1}{3}$ Area base $\cdot$ altezza

Area base = area triangolo ABC ☺

altezza = distanza di D dal piano passante per A, B, C ☺

Esercizio Scrivere l'equazione della sfera con centro in $\underbrace{(1,3,2)}_{C}$ e passante per $\underbrace{(-1,1,3)}_{P}$

Il raggio è la distanza, cioè $\|C-P\|$

$$R = \|(2,2,-1)\| = 3$$

La sfera è costituita da tutti i p.ti (x,y,z) la cui distanza da C è $= 3$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2} = 3$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 = 9$$

In generale $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2}$

dove R = raggio e (x_0, y_0, z_0) = centro

Nell' esercizio precedente, calcolare l' eq. del piano tangente alla sfera e passante per P

È il piano per P perpendicolare al raggio $C-P$

Sappiamo che $C-P = (2,2,-1)$ e $P = (-1,1,3)$

$2x+2y-z=d \rightsquigarrow$ sostituisco P : $-2+2-3=-3=d$

$$\boxed{2x+2y-z+3=0}$$

Esercizio Consideriamo la retta $(1,0,2)+t(1,1,-1) := r$
Scrivere l' eq. del piano che passa per $P=(5,1,4)$ e contiene la retta

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Trovo H sulla retta in modo che $PH \perp (1,1,-1)$ e poi uso i vettori $(1,1,-1)$ e $P-H$ per generare il piano

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Trovo 2 p.ti A e B sulla retta e poi faccio piano per A, B, P

$A = \underset{\uparrow\, t=0}{(1,0,2)}$ $\quad B = \underset{\uparrow\, t=1}{(2,1,1)}$ $\quad P = (5,1,4)$

In parametrica il piano è $\underset{P}{(5,1,4)} + t\underset{P-A}{(4,1,2)} + s\underset{P-B}{\overset{(1,0,1)}{(3,0,3)}}$

Per andare in cartesiana

$\rightsquigarrow$ trovo a,b,c a partire da $(4,1,2)$ e $(3,0,3)$ con la formula misteriosa
$\rightsquigarrow$ trovo d imponendo il passaggio per P (o per A o per B).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 11

Note Title 12/10/2018

STRUTTURE ALGEBRICHE

- gruppo
- gruppo commutativo
- anello
- corpo
- $\boxed{\text{campo}}$
- modulo
- $\boxed{\text{spazio vettoriale}}$

<u>Def.</u> (Campo) Un campo è un insieme $\mathbb{K}$ su cui sono definite due operazioni, somma e moltiplicazione (operazioni binarie: prendono in INPUT due elementi e ne restituiscono uno).
Somma e prodotto hanno le proprietà "classiche"

(S1) $a+b=b+a$
(S2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
(S3) $\exists\, 0\in\mathbb{K}$ t.c. $a+0=a$
(S4) $\forall a\in\mathbb{K}\ \exists\, \underset{\uparrow\, -a}{b}\in\mathbb{K}$ t.c. $a+b=0$

(P1) $a\cdot b=b\cdot a$
(P2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
(P3) $\exists\, 1\in\mathbb{K}$ t.c. $a\cdot 1=a$
(P4) $\forall a\in\mathbb{K}$ con $a\neq 0$
$\exists\, b\in\mathbb{K}$ t.c. $a\cdot \underset{\uparrow\, \frac{1}{a}}{b}=1$

(D) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

<u>Esempi</u> Sono dei campi i seguenti insiemi

$\boxed{\mathbb{R}}$ ↑ numeri reali

$\mathbb{Q}$ ↑ razionali (frazioni)

$\mathbb{C}$ ↑ numeri complessi

Non sono campi
- $\mathbb{Z}$ (numeri interi) ⇝ manca (P4)
- $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ ⇝ manca (S4) e (P4)
- $\mathbb{R}[x]$ = polinomi ⇝ manca (P4)

Def. (spazio vettoriale) Sia $\mathbb{K}$ un campo (penseremo sempre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)
Uno spazio vettoriale è un insieme V in cui sono definite due operazioni

- somma : $V \times V \to V$ (input: 2 vettori, output: 1 vettore)
- prodotto per uno scalare : $\mathbb{K} \times V \to V$ (input: 1 numero e 1 vettore; output: 1 vettore)

che hanno le seguenti 8 proprietà

(S1) $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$
(S2) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
(S3) $\exists\, \vec{0} \in V$ t.c. $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$
(S4) $\forall \vec{u} \in V\ \exists\, \vec{v} \in V$ t.c. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$

quantificare per esercizio

(P1) $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ $\quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall b \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{v} \in V$
(P2) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ $\quad \forall \vec{v} \in V$
(D1) $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v}+a\vec{w}$ $\quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{v} \in V \quad \forall \vec{w} \in V$
(D2) $(a+b)\cdot\vec{v} = a\vec{v}+b\vec{v}$ $\quad \forall a \in \mathbb{K} \quad \forall b \in \mathbb{K} \quad \forall \vec{v} \in V$

Esempio 1 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\qquad V = \mathbb{R}^n$
Le operazioni sono
→ sommare 2 vettori (componente per componente)
→ moltiplicare 1 vettore per un numero (molt. tutte le comp.)

Le verifiche sono tutte quasi ovvie. Per la cronaca
$\vec{0} = (0, \dots, 0)$
Dato $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$, allora $-\vec{v} = (-x_1, \dots, -x_n)$

Esempio 2 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\qquad V = \mathbb{R}[x]$ = insieme di tutti i polinomi
Le operazioni sono
→ sommare 2 polinomi
→ moltiplicare un polinomio per un numero
Il prodotto tra 2 polinomi qui non entra.

Esempio 3 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}_{\geq 4}[x]$ = polinomi di grado ≥ 4
Operazioni come prima

NON è uno sp. vett. : ad esempio
$p(x) = x^4 + 2x^2 \in V$ $q(x) = -x^4 + x^3 \in V$
Tuttavia $p(x) + q(x) \notin V$, quindi la somma non è ben definita

Esempio 4 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ = pol. di grado ≤ 4

Questo è uno sp. vett. rispetto alle solite proprietà

Esempio 5 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = M_{m \times n}$ = matrici $m \times n$
Le operazioni sono
→ sommare 2 matrici
→ moltiplicare una matrice per un numero
In questo caso $\vec{0}$ = matrice di tutti zeri
$-\vec{v}$ = matrice con tutti i segni cambiati

Anche in questo esempio non consideriamo il prodotto tra matrici

Esempio 6 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ V = funzioni $f : \underbrace{(a,b)}_{\text{intervallo dato}} \to \mathbb{R}$

Operazioni:
→ sommare 2 funzioni
→ moltiplicare una funz. per un numero

— o — o —

Def. (Sottospazio vettoriale)

Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia V uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$, sia $W \subseteq V$.
Si dice che W è un sottosp. vettoriale se ha 2 proprietà

(i) è chiuso rispetto alla somma

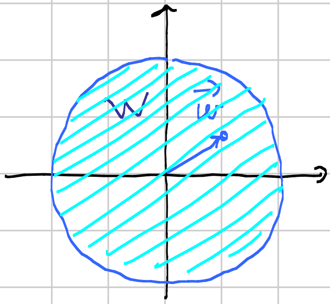
$$\boxed{\vec{w}_1 \in W \text{ e } \vec{w}_2 \in W \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W}$$

(ii) è chiuso rispetto al prodotto per scalari

$$\boxed{a \in \mathbb{K} \text{ e } \vec{w} \in W \Rightarrow a\vec{w} \in W}$$

Esempio 1 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^2$ $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

NON è un sottospazio vettoriale
Ad esempio, non vale (ii)
il $\vec{w}$ in figura, se moltiplicato
per $a \in \mathbb{R}$ abbastanza grande
"esce fuori"



Esempio 2 $\mathbb{K}$ e V come sopra $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

W è chiuso risp. alla somma
(se prendo due vettori con $y \geq 0$ e
li sommo, anche la somma ha $y \geq 0$)

W è chiuso risp. prodotto per numeri $a > 0$,
ma non è chiuso risp. prod. per numeri $a < 0$

NON è un s.sp. vett.

Esempio 3 $\mathbb{K}$ e V come sopra

$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y=0\}$

Questo è un s.sp. vett. Infatti

(i) è chiuso risp. somma

$\vec{w}_1 = (x_1, y_1) \in W \qquad x_1 + 3y_1 = 0$

$\vec{w}_2 = (x_2, y_2) \in W \qquad x_2 + 3y_2 = 0$

La somma $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in W$?

Sì! $(x_1+x_2) + 3(y_1+y_2) = 0$ (somma delle 2 rel. di sopra)

(ii) è chiuso risp. prodotto

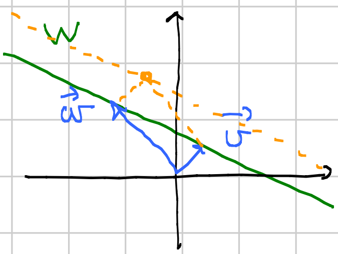
$\vec{w} = (x,y) \in W \qquad x+3y=0$

$a \in \mathbb{R}$

$a\vec{w} = (ax, ay) \in W$? Sì! $ax + 3ay = a(x+3y) = 0$ ☺

Esempio 4 $\mathbb{K}$ e V come sopra $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y=5\}$

NON è chiuso risp. alla somma!



$\vec{w}_1 = (x_1, y_1) \in W \qquad x_1 + 3y_1 = 5$

$\vec{w}_2 = (x_2, y_2) \in W \qquad x_2 + 3y_2 = 5$

$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$(x_1+x_2) + 3(y_1+y_2) = 10$ (e non 5)

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 12

Note Title 12/10/2018

→ Combinazione lineare
→ SPAN
→ Generatori
→ Vettori linearmente dipendenti / indipendenti
→ Basi di uno spazio vettoriale

Setting generale: $\mathbb{K}$ campo e V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

<u>Def.</u> (Comb. lineare)
Sia $n \geq 1$ un numero intero
Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori (elementi di V)
Siano $c_1, \dots, c_n$ numeri (elementi di $\mathbb{K}$)
Allora

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

è una comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$ con coeff. $c_1, \dots, c_n$.

<u>Esempio</u> $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $v = (2,3,4)$, $n = 1$

Usando solo v le sue comb. lineari sono del tipo cv dove $c \in \mathbb{R}$
= retta che passa per l'origine e ha direzione data da v.

$\vec{v} = (2,3,4)$ e $\vec{w} = (-1,0,-2)$. Le loro comb. lin.
sono del tipo

$$a\vec{v} + b\vec{w}$$

= piano per l'origine che contiene $\vec{v}$ e $\vec{w}$

— o — o —

Def. (Span) Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ vettori dati in V.
Si definisce
$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$
l'insieme di tutte le comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ al variare dei coefficienti, cioè

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m) = \{ c_1 v_1 + \dots + c_m v_m : (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \}$$

Prop. $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$ è un s.sp. vettoriale di V.

Dim. Devo fare 2 verifiche

- è chiuso rispetto alla somma, cioè la somma di 2 comb. lin. è ancora una comb. lin.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_m \to 1^a \text{ comb. lin.}$$
$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_m \to 2^a \text{ comb. lin.}$$

Se le sommo, ottengo

$$(a_1+b_1) v_1 + (a_2+b_2) v_2 + \dots + (a_n+b_n) v_m \to \text{comb. lin.}$$

- è chiuso risp. al prodotto per un numero, cioè una comb. lin. moltiplicata per un numero viene ancora una comb. lin.

$$a(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_m) = (ac_1) v_1 + (ac_2) v_2 + \dots + (ac_m) v_m$$

— o — o —

Esempio In $\mathbb{R}^3$

- $\text{Span}((2,3,4)) =$ retta di direzione $(2,3,4)$
- $\text{Span}((2,3,4), (-1,2,1)) =$ piano per l'origine che contiene i 2 vettori

Def. Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori di V
Si dice che $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono GENERATORI di V se ogni elemento $v \in V$ si può scrivere come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$.
Formalmente

$$\forall v \in V \ \exists (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \ \text{ t.c. } \ v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

Def. (Dipendenza / indipendenza lineare)
Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori di V

- Si dice che $v_1, \dots, v_m$ sono $\boxed{\text{linearmente dipendenti}}$ se esiste una loro comb. lineare che viene il vettore nullo ma con almeno un coeff. $\neq 0$

- Si dice che $v_1, \dots, v_m$ sono $\boxed{\text{linearmente indipendenti}}$ se la loro unica comb. lin. che viene il vettore nullo è quella con tutti i coeff. $= 0$. Formalmente:

$$\boxed{c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_m \vec{v}_m = \underset{\text{0 di } V}{\vec{0}} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_m = \underset{\text{0 di } \mathbb{K}}{0}}$$

Def. (BASE di uno sp. vettoriale)
Si dice che $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono una base di V se

(i) sono generatori
(ii) sono lin. indipendenti

— o — o —

Esempio 1 $\quad V = \mathbb{R}^3 \quad e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$

Dico che $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ che si chiama BASE CANONICA.
Per dim. che è una base devo fare 2 verifiche

(1) sono generatori, cioè che ogni $v \in \mathbb{R}^3$ è comb. lin. di e_1, e_2, e_3

$$\vec{v} = (x, y, z) = \underset{\substack{\uparrow \\ c_1}}{x} \underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ c_2}}{y} \underbrace{(0,1,0)}_{e_2} + \underset{\substack{\uparrow \\ c_3}}{z} \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$$

(2) sono linearmente indipendenti, cioè che l'unica loro comb. lin. che viene 0 è quella con tutti coeff. nulli

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = (c_1, c_2, c_3) = \text{vettore nullo} \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi di grado ≤ 3.

Dico che una base è $\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}, \underset{v_4}{x^3}\}$ (4 elementi di V)

- Sono generatori perché ogni $p(x)$ di grado ≤ 3 è del tipo

$$p(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d = \text{comb. lin. di } v_1, v_2, v_3, v_4$$

- sono lin. indip. perché l'unico modo di far venire $\vec{0}$, cioè il polinomio nullo, è usare $a = b = c = d = 0$.

Esempio 3 $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (1,2,3)$ $v_3 = (0,-1,1)$

Provo a verificare che sono una base

- Sono generatori? Dato un generico vettore (A, B, C), cerco coeff. x, y, z numeri t.c.

$$x v_1 + y v_2 + z v_3 = (A, B, C)$$

$$(x + y, 2y - z, x + 3y + z) = (A, B, C)$$

Devo risolvere un sistema lineare

$$\begin{cases} x+y = A \\ 2y - z = B \\ x+3y+z = C \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 2 & -1 & B \\ 1 & 3 & 1 & C \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 2 & -1 & B \\ 0 & 2 & 1 & C-A \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 2 & -1 & B \\ 0 & 0 & 2 & C-A-B \end{array}\right)$$

La forma a scala è fatta bene, cioè ogni riga ha il PIVOT e non ci sono gradini di spessore ≥ 2, quindi il sistema ha sempre soluzione.

- Sono lin. indipendenti? Devo imporre

$$x v_1 + y v_2 + z v_3 = \text{vettore nullo}$$

e sperare che questo implichi che $x = y = z = 0$.

Mi ritrovo lo stesso sistema con $A = B = C = 0$ e dalla forma a scala ottenuta deduco che per forza $x = y = z = 0$.

— o — o —

<u>Teorema</u> (Proprietà delle basi)
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in MODO UNICO come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Che ogni v si scrive è conseguenza del fatto che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori.
Supponiamo ci sia $v \in V$ che si scrive in 2 modi

$$\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n}_{v} = \underbrace{b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n}_{v}$$

Portando tutto a sx e riorganizzando trovo

$$(a_1-b_1)v_1+(a_2-b_2)v_2+\dots+(a_n-b_n)v_n=0$$

Ma essendo i v_i lin. indip., per forza deve essere

$$a_1-b_1=a_2-b_2=\dots=a_n-b_n=0$$

cioè $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \dots,\ a_n=b_n$.

— o — o —

Oss. Fissata una base, ogni elemento $v\in V$ lo posso pensare come n-upla di numeri

$v \rightsquigarrow$ coeff. della sua rappresentazione.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 13

Note Title 16/10/2018

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Ripasso definizioni Sia V uno sp. vettoriale su campo $\mathbb{K}$ $(=\mathbb{R})$

(1) I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono generatori di V se ogni $v \in V$ è comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$, cioè

$$\forall v \in V \quad \exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

cioè $\quad V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$

(2) I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono lin. indip. se

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dots = c_n = 0$$

(3) I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V se sono generatori e sono lin. indip.

Fatto fondamentale Se $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V, allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$.

Teorema 1 (Esistenza della base)

Sia V uno spazio vettoriale. Supponiamo che esista un insieme finito $v_1, \dots, v_n$ di generatori.
Allora esiste una base in V.

Teorema 2 (Proprietà delle basi)

Sia V uno spazio vettoriale che ammette una base.
Allora valgono questi fatti.

(1) Se $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori, allora posso ottenere una base eliminando qualcuno dei v_i.

(2) Se $v_1, \ldots, v_n$ sono lin. indip., allora posso ottenere una base aggiungendo qualche elemento.

(3) Due qualunque basi hanno lo stesso numero di elementi (questo numero si dice la dimensione di V)

(4) Sia n la dimensione di V. Allora ogni insieme di generatori con n elementi è una base di V.

(5) Sia n la dimensione di V. Allora ogni insieme di n vettori lin. indip. è una base di V.

Lemma Sia V uno spazio vettoriale.
Siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori lin. indip.
Siano $w_1, \ldots, w_n$ generatori.
Allora

- $m \leq n$
- Posso sostituire m elementi dei w_i con i v_i in modo da avere ancora dei generatori, cioè esistono $w_1, \ldots, w_m$ tali che

$$\{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_n\} \text{ sono ancora generatori.}$$

— o — o —

Dim. teorema (2)

(1) Siano $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dei generatori. Dico che un loro sottoinsieme è una base.
Considero tutti i possibili sottoinsiemi. Alcuni di questi saranno ancora generatori. Tra quelli che vanno bene, scelgo il sottoinsieme (o uno dei sottoinsiemi) che ha il minimo numero di elementi.

Sia $v_1, \dots, v_m$ questo sottoinsieme con il minimo numero. Dico che sono lin. indip.
Se non lo fossero, allora potrei scrivere

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

senza che tutti i coeff. siano nulli. Supponiamo $a_1 \neq 0$.
Allora dico che posso fare a meno di v_1, cioè $\{v_2, \dots, v_m\}$ sono ancora generatori.
Ricavo v_1:

$$a_1 v_1 = -a_2 v_2 - \dots - a_m v_m$$

$$\rightsquigarrow \quad v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m$$

e quindi se $v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$

$$= c_1 \left(-\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m \right) + \dots + c_m v_m$$

Quindi qualunque cosa che posso scrivere come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ la posso scrivere usando solo $v_2, \dots, v_m$. Questo è assurdo perché basterebbero $m-1$ elementi.

Questo dimostra che posso costruire una base per eliminazione e quindi dimostra anche l'esistenza di una base quando c'è numero finito di generatori.

(2) Siano $v_1, \dots, v_m$ degli elementi linearmente indip. Siano $w_1, \dots, w_n$ una base (e quindi in particolare dei generatori).
Per il lemma $m \leq n$ e posso sostituire m dei w_i con $v_1, \dots, v_m$ ottenendo ancora dei generatori.
Dico che sono una base. Questo sarà evidente dai punti successivi.

(3) Dimostro che tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.

Siano $v_1, \dots, v_m$ una base
Siano $w_1, \dots, w_n$ un'altra base

$v_1, \dots, v_m$ lin. indip. $\qquad w_1, \dots, w_n$ generatori

Per il lemma $\boxed{m \leq n}$

$w_1, \dots, w_n$ sono lin. indip $\qquad v_1, \dots, v_m$ generatori

Per il lemma $\boxed{n \leq m}$

(4) Ogni insieme di generatori con n elementi è una base
dim (V)

Se non lo fossero, per un p.to precedente potrei ottenere una base eliminando qualcuno. Ma allora avrei una base con meno elementi della dim (V).

(5) Ogni insieme di n vett. lin. indip. con $n = \dim(V)$ è una base.

Ma allora potrei ottenere una base aggiungendo elementi, ma questo non è possibile perché avrei una base con più elementi della dim.(V) il che è assurdo.

— o — o —

Resta da verificare nel p.to (2) che l'insieme

$$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$$

è costituito da vettori lin. indip.

Supponiamo che non lo siano. Allora avrei una comb. lin. che fa 0

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + c_{m+1} w_{m+1} + \dots + c_n w_n = 0$$

[Lo metto a posto dopo ...]

— o — o —

Oss. Ho dimostrato in realtà il

Lemma di eliminazione

Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_m\}$ siano vettori di V.
Supponiamo che v_1 sia comb. lin. di $v_2, \dots, v_m$.
Allora

$$\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \mathrm{Span}\{v_2, \dots, v_m\}$$

Dim. È evidente che

$$\begin{array}{ccc} v \in \mathrm{Span}\{v_2, \dots, v_m\} & \Rightarrow & v \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ v = a_2 v_2 + \dots + a_n v_m & \Rightarrow & v = 0 \cdot v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_m \end{array}$$

Meno evidente è il viceversa, cioè che

$$v \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \Rightarrow v \in \mathrm{Span}\{v_2, \dots, v_m\}$$

Qui serve l'ipotesi che $\boxed{v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_m v_m}$

Ma allora, se

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_m$$

$$= a_1 (c_2 v_2 + \dots + c_n v_m) + a_2 v_2 + \dots + a_n v_m$$

$$= (a_1 c_2 + a_2) v_2 + \dots + (a_1 c_2 + a_n) v_m$$

In poche parole, v_1 è eliminabile.

— o — o —

Il vecchio punto (1) è una conseguenza del fatto precedente.

... ad un certo punto succedeva che
$w_1, \dots, w_m$ erano generatori, cioè $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m) = V$
Tuttavia w_1 era comb. lin. degli altri. Ma allora era eliminabile e quindi

$$\mathrm{Span}(w_2, \dots, w_m) = V$$

cioè $w_2, \dots, w_m$ erano ancora generatori, il che è assurdo perché m era il min. numero di generatori.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 14

Note Title 16/10/2018

Ordine logico della dimostrazione

→ lemma di eliminazione
→ esistenza di una base per eliminazione a partire da un insieme di generatori (1)
→ lemma di sostituzione (più delicato)
→ tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi
→ (4), (5), (2)

Il vecchio (2) diventa ora facile.
Se $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip., allora posso aggiungere roba e ottenere una base.
Come faccio? Prendo una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ che so già che esiste. Uso il lemma di sostituzione e ottengo un nuovo sistema di generatori

$$\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$$

e dico che questi sono lin. indip. perché se non lo fossero qualcuno sarebbe comb. lin. degli altri, ma allora è eliminabile e avrei ottenuto una base con meno di n elementi, il che è assurdo.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. lemma di sostituzione}}$

Ipotesi: $v_1, \dots, v_m$ lin. indip.
$w_1, \dots, w_n$ generatori

Tesi: $m \leq n$
posso sostituire un po' dei w_i con tutti i v_i ottenendo ancora generatori

$\boxed{\text{Induzione su } m}$

$\boxed{\text{Caso } m=1}$ È evidente in questo caso che $m \leq n$.
Voglio fare la sostituzione. Scrivo

$$v_1 = c_1 w_1 + \ldots + c_n w_n \quad \text{(posso perché sono generatori)}$$

Almeno un coeff. c_i è $\neq 0$ perché altrimenti $v_1 = 0$ e non sarebbe lin. indip $1 \cdot v_1 = 0$.
Supponiamo che c_1 sia $\neq 0$. Ma allora w_1 lo posso ricavare dagli altri

$$c_1 w_1 = v_1 - c_2 w_2 - \ldots - c_n w_n \quad \ldots \text{ divido} \ldots$$

Ma allora

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sono} \\ \text{gen.}}}{V} = \operatorname{Span}\{w_1, \ldots, w_n\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ho solo} \\ \text{aggiunto roba}}}{=} \operatorname{Span}\{v_1, \overset{\substack{\text{lo posso eliminare} \\ \uparrow}}{\cancel{w_1}}, \ldots, w_n\}$$

$$= \operatorname{Span}\{\underbrace{v_1, w_2, \ldots, w_n}_{\text{sono ancora generatori}}\}$$

<u>Passo induttivo</u>: suppongo la tesi vera per m e la dim. per $m+1$

Prendo $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ lin. indip
$w_1, \ldots, w_n$ generatori

Considero solo $v_1, \ldots, v_m$. Questi sono ancora lin. indip. Quindi per ipotesi induttiva $m \leq n$ e posso fare la sostituzione in modo che

$$v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_n$$

sono ancora generatori.
Devo sostituire ancora uno dei w_i.
Domanda: è rimasto qualcuno dei w_i?
Sì! Altrimenti $v_1, \dots, v_m$ sarebbero generatori e quindi

$$v_{m+1} = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

e quindi portando tutto a sx avrei una comb. lin. dei v_i che viene 0 con almeno un coeff. $\neq 0$ (quello di v_{m+1}).
Di conseguenza è rimasto almeno uno dei w_i e quindi $n \geq m+1$.
Per fare l'ultima sostituzione scrivo

$$v_{m+1} = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + c_{m+1} w_{m+1} + \dots + c_n w_n$$

e osservo che uno degli ultimi coeff. $c_{m+1}, \dots, c_n$ è $\neq 0$ perché altrimenti è come prima.
Supponiamo sia c_{m+1} ⇝ posso ricavare w_{m+1} in funzione del resto e concludo come prima

$$V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$$

$$= \text{Span}\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \cancel{w_{m+1}}, \dots, w_n\}$$

$$= \text{Span}\{\underbrace{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}}, w_{m+2}, \dots, w_n\}$$

— o — o —

Esempio di spazio di V che non ha una base finita

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi.
Questo non ha un insieme di generatori finito e quindi non ha nemmeno una base finita.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che $p_1(x), \dots, p_n(x)$ sia un insieme di generatori.
Sia d il massimo grado di $p_1(x), \dots, p_n(x)$.
Allora x^{d+1} non può essere comb. lin. di $p_1, \dots, p_n$.

— o — o —

<u>Esempio 1</u> Dimostrare che $(1,2)$, $(-1,3)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.
Trovare le componenti di $(1,4)$ rispetto a questa base

Per dim. che sono una base, dovrei fare 2 verifiche
→ lin. indip.
→ generatori
Essendo 2 elementi, basta fare una delle 2 verifiche, ad esempio la lin. indip.

$$a(1,2) + b(-1,3) = (0,0) \rightsquigarrow (a-b, 2a+3b) = (0,0)$$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a=b \\ 5b=0 \rightsquigarrow b=0 \rightsquigarrow a=0 \Rightarrow \text{sono lin. indip.} \end{array}$$

Devo scrivere $(1,4)$ come loro comb. lin.

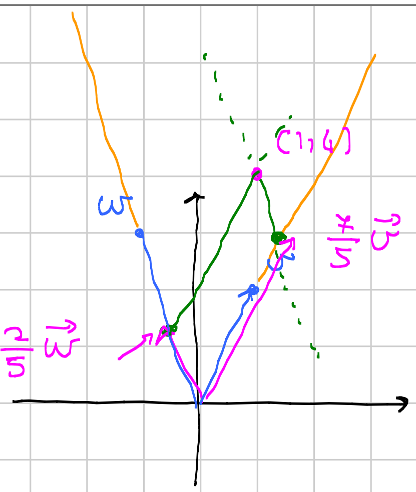
$$(1,4) = a(1,2) + b(-1,3) \qquad (a-b, 2a+3b) = (1,4)$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ 2a+3b=4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$5b = 2 \rightsquigarrow b = \frac{2}{5} \qquad a-b=1 \rightsquigarrow a = b+1 \rightsquigarrow \frac{2}{5}+1 = \frac{7}{5}$$

Quindi $$(1,4) = \frac{7}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(-1,3)$$ (verifica!)

componenti



Significato geometrico

Voglio scrivere $(1;4)$ come somma di un multiplo di v più un multiplo di w.
Completo il parallelogrammo e quello che ottengo in direzione $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono le due componenti.

Esempio $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Dimostrare che $x+1$, $x-1$, x^2+x sono una base e trovare le componenti di x^2-1 rispetto a questa base

- Dim. che sono una base. Osservo che $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ha dimensione 3 (ax^2+bx+c, quindi $1, x, x^2$ è una base). Avendo dati 3 vettori, se mostro che sono lin. indip so che saranno una base

$$a(x+1)+b(x-1)+c(x^2+x)=0$$

$$cx^2+(a+b+c)x+a-b=0$$

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \rightsquigarrow a=b \Rightarrow a=b=0$$

$\rightsquigarrow$ sono lin. indip.
$\rightsquigarrow$ sono una base

- Trovo le componenti di x^2-1

$$a(x+1)+b(x-1)+c(x^2+x) = x^2-1$$

Ora il sistema diventa

$$\begin{cases} c = 1 \\ a+b+c = 0 \\ a-b = -1 \end{cases}$$ $\rightsquigarrow$ si risolve in modo unico

<u>Esempio 3</u> $\overset{v_1}{(1,0,1)}, \overset{v_2}{(0,2,3)}, \overset{v_3}{(1,1,4)}, \overset{v_4}{(1,2,4)}$

sono una base di $\mathbb{R}^3$? No! Sono troppi

sono lin. indip. ? No! $\to$ sono troppi!

$\to$ $v_4 = v_1 + v_2$

Sono generatori ? Forse: bisognerebbe fare la verifica

v_1, v_2, v_4 sono una base di $\mathbb{R}^3$? No! Non sono lin. indip.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 15

Note Title 16/10/2018

SOMMA DI SOTTOSPAZI
SOMMA DIRETTA
FORMULA DI GRASSMANN

Sia X uno spazio vettoriale, e siano V e W due sottospazi.

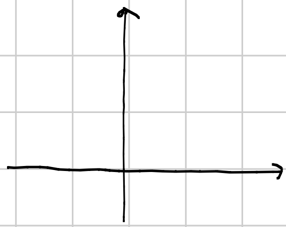
Riscaldamento: $V \cap W$ e $V \cup W$ sono ancora sottospazi?

$\boxed{V \cap W \text{ SI}}$ $\quad v_1 \in V \cap W \quad v_2 \in V \cap W \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \in V \;\; v_2 \in V \rightsquigarrow v_1 + v_2 \in V \\ v_1 \in W \;\; v_2 \in W \rightsquigarrow v_1 + v_2 \in W \end{array}\right\} \; v_1 + v_2 \in V \cap W \rightsquigarrow \text{chiuso risp. alla somma}$$

$$\begin{array}{l} v \in V \rightsquigarrow \alpha v \in V \\ v \in W \rightsquigarrow \alpha v \in W \end{array} \rightsquigarrow \alpha v \in V \cap W$$

L'unione $V \cup W$ in generale <u>non</u> è un sottospazio. In $\mathbb{R}^2$



- l'asse x e l'asse y sono s.sp., ma la loro unione non lo è (non è chiusa risp. alla somma)

<u>Def.</u> (Somma di sottospazi)
Siano V e W due sottospazi di uno sp. vett. X. Allora si pone

$$V + W = \{ v + w \in X : v \in V, \; w \in W \}$$

Prop. $V+W$ è un sottospazio

Dim. ① Prendo due elementi di $V+W$: v_1+w_1 e v_2+w_2. La loro somma è

$$v_1+w_1+v_2+w_2 = \underbrace{(v_1+v_2)}_{\in V}+\underbrace{(w_1+w_2)}_{\in W} \in V+W$$

② Prendo $v+w \in V+W$. Prendo $a \in \mathbb{R}$. Allora

$$a(v+w) = \underbrace{av}_{\in V}+\underbrace{aw}_{\in W} \in V+W.$$

— o — o —

Def. La somma $V+W$ si dice somma diretta e si scrive

$$V \oplus W$$

se in aggiunta $V \cap W = \{0\}$ (minimo sindacale)

Prop. Supponiamo che $V \cap W = \{0\}$. Allora ogni vettore in $V \oplus W$ si scrive in modo unico nella forma $v+w$ con $v \in V$ e $w \in W$.

Dim. Supponiamo che un elemento si scriva in due modi

$$v_1+w_1 = v_2+w_2 .$$ Allora

$$\underbrace{v_1-v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2-w_1}_{\in W} \in V \cap W$$

Essendo l'unico elemento comune lo 0, allora per forza

$$v_1-v_2=0 \rightsquigarrow v_1=v_2$$
$$w_2-w_1=0 \rightsquigarrow w_1=w_2$$

— o — o —

$\boxed{\text{Formula di GRASSMANN}}$

Siano V e W due sottospazi di uno spazio vett. X.
Allora

$$\boxed{\dim(V+W) + \dim(V\cap W) = \dim V + \dim W}$$

<u>Corollario</u> Se la somma è diretta, allora

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Poniamo
$$\dim(V\cap W) = k$$
$$\dim(V) = k+m$$
$$\dim(W) = k+n$$

La tesi equivale a dim che

$$\dim(V+W) = k+m+n$$

Sia $e_1, \dots, e_k$ una base di $V\cap W$
Posso completarla ad una base di V aggiungendo m vettori

$$e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_m \quad \text{base di } V$$

Analogamente, posso completarla ad una base di W aggiungendo n elementi

$$e_1, \dots, e_k, w_1, \dots, w_n \quad \text{base di } W$$

Dico che

$$e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \quad \text{sono una base di } V+W$$

Se lo dim. ho finito perché è il numero che volevo.

- <u>Sono generatori</u>. Ogni elemento di $V+W$ è

$$\begin{aligned} v+w &= a_1e_1+\ldots+a_ke_k+b_1v_1+\ldots+b_mv_m && \leadsto v \\ &\quad +c_1e_1+\ldots+c_ke_k+d_1w_1+\ldots+d_nw_n && \leadsto w \\ &= \text{comb. lin. degli } k+m+n \text{ elementi} \end{aligned}$$

- <u>Sono lin. indip.</u> Supponiamo che non lo siano. Prendiamo una comb. lin. nulla

$$a_1e_1+\ldots+a_ke_k+b_1v_1+\ldots+b_mv_m+c_1w_1+\ldots+c_nw_n=0$$

Porto tutti i w a destra

$$\underbrace{a_1e_1+\ldots+a_ke_k+b_1v_1+\ldots+b_mv_m}_{\in V}=\underbrace{-c_1w_1-\ldots-c_nw_n}_{\in W} \qquad (*)$$

Quindi il vettore a destra sta nell'intersezione (e anche quello a sx, ma non ci interessa). Se sta in $V\cap W$, è comb. lin. di $e_1,\ldots,e_k$, quindi

$$-c_1w_1-\ldots-c_nw_n=d_1e_1+\ldots+d_ke_k$$

Se a dx e/o a sx ci fosse un coeff. non nullo, allora i vettori $e_1,\ldots,e_k,w_1,\ldots,w_n$ sarebbero lin. dip., il che non è possibile perché sono una base di W.
Quindi in particolare tutti i $c_i\equiv 0$.
Ma allora a dx della $(*)$ ho 0 e quindi ho 0 anche a sx. Ma poiché $e_1,\ldots,e_k,v_1,\ldots,v_m$ sono una base di V, questo è possibile solo se tutti i coeff. sono nulli

— o — o —

Esempio 1 Siano V e W due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dim. 2
(cioè due piani passanti per l'origine)

- Può essere una somma diretta $V \oplus W$?
- Cosa può essere l'intersezione $V \cap W$?

$$\underbrace{\dim(V+W)}_{\text{può essere solo 2 oppure 3}} + \dim(V \cap W) = \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim(V)}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim(W)}}$$

(è $\geq \dim V$ e $\leq \dim \mathbb{R}^3$)

Di conseguenza → se $\dim(V+W)=3$, allora $\dim(V \cap W)=1$
(i due piani si intersecano in una retta)
→ se $\dim(V+W)=2$, allora $\dim(V \cap W)=2$
(i due piani coincidono, quindi
$V = W = V \cap W = V+W$)

Esempio 2 $X = \mathbb{R}^{15}$ $\dim(V) = 7$ $\dim(W) = 9$

Può essere somma diretta ?

No! se lo fosse avrei $\dim(V \cap W) = 0$, quindi

$$\dim(V+W) = \underset{7}{\underset{\shortparallel}{\dim(V)}} + \underset{9}{\underset{\shortparallel}{\dim(W)}} = 16$$

Ma $\dim(V+W)$ al massimo è 15, quindi è impossibile.

— o — o —

Esempio 3 $X = \mathbb{R}^3$

$V = \text{span}((0,1,2))$ retta

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-3z=0\}$ piano

Dimostrare che $W \oplus V = \mathbb{R}^3$, e scrivere le componenti di $(1,2,3)$ rispetto a V e W.

Per dimostrare che la somma è diretta devo mostrare che $V \cap W = \{0\}$.

Gli elementi di V sono del tipo $(0,a,2a)$ con $a \in \mathbb{R}$

Possono stare in W?

$$x+y-3z = a-6a = 0$$

il che è possibile solo se $a=0$.

Quindi la somma è diretta e $V+W = \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\dim(V+W)}_{3} = \underbrace{\dim V}_{1} + \underbrace{\dim V}_{2}$$

Chi è una base di W? $x+y-3z=0$

$(3,0,1) = w_1$ $(0,3,1) = w_2$

Si vede che sono lin. indip.

So che $(3,0,1)$, $(0,3,1)$ e $(0,1,2)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ quindi ogni vettore è loro comb. lineare.

Quindi

$$(1,2,3) = \underbrace{a(3,0,1)+b(0,3,1)}_{\in W} + \underbrace{c(0,1,2)}_{\in V}$$

Per trovare a,b,c basta risolvere un sistema.

[Interpretazione geom. nel video]

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 16

Note Title 19/10/2018

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Due possibili descrizioni
→ cartesiana (mediante equazioni)
→ parametrica (mediante Span)

Domande:
1 – Passare da una descrizione all'altra
2 – Calcolare una base
3 – Calcolare dim
4 – Calcolare intersezioni, somme, proiezioni

Esempio 1 Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+2y-w=0, \ z+w=x+y\}$$

$$W = \operatorname{Span}\{(1,0,2,0), (1,1,-1,1)\}$$

Sono sottospazi? Per W è ovvio (ogni Span lo è)
Per V andrebbe verificato

Dovrei prendere (x_1,y_1,z_1,w_1) e (x_2,y_2,z_2,w_2) che verificano le equazioni, e mostrare che $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2)$ verifica ancora le stesse eq.
Stessa cosa per (ax_1, ay_1, az_1, aw_1)

Calcolare base e dimensione: → per W è semplice: i due vettori dati sono lin. indip. e generano, quindi sono una base, quindi $\dim(W)=2$

Per V risolvo il sistema
$$\begin{cases} x+2y-w=0 \\ x+y-z-w=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

variabili libere

$w=t \qquad y+z=0 \rightsquigarrow y=-s$

$z=s \qquad x+2y-w=0 \rightsquigarrow x=-2y+w = 2s+t$

Quindi la soluzione del sistema è

$$(2s+t, -s, s, t) = t(1,0,0,1)+s(2,-1,1,0)$$

Quindi $V = \text{Span}\{(1,0,0,1), (2,-1,1,0)\}$ da cui $\dim V = 2$

Oss. Volendo potevo usare anche y, w come variabili libere. Ottenevo

$y=t \qquad y+z=0 \rightsquigarrow z=-y=-t$

$w=s \qquad x+2y-w=0 \rightsquigarrow x=-2y+w=-2t+s$

$$(-2t+s, t, -t, s) = t(-2,1,-1,0)+s(1,0,0,1)$$

Calcolare $V\cap W$ e $V+W$

Per calcolare $\cap$, è comodo avere entrambi in cartesiana, ma qui non è così

Per calcolare $V+W$, è comodo averli entrambi in parametrica.

Nel nostro caso

$$V+W = \text{Span}\{\underbrace{(-2,1,-1,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,0,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,0,2,0)}_{v_3}, \underbrace{(1,1,-1,1)}_{v_4}\}$$

Questo NON basta per dire che Span ha dim 4, perché non so ancora che sono lin. indip.
Per vedere se lo sono, imposto il sistema

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = 0$$

$$\begin{cases} -2a + b + c + d = 0 & 1^a \text{ componente} \\ a + d = 0 & 2^a \text{ "} \\ -a + 2c - d = 0 & 3^a \text{ "} \\ b + d = 0 & 4^a \text{ "} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 PIVOT $\rightsquigarrow$ l'unica sol. è $a=b=c=d=0$
$\rightsquigarrow$ $v_1, \dots, v_4$ sono lin. indip.
$\rightsquigarrow$ $\dim(V+W) = 4$ $\rightsquigarrow$ $V+W = \mathbb{R}^4$

Dalla formula di Grassmann

$$\underset{4}{\underset{\shortparallel}{\dim(V+W)}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{\dim(V \cap W)}} = \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim V}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim W}}$$

Quindi per forza $V \cap W = \{0\}$

— o — o —

Esempio 2 Spazio vettoriale: matrici 2×2 (spazio di dim 4)

$$V := \{ A \in M_{2\times 2} : A = A^t \} = \text{matrici simmetriche}$$

Verificare che è un sottospazio:

→ se $A_1 = A_1^t$ e $A_2 = A_2^t$, allora $(A_1+A_2) = (A_1+A_2)^t$

→ se $A = A^t$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $(aA) = (aA)^t$

Calcolare una base e la dimensione

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A = A^t \iff \begin{cases} a = a \\ b = c \\ c = b \\ d = d \end{cases} \iff b = c \iff b - c = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ a & & c & d \end{array}$$

Abbiamo a, c, d variabili libere, e poi $b = c$

Sono tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La verifica che sono lin. indip. è molto semplice

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = c = d = 0 \rightsquigarrow \dim V = 3$$

Esempio 3 Spazio vettoriale = polinomi di grado ≤ 2 $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : \ p(3) = p'(2) \}$$

derivata

Verificare che è un sottospazio ⇝ solite verifiche

Base e dimensione

$p(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad p'(x) = 2ax + b$

$p(3) = 9a + 3b + c$ $\qquad p'(2) = 4a + b$

$9a + 3b + c = 4a + b$ $\qquad 5a + 2b + c = 0$

$c = -5a - 2b$

$V =$ polinomi del tipo $ax^2 + bx - 5a - 2b$

$$= a(x^2 - 5) + b(x - 2) = \operatorname{Span}(\underbrace{x^2 - 5, x - 2}_{\text{base di } V})$$

Nello stesso spazio considero $W = \operatorname{Span}\{x^2, x^2 + x + 1\}$

$\dim W = 2$.

Cosa posso dire di $V \cap W$? Per la formula di Grassmann ha dimensione almeno 1, anzi esattamente 1 se io so che $V + W = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Per calcolare l'intersezione posso prendere il generico elemento di W e imporre di stare in V

$$a x^2 + b(x^2+x+1) = (a+b)x^2 + bx + b = \text{generico el. di } W$$

Impongo $p(3) = p'(2)$:

$$9(a+b) + 3b + b = 4(a+b) + b$$

$$5a + 8b = 0 \qquad a = -\frac{8}{5} b$$

Quindi gli el. di $V \cap W$ sono del tipo

$$-\frac{8}{5} b\, x^2 + b(x^2+x+1) = b\left(-\frac{3}{5}x^2 + x + 1\right)$$

$$V \cap W = \mathrm{Span}\left(-3x^2 + 5x + 5\right)$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 17

Note Title 19/10/2018

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano V e W due spazi vettoriali.
Un'applicazione lineare da V in W è una funzione

$$f : V \longrightarrow W$$

tale che

(i) $f(\underbrace{v_1+v_2}_{\text{somma in } V}) = \underbrace{f(v_1)+f(v_2)}_{\text{somma in } W}$ per ogni v_1, v_2 in V

(ii) $f(av) = a f(v)$ per ogni $v \in V$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$

Esempio a cui pensare: la derivata è un'appl. lineare
(la deriv. della somma è la somma delle derivate e "le costanti escono fuori")

Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}$ Come sono fatte tutte le applic. lin.?

Basta la proprietà (ii). Posto $\lambda = f(1)$, allora

$$f(x) = f(x \cdot 1) \overset{(ii)}{=} x f(1) = \lambda x$$

Brutalmente: il grafico di $f(x)$ è una retta per l'origine.

Esempio 2 $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$. Come sono fatte tutte le appl. lin.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad ?$$

Posto $a := f(1,0)$ e $b := (0,1)$, allora

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\big(x(1,0)+y(0,1)\big) &\overset{(i)}{=} f(x(1,0)) + f(y(0,1)) \\ &\overset{(ii)}{=} x f(1,0) + y f(0,1) \\ &= ax+by \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ (teorema di struttura delle applic. lineari)

Siano V e W due spazi vettoriali
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V
Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ dei vettori di W (non sono obbligati ad essere lin. indip. e/o generatori)
Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \to W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$$

Brutalmente: gli elementi di una base di V li posso mandare dove mi pare, a questo punto gli altri sono vincolati, cioè sappiamo dove vanno

Dim. Ogni $v \in V$ lo posso scrivere come

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Ma allora

$$\begin{aligned} f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = f(c_1 v_1) + \dots + f(c_n v_n) \\ &= c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) \\ &= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n \end{aligned}$$

Ho dimostrato più in generale che le combinazioni lineari "escono fuori dalla f":

$$f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)$$

Dovrei dimostrare che la f definita come sopra è davvero lineare.
Questo vuol dire fare 2 verifiche

Poniamo

$$f(v) = c_1 w_1 + \ldots + c_n w_n$$

$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ $\qquad \hat{v} = \hat{c}_1 v_1 + \ldots + \hat{c}_n v_n$

$$f(v+\hat{v}) = f(v) + f(\hat{v})$$
$$f(av) = a f(v).$$

— o — o —

Esempio Dimostrare che esiste unica funz. lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,0,0) = (2,3)$$
$$f(1,1,0) = (3,4)$$
$$f(-1,0,1) = (1,5)$$

Calcolare $f(2,7,1)$

Esistenza e unicità Per il teo. di struttura è sufficiente mostrare che $\underbrace{(1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(-1,0,1)}_{v_3}$ sono lin. indip.

$$a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(-1,0,1) = (0,0,0)$$

deve avere come unica sol. $a = b = c = 0$.

Come calcolo $f(2,7,1)$? Scrivo $(2,7,1)$ come comb. lin. di v_1, v_2, v_3 e poi uso la linearità

$$\begin{cases} a + b - c = 2 \\ b = 7 \\ c = 1 \end{cases} \leadsto c = 1,\ b = 7,\ a = 2 + c - b = -4$$

$$\begin{aligned} f(2,7,1) &= f(-4v_1 + 7v_2 + v_3) \\ &= -4\underbrace{f(v_1)}_{(2,3)} + 7\underbrace{f(v_2)}_{(3,4)} + \underbrace{f(v_3)}_{(1,5)} \\ &= -4(2,3) + 7(3,4) + (1,5) = (\ldots, \ldots) \end{aligned}$$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLIC. LINEARE

Siano V e W spazi vettoriali
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V
Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W
Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare
Allora si costruisce una matrice $m \times n$ in questo modo

$$f(v_1) = \boxed{a_{1,1}}\, w_1 + \boxed{a_{2,1}}\, w_2 + \dots + \boxed{a_{m,1}}\, w_m$$

1^a colonna della matrice

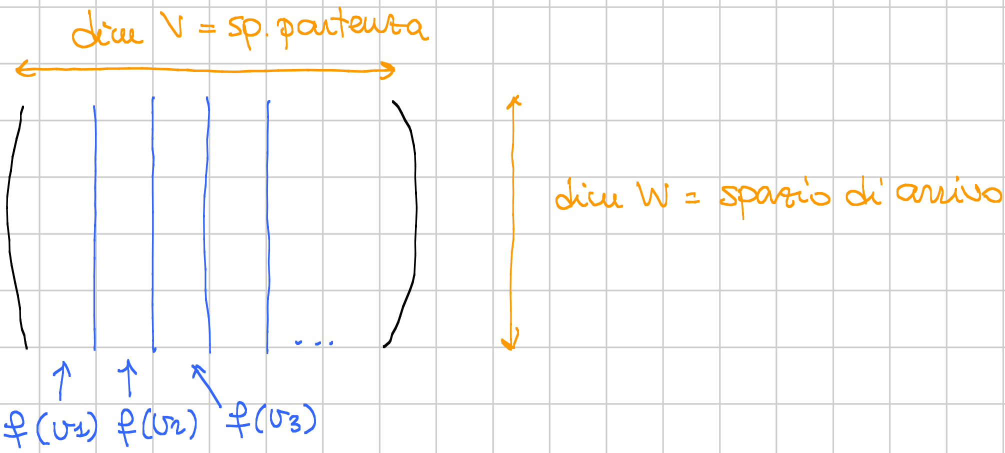
$$f(v_2) = \boxed{a_{1,2}}\, w_1 + \boxed{a_{2,2}}\, w_2 + \dots + \boxed{a_{m,2}}\, w_m$$

2^a colonna della matrice

[Indici invertiti dopo video, in modo che il primo sia la riga ed il secondo la colonna]

e così via ...

La matrice finale ha un aspetto di questo tipo



Si dice che quella così costruita è la matrice che rappresenta l'applicazione f usando le 2 basi date in partenza ed arrivo.

Achtung! Se cambio basi, cambio la matrice!

Esempio $V = W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

Come applicazione lineare considero la derivata

$$f(ax^3+bx^2+cx+d) = 3ax^2+2bx+c$$

Considero in partenza ed arrivo la base canonica

$$\{ \underset{\substack{\uparrow \\ v_1 \\ \shortparallel \\ w_1}}{x^3}, \underset{\substack{\uparrow \\ v_2 \\ \shortparallel \\ w_2}}{x^2}, x, 1 \}$$

Costruisco la matrice

$$f(v_1) = f(x^3) = 3x^2 = 3v_2 = 0\cdot v_1 + 3v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$f(v_2) = f(x^2) = 2x = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 2v_3 + 0\cdot v_4$$

$$f(v_3) = f(x) = 1 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 1\cdot v_4$$

$$f(v_4) = f(1) = 0 = \text{tutti zeri}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \uparrow & & & \\ f(v_1) & & & \end{matrix}$$

$\boxed{\text{Proprietà fondamentale}}$

Dati V e W con basi $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$

Data $f : V \to W$ lineare

Costruisco la matrice A come indicato prima

Quando voglio calcolare $f(v)$ con $v \in V$ dato, un

scrivo v come comb. lineare

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

poi calcolo

$$\underbrace{A}_{m \times n} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Allora

$$f(v) = a_1 w_1 + \dots + a_m w_m$$

Nell' esempio, se voglio calcolare

$$f(2x^3+3x^2+7) = 6x^2+6x$$

basta fare

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 6x^2+6x$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 18

Note Title 23/10/2018

Idea generale

- Fissata una base, gli el. di uno sp. vettoriale diventano numeri (le comp. di un vettore rispetto alla base)

- Fissate una base in partenza ed in arrivo, le applicazioni lineari diventano numeri (la matrice associata all'appl.)

Sp. vett → Numeri

Appl. lineari → Matrici

Data $f: V \longrightarrow W$, scelgo base $v_1, \dots, v_n$ in partenza, scelgo una base $w_1, \dots, w_m$ in arrivo e ottengo una matrice A.
Come calcolo $f(v)$ dato $v \in V$?

Procedura

- Scrivo v come $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ $\quad v \rightsquigarrow (c_1, \dots, c_n)$
- Penso $(c_1, \dots, c_n)$ come vettore colonna e lo moltiplico per la matrice A

$$\overset{n}{\longleftrightarrow} \qquad m \updownarrow \; A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \updownarrow n$$

Ottengo un vettore colonna lungo m.
- Gli m numeri ottenuti al passo precedente sono le componenti di $f(v)$ rispetto alla base $w_1, \dots, w_m$

A $\rightsquigarrow$ INPUT: componenti di v rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$
$\rightsquigarrow$ OUTPUT: componenti di $f(v)$ rispetto " " $w_1, \dots, w_m$

Esempio Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'appl. lineare tale che

$$f(\underbrace{1,0,1}_{v_1}) = (2,3) \qquad f(\underbrace{1,1,0}_{v_2}) = (1,1) \qquad f(\underbrace{0,0,1}_{v_3}) = (0,2)$$

- Dimostrare che esiste ed è unica

Uso il teorema di struttura: posso mandare una base dello spazio di part. dove mi pare e a quel punto l'appl. è unica.
Quindi basta verificare che v_1, v_2, v_3 sono base di $\mathbb{R}^3$.
Essendo 3 vett., basta verificare lin. indip.

$$a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \rightsquigarrow a=b=c=0$$

- Scrivere la matrice A associata ad f usando in partenza ed arrivo la base canonica.

Mi serve calcolare
$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= f(1,0,1) - f(0,0,1) \\ f(0,1,0) &= \\ f(0,0,1) &= (0,2) \end{aligned}$$

$$f(1,0,0) = f(1,0,1) - f(0,0,1) = (2,3) - (0,2) = (2,1)$$

$$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(1,0,0) = (1,1) - (2,1) = (-1,0)$$

A questo punto scriviamo la matrice

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= 2\,(1,0) + 1\,(0,1) \\ f(0,1,0) &= -1\,(1,0) + 0\,(0,1) \\ f(0,0,1) &= 0\,(1,0) + 2\,(0,1) \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \text{ base arrivo} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \end{array} & \\ \text{base part.} & \end{array}$$

- Calcolare $f\underbrace{(7,4,-2)}_{v}$

Scrivo $(7,4,-2)$ come $7(1,0,0)+4(0,1,0)+(-2)(0,0,1)$

Moltiplico per la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10 e 3 sono le componenti di $f(v)$ rispetto alla base dello sp. di arrivo.
Quindi

$$f(v) = 10(1,0)+3(0,1) = (10,3)$$

- Scrivere la matrice B associata ad f usando
  → in partenza la base $\{v_1, v_2, v_3\}$
  → in arrivo la base $\{(1,1),(1,0)\}$ $\{w_1, w_2\}$

$$f(v_1) = (2,3) = 3(1,1) - 1(1,0)$$
$$f(v_2) = (1,1) = 1(1,1) + 0(1,0)$$
$$f(v_3) = (0,2) = 2(1,1) - 2(1,0)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \end{array}$$

- Calcolare $f(7,4,-2)$ usando le nuove basi e la nuova matrice

<u>Step 1</u> Calcolo le componenti di $(7,4,-2)$ rispetto alla base v_1, v_2, v_3

$$(7,4,-2) = a(1,0,1)+b(1,1,0)+c(0,0,1)$$

$a+b=7 \qquad a=3$

$b=4 \qquad b=4 \qquad v \rightsquigarrow (3,4,-5)$

$a+c=-2 \qquad c=-5$

Step 2 Moltiplico le componenti per la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Step 3 Ricostruisco $f(v)$ usando le nuove componenti

$$f(v) = 3w_1 + 7w_2 = 3(1,1) + 7(1,0) = \boxed{(10,3)}$$

— o — o —

Domanda: siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ due basi dello stesso spazio vettoriale V.
Se conosco le componenti di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$, come calcolo le componenti di v rispetto alla base $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$?

Risposta: uso la $\boxed{\text{MATRICE DI CAMBIO DI BASE}}$

→ INPUT: comp. di v rispetto alla 1^a base
→ OUTPUT: " " " " 2^a base

Come costruisco questa matrice?
Scrivo i vettori della vecchia base usando la nuova e uso i coeff. come colonne

$$v_1 = c_{1,1}\hat{v}_1 + c_{2,1}\hat{v}_2 + \dots + c_{n,1}\hat{v}_n$$

1^a colonna

In generale

$$v_k = c_{1,k}\,\hat{v}_1 + c_{2,k}\,\hat{v}_2 + \dots + c_{n,k}\,\hat{v}_n$$

k-esima colonna

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \hat{v}_1 \\ \leftarrow \hat{v}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \hat{v}_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{matrix} & \end{array}$$

<u>Esempio precedente</u> Sp. vett. $\mathbb{R}^3$

base vecchia : canonica $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$

base nuova : $(1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,1)$

Scrivo i vettori della vecchia usando la nuova

$$(1,0,0) = 1\,(1,0,1) + 0\,(1,1,0) - 1\,(0,0,1)$$
$$(0,1,0) = -1\,(1,0,1) + 1\,(1,1,0) + 1\,(0,0,1)$$
$$(0,0,1) = 0\,(1,0,1) + 0\,(1,1,0) + 1\,(0,0,1)$$

Matrice di cambio di base dalla vecchia alla nuova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il vettore $(7,4,-2)$.
Nella vecchia si scrive come

$$(7,4,-2) = 7\,(1,0,0) + 4\,(0,1,0) - 2\,(0,0,1)$$

Applico la matrice di cambio ai numeri

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$ $\rightsquigarrow$ componenti rispetto alla base nuova

Quindi $(7,4,-2) = 3\,(1,0,1) + 4\,(1,1,0) - 5\,(0,0,1)$

Gli stessi numeri li avevamo ottenuti prima risolvendo il sistema lineare.

La stessa matrice va bene per trasformare TUTTI i vettori, senza risolvere ulteriori sistemi lineari.

Oss. Il sistema lineare si risolve una volta per tutte per costruire la matrice di cambio di base.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 19

Note Title 23/10/2018

KER E IMMAGINE DI APPLICAZIONI LINEARI

Defn. Siano V e W due spazi vettoriali, e sia $f: V \to W$ un'appl. lineare

- Si definisce $\ker f$ (o nucleo) l'insieme dei vettori che vanno a finire in 0, cioè

$$\boxed{\ker f := \{v \in V : f(v) = \underset{\uparrow \text{ vettore in } W}{0}\}}$$

- Si definisce $\operatorname{Im} f$ (immagine) l'insieme dei vettori in W che sono f di qualcosa, cioè

$$\boxed{\operatorname{Im} f := \{w \in W : \exists\, v \in V \text{ con } f(v) = w\}}$$

Proposizione Sia $f: V \to W$ come nella def. precedente
Allora
- $\ker(f)$ è un s.sp. vett. di V
- $\operatorname{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W

Dim per il ker Due verifiche

→ Se $v_1 \in \ker(f)$ e $v_2 \in \ker(f)$, allora $v_1 + v_2 \in \ker(f)$?

$f(v_1) = 0 \qquad f(v_2) = 0 \qquad \Rightarrow f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0$

→ Se $v \in \ker$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $av \in \ker(f)$?

$f(av) = a\underbrace{f(v)}_{=0} = 0$ ☺

$\boxed{\text{Dim per Im}}$ Due verifiche

→ Se $w_1 \in \mathrm{Im}(f)$ e $w_2 \in \mathrm{Im}(f)$, allora $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(f)$?

$w_1 = f(v_1) \quad w_2 = f(v_2) \rightsquigarrow w_1 + w_2 = f(v_1 + v_2) \in \mathrm{Im}\, f$

→ Se $w \in \mathrm{Im}(f)$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $aw \in \mathrm{Im}(f)$?

$w = f(v) \rightsquigarrow aw = af(v) = f(av) \in \mathrm{Im}(f)$

— o — o —

$\boxed{\text{Oss. importante 1}}$

$$\boxed{f : V \to W \text{ è iniettiva} \iff \ker(f) = \{0\}}$$

- Se è iniettiva, allora c'è un solo vettore che va a finire in $\underset{\text{in } W}{0}$, ed è il vettore $\underset{\text{in } V}{0}$ in partenza, quindi $\ker = \{\underset{\text{in } V}{0}\}$

- Se $\ker(f) = \{0\}$, allora f è iniettiva.
  Infatti se $f(v_1) = f(v_2)$, allora $f(v_1 - v_2) = 0$, cioè $v_1 - v_2 \in \ker(f)$, ma allora $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$

$\boxed{\text{Oss. importante 2}}$

$$\boxed{f : V \to W \text{ è surgettiva} \iff \mathrm{Im}(f) = W}$$

L'osservazione è sostanzialmente la definizione di funzione surgettiva

$$\forall w \in W \quad \exists v \in V \quad \text{t.c.} \quad f(v) = w$$

Teorema **RANK-NULLITY** (Teo. della dimensione)

Siano V e W due sp. vett. (di dim. finita) e sia $f: V \to W$ un'appl. lineare.
Allora

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim V}$$

spazio di partenza

Dim. Sia $k = \dim(\ker)$
Sia $m \geq k$ la dim. di V

Prendiamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\ker(f)$
La completiamo ad una base di V aggiungendo $m-k$ el.

$$\{v_{k+1}, \dots, v_m\}$$

(ho usato il teorema che dice che si può ottenere una base aggiungendo vett. ad un insieme lin. indip.)
Dico che

$$\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)\}$$

sono una base di $\operatorname{Im}(f)$. Se è vero ho finito, perché sono in numero giusto. Per dim. che sono una base, servono due verifiche.

① <u>Generano tutta l'immagine</u> Sia $w \in \operatorname{Im}(f)$.
Allora

$$\underset{\text{def.}}{w = f(v)} \underset{\substack{\text{scrivo } v \\ \text{nella base} \\ \text{di } V}}{=} f(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m)$$

$$= \underbrace{c_1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(v_1)}} + \dots + c_k \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(v_k)}}}_{\text{perché } v_1, \dots, v_k \in \ker} + c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_m f(v_m)$$

quindi ok

② <u>Sono lin. indip.</u>

Prendiamo una loro comb. lin. nulla

$c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_m f(v_m) = 0$ ma allora

in W

$f(c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m) = 0$ ma allora

$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m \in \ker(f)$ ma allora

$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$

Quando porto tutto a sx ottengo una comb. lineare di $v_1, \dots, v_m$ che fa 0. Essendo una base di V, questo è possibile solo se tutti i c_i sono nulli.

in V

0 come numero

— o — o —

<u>Conseguenze del teorema rank-nullity</u> $f: V \to W$

$$\dim(\ker) + \dim(\mathrm{Im}) = \dim V$$

① Se $\dim W < \dim V$, allora f NON può essere $\boxed{\text{iniettiva}}$

Se fosse iniettiva, avremmo che $\dim(\ker) = 0$, ma allora

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}) \underset{\mathrm{Im} \subseteq W}{\leq} \dim W$$

② Se $\dim W > \dim V$, allora f NON può essere $\boxed{\text{surgettiva}}$

Se fosse surgettiva, allora $\mathrm{Im}(f) = W$ e quindi

$$\dim W \underset{W = \mathrm{Im}}{=} \dim(\mathrm{Im}) \underset{\dim(\ker) \geq 0}{\leq} \dim(\ker) + \dim(\mathrm{Im}) \underset{\text{teorema}}{=} \dim V$$

③ Se $\dim W = \dim V$, allora

$$\boxed{f \text{ iniettiva} \iff f \text{ surgettiva}}$$

Dim.

- Supponiamo che f sia iniettiva. Allora $\dim(\ker) = 0$, e quindi

$$\underbrace{\dim(\ker)}_{0} + \dim(\mathrm{Im}) = \dim V = \dim W$$

Ma allora $\dim(\mathrm{Im}) = \dim W$, ma allora $\mathrm{Im} = W$
(fatto generale: se un s.sp. ha la stessa dim. dello spazio, allora coincide con lo spazio stesso, perché una sua base è anche una base dello spazio)
Essendo $\mathrm{Im} f = W$, la funzione f è surgettiva

- Supponiamo che f sia surgettiva. Allora $\mathrm{Im} f = W$ e quindi $\dim(\mathrm{Im}) = \dim W$. Ma allora

$$\dim(\ker) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im})}_{\substack{\dim W \\ \| \\ \dim V}} = \dim(V) \qquad (\text{rank-nullity})$$

Quindi $\dim(\ker) = 0$ e quindi f è iniettiva.

Esempi $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{15}$ NO SURGETTIVA
$f : \mathbb{R}^{22} \to \mathbb{R}^{15}$ NO INIETTIVA e $\dim(\ker) \geq 7$
Anzi $\dim(\ker) = 7 \iff f$ è surgettiva.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 20

Note Title 23/10/2018

BACK TO SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} x - y + 5z = 1 \\ 3y - 6z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

Interpretazione usando Span, generatori, lin. indip.

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}5\\-6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}$$

Potevo anche scrivere in riga

Risolvere il sistema equivale a scrivere la colonna dei termini noti (a dx) come comb. lin. delle colonne a sx (le colonne della matrice dei coeff.)

In generale un sistema si può pensare nella forma

$$\boxed{x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n = b}$$

termini noti (colonna lunga m)

colonne della matrice dei coeff., ciascuna lunga m

Le incognite sono i coeff. $x_1, \ldots, x_n$ della comb. lin.

Fatti generali

① Se il sistema è omogeneo (cioè $b = 0$), allora c'è per forza la soluzione $x_1 = \ldots = x_n = 0$. La soluz. è unica se e solo se le colonne $C_1, \ldots, C_n$ sono $\boxed{\text{lin. indip.}}$

② Nel caso non omogeneo (cioè b qualunque)
- esiste almeno una soluzione se e solo se
  $b \in \mathrm{Span}(C_1, \dots, C_n)$
- quando la soluzione esiste, questa è unica se e solo se le colonne sono lin. indip.
- sono sicuro che una soluzione esiste per ogni b se e solo se $C_1, \dots, C_n$ sono generatori di $\mathbb{R}^m$, cioè dello spazio di tutti i possibili b.

Caso speciale Se m = numero eq. = 18
n = numero incognite = 16
allora esistono dei valori di b per cui il sistema non ha soluzione.

Abbiamo 16 colonne $C_1, \dots, C_{16}$ e queste non sono abbastanza per generare tutti i possibili termini noti $\in \mathbb{R}^{18}$

$$\begin{cases} x - y + 5z = 1 \\ 3y - 6z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right) \rightsquigarrow 0 = -14 \quad ☹$$

Dal momento che il sistema non ha sol., posso dedurre che le 3 colonne della matrice dei coeff. sono lin. dip. (se fossero lin. indip., essendo 3 sarebbero una base di $\mathbb{R}^3$, e quindi genererebbero tutti i possibili termini noti)

Per trovare esplicitamente una relazione di dip. lineare, risolvo lo stesso sistema con tutti 0 come termini noti

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x &= y - 5z = 2t - 5t = -3t \\ y &= 2z = 2t \\ z &= t \end{aligned}$$

Quindi la sol. gen. è $t(-3, 2, 1)$

Quindi deve succedere che

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Verifica: Ok

Oss. La dimensione dello span delle colonne è uguale al numero di PIVOT della matrice "lavorata alla Gauss"

Conseguenza Se ho 15 vettori in $\mathbb{R}^{15}$ e voglio sapere se sono una base, basta metterli a colonne in una matrice 15×15 e vedere se lavorando alla Gauss mi vengono 15 pivot.

Esempio I polinomi $x^3 - 2x$, $x + 7$, $x^2 - 5x + 2$, $x^2 + 8$ sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Se lavorando ottengo 4 PIVOT, allora sono lin. indip., ma essendo 4 in uno sp. di dim. 4, allora sono una base!!

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 1 \\ 3y - 6z &= 7 \\ 2x + 4y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Interpretazione in termini di appl. lineari

Considero $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x,y,z) = (x-y+5z,\ 3y-6z,\ 2x+4y-2z)$$

Si verifica facilmente che è lineare.

Risolvere il sistema vuol dire trovare gli $(x,y,z) \in \underset{\text{sp. partenza}}{\mathbb{R}^3}$ t.c.

$$f(x,y,z) = (1,7,2)$$

Fatti generali

① Risolvere il sistema omogeneo vuol dire trovare $\ker(f)$

② Nel caso generale (b qualunque) la soluzione esiste se e solo se $b \in \operatorname{Im} f$

③ Nel caso generale
- se f è surgettiva, allora per ogni b esiste almeno una soluzione
- se f è iniettiva, allora per ogni b c'è al massimo una soluzione (possono essercene una o nessuna).

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ Sistema di 23 equazioni in 37 incognite

⇝ appl. lineare $f: \mathbb{R}^{37} \longrightarrow \mathbb{R}^{23}$

$\overset{37}{\longleftrightarrow} \quad \updownarrow 23$

⇝ di sicuro non può essere iniettiva
(analogamente: le 37 colonne della matrice non possono essere lin. indip.)

⇝ le soluzioni del sistema non possono essere uniche, quindi
- o non esistono
- oppure sono infinite, dipendenti da un numero di parametri uguale alla dimensione del ker (che è almeno 14, ma può benissimo essere di più se f non è surgettiva)

$$\dim(\ker) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im})}_{=\,23 \text{ o meno}} = \underbrace{\dim V}_{=\,37}$$

Se f è surgettiva, allora le colonne della matrice sono generatori di $\mathbb{R}^{23}$ e $\dim(\ker) = 14$ e la matrice dei coeff. ha 23 pivot e il sistema ha soluzione per ogni b.

Se l'immagine ha dim 21, allora il sistema omogeneo ha sol. dipendenti da 16 parametri e la matrice dei coeff. ha 21 PIVOT.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 21

Note Title 26/10/2018

MATRICE INVERSA Data una matrice $n \times n$, che chiamiamo A vogliamo trovare B matrice $n \times n$ t.c.

$$AB = BA = Id$$

Domande: siamo sicuri che B esista?
se sì, come la calcolo.

__Esistenza__: fare la matrice inversa è come fare la funzione inversa, quindi esiste se e solo l'appl. lin. associata è iniettiva e surgettiva. Essendo lineare, basta una delle due verifiche, diciamo l'iniettività, che a sua volta è equiv. alla lineare indipendenza delle colonne

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_n C_n$$

comb. lin. delle colonne con gli x_i come coeff.

Quindi matrice invertibile $\Leftrightarrow$ colonne lin. indip
$\Leftrightarrow$ ridotta scala viene il PIVOT in tutte le righe

Tecnica di calcolo $\rightarrow$ algoritmo di Gauss $\leftleftarrows$
$\rightarrow$ Formula con i determinanti

Calcolo dell'inversa alla Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{inversa} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cerco di fare venire l'identità a sx

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -13 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

A^{-1}

Algoritmo:
- → voglio l'inversa di A
- → parto con $(A \mid Id)$
- → lavoro alla Gauss fino ad avere $(Id \mid B)$
- → la B trovata è l'inversa che volevo.

— o — o —

Perché funziona l'algoritmo?

① Lavorare alla Gauss una matrice è come moltiplicarla a destra per un'altra matrice R

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{COPIO LA } 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

② Lavorare tante volte alla Gauss vuol dire moltiplicare tante volte a sinistra

$$\underbrace{\boxed{R_n \dots R_3 R_2 R_1}}_{R} A$$

③ Quando ho una matrice fatta da 2 pezzi $(\overset{n\times n}{A} \mid \overset{n\times n}{B})$ se moltiplico ottengo

$$R\,(A \mid B) = (RA \mid RB)$$ (segue dal prodotto righe per colonne)

④ Se parto da $(A \mid I)$ e moltiplico per R ottengo

$(AR \mid R)$. Se alla fine a sx ho Id, vuol dire che quello che trovo a dx è la matrice inversa.

— o — o —

Caso speciale Matrici 2x2 ⤳ si fa prima a ricordare la formula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Dim. Moltiplicare e vedere che viene proprio l'identità

— o — o —

Proprietà dell'inversa Tutte le matrici seguenti sono n×n

① $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

Devo verificare che $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = Id$

$$A\underbrace{BB^{-1}}_{Id}A^{-1} = AA^{-1} = Id$$

Stessa cosa dall'altra parte

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}B = Id$$

② $\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$

Verifica: $A^t(A^{-1})^t \underset{\uparrow}{=} (A^{-1}A)^t = Id^t = Id$

$$M^tN^t = (NM)^t$$

Idem dall'altra parte: $(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = Id^t = Id.$

— o — o —

Matrice inversa e cambi di base

<u>Esempio</u> base canonica di $\mathbb{R}^3$: $\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)}$

Altra base: $\underset{v_1}{(1,2,3)}, \underset{v_2}{(1,1,2)}, \underset{v_3}{(2,-1,0)}$

Domanda: se conosco le componenti di $v \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, come calcolo le componenti di v rispetto alla canonica?

Mediante la matrice di cambio di base

In questo caso è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccl} * & * & * & \to e_1 \\ * & * & * & \to e_2 \\ * & * & * & \to e_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ v_1 & v_2 & v_3 & \end{array} \quad \text{NUOVA}$$

base vecchia

Domanda più difficile: se conosco le componenti di v rispetto alla canonica, come calcolo le comp. di v rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$

→ Risposta 1 Metodo bovino. Sia $(7,4,2)$ il vettore u

Risolvo

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix}$$

→ Risposta 2 Scrivo la matrice di cambio di base dalla vecchia $\{e_1,e_2,e_3\}$ alla nuova $\{v_1,v_2,v_3\}$

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \to v_1\\ * & * & * & \to v_2\\ * & * & * & \to v_3\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ e_1 & e_2 & e_3 & \end{array}$$

Quindi nel 1° modo trovo le comp. di e_1,e_2,e_3 e le uso come colonne della matrice.

→ Risposta 3 Basta fare l'inversa della matrice M calcolata sopra

Morale: M → input comp. risp. v_1,v_2,v_3
→ output " " e_1,e_2,e_3

M^{-1} → input " " e_1,e_2,e_3
→ output " " v_1,v_2,v_3

— o — o —

Esempio Calcolare le componenti di $(5,3)$ rispetto alla base $\{\underset{v_1}{(1,5)},\underset{v_2}{(2,-1)}\}$ = base strana

$$M=\begin{pmatrix}1&2\\5&-1\end{pmatrix}$$ Dalla strana alla canonica

$$M^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&-2\\-5&1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1&2\\5&-1\end{pmatrix}$$

Basta calcolare

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verifica: $1\,(1,5) + 2\,(2,-1) = (5,3)$ ☺

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 22

Note Title 26/10/2018

Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare

- Caso 1: sistema omogeneo

$$\boxed{Ax = 0}$$

L'insieme delle soluzioni è il ker. Detta k la dim. del ker, l'insieme delle soluzioni si scrive come

base del ker

$$x = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

numeri arbitrari

Nota bene: $x = 0$ è sempre una soluzione

- Caso 2: sistema non omogeneo

$$\boxed{Ax = b} \qquad b \neq 0$$

Il sistema può avere o no soluzione (ce l'ha se e solo se $b \in \operatorname{Im}$, cioè allo Span delle colonne di A).

Supponiamo che si sia una soluzione x_0, allora TUTTE le soluzioni sono del tipo

$$x = x_0 + \underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k}_{\text{soluzione generale del corrispondente sistema omogeneo}}$$

soluzione qualunque del sistema NON omogeneo

<u>Verifica</u> Sia x_0 una soluzione $Ax_0 = b$

Sia x un'altra soluz. $Ax = b$

Allora $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$

Ma allora $x - x_0$ è sol. del sistema omog.

$$x - x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

Porto x_0 a dx e ho finito

D'altra parte, tutti gli x con la forma data sono soluz.

$$\begin{aligned} Ax &= A(x_0 + c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) \\ &= Ax_0 + c_1 \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Av_1} + \dots + c_k \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Av_k} = Ax_0 = b. \end{aligned}$$

— o — o —

<u>Esempio</u>

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + 5z - w = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$\boxed{w = t}$, $\boxed{z = s}$, $-2y + 7z - w = -4$

$-2y + 7s - t = -4 \rightsquigarrow -2y = -4 - 7s + t$

$$\boxed{y = +2 + \frac{7}{2}s - \frac{1}{2}t}$$

$x + y - z = 3 \rightsquigarrow x = 3 + z - y = 3 + s - 2 - \frac{7}{2}s + \frac{1}{2}t = 1 - \frac{5}{2}s + \frac{1}{2}t$

$$\boxed{x = 1 - \frac{5}{2}s + \frac{1}{2}t}$$

$$(x, y, z, w) = \underbrace{(1, 2, 0, 0)}_{x_0} + s\underbrace{(-5, 7, 2, 0)}_{v_1} + t\underbrace{(1, -1, 0, 2)}_{v_2}$$

x_0: risolve sist. non omog.

v_1, v_2: base del ker (risolvono sist. omog.)

__Esempio__ Dimostrare che esiste unica $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lin. t.c.

$$f(1,1) = (1,3) \qquad f(2,-1) = (1,5)$$

Basta verificare che $\underbrace{(1,1)}_{v_1}$ e $\underbrace{(2,-1)}_{v_2}$ sono una base

Scrivere la matrice di f dalla canonica alla canonica

$\boxed{1° \text{ modo}}$

$$\begin{array}{ccl} * & * & \to e_1 \\ * & * & \to e_2 \\ \uparrow & \uparrow & \\ f(e_1) & f(e_2) & \end{array}$$

Quindi mi servono $f(e_1)$ e $f(e_2)$
Per calcolare $f(e_1)$ lo scrivo come comb. lin. di

$$(1,0) = a\,(1,1) + b\,(2,-1)$$

⇝ trovo a e b

⇝ calcolo $f(1,0) = a\, f(1,1) + b\, f(2,-1)$

$$= a\,(1,3) + b\,(1,5) = \underbrace{(*,*)}_{1^a \text{ colonna}}$$

Stessa cosa per e_2.

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Ultra-bovino. La matrice è $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$a + b = 1 \qquad 2a - b = 1$

$c + d = 3 \qquad 2c - d = 5$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Un po' più astuto

$$\begin{array}{cc} e_1 & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$} \\ e_2 & \\ & \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} \end{array} = A$$

Questa matrice rappresenta f dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

Mi serve qualcosa che prenda in input le comp. rispetto alla canonica e restituisca quelle risp. alla $\{v_1, v_2\}$

Scrivo il cambio di base strana ⇝ canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M \qquad M^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice richiesta è

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}} = B$$

rappresenta f dalla canonica alla canonica

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verifiche

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A \; M^{-1}$

prende le comp. di x rispetto alla canonica e restituisce " " " " " " $\{v_1, v_2\}$

prende le comp. di x rispetto alla $\{v_1, v_2\}$ e restituisce le comp. di $f(x)$ rispetto alla $\{e_1, e_2\}$

$\boxed{4° \text{ modo}}$ $\boxed{\text{METODO RAPUANO}}$

$f(1,1) = (1,3)$
$f(2,-1) = (1,5)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

← segui corretti dopo video

Trasposta di quella giusta !!!!

Perché funziona il metodo Rapuano.
Siano A ed M come nel 3° modo.
Rapuano parte da $(M^t \mid A^t)$
Lavorando alla Gauss arriva a

$$R(M^t \mid A^t) = (\underbrace{RM^t}_{= Id} \mid RA^t) \rightsquigarrow R = (M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$$

Ma allora a dx ritroviamo

$$RA^t = (M^{-1})^t A^t = (\underbrace{AM^{-1}}_{\uparrow \text{ matrice calcolata nel 3° modo}})^t$$

—o —o —

Esempio In $\mathbb{R}^3$ scrivere la matrice di cambio base da $\{v_1, v_2, v_3\}$ a $\{w_1, w_2, w_3\}$

$\boxed{\text{1° modo: semi-bovino}}$

$$\begin{array}{ccc|l} * & * & * & \to w_1 \\ * & * & * & \to w_2 \\ * & * & * & \to w_3 \\ \uparrow & & & \\ v_1 & & & \end{array}$$

Scrivo $v_1 = a w_1 + b w_2 + c w_3$ e $(a, b, c) \rightsquigarrow$ 1ª colonna
idem per le altre

$\boxed{\text{2° modo: più astuto}}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & | & v_2 & | & v_3 \end{pmatrix}}_{\text{cambio base}} \qquad B = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & | & w_2 & | & w_3 \end{pmatrix}}_{\text{dalla } \{w_1, w_2, w_3\}}$$

cambio base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica

dalla $\{w_1, w_2, w_3\}$ alla canonica

Quindi la matrice richiesta è $B^{-1}A$

Esempio In $\mathbb{R}^2$ prendiamo

$$V = \mathrm{Span}\{(1,2)\} \qquad W = \mathrm{Span}\{(1,3)\}$$

Si verifica subito che $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$

Quindi ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si scrive in modo unico come

$$x = \underset{\substack{\cap\\ V}}{v} + \underset{\substack{\cap\\ W}}{w}$$

Scrivere la matrice che rappresenta l'appl. $x \to v$

Si tratta dell'applic. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$f(1,2) = (1,2)$
$f(1,3) = (0,0)$

Da qui posso concludere alla Rapunzel oppure con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Pensarci con calma.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 23

Note Title 30/10/2018

Domande:

① Dati n vettori, come capisco se sono lin. indip? DETERMINANTE

② " , come calcolo la dim. dello Span? RANGO

DETERMINANTE

→ Funzione che prende in INPUT n vettori di $\mathbb{R}^n$ e restituisce in OUTPUT un numero: questo numero viene 0 se e solo se i vettori sono lin. dip.

→ Funzione che prende in INPUT una matrice $\boxed{n \times n}$ (quadrata) e restituisce un numero

Collegamento: la matrice usa gli n vettori come righe.

Indice:

1 – Definizione
2 – Prime conseguenze
3 – Caso 2×2 e 3×3
4 – Determinante e algoritmo di Gauss
5 – Sviluppi di LAPLACE
6 – Sviluppi di LEIBNITZ
7 – Teorema di BINET
8 – Applicazioni: → formula misteriosa per vettori ortogonali
→ formula per la matrice INVERSA
→ formula di CRAMER per sistemi lineari

DEFINIZIONE Def. assiomatica: elenco le proprietà che voglio che il det. abbia.

Det : (n vettori in $\mathbb{R}^n$) $\rightsquigarrow$ numero

Chiediamo 4 proprietà

(Det 1) $\text{Det}(\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_n}) = 1$

base canonica $\rightsquigarrow$ come matrice sarebbe quella identica

(Det 2) Se tra gli n vettori ce ne sono 2 uguali, allora $\text{Det} = 0$

(Det 3) $\text{Det}(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda \, \text{Det}(v_1, \dots, v_n)$

(se moltiplico per λ uno dei vettori, allora il Det si moltiplica per λ)

(Det 4) Le somme escono fuori

$$\text{Det}(v_1, \dots, \underbrace{v_i + \hat{v}_i}, \dots, v_n)$$

invece che 1 vett., c'è la somma di 2 vett.

$$= \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \text{Det}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

<u>Oss.</u> Le proprietà (Det 3) e (Det 4) si possono riassumere dicendo che Det è una funzione lineare di ognuno degli n vettori.

Teorema misterioso Esiste un'unica funzione che ha queste 4 proprietà.

PRIME CONSEGUENZE

(Det 5) Se scambio due vettori tra di loro, il det. cambia segno

$$\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_i+v_j, \dots, v_i+v_j, \dots, v_n) \underset{\text{(Det 2)}}{=} 0$

la prima somma esce

$$= \mathrm{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i+v_j, \dots, v_n) + \mathrm{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i+v_j, \dots, v_n)$$

$$= \underbrace{\mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots)}_{\overset{\shortparallel}{0} \ (2 \text{ volte } v_i)} + \mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) +$$

$$\mathrm{Det}(\dots v_j \dots v_i \dots) + \underbrace{\mathrm{Det}(\dots v_j, \dots, v_j \dots)}_{\overset{\shortparallel}{0} \ (2 \text{ volte } v_j)}$$

Gli altri 2 hanno somma nulla, da cui la tesi.

(Det 6) Le combinazioni lineari "escono fuori"

$$\mathrm{Det}(v_1, \dots, \underset{\text{i-esima pos}}{c_1 w_1 + \dots + c_n w_n}, \dots, v_n)$$

$$= c_1 \mathrm{Det}(\dots, w_1, \dots) + \dots + c_n \mathrm{Det}(\dots, w_n, \dots)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Uso (Det 4) per fare uscire le somme e uso (Det 3) per fare uscire le costanti

— o — o —

(Det 7) Se uno degli n vettori è comb. lineare dei restanti, allora Det $= 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che v_1 sia comb. lin. degli altri, cioè

$$v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Allora

$$\text{Det}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Det}(c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_2, \dots, v_n)$$

$$= c_2 \underbrace{\text{Det}(v_2, v_2, \dots, v_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + c_3 \underbrace{\text{Det}(v_3, v_2, \dots, v_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \dots$$

= i termini sono tutti nulli per colpa di (Det 2)

(Det 8) Se $v_1, \dots, v_n$ sono LIN. DIP., allora per forza Det $= 0$
(Metà della richiesta iniziale LIN. DIP. $\Rightarrow$ Det $= 0$, manca ancora LIN. INDIP $\Rightarrow$ Det $\neq 0$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se sono LIN. DIP., allora almeno uno si può scrivere come comb. lineare dei restanti, e a quel punto applichiamo (Det 7).

— o — o —

$\boxed{\text{CASO SPECIALE } 2\times 2}$

$$v_1 = (a, b) = a e_1 + b e_2$$
$$v_2 = (c, d) = c e_1 + d e_2$$

$\text{Det}(a e_1 + b e_2, c e_1 + d e_2) =$ (tiro fuori 1ª comb. lin.)

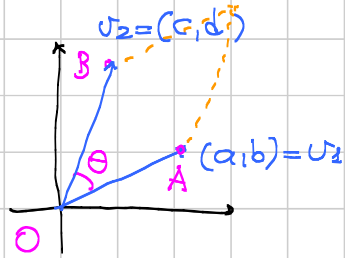
$= a\,\text{Det}(e_1, c e_1 + d e_2) + b\,\text{Det}(e_2, c e_1 + d e_2) =$ (tiro fuori la 2ª)

$$= ac \underbrace{\text{Det}(e_1, e_1)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ (\text{Det } 2)} + ad \underbrace{\text{Det}(e_1, e_2)}_{\overset{\shortparallel}{1}\ (\text{Det } 1)} + bc \underbrace{\text{Det}(e_2, e_1)}_{\substack{\downarrow \\ -\text{Det}(e_1, e_2) = -1 \\ (\text{Det } 5)}} + bd \underbrace{\text{Det}(e_2, e_2)}_{(\text{Det } 2)\ \overset{\shortparallel}{0}}$$

Conclusione $\boxed{\text{Det} = ad - bc}$

In termini di matrice $\boxed{\text{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$

Interpretazione geometrica Pensiamo ai vettori nel piano



a meno del segno

$\boxed{\text{Det} = \text{"area" del parallelogramma generato da } v_1 \text{ e } v_2}$

Area positiva: ruoto v_1 su v_2 facendo l'angolo piccolo se vado in senso antiorario

Questo rende evidente che $\boxed{\text{Det} = 0 \iff v_1 \text{ e } v_2 \text{ sono LIN.DIP.}}$

Come dimostro che Det = "Area" ?

1° modo Ultra bovino: scompongo tutto in rettangoli e triangoli (ma ci sono probl. con i segni)

2° modo Area parallelogramma = 2 Area (OAB)

$$= 2\,\frac{1}{2}\, OA \cdot OB \cdot \sin\theta = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

formula trigonometrica

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \underset{\text{conto}}{=} \sqrt{(ad-bc)^2} = |\text{Det}|$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 24

Note Title 30/10/2018

$\boxed{\text{DET. } 3\times 3}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Det}(ae_1+be_2+ce_3,\, de_1+ee_2+fe_3,\, ge_1+he_2+ie_3)$$

$$a\,\mathrm{Det}(e_1,\, de_1+ee_2+fe_3,\, ge_1+he_2+ie_3) + b\,\mathrm{Det}(e_2, \ldots, \ldots) + c\,\mathrm{Det}(e_3, \ldots, \ldots)$$

Espandendo tutto vengono 27 termini, di cui molti nulli perché contengono vettori ripetuti.
Alla fine i termini $\neq 0$ sono solo 6:

$$aei\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1,e_2,e_3)}_{=1} + bfg\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_2,e_3,e_1)}_{=1} + cdh\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_3,e_1,e_2)}_{=1}$$

$$+ceg\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_3,e_2,e_1)}_{=-1} + bdi\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_2,e_1,e_3)}_{=-1} + afh\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1,e_3,e_2)}_{=-1}$$

$$\mathrm{Det}(e_2,e_3,e_1) = -\mathrm{Det}(e_1,e_3,e_2) = \mathrm{Det}(e_1,e_2,e_3) = 1$$

$$\mathrm{Det}(e_3,e_1,e_2) = -\mathrm{Det}(e_1,e_3,e_2) = \mathrm{Det}(e_1,e_2,e_3) = 1$$

<u>Conclusione</u> $\boxed{\mathrm{Det} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh}$

REGOLA DI SARRUS

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

parall. diag $\searrow$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

parall. diag. $\swarrow$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

$\boxed{\text{ACHTUNG}}$ SARRUS vale SOLO nel caso 2×2 e 3×3
In dimensione + alta servono altri metodi.

Interpretazione geometrica: volume del "parallelepipedo" generato dai vettori v_1, v_2, v_3.

— ∘ — ∘ —

DETERMINANTE E ALGORITMO DI GAUSS

Se A è matrice $m \times n$, e ci lavoro alla Gauss, che succede al suo Det ?
Ci sono due operazioni

① Scambiare 2 righe ⇝ Det cambia segno

② Sostituire riga R_j con $R_j + bR_i$ (operazione ultraortodossa)

$$\mathrm{Det}(\ldots R_i \ldots, R_j + bR_i, \ldots) = \mathrm{Det}(\ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots) + b\,\underbrace{\mathrm{Det}(\ldots, R_i, \ldots, R_i, \ldots)}_{\overset{\shortparallel}{0} \ (2 \text{ volte } R_i)}$$

L'operazione ② in versione ULTRA-ORTODOSSA non cambia il determinante
In versione "classica" $R_j \rightsquigarrow aR_j + bR_i$ con $a \neq 0$ si moltiplica il determinante per a

Conseguenza: alla fine dell'algoritmo otteniamo una matrice a scala.
Se sappiamo calcolare il suo det, allora abbiamo finito.

Caso speciale : matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$$

prod. el. diag. princ.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\text{Det}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$

$$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, \dots, \lambda_n e_n) = \dots = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \underbrace{\text{Det}(e_1, \dots, e_n)}_{= 1}$$

Caso meno speciale: matrice triangolare superiore

solo 0 sotto la diag. princ.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$$

come se fosse diagonale

Nota bene : una matrice $n \times n$, ridotta a scala, è triangolare superiore (eventualmente con zeri anche sulla diagonale)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Scrivo la prima riga come $v_1 = \lambda_1 e_1 + w$

dipende solo da $e_2, \dots, e_n$

$$\text{Det}(\lambda_1 e_1 + w, v_2, \dots, v_n) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n) + \underbrace{\text{Det}(w, v_2, \dots, v_n)}_{= 0}$$

L'ultimo termine fa 0 perché $w, v_2, \dots, v_n$ sono n vettori con la prima componente nulla, quindi è come fossero n vettori in $\mathbb{R}^{n-1}$, quindi sono per forza LIN. DIP. $\rightsquigarrow$ Det $= 0$.

Ora scrivo $v_2 = \lambda_2 e_2 + w$

↑ha nulle le prime 2 componenti

$\lambda_1 \operatorname{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda_1 \operatorname{Det}(e_1, \lambda_2 e_2 + w, \dots, v_n)$

$= \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{Det}(e_1, e_2, v_3, \dots) + \lambda_1 \underbrace{\operatorname{Det}(e_1, w, v_3, \dots, v_n)}_{\text{n vettori che hanno nulla la } 2^a \text{ comp., quindi LIN. DIP.}}$

$\operatorname{Det}(e_1, w, v_3, \dots, v_n) = 0$

Procedendo di questo passo, arriviamo a $\lambda_1 \dots \lambda_n \operatorname{Det}(e_1, \dots, e_n)$, con $\operatorname{Det}(e_1, \dots, e_n) = 1$

— o — o —

Esempio Calcolare il Det di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - \frac{1}{2} R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6} \end{pmatrix} \quad R_4 - \frac{1}{3} R_3 \qquad \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$$

$\operatorname{Det}(\text{Matrice iniziale}) = 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot \frac{17}{6} = -17$

Oss. Avendo usato solo passaggi ultraortodossi

Det finale $= \operatorname{Det}$ iniziale

Oss. Il Det di una matrice viene $=0$ se e solo se la matrice ridotta a scala ha delle righe nulle alla fine, cioè se e solo se le colonne sono LIN. DIP.
(questo non dimostra l'intento iniziale, cioè che Det $=0 \Rightarrow$ RIGHE lin. dip.)
La conclusione si avrà quando dimostreremo che Det di una matrice è uguale a quello della trasposta.

Oss. (di tipo logico)
Finora abbiamo dimostrato che esiste al massimo una funzione che ha le 4 proprietà (Det 1), ..., (Det 4)

Nessuno esclude, per ora, che lavorando alla Gauss in altro modo, si ottenga un valore diverso.
Se succedesse, vorrebbe dire che non esiste nessuna funzione con le 4 proprietà (cosa che è falsa, ma non lo abbiamo dim.)

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 25

Titolo nota 30/10/2018

SOTTOMATRICI

Def. Sia A una qualunque matrice $m \times n$.
Una sottomatrice $\ell \times k$ è una qualunque matrice ottenuta da A cancellando $m-\ell$ righe e $n-k$ colonne (si intende che $m \geq \ell$ e $n \geq k$)

Esempio
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & \pi & 6 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Caso speciale Se A è una matrice $n \times n$ indico con A_{ij} la sottomatrice ottenuta eliminando la riga i e la colonna j

Esempio
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

SVILUPPI DI LAPLACE (rispetto alle righe o alle colonne)

Rispetto alla 1ª colonna Sia A matrice $n \times n$

$$\boxed{\operatorname{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \cdot \operatorname{Det} A_{i,1}}$$

elemento riga i colonna 1

sottomatrice ottenuta eliminando riga i e colonna 1

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

La formula precedente ci dice che

$$\mathrm{Det}(A) = a\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Vantaggio: permette di calcolare determinanti $n \times n$ posto di saper calcolare det $(n-1) \times (n-1)$.

Teorema (misterioso) La formula di LAPLACE rispetto alla prima colonna verifica le proprietà (Det 1), ..., (Det 4)

(e questo sistemerebbe la parte di esistenza del teo. mist. iniziale)

Rispetto alla j-esima colonna

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \,\mathrm{Det}(A_{i,j})}$$

I segni sono presi "a scacchiera"

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Rispetto alla i-esima riga

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \,\mathrm{Det}(A_{i,j})}$$

Esempio
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

Sviluppo rispetto alla 2ª riga

$$\text{Det}(A) = -d\,\text{Det}\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + e\,\text{Det}\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix}$$

Esempio
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 7 & 11 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Come calcolo il Det ?

1° modo Sviluppo Det $(3e_1 + e_2 + 2e_3 \dots)$
⇝ vengono solo 5^5 termini ☹

2° modo Lavoro alla Gauss, e questo di solito è il modo migliore

3° modo Osservo che ci sono molti zeri, quindi provo alla Laplace

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 4^a \text{ colonna}}}{\text{Det}(A) =} -1 \cdot \text{Det}(\text{che resta}) \underset{\substack{\uparrow \\ 2^a \text{ riga} \\ \text{di quello che} \\ \text{resta}}}{=} -1 \cdot 4 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 8 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(segno – aggiunto dopo video)

$$= -1 \cdot 4 \cdot 3\,\text{Det}\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = -1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (55-48) = -84$$

In generale, per il calcolo di un Det
- → SARRUS nei casi 2×2 e 3×3
- → Laplace con righe/colonne astute se ci sono tanti 0
- → Gauss altrimenti.

<u>Conseguenza degli sviluppi</u> Posto che gli sviluppi per riga e per colonna forniscono proprio il det, allora

$$\boxed{\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(A^t)}$$

<u>Dim</u>: fare Det (A) per colonne è come fare Det (A^t) per la corrispondente riga.

— o — o —

Dimostrazione che gli sviluppi per riga danno lo stesso risultato di quelli per colonna.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Sulla riga i-esima c'è un 1 e tutti 0

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} * & & * \\ 0\dots0 & 1 & 0\dots0 \\ * & & * \end{pmatrix} & \leftarrow \text{riga } i\text{-esima} \\ \uparrow \text{colonna } j & \end{array}$$

Quando sviluppo per riga trovo un solo termine che è

$$(-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot \operatorname{Det} A_{i,j}$$

Quando sviluppo rispetto alla colonna j, trovo che i determinanti di $A_{i,j}$ sono tutti nulli perché hanno una riga di zeri, tranne quello in cui elimino l'1, caso in cui viene uguale al precedente (e uguale al Determinante di tutta la matrice)

Caso 2 Sulla riga i-esima c'è un λ e gli altri sono 0
Sostanzialmente uguale al precedente.

Caso 3 Sulla riga i-esima c'è di tutto

$$\begin{pmatrix} & * & \\ \lambda_1 & \lambda_2 \dots & \lambda_n \\ & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & * & \\ \lambda_1 & 0 \dots & 0 \\ & * & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & * & \\ 0 \ \lambda_2 & 0 \dots & 0 \\ & * & \end{pmatrix} + \dots$$

Det (Matrice iniziale) = somma Det (matrici a destra)

le comb. lin escono fuori

I determinanti delle matrici a destra sono

$$\underbrace{(-1)^{i+1} \lambda_1 \operatorname{Det}(A_{i,1}) + (-1)^{i+2} \lambda_2 \operatorname{Det}(A_{i,2}) + \dots}_{\text{sviluppo alla Laplace per riga}}$$

Termine a termine coincide con i rispettivi sviluppi per colonna.

<u>Idea essenziale</u>: ogni matrice si scompone come somma di matrici in cui una riga ha un solo elemento non nullo.

<u>Oss.</u> Cosa succede se sviluppo la matrice dello step 1 rispetto alla 1ª colonna

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} & * & \\ 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ & * & \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } i \\ \uparrow \\ \text{colonna } j \end{array}$$

Tutte le volte resta una matrice che ha una riga con tutti zero meno un termine, ma di questa non posso dire nulla.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 26

Note Title 02/11/2018

$\boxed{\text{SVILUPPI DI LEIBNITZ}}$ (Descrizione)

Esempio 3x3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

$$\mathrm{Det}(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Oss. Ogni fattore della somma è il prod. di 3 el. della matrice con la proprietà che ce n'è uno per riga e uno per colonna

Sviluppo di Leibnitz Per ogni matrice A di dim. $n \times n$ il det è la somma di prodotti di n termini tali che per ogni riga e per ogni colonna ce n'è esattamente uno.

Con quale segno compare un certo prodotto? Si usa la regola degli scambi

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$\{e_2, e_3, e_1\} \rightsquigarrow \{e_1, e_3, e_2\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3\}$

nella 1ª riga il 2º

nella 2ª riga il 3º

Il segno è $(-1)^{\text{numero di scambi}}$ $\rightsquigarrow$ nel caso sopra 2

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \\ o & p & q & r \end{pmatrix}$$

Nel det c'è il termine $celr$ con segno

$\{e_3, e_1, e_2, e_4\} \rightsquigarrow \{e_1, e_3, e_2, e_4\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

2 scambi $\rightsquigarrow$ segno $\oplus$

Importanza sviluppi di Leibnitz

→ dal punto di vista del calcolo del Det, sono poco utili

→ dal punto di vista teorico, se uno scrive per bene la formula, questo è un modo di dim. che esiste una funzione che verifica (Det 1), ..., (Det 4).

Oss. Se una matrice ha una riga o una colonna di zeri, allora Det = 0 per forza (sono tutti nulli i prodotti che lo compongono).

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema di BINET}}$ Se A e B sono matrici $n \times n$, allora

$$\boxed{\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)}$$

$\boxed{\text{Conseguenza}}$ (Determinante dell'inversa)

Sia A matrice $n \times n$.

Allora

- A è invertibile se e solo se $\mathrm{Det}(A) \neq 0$

- se esiste l'inversa, allora

$$\boxed{\mathrm{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se esiste l'inversa, allora $AA^{-1} = Id$, quindi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Det}(AA^{-1}) & = & \mathrm{Det}(Id) \\ \text{BINET} \Rightarrow \| & & \| \\ \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(A^{-1}) & = & 1 \end{array}$$

Ricavo $\mathrm{Det}(A^{-1})$. Andrebbe dim. a parte che $\mathrm{Det}(A) \neq 0 \Rightarrow$ esiste matrice inversa.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. BINET}}$

$\boxed{\text{Caso 1 : } \operatorname{Det}(B) \neq 0}$ Fissata B, per ogni A matrice $n \times n$ pongo

$$f(A) := \frac{1}{\operatorname{Det}(B)} \cdot \operatorname{Det}(AB)$$

Se dimostro che $f(A) = \operatorname{Det}(A)$ allora ho BINET.
Per questo basta verificare che $f(A)$ soddisfa (Det 1), ..., (Det 4).

(Det 1) $f(Id) = 1$ $\rightsquigarrow$ ovvio, viene $\frac{\operatorname{Det}(B)}{\operatorname{Det}(B)}$

(Det 2) Se A ha 2 righe uguali, allora $f(A)$ deve essere 0.

Osservo che se le righe i e j di A sono uguali, allora anche le righe i e j di AB sono uguali (prod. righe per colonne), ma allora $\operatorname{Det}(AB) = 0$ e quindi $f(A) = 0$.

(Det 3) Se moltiplico per $\lambda \in \mathbb{R}$ la i-esima riga di A, allora anche la i-esima riga di AB viene molt. per λ, e quindi $\operatorname{Det}(AB)$ risulta molt. per λ, e quindi idem per $f(A)$.

(Det 4) Se sostituisco una riga di A con la somma di 2 vettori, allora lo stesso vale per la corrispondente riga di AB. Detto meglio, se A_1 e A_2 sono due matrici che differiscono solo in una riga, allora

$$f(A_1 + A_2) = \frac{1}{\operatorname{Det}(B)} \cdot \operatorname{Det}((A_1 + A_2)B)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Det}(B)} \operatorname{Det}(\underbrace{A_1B + A_2B}_{\text{Differiscono solo per una riga}}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(B)} \{\operatorname{Det}(A_1B) + \operatorname{Det}(A_2B)\}$$

$$= f(A_1) + f(A_2).$$

$\boxed{\text{ACHTUNG!}}$ NON è vero in generale che

$$\boxed{\mathrm{Det}\,(A_1+A_2) = \mathrm{Det}\,(A_1) + \mathrm{Det}\,(A_2)} \quad \text{FALSO !!!}$$

Questo è VERO solo se A_1 e A_2 sono uguali ovunque tranne in una riga.

[(Det 4) $\mathrm{Det}\,(\ldots, v_i + \hat{v}_i, \ldots) = \mathrm{Det}\,(\ldots, v_i, \ldots) + \mathrm{Det}\,(\ldots, \hat{v}_i, \ldots)$
il resto è la stessa roba]

$\boxed{\text{Caso 2: } \mathrm{Det}\, B = 0}$ Qui voglio dire che anche $\mathrm{Det}\,(AB) = 0$.

Giro perverso: $\mathrm{Det}\,(B) = 0 \iff$ B ridotta scala ha riga finale nulla
$\iff$ le colonne di B sono lin. dip.
$\overset{?}{\Longrightarrow}$ le colonne di AB sono lin. dip.
$\iff$ AB ridotta a scala ha riga finale nulla
$\iff \mathrm{Det}\,(AB) = 0$

Resta da verificare: se le colonne di B sono lin. dip., allora le colonne di AB sono lin. dip.

$$B = \left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, C_m \right) \Longrightarrow AB = \left(AC_1 \,\middle|\, AC_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, AC_m \right)$$

le colonne di AB si ottengono moltiplicando A per le colonne di B

se $x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_m C_m = 0$, allora

$$A(x_1 C_1 + \ldots + x_m C_m) = x_1 AC_1 + \ldots + x_m AC_m = 0$$

e quindi anche le colonne di AB sono lin. dip.

— o — o —

Esempio 1 Dimostrare che $\{(1,0,1),(2,-1,1),(0,2,0)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Modo preistorico}}$ Verifico che

→ sono generatori (sist. NON omogeneo)

→ sono lin. indip. (sistema omogeneo)

$\boxed{\text{Modo antico}}$ Essendo in numero uguale alla dimensione, basta una a caso delle due verifiche prec.

$\boxed{\text{Modo post-Det}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -2 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot -1$$
$$= 2 \neq 0.$$

Esempio 2 Dimostrare che

$$\underset{M_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

sono una base di $M_{2\times 2}$

Corretto dopo video

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow M_1 \\ \leftarrow M_2 \\ \leftarrow M_3 \\ \leftarrow M_4 \end{array}$$

Det = 1 · Sarrus sul resto

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

⇝ sono una base ☺

— ∘ — ∘ —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 27

Note Title 02/11/2018

FORMULA MISTERIOSA PER VETTORI ORTOGONALI

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\underbrace{v_2w_3 - v_3w_2}_{\text{Det } A_{1,1}}, \underbrace{v_3w_1 - v_1w_3}_{-\text{Det } A_{1,2}}, \underbrace{v_1w_2 - v_2w_1}_{\text{Det } A_{1,3}})$$

Dico che il vettore scritto è perpendicolare a (v_1, v_2, v_3) e a (w_1, w_2, w_3)

Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 righe} \\ \text{uguali}}}{0 =} \text{Det} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{1}^a \text{ riga}}}{=} v_1 \cdot \text{Det } A_{1,1} - v_2 \cdot \text{Det } A_{1,2} + v_3 \text{ Det} A_{1,3}$$

= prodotto scalare tra $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e il vettore prodotto dalla formula misteriosa

Stessa identica cosa se al posto di $* * *$ metto il vettore w.

— o — o —

Allo stesso modo, ad esempio in $\mathbb{R}^4$, posso produrre un vettore perpendicolare a 3 vettori dati

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \end{matrix}$$

Un vettore perp. ai 3 vettori dati è

$$(\text{Det } A_{1,1}, -\text{Det } A_{1,2}, \text{Det } A_{1,3}, -\text{Det } A_{1,4})$$

Metodo antico: impostare sistema di 3 eq. in 4 incognite.

— o — o —

$\boxed{\text{METODO DI CRAMER}}$ (Per i sistemi lineari)

Ho un sistema di n equazioni in n incognite (stesso numero) non omogeneo

$$\underset{\substack{\text{matrice} \\ n\times n}}{A}\ \underset{\substack{\text{vettore} \\ \text{incognite}}}{x} = \underset{\text{vettore lungo } n}{b}$$

Supponiamo $\text{Det}(A) \neq 0$. Allora la soluzione è unica e

$$\boxed{x_i = \frac{\text{Det}(A_i)}{\text{Det}(A)}}$$

dove A_i è la matrice ottenuta a partire da A sostituendo la i-esima colonna con b

Oss. Dal p.to di vista pratico non è molto comodo perché fare i Det è pesante quando le matrici sono grandi. Diventa interessante se mi serve solo una componente della soluzione.

Esempio
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 5 \\ x \qquad\ \ - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\text{Det}(A)}$$ e con 2 Sarrus ho finito.

$\boxed{\text{Dim. che CRAMER funziona}}$

Indichiamo con $C_1, \dots, C_n$ le colonne della matrice A.
Sia $(x_1, \dots, x_n)$ una sol. del nostro sistema, cioè

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = b$$

Consideriamo $A_i = \left(C_1 | \dots | C_{i-1} | b | C_{i+1} | \dots | C_n \right)$

Quindi

$$A_i = \left(\underbrace{C_1 | \dots}_{\text{normali colonne di } A} | x_1 C_1 + \dots + x_n C_n | \underbrace{\dots}_{\text{normali colonne di } A} \right)$$

$$= x_1 \left(C_1 | \dots | C_1 | \dots \right) + x_2 \left(C_1 | \dots | C_2 | \dots \right) + \dots$$

Tutte queste matrici sono uguali ovunque tranne che nella colonna i-esima, quindi il loro Det è la somma dei Det
(c'è di mezzo che il Det della trasposta è uguale a quello della matrice originaria)
Ma allora

$$\operatorname{Det}(A_i) = x_1 \underbrace{\operatorname{Det}\left(C_1 | \dots | C_1 | \dots \right)}_{= 0} + x_2 \operatorname{Det}\left(C_1 | \dots | C_2 | \dots \right) + \dots$$

$$= x_i \operatorname{Det}\left(C_1 | \dots | C_i | \dots C_n \right) = x_i \operatorname{Det} A$$

(Tutti gli altri determinanti sono nulli perché ci sono 2 colonne uguali)

Dividendo si ha la tesi

— o — o —

FORMULA PER MATRICE INVERSA

Per calcolare l'inversa di A si può usare il seguente algoritmo

1. $A_{i,j}$
2. segni
3. Trasposta
4. Divido per Det

confrontare in un esempio la velocità di esecuzione rispetto a Gauss

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \text{Det} = -1+0+8+1-0-12 = -4$

1. In ogni posizione scrivo Det $A_{i,j}$ $\quad \begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Applico il solito pattern dei segni a scacchiera $\quad \begin{pmatrix} -13 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

3. Trasposta $\quad \begin{pmatrix} -13 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

4. Divido tutto per Det A $\quad \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A^{-1}$

<u>Esempio</u> Il caso 2×2 rientra in questo algoritmo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{①}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \underset{②}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \underset{③}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\underset{④}{\rightsquigarrow} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— o — o —

Perché funziona l'algoritmo?

Deve succedere che $A \cdot A^{-1} = Id$

Cosa succede all'elemento in posizione (1,1) nel prodotto?

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} \boxed{\quad\quad} \\ \\ \end{pmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} \boxed{\ } & \ \\ \ & \ \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} * & \ \\ \ & \ \end{pmatrix}$$

Chi sono gli el. della 1ª colonna di A^{-1}? Se ci pensiamo sono, a meno della divisione per Det A

$$\begin{matrix} & \text{Det } A_{1,1} \\ - & \text{Det } A_{1,2} \\ & \text{Det } A_{1,3} \\ - & \text{Det } A_{1,4} \\ & \vdots \end{matrix}$$

1° colonna di A^{-1}

Cosa succede se moltiplico per la 1ª riga di A?

$a_{1,1} \cdot \text{Det } A_{1,1} - a_{1,2} \text{ Det } A_{1,2} + a_{1,3} \text{ Det } A_{1,3} - \dots$

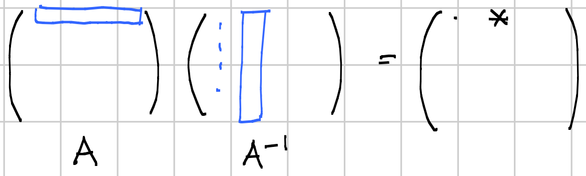
= Sviluppo di Laplace di Det (A) rispetto alla 1ª riga, e quindi

= Det (A)

che semplificato con il Denominatore viene 1.

Allo stesso modo si sistemano tutti gli 1 sulla diagonale

Vediamo ora il 2° elemento della prima riga



La seconda colonna di A^{-1} contiene

$-\text{Det}\, A_{2,1}$
$\text{Det}\, A_{2,2}$
$-\text{Det}\, A_{2,3}$
$\text{Det}\,(A_{2,4})$
$\vdots$

Cosa succede quando moltiplico per la 1° riga

$$= -a_{1,1}\,\text{Det}\,A_{2,1} + a_{1,2}\,\text{Det}\,A_{2,2} - a_{1,3}\,\text{Det}\,A_{2,3} + \dots$$

(ogni elemento viene moltiplicando per il Det della sotto-matrice ottenuta eliminando non lui, ma chi gli sta sotto !!!

= sviluppo di Laplace della matrice ottenuta da A sostituendo la 2° riga con una copia della prima.

= 0 perché a questo punto ci sono 2 righe uguali.

Allo stesso modo si sistemano tutti i termini fuori dalla diagonale.

<u>Conclusione</u> Per calcolare l'inversa abbiamo a disposizione due metodi

→ Gauss a partire da (A, Id) fino ad arrivare a $(Id, \underbrace{B}_{A^{-1}})$

→ Metodo con l'algoritmo appena descritto.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 28

Note Title 06/11/2018

RANGO DI UNA MATRICE

Def. Sia A una matrice $m \times n$.

- Si dice R-rango di A il massimo numero di RIGHE lin. indip.
- Si dice C-rango " " " COLONNE "
- Si dice D-rango il massimo k per cui esiste una sotto-matrice $k \times k$ con $\det \neq 0$

Oss. Dalla def. data segue
- R-rango $\leq m$
- C-rango $\leq n$
- D-rango $\leq \min\{m, n\}$

Oss. I vari ranghi si possono caratterizzare come segue

$\boxed{\text{C-rango}}$
- max num. col. lin. indip.
- $\dim(\mathrm{Span}(C_1, \dots, C_n))$ colonne di A
- $\dim(\mathrm{Im}(A))$ vista come appl. lin. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\boxed{\text{R-rango}}$
- max. num. righe lin. indip.
- $\dim(\mathrm{Span}(R_1, \dots, R_m))$ righe di A
- $\dim(\mathrm{Im}(A^t))$ pensata come $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{D-rango}}$ D-rango di $A = k$ se succedono 2 cose
- esiste sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$
- TUTTE le sottomatrici $(k+1) \times (k+1)$ hanno $\det = 0$.

TEOREMA Per ogni matrice A vale

$$\boxed{R\text{-rango} = C\text{-rango} = D\text{-rango}}$$

<u>Oss.</u> Dato il teorema avremo che $\text{rango}(A) \le \min\{m, n\}$

Equivalenza R-rango = C-rango Segue da alcuni risultati intermedi

<u>Prop. 1</u> Quando opero alla Gauss su una matrice, R-rango e C-rango non cambiano

<u>Prop. 2</u> Se S è una matrice a scala, allora

$$\boxed{R\text{-rango}(S) = C\text{-rango}(S) = \text{numero dei PIVOT}}$$

Dando per buone Prop. 1 e Prop. 2, si dimostra R-rango = C-rango

Dim. Parto da A qualunque e lavorandola alla Gauss arrivo a matrice S a scala. Ora

$$R\text{-rango}(A) \underset{\text{Prop. 1}}{=} R\text{-rango}(S) \underset{\text{Prop. 2}}{=} C\text{-rango}(S) \underset{\text{Prop. 1}}{=} C\text{-rango}(A)$$

— o — o —

Dim. Prop. 1

R-rango $\rightarrow$ Se scambio 2 righe è evidente che il max numero righe lin. indip. non cambia

$\rightarrow$ Se sostituisco R_i con $aR_i + bR_j$ con $a \neq 0$, allora

$$\text{Span}(\dots, R_j, \dots, R_i, \dots) = \text{Span}(\dots, R_j, \dots, \cancel{R_i}, \dots, aR_i + bR_j) = \text{Span}(\dots, R_j, \dots, aR_i + bR_j)$$

posso eliminare l'ultima

elimino R_i che è comb. di R_j e l'ultima

$\boxed{\text{C-rango}}$ Supponiamo che partendo da A otteniamo una matrice B lavorando alla Gauss.
Allora sappiamo che i sistemi lineari

$$Ax = 0 \qquad Bx = 0$$

hanno le stesse soluzioni, quindi

$$\ker(A) = \ker(B)$$

quindi

$$\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$$

ma allora

$$\begin{aligned}
\text{C-rango}(A) &\overset{\text{def.}}{=} \dim(\operatorname{Im}(A)) \\
\text{rank-nullity} \nearrow &= n - \dim(\ker(A)) \qquad (n = \text{dim. sp. partenza}) \\
\ker(A)=\ker(B) \nearrow &= n - \dim(\ker(B)) \\
\text{rank-nullity} \nearrow &= \dim(\operatorname{Im}(B)) \\
\text{def.} \nearrow &= \text{C-rango}(B)
\end{aligned}$$

— o — o —

Oss. Se lavorando su A alla Gauss ottengo B, allora

- $\ker(A) = \ker(B)$
- $\operatorname{Im}(A)$ può essere diversa da $\operatorname{Im}(B)$ ← OCCHIO !!!
- $\dim(\operatorname{Im}(A)) = \dim(\operatorname{Im}(B))$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. Prop. 2}}$ Una matrice S a scala è della forma in figura

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{*} & & & \\ 0 & \boxed{*} & & \\ 0 & 0 \quad 0 & \boxed{*} & \\ & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo che abbia r-righe non completamente nulle e poi in fondo righe nulle. Siano $R_1, R_2, \ldots, R_r$ le righe non nulle.

Dico che R-rango è proprio r.

È evidente che R-rango $(S) \leq r$ (al max ci sono r righe lin. indip.).

Resta da dim. che $R_1, \ldots, R_r$ sono davvero lin. indip.

Prendo una loro comb. che si annulla

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_r R_r = 0$$

Allora

* per forza $x_1 = 0$ (altrimenti la comp. che corrisponde alla posiz. del primo PIVOT viene $\neq 0$)
* per forza $x_2 = 0$ (altrimenti stesso discorso con la comp. nella posiz. del 2° PIVOT)

... e così via.

Dico che anche C-rango $= r$.
Infatti

$$\text{Span}(C_1, \dots, C_n) \subseteq \text{Span}(\underbrace{e_1, \dots, e_r})$$

primi r-vettori della base canonica

quindi C-rango $(S) \leq r$.
Dico che ci sono r colonne lin. indip., e sono quelle che contengono i PIVOT.
Queste sono lin. indip. per lo stesso discorso fatto sulle righe: se fosse

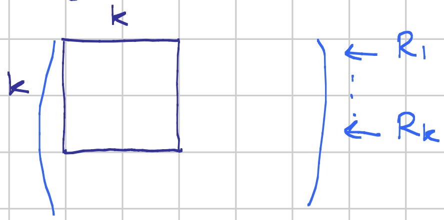
$$y_1 C_1 + y_2 C_2 + \dots + y_r C_r = 0$$

Ora partendo dal fondo scopro che $y_r = 0$, quindi $y_{r-1} = 0$, ... e così via.

— o — o —

Mostriamo ora che D-rango = R-rango

$\boxed{\text{D-rango} \leq \text{R-rango}}$ Sia R-rango $= r$
Prendiamo una sottomatrice $k \times k$ con $k > r$.
Voglio dire che ha det $= 0$.



Le righe $R_1, \dots, R_k$ sono lin. dip., quindi di una loro comb. lin. non banale si annulla. Ma allora sono lin. dip. anche le righe ristrette al $k \times k$
Ma allora Det $= 0$

$\boxed{\text{D-rango} \geq \text{R-rango}}$

Devo dire che, se ho r-righe lin. indip., allora esiste sotto-matrice $r \times r$ con det. $\neq 0$.

Per prima cosa selezioni r-righe lin. indip.

Buttando via il resto ottengo una matrice $r \times m$ con R-rango $= r$

Ma allora questa avrà C-rango $= r$, quindi ha r colonne lin. indip. Conservando solo queste ottengo una matrice $r \times r$ che ha le colonne lin. indip.

La matrice $r \times r$ ottenuta ha R-rango $=$ C-rango $= r$ quindi ridotta a scala ha PIVOT su tutte le righe (e nessuna riga finale di 0) quindi ha det $\neq 0$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 29

Note Title 06/11/2018

Rango e sistemi lineari

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Consideriamo un sistema lineare con m equazioni in n incognite. Lo possiamo scrivere come

$$A x = b$$

A: matrice $m \times n$; x: vettore lungo n; b: vettore lungo m

Chiamiamo A = matrice incompleta (solo coeff.)

$A' = (A \mid b)$ = matrice completa (ho aggiunto la colonna dei termini noti)

Oss. $\text{rango}(A) \leq \text{rango}(A') \leq \text{rango}(A) + 1$

se aggiungo una colonna, il C-rango può aumentare al max di 1

Teorema di Rouché - Capelli: Il sistema ha soluzione se e solo se $\text{rango}(A) = \text{rango}(A')$

Se ci sono soluzioni, queste dipendono da un numero di parametri uguali a

$$\boxed{n - \text{rango}(A)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Il sistema ha soluzione $\Longleftrightarrow$ b è comb. lin. delle colonne di A, quindi

$$\begin{aligned} \text{rango}(A') &= \dim \text{Span}(C_1, \dots, C_n, \cancel{b}) \\ &= \dim \text{Span}(C_1, \dots, C_n) \\ &= \text{rango}(A) \end{aligned}$$

lo elimino perché è lin. dip. dal resto

Una volta che ci sono soluzioni, tutte le soluzioni si scrivono come

$$x = \underbrace{x_0}_{\text{sol. speciale}} + v$$

generico elemento del ker (sol. sistema omogeneo)

e $\dim(\ker(A)) = n - \dim(\text{Im}(A)) = n - \text{rango}(A)$.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Data una matrice A, cosa succede al rango

- se aggiungo 2 colonne?
  Diminuire non può, e o resta uguale o aumenta di 1 o 2
- se aggiungo 2 righe?
  Stessa cosa
- se aggiungo 1 riga e 1 colonna?
  Diminuire NO, aumentare di 1 SI, aumentare di 2 SI !!

Esempio in cui aumenta di 2:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rango } 0} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rango } 1} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rango } 2}$$

Esercizio 1

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

Studiare il numero di soluzioni al variare del parametro a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Subito: rank $(A') = 2$ perché la sottomatrice 2×2 indicata ha det $\neq 0$
quindi D-rango $(A') \geq 2$, ma
R-rango $(A') \leq 2$
quindi rank $(A') = 2$.

Per R-C il sistema ha soluzione $\iff$ rank $(A) = 2$, il che accade se e solo se Det $(A) \neq 0$, cioè se e solo se

$$-3 - 2a \neq 0 \iff a \neq -\frac{3}{2}$$

Conclusione:
- $a \neq -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ soluzione UNICA $(\overset{n}{2} - \overset{\text{rank}}{2} = 0)$
- $a = -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ nessuna soluzione.

Esercizio 2

$$\begin{cases} 2x + 3y = b \\ x - ay = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b \\ 1 & -a & 7 \end{array}\right)$$

Se Det $(A) \neq 0$, allora per forza esiste una soluzione e questa è unica
(se Det $(A) \neq 0$, allora rank $(A) = 2$, ma allora rank $(A') = 2$ (può essere solo 2 o 3, ma 3 non è possibile perché non ha 3 righe) quindi rank (A) = rank (A'), quindi per R-C esiste una soluz. che è unica per il conto dei parametri)

$\operatorname{Det} A \neq 0 \iff -2a-3 \neq 0 \iff a \neq -\frac{3}{2}$

Se $a = -\frac{3}{2}$ vediamo che succede

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b \\ 1 & +\frac{3}{2} & 7 \end{array}\right)$ In questo rango $(A) = 1$, quindi c'è soluzione $\iff$ rank $(A') = 1 \iff b = 14$
(la 3ª colonna deve essere multiplo della 1ª, o della 2ª)

Nota bene: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 1 & \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$ tutte le sottomatrici 2×2 hanno Det $= 0$

<u>Esercizio 3</u>

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = a \\ x + by = 3 \end{cases}$$

Studiare le soluzioni al variare di a e b

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & b & 3 \end{pmatrix}$

Fatto 1: per ogni a e b si ha che rank $(A') \geq 2$

Fatto 2: per ogni a e b si ha che rank $(A) = 2$
(più di 2 non può essere, e almeno 2 lo è perché esiste smatrice 2×2 con det $\neq 0$)

Quindi avremo soluzioni se e solo se rank $(A') = 2$, il che in questo caso accade se e solo se Det $(A') = 0$
(se fosse $\neq 0$, per forza D-rango ≥ 3 e quindi 3 in questo)

Quando esiste, la soluzione è unica
$n -$ rank $(A) = 2-2=0$.

Il sistema ha sol. $\iff$ Det $(A') = 0$

Esercizio 4

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = a \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Il solo blocco 2×2 a sx basta per concludere che
rango (A) = rango (A') = 2

Ora la soluz. esiste sempre e dipende da $3-2=1$ param.

Esempio 5

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ ax + by + 3z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ a & b & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Subito: Rank$(A')=2$ (2×2 a dx)

Il sistema ha soluz. $\Leftrightarrow$ Rank$(A)=2$

Basta trovare sottomatrice 2×2 di A con det $\neq 0$.

$3+2b \neq 0 \qquad b \neq -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ ok

$3+2a \neq 0 \qquad a \neq -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ ok

Il caso in cui le cose possono andare male è $a=b=-\frac{3}{2}$

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix}\right)$$

rango 1 perché $R_2 = -\frac{3}{2} R_1$

In questo caso il sistema NON ha soluzioni.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 30

Titolo nota 06/11/2018

Esempio 1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimensione e base di ker e Im (pensandola come $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$)

Rank $(A) = 2$ (esiste sotto matrice 2×2 con det $\neq 0$ $\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$, d'altra parte non ci sono più di 2 colonne o righe lin. indip.)

Ma allora dim $(\mathrm{Im}(A)) = 2$ (c-rango = dim (Im))

Ma allora dim $(\ker(A)) = 2$ $(4 - \dim \mathrm{Im} = 2)$

Una base dell'immagine sono la 1^a e la 2^a colonna

Una base del ker mi richiede di risolvere $A\vec{x} = 0$, per cui posso limitarmi alle prime 2 righe

$$\begin{cases} x + 3y + z + 3w = 0 \\ 3x + y + 3z + w = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x + 3y + z + 3w = 0 \\ 8y + 8w = 0 \end{matrix}$$

$w = t$, $z = s$, $y = -t$, $x = -3y - z - 3w = -s$

$$(-s, -t, s, t) = t\,(0,-1,0,1) + s\,(-1,0,1,0)$$

una possibile base del ker

Esempio 2 Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$$f(\underbrace{1,1,0}_{v_1}) = (\underbrace{0,1,0}_{w_1}) \qquad f(\underbrace{1,0,0}_{v_2}) = (\underbrace{2,1,3}_{w_2})$$

$$f(\underbrace{1,1,1}_{v_3}) = (\underbrace{2,-1,+3}_{w_3})$$

Dim. e base di Ker e Im

Verifichiamo che tale f esiste. Serve che $\{v_1, v_2, v_3\}$ siano base di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det} \overset{\text{Laplace}}{=} -1 \neq 0 \Rightarrow \text{sono una base}$$

L'immagine è Span(w_1, w_2, w_3). Per sapere dim, li metto in una matrice e calcolo il rango

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & +3 \end{pmatrix} \\ w_1 \quad w_2 \quad w_3 \end{array} \qquad \mathrm{Det} = 0 \Rightarrow \text{rango} = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}) = 2$$

Osservo che w_1 e w_2 sono lin. indip.
(non sono uno multiplo dell'altro, oppure formano matrice 3×2 con D-rango $= 2$)

Quindi $\{w_1, w_2\}$ sono una base dell'immagine.
Lo sarebbero pure $\{w_2, w_3\}$ o $\{w_1, w_3\}$.

Per differenza abbiamo $\dim(\ker) = 1$ e per trovarne una base impongo $f(av_1 + bv_2 + cv_3) = 0$

cioè $aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$

A occhio vedo $w_3 = w_2 - 2w_1$, cioè $2w_1 - w_2 + w_3 = 0$

Quindi base ker è $2v_1 - v_2 + v_3$ = conto

Scrivere la matrice associata ad f dalla canonica alla canonica.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = B \\ w_1 \quad w_2 \quad w_3 \end{array}$$

Rappresenta f dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica

Mi serve il cambio base dalla canonica alla $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ matrice cambio base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica, quindi serve l'inversa

Matrice richiesta: $\quad B\,M^{-1}$

— o — o —

Esempio 3 Sia V lo spazio delle matrici 2×2

Sia $f: V \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$f(A) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determinare dim. e base di ker e Im

Scriviamo l'applicazione in componenti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}$$

È come se avessi detto: "Consideriamo $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a,b,c,d) = (a+2b, c+2d)$"

È come se stessi studiando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$\rightsquigarrow$ È la matrice che moltiplicata per $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ produce $\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}$

La matrice B ha rango 2, quindi dim (Im) = 2, quindi l'immagine è $\mathbb{R}^2$ e non è difficile trovare una base ☺

Dim (ker) = Dim (sp. partenza) − Dim (Im) = 4−2 = 2

Mi manca una base del ker.
Banalmente devo risolvere il sistema

$a + 2b = 0$ che ha come sol.
$c + 2d = 0$

$$t\,(-2, 1, 0, 0) + s\,(0, 0, -2, 1)$$

base del ker pensata a livello di componenti

Ma io mi aspetto un sottoinsieme di V che sono matrici
Quindi

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

verificare che effettivamente stanno nel ker.

—o—o—

<u>Esempio 4</u> Consideriamo in $\mathbb{R}^3$

$$W := \text{Span}\{ \underbrace{(1,2,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,2)}_{v_2} \} \qquad V = \text{Span}\{ \underbrace{(1,a,3)}_{v_3} \}$$

Per quali valori di a vale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?

Se è somma diretta l'intersezione è $\{0\}$, ma allora $V+W$ deve avere dim = 3. Ora $V+W = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ questi sono lin. indip. se e solo se

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha Det $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ conto con Sarrus

Posto che sia somma diretta, come scrivo la proiezione su W usando la base canonica in partenza e arrivo?

La proiezione su W è la funzione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$f(v_1) = v_1$ (si vede che dim Im $= 2$)

$f(v_2) = v_2$

$f(v_3) = 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ rappresenta la proiezione dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla $\{v_1, v_2, v_3\}$

Per andare dalla canonica alla canonica servo

$$M B M^{-1}$$

dove M è la matrice $(v_1 | v_2 | v_3)$, cioè la matrice di cambio base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 31

Titolo nota 09/11/2018

BASI ORTOGONALI – ORTONORMALI

<u>Def.</u> Siano $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dico che costituisco una

- base ORTOGONALE se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$
- base ORTONORMALE se sono una base ortogonale e in aggiunta $\|v_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

  Questo è come dire che

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

<u>Esempio classico</u> La base canonica è ortonormale

<u>Fatto generale</u> Siano $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ vettori non nulli e a 2 a 2 ortogonali.
Allora per forza sono una base.

$\boxed{\text{Dim}}$ Basta che dim. che sono lin. indip.
Sia $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ una loro comb. lin. nulla
Faccio il prodotto scalare con v_i:

$$0 = \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle = c_1 \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle v_1, v_i \rangle} + \dots + c_n \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle v_n, v_i \rangle}$$

tutti nulli tranne quello al posto

$$= c_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0 \text{ perché } v_i \neq 0}$$

$\Downarrow$

$= 0$

Per forza $c_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Domanda: come calcolo le comp. di un certo v rispetto ad una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonale?

1° modo: Provo a scrivere $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ e trovo $c_1, \dots, c_n$ risolvendo il sistema

2° modo: Scrivo v rispetto alla base canonica, poi applico la matrice di cambio base che costruisco

3° modo: Molto + comodo, ma funziona solo con le basi ortogonali.

Supponendo di avere

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

faccio il prod. scalare con v_i e come prima ottengo

$$\langle v, v_i \rangle = \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle$$

$$= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle$$

$$= c_i \langle v_i, v_i \rangle$$ (gli altri fanno 0 per ortogonalità)

Quindi $$\boxed{c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}}$$

Se in aggiunta sapessi che la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale, allora

$$\boxed{c_i = \langle v, v_i \rangle}$$

Fatto generale: Le componenti di un vettore rispetto ad una base ortogonale si calcolano con le formule di sopra facendo 1 o 2 prod. scalari.

Come produco basi ortogonali ?

Risposta : $\boxed{\text{GRAM - SCHMIDT}}$

Algoritmo che prende in INPUT una base qualunque $\{v_1, \dots, v_n\}$ e restituisce in OUTPUT una base ortogonale $\{w_1, \dots, w_n\}$ tale che

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Come funziona l'algoritmo? Data $\{v_1, \dots, v_n\}$ base qualunque

1° passo : $w_1 = v_1$ ☺

2° passo : $w_2 = v_2 - \underbrace{\boxed{\dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}}}_{\text{Numero}} w_1$

Idea che ci sta sotto: voglio porre $w_2 = v_2 + a w_1$ così sono sicuro $\text{Span}\{v_1, v_2\} = \text{Span}\{w_1, w_2\}$. Voglio scegliere a in maniera tale $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$. Impongo la cond.

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 + a w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + a \langle w_1, w_1 \rangle = 0$$

se e solo se $a = -\dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$

3° passo : $w_3 = v_3 - \boxed{\dfrac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}} w_1 - \boxed{\dfrac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}} w_2$

Idea: cerco w_3 del tipo $v_3 + a w_1 + b w_2$.
Imponendo le 2 condizioni
$\langle w_3, w_1 \rangle = 0$ e $\langle w_3, w_2 \rangle = 0$
trovo che i valori di a e b sono quelli sopra [provare per es.]

k-esimo passo Supponendo di aver già trovato $w_1, \dots, w_{k-1}$ si pone

$$\boxed{w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i}$$

Per costruzione questo procedimento fornisce base ortogonale (ogni volta ho chiesto prod. scalare nullo con i prec.)
Inoltre ogni w_k è comb. lin. di $v_1, v_2, \dots, v_k$

— o — o —

Data una base ortogonale, come ottengo una base ortonormale?

Basta dividere ogni vettore per la sua norma!

Cioè se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base ortogonale, allora $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ sono una base ortonormale

- È evidente che hanno tutti norma 1 : $\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\| = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \|v_i\| = 1$
- Rimangono a 2 a 2 ortogonali :

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\| \cdot \|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

— o — o —

Esempio 1 Trovare il valore di a per cui

$(1, 2)$ e $(3, a)$

sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$

Basta imporre che il prod. scalare sia nullo.

$$3 + 2a = 0 \rightsquigarrow a = -\frac{3}{2} \qquad (1,2) \text{ e } \left(3, -\frac{3}{2}\right)$$

Esempio 2 Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che contenga il vettore $\underbrace{(1,2,3)}_{v_1}$

Strategia: aggiungo v_2 e v_3 in modo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base qualunque
poi applico Gram-Schmidt

$v_1 = (1,2,3)$ aggiungo $v_2 = (1,0,0)$ e $v_3\ (0,1,0)$

Siamo sicuri siamo base? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Det $= 3$ o.k.

Applico G.S. $w_1 = v_1 = \boxed{(1,2,3)}$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (1,0,0) - \frac{1}{14}(1,2,3)$$

$$= \left(\frac{13}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14}\right)$$

Per comodità posso prendere anche $\boxed{(13,-2,-3) = w_2}$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

$$= (0,1,0) - \frac{2}{14}(1,2,3) - \frac{-2}{13^2+4+9}(13,-2,-3)$$

$= $ conto

__Alternativa__ Per ottenere w_3, visto che sto cercando un vettore $\perp$ a w_1 e w_2, bastava usare la formula ex-misteriosa

Esempio 3 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 2x+y-3z=0\}$$

(piano che passa per l'origine)

Calcolare base ortogonale di V ed estenderla a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Step 1 Mi procuro una base qualunque di V

$$v_1 = (1,-2,0) \qquad v_2 = (0,3,1)$$

$$V = \operatorname{Span}\{(1,-2,0),(0,3,1)\}$$

Applico G.S. a questa base e trovo $\boxed{w_1 = (1,-2,0)}$

$$\boxed{w_2} = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,3,1) - \frac{-6}{5}(1,-2,0)$$

$$= (0,3,1) + \frac{6}{5}(1,-2,0) = \boxed{\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)}$$

Conclusione: $(1,-2,0)$ e $\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ sono base ortogonale di V, e lo sono pure

$$(1,-2,0) \text{ e } (6,3,5)$$

Verifica: sono ortogonali? SI
stanno in V? SI

Per completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$ abbiamo 3 possibilità

- aggiungere un vettore e applicare GS
- formula ex-misteriosa
- uso i coeff. del piano! $\quad w_3 = (2,1,-3)$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 32

Titolo nota 09/11/2018

ORTOGONALE DI SOTTOSPAZI
SOMMA DIRETTA ORTOGONALE
PROIEZIONI ORTOGONALI

Def. (Ortogonale di un s.spazio)
Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale.
Si definisce ortogonale di V il sottospazio

$$V^\perp := \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0 \ \forall v \in V \}$$

Interpret. geom. in $\mathbb{R}^3$

- Se V = piano per l'origine, allora $V^\perp$ = retta per l'origine perp. al piano
- Se V = retta per l'orig., allora $V^\perp$ = piano per l'origine perp. alla retta.

Prop. $V^\perp$ è davvero un s.sp. vettoriale

$\boxed{\text{Dim.}}$ Bisogna dim. due cose

- Se $w_1 \in V^\perp$ e $w_2 \in V^\perp$, allora per ogni $v \in V$

$$\langle w_1 + w_2, v \rangle = \underbrace{\langle w_1, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w_2, v \rangle}_{=0} = 0 \rightsquigarrow w_1 + w_2 \in V^\perp$$

- Se $w \in V^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$, allora per ogni $v \in V$

$$\langle a w, v \rangle = a \underbrace{\langle w, v \rangle}_{=0} = 0 \rightsquigarrow a w \in V^\perp$$

— o — o —

Proprietà dell'ortogonale Sia V un s.sp. di $\mathbb{R}^n$ e sia $V^\perp$ il suo ortogonale

Allora

(1) $V \cap V^\perp = \{0\}$

(2) $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$

(3) $(V^\perp)^\perp = V$

$\boxed{\text{Dim.}}$ (1) Sia $v \in V \cap V^\perp$. Allora v è ortogonale a se stesso cioè

$$\langle v, v \rangle = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v = 0$$

(2) Somma diretta vuol dire 2 cose

→ $V \cap V^\perp = \{0\}$ e questo lo abbiamo appena dim.

→ Dobbiamo dim. che ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive come $x = v + w$ con $v \in V$ e $w \in V^\perp$

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di V la completiamo ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_n$.

Poi applichiamo GS ottenendo una base ortogonale

$\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ di $\mathbb{R}^n$

Ora $\operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \underset{GS}{=} \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = V$

quindi i primi k w_i sono una base di V, i restanti $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ sono elementi di $V^\perp$ perché sono perp. ad una base.

Ogni $x \in \mathbb{R}^n$ lo possiamo scrivere come comb. lineare

$$x = \underbrace{x_1 w_1 + \dots + x_k w_k}_{\in V} + \underbrace{x_{k+1} w_{k+1} + \dots + x_n w_n}_{\in V^\perp}$$

(3) Devo dimostrare che $(V^\perp)^\perp = V$.

Poniamo per semplicità $V^\perp = W$. Allora

$$\langle v, w \rangle = 0 \qquad \forall v \in V \quad \forall w \in V$$

Questo dice che

$$V \subseteq W^\perp$$

(tutti gli elementi di v sono ortogonali a W)

Cosa succederebbe se $W^\perp$ fosse più grande di V?

Supponiamo che

$\dim V = k$

Allora per quanto detto sopra $\dim W = n-k$.

Se $W^\perp$ fosse più grande di V, allora avrebbe $\dim > k$

$$\underset{n-k}{\dim (W)} + \dim (W^\perp) = \underset{n}{\dim (W+W^\perp)} + \underset{0}{\dim (W \cap W^\perp)}$$

non può essere più di k.

— o — o —

Def. Una somma diretta ortogonale è una somma del tipo

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$$

Def. Se V è un s. sp. di $\mathbb{R}^n$, allora posso scrivere $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ e quindi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo UNICO nella forma

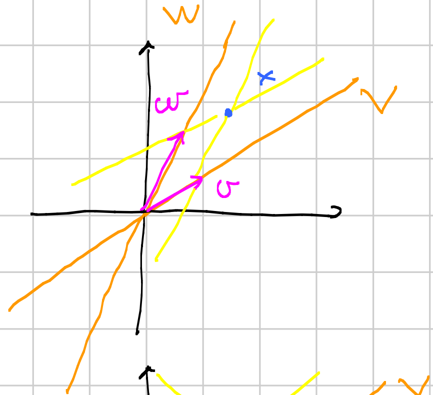
$$x = v + w \qquad v \in V \quad e \quad w \in V^\perp$$

proiezione ortogonale di x su V

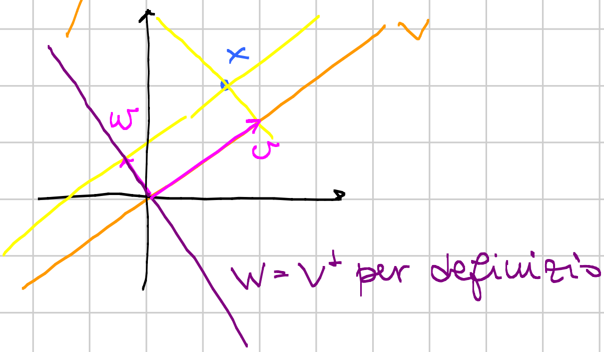
proiezione ortogonale di x su W.

— o — o —

Achtung! Tutte le volte che uno spazio si scrive come somma diretta di 2 sottospazi V e W, allora per ogni x posso definire in modo unico le sue componenti rispetto a V e W. Devo assegnare sia V sia W per sapere chi sono le componenti



Quando parlo di proiezioni ortogonali, allora basta assegnare V e posso calcolare la componente rispetto a V, assumendo d'ufficio che $W = V^\perp$



Domanda: come calcolo la proiezione ORTOGONALE di un vettore x rispetto ad un s.sp. V ?

→ Scrivo una base ortogonale di V ⇝ $\{v_1, \dots, v_k\}$

→ la completo ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$

→ scrivo x come comb. lin. di $\{v_1, \dots, v_n\}$

→ Considero solo i primi k addendi

$$x = \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_k v_k}_{\substack{\text{proiezione ort. di} \\ x \text{ su } V}} + \underbrace{x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n}_{\substack{\text{proiezione ort. di} \\ x \text{ su } V^\perp}}$$

Esempio $V = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+z+w=0,\ x-y+z=0 \}$
Voglio la proiezione ort. di $(1,2,3,4)$ rispetto a V.

① Mi procuro una base di V. Devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Vedo a occhio che z e w sono variabili libere

$z=1,\ w=0 \rightsquigarrow x=-1 \quad y=0 \rightsquigarrow (-1,0,1,0) \quad v_1$

$z=0,\ w=1 \rightsquigarrow x=-1 \quad y=-1 \rightsquigarrow (-1,-1,0,1) \quad v_2$

Quindi $V = \mathrm{Span}\{(-1,0,1,0), (-1,-1,0,1)\}$

② Con GS li faccio diventare una base ortogonale di V

$w_1 = (-1,0,1,0)$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (-1,-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1,0)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Una possibile base ortogonale di V è

$$\underbrace{(-1,0,1,0)}_{w_1} \quad e \quad \underbrace{(+1,+2,+1,-2)}_{w_2}$$

③ Con queste sole informazioni posso calcolare la proiezione di $(1,2,3,4)$.

Immagino di aver completato w_1, w_2 ad una base ortog. $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di $\mathbb{R}^4$. Ora posso scrivere

$$(1,2,3,4) = \underbrace{\boxed{x_1 w_1 + x_2 w_2}}_{\text{proiez. ort. su } V} + \underbrace{x_3 w_3 + x_4 w_4}_{\text{... su } V^\perp}$$

Sapendo che la base è ortogonale abbiamo formula per le componenti

$$x_1 = \frac{\langle (1,2,3,4), w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{\langle (1,2,3,4), w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{-1}{10} = -\frac{1}{10}$$

Sostituendo trovo la componente richiesta.

④ Se volessi anche la comp. rispetto a $V^\perp$?
Faccio la differenza

⑤ Se proprio volessi anche w_3 e w_4

Completo w_1, w_2 ad una base a caso di $\mathbb{R}^4$ e poi faccio GS sui due aggiunti per renderli $\perp$ tra di loro e ai precedenti.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 33

Titolo nota 13/11/2018

MATRICI ORTOGONALI

Def (Matrice ortogonale)
Sia A una matrice $m \times m$ (quadrata)
Allora sono fatti equivalenti
(1) Le colonne di A sono $\boxed{\text{ortonormali}}$
(2) Le righe di A sono $\boxed{\text{ortonormali}}$
(3) $A^{-1} = A^t$ (inversa = trasposta)
In questi casi la matrice si dice ortogonale

$\boxed{\text{Dim.}}$ (1) $\Leftrightarrow$ (3)

$$A = \left(c_1 \,\middle|\, c_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, c_m \right) \qquad A^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \\ \hline \vdots \\ \hline c_m \end{pmatrix}$$

$$B = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \left(c_1 \,\middle|\, c_2 \,\middle|\, \dots \right)$$

$B_{i,j}$ = prodotto scalare fra i-esima riga di A^t e j-esima colonna di A
$= \langle c_i, c_j \rangle$

Se le colonne sono ortonormali, allora $B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

cioè B è matrice identica, ma allora $A^t \cdot A = Id$, cioè $A^t = A^{-1}$

Viceversa, se $A^t = A^{-1}$, allora $B = Id$, ma allora le colonne sono ortonormali.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Penso A fatta da righe

$$B = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ \hline R_m \end{pmatrix} \cdot \left(R_1 \mid R_2 \mid \dots \mid R_m \right)$$

Analogamente a prima $B_{i,j} = \langle R_i, R_j \rangle$

Righe ortonormali $\Leftrightarrow$ $B_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $B = Id$

$\Updownarrow$

$A^t = A^{-1}$

— o — o —

Oss. Se voglio dim. che (1) $\Leftrightarrow$ (2), la strada più breve passa per (3).

— o — o —

Proprietà matrici ortogonali

(1) Se A è ortogonale, allora $\mathrm{Det}(A) = \pm 1$

(2) Se A è ortogonale, allora A^{-1} e A^t sono ortogonali

(3) Se A e B sono ortogonali (e $n \times n$), allora AB è ortogonale

Achtung! Se A e B sono ortogonali, non è detto che $A \pm B$ siano ortogonali, così come λA non è detto che lo sia (e non lo è se $\lambda \neq \pm 1$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ (1) Osservo che $A \cdot A^t = Id$. Applico Binet

$$1 = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(A^t) = \mathrm{Det}(A)^2 \leadsto \mathrm{Det}(A) = \pm 1$$

(2) Evidente dalla definizione

(3) Conviene pensare in termini di trasposta ed inversa

$$(AB)^{-1} \underset{\substack{\uparrow\\\text{propr.}\\\text{inversa}}}{=} B^{-1}A^{-1} \underset{\substack{\uparrow\\A \text{ e } B\\\text{sono}\\\text{ortogonali}}}{=} B^t A^t \underset{\substack{\uparrow\\\text{propr.}\\\text{trasposta}}}{=} (AB)^t$$

Questo dimostra che AB è ortogonale

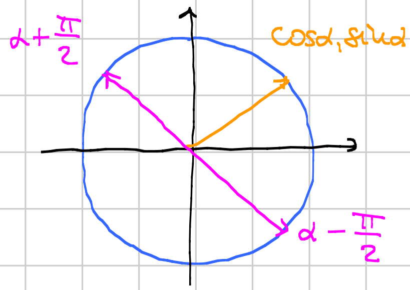
— o — o —

<u>Esercizio</u> Come sono fatte le matrici 2×2 ortogonali

Considero la prima riga. Deve essere un vettore di norma 1. Se (x,y) sono le sue componenti, allora $x^2+y^2=1$, cioè

$$(x,y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

per un qualche $\alpha \in [0,2\pi]$



La seconda riga deve avere ancora norma 1 ed essere $\perp$ alla prima riga.

$\cos\alpha \quad \sin\alpha$

Quindi ci sono 2 possibilità

- $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$
  $\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$
  $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 1$$
- $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$
  $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$
  $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -1$$

— o — o —

Esercizio 2 Trovare una matrice 3×3 ortogonale, che non sia l'identità

Idea: costruisco con GS una base ortonormale e la uso come righe / colonne

$v_1 = (1,0,1) \qquad v_2 = (1,0,0) \qquad v_3 = (1,1,0)$

Applico GS: $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{volendo } w_2 = (1,0,-1)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1)$$

$$= (0,1,0)$$

Conclusione: $w_1 = (1,0,1)$, $w_2 = (1,0,-1)$, $w_3 = (0,1,0)$

Questi sono una base ORTOGONALE (verificare che i prod. scalari tra 2 diversi vengono nulli)

Per avere una base ORTONORMALE devo dividere per la norma

$$\overline{w_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \overline{w_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \overline{w_3} = (0,1,0)$$

Usandoli come righe (o colonne) ottengo matrice ortogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Per costruzione l'inversa è proprio la trasposta

Esempio 3 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservo che le righe sono ortogonali, ma non ortonormali.
Come faccio l'inversa?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{ho messo trasposta a destra}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuori dalla diagonale ho tutti 0 perché righe iniziali sono ortogonali

Sulla diag. ho norme delle righe

Basta, per far venire l'identità, moltiplicare le colonne della trasposta per $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Fare la verifica!!

Esempio 4 Costruiamo una matrice con colonne ortogonali

$$\begin{pmatrix} 1 & -14 & 5 \\ 2 & 1 & -46 \\ 3 & 4 & 29 \end{pmatrix}$$

1^a colonna a caso
2^a colonna a occhio $\perp$ alla 1^a
3^a colonna con formula ex misteriosa

[Ottima colonna corretta dopo video]

Qui è l'inversa ?

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ -14 \quad 1 \quad 4 \\ 5 \quad -46 \quad 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -14 & 5 \\ 2 & 1 & -46 \\ 3 & 4 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & \boxed{0} \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Se divido la prima riga per A
la 2ª " per B
la 3ª " per C

quello che ottengo a dx è l'inversa della matrice di partenza.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 34

Note Title 13/11/2018

$\boxed{\text{FORME CANONICHE}}$

Già visto: data un'applic. lineare $f: V \to W$ e date una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V e una base $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W, posso costruire la matrice associata ad f

(la sua colonna j sono le componenti di $f(v_j)$ rispetto alla base di W)

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \vert & \vert & & \\ \vert & \vert & \cdots & \\ \vert & \vert & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array}$$

Domande:

① Se cambio base in partenza ed arrivo, come cambia la matrice?

② Se scelgo bene le basi, posso fare venire la matrice particolarmente semplice, cioè con tanti zeri?

— o — o —

Risposta alla domanda ①: uso matrici di cambio base

Sia $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una nuova base di V

Sia $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ una nuova base di W

Chi è la matrice che rappresenta f nelle nuove basi?

Costruisco la matrice N che ha dim $n \times n$ e ha come colonne le comp. di $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots$ rispetto a $v_1, v_2, \dots$.
Analogamente costruisco M matrice $m \times m$ che ha come colonne le comp. di $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$ rispetto a $w_1, \dots, w_m$.
Allora la matrice richiesta è

$$\boxed{M^{-1} A N}$$

rappresenta f dalla $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ alla $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$

M^{-1}: INPUT: comp. vecchie di $f(v)$; OUTPUT: comp. nuove di $f(v)$

A: applica f; INPUT: componenti vecchie di $v \in V$; OUTPUT: " " di $f(v) \in W$

N: INPUT: componenti nuove in V; OUTPUT: " vecchie in V

— o — o —

Risposta domanda ② Supponiamo che
- $\dim V = n$
- $\dim W = m$
- $\dim(\mathrm{Im}(f)) = r$

Allora scegliendo bene le basi la matrice diventa

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\quad}^{r} \\ m \left\{ \right. & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ \ 1 \end{matrix}}_{\,r} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n} \end{array}$$

cioè c'è un blocco $r \times r$ che è l'identità e tutto il resto sono 0

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per il rank-nullity sappiamo che

$$k = \dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - r$$

Scelgo una base per il ker e la completo ad una base di V

$$\overbrace{v_1, \dots, v_r}^{\text{quelli aggiunti}}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{base di ker}} \rightsquigarrow \text{base di } V$$

Considero $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2), \dots, w_r = f(v_r)$ e so che questi sono una base dell'immagine, che posso completare ad una base di W aggiungendo
$w_{r+1}, \dots, w_m$

Usando queste basi in partenza ed arrivo ho la matrice voluta.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \leftarrow w_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \leftarrow w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \quad \ddots & 0 & \leftarrow w_r \\ 0 & \vdots\, 0 & 0 & 0 & 0 & \\ f(v_1) & \dots & f(v_r) & f(v_{r+1}) & f(v_n) & \end{array}$$

— o — o —

Esempio Prendiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che abbia come matrice associata, dalla canonica alla canonica

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A \qquad f(x,y,z) = (2x+5y+2z,\ 5x+2y+5z,\ '' ,\ '')$$

Posso trovare una matrice 4×4 M ed una matrice 3×3 N tale che

$$M^{-1} A N = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \\ \leftarrow w_4 \end{matrix} \\ \uparrow f(v_1)\ \uparrow f(v_2)\ \uparrow f(v_3) \end{array}$$

$r = 2$ perché rango(A) è proprio 2

Cerco di costruire M ed N seguendo la dimostrazione

- Cerco v_3 nel ker. Dovrei imporre $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

comb. lin. delle 3 colonne con coeff. x, y, z

La scelta buona è $x=1,\ y=0,\ z=-1 \rightsquigarrow v_3=(1,0,-1)$ è una base del Ker.

- La completo ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo
  $v_1=(1,0,0)$ e $v_2=(0,1,0)$
  Verifico che sono una base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -1 \neq 0 \quad \text{Ok}$$

- La matrice N richiesta è il cambio base in $\mathbb{R}^3$ dalla v_1, v_2, v_3 alla canonica, quindi ha come colonne le comp. di v_1, v_2, v_3 rispetto alla canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = N$$

- Per calcolare M mi serve la base w_1, w_2, w_3, w_4 in arrivo. Dalla dimostrazione sopra sappiamo che
  $w_1 = f(v_1) = (2,5,2,5)$ ← 1ª colonna di A
  $w_2 = f(v_2) = (5,2,5,2)$ ← 2ª colonna di A
  Li completo ad una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo
  $w_3 = (1,0,0,0)$
  $w_4 = (0,1,0,0)$
  Dovrei verificare la lin. indip., ma è un semplice conto.
  Ora M è la matrice che ha questi come colonne!

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si dovrebbe verificare che

$$M^{-1} A\, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'unico conto da fare è l'inversione di M.

— o — o —

Fatto generale: potendo scegliere a piacimento le basi in partenza ed arrivo, la matrice si riduce ad avere r volte 1 ed il resto 0, dove r è il rango!

Esempio Consideriamo le 3 matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = B \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = C$$

Due di queste matrici rappresentano la stessa $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ soltanto in 2 basi diverse.

Si tratta di B e C perché hanno rango 1, mentre A ha rango 2.

La matrice A posso farla diventare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$\leftarrow$ B e C possono diventare così

Questo vuol dire che esistono M matrice 3×3 ed N matrice 4×4 invertibili tali che

$$M^{-1} B N = C$$

Come trovo M ed N.
Dalla teoria sappiamo che

$$M_B^{-1} B N_B = D \quad e \quad M_C^{-1} C N_C = D$$

Quindi

$$M_B^{-1} B N_B = M_C^{-1} C N_C$$

$$M_C M_B^{-1} B N_B N_C^{-1} = C$$

$$\underbrace{(M_B M_C^{-1})^{-1}}_{= M^{-1}} B \underbrace{(N_B N_C^{-1})}_{= N} = C$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 35

Note Title 13/11/2018

AUTOVALORI
AUTOVETTORI
AUTOSPAZI

<u>Problema di sottofondo</u>: data $f: V \to V$ (stesso spazio in partenza ed arrivo) trovare una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che, usando questa <u>stessa base</u> in partenza ed arrivo, la matrice diventa semplice.

<u>Esempio motivazionale</u> Considero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

① Calcolare A^{2018}
② Trovare B tale che $B^{10} = A$

Per ora non lo sappiamo fare.

<u>Oss.</u> Se la matrice fosse diagonale, sarebbe tutto molto più semplice.

<u>Domanda</u>: scegliendo bene la base, posso fare diventare una matrice diagonale?

$$\begin{array}{c} v_1 \to \\ v_2 \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array}$$

Se voglio che la prima colonna abbia un λ_1 e sotto tutti 0 serve che

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1$$

Idem per le colonne successive.
Quindi è interessante vedere se ci sono vettori che vanno in λ se stessi.

Def. Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata)

- Si dice che λ è un AUTOVALORE di A se esiste $v \in V$ con $v \neq 0$ t.c.

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

- Se λ è un autovalore, allora tutti i v che verificano l'uguaglianza e sono $\neq 0$ si dicono AUTOVETTORI
- Se λ è un autovalore, allora l'insieme di tutti i v che verificano, compreso quello nullo, si dice AUTOSPAZIO relativo a λ.

Oss. Le stesse definizioni si danno per una appli. lin. $f : V \to V$

- Autovalore: ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste $v \in V$ con $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$

autovalore autovettore

Oss. È importante che $v \neq 0$, altrimenti qualunque λ sarebbe autovalore !!!

Proprietà L'autospazio relativo a λ è un s.sp. vettoriale.

Dim. Se $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$, allora $f(v_1+v_2) = \lambda(v_1+v_2)$

Se $f(v) = \lambda v$, allora $f(av) = af(v) = \lambda(av)$

Quindi l'autospazio è chiuso rispetto a somma e prodotto.

—o —o —

Come trovo autovalori / autovettori di una matrice o di una applic. lin.

Prop. Se A è una matrice $n \times n$, allora λ è autovalore di A se e solo se

$$\boxed{\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0}$$

Dim. Se λ è autovalore, allora esiste $v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v$, cioè $Av - \lambda v = 0$, cioè $(A - \lambda Id) v = 0$, cioè $v \in \ker(A - \lambda Id)$, quindi il ker è non banale (contiene un vettore non nullo), ma allora $\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0$.

Viceversa, se $\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0$, allora il ker contiene almeno un vettore $v \neq 0$, cioè $(A - \lambda Id) v = 0$, cioè invertendo i passaggi $Av = \lambda v$, cioè λ è autovalore.

Esempio Calcolare autovalori, autovettori, autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Scrivo

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Basta togliere λ agli elementi sulla diagonale!

$$\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = 5 - \lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \qquad (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = 2, 4$$

Gli autovalori di A sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$.

Chi sono gli autovettori corrispondenti ?

$\boxed{\lambda = 2}$ Cerco i vettori $v = (x, y)$ che vanno in 2 volte se stessi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + y = 2x \\ -3x + 5y = 2y \end{cases}$$

$-x + y = 0$

$-3x + 3y = 0$ ← inutile

Deve succedere perché altrimenti l'unica sol. è $(0,0)$

Un possibile autovettore è $(1,1)$. Vanno bene tutti quelli del tipo (a, a) con $a \neq 0$.

$\boxed{\lambda = 4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x + y = 4x \\ -3x + 5y = 4y \end{matrix}$$

$-3x + y = 0$

$-3x + y = 0$ ← ottimo

Un possibile autovettore è $(1,3)$ (tutti sono $(a, 3a)$ con $a \neq 0$)

Conclusione la matrice A ha

- autovalore $\lambda = 2$ con corr. autovettore $(1,1)$
- " $\lambda = 4$ " " " $(1,3)$

— o — o —

Modo più rapido di fare lo stesso conto

$\boxed{\lambda = 2}$ $\quad A - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Gli autovettori di $\lambda = 2$ sono gli el. del ker di questa

$\boxed{\lambda=4}$ $A-4Id = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e anche questa l'abbiamo già vista.

— o — o —

Abbiamo scoperto che, ponendo $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,3)$

questa è una base di $\mathbb{R}^2$ tale che $Av_1 = 2v_1$, $Av_2 = 4v_2$

Quindi in questa base la matrice è diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Detto più precisamente, esiste una matrice M tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

La matrice M è il cambio di base dalla nuova alla canonica, cioè

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

L'inversa è $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ ☺

Ma allora $A = MDM^{-1}$

$$A^2 = MDM^{-1}MDM^{-1} = MD^2M^{-1}$$

$$A^3 = MD^3M^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^{2018} = MD^{2018}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{2018} & 0 \\ 0 & 4^{2018} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per fare la radice decima di A basta prendere la radice decima della matrice diagonale e cambiare base.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 36

Note Title 19/11/2018

DIAGONALIZZAZIONE

Def. Siano A e B due matrici $n \times n$.
Diciamo che A è SIMILE a B se esiste M matrice $n \times n$ invertibile tale che

$$\boxed{B = M^{-1} A M}$$

Morale: A e B sono simili se rappresentano la stessa applic. lin. in due basi diverse (M = matrice cambio base)

Def. (Diagonalizzazione di matrici)
Sia A matrice $n \times n$. Diagonalizzare A vuol dire trovare una matrice D diagonale simile ad A, cioè t.c.

$$D = M^{-1} A M$$

(contestualmente uno trova anche M)

Def. (Diagonalizz. di applic.)
Sia V sp. vett. di dim. finita, e sia $f: V \to V$ applic. lin.
Diagonalizzare f vuol dire trovare una base di V costituita da autovettori di f.

Collegamento: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V fatta da autovett. di f, cioè $f(v_i) = \lambda_i$, allora la matrice di f usando $\{v_1, \dots, v_n\}$ in partenza ed arrivo è

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} & \leftarrow v_1 \\ \uparrow & \\ f(v_1) & \end{array}$$

Domande: ① è sempre possibile diagonalizzare matrice / applicazione? MAGARI!
② Se sì, come trovo M oppure $\{v_1, \dots, v_n\}$? Lezione
③ Se no, cosa faccio quando non è diagonalizzabile? FORMA DI JORDAN
④ Come capisco se è diagonalizzabile?

— o — o —

$\boxed{\text{POLINOMI A COEFF. REALI / COMPLESSI}}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

coefficienti e sono numeri (interi, reali o complessi)

Se $a_n \neq 0$, allora n si dice grado del polinomio.

Def. (Radici e molteplicità) Sia $p(x)$ un polinomio

- Si dice che α è radice del polinomio se $p(\alpha) = 0$ (α può essere reale o complessi)

Fatto generale (teo. di Ruffini) Se $p(\alpha) = 0$, allora posso dividere $p(x)$ per $(x - \alpha)$, cioè ottenere

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$$

nuovo polinomio di grado $n-1$

- Si dice molteplicità di una radice α il più grande intero m tale che $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^m$, cioè

$$p(x) = (x - \alpha)^m\, q(x)$$

con $q(\alpha) \neq 0$, altrimenti avrei un altro fattore $x - \alpha$ da mettere in evidenza

Oss. Se $p(x)$ è un polinomio e α è radice di molteplicità m, allora

$$\underbrace{p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = \dots = p^{(m-1)}(\alpha)}_{\text{derivate fino all'ordine } m-1} = 0 \quad \text{e} \quad \underset{\substack{\text{derivata} \\ m\text{-esima}}}{p^{(m)}}(\alpha) \neq 0$$

$\boxed{\text{Teorema sui polinomi}}$

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. complessi (se sono reali, va bene uguale) di grado n.

Allora

(1) $p(x)$ ammette ESATTAMENTE n radici COMPLESSE (anche se i coeff. sono tutti reali, le radici possono NON essere reali) se CONTATE con MOLTEPLICITÀ

(2) Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici di $p(x)$, sempre con molteplicità, allora

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Oss. Le due formule si semplificano se $p(x)$ è MONICO cioè se $a_n = 1$ (coeff. termine grado + alto $= 1$)

Esempi $x^2 + 12x + 23 = 0$ $\quad \alpha_1 + \alpha_2 = -12$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 23$

$x^2 - 8x + 15 = 0$ ha come radici 3 e 5 $(S = 8 \quad P = 15)$

$2x^3 + 7x + 13 = 0$ $\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad \left(-\frac{a_2}{a_3}\right)$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -\frac{13}{2} \quad = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3}$

(1) Parte facile: $p(x)$ ammette al MASSIMO n radici.
Supponiamo che $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ siano n radici, eventualmente coincidenti. Allora, potendo dividere troviamo

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n) \cdot \underset{a_n}{\overset{\shortparallel}{\text{numero}}}$$

Se sostituisco ad x un valore diverso dalle radici già trovate non può più venire 0.

Altra parte facile: se tutti i polinomi hanno almeno una radice, allora ne hanno esattamente n

$$p(x) = (x-\alpha_1)\, q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\, r(x) = \ldots$$

p ha almeno 1 radice $\qquad$ α_2 radice di $q(x)$ $\qquad$ e così via

Parte molto difficile (TEO. FOND. DELL'ALGEBRA): Ogni $p(x)$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice.

(2) Casi semplici con grado basso e polinomi monici

$\boxed{n=2}$ $\quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{-a_1} x + \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{a_0}$

$\boxed{n=3}$ $\quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

$$= x^3 \underbrace{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}_{a_2} x^2 + \underbrace{(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)}_{a_1} x \underbrace{-\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{a_0}$$

In maniera analoga per induzione si dimostra per tutti i gradi.

— o — o —

Def. Sia A una matrice.

(1) Si dice polinomio caratteristico di A il polinomio

$$p(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A - \lambda \mathrm{Id})$$

le cui radici abbiamo visto essere gli autovalori di A

(2) Dato λ autovalore di A, si dice

- Molteplicità algebrica di λ la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.
- Molteplicità geometrica di λ la dimensione dell'autospazio cioè

$$\dim(\ker(A - \lambda \mathrm{Id}))$$

Prop 1 Per ogni autovalore λ di A si ha che

$$\boxed{1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$$ molt. geom. ≤ molt. alg.

Teorema (Caratt. della diagonalizzabilità)
Una matrice A di dim $n \times n$ è diagonalizzabile sui reali se e solo se

- ha n autovalori reali
- $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ per ogni autovalore

Conseguenza 1 Se non ci sono n autovalori reali, allora addio diagonalizzabilità sui reali

Conseguenza 2 Se $p(\lambda)$ ha n radici distinte reali, allora $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$ per ogni autovalore, quindi A è diagonalizz.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 37

Note Title 19/11/2018

$\boxed{\text{Prop}}$ (Proprietà del polinomio caratteristico)
Sia A matrice $n \times n$, e sia $p_A(\lambda)$ il suo polinomio caratt., cioè

$$p_A(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A - \lambda \mathrm{Id}).$$

Allora valgono i seguenti fatti
(1) Il grado di $p_A(\lambda) = n$
(2) Il coeff. di λ^n è $(-1)^n$
(3) Le radici di $p_A(\lambda)$ sono gli autovalori di A, contati secondo la molteplicità algebrica
(4) Se A è diagonale con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale, allora

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

(5) Se A è triangolare superiore (o inferiore), allora vale la stessa formula (usando solo i valori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ che stanno sulla diagonale)
(6) Il termine noto del pol. caratteristico è $\mathrm{Det}(A)$
(7) La somma delle radici è la traccia della matrice.

Def. (Traccia di una matrice) Sia A matrice $n \times n$.
Si dice <u>traccia</u> di A la somma degli elementi sulla diagonale

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

<u>Conseguenza</u> Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A (con molt.) allora

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A)$$
$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \mathrm{Det}(A)$$

$\boxed{\text{Prop}}$ Due matrici simili hanno

- lo stesso polinomio caratteristico
- gli stessi autovalori
- lo stesso determinante
- la stessa traccia

facili conseguenze della prima

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo $B = M^{-1}AM$. Allora

$$\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \operatorname{Det}(B - \lambda Id) \\
&= \operatorname{Det}(M^{-1}AM - \lambda \overbrace{M^{-1}M}^{}) \\
&= \operatorname{Det}[M^{-1}(A - \lambda Id)M] \\
\text{BINET} \nearrow &= \underbrace{\operatorname{Det}(M^{-1})}_{\frac{1}{\cancel{\operatorname{Det}(M)}}} \operatorname{Det}(A - \lambda Id) \cdot \cancel{\operatorname{Det}(M)} \\
&= \operatorname{Det}(A - \lambda Id) \\
&= p_A(\lambda).
\end{aligned}$$

<u>Esercizio</u> Osservare che $\operatorname{Det}(M^{-1}AM) = \operatorname{Det}(A)$ senza passare dai polinomi caratteristici

$\boxed{\text{Dim Prop iniziale}}$ (4) e (5) Sia A triang. superiore con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * & * & * \\ & \lambda_2 - \lambda & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

Il Det è il prodotto dei termini sulla diagonale

(3) Visto alla lezione 35

(1) e (2) Dobbiamo dimostrare che $p_A(\lambda)$ "inizia" con $(-1)^n \lambda^n$ (termine di grado più alto)

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & * & * & \\ * & a_{2,2}-\lambda & * & \\ * & * & a_{3,3}-\lambda & \\ * & * & * & \ddots \end{pmatrix}$$

Devo calcolare il Det di questa matrice.

Se sviluppo con Laplace rispetto alla prima colonna mi viene

$$\underbrace{(a_{1,1}-\lambda)}_{\text{un } \lambda} \cdot \operatorname{Det} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{2,2}-\lambda & \\ & \ddots \end{pmatrix}}_{(n-1)\,\lambda \text{ per ipotesi induttiva}} + \text{numeri} \cdot \underbrace{\text{Det matrici}}_{\text{con} \leq n-2 \text{ volte } \lambda}$$

Il termine che produce la max potenza di λ è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

(6) termine noto di $p_A(\lambda) = p_A(0) = \operatorname{Det}(A - 0 \cdot Id)$
$= \operatorname{Det}(A)$

(7) Convincersene in casi 2×2 o 3×3 facendo direttamente il conto
(la dim. formale è con' induzione)

— o — o —

Ricapitolazione diagonalizzazione sui reali

- Cond. nec. e suff.: n autov. reali, tutti con molt. alg. e geom. uguali

- Cond. nec.: n autovalori reali

- Cond. suff.: n autovalori reali DISTINTI

$\boxed{\text{Dim. cond. suff.}}$ Sapendo che $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.
Se sono tutti distinti, allora hanno tutti $m_a = 1$, ma allora hanno tutti $m_g = 1$, ma allora hanno tutti $m_a = m_g$.

Esempio
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ \pi & 12 & 28 \end{pmatrix}$$ è diagonalizzabile

Il suo polinomio caratteristico è $(1-\lambda)(5-\lambda)(28-\lambda)$
che quindi ha 3 radici reali distinte ☺
Quindi la matrice data è simile a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} = B$$

Dunque esiste M tale che $B = M^{-1} A M$.

La matrice M (cambio base) è la matrice che ha come colonne gli autovettori di A, dunque devo risolvere

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 28\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Dim che } 1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)}$

È ovvio che $m_g = \dim(\ker(A - \lambda Id)) \ge 1$ (se λ_1 è autovalore, allora c'è almeno un autovettore).

Poniamo $k = m_g$. Allora esistono k vettori lin. indip $v_1, \dots, v_k$ che stanno nel ker di $A - \lambda Id$, cioè

$$A v_i = \lambda_1 v_i \qquad \forall i = 1, \dots, k$$

Li completo ad una base aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_n$.
In questa nuova base la matrice A diventa

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & & & \\ \hline 0 & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & & 0 & * & * & * \end{array}\right) & \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ll} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} & \end{array}$$

Devo togliere λ sulla diagonale e calcolare il Det

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & & \text{Di} \\ 0 & 0 & \ddots \ \lambda_1 - \lambda & \text{tutto} \\ \hline \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Quando faccio il Det, mi ritrovo

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_1 - \lambda)}_{k \text{ volte}} \cdot \text{roba strana}$$

La matrice finale è simile a quella iniziale, quindi ha lo stesso pol. caratteristico, e si vede che λ_1 è una radice di molt. almeno k.

— o — o —

Dim. cond. nec. e suff. Devo dimostrare 2 implicazioni

- Se A è diagonalizzabile sui reali, allora ha n autovalori con molt. alg. e geom. coincidenti.

Se A è diagonalizzabile, allora è simile ad una matrice D diagonale, ma allora

$$p_A(\lambda) = p_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

e quindi ha n radici reali.
Le molteplicità coincidono perchè quando calcolo

$A - \lambda_1 Id$ questa è simile ad una matrice diagonale

in cui tutti i λ_1 sono stati sostituiti da 0. Questa ha tante colonne nulle quanto era il numero di volte che compariva lo stesso λ_1, cioè ma(λ_1).
Ma in questo caso il numero di colonne nulle è proprio la dim ker.

(Fatto generale: per una matrice diagonale vale

dim (ker) = numeri di zeri sulla diagonale)

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 38

Note Title 20/11/2018

Cond. nec. e suff. per diagonalizzazione:
una matrice/applicazione è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ se e solo se
- tutti gli autovalori sono reali
- molt. alg. = molt. geom. per ogni autovalore

$\boxed{\Rightarrow}$ Implicazione facile (basta guardare nella sua forma diagonale) In questo molt. alg. = molt. geom. = numero di volte che un dato autovalore compare sulla diagonale

$\boxed{\Leftarrow}$ Implicazione meno facile.
Sia n la dimensione dello spazio
Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti, con molteplicità $m_1, \dots, m_k$
Allora deve accadere che

$$m_1 + \dots + m_k = n$$

(il polinomio caratt. ha grado n, dunque ha esattamente n radici, se contate con molteplicità)
Poiché per ipotesi molt. alg. = molt. geom per tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ deve succedere che

λ_1 ha autosp. di dim. m_1
λ_2 " " " m_2
$\vdots$
λ_k ha " " m_k

Prendendo una base per ciascuno degli autospazi troviamo n vettori che sono autovalori della matrice/applicazione.
Per concludere basta mostrare che sono lin. indip.
Supponiamo che non lo siano.
Se li chiamiamo $v_1, \dots, v_n$, esiste una comb.

Lin. nulla ma con qualche coeff. $\neq 0$:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_m v_m = 0$$

Li raggruppiamo a seconda del loro autovalore ed otteniamo una nuova scrittura

$$\hat{c}_1 w_1 + \hat{c}_2 w_2 + \ldots + \hat{c}_k w_k = 0$$

dove $f(w_1) = \lambda_1 w_1$

$f(w_2) = \lambda_2 w_2$

$\vdots$

$f(w_k) = \lambda_k w_k$

Adesso basta mostrare che autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono lin. indip.

Se mostriamo questo, allora

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \ldots = \hat{c}_k = 0$$

e avremo concluso.

<u>Lemma</u> Autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono lin. indip.

<u>Dim.</u> Siano $w_1, \ldots, w_k$ autovettori relativi a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ con i λ_i tutti diversi fra di loro.

Supponiamo che non siano lin. indip.

Allora esistono comb. lin. non banali che fanno 0.

Tra tutte queste, ve ne sarà una che ha il minimo numero di coeff. $\neq 0$. Supponiamo, a meno di cambiare i nomi, che sia

(1) $\quad c_1 w_1 + \ldots + c_m w_m = 0 \qquad$ con $\quad m \leq k$

tutti i coeff. sono $\neq 0$

Applico f alla combin. lineare

$$f(c_1 w_1 + \dots + c_m w_m) = 0$$
$$\|$$
$$c_1 f(w_1) + \dots + c_m f(w_m) = 0$$
$$\|$$
$$(2) \quad c_1 \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m c_m w_m = 0$$

Abbiamo quindi 2 comb. lineari che fanno 0
Ma allora

$$\lambda_1 (1) - (2) = \cancel{\lambda_1 c_1 w_1} + \dots + \lambda_1 c_m w_m - \cancel{\lambda_1 c_1 w_1} - \dots - \lambda_m c_m w_m$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) c_2 w_2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_m) c_m w_m = 0$$

Questa è una comb. lineare più corta con tutti i coeff. diversi da 0, perchè i c_i erano $\neq 0$ e gli autovalori sono tutti distinti.

<u>Oss.</u> Perchè la comb. iniziale ha almeno 2 coeff. $\neq 0$?
(Se così non fosse vorrebbe dire che $c_1 w_1 = 0$, il che non è possibile essendo $c_1 \neq 0$ e $w_1 \neq 0$ in quanto autovettore).

— o — o —

<u>Precisazione sulla dim. della freccia</u> $\boxed{\Rightarrow}$

I passi sono i seguenti
- prendo $v_1, \dots, v_n$ autovettori di f (ogni autovalore è rappresentato da tanti vettori quanta è la sua molteplicità)
- suppongo che $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$
- raggruppo per "autovalore": ottengo $w_1 + \dots + w_k = 0$
- grazie al lemma deve essere per forza $w_1 = \dots = w_k = 0$
- essendo indipendenti ad autovalore fisso ottengo che $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Esempio Supponiamo che $n=6$ e che gli autovalori siano

$7 \rightsquigarrow$ molt. 1 $\rightsquigarrow v_1$

$5 \rightsquigarrow$ mol. 2 $\rightsquigarrow v_2, v_3$

$-8 \rightsquigarrow$ molt. 3 $\rightsquigarrow v_4, v_5, v_6$

$$\underbrace{c_1 v_1}_{w_1} + \underbrace{c_2 v_2 + c_3 v_3}_{w_2} + \underbrace{c_4 v_4 + c_5 v_5 + c_6 v_6}_{w_3} = 0$$

w_1 sta nell'autospazio di 7, cioè $f(w_1) = 7 w_1$

w_2 " " " " 5 $f(w_2) = 5 w_2$

w_3 " " " " -8 " $f(w_3) = -8 w_3$

Per il lemma abbiamo che $w_1 = w_2 = w_3 = 0$

$w_1 = 0 \rightsquigarrow c_1 = 0$

$w_2 = 0 \rightsquigarrow c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \Rightarrow c_2 = c_3 = 0$

$w_3 = 0 \rightsquigarrow \ldots \Rightarrow c_4 = c_5 = c_6 = 0$

— o — o —

Esercizio 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ Sono simili?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} = B$$ Sono simili?

Le due matrici della prima riga sono simili, in quanto entrambe sono diagonalizzabili con autovalori 1, 2, 5.
Perchè sono diagonalizzabili? Perchè gli autovalori sono reali e DISTINTI (cond. suff.)

Nel secondo esempio non è immediato che sono diagonalizzabili (perchè $\lambda = 2$ ha molt. alg. $= 2$). Devo calcolare la molteplicità geometrica, cioè

$$\dim(\ker(A - 2\,\mathrm{Id}))$$

$$A - 2\,Id = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $= 2 \Rightarrow$ dim (ker) $= 1$, quindi $m_g(2) = 1$

$\Rightarrow$ A NON è diagonalizzabile

$$B - 2\,Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango dipende da a:

- Se $a \neq 0$, allora rango $= 2$, quindi dim (ker) $= 1$, quindi B non è diagonalizzabile, e per ora non abbiamo strumenti per decidere se è simile ad A
- Se $a = 0$, allora rango $= 1$, quindi dim (ker) $= 2$, quindi B è diag., quindi di sicuro in questo caso NON è simile ad A.

Risposta (vedi tra qualche lezione): per $a \neq 0$ in effetti sono simili.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 39

Note Title 20/11/2018

TEOREMA SPETTRALE (Diagonalizzazione di LUSSO)

Def. (Applicazione lineare simmetrica)
Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare si dice simmetrica se

$$\boxed{\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n$$

(cioè f "migra nei prodotti scalari")

Def. (Matrice simmetrica) Sia A matrice $n \times n$.
Si dice che A è simmetrica se

$$\boxed{A = A^t}$$

Parentesi Cosa possiamo dire dell'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche?

$\boxed{1}$ È uno sp. vettoriale
(Facile verifica: se $A = A^t$ e $B = B^t$, allora $(A+B) = (A+B)^t$
e $(aA) = (aA)^t = a A^t$)

$\boxed{2}$ Dipende solo da quello che metto sulla diagonale e nel triangolo superiore (il resto viene "copiato")

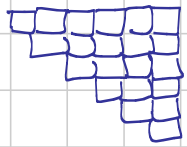
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Formalmente è come chiedere che gli el. $a_{i,j}$ verifichino

$$\boxed{a_{i,j} = a_{j,i}}$$

$\boxed{4}$ Qual è la dim. dello spazio? $\frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Posso scegliere liberamente



- tutta la 1^a riga $\rightsquigarrow$ n
- tutta la 2^a riga − primo el. $\rightsquigarrow$ $n-1$
- " " 3^a riga − primi 2 el. $\rightsquigarrow$ $n-2$

Andando avanti così ottengo

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

somma progr. aritm.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Posso scegliere come mi pare

- gli elem. sulla diagonale $\rightsquigarrow$ n scelte
- metà dei rimanenti, cioè $\frac{n^2-n}{2}$

Sommando ottengo

$$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

—o—o—

Conclusione: l'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche è uno sp. vett. di dim

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Prop. Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applic. lineare.

Allora f è simmetrica se e solo se la matrice associata ad f usando una qualunque base ORTONORMALE è simmetrica (la stessa base viene usata in partenza e all'arrivo)

Dim. Ci sono due implicazioni

$\Rightarrow$ Ipotesi: f simmetrica
Tesi: matrice simmetrica (se ho base ortonormale)

Chi è l'elemento $a_{i,j}$ della matrice associata?
Chiamiamo $v_1, \dots, v_n$ la base.
Allora $a_{i,j}$ è la componente di $f(v_j)$ rispetto a v_i e quindi

$$a_{i,j} \underset{\uparrow}{=} \langle f(v_j), v_i \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle v_j, f(v_i) \rangle \quad * \quad \leftarrow v_i$$

le comp. si calcolano con prod. scalare

f simm

$$= \langle f(v_i), v_j \rangle = a_{j,i} \qquad \uparrow f(v_j)$$

Ho usato che abbiamo una base ortonormale per poter calcolare le componenti usando i prodotti scalari.

$\Leftarrow$ Ipotesi: matrice risp. base ortonorm. $\{v_1, \dots, v_n\}$ è simm.
Tesi: f è simm., cioè migra nei prodotti scalari

Siano v e w due elementi di $\mathbb{R}^n$.
Siano x e y i vettori colonna costituiti dalle comp. di v e w rispetto alla base data.
Sia A la matrice associata ad f in questa base

Allora Ax è il vettore colonna delle comp. di $f(v)$
Ay " " " " $f(w)$

Ora osservo che $\langle f(v), w \rangle = y^t A x$

Fatto generale: se devo fare il prodotto scalare tra due vettori è come moltiplicarli dopo averli messi uno in riga ed uno in colonna

$$(y_1, \dots, y_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n$$

Quindi
$$\langle f(v), w \rangle = y^t A x$$
$$\langle \underset{x}{v}, \underset{Ay}{f(w)} \rangle = (Ay)^t x = y^t A^t x = y^t A x$$

e quindi $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$

— o — o —

<u>Oss</u>. Abbiamo usato l'interpretazione del prodotto scalare come prodotto tra una riga ed una colonna

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA SPETTRALE}}$ (Versione applic. lineari)

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un' applic. lineare.
Allora f è simmetrica se e solo se esiste una base $\boxed{\text{ortonormale}}$ costituita da autovettori

$\boxed{\text{TEOREMA SPETTRALE}}$ (Versione matrici)

Sia A una matrice $n \times n$.
Allora A è simmetrica se e solo se è diagonalizzabile mediante una matrice M $\boxed{\text{ortogonale}}$ (cioè una matrice M tale che $M^{-1} = M^t$)

Oss. In entrambi i casi abbiamo una diag. di lusso.

$\boxed{\text{Caso applic., implicazione facile}}$

Ipotesi : esiste base ortonormale di autovettori
Tesi : applicazione è simmetrica

Considero la matrice rispetto a tale base. La matrice è diagonale, quindi simmetrica.
Grazie alla prop., concludiamo che f è simmetrica.

$\boxed{\text{Caso matrice, implicazione facile}}$

Ipotesi : A si diagonalizza mediante matrice ortogonale
Tesi : A è simmetrica

$M^{-1} = M^t$

Esiste M ort. t.c. $M^{-1}AM = D$, cioè $A = MDM^{-1} = MDM^t$
Ma allora

$$A^t = (MDM^t)^t = (M^t)^t D^t M^t = MDM^t = A$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix}$

- Per quali valori di a è diagonalizzabile (e basta) sui reali?

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ a & 4-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} (1-\lambda)(4-\lambda)-2a=0 \\ \lambda^2-5\lambda+4-2a=0 \end{array}$$

$$\Delta = 25-4(4-2a) = 25-16+8a = 9+8a$$

- Se $\Delta > 0$, cioè $9+8a>0$, cioè $a > -\frac{9}{8}$, allora abbiamo 2 autovalori reali distinti, quindi di sicuro è diag. sui reali
- Se $\Delta < 0$, cioè $a < -\frac{9}{8}$, allora abbiamo 2 autovalori complessi distinti, quindi è diag. in $\mathbb{C}$, ma non in $\mathbb{R}$.
- Se $\Delta = 0$, cioè $a = -\frac{9}{8}$, allora ci sarà autov. reale di molt. alg. $=2$, e devo andare a vedere la mg.

$$\lambda^2-5\lambda+\frac{25}{4}=0 \qquad \left(\lambda-\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \lambda=\frac{5}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{9}{8} & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{9}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ha rango } 1 \rightsquigarrow \text{NO diag.}$$

- Per quali valori di a la matrice è diag. mediante una matrice ortogonale?

Se e solo se $a=2$. Applicazione del teo. spettrale in versione matriciale.
Qui abbiamo usato l'implic. già dimostrata.

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 40

Note Title 20/11/2018

Lemma 1 (Non serve, ma è istruttivo)
Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un' applic. lin. simmetrica.
Siano v e w autovettori con autovalori diversi.
Allora v e w sono ortogonali.

$\boxed{\text{Dim}}$ Supponiamo che

$$f(v) = \lambda v$$
$$f(w) = \mu w$$

con $\lambda \neq \mu$.
Allora

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle \overset{f \text{ è simm.}}{=} \langle v, f(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

Facendo la diff. viene

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle v, w \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle v, w \rangle = 0.$$

Lemma 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrica.
Sia $V \leq \mathbb{R}^n$ un sottospazio invariante, cioè

$$f(v) \in V \qquad \forall v \in V$$

Allora anche $V^\perp$ è invariante, cioè

$$f(w) \in V^\perp \qquad \forall w \in V^\perp$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $w \in V^\perp$. Allora per ogni $v \in V$ vale

$$\langle f(w), v \rangle \underset{\uparrow \, f \text{ simm}}{=} \langle \overset{\in V^\perp}{w}, \overset{\in V}{\overline{f(v)}} \rangle = 0$$

Essendo questa vera per ogni $v \in V$, per forza $f(w) \in V^\perp$.

— o — o —

Lemma 3 (Gli autovalori sono reali)
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrica (e lineare).
Allora tutti gli autovalori di f sono reali.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che λ sia un autovalore (magari complesso) di f, e sia v un corrispondente autovettore (magari pure lui complesso).
Quindi

$$f(v) = \lambda v$$

Facendo il coniugato a dx e sx otteniamo

$$f(\bar{v}) = \overline{f(v)} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \bar{v}$$

qui uso che f è rappresentata da una matrice reale.

Scoperta: se λ è autovalore con autovettore v, allora
$\bar{\lambda}$ " " " " $\bar{v}$.

Ma allora come nel Lemma 1

$$\lambda \langle v, \bar{v} \rangle = \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle f(v), \bar{v} \rangle = \langle v, f(\bar{v}) \rangle = \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle$$
$$= \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle$$

da cui $(\lambda-\bar{\lambda}) <v,\bar{v}> = 0$

Ora se $v = (x_1, \dots, x_n)$, allora $\bar{v} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ e quindi

$$<v,\bar{v}> = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{} \neq 0$$

numero reale $\neq 0$ perché le componenti non sono tutte nulle

Quindi l'unica possibilità è $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, cioè $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

— o — o —

$\boxed{\text{Teo spettr. (versione applic.), freccia "vera"}}$

Ipotesi: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ applic. simmetrica
Tesi : esiste base ortonormale di autovettori

Si dimostra volendo per induzione sulla dimensione.
Per il lemma 3 sappiamo che esiste almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia v_1 un corrisp. autovettore, cioè

$$f(v_1) = \lambda v_1$$

A meno di molt. per una costante, posso supporre $\|v_1\| = 1$
Quindi almeno siamo partiti.
Pongo $V := \text{Span}(v_1)$ e osservo che V è invariante
Ma allora per il lemma 2 anche $V^\perp$ è invariante.
Quindi

$$f: V^\perp \to V^\perp$$

ed è simmetrica anche quando ristretta a $V^\perp$.
Quindi posso ripetere il ragionamento su $V^\perp$, che ha una dimensione in meno. Quindi esiste base ortonormale $\{v_2, \dots, v_n\}$ di $V^\perp$ fatta da autovett. ortonormali. Basta aggiungere v_1 ed abbiamo finito.

— o — o —

Esempio 1 Diagonalizzare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vediamo chi sono gli autovalori

Det = 8 Traccia = 6

$\uparrow$ Prod. autov. $\uparrow$ somma autovalori

Autovalori : 2 e 4

Bovinamente $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

pol. caratteristico : $(1-\lambda)(5-\lambda)+3=0$

$\lambda^2-6\lambda+8=0$

Risolvendo eq. di 2° grado trovo 2 e 4.

Due autov. distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile $\Rightarrow$ simile a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Devo trovare la M che diagonalizza, cioè realizza

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} M$$

Come la trovo ?

$\boxed{\text{1° modo: super-bovino}}$ Deve succedere

$$M \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} M$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Viene un sistema di 4 equazioni in 4 incognite

$\boxed{2^\circ \text{ modo: seguendo la teoria}}$ Calcolo gli autovettori di A e li uso come colonne di M

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = 2x \\ -3x+5y = 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad (1,+1) = v_1$$

possibile autovettore relativo a $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = 4x \\ -3x+5y = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x+y=0 \\ -3x+y=0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad (1,3) = v_2$$

$\lambda = 4$

Quindi $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ cambia base dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

$v_1 \quad v_2$

Oss. Vedere cosa succedeva a risolvere il sistema 4×4 del metodo super-bovino

Oss. M è tutt'altro che unica! Ad esempio, posso moltiplicare tutte le colonne per numeri diversi, tanto rimangono autovettori.

Oss. Mai dimenticare la verifica finale che

$$D = M^{-1} A M$$

diagonale — matrice iniziale — matrice cambio base trovata

Esempio 2 Trovare la forma canonica di
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Servono gli autovalori, quindi il $p_A(\lambda)$.
Tolgo λ dalla diagonale, e sviluppo il determinante
oppure...

→ osservo che rango $= 1$
→ quindi dim (Ker) $= 3$
→ Ker = autospazio dell'autovalore $\lambda = 0$
→ quindi $\lambda = 0$ è autovalore con $m_g = 3$ e quindi $m_a \geq 3$
→ quindi 0 compare 3 o 4 volte nella lista degli autovalori
→ ma $Tr = 4$, quindi per forza c'è un autovalore $= 4$ e 3 autovalori coincidenti nulli.
→ Conclusione: gli autovalori sono
$\lambda = 0$ con $m_a = m_g = 3$
$\lambda = 4$ con $m_a = m_g = 1$
e quindi A è diagonalizzabile con forma canonica

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chi è una M che realizza la similitudine

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

va in 4 volte se stesso

autovettori di 0, cioè elementi del ker

Posso trovare M ortogonale?
Sì, perché matrice iniziale è simmetrica.

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 41

Note Title 23/11/2018

FORMA CANONICA DI JORDAN

Def. (Forma di Jordan)

- Dato un intero k ed un numero reale λ, si dice $\boxed{\text{BLOCCO DI JORDAN}}$ $k \times k$ con autovalore λ una matrice $k \times k$ con
  - → tutti λ sulla diagonale
  - → tutti 1 subito sopra la diagonale
  - → tutti 0 altrove

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{k} \Big\} k$$

- Si dice $\boxed{\text{MATRICE DI JORDAN}}$ una matrice quadrata ottenuta allineando lungo la diagonale dei blocchi di Jordan

Esempio Esempi di blocco di Jordan

$$\underset{1\times 1}{\boxed{\lambda}} \qquad \underset{2\times 2}{\boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}}} \qquad \underset{3\times 3}{\boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}}} \qquad \underset{4\times 4}{\boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}}}$$

Osserviamo che λ può a sua volta essere 0 oppure 1

Esempi di matrici di Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ & & 3 & 1 & \\ & 0 & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

È consentito che blocchi diversi abbiamo lo stesso λ sulla diagonale

Oss. Una matrice diagonale è una matrice di Jordan con tutti blocchi da 1×1.

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ (Versione sui complessi)

Sia A una matrice $n \times n$ con elementi complessi (se sono reali, ancora meglio).
Allora esiste una matrice J di Jordan complessa (cioè i λ sulla diagonale possono essere complessi) che è simile ad A cioè esiste M matrice $n \times n$ invertibile con el. complessi tale che

$$J = M^{-1} A M$$

Inoltre

- i λ che compaiono sulla diagonale sono gli autovalori di A
- ogni λ compare m_a volte (molt. algebrica)
- per ogni λ il numero di blocchi è dato da $m_g(\lambda)$
  (quindi se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, allora per quel λ tutti i blocchi sono per forza da 1)
  quindi il numero di blocchi totale è

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id})) \qquad (= m_g(\lambda))$$

- per ogni λ il numero di blocchi di dimensione $\geq k$ è dato da

$$\dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda \mathrm{Id})^k) - \dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda \mathrm{Id})^{k-1})$$

[Aggiunto dopo video]

FORMA CANONICA DI JORDAN REALE

Def. Un blocco di JORDAN reale $2k \times 2k$ (dimensione pari) è una matrice ottenuta
- allineando lungo la diagonale dei blocchi 2×2 del tipo
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
tutti con gli stessi valori di a e b
- aggiungendo sopra questi dei blocchi di identità 2×2

Esempi

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & a & b & 1 & 0 \\ & & -b & a & 0 & 1 \\ & 0 & & & a & b \\ & & & & -b & a \end{pmatrix}$$

Def. Una matrice di Jordan reale è una matrice ottenuta allineando lungo la diagonale dei blocchi di Jordan reali, oppure dei blocchi come nel caso complesso con un λ reale sulla diagonale

Esempi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & 0 \\ & 0 & 3 & 4 \\ & & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ -4 & 3 & & \\ & & 3 & 4 \\ & & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Due blocchi 2×2 reali

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & \\ -4 & 3 & & 1 \\ & & 3 & 4 \\ & & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Blocco 4×4 reale

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ (Forma di JORDAN reale)

Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi reali
Allora A è simile ad una matrice J di Jordan reale, cioè esiste M matrice $n \times n$ reale tale che

$$J = M^{-1} A M$$

Inoltre la J reale si costruisce a partire dalla J complessa in questo modo

- tutti i blocchi di Jordan che hanno sulla diagonale un λ reale si copiano e basta
- tutti i blocchi di Jordan 1×1 complessi con λ sulla diagonale hanno per un fatto misterioso un numero uguale di corrispondenti blocchi con $\bar{\lambda}$ sulla diagonale (fatto vero se A ha coeff. reali).
  Al posto di questi due blocchi si mette $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
  dove $\lambda = a \pm i b$
- i blocchi con λ davvero complesso sulla diagonale e degli 1 sopra hanno dei corr. blocchi con $\bar{\lambda}$ e questi producono blocchi reali di dimensione doppia

— o — o —

<u>Esempi</u> (di passaggio da Jordan complesso a reale)

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3+i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3-i} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & 3 & 1 \\ & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5+2i & & & 0 \\ & 5-2i & & \\ & & 4+i & \\ 0 & & & 4-i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 1 & & \\ 0 & 1+2i & & \\ & & 1-2i & 1 \\ & & & 1-2i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \\ -2 & 1 & & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

se c'è   allora c'è anche

Coppia di blocchi 2×2 con $a\pm ib$ sulla diagonale produce blocco 4×4 reale

— o — o —

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Trovare la forma canonica di Jordan reale e complessa

Trovo prima la forma complessa cercando gli autovalori

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \qquad \text{Pol. caratt.} = (2-\lambda)(4-\lambda)+5=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+13=0$$

$$\lambda_{1,2} = 3\pm\sqrt{9-13} = 3\pm 2i$$

Autovalori distinti $\Rightarrow$ sui complessi è diagonalizzabile

Jordan complessa $\begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix}$

La Jordan reale si ricava da quella con l'algoritmo appena descritto

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(volendo posso invertire 2 e -2)

— o — o —

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono: $\lambda = 3$ con $m_a(3) = m_g(3) = 1$
$\lambda = 2$ con $m_a(2) = 2$

Calcolo $m_g(2)$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Rango} = 2 \Rightarrow \dim(\ker) = 1$$

$\rightsquigarrow m_g(2) = 1 \rightsquigarrow A$ non è diagonalizzabile

$\Downarrow$

con l'autovalore $\lambda = 2$ c'è un solo blocco

Quindi la forma di Jordan (sia reale sia complessa) è

$$\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 42

Note Title 23/11/2018

Esempio 1 $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$p(x) \to p'(x)$

Calcolare la forma canonica di f.

Costruisco la matrice associata ad f in qualche base

$f(1) = 0$

$f(x) = 1$

$f(x^2) = 2x$

$f(x^3) = 3x^2$

Quindi nella base $\{1, x, x^2, x^3\}$ la matrice di f è

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \end{array} & \end{array} = A$$

Non serve, ma per esercizio calcoliamo la matrice di f nella base $\{x, x^2, 1, x^3\}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow x^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(x) & f(x^2) & f(1) & f(x^3) \end{array} & \end{array} = B$$

(simile ad A: per esercizio trovare una possibile M di passaggio)

Tornati ad A, calcoliamo la forma di Jordan:

L'unico autovalore è $\lambda = 0$ con $m_a(0) = 4$

Si vede che $m_g(0) = \dim(\ker(A - 0\,Id)) = 4 - \text{rango}(A) = 1$

Quindi esiste un unico blocco di Jordan 4 × 4 con 0 sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

Trovare una matrice M che realizza la similitudine

$$J = M^{-1} A M \qquad (M \text{ invertibile})$$

Superboviamo : $MJ = AM$ e diventa un sistema di 16 eq. in 16 incognite.

Guardo cosa deve accadere :

$$\begin{array}{cccccl} 0 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow v_1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow v_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow v_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \leftarrow v_4 & \\ \uparrow & \uparrow & & & & \\ f(v_1) & f(v_2) & \ldots & & & \end{array}$$

$f(v_1) = 0 \rightsquigarrow v_1 \in \ker$

$f(v_2) = v_1$

$f(v_3) = v_2$

$f(v_4) = v_3$

v_1 posso prendere $v_1 = 1$

$f(v_2) = v_1 \qquad v_2 = x$

$f(v_3) = v_2 \qquad v_3 = \frac{x^2}{2}$

$f(v_4) = v_3 \qquad v_4 = \frac{x^3}{6}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = M$$

La matrice M è quella che ha come colonne v_1, v_2, v_3, v_4 :

Verifica : $J = M^{-1} A M$.

— o — o —

Esempio 2 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$

Trovare J reale e complessa e matrici M di passaggio

$\boxed{\text{Calcolo autovalori}}$ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ $(1-\lambda)(3-\lambda)+10=0$

$\lambda^2-4\lambda+13=0$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$

$\boxed{\text{Jordan complessa}}$ $J = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$

Come trovo la M di passaggio? Le colonne sono gli autovettori (complessi di A)

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2+3i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x-5y &= (2+3i)x \\ 2x+3y &= (2+3i)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1-3i)x - 5y &= 0 \\ 2x + (1-3i)y &= 0 \end{aligned}$$

Una sol. comoda della prima eq. è: $x=5$ $y=-1-3i$

Verifico che risolva la 2ª: $10-(1-3i)(1+3i) = 10-10=0$ ☺

Un autovettore relativo a $(2+3i)$ è $(5, -1-3i)$

Si verifica abbastanza facilmente che $(5, -1+3i)$ è un autovettore relativo a $(2-3i)$. [Fare la verifica!]

Quindi la M di passaggio è

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1-3i & -1+3i \end{pmatrix} = M$$

Verifico che $J = M^{-1}AM$

$\boxed{\text{Jordan reale}}$ Si ricava da quella complessa

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$ (ricavata guardando quella complessa)

Cerco la matrice M di passaggio, cioè cerco la base $\{v_1, v_2\}$ in cui la matrice ha la forma J.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} & \end{array}$$

Deve succedere che $f(v_1) = 2v_1 - 3v_2$
$f(v_2) = 3v_1 + 2v_2$

Come trovo v_1 e v_2 ?

Torniamo alla forma complessa. Chiamiamo w l'autovettore relativo a $(2+3i)$. Allora

$$f(w) = (2+3i)\,w$$
$$f(\bar{w}) = (2-3i)\,\bar{w}$$

Scrivo w nella forma $\underset{\text{complesso}}{w} = \underset{\text{reali}}{w_1 + i\,w_2}$

$$f(w_1) + i\,f(w_2) = (2+3i)(w_1 + i w_2) = 2w_1 - 3w_2 + i(3w_1 + 2w_2)$$
$$f(w_1) - i\,f(w_2) = (2-3i)(w_1 - i w_2) = 2w_1 - 3w_2 + i(-3w_1 - 2w_2)$$

Sommando ottengo $f(w_1) = 2w_1 - 3w_2$
Sottraendo ottengo $f(w_2) = 3w_1 + 2w_2$

Morale: il v_1 e v_2 che cercavo sono parte reale e immaginaria degli autovalori complessi trovati prima

$$w = (5, -1-3i) = \underset{\overset{\shortparallel}{v_1}}{(5,-1)} + i\,\underset{\overset{\shortparallel}{v_2}}{(0,-3)}$$

Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Verifica: $J = M^{-1} A M$

$$-\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -30 & -45 \\ 45 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

— o — o —

Esempio 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare la forma canonica

- Rango $= 2 \Rightarrow \dim \ker = 2 \Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore con $m_g = 2$ (l'algebrica per ora non la so)
- Se moltiplico per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ottengo 8 volte lui stesso, quindi $\lambda = 8$ è autovalore con $m_g(8) \geq 1$.
- La somma degli autovalori è 12 e 3 autovalori sono di sicuro $0, 0, 8$. Per forza il quarto è 4.
- Conclusione: gli autovalori sono $0, 0, 8, 4$, quindi $m_a(0) = m_g(0)$

Quindi A è diagonalizzabile con forma canonica

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come trovo una M di passaggio

v_1: autovettore di 8 : $(1,1,1,1)$

v_2: autovettore di 4 : lo ottengo risolvendo $Av = 4v$
volendo si vede ad occhio che è $(1,-1,1,-1)$

v_3, v_4: base del ker : $(1,0,-1,0)$
$(0,1,0,-1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Verifica!]

<u>Oss.</u> A era simmetrica, quindi posso trovare M che sia ortogonale !!!

Quindi mi serve base con v_1, v_2, v_3, v_4 ortonormali
Dico che v_1, v_2, v_3 sono ortogonali (sono autovettori con autovalori distinti), quindi basta aggiustare v_4 con GS e poi rendere la base ortonormale dividendo per le norme.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 43

Note Title 27/11/2018

FORME QUADRATICHE

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di termini di 2° grado nelle n variabili

Esempi $\boxed{n=2}$ Una forma quadratica generica è del tipo

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

dove a, b, c sono numeri dati

$\boxed{n=3}$ $$q(x,y,z) = \underbrace{ax^2+by^2+cz^2}_{\text{potenze pure}} + \underbrace{dxy + exz + fyz}_{\text{termini misti}}$$

Fatto generale Una forma quadratica in n variabili si può sempre rappresentare con una matrice $n \times n$ $\boxed{\text{SIMMETRICA}}$

Esempio $\boxed{n=2}$ $$q(x,y) = 5x^2 + 4xy - 3y^2$$

$$\underbrace{(x \;\; y)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 5x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix} = 5x^2 + 2xy + 2yx - 3y^2$$

$$= 5x^2 + 4xy - 3y^2 = q(x,y)$$

La matrice della forma è $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

In generale, la matrice di una forma si costruisce

- mettendo sulla diagonale i coeff. dei quadrati puri
- " fuori dalla diagonale i coeff. dei termini misti DIVISI PER 2

A quel punto, detta A la matrice ottenuta, si avrà

$$\boxed{\underset{\text{vettore}}{q(x)} = x^t A x}$$

pensando x come vettore colonna

La stessa formula si può pensare anche come

$$\boxed{q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle}$$

rappresentazione di q come prod. scalare

Esempio 1 $\quad q(x,y,z) = x^2 + 2z^2 - 7xy + 8yz$

Trovare la matrice (simmetrica) che rappresenta $q(x)$

$$\begin{array}{c} x \to \\ y \to \\ z \to \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

Verificare per esercizio che $q(x,y,z) = (x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Esempio 2

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Trovare la forma quadratica associata.

$$q(x,y,z,w) = 2x^2 + 3y^2 - w^2 + 2xy + 14yz + 4yw + 10zw$$

PROBLEMA: stabilire il segno, anzi la $\boxed{\text{SEGNATURA}}$, di una forma quadratica.

Def. Sia q una forma quadratica in n variabili
si dice che q è

- DEFINITA POSITIVA se $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- SEMIDEFINITA POSITIVA " $q(x) \geq 0$ per ogni x
  (può essere $q(x) = 0$ anche per $x \neq 0$)
- DEFINITA NEGATIVA se $q(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$
- SEMIDEFINITA NEGATIVA se $q(x) \leq 0$ per ogni x

- INDEFINITA se non ricade in nessuna delle tipologie precedenti, cioè
  → esiste x_1 t.c. $q(x_1) > 0$
  → esiste x_2 t.c. $q(x_2) < 0$

Esempi $q(x,y) = x^2 + 3y^2$

Si vede che $q(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $q(x,y) = 0$ se e solo se $x = y = 0$.
Quindi $q(x,y)$ è DEFINITA POSITIVA, e pure SEMIDEF. POS.

$q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

$q(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$ sempre e $q(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$
quindi per esempio $q(7,-7) = 0$,
quindi è SEMIDEFINITA POSITIVA, ma non DEFINITA POSITIVA

$q(x,y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

$$\left.\begin{array}{l} q(1,0) = 1 > 0 \\ q(1,-1) = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q(x,y) \text{ è INDEFINITA}$$

Fatto generale: se trovo un punto in cui $q(x) > 0$ e un p.to in cui $q(x) < 0$, allora di sicuro $q(x)$ è INDEFINITA.

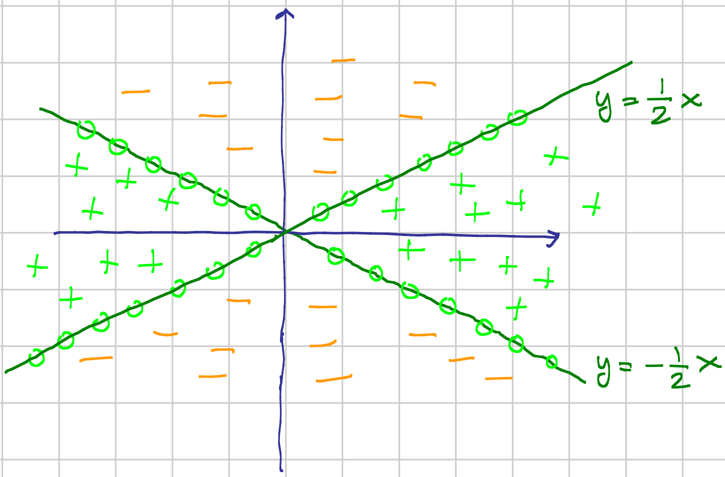
Domanda: come trovo i punti?

Esempio $q(x,y) = x^2 - 4y^2$

Si vede che è indefinita perché $q(1,0) = 1 > 0$, $q(0,1) = -4 < 0$

Come è fatto l'insieme degli $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $q(x,y) > 0$?
" $q(x,y) < 0$?
" $q(x,y) = 0$?

$$q(x,y) = x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y)$$



$q(x,y) > 0$ in due casi

- $x + 2y > 0$, $x - 2y > 0$
  $y > -\frac{x}{2}$ $y < \frac{x}{2}$
  (triangolo a destra)

- $x + 2y < 0$, $x - 2y < 0$
  $y < -\frac{x}{2}$, $y > \frac{x}{2}$
  (triangolo a sinistra)

[Studiare analogamente il caso $q(x,y) < 0$]

Oss. Se x è un vettore e $\lambda \neq 0$ è un numero, allora
$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$ (tutti i termini si moltiplicano per λ^2)

In particolare, se $q(x) > 0$, allora $q(\lambda x) > 0$ per ogni $\lambda \neq 0$
Quindi le zone di + e di − sono dei coni con vertice nell'origine

Def. (Segnatura di una forma quadratica)

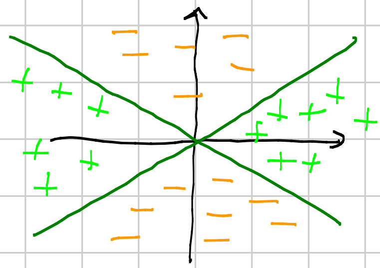
Ad ogni forma quadratica sono associati 3 numeri n_0, n_+, n_-, talvolta detti INDICI DI INERZIA, tali che

$$\boxed{\underset{\uparrow \text{ numero variabili}}{n} = n_0 + n_+ + n_-}$$

dove

- n_+ è la massima dimensione di un sottospazio vettoriale su cui la restrizione di q è def. pos.
- n_- è la massima dim .... è def. negativa
- n_0 si ottiene per differenza dalla formula di sopra

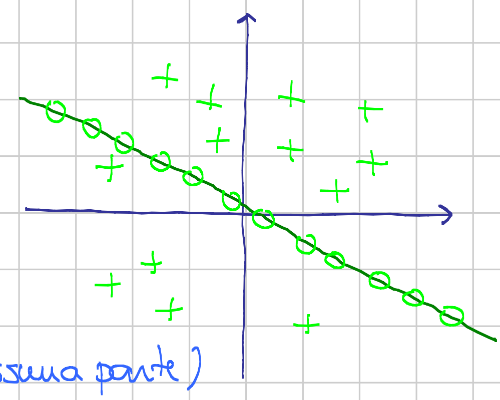
Esempio 1 $q(x,y) = x^2 - 4y^2$



In questo caso

- $n_+ = 1$ (ci sono dei s.sp. di dim 1 su cui $q > 0$: una qualunque retta che passa per l'origine e ha coeff. ang. in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; NON ci sono sottospazi di dim. 2 su cui $q > 0$, perché dovrebbe essere tutto il piano)
- $n_- = 1$ (stesso motivo con zona $-$)
- Per differenza $n_0 = 0$

Esempio 2 $q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$



$q(x,y) = (x+2y)^2$

In questo caso

- $n_+ = 1$ (va bene una qualunque retta diversa da $y = -\frac{x}{2}$)
- $n_- = 0$ (non è negativa da nessuna parte)
- Per differenza $n_0 = 1$

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 44

Note Title 27/11/2018

COME TROVARE LA SEGNATURA DI UNA FORMA QUADRATICA

Come trovare n_0, n_+, n_- ?
Come trovare s.sp. di dim. n_+ in cui $q(x) > 0$?
" " n_- in cui $q(x) < 0$?

Quattro metodi
1. Autovalori
2. Completamento dei quadrati
3. SYLVESTER
4. CARTESIO

1 Autovalori La forma quadratica è rappresentata da una matrice A simmetrica.
Essendo simmetrica, A ha n autovalori REALI
A questo p.to

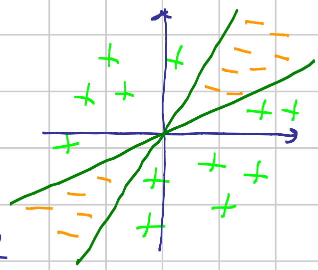
- n_+ = numero autovalori positivi
- n_- = " " negativi
- n_0 = " " nulli

(Così è ovvio che $n_+ + n_- + n_0 = n$)

Grosso difetto: se il grado è alto, può essere impossibile trovare gli autovalori

Esempio $q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Det $= -1$ = prod. autovalori



$\rightsquigarrow$ autovalori: $+, -$ $\rightsquigarrow$ $n_0 = 0,\ n_+ = 1,\ n_- = 1$

Esempio $7x^2+6xy+4y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Det $= 19 > 0$

$\rightsquigarrow$ Autovalori: $++$ oppure $--$

Essendo $\mathrm{Tr}(A) = 11$, chi sicuro gli autovalori sono $++$, quindi

$n_+ = 2$, $n_- = 0$, $n_0 = 0$

Quindi la forma è definita positiva su tutto $\mathbb{R}^2$, cioè

$$q(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

— o — o —

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{Completamento dei quadrati}}$

Idea: cercare di scrivere q come somma e/o differenza di quadrati di espressioni LINEARMENTE INDIP.

A questo punto:

- n_+ = numero di $\square$ con il segno $+$ davanti
- n_- = " " " $-$ "
- n_0 si ottiene per differenza.

Esempio $q(x,y) = 2x^2+6xy+4y^2 = 2(x^2+3xy+2y^2)$

$$x^2+3xy+2y^2 = x^2 + \underbrace{2\cdot x \cdot \frac{3y}{2}}_{\text{cerco di vedere } 3xy \text{ come doppio prodotto}} + \underbrace{\frac{9y^2}{4} - \frac{9y^2}{4}}_{\text{aggiunti e tolti}} + 2y^2$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

Tenendo conto del 2 davanti a tutto abbiamo scritto

$$q(x,y) = 2\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Avendo un □ con il + avremo $n_+ = 1$
" " □ con il − " $n_- = 1$ $\Big\}$ ⇝ $n_0 = 0$.

Questa scrittura dà più informazioni della sola segnatura.

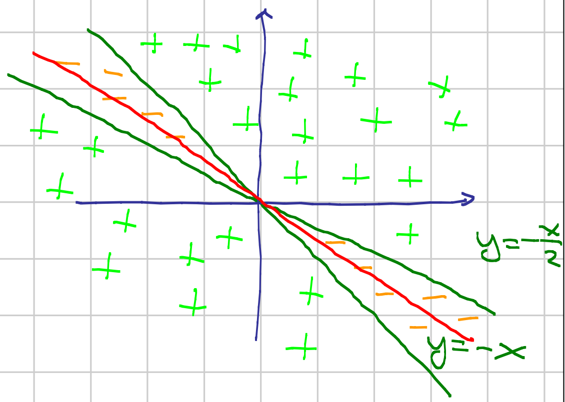
• Dove si annulla $q(x,y)$? Deve essere $\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 = \frac{1}{4}y^2$

cioè $x+\frac{3}{2}y = \pm\frac{1}{2}y$, cioè

$x+\frac{3}{2}y = \frac{1}{2}y$ $\qquad$ $x+\frac{3}{2}y = -\frac{1}{2}y$

$x+y=0$ $\qquad$ $x+2y=0$

Quindi graficamente la situazione è come in figura



• Trovare una retta (s.sp. di dim 1) su cui q è def negativa.

Guardo la scrittura

$$q(x,y) = 2\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

basta porre $x+\frac{3}{2}y = 0$ ⇝ $y = -\frac{2}{3}x$

Esempio $\quad q(x,y) = 3x^2 - 2y^2$

È evidente che $n_+ = 1$ e $n_- = 1$

$$q(x,y) = \underbrace{x^2+x^2+x^2}_{} - 2y^2$$

così non vale perché queste non sono lin. indip.

Esempio $q(x,y,z) = x^2+4xy-6yz-3z^2$

$$x^2+4xy-6yz-3z^2 = \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 2y+4y^2}-4y^2-6yz-3z^2$$

$$= (x+2y)^2-4y^2-6yz-3z^2 \quad \text{(non ho + x da sistemare)}$$

$$= (x+2y)^2-\left[4y^2+6yz+3z^2\right]$$

$$(2y)^2+2\cdot 2y\cdot \frac{3}{2}z+\frac{9}{4}z^2-\frac{9}{4}z^2+3z^2$$

$$= \boxed{(x+2y)^2-\left(2y+\frac{3}{2}z\right)^2-\frac{3}{4}z^2}$$

verifica: espandere tutto e verificare che venga $q(x,y,z)$

Da questa deduciamo che $n_+ = 1$ e $n_- = 2$ (e $n_0 = 0$)

- Come trovo un s.sp. di dim 2 su cui q è def. negativa?

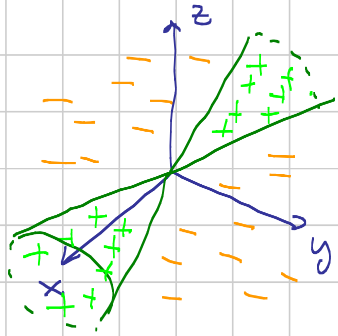
Impongo annullamento del primo termine: $x+2y=0$ pensata come equ. in 3 variabili.
Una base delle soluzioni è $(-2,1,0)$, $(0,0,1)$
Quindi un poss. sottospazio richiesto è
$\text{Span}\{(-2,1,0),(0,0,1)\}$
Quindi: ogni vettore (x,y,z) che è comb. lin. di questi due rende $q(x,y,z)<0$.

- Come trovo un s.sp. di dim 1 su cui q è def. pos.?

Impongo
$2y+\frac{3}{2}z=0 \rightsquigarrow y=0$
$z=0 \rightsquigarrow z=0$

Quindi il sottosp. è $\text{Span}\{(1,0,0)\}$

Geometricamente, in $\mathbb{R}^3$ la situazione segui è quella rappresentata in figura



$q(x,y,z)$ è $+$ dentro il cono
$-$ fuori dal cono
0 sul cono

— o — o —

<u>Esempio</u> $q(x,y,z) = xy + yz$

Come completo i quadrati?

$$xy + yz = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + yz$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2}_{\text{così non va bene perché sono troppi}}$$

Bisognava fermarsi prima e seguire l'algoritmo

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + yz = -\frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy + yz$$

Ora posso provare a sistemare l'ultimo termine.

Altra alternativa: aggiungo e tolgo un $\square$ dall'inizio

$$\underbrace{xy}_{} + \underbrace{yz}_{} + \underbrace{\frac{1}{4}y^2}_{} - \frac{1}{4}y^2 + \underbrace{x^2}_{} - x^2 + \underbrace{z^2}_{} - z^2$$

e quelli indicati sono quasi un $\square$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 45

Titolo nota 27/11/2018

③ CARTESIO

Teorema misterioso (di analisi)

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n con n radici reali (eventualmente con molteplicità).

Allora

- n_0 = (numero di radici nulle) = più piccolo grado di un termine con coeff. $\neq 0$ nel polinomio
- n_+ = numero di VARIAZIONI di segno nella succ. dei coeff. non nulli
- n_- si ottiene per differenza

Esempio $p(x) = x^6 - 3x^4$

Cartesio: $n_0 = 4$ (più piccolo termine è $-3x^4$)

$$p(x) = \underbrace{x^4}_{\text{molt. della radice } x=0} \underbrace{(x^2-3)}_{x=0 \text{ non è radice qui}}$$

Oss. Se il termine noto del polinomio è $\neq 0$, allora $n_0 = 0$ (cioè $x=0$ non è radice)

Cartesio: $n_+ = 1$ = numero di variazioni di segno in $1, -3$

Per differenza: $n_- = 1$

Riprova: le radici sono $x=0$ di molt. 4, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$

Se voglio applicare basta calcolare il pol. caratteristico e poi dedurre il segno degli autovalori.

— o — o —

④ $\boxed{\text{SYLVESTER}}$ (MINORI ORLATI)

<u>Versione basic</u> :

1 – considero tutte le sottomatrici $k \times k$ ottenute partendo da alto – sx
2 – calcolo tutti i determinanti e SPERO che siano $\neq 0$
3 – scrivo in successione i segni di questi determinanti
4 – Aggiungo a sx un segno + (d'ufficio)
5 – allora
- n_+ = numero di permanenze di segno nella succ.
- n_- = numero di variazioni di segno
- $n_0 = 0$ (perché visto che il Det generale è $\neq 0$, allora per forza 0 non è autovalore)

<u>Esempio 1</u> $q(x,y,z) = x^2 + 4xy - 6yz - 3z^2$

Scrivo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{Det}_{1\times1} = 1$

$\text{Det}_{2\times2} = -4$

$\text{Det}_{3\times3} = 12 + 9 = 21$ (Sarrus)

3 [Corretto dopo video]

La successione dei segni è

aggiunto a sx d'ufficio

$$\underbrace{+\;+}_{P}\;\underbrace{\;-}_{V}\;\underbrace{\;+}_{V}$$

Conclusione $n_+ = \#P = 1$, $n_- = \#V = 2$, $n_0 = 0$.

<u>Esempio 2</u> $q(x,y) = 2x^2 + 12y^2 - 10xy$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det}_{1\times1} = +$
$\mathrm{Det}_{2\times2} = -$

d'ufficio

$+ \underbrace{\; + \;}_{P} \underbrace{\; - \;}_{V}$

Quindi $n_+ = n_- = 1$ e $n_0 = 0$.
(si vedeva guardando anche solo $\mathrm{Det}_{2\times2}$)

<u>Esempio 3</u> $q(x,y) = 2x^2 + 3xz - 5z^2 + 2ayz + y^2$
Stabilire la segnatura al variare del parametro a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & a \\ \frac{3}{2} & a & -5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det}_{1\times1} = +$
$\mathrm{Det}_{2\times2} = +$
$\mathrm{Det}_{3\times3} = -10 - \frac{9}{4} - 2a^2 = \text{neg. } \forall a$

Quindi $\underbrace{+ \; +}_{P} \underbrace{\; + \;}_{P} \underbrace{\; - \;}_{V}$

Quindi per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $n_+ = 2$ e $n_- = 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{}\,0 \quad \overline{}\,0 \quad \overline{}$

Cosa succede se trovo degli 0 strada facendo ?

<u>Primo sistema</u> : usare versioni più generali dell'algoritmo

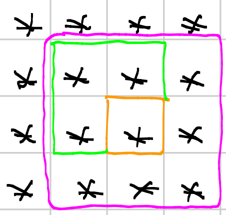
$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{matrix}$$

Sylvester 1-2-3-4

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{matrix}$$

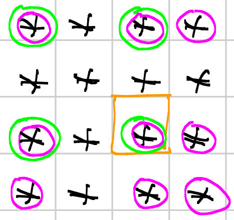
Sylvester 4-3-2-1
al 1° passaggio uso riga/colonna 4
al 2° " " " 4-3
al 3° " " " 4-3-2

Sylvester 3 – 2 – 4 – 1



1° passaggio
2° passaggio
3° passaggio

Sylvester 3 – 1 – 4 – 2



1° passaggio
2° passaggio
3° passaggio

<u>Esempio</u> $q(x,y,z) = z^2 + 3xz + 6yz + x^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Sylvester 1–2–3 : ☹
Sylvester 3 – 2 – 1 :

$Det_{1\times1} = +$ (1)
$Det_{2\times2} = -$ (-9)
$Det_{3\times3} = -$ (-9)

Segni $+\ +\ -\ -$ $\rightsquigarrow$ $n_+ = 2$
P V P $n_- = 1$

Non è immediato trovare s.sp. della dim. giusta su cui la forma è def. pos. / neg.

<u>Oss.</u> Come ricordare se le P danno segni + o segni –

Basta pensare a cosa succede nel caso di matrice diagonale
I determinanti successivi cambiano segno solo quando trovo autovalori negativi.

__Esempio__ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ Stabilire la segnatura al variare di a

__Sylvester__: cerco di fare in modo che il parametro serva solo alla fine
$\rightsquigarrow$ uso $1-3-2$

$Det_{1\times1}$: 1 $+$
$Det_{2\times2}$: $3-4=-1$ $-$
$Det_{3\times3}$: $3a-4a-1=-a-1$

- Se $-a-1>0$, cioè $a<-1$, allora $+\,\vdots + - +$
  quindi $+--$

- se $-a-1<0$, cioè $a>-1$, allora $+\,\vdots + - -$
  quindi $++-$

- Se $-a-1=0$, cioè $a=-1$, in teoria ☹, tuttavia si può dire che la situazione è $+-0$.
  c'è
  $q(1,0,0)>0$
  $q(0,1,0)<0$

Capire l'ultimo l'ultimo passaggio è il riassunto delle 3 lezioni.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 46

Titolo nota 30/11/2018

Riassunto: ad ogni forma quadratica è associata matrice A simmetrica $n\times n$ in modo tale

$$\boxed{q(x) = x^t A x = \langle Ax, x\rangle}$$

Essendo A simmetrica, ha n autovalori reali (contati con molteplicità), di cui
- n_+ positivi
- n_- negativi
- n_0 nulli

da cui ovviamente

$$\boxed{n = n_+ + n_- + n_0}$$

Caratterizzazione:
- n_+ è la massima dim. di un s.sp. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $q(x)$ è definita positiva in V, cioè
$$q(v) > 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{0\}$$
- n_- ... definita negativa.

Achtung! n_0 non è la max dim. di un s.sp. su cui $q(x)$ è nulla, ma comunque è la dim. del ker di A.

Dim. caratterizzazione

Passo 1 Per comodità, poniamo $n_+ = k$.
Voglio trovare s.sp. V di dim k su cui $q(x)$ è def. positiva.

Per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori: $v_1, \dots, v_n$ con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Supponiamo che $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ siano positivi. Dico che posso usare $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Dico che $q(x)$ è def. pos. su V. Prendo il generico el.

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

e applico A:

$$\begin{aligned} Av &= A(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) \\ &= c_1 A v_1 + \dots + c_k A v_k \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda v_k \end{aligned}$$

Ma allora

$$q(v) = \langle Av, v \rangle = \langle \lambda_1 c_1 v_1 + \dots + \lambda_k c_k v_k, c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \rangle$$

usiamo che
$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$
$\langle v_i, v_i \rangle = 1$

$$= \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_k c_k^2$$

$$> 0$$

perchè $\lambda_i > 0$ per $i = 1, \dots, k$ e almeno uno dei $c_i \neq 0$ se $v \neq 0$.

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Esiste s.sp. di dim n_- su cui q è def. neg. (basta prendere s.sp. generato dagli autovett. con autovalori negativi).

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Esiste s.sp. di dim. $n_+ + n_0$ su cui q è semidef. pos., cioè

$$q(v) \geq 0 \qquad \forall v \in V$$

(basta prendere quello generato dagli autovett. con autov. ≥ 0)

Analogamente esiste s.sp. di dim $n_- + n_0$ su cui q è semidef. neg.

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Posto $n_+ = k$, resta da dim. che NON esistono s.sp. di dim. $\geq k+1$ su cui $q(x)$ è def.

Supponiamo che ci sia V di dim $k+1$ su cui V è def. positiva. Per il passo 3, esiste W di dim $n_- + n_0 = n-k$ su cui $q(x)$ è def. negativa.
Dico che V e W hanno intersezione $\neq \{0\}$ il che è un guaio perché q dovrebbe contemporaneamente essere >0 (essendo in V) e ≤ 0 (essendo in W).
Per Grassmann

$$\underbrace{\dim(V\cap W)}_{\text{almeno } 1,\text{ quindi intersezione non banale}} + \underbrace{\dim(V+W)}_{\text{al max è } n} = \underbrace{\dim V}_{k+1 \text{ o più}} + \underbrace{\dim W}_{n-k}$$

— o — o —

<u>Esempio</u> Mettiamo di essere in $\mathbb{R}^{10}$ con $n_+ = 4$, $n_- = 3$, $n_0 = 3$

Per un passo della dim. sappiamo che esiste s.sp. W di dim 6 su cui q è semidef. neg. (≤ 0)
Se ci fosse uno sp. V di dim. 5 su cui $q > 0$

$$\underbrace{\dim(V\cap W)}_{\text{almeno } 1} + \underbrace{\dim(V+W)}_{\text{al max è } 10} = \underbrace{\dim V}_{5} + \underbrace{\dim W}_{6}$$

— o — o —

<u>Esercizio</u> In $\mathbb{R}^{10}$ prendiamo V s.sp. di dim 5
W s.sp. di dim 6

Quali sono i possibili valori per $\dim(V+W)$?

Massimo : 10 Minimo : 6

Esempio in cui è 6 : $V = \{e_1, \dots, e_5\}$
$W = \{e_1, \dots, e_5, e_6\}$

In questo caso $V+W = W$

Esempio in cui è 8: $V = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$W = \{e_6, e_7, e_8, \underbrace{e_2, e_3, e_4}_{\text{3 a caso di quelli già usati}}\}$

Andava bene anche $W = \{e_6, e_7, e_8, e_1+e_2, e_1+e_4, e_4+e_5\}$

Se $\dim(V+W) = 8$, allora per forza $\dim(V \cap W) = 3$.

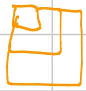
__Esempio__ In $\mathbb{R}^{2018}$ abbiamo $\dim V = 1500$
$\dim W = 1700$

Cosa possiamo dire di $\dim(V \cap W)$?

Massimo: 1500 Minimo: $1500 + 1700 - 2018$
(si ha quando la somma è la massima possibile)

__Esercizio__ Come cavarsela quando con Sylvester si trovano dei Det $= 0$ strada facendo.

Supponiamo di essere in dim 3 e troviamo $+ - 0$
Cosa possiamo dire?



C'è un autov. $+$, un autov. $-$, $\underbrace{\text{un autov. nullo}}_{\text{segue subito da } \mathrm{Det}_{3\times 3} = 0}$

C'è un autov. $+$ perchè $q(e_1) = q(1,0,0) > 0$, quindi c'è tutto un s.sp. di dim 1 su cui q è def. pos., quindi $n_+ \geq 1$

Se guardiamo il $\mathrm{Det}_{2\times 2}$, questo è come guardare la forma quadratica sul s.sp. Span(e_1, e_2). Ora su questo s.sp. il Det è < 0, quindi in questo s.sp. c'è uno sp. di dim. ≥ 1 su cui $q < 0$.

<u>Esercizio</u> 4×4 e i segni vengono $+ + 0 -$
Allora gli autovalori sono $+ + + -$

- Il $\mathrm{Det}_{4\times 4}$ è neg., quindi non ci sono autov. nulli e ci sono solo 2 possibilità
  - $\to + + + -$
  - $\to + - - -$: se fosse questo caso avremmo un s.sp. di dim 3 su cui q è def. neg. d'altra parte sullo sp. generato da e_1, e_2 sappiamo che q è positiva per Sylvester "senza zeri" e questo è assurdo perché dovrebbero intersecarsi

<u>Esercizio</u> 4×4 con $+ + 0 +$

Dai primi 2 segni + deduco che $q > 0$ in $\mathrm{Span}(e_1, e_2)$
Dal det. 4×4 deduco che restano solo 2 possibilità
- $+ + + +$
- $+ + - -$

Ora $+ + + +$ non è possibile, perchè q sarebb. > 0 sempre, quindi $q > 0$ anche in $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ il che non è compatibile con $\mathrm{Det}_{3\times 3} = 0$

Resta $+ + - -$, ma pure questa non va bene, perchè ci sarebbe s.sp. di dim 2 su cui $q < 0$, e questo intersecherebbe $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ dove $q \geq 0$.
(abbiamo usato come sottorisultato che $+ + 0$ in dim. 3 vuol dire che la forma è semidef. pos.)

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 47

Titolo nota 30/11/2018

POLINOMIO CARATTERISTICO E POLINOMIO MINIMO

Sia A matrice $n\times n$, e sia $p(x)$ un polinomio.
Ha senso calcolare $p(A)$, cioè sostituire una matrice nel polinomio.
Se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

allora

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 \, Id$$

<u>Domanda</u>: esistono dei polinomi tali che $p(A)=0$?
(ovviamente polinomi non completamente nulli)

Risposta: SI. L'insieme delle matrici $n\times n$ è uno sp. vett. di dim. n^2. Considero

$Id, A, A^2, \dots, A^{n^2}$

Si tratta di n^2+1 matrici (c'è anche A^0 !!), quindi non possono essere lin. indip., quindi

$$c_0 Id + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$$

e questo corrisponde ad un polinomio di grado $\leq n^2$.

TEOREMA DI HAMILTON-CAYLEY

Sia A matrice $n\times n$, sia $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico.
Allora

$$p_A(A) = 0$$

(se sostituisco una matrice nel pol. caratt. viene 0)

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 8\,Id = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimostrazione non è semplicissima, tranne in un caso, quello in cui A è diagonalizzabile

$\boxed{\text{Dim}}$ Per ipotesi esiste M invertibile tale che

$$D = M^{-1} A M \qquad \text{cioè} \qquad A = M D M^{-1}$$

da questa segue che $A^k = M D^k M^{-1}$, ma non serve.

Quello che serve è avere una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ costituita da autovettori, cioè $A v_i = \lambda_i v_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$

Pongo $B := p(A)$ dove $p(\lambda)$ è il polinomio caratteristico
Cosa succede $B v_i$
Se $p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$, allora

$$B = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

e quindi

$$B v_i = a_n (A^n v_i) + a_{n-1}(A^{n-1} v_i) + \dots$$

$$= a_n \lambda_i^n v_i + a_{n-1} \lambda_i^{n-1} v_i + \dots + a_1 \lambda_i v_i + a_0 v_i$$

$$= v_i\,(a_n \lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \dots)$$
$$= v_i\, p(\lambda_i) = 0$$

perché λ_i è radice del polinomio caratteristico

Avendo dim. che $Bv_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ per forza B è la matrice nulla.

— o — o —

Hamilton–Cayley e matrice inversa.

Torniamo all'esempio iniziale $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Il pol. caratt. è $\lambda^2 - 6\lambda + 8$

quindi per HC:

$$A^2 - 6A + 8\,\mathrm{Id} = 0$$

↑ matrice nulla

Se moltiplico per A^{-1} trovo

$$A - 6\,\mathrm{Id} + 8A^{-1} = 0$$

da cui

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(6\,\mathrm{Id} - A) = \frac{3}{4}\mathrm{Id} - \frac{1}{8}A$$
$$= \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Questo sistema permette di calcolare l'inversa facendo solo potenze (e diventa comodo in dimensione più alta)

— o — o —

ASSURDITÀ TOTALE

Il pol. caratteristico è $p(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id})$

Se al posto di λ metto A viene $p(A) = \mathrm{Det}\,(A - A) = 0$

(Se fosse così semplice, sarebbe vero anche per $\mathrm{Tr}\,(A - \mathrm{Id})$)

Domanda successiva: come sono fatti TUTTI i polinomi $p(x)$ tali che $p(A)=0$?

Risposta misteriosa: Sono tutti e soli i polinomi multipli di un polinomio speciale, detto polinomio minimo di A, perché è quello di grado più basso che annulla A

Conseguenza: il pol. caratteristico è multiplo del pol. minimo.

Come è fatto il polinomio minimo?

Risposta misteriosa
- Ha le stesse radici del polinomio caratteristico, solo eventualmente con molteplicità minore (ma sempre almeno 1)
  (quindi se le radici del pol. caratt. sono tutte diverse, allora il minimo coincide con il caratteristico)
- Se il pol. caratt. ha radici multiple, queste compaiono nel pol. minimo con molteplicità uguale alla dimensione del più grande blocco di Jordan
  (quindi se è diag., tutte le radici hanno molt. 1 nel polinomio minimo).

Esempi: A matrice 3×3. Pol. caratt. $(\lambda-5)^3$.
Quali sono le possibili forme canoniche e quali i pol. minimi corrispondenti

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

pol. min. $(\lambda-5)^1$ pol. min $(\lambda-5)^3$ pol. min. $(\lambda-5)^2$

<u>Esempio</u> A matrice 5×5

Polinomio caratt. $(\lambda-2)^2(\lambda-7)^3$

Polinomio minimo $(\lambda-2)^1(\lambda-7)^2$

Trovare forma canonica

blocchi da 1

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & & & & \\ & \boxed{2} & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

<u>Domanda</u>: come sono fatte tutte le matrici t.c. $A^2 = 2A$

Riscrivo la relazione come $A^2 - 2A = 0$

Questo mi dice che il polinomio x^2-2x annulla A, quindi $x^2-2x = x(x-2)$ è un multiplo del pol. minimo.

Chi può essere il pol. minimo?

- può essere x, cioè $A = 0$
- può essere $x-2$, cioè $A - 2Id = 0$, cioè $A = 2Id$
- può essere $x(x-2)$. Se il pol. minimo è questo, il pol. caratt. sarà del tipo

$$x^a (x-2)^b \quad \text{con } a+b = \text{dim. spazio}$$

quindi la matrice ha come autovalori solo 0 e 2 e tutti i blocchi sono da 1, perché 1 è l'esponente con cui compaiono x e $x-2$ nel pol. minimo.

Quindi la matrice è diagonalizzabile e ha solo 0 e 2 sulla diagonale. Poi ovviamente A sarà del tipo

$$M^{-1} D M$$

D: diagonale con solo 0 e 2 sulla diagonale

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 48

Note Title 04/12/2018

PRODOTTI SCALARI IN GENERALE

Def. Sia V uno sp. vett. (di dimensione finita).
Un prodotto scalare in V è una funzione $V^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
(INPUT: coppie di vettori, OUTPUT: numero reale) che di solito si indica con $<x,y>$, che verifica le seguenti proprietà

(i) $<x,y> = <y,x>$ per ogni x e y in V (simmetria)

(ii) $<\lambda x, y> = \lambda <x,y>$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$, $y \in V$

(ii') $<x, \lambda y> = \lambda <x,y>$ " "

(iii) $<x_1+x_2, y> = <x_1,y> + <x_2,y>$ per ogni x_1, x_2, y in V

(iii') $<x, y_1+y_2> = <x,y_1> + <x,y_2>$ per ogni x, y_1, y_2 in V

Oss. La (ii') segue da (i) + (ii)

$$<x, \lambda y> \underset{(i)}{=} <\lambda y, x> \underset{(ii)}{=} \lambda <y,x> \underset{(i)}{=} \lambda <x,y>$$

Analogamente (iii') segue da (i) + (iii)

$$<x, y_1+y_2> \underset{(i)}{=} <y_1+y_2, x> \underset{(iii)}{=} <y_1,x> + <y_2,x> \underset{(i)}{=} <x,y_1> + <x,y_2>$$

Oss. Le proprietà (ii) e (iii) dicono che $<x,y>$ è una funzione lineare vista come funzione di x (pensando y come fissato).

Def. Si definisce forma quadratica associata ad un prodotto scalare la forma

$$q(x) = <x,x>$$ (prodotto scalare di un vettore con se stesso)

Esempio 1 Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Poniamo

$$<p(x), q(x)> := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

INPUT: due polinomi OUTPUT: numero reale

$\boxed{\text{Verifica (i)}}$

$$<p(x), q(x)> = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx = \int_0^1 q(x)p(x)\,dx = <q(x), p(x)>$$

Se scambio $p(x)$ e $q(x)$ non cambia nulla!

$\boxed{\text{Verifica (ii)}}$

$$<\lambda p(x), q(x)> = \int_0^1 \lambda p(x)q(x)\,dx = \lambda \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

$$= \lambda <p(x), q(x)>$$

$\boxed{\text{Verifica (iii)}}$

$$<p_1(x)+p_2(x), q(x)> = \int_0^1 [p_1(x)+p_2(x)]q(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 p_1(x)q(x)\,dx + \int_0^1 p_2(x)q(x)\,dx = <p_1(x), q(x)> + <p_2(x), q(x)>$$

— o — o —

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$$<p(x), q(x)> = p(1)q(1) - p(2018)q(2018)$$

Verifiche: prende in INPUT due pol. e restituisce un numero
(i): ovvia
(ii): λ si raccoglie
(iii): facile conto

— o — o —

Matrice che rappresenta un prodotto scalare

Sia V sp. vett. di dim. finita, sia $<x,y>$ un prod. scalare su V, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Se conosco $<v_i, v_j>$ per ogni coppia di elementi della base (anche coincidenti), allora conosco il prod. scalare tra due vettori qualunque.
Questa è una conseguenza della linearità

Tocchiamo con mano in dim. 2. Sia $\{v_1, v_2\}$ una base di V.
Allora ogni $v \in V$ si scrive come $v = av_1 + bv_2$
" $w \in V$ " " " $w = cv_1 + dv_2$

Ma allora

$$
\begin{aligned}
<v,w> &= <av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2> \quad \text{(espando usando la linearità)} \\
&= a<v_1, cv_1 + dv_2> + \\
&\quad + b<v_2, cv_1 + dv_2> \\
&= ac\boxed{<v_1, v_1>} + ad\boxed{<v_1, v_2>} + bc\boxed{<v_2, v_1>} + bd\boxed{<v_2, v_2>}
\end{aligned}
$$

uguali

Se conosco quelli riquadrati, allora posso calcolare $<v,w>$

La matrice associata a $<x,y>$ rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è la matrice B di elementi

$$\boxed{B_{i,j} := <v_i, v_j>}$$

Nota:
- si tratta di una matrice SIMMETRICA
- sulla diagonale ci sono i prodotti scalari degli el. della base con se stessi.

Trovata la matrice, la posso usare per calcolare il prodotto tra coppie di vettori
Dati $v \in V$ e $w \in V$, scrivo le componenti rispetto alla base ottenendo vettori x e y che penso come colonne

$v \rightsquigarrow$ vettore x delle sue componenti
$w \rightsquigarrow$ " y " " "

A quel punto

$$\langle v, w \rangle = \underset{\text{riga lunga } n}{y^t} \underbrace{B\, x}_{\text{colonna lunga } n} = x^t B y$$

<u>Esempio 1 di prima</u> $\quad V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$

Come base di V scegliamo $\{x^3, x^2, x, 1\}$.
Calcoliamo la matrice B

Devo calcolare tutti i prod. scalari tra el. della base

$\langle x^3, x^3 \rangle = \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}$ $\qquad \langle x^3, x^2 \rangle = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$

$\langle x^2, x^2 \rangle = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$ $\qquad \langle x^3, x \rangle = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$

$\langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ $\qquad \langle x^3, 1 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1\, dx = 1$ $\qquad \langle x^2, x \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$

La matrice risulta

$$B = \begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x^3 \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow 1 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{array} &
\end{array}$$

Usando la matrice, calcolare $\langle \underbrace{x^2+1}_{v}, \underbrace{x^2+x^3}_{w} \rangle$

Calcolo le componenti di v e w

$$x^2+1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x^3 \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow 1 \end{array} \qquad x^2+x^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = (1 \ 1 \ 0 \ 0) \ B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{fare il conto...}$$

... e verificare che venga esattamente

$$\int_0^1 (x^2+1)(x^2+x^3)\,dx = \int_0^1 (x^4+x^5+x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

—o—o—

Esempio 3 $\quad V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\langle p(x), q(x) \rangle := 3p(1)q(1) - p(2)q(2)$$

Verificare che si tratta di un prod. scalare $\rightsquigarrow$ vedi esempi prec.

Scrivere la matrice B nella base $\{1, x^2, x\}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -13 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x^2 & x \end{array}$$

$< 1, x > = 3 - 2 = 1$

$< x^2, x > = 3 - 8 = -5$

$< 1, 1 > = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2$

$< x^2, x^2 > = 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - 2^2 \cdot 2^2 = 3 - 16 = -13$

$< x, x > = 3 - 4 = -1$

$< 1, x^2 > = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 4 = -1$

Calcolare $< x^2+1, x-2 >$

$x^2+1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad x-2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -13 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -6$$

Verifica nell'altro modo

$$< \underbrace{x^2+1}_{p(x)}, \underbrace{x-2}_{q(x)} > = 3\, p(1)\, q(1) - p(2)\, q(2)$$

$$= 3 \cdot 2\,(-1) - 5 \cdot 0 = -6 \quad ☺$$

Oss. Nel caso del prod. scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ la matrice B rispetto alla base canonica è quella identica.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 49

Note Title 04/12/2018

FORME CANONICHE DI PRODOTTI SCALARI
MATRICI CONGRUENTI

Sia V uno sp. vett., sia $\langle v, w \rangle$ un prod. scalare in V, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, sia B la matrice associata al prod. scalare in quella base.

Domande:

① Se considero una nuova base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$, come cambia la matrice

② Posso scegliere la nuova base in modo che la matrice diventi particolarmente semplice.

Risposta

$\boxed{1}$ Se M è la matrice di cambio di base dalla base vecchia $\{v_1, \dots, v_n\}$ alla base nuova $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$, allora la nuova matrice $\hat{B}$ verifica

$$\boxed{M^t \hat{B} M = B}$$

$\boxed{2}$ Sylvestrizzazione! Posso fare in modo che $\hat{B}$ sia diagonale con solo $0, 1, -1$ sulla diagonale

Il numero di $0, 1, -1$ coincide con n_0, n_+ e n_- della forma quadratica associata al prodotto scalare.

Def. Due matrici B_1 e B_2 sono simili se esiste M invertibile tale

$$\boxed{B_2 = M^{-1} B_1 M}$$

Ora B_1 e B_2 matrici simmetriche si dicono congruenti se esiste matrice M invertibile tale che

$$\boxed{B_2 = M^t B_1 M}$$

Motivazione risposta $\boxed{1}$

Siano v e w due vettori in V.
Siano x e y le loro comp. rispetto alla base vecchia $\{v_1, \dots, v_n\}$. Allora

$$< v, w > = y^t B x$$

Le componenti di v e w rispetto alla base nuova $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ sono $\hat{x} = Mx$, $\hat{y} = My$
(dove M ha come colonne le componenti di $v_1, \dots, v_n$ rispetto alla base nuova).
Nella nuova base deve succedere che

$$< v, w > = \hat{y}^t \hat{B} \hat{x} = (My)^t \hat{B} M x = y^t M^t \hat{B} M x$$

Uguagliando troviamo

$$y^t B x = y^t M^t \hat{B} M x$$

il che è possibile se e solo se $\boxed{B = M^t \hat{B} M}$

Oss. Abbiamo usato come fatto generale che se

$$y^t B_1 x = y^t B_2 x \qquad \forall x \ \forall y$$

allora $B_1 = B_2$

[Questo è vero perché basta usare vettori x e y che hanno tutti 0 tranne un 1 in una posizione specifica:

$$(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f$$

Se voglio fare sopravvivere solo l'el. in pos. (i,j) uso e_i^t a sx e e_j a dx]

— o — o —

Domanda: come Sylvestrizzo una matrice ?

Con una specie di GS.

Esempio

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Voglio trovare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ tale che

$$\langle v_i, v_j \rangle_B = 0 \qquad \text{se } i \neq j$$

In questa nuova base la matrice sarà diagonale

$v_1 = e_1 \qquad \langle v_1, v_1 \rangle_B = \langle e_1, e_1 \rangle_B = 1$

$v_2 = e_2 \qquad \langle v_1, v_2 \rangle_B = \langle e_1, e_2 \rangle_B = 0$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = \langle e_2, e_2 \rangle_B = 2$$

Devo trovare v_3. Non posso usare e_3.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Cerco v_3 del tipo (a, b, c) e gli impongo di avere prod. scalare nullo con v_1 e v_2

$$\langle v_1, v_3 \rangle = (a \; b \; c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a \; b \; c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a + c = 0$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = (a \, b \, c) \; B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a \; b \; c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2b + c = 0$$

Quindi devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases}$$

Una possibile soluzione è $v_3 = (2, 1, -2)$

Una base B-ortogonale è v_1, v_2, v_3 con

$v_1 = (1, 0, 0)$
$v_2 = (0, 1, 0)$
$v_3 = (2, 1, -2)$

In questa nuova base la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \hat{B}$$

$\langle v_3, v_3 \rangle$

$$< v_3, v_3 > = (2,1,-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(2,1,-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 10$$

La matrice di cambio base

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rappresenta il cambio dalla nuova $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla vecchia $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dovrebbe quindi succedere che

$$M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

[Fare il conto per verifica]

In questo caso posso far venire tutti 1 sulla diagonale

$< v_1, v_1 >_B = 1$

$< v_2, v_2 >_B = 2$ quindi $< \underbrace{\frac{v_2}{\sqrt{2}}}_{v_2}, \frac{v_2}{\sqrt{2}} > = 1$

$< v_3, v_3 >_B = 10$ quindi $< \frac{v_3}{\sqrt{10}}, \frac{v_3}{\sqrt{10}} > = 1$

La base sylvestrizzante è $(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)$

Esercizio Con il prod. scalare di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

trovare una base B-ortogonale i cui primi due vettori stiano nel piano $x-y+z=0$

Piano: • scelgo una base di $\mathbb{R}^3$ che cominci con 2 vettori del piano

• la ortogonalizzo con GS rispetto a B.

$v_1 = (1,1,0) \qquad v_2 = (0,1,1) \qquad v_3 = (1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det $= 1 \neq 0 \rightsquigarrow$ sono una base

B-ortogonalizzo con GS: $\hat{v}_1 = v_1$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} \hat{v}_1$$

$$\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B = \langle v_1, v_1 \rangle_B = (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle_B = \langle v_2, v_1 \rangle = (0\ 1\ 1) \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\hat{v}_2 = (0\ 1\ 1) - \frac{2}{5}(1\ 1\ 0) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$$

Volendo posso usare anche $\hat{v}_2 = (-2, 3, 5)$

Passo finale: trovo $\hat{v}_3$ con la formula

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} v_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle_B}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle_B} v_2 = \dots$$

In alternativa: cerco $\hat{v}_3$ del tipo (a, b, c) e gli impongo

$$\langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle_B = 0 \qquad \langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle_B = 0$$

e viene un sistema di 2 eq. in 3 incognite.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 50

Note Title 04/12/2018

Def. Un prodotto scalare si dice <u>definito positivo</u> se $<x,x> > 0$ per ogni $x \neq 0$.
Questo equivale a dire che la forma quadratica associata è definita positiva

Oss. Se ho la matrice in una qualunque base, allora basta calcolare la segnatura.

$\boxed{\text{Componenti di un vettore}}$

Sia $<v,w>$ un prodotto scalare <u>definito positivo</u> in uno spazio vettoriale V.
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale rispetto a questo prodotto.
Dato un qualunque $v \in V$, come calcolo le componenti di v rispetto alla base ?

Uso il prodotto scalare!

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Calcolo

$$<v, v_i> = c_1 <v_1, v_i> + \dots + c_n <v_n, v_i>$$

$$= c_i <v_i, v_i> \quad \text{(gli altri sono tutti nulli)}$$

Quindi $\boxed{c_i = \dfrac{<v, v_i>}{<v_i, v_i>}}$

(Stessa formula, solo con un prod. scalare strano)
(def. pos. assicura che non ci saranno mai zeri al denominatore)

Applicazione simmetriche risp. prod. scalare strano

Sia V sp. vett., sia $\langle v, w \rangle$ prod. scalare, sia $f : V \to V$ lineare.
Si dice che f è simmetrica se

$$\boxed{\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle} \qquad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

f migra nei prodotti scalari

Cosa vuol dire in termini di matrici
- Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base qualunque di V
- Sia A la matrice che rappresenta f in questa base
- Sia B " " " " il prod. scalare "

$v \rightsquigarrow$ componenti x
$w \rightsquigarrow$ componenti y
$f(v) \rightsquigarrow$ " Ax
$f(w) \rightsquigarrow$ " Ay

$$\langle f(v), w \rangle = y^t B A x \qquad \langle v, f(w) \rangle = (Ay)^t B x = y^t A^t B x$$

Conclusione: f è simmetrica se e solo se

$$\boxed{BA = A^t B}$$

Caso speciale: se la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale, allora $B = Id$ e quindi la matrice che rappresenta A risolve $A = A^t$, cioè è una matrice simmetrica.

$\boxed{\text{Teorema B-spettrale}}$ (Versione applicazioni)

Sia $f: V \to V$ un' applic. lineare simmetrica rispetto ad un prod. scalare "strano" definito positivo.
Allora esiste una base ortonormale (risp. al prod. "strano") costituita da autovettori di f.

$\boxed{\text{Teorema B-spettrale}}$ (Versione matrici)

Sia B una matrice simmetrica definita positiva
(il prod. scalare)
Sia A una matrice tale che (l'applic. lineare)

$$BA = A^t B$$

Allora esiste una matrice M invertibile tale che

$$M^{-1} A M = D \text{ diagonale}$$

$$M^t B M = Id$$

(è come dire che le colonne di M sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di matrice B)

Oss. La M in questione fa 2 cose contemporaneamente
- diagonalizza la A per similitudine
- sgrevestizza la B per congruenza

Oss. Quando si mette $B = Id$, si ritrova esattamente il teo. spettrale classico. In particolare la 2ª relazione diventa

$$M^t M = Id,$$

cioè M = matrice ortogonale.

Esercizio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = B$

① Calcolare la segnatura al variare di a.

Sylvester 1-2-3: $\text{Det}_{1\times1} = 1$

$\text{Det}_{2\times2} = -2$

$\text{Det}_{3\times3} = 2 - a^2$

- Se $2-a^2>0$, cioè $a^2<2$, cioè $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$, allora $\underbrace{+\,+}_{P}\underbrace{+\,-}_{V}\underbrace{-\,+}_{V}$ quindi segnatura $+--$
- Se $2-a^2<0$, cioè $|a|>\sqrt{2}$, allora $\underbrace{+\,+}_{P}\underbrace{+\,-}_{V}\underbrace{-\,-}_{P}$ e quindi segnatura $++-$
- Se $2-a^2=0$, allora segnatura $+-0$
  (un autovalore nullo almeno c'è
  una direz. di positività c'è: $\text{Span}(e_1)$: $n_+ \geq 1$
  " " " negatività " : $\text{Span}(e_2)$: $n_- \geq 1$)

Oss. Se sulla diagonale compare un numero ≤ 0, allora la forma NON può essere def. positiva

② Sylvestrizzare la matrice nel caso $a=1$.
Vogliamo trovare M invertibile t.c.

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Devo trovare v_1, v_2, v_3 t.c. siano B-ortogonali e
$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$, $\langle v_2, v_2 \rangle_B = \langle v_3, v_3 \rangle_B = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Scelgo v_1 t.c. $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$, ad esempio $v_1 = (1,0,0)$
- v_2 e v_3 li cerco nel B-ortogonale di v_1, cioè

$$(x \; y \; z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \; y \; z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= x + z = 0$$

Nota bene: $x+z=0$ è il piano costituito da tutti i vettori che sono B-ortogonali a $(1,0,0)$

- Prendo una base del piano, ad esempio $(1,0,-1)$, $(0,1,0)$
- Ne salvo uno, ponendo $v_2 = (0,1,0)$ e calcolo il 3° o modificando quello che ho con GS oppure imponendo che sia B-ortogonale pure a v_2

$$(x \; y \; z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \; y \; z) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2y + z$$

Quindi per trovare v_3 risolvo
$$\begin{aligned} -2y + z &= 0 \rightarrow \perp a \; v_2 \\ x + z &= 0 \rightarrow \perp a \; v_1 \end{aligned}$$

Risolvendo trovo $v_3 = (2, 1, -2)$

- Ora v_1, v_2, v_3 sono base ortogonale. Come la rendo Sylvestrizzante?

$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$ $\qquad \langle v_2, v_2 \rangle_B = -2$

$\langle v_3, v_3 \rangle_B = -$ q.c. (che si calcola con la matrice)

Per concludere poniamo

$$\hat{v}_1 = v_1$$

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} \qquad \text{in modo} \qquad \langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle = -1$$

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\sqrt{q.c.}} \qquad \text{"} \qquad \langle \hat{v}_3, \hat{v}_3 \rangle = -1$$

Se uso $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ come colonne di una matrice M deve accadere che

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 51

Note Title 07/12/2018

GEOMETRIA AFFINE

Setting: $\mathbb{R}^n$ visto come spazio vettoriale

Sottospazi affini: sottospazi vettoriale, eventualmente traslati

in $\mathbb{R}^2$ i sottospazi affini sono
- dim 0 = p.ti
- dim 1 = rette
- dim 2 = tutto $\mathbb{R}^2$

in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi affini sono
- dim 0 = p.ti
- dim 1 = rette
- dim 2 = piani
- dim 3 = tutto $\mathbb{R}^3$

Di un sottospazio affine si possono dare 2 presentazioni
→ CARTESIANA, mediante equazioni
→ PARAMETRICA, cioè come Span + eventuale traslazione

Abituarsi a passare dall'una all'altra

Esempio Scrivere la rappr. parametrica e cartesiana del s.sp. affine di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 (iperpiano) che passa per i p.ti

$$\underbrace{(1,0,1,0)}_{=v_1} \qquad \underbrace{(2,1,3,0)}_{=v_2} \qquad \underbrace{(4,0,-1,0)}_{=v_3} \qquad \underbrace{(1,1,1,0)}_{=v_4}$$

$\boxed{\text{PARAMETRICA}}$ Servono 3 parametri a, b, c

$$v_1 + a\underbrace{(v_2 - v_1)} + b\underbrace{(v_3 - v_1)} + c\underbrace{(v_4 - v_1)}$$

base dello sp. vett. (il parallelo che passa per l'origine)

Andava bene anche

$$v_3 + a(v_1 - v_3) + b(v_2 - v_3) + c(v_4 - v_3)$$

$\boxed{\text{CARTESIANA}}$ 1° modo: bovino

L'eq. sarà del tipo

$$ax + by + cz + dw = e$$

Sostituisco i 4 p.ti dati a (x, y, z, w) e trovo 4 equ. in 5 incognite. Risolvo (ci sarà un grado di libertà) e una qualunque sol. non nulla è buona.

2° modo: usando il prodotto scalare

Osservo che i coeff. a, b, c, d devono essere le componenti di un vettore ortogonale al sottospazio traslato in modo da passare per l'origine. Quindi, dopo aver posto

$$w_1 := v_2 - v_1 \qquad w_2 := v_3 - v_1 \qquad w_3 := v_4 - v_1$$

basta che cerchi un vettore $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ che è $\perp$ a w_1, w_2, w_3 (potevo fare anche $w_1 := v_1 - v_4$, $w_2 := v_2 - v_4$, $w_3 = v_3 - v_4$)

Come trovo un vettore di $\mathbb{R}^4$ $\perp$ a 3 vettori dati?

→ imposto bovinamente il sistema

→ uso l'analogo della formula misteriosa

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & w_1 & & \\ & w_2 & & \\ & w_3 & & \end{array}$$

e immagino di sviluppare il determinante con Laplace rispetto alla 1ª riga.

— o — o —

Esempio 2 In $\mathbb{R}^4$ descrivere il piano (s.sp. affine di dim. 2) che passa per i punti

$$\underbrace{(1,0,1,0)}_{v_1} \qquad \underbrace{(2,1,0,0)}_{v_2} \qquad \underbrace{(0,0,-1,1)}_{v_3}$$

$\boxed{\text{PARAMETRICA}}$ $v_1 + t(v_2 - v_1) + s(v_3 - v_1)$

$$(1,0,1,0) + t(1,1,-1,0) + s(-1,0,-2,1)$$

Determinare l'intersezione tra il piano dato e l'iperpiano (s.sp. di dim 3) di equazione $x+y-z+2w=5$

(ci aspettiamo che l'intersezione abbia dim 1 (per Grassmann) a meno di configurazioni particolari)

1° modo: sostituisco la parametrica nella cartesiana

$$(1+t-s,\ t,\ 1-t-2s,\ s)$$

$$\underbrace{\cancel{1}+t-s}_{x} + \underbrace{t}_{y} - \underbrace{(\cancel{1}-t-2s)}_{z} + 2\underset{w}{s} = 5 \rightsquigarrow 3t+3s=5$$

$$\rightsquigarrow t = \frac{5-3s}{3} = \frac{5}{3} - s$$

Sostituisco nella parametrica del piano:

$$\left(1+\frac{5}{3}-s-s,\ \frac{5}{3}-s,\ 1-\frac{5}{3}+s-2s,\ s\right)$$

$$\left(\frac{8}{3}-2s,\ \frac{5}{3}-s,\ -\frac{2}{3}-s,\ s\right) = \underbrace{\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},-\frac{2}{3},0\right)}_{\text{p.to base}} + s\underbrace{(-2,-1,-1,1)}_{\text{Direzione retta}}$$

2° modo: mi procuro la cartesiana del piano e metto tutto a sistema

Come deve essere fatta la cartesiana del piano (s.sp. di dim 2 in $\mathbb{R}^4$)

Ci aspettiamo 2 equazioni messe a sistema.

Le eq. saranno del tipo $ax+by+cz+dw=e$

Sostituisco i 3 p.ti.

$$\begin{cases} a+c=e \\ 2a+b=e \\ -c+d=e \end{cases} \qquad \begin{matrix} a+c-e=0 \\ 2a+b-e=0 \\ -c+d-e=0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} c &= d-e \\ b &= 2c-e = 2d-2e-e = 2d-3e \\ a &= -c+e = -d+e+e = -d+2e \end{aligned}$$

con d ed e variabili libere

Diamo dei valori indipendenti

- $d=1, e=0 \rightsquigarrow c=1, b=2, a=-1 \rightsquigarrow -x+2y+z+w=0$
- $d=0, e=1 \rightsquigarrow c=-1, b=-3, a=2 \rightsquigarrow 2x-3y-z=1$

Conclusione: il piano ha rappresentazione cartesiana

$$\boxed{\begin{cases} x-2y-z-w=0 \\ 2x-3y-z=1 \end{cases}}$$

Verifica da 30 secondi: sostituisco i 3 p.ti dati

Verifica da 3 minuti: risolvo il sistema e controllo che le soluzioni, che dipendano da 2 parametri, siano una possibile parametrica del piano.

Ora, se voglio intersecare con l'iperpiano dato, non mi resta che mettere a sistema le 3 equazioni.

Risolvendo il sistema di 3 equ. dovrei trovare la stessa retta di prima [fare la verifica!]

<u>Oss.</u> Ottenevo un'altra rappr. parametrica usando

- $d=5, e=7$
- $d=-4, e=3$

— o — o —

TRASFORMAZIONI AFFINI

Def. Una funzione affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione del tipo

$$f(x) = Ax + b \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

A: matrice $n \times n$ data
b: vettore di $\mathbb{R}^n$ dato

Proposizione La composizione di due trasformazioni affini è ancora affine

Dim $f(x) = A_1 x + b_1 \qquad g(x) = A_2 x + b_2$

$$g(f(x)) = A_2 f(x) + b_2 = A_2 (A_1 x + b_1) + b_2$$

$$= \underbrace{\boxed{A_2 A_1}}_{\text{nuova matrice}} x + \underbrace{\boxed{A_2 b_1 + b_2}}_{\text{nuovo vettore}}$$

Oss. La nuova matrice è il prodotto delle matrici

Esempio 1 $f(x) = x + b \qquad (A = Id)$

Questa è una traslazione in direzione b.

Esempio 2 $f(x) = 7x \qquad (A = 7 \cdot Id,\ b = 0)$ (0: vettore nullo)

Dilatazione di un fattore 7. In generale $f(x) = \lambda x$ abbiamo
- una omotetia di fattore λ (si intende $\lambda \neq 0$)
- se $\lambda < 0$, c'è anche una simmetria rispetto all'origine oltre all'omotetia.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 52

Note Title 07/12/2018

ISOMETRIE

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice ISOMETRIA se
(conserva le distanze)

$$\operatorname{dist}(f(x), f(y)) = \operatorname{dist}(x,y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Teorema (Caratterizzazione delle isometrie)
Una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se è del tipo

$$f(x) = Ax + b$$

con A matrice $n \times n$ ORTOGONALE $\quad (AA^t = A^tA = Id)$

Dim.

Step 1 Tutte le affinità con A ortogonale sono ISOMETRIE
(metà facile del teorema)

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(f(x), f(y)) &= \| f(x) - f(y) \| \\
&= \| Ax - \cancel{b} - Ay + \cancel{b} \| \\
&= \| A(x-y) \| \\
\text{spero} \nearrow &= \| x - y \| \\
&= \operatorname{dist}(x,y)
\end{aligned}$$

Controlliamo la speranza:

$$\begin{aligned}
\| A(x-y) \|^2 &= \langle A(x-y), A(x-y) \rangle = [A(x-y)]^t A(x-y) \\
&= (x-y)^t \underbrace{A^t A}_{Id} (x-y) = (x-y)^t (x-y) = \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \| x-y \|^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ Se f è un'isometria, e $f(0)=0$, allora f conserva le norme

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \operatorname{dist}(f(x),0) \\ &= \operatorname{dist}(f(x),f(0)) && \text{ho usato che } f(0)=0 \\ &= \operatorname{dist}(x,0) && f \text{ conserva le distanze} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Step 3}}$ Se f è un'isometria, e $f(0)=0$, allora f conserva i prodotti scalari, cioè

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n\ \forall y\in\mathbb{R}^n$$

Sappiamo dallo step precedente che

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(f(x),f(y))^2 &= \|f(x)-f(y)\|^2 \\ &= \|f(x)\|^2+\|f(y)\|^2-2\langle f(x),f(y)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x,y)^2 &= \|x-y\|^2 \\ &= \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle \end{aligned}$$

Visto che f conserva le distanze i risultati devono essere $=$, cioè

$$\underbrace{\cancel{\|f(x)\|^2}}_{\|x\|^2} + \underbrace{\cancel{\|f(y)\|^2}}_{\|y\|^2} - 2\langle f(x),f(y)\rangle = \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} - 2\langle x,y\rangle$$

(punto precedente)

da cui l'uguaglianza dei prodotti scalari.

$\boxed{\text{Step 4}}$ Se f è isometria, e $f(0)=0$, allora f è del tipo $f(x)=Ax$ con A matrice ortogonale.

Sia $e_1,\dots,e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ (base ortonormale) e poniamo $\hat{e}_i := f(e_i)$

Dico che $\hat{e}_i$ sono ancora una base ortonormale. Infatti

- $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_i \rangle = \langle f(e_i), f(e_i) \rangle \underset{\text{Step 3}}{=} \langle e_i, e_i \rangle = 1$
- $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \underset{\text{Step 3}}{=} \langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$

Prendiamo un qualunque $v \in \mathbb{R}^n$, lo scriviamo come

$$v = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n$$

Questo andrà a finire in

$$f(v) = d_1 \hat{e}_1 + \ldots + d_n \hat{e}_n$$

Se fosse che $d_i = c_i$ avremmo finito in quanto

$$f(v) = c_1 \hat{e}_1 + \ldots + c_n \hat{e}_n = c_1 f(e_1) + \ldots + c_n f(e_n)$$

da cui la linearità. Per calcolare i coeff., visto che le basi sono ortonormali, basta fare i prodotti scalari

$$d_i = \langle f(v), \hat{e}_i \rangle = \langle f(v), f(e_i) \rangle \underset{\text{Step 3}}{=} \langle v, e_i \rangle = c_i$$

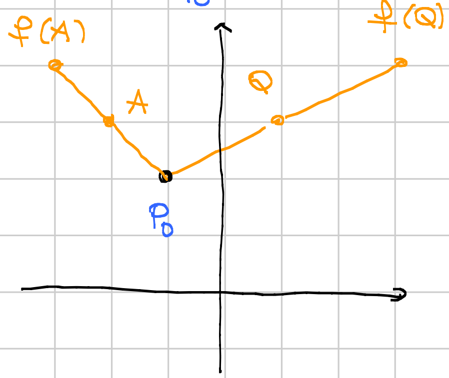
Quindi f è lineare! Cioè $f(x) = Ax$. Le colonne di A sono $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$ e visto che sono ortonormali, la matrice A è ortogonale.

$\boxed{\text{Step 5}}$ Conclusione nel caso generale.

Sia f isometria qualunque. Poniamo $g(x) = f(x) - f(0)$.
Si verifica facilmente che g è isometria e $g(0) = 0$.
Quindi per lo step 4 abbiamo $g(x) = Ax$ con A matrice ortogonale. Quindi $f(x) = Ax + \underbrace{f(0)}_{b \text{ cercato}}$

Esempi di affinità ed isometrie nel piano

Esempio 1 Scrivere l'omotetia con centro in $\underbrace{(-1,2)}_{P_0}$ e fattore 2



Se fosse rispetto all'origine, sarebbe immediato

$$f(x,y) = (2x, 2y)$$

Se invece il centro è P_0 generico

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow 2(P-P_0) \rightsquigarrow 2(P-P_0) + P_0$$

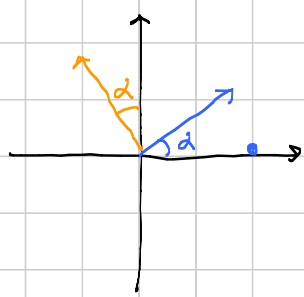
metto il p.to di applicazione in P_0 — omotetia di fattore 2 — traslo nuovamente di P_0

$$P \rightsquigarrow 2P - P_0$$

$$(x,y) \longrightarrow (2x, 2y) - (-1, 2) = \boxed{(2x+1, 2y-2)}$$

Qualche verifica: $Q = (1,3)$ $f(Q) = (3,4)$
$A = (-2,3)$ $f(A) = (-3,4)$
$P_0 = (-1,2)$ $f(P_0) = (-1,2)$ ☺

Esempio 2 Scrivere la rotazione in verso $\boxed{\text{antiorario}}$ di un angolo α rispetto all'origine



$$f(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$
$$f(0,1) = \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$$
$$= (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

Quindi in generale $f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \uparrow$$ matrice ortogonale: verificare !!!

Esempio 3 Scrivere la rotazione rispetto all'origine di $90°$ in verso ORARIO

È come fare rotazione antioraria di $-90°$, quindi la matrice è

$$\begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = (-y, x)$$

Verifica: $f(1,0) = (0,1)$ ☺ ROTAZIONE ANTIORARIA DI $90°$
$f(0,1) = (-1,0)$

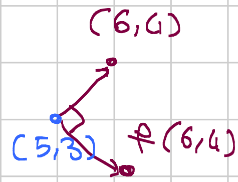
Esempio 4 Scrivere rotazione di $90°$ in verso ORARIO rispetto al punto $\underbrace{(5,3)}_{P_0}$

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ ruoto $P - P_0 \rightsquigarrow$ aggiungo di nuovo P_0

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-5, y-3) \rightsquigarrow (-y+3, x-5) \rightsquigarrow (-y+8, x-2)$$

uso formula precedente

Quindi mettendo insieme troviamo
$$f(x,y) = (-y+8, x-2)$$



Verifica: $(5,3) \rightsquigarrow (5,3)$ ok
$(6,4) \rightsquigarrow (\quad)$ ok

Achtung! Nell'esempio 3 dovevo mettere $-90°$

$$\begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

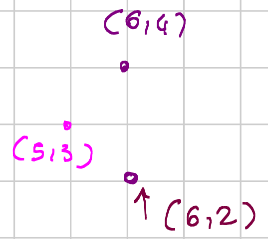
Quindi la vera risposta dell'esercizio 3 è

$$f(x,y) = (y, -x)$$

da cui la vera risposta dell'esercizio 4 è

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-5, y-3) \rightsquigarrow (y-3, -x+5) \rightsquigarrow (y+2, -x+8)$$

da cui $f(x,y) = (y+2, -x+8)$



Verifiche: $(5,3) \rightsquigarrow (5,3)$ ☺

$(6,4) \rightsquigarrow (6,2)$ ok.

Morale: qualche verifica può salvare il risultato !!!

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 53

Titolo nota 11/12/2018

CLASSIFICAZIONE ISOMETRIE NEL PIANO

Isometria del piano $f(x) = Ax + b$ ↗ vettore nel piano

↑ matrice 2x2 ortogonale

$\boxed{\text{Caso } b=0}$ Classificare matrici 2x2 ortogonali

Fatto a suo tempo, usando che le colonne sono ortonormali

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$

- Le matrici del 1° tipo rappresentano rotazioni di un angolo θ in verso antiorario

  Osserviamo che queste matrici hanno

  → $\mathrm{Det} = 1$

  → Autovalori $\cos\theta \pm i\sin\theta$ (numeri complessi coniugati di norma 1)

  → sono il prototipo di blocco di Jordan reale

- Le matrici del 2° tipo hanno

  → $\mathrm{Det} = -1$

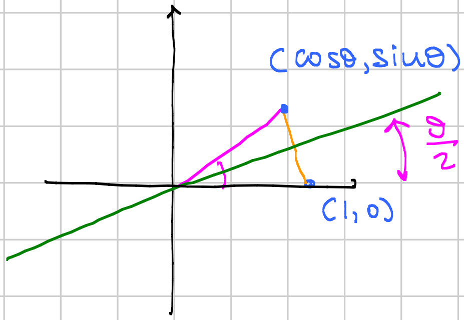
  → $\mathrm{Traccia} = 0$

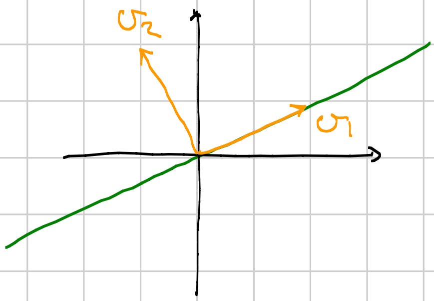
  → Autovalori ± 1, quindi esistono v_1 e v_2 ortogonali t.c.

  $$Av_1 = v_1 \qquad Av_2 = -v_2$$

  → sono quindi simmetrie rispetto alla retta $\mathrm{Span}(v_1)$

Che cosa rappresenta θ nelle matrici del 2º tipo?





Basta osservare che $f(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$, quindi stiamo facendo simmetria rispetto ad una retta che forma angolo $\frac{\theta}{2}$ con semiasse x positivo

— o — o —

$\boxed{\text{Caso generale} \quad b \neq 0}$ $\qquad f(x) = Ax + b$

Le isometrie si classificano sulla base dei punti fissi, cioè delle soluzioni di

$$f(x) = x$$

cioè

$$Ax + b = x \qquad\qquad (A - Id)x = -b$$

Si tratta di un sistema lineare, e quindi ci sono varie possibilità

1. Infinite soluzioni, dipendenti da due parametri
2. Infinite soluz., dipendenti da 1 parametro
3. Soluzione unica
4. Nessuna soluzione

Cosa accade nei vari casi

$\boxed{1}$ Le soluzioni sono tutto $\mathbb{R}^2$, quindi tutti i p.ti stanno fissi. Allora

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$\boxed{2}$ Le soluzioni sono una retta, e f è la simmetria rispetto a questa retta

$\boxed{3}$ Un solo punto fisso, e f è la rotazione di un certo angolo intorno al p.to.

$\boxed{4}$ Nessun p.to fisso, e per f ci sono due possibilità

$\boxed{4.1}$ Traslazione $\quad f(x) = x + b \quad$ con $\quad b \neq 0$

$\boxed{4.2}$ Simmetria rispetto ad una retta seguita da traslazione in direzione // alla retta.

Perché i casi sono solo questi?
Stiamo risolvendo $f(x) = x$, cioè

$$(A - Id)x = -b$$

Le soluzioni di questo sistema dipendono dal rango della matrice $A - Id$ e dal rango della matrice completa

$\boxed{1}$ Per avere tutto $\mathbb{R}^2$ come soluzione, la matrice $A - Id$ deve essere la matrice nulla (numero param = dim.sp. − rango) cioè $A = Id$

$\boxed{2}$ Per avere spazio delle soluz. di dim. 1, la matrice $A - Id$ deve avere rango 1, quindi $\dim(\ker) = 1$, quindi esiste v tale che $Av = v$, cioè 1 è autovalore. Ma allora per forza l'altro autovalore è -1 (se fosse 1 saremmo nel caso precedente)

$\boxed{3}$ Per avere soluzione unica, la matrice $A - Id$ deve essere di rango 2, quindi di sicuro A non ha autovalore 1, quindi A è del 1° tipo (matrice di rotazione)

$\boxed{4}$ Per avere nessuna soluzione devono accadere 2 cose

- $A - Id$ deve avere rango 0 oppure 1
- $-b \notin Im(A - Id)$

$\boxed{4.1}$ Se $A - Id$ ha rango 0, allora $A = Id$ e quindi

$$f(x) = x + b \quad \rightsquigarrow \text{ traslazione}$$

$\boxed{4.2}$ Se $A - Id$ ha rango 1, allora 1 è autovalore di A e -1 pure, quindi A è matrice di simmetria. Quindi esistono $v_1 \perp v_2$ tali che

$$Av_1 = v_1 \qquad Av_2 = -v_2$$

Allora

$$Im(A - Id) = Span(v_2)$$

Quindi nel nostro caso $-b \notin Span\, v_2$ e quindi

$$b \notin Span\, v_2$$

cioè

$$b = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

con $c_1 \neq 0$.

Allora ogni $x \in \mathbb{R}^2$ lo scriviamo nella forma

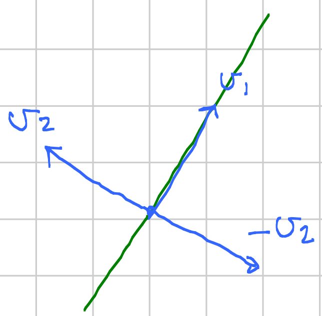
$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

e

$$\begin{aligned} Ax + b &= A(a_1 v_1 + a_2 v_2) + c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= a_1 Av_1 + a_2 Av_2 + c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= \boxed{\boxed{a_1 v_1 - a_2 v_2} + c_1 v_1 + \boxed{c_2 v_2}} \end{aligned}$$

simmetria rispetto alla retta di equazione $a_2 = \frac{c_2}{2}$

traslazione parallela alla retta



Esempio $f(x,y) = (x+3, -y+2)$

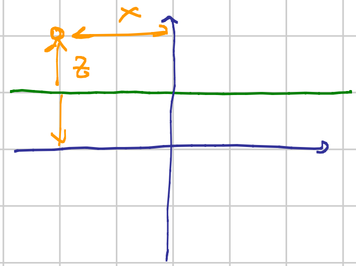
$$= \underbrace{(x,-y)}_{\text{simmetria rispetto asse } x} + (3,2)$$

$$= \boxed{(x,-y)+(0,2)} + (3,0)$$

Che cosa rappresenta $(x,y) \to (x,-y+2)$?

Simmetria rispetto alla retta che resta fissa, cioè $y = 1$

$$f(x, 1+z) = (x, -1-z+2) = (x, 1-z)$$



Esempio 2 $f(x,y) = (-y+3, x-4)$

Verificare che si tratta di isometria e capire come agisce

$$f(x,y) = (-y, x) + (3,-4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

matrice A ortogonale ?

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok.}$$

[verifica alternativa: le righe / colonne di A sono ortonorm.]

Quindi f è isometria. Di che tipo? Guardo i p.ti fissi

$$f(x,y) = (x,y) \iff (-y+3, x-4) = (x,y)$$

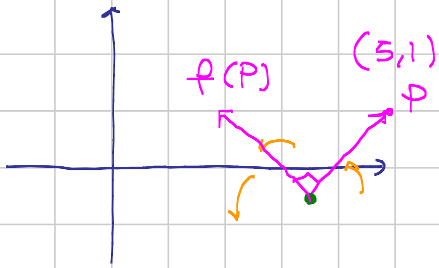
$$\begin{cases} -y+3 = x \\ x-4 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 4 \end{cases} \qquad 2x = 7 \rightsquigarrow x = \frac{7}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

Quindi si tratta di una rotazione con centro in $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e angolo θ tale che

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \theta = 90^\circ \text{ antiorario}$$

Ci aspettiamo $f(5,1) = (2,1)$

Ok!!

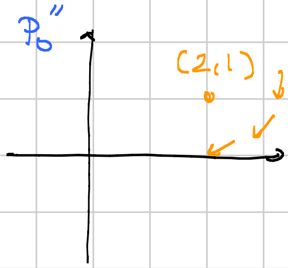


— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 54

Titolo nota 11/12/2018

Esercizio 1 Scrivere l'espressione della rotazione di $45°$ in verso ORARIO rispetto al punto $(2,1)$



Solito schema

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ ruoto $\rightsquigarrow$ aggiungo P_0

Rotazione di $45°$ orario rispetto all'origine

$$\begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(x,y) \underset{\text{tolgo } P_0}{\rightsquigarrow} (x-2, y-1) \underset{\text{ruoto}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

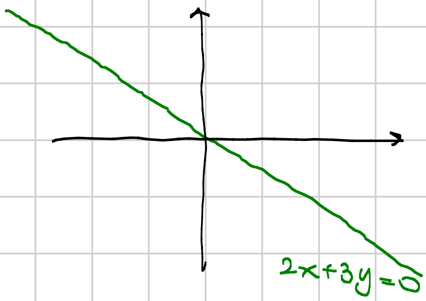
Aggiungo nuovamente $(2,1)$

$$(x,y) \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

Esercizio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $2x+3y=0$

Idea: v_1 che sta sulla retta va in v_1

$v_2 \perp$ alla retta va in $-v_2$



$v_1 = (-3,2)$ retta $=$ Span (v_1)

$v_2 = (2,3)$

Mi serve l'applicazione lineare $f(x,y)$ t.c.

$f(-3,2)=(-3,2)$ $\qquad f(v_1)=v_1$

$f(2,3)=(-2,-3)$ $\qquad f(v_2)=-v_2$

Questo lo posso fare in tanti modi

→ bovino: matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ incognita

→ metodo Rapuano

→ cambi di base

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}}_{\text{dalla } \{v_1,v_2\} \text{ alla canonica}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\text{matrice nella base } \{v_1,v_2\}}\underbrace{\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}}_{\text{dalla canonica alla } \{v_1,v_2\}}$$

$$-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-5 & 12\\ 12 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13}\end{pmatrix}$$

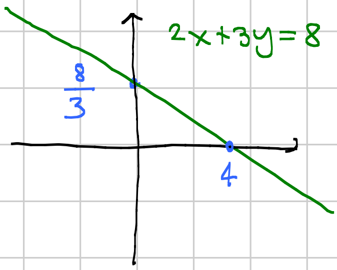
Matrice ortogonale del 2° tipo

[I segni sono stati corretti dopo il video]

$$f(x,y)=\left(+\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y,-\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y\right)$$

[Verificare che qualche vettore vada dove deve]

<u>Esercizio 3</u> Scrivere la simmetria rispetto alla retta $2x+3y=8$



Cerco di spostare il problema nell'origine.

Scelgo P_0 sulla retta e poi come sempre

$$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow \underbrace{A}_{\text{quella di prima}}(P-P_0) \rightsquigarrow A(P-P_0)+P_0$$

Scelgo $P_0 = (4,0)$ e quindi

$$(x,y) \xrightarrow[\text{tolgo } P_0]{} (x-4,y) \xrightarrow[\text{simm.}]{} \left(+\frac{5}{13}x - \frac{20}{13} - \frac{12}{13}y, -\frac{12}{13}x + \frac{48}{13} - \frac{5}{13}y\right)$$

$$\xrightarrow[\text{aggiungo } P_0]{} \left(+\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{20}{13} + 4, -\frac{12}{13}x + \frac{48}{13} - \frac{5}{13}y\right)$$

[i segni sono stati cambiati dopo il video]

Esercizio 4 Scrivere la rotazione di $90°$ antiorario rispetto al punto $\underbrace{(-1,5)}_{P_0}$

La rotazione antioraria di $90°$ ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solita tecnica

$$(x,y) \underset{\text{tolgo } P_0}{\rightsquigarrow} (x+1, y-5) \underset{\text{ruoto}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+5 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

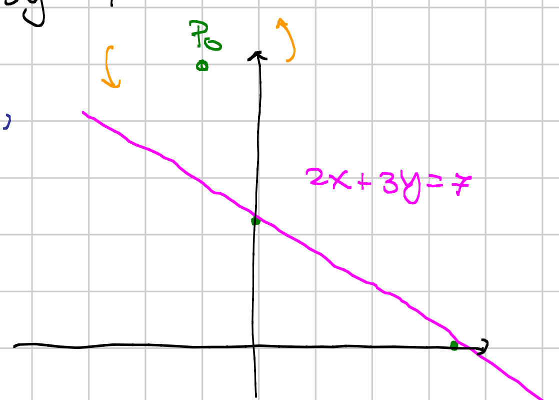
$$\underset{\text{aggiungo } P_0}{\rightsquigarrow} (-y+5, x+1) + (-1,5) = (-y+4, x+6)$$

Conclusione $f(x,y) = (-y+4, x+6)$

Controllo pto fisso $(-1,5) \rightsquigarrow (-1,5)$

Esercizio 5 Nell'esercizio precedente, determinare l'immagine della retta $2x+3y=7$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Prendo P_1 e P_2 sulla retta, calcolo la loro immagine $f(P_1)$ e $f(P_2)$ usando f e poi scrivo la retta per $f(P_1)$ e $f(P_2)$



$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scrivo la retta in parametrica, tipo

$$\underbrace{\left(\tfrac{7}{2}, 0\right)}_{\text{p.to qualunque}} + t\,\underbrace{(-3, 2)}_{\substack{\text{vettore direzione} \\ \text{della retta}}}$$

La retta immagine avrà

- $f\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ come p.to base $\left(4, \frac{7}{2}+6\right) = \left(4, \frac{19}{2}\right)$
- come direzione il solo ruotato di $(-3,2)$, quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nuova retta in parametrica sarà

$$\left(4, \frac{19}{2}\right) + t\,(-2, -3)$$

A questo punto se serve passo in cartesiana

<u>Esercizio 6</u> Sempre con la stessa trasformazione, determinare la retta che, una volta ruotata, diventa la retta $y = x$

Ricordiamo che la trasformazione è

$$f(x, y) = (-y+4,\ x+6)$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ La retta richiesta è la rotazione di 90° ORARIA della retta $y = x$ intorno al solito p.to.

$\rightsquigarrow$ Devo scrivere questa nuova trasformazione

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Determino 2 p.ti P_1 e P_2 sulla retta $y = x$, ad esempio $P_1 = (1,1)$ $P_2 = (0,0)$

e cerco Q_1 e Q_2 tali che

$$f(Q_1) = (1,1) \qquad f(Q_2) = (0,0)$$

La retta richiesta è quindi la retta per Q_1 e Q_2

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Riscrivo la trasformazione

$$f(x,y) = (-y+4,\ x+6)$$

e osservo che sono interessato ai p.ti le cui immagini hanno le 2 coordinate uguali, quindi

$$-y+4 = x+6$$

cioè

$$\boxed{x+y+2=0} \quad \text{retta richiesta}$$

Oss. Se la retta richiesta fosse stata $3x+2y=7$, bastava imporre

$$3(-y+4)+2(x+6)=7 \rightsquigarrow 2x-3y+17=0$$

Oss. Quando si tratta di fare immagine/controimmagine di rette

→ le rappresentazioni parametriche vanno bene AVANTI

→ " " cartesiane " " INDIETRO

Esercizio 7 Cosa succede se faccio una rotazione di 90° orario rispetto ad un p.to seguita da una rotazione di 90° antiorario rispetto ad un altro p.to?

$$f_1(x) = A_1x+b_1 \qquad f_2(x) = A_2x+b_2$$

$$f_2(f_1(x)) = A_2(A_1x+b_1)+b_2 = \underbrace{A_2A_1}_{Id}x + A_2b_1+b_2$$

$$= x + \underbrace{A_2b_1+b_2}_{b_3} = \text{traslazione}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 55

Titolo nota 11/12/2018

ISOMETRIE DELLO SPAZIO

Come sono fatte le matrici 3×3 ortogonali

Fatto 1 Una matrice A ortogonale ha $\operatorname{Det} = \pm 1$

Fatto 2 Una matrice A 3×3 ha almeno un autovalore reale
(i polinomi di grado dispari hanno almeno una radice reale)

Fatto 3 Gli autovalori reali di una matrice ortogonale possono essere soltanto ± 1
(le matrici ortogonali conservano la norma, cioè $\|Av\| = \|v\|$ per ogni v, quindi se $Av = \lambda v$ allora $\|v\| = \|Av\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ ed essendo $\|v\| \neq 0$ per forza $|\lambda| = 1$)

Conseguenza: una 3×3 ortogonale ha almeno un autovalore uguale a ± 1.

Classifichiamo le matrici ortogonali guardando gli autovalori

1 Tre autovalori reali

1.1 $+1, +1, +1$ $\qquad A = \mathrm{Id}$

1.2 $-1, -1, -1$ $\qquad A = -\mathrm{Id}$

1.3 $+1, +1, -1$ $\qquad$ Detti v_1, v_2, v_3 i rispettivi autovettori, che sono tra di loro ortogonali, allora A = simmetria rispetto al piano $\operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$

$\boxed{1.4}$ $+1, -1, -1$ Detti v_1, v_2, v_3 i rispettivi autovettori, che sono ortogonali, allora
$A =$ rotazione di $180°$ nel piano perpendicolare a v_1

$\boxed{2}$ Un autovalore reale, due autovalori complessi coniugati
$$\cos\theta \pm i \sin\theta$$

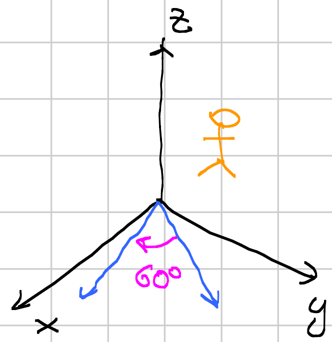
$\boxed{2.1}$ Se l'autovalore reale è $+1$ con autovettore v_1, allora $A =$ rotazione di un angolo θ nel piano perpendicolare a v_1.

$\boxed{2.2}$ Se l'autovalore reale è -1 con autovettore v_1, allora $A =$ rotazione come sopra seguita dalla simmetria rispetto allo stesso piano.

— o — o —

Esempio 1 Scrivere la rotazione di $60°$ nel piano xy lasciando l'asse z fisso.

Importante: precisare l'orientazione della rotazione
Detto meglio: ruotare di $60°$ in verso ORARIO per un omino messo in piedi lungo l'asse z positivo



$f(0,0,1) = (0,0,1)$ (autovettore di autovalore 1)

Nel piano xy è la solita

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) & 0 \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio 2</u> Scrivere la simmetria rispetto al piano di equazione $x - y + 2z = 0$

Cosa deve succedere
- una base del piano deve andare in se stessa
- il vettore $\perp$ al piano deve andare in $-$ se stesso

vettore $\perp$ al piano : $(1,-1,2) = v_1$
base del piano : $\underset{v_2}{\underset{\parallel}{(-2,0,1)}}$, $\underset{v_3}{\underset{\parallel}{(0,2,1)}}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{dalla } \{v_1,v_2,v_3\} \text{ alla canonica}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Dalla } \{v_1,v_2,v_3\} \text{ alla stessa}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Cambio base dalla canonica alla } \{v_1,v_2,v_3\}} = A$$

Alla fine la matrice A deve verificare

$$Av_1 = -v_1 \qquad Av_2 = v_2 \qquad Av_3 = v_3$$

<u>Esempio 3</u> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ Questa rappresenta $(x,y,z) \to (z,y,-x)$

Osservo che le colonne sono ortonormali, quindi A è matrice ortogonale
Calcoliamo gli autovalori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = \pm i$$

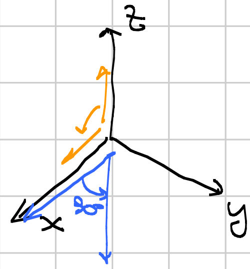
La matrice A rappresenta una rotazione di $90°$ rispetto ad un asse. Quale asse?

Quello spannato dall'autovettore relativo a $\lambda = 1$

$$(z, y, -x) = (x, y, z)$$

Quindi la soluzione è $\operatorname{span}(0,1,0)$

$\rightsquigarrow$ rotazione di $90°$ rispetto all'asse y, cioè la rotazione avviene nel piano xz



Di $90°$ in che verso?

$f(1,0,0) = (0,0,-1)$

$f(0,0,1) = (1,0,0)$

Il verso della rotazione è ANTIORARIO per un omino messo in piedi lungo il semiasse positivo delle y.

<u>Esempio 4</u> Stessa trasformazione $(x,y,z) \to (z,y,-x)$

Calcolare l'immagine della retta $(7,2,1) + t(4,0,3)$

Calcolare la controimmagine del piano $x + y - 3z = 0$

Immagine retta: le parametriche vanno bene avanti!

$$(7+4t, 2, 1+3t) \rightsquigarrow (1+3t, 2, -7-4t)$$
$$= (1,2,-7) + t(3,0,-4)$$

Controimmagine del piano: le cartesiane vanno bene indietro

$$\underset{\text{nuova }x}{(z)} + \underset{\text{nuova }y}{(y)} - 3\underset{\text{nuova }z}{(-x)} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad z + y + 3x = 0$$

<u>Esempio 5</u> Capire cosa rappresenta $(x,y,z) \to (z,x,y)$ geometricamente

Matrice associata è

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad f(e_1)\;\; f(e_2)\;\; f(e_3) \end{array}$$

Si vede che è ortogonale. Faccio autovalori

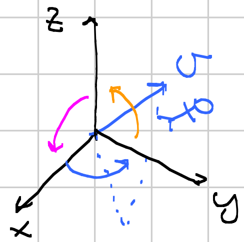
$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -\lambda^3 + 1 = 0$$

Autovalori: $\lambda^3 - 1 = 0$, $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\theta} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\theta} \qquad \theta = 120°$$

Quindi A è una rotazione di 120° rispetto all'asse generato dall'autovettore di $\lambda = 1$.

Risolvendo $(x,y,z) = (z,x,y)$ troviamo $x = y = z$ da cui la soluzione $\underset{v}{(1,1,1)}$.



$$f(1,0,0) = (0,1,0)$$
$$f(0,1,0) = (0,0,1)$$
$$f(0,0,1) = (1,0,0)$$

La rotazione è antioraria per un omino in piedi lungo (1,1,1)

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 56

Note Title 14/12/2018

CLASSIFICAZIONE ISOMETRIE DELLO SPAZIO

Domanda: come sono fatte "geometricamente" tutte le
$$f(x) = Ax + b$$
con A matrice 3×3 ortogonale

Conviene guardare all'insieme dei p.ti fissi, cioè le soluzioni del sistema $f(x) = x$, cioè $Ax+b = x$, cioè

$$(A - Id)\,x = b$$ (sistema lineare di 3 equ. in 3 incognite)

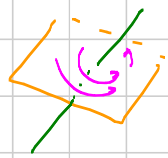
Ci sono varie possibilità.

$\boxed{1}$ L'insieme dei p.ti fissi ha dim 3, cioè è tutto $\mathbb{R}^3$. In questo caso $f(x) = x$ (identità), cioè $A = Id$ e $b = 0$

$\boxed{2}$ L'insieme dei p.ti fissi ha dim 2, cioè è un piano. Allora $f(x)$ è la simmetria risp. a questo piano.

$\boxed{3}$ L'insieme dei p.ti fissi ha dim 1, cioè una retta. Allora $f(x)$ è una rotazione intorno a questa retta.

$\boxed{4}$ Esiste un unico p.to fisso. Allora f è una rotazione intorno ad una retta seguita da una simmetria rispetto ad un piano $\perp$ alla retta



$\boxed{5}$ Non ci sono p.ti fissi.
Da qui si aprono 3 sotto-casi

$\boxed{5.1}$ $f(x)$ è una traslazione

$\boxed{5.2}$ $f(x)$ è una simmetria rispetto ad un piano, seguita da una traslazione di un vettore b parallelo al piano

$\boxed{5.3}$ $f(x)$ è una rotazione rispetto ad un asse, seguita da una traslazione in direzione parallela all'asse stesso.

Domande: ① data una descrizione geometrica, scrivere l'espressione analitica della trasformazione

② data una trasf. espressa mediante equazioni, capire di cosa si tratta geometricamente

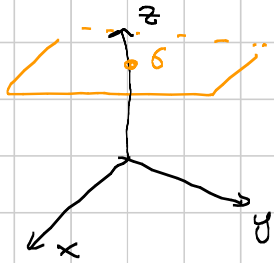
Risposta a ②: avuta la trasf. nella forma $Ax+b$
→ calcolo l'insieme dei p.ti fissi
→ vedo in quali casi mi trovo.
Se mi trovo nel caso senza p.ti fissi, per decidere tra 5.1, 5.2, 5.3 guardo la matrice A
Questa avrà per forza l'autovalore $\lambda = 1$
(perchè $A - Id$ non è invertibile, altrimenti avrei almeno un p.to fisso). Guardo la $mg(1)$ e allora

- se $mg(1) = 3$ (cioè $A = Id$) siamo nel 5.1
- se $mg(1) = 2$ siamo nel 5.2
- se $mg(1) = 1$ siamo nel 5.3

Risposta a ①: si cerca di portare il pbm. nell'origine dove lo sappiamo studiare.

— o — o —

<u>Esempio</u> Scrivere l'espressione della simmetria rispetto al piano $z = 6$



$P_0 = (0,0,6)$ (potrei prendere anche $(5,-2,6)$)
e seguo lo schema

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ simmetrizzo $\rightsquigarrow$ aggiungo nuovamente P_0

$(x,y,z) \rightsquigarrow (x,y,z-6)$ (equivale a spostare l'origine in $(0,0,6)$)

Adesso faccio simmetria rispetto al piano xy, cambiando il segno alla 3ª coordinata

$(x,y,z-6) \rightsquigarrow (x,y,6-z)$

Aggiungo $P_0 \rightsquigarrow (x,y,12-z)$.

Conclusione: la trasformazione è

$$\boxed{(x,y,z) \to (x,y,12-z)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}}_{b}$$

Piccola verifica: calcolo l'insieme dei p.ti fissi

$(x,y,12-z) = (x,y,z)$ $\quad x$ libero
$f(x) = x$ $\quad y$ libero
$12 - z = z \rightsquigarrow z = 6$

— o — o —

Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x = 3$

Con conti analoghi ai precedenti troviamo

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (6 - x, y, z)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Esempio 3 Cosa succede se faccio prima la simmetria rispetto a $z = 6$ e poi la simmetria rispetto a $x = 3$?

Componendo $f(x) = A_1 x + b_1$ e $g(x) = A_2 x + b_2$ otteniamo

$$g(f(x)) = A_2 (A_1 x + b_1) + b_2 = \underbrace{A_2 A_1}_{A_3} x + \underbrace{A_2 b_1 + b_2}_{b_3}$$

Se A_1 e A_2 corrispondono a simm., hanno Det $= -1$. Allora A_3 ha Det $+1$, quindi non può essere una simmetria

Oss. Le matrici ortogonali hanno Det $= \pm 1$.
Nella classificazione precedente

- hanno Det $= 1$ i casi $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5.1}$, $\boxed{5.3}$
- hanno Det $= -1$ i casi $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5.2}$

Se compongo 2 simmetrie, posso finire solo nei casi 1, 3, 5.1, 5.3. Nel caso descritto sopra è venuta una rotazione, perché a rimanere fissa è tutta la retta di eq. cartesiane $z = 6$, $x = 3$, che in parametrica è

$$(3, 0, 6) + t\,(0, 1, 0)$$

L'espressione analitica della composizione è

$$(x,y,z) \to (x,y,12-z) \to (6-x,y,12-z)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{rotazione di } 180^\circ \text{ intorno all'asse } y} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio 4</u> Scrivere l'espressione della simmetria rispetto al piano

$$2x+3y-z=5$$

Prendo $P_0 \in$ piano, ad esempio $P_0 = (1,1,0)$ e al solito

$$\underset{P}{(x,y,z)} \to \underset{P-P_0}{(x-1,y-1,z)}$$

⇝ devo fare simmetria risp. al piano $2x+3y-z=0$

⇝ poi aggiungo di nuovo P_0

Come si scrive simm. risp. piano $2x+3y-z=0$?
Considero la base di $\mathbb{R}^3$ data da

$$\underbrace{\underset{v_1}{(1,0,2)} \qquad \underset{v_2}{(0,1,3)}}_{\text{base del piano}} \qquad \underset{\substack{v_3 \\ \text{(perp. al piano)}}}{(2,3,-1)}$$

La matrice che rappresenta la simmetria è data dal prodotto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{simmetria} \\ \text{nella base } v_1,v_2,v_3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{dalla canonica alla } v_1,v_2,v_3} = A$$

Alla fine farò

$$A \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,(P-P_0)+P_0$$

<u>Oss.</u> Se invece di usare $\{v_1, v_2, v_3\}$ usavo una base ortonormale (con v_1 e $v_2 \in$ piano e $v_3 \perp$ al piano) il calcolo dell'inversa diventa molto più semplice, perché bastava fare la trasposta.
Anche se la base era solo ortogonale il calcolo era comunque + semplice (vedi lez. su basi ortogonali).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 57

Titolo nota 14/12/2018

<u>Esempio 1</u> Cosa ottengo se compongo 2 rotazioni nello spazio?

Si tratta di due isometrie la cui parte di matrice ha Det = +1, quindi otterò una trasformazione con Det = +1, che può essere solo di 3 tipi:

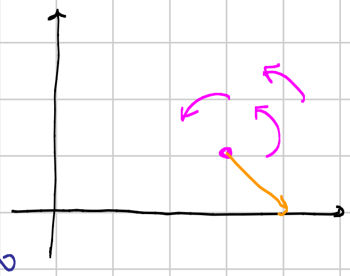
→ Identità (vuol dire che le due rotazioni erano rispetto allo stesso, con stesso angolo, verso opposto)

→ rotazione con nuovo asse e nuovo angolo

→ rotazione seguita da traslazione lungo asse.

<u>Esempio 2</u> Già nel piano, cosa succede se ruoto di 60° A.O. intorno al punto (3,1) e poi traslo tutto in direzione (1,−1)

Viene una rotazione di 60° rispetto ad un altro punto!



Infatti viene una trasformazione del piano del tipo

$$f(x) = A_1 x + b_1 \qquad \text{(rot. iniziale)}$$
$$g(x) = x + b_2 \qquad \text{(traslazione finale)}$$

$$g(f(x)) = \underset{\uparrow \text{rotazione di } 60°}{A_1} x + b_1 + b_2$$

Facciamo i conti

$$\underset{P}{(x,y)} \to \underset{P-P_0}{(x-3,\, y-1)} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(x-3) + \frac{1}{2}(y-1) \end{pmatrix}$$

Alla fine aggiungo $P_0 = (3,1)$

$$(x,y) \to \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right)}_{\text{rotazione di } 60^\circ \text{ intorno al p.to } (3,1)}$$

Se aggiungo $(1,-1)$ ottengo una nuova espressione con la stessa matrice, di cui volendo posso calcolare il p.to fisso.

Esempio 3 Consideriamo $(x,y,z) \rightsquigarrow (3-z, 2+x, 5-y)$

Capire che è una isometria e di cosa si tratta.

La scrivo nella forma $f(x) = Ax+b$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Colonne ortonormali $\Rightarrow$ matrice ortogonale $\Rightarrow$ isometria

Calcoliamo i punti fissi risolvendo

$$\begin{cases} 3-z = x \\ 2+x = y \\ 5-y = z \end{cases} \quad \begin{cases} x+z = 3 \\ -x+y = 2 \\ y+z = 5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z libera

$y = 5-z$

$x = 3-z$

Le soluzioni del sistema sono

$$(x, y, z) = (3-t, 5-t, t) = (3,5,0) + t(-1,-1,1)$$

L'insieme dei p.ti fissi è una retta, quindi la trasformazione è una rotazione intorno a quella retta.

Di quale angolo? Faccio gli autovalori della matrice, che saranno $\lambda = 1$ e $\lambda = \cos\theta \pm i \sin\theta$.
A quel p.to θ è l'angolo cercato.
La forma di Jordan reale è la matrice

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad \uparrow \\ v_1 \quad\quad v_2 \quad\quad v_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

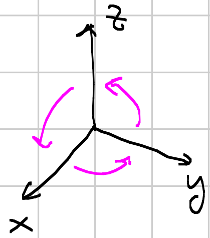
Chi è θ? Bovino: fare il pol. caratteristico e risolvere

Più astuto: gli autovalori sono 1, $\cos\theta + i\sin\theta$, $\cos\theta - i\sin\theta$
Allora

$$\operatorname{Tr} A = 0 = 1 + 2\cos\theta \quad \rightsquigarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \theta = 120°$$

Gli autovalori complessi coniugati sono $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

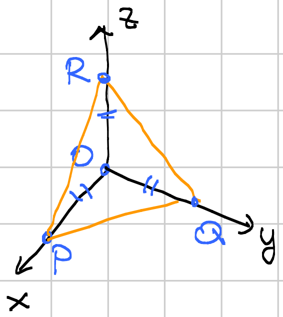
<u>Esempio 4</u> La trasformazione che lascia $(0,0,0)$ fisso e manda



$(1,0,0) \longrightarrow (0,1,0)$
$(0,1,0) \longrightarrow (0,0,1)$
$(0,0,1) \longrightarrow (1,0,0)$

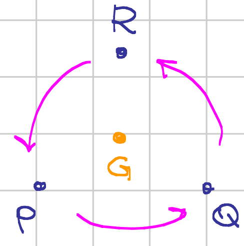
cioè $(x,y,z) \longrightarrow (z,x,y)$ è una rotazione di $120°$ intorno all'asse $\langle (1,1,1) \rangle$

Come visualizzare geometricamente



Consideriamo il piano che passa per P, Q, R cioè il piano di eq.

$$x+y+z=1$$



Il triangolo PQR è equilatero perché i lati sono tutti lunghi $\sqrt{2}$ e ora è abbastanza chiaro che la trasf.

$P \to Q$

$Q \to R$

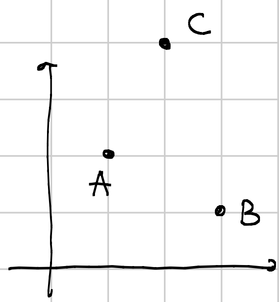
$R \to P$

è una rotazione di 120° rispetto al centro G del triangolo

Nota bene! il centro G è l'intersezione tra il piano $x+y+z=1$ e l'asse di rotazione $(1,1,1)$

— o — o —

Esempio 5 Siano A, B, C come in figura (in scala).



Determinare tutte le isometrie del piano che mandano il Δ in se stesso (ma non nec. $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$)

- Intanto c'è l'identità
- Calcolo lungh. dei lati : $AB = \sqrt{5} = AC$, $BC = \sqrt{10}$

  Il triangolo è isoscele in A.

  Quindi per forza A deve andare in se stesso (è l'unico p.to che è equidistante dai 2 vertici)

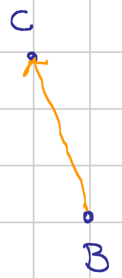
  Quindi l'unica possibilità oltre all'identità è che

  $A \to A \qquad B \to C \qquad C \to B$

Fatto generale: nel piano, una affinità che lascia fissi 3 p.ti non allineati è per forza l'identità (pensare a come può essere fatto l'insieme dei p.ti fissi)

La trasformazione sarà la simmetria rispetto all'asse del segmento BC, cioè la retta che passa per A e per il p.to medio di BC.

In parametrica



$$\underbrace{(1,2)}_{A} + t\,(3,1)$$

La retta BC ha direzione $(-1,3)$

L'asse di BC ha direzione $\perp$, quindi $(3,1)$

Scriviamo la simmetria

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-1, y-2) \rightsquigarrow \text{Matrice} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + (1,2)$$

La matrice è la simmetria rispetto alla retta di dir. $(3,1)$ cioè

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Matrice}}$$

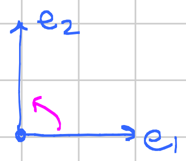
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 58

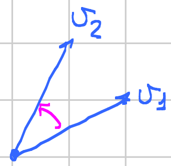
Note Title 18/12/2018

Orientazione di una base

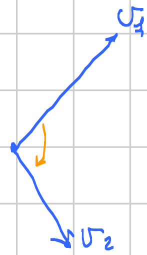
In $\mathbb{R}^2$



$e_1 = (1,0)$
$e_2 = (0,1)$



$v_1 = (2,1)$
$v_2 = (1,2)$

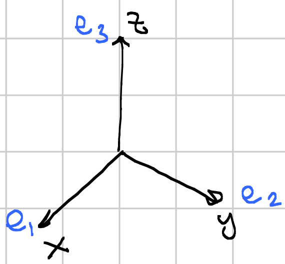


$v_1 = (2,2)$ $v_2 = (1,-2)$

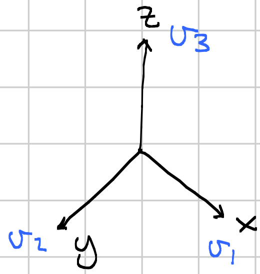
Idea: le prime 2 basi sono orientate allo stesso modo, la terza al contrario

Più rigorosamente: nelle prime 2 basi il vettore v_1 si sposta sul secondo con rot. ANTIORARIA di un angolo $< 180°$

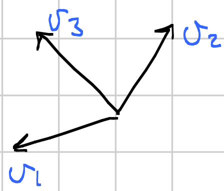
In $\mathbb{R}^3$:



Orientazione "positiva"



Orientazione "negativa"



Orientazione ?

Algebricamente basta guardare il Det della matrice di cambio base canonica ⇝ strana e in base al segno del Det si decide l'orientazione.

Esempi

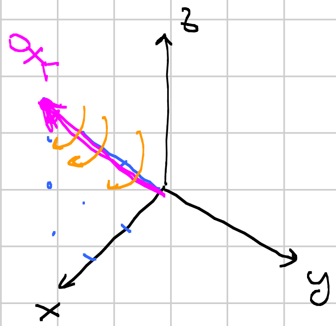
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad + \qquad\qquad -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad -$$

Esempio 1 Scrivere la rotazione intorno all'asse generato da $(2,-1,3)$ di un angolo di $90°$ in senso orario per un omino messo in piedi nella direzione di $(2,-1,3)$



Scelgo una base v_1, v_2, v_3 ortonormale di $\mathbb{R}^3$ in cui $v_3 = (2,-1,3)$ a meno di costanti positive.
Scelgo $v_1 = (1,2,0)$ in modo da essere $\perp$ a v_3 e produco v_2 con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-6, 3, 5) = v_2 \qquad (\perp \text{ a } v_1 \text{ e } v_3)$$

Base ortogonale:
$v_1 = (1,2,0)$
$v_2 = (-6,3,5)$
$v_3 = (2,-1,3)$

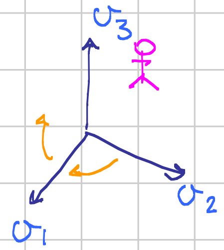
$$\begin{matrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{matrix}$$

In questa base so scrivere la rotazione
Domanda come metto i segni

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per stabilire i segni devo capire l'orientazione della base v_1, v_2, v_3. Calcolo il determinante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{Det}: 9+20+36+5 > 0$$



$\rightsquigarrow$ La base v_1, v_2, v_3 è messa come quella canonica

I segni corretti sono quelli che corrispondono a $-90°$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v_1 va in $-v_2$ $\qquad$ v_2 va in v_1

La trasformazione richiesta è

$$M \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

Dove M è la matrice di cambio base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica

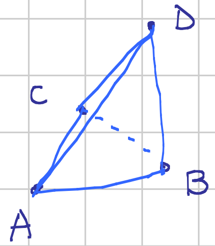
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

v_1 normalizzato

— o — o —

Volume del tetraedro

Dati 4 p.ti nello spazio, determinare il volume del tetraedro (piramide a base triangolare) che ha i 4 p.ti come vertici.



1º modo : $\mathrm{Vol} = \frac{1}{3}$ Area base · altezza

Area base = area triangolo ABC
Altezza : distanza di D dal piano ABC

2º modo : $\mathrm{Vol} = \frac{1}{6}$ Det. della matrice 3×3 che ha come righe o colonne i vettori

$B-A \qquad C-A \qquad D-A$

(posso sottrarne uno qualunque dei 4)
(se viene negativo si mette il valore assoluto)

[Come esercizio provare in un caso specifico che vengano uguali]

3º modo Costruiamo la matrice 4×4 usando i 4 vettori dati come righe e aggiungendo in fondo una colonna di 1

$$\begin{pmatrix} \boxed{\quad A \quad} & 1 \\ \boxed{\quad B \quad} & 1 \\ \boxed{\quad C \quad} & 1 \\ \boxed{\quad D \quad} & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}\,|\mathrm{Det}|$$

Perché funziona? Se lavoro alla Gauss ortodosso sulla matrice il Det non cambia

Lavorando in questo modo la matrice diventa

$$\begin{array}{|c|c} \boxed{A} & 1 \\ \boxed{B-A} & 0 \\ \boxed{C-A} & 0 \\ \boxed{D-A} & 0 \end{array}$$

A meno del segno, il Det della matrice 4×4 è uguale al Det della matrice 3×3 in basso a sx, che è quella del 2° modo

<u>Esercizio</u> Consideriamo le 2 rette

$$(1,0,1)+t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1} \qquad (0,1,2)+s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}$$

① Determinare la pos. relativa

Poiché v_1 e v_2 sono lin. indip., possono essere solo incidenti o sghembe.
Per vedere se sono incidenti, impongo uguaglianza

$$(1,0,1)+t(2,3,1)=(0,1,2)+s(1,0,2)$$

$$t(2,3,1)-s(1,0,2)=(-1,1,1)$$

Quindi sono incid. se e solo se $(-1,1,1)$ è comb. lin. dei primi 2. Basta fare

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} \quad \begin{array}{l} =0 \rightsquigarrow \text{incidenti} \\ \neq 0 \rightsquigarrow \text{sghembe} \end{array}$$

② Determinare la distanza fra le 2 rette

1° modo : Scrivo distanza al $\square$ tra un p.to della 1ª ed un p.to della 2ª.
Viene un'espressione di 2° grado in t ed s, che p.to a scrivere come somma di quadrati.
A quel p.to vedo quando è minimo.

2° modo : cerco p.to P sulla prima retta
" " Q sulla seconda retta
tali che
$P-Q$ è $\perp$ ai 2 vettori direzione

A quel p.to la distanza tra P e Q è la distanza richiesta.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 59

Note Title 18/12/2018

$(1,0,1) + t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1} \qquad (0,1,2) + s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}$

Applichiamo il 2° modo

$P = (1+2t, 3t, 1+t) \qquad Q = (s, 1, 2+2s)$

$P-Q = (1+2t-s,\ 3t-1,\ -1+t-2s)$

$P-Q \perp v_1 \quad \rightsquigarrow \quad 2(1+2t-s) + 3(3t-1) + (-1+t-2s) = 0$

$P-Q \perp v_2 \quad \rightsquigarrow \quad (1+2t-s) + 2(-1+t-2s) = 0$

Risolvendo trovo univocamente t ed s, e quindi i p.ti P e Q.

Applicare il 1° modo voleva dire

$\operatorname{dist}(P,Q)^2 = \|P-Q\|^2 = (1+2t-s)^2 + (3t-1)^2 + (-1+t-2s)^2$

Posso espandere tutto : $1 + \cancel{4t^2} + \cancel{s^2} + \cancel{4t} - \cancel{2s} \overset{\text{NO}}{+} \cancel{4ts} + \cancel{9t^2} - \cancel{6t} + 1$
$+ 1 + \cancel{t^2} + \cancel{4s^2} - \cancel{2t} + \cancel{4s} - \cancel{4ts}$

[Aggiunto dopo video : c'è un errore di segno che compromette il seguito]

$= 14t^2 + 5s^2 - 4t + 2s + 3$

Devo trovare il minimo di questa. Punto a scriverla come somma di quadrati

$14\left(t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{49} - \frac{1}{49}\right) + 5s^2 + 2s + 3$

$= 14\left(t - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{2}{7} + 5s^2 + 2s + 3$

$$= 14\left(t-\frac{1}{7}\right)^2 + 5\left(s^2+\frac{2}{5}s+\frac{1}{25}-\frac{1}{25}\right)-\frac{2}{7}+3$$

$$= 14\left(t-\frac{1}{7}\right)^2 + 5\left(s+\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}-\frac{2}{7}+3$$

Il minimo di questa espressione si ottiene quando

$t=\frac{1}{7}$ e $s=-\frac{1}{5}$ e il minimo vale $-\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+3$

[Verifica: controllare che questa sia la soluzione del sistema del 2º modo]

Domanda: trovare un piano che contiene la prima retta e non interseca la 2ª retta.

$$\underbrace{(1,0,1)+t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1}}_{\text{prima retta}} \qquad \underbrace{(0,1,2)+s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}}_{\text{seconda retta}}$$

Il piano è $(1,0,1)+t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1}+s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}$

È il piano che passa per $(1,0,1)$ ed è generato dalle due direzioni v_1 e v_2

Se volessi la cartesiana?

Cerco vett. $\perp$ a v_1 e v_2

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (6,-3,-3) \rightsquigarrow (2,-1,-1)$$

$2x-y-z=1 \leftarrow$ deve passare per $(1,0,1)$

Verifico che il piano non interseca la 2ª retta
$(s, 1, 2+2s)$

$\cancel{2s} - 1 - 2 - \cancel{2s} = 1 \rightsquigarrow$ impossibile

La distanza di ogni p.to della 2ª retta dal piano è la stessa, ed è uguale alla minima distanza fra le 2 rette

P.to sulla 2ª retta: $(0, 1, 2)$

Distanza dal piano

$$\frac{|-1-2|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

[Corretto dopo video: manca il d al num.: il conto giusto è $\frac{|-1-2-1|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$]

Verificare che venga coerente con gli altri metodi

— o — o —

Esercizio Capire cosa rappresenta l'insieme dei p.ti (x, y) del piano tali che

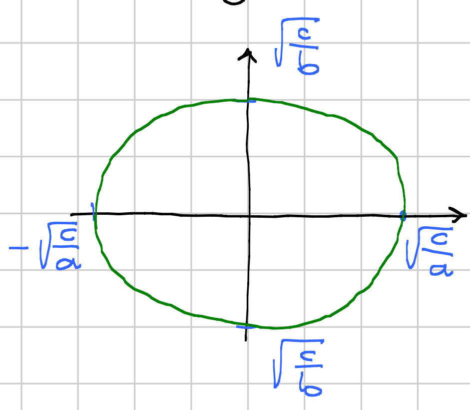
$$2x^2 + 3y^2 - 2xy = 10$$

Passo indietro: cosa rappresenta

$$ax^2 + by^2 = c \qquad \text{con } a, b, c > 0$$

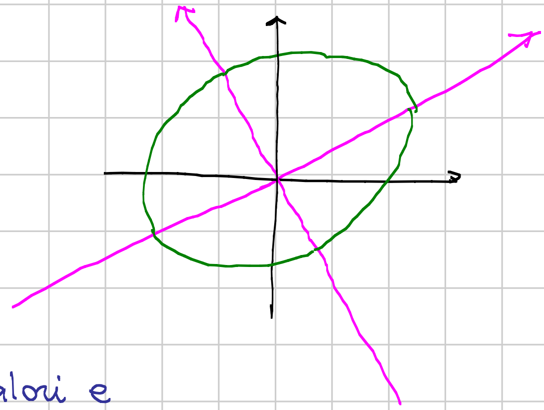
Rappresenta un'ellisse con semiassi $\sqrt{\frac{c}{a}}$ e $\sqrt{\frac{c}{b}}$

Idea: quella originaria è un'ellisse ma orientata secondo una base diversa dalla base canonica.



Morale: la base è la base ortonormale di autovettori della matrice simmetrica
le lungh. dei semiassi dipendono dagli autovalori

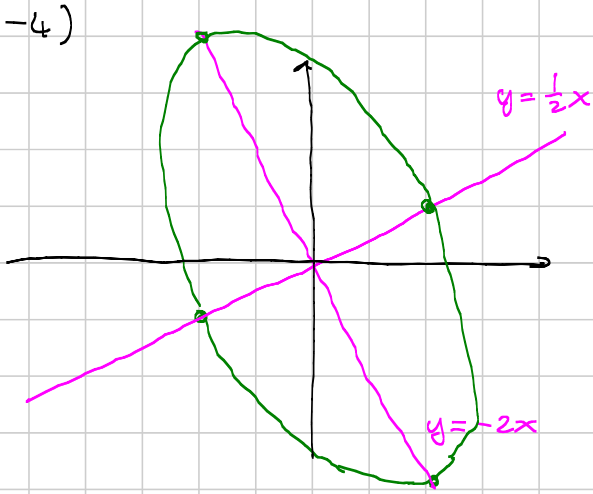
Volendo: esiste una rotazione del piano che manda l'ellisse strana in una messa in posizione "canonica".



$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ calcolo autovalori e autovettori

Esempio (in cui i numeri vengono meglio)

Scrivere l'ellisse che ha come assi le rette
$y = +\frac{1}{2}x$ e $y = -2x$
e passa per i p.ti $(2,1)$ e $(2,-4)$



Costruisco una base ortonormale secondo le direzioni delle 2 rette
ortogonale: $(2,1)$, $(-1,2)$
ortonormale:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)}_{v_1} \qquad \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)}_{v_2}$$

In questa base, l'ellisse si rappresenta come

$$a z^2 + b w^2 = c$$ dove (z,w) sono le componenti rispetto a questa base

e a, b, c sono scelti in modo che l'ellisse passi per i p.ti dati.

Scegliamo $c = 1$, e a quel p.to

$(2,1)$ ha componenti $(\sqrt{5}, 0) \rightsquigarrow a = \frac{1}{5}$

$(2,-4)$ " " $(0, -2\sqrt{5}) \rightsquigarrow b = \frac{1}{20}$

Nella base strana l'ellisse è $\frac{1}{5} z^2 + \frac{1}{20} w^2 = 1$, oppure

$$\boxed{4z^2 + w^2 = 20}$$

Dato un p.to $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (x e y sono le comp. rispetto alla base canonica), chi sono z e w ?

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dalla canonica alla} \\ v_1, v_2}}{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ v_1 \quad\quad v_2 \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

L'eq. è $$4\left(\frac{2}{\sqrt{5}} x + \frac{1}{\sqrt{5}} y\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} x + \frac{2}{\sqrt{5}} y\right)^2 = 20$$

— o — o —

Cosa succede se ci sono termini di primo grado

$$\boxed{2x^2 + 5y^2 + 4xy + 6x - 7y = 28}$$

Idea: Con una traslazione posso "eliminare" i termini di primo grado.

Poniamo

$$z = x+a \qquad w = y+b$$

(traslazione che sposta l'origine)

$$2(x+a)^2 + 5(y+b)^2 + 4(x+a)(y+b) + 6(x+a) - 7(y+b) = 28$$

Guardando solo i termini di 1° grado:

$$4ax + 10by + 4bx + 4ay + 6x - 7y$$

$$4a + 4b + 6 = 0 \qquad (\text{coeff. di } x)$$
$$10b + 4a - 7 = 0 \qquad (\text{coeff. di } y)$$

Risolvendo il sistema trova a e b.
In un nuovo sistema di assi con origine in $(-a,-b)$, quello che resta ha solo termini di 2° grado, e quindi posso procedere come prima.

Tutti i casi "degeneri" le possibilità sono

- ellisse $ax^2+by^2=c$ $\quad a,b,c>0$
- iperbole $ax^2-by^2=c$ $\quad$ "
- insieme $\varnothing$: $ax^2+by^2=c$ $\quad a,b>0$ e $c<0$.

Volendo: le ellissi diventano circonferenze usando matrici diagonali con coeff. diversi sulla diagonale

$$4x^2+9y^2=1 \rightsquigarrow \underbrace{2x = z, \quad 3y = w}_{\text{dilata in modo diverso sui 2 assi}} \rightsquigarrow z^2+w^2=1$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 60

Titolo nota 18/12/2018

ALGORITMO JPEG e CAMBI DI BASE

https://en.wikipedia.org/wiki/JPEG

Immagine: matrice $\underbrace{m \times n}_{\text{pixel in orizz. e verticale}}$

Questo vale se è B/N: ogni elemento della matrice $\in [0, 1]$ (B ↗ 0, ↖ N 1)

Immagine a colori: sovrapposizione di 3 immagini monocromatiche rispetto a 3 colori fondamentali

Morale: possiamo supporre che le immagini sia B/N.

Discretizzazione: l'intervallo $[0,1]$ di numeri reali diventa l'intervallo $\underbrace{[0, 255]}_{256 \text{ possibilità } = 8 \text{ bit}}$ di numeri interi

FULL HD $= 1920 \times 1080 \sim 2.000.000 \times 3 = 6$MB

Riduzione a blocchi: la matrice viene ridotta i sottoblocchi 8×8

Come posso risparmiare sulle dimensioni?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Riduco la risoluzione

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Riduco il campionamento: invece di usare 256 possibili valori, uso solo 16 possibili valori

Idea vincente: fare un cambio di base nello spazio delle matrici 8×8 (spazio di dim. 64)

Base canonica: 64 matrici con un 1 e 63 zeri

Base strana: usare base di autovettori rispetto ad una applicazione simmetrica

Prima avviene una traslazione: invece di usare valori in $[0, 255]$ si usano valori in $[-127, 127]$

Come è fatta la trasformazione simmetrica?

Scendiamo di una dimensione: invece di matrici 8×8, considero vettori lunghi 8

(a, b, c, d, e, f, g, h)

$L(a, b, c, d, e, f, g, h) =$ sostituisco ogni elemento con la somma dei 2 vicini
Per decidere i vicini del 1° e ultimo prolungo a dx e sx per riflessione

$= (a+b, a+c, b+d, c+e, d+f, e+g, f+h, g+h)$

$\ldots\ b\ a \,\vdots\, a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h \,\vdots\, h\ g\ \ldots$

Questa trasformazione è simmetrica (la matrice associata ha 1 sopra e sotto la diagonale)

Nel caso di vettori lunghi 4 sarebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a,b,c,d) \to (a+b,\ a+c,\ b+d,\ c+d)$$

Siano $\{v_1, \dots, v_8\}$ una base ortonormale di autovettori

e nel caso delle matrici $\{M_1, M_2, \dots, M_{64}\}$

Ogni matrice 8×8 M è comb. lineare di queste, quindi si scrive come

$$M = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \dots + c_{64} M_{64}$$

Morale: alcune componenti, quelle rispetto alle matrici "in alto a sx nella base" sono più importanti di altre, quindi le altre sono "sacrificabili"

Si trasmettono "bene" le componenti + importanti (8 bit) e in maniera sempre più approx quelle meno importanti.

Quali sono + importanti: quelle + uniformi.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ & \vdots & & \end{matrix}$$

Matrice con tutti 1 $\rightsquigarrow$ componente è il colore medio di quel blocco.

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ componente: media della parte alta