ANALISI 1 - LEZIONE 045

Note Title 16/11/2016

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: disegnare l'andamento di una funzione su tutto l'insieme di definizione

Punti principali:
1. Eventuali simmetrie
2. Zona di definizione e continuità
3. Limiti agli estremi della zona di def.
4. Zeri e segno
5. Derivabilità e monotonia
6. max/min locali / globali
7. Asintoti
8. Convessità e flessi
9. LIPSCHITZIANITÀ

Esempio $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x}$

① Simmetrie Purtroppo nulla

② Zona def. e continuità Serve $x^2+x \neq 0$, cioè $x(x+1) \neq 0$ cioè $x \notin \{-1, 0\}$

$\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

Continua nella zona di def. per il metateorema

③ Limiti agli estremi Sono 6 limiti

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

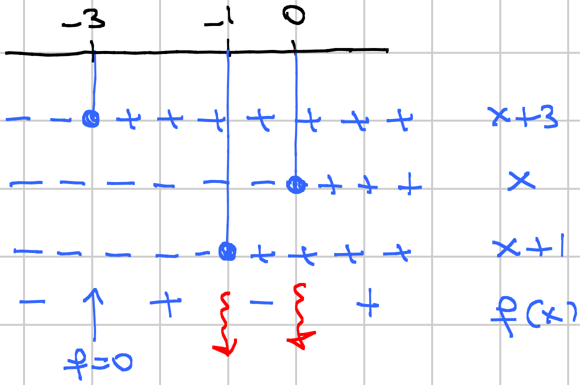
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

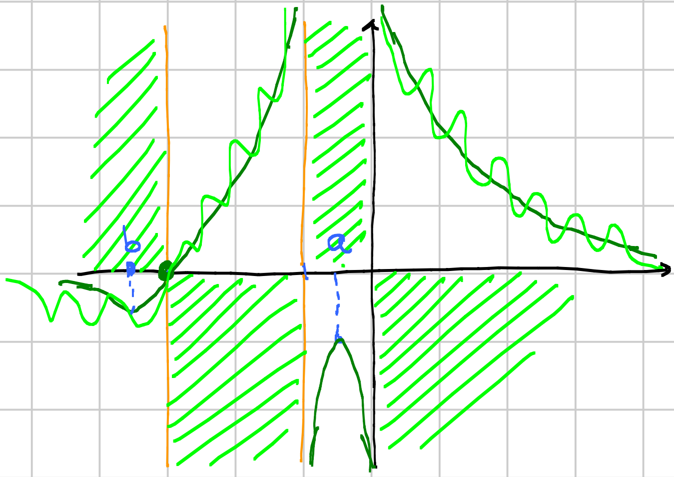
4 Zeri e segno

Risolvere $f(x) = \dfrac{x+3}{x(x+1)}$

→ l'equazione $f(x) = 0$

→ le disequazioni $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$





Idea che ci siamo fatti dei punti 3 e 4, ma potrebbe succedere di tutto

5 Studio derivata e monotonia

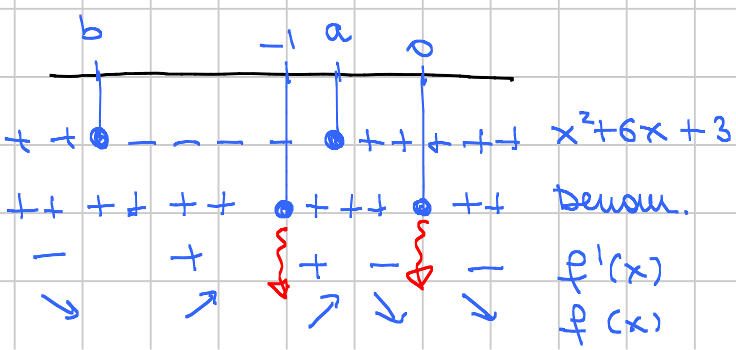
$$f'(x) = \frac{x^2+x-(2x+1)(x+3)}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+x-2x^2-6x-x-3}{(x^2+x)^2} = \frac{-x^2-6x-3}{(x^2+x)^2} = -\frac{x^2+6x+3}{(x^2+x)^2}$$

La funzione $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ per i teoremi algebrici sulle derivate e $f'(x)$ è quella calcolata.

Ora risolvo $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6} = \begin{cases} \nearrow a \\ \searrow b \end{cases}$$



Tutto questo conferma il grafico precedente

⑥ Max / min loc. / glob. $x = -3+\sqrt{6}$ p.to di max locale
$x = -3-\sqrt{6}$ p.to di min locale

Non è difficile trovare le corrispondenti y.

Max e min globali non ci sono.

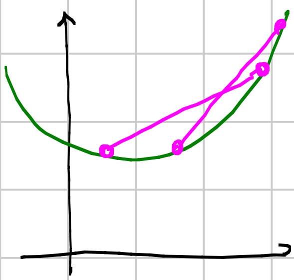
⑦ Asintoti → orizzontali
→ verticali
→ obliqui

- Orizzontali : $y=0$ è asint. oriz. per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

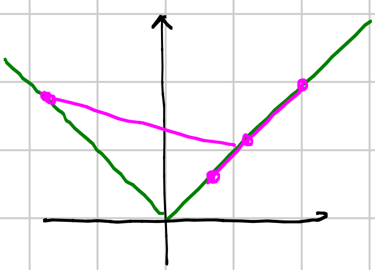
- Verticali : $x=0$ e $x=-1$

⑧ Flessi, convessità e derivata seconda

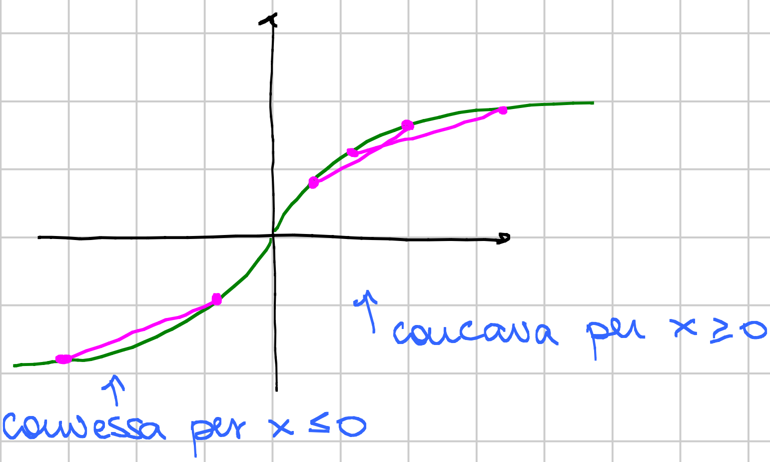
Def. "geometrica" Una funzione $f(x)$ si dice convessa (in un intervallo, una semiretta, tutto $\mathbb{R}$) se, presi comunque 2 p.ti sul grafico, tutto il segmento congiungente sta sopra il grafico.
La convessità è stretta se il segmento tocca il grafico solo agli estremi.
Una funzione si dice concava se tutti i segmenti congiungenti stanno sotto il grafico.



(strett. convessa)



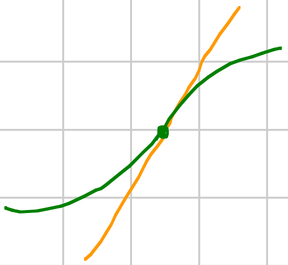
Convessa ma non strett.



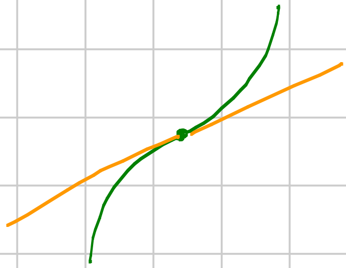
Def. Un punto x_0 si dice <u>punto di flesso</u> se esiste $\delta > 0$ tale che f è convessa in $[x_0, x_0+\delta]$ e concava in $[x_0-\delta, x_0]$ (o viceversa). Detto in altri termini, cambia la concavità/conv. nel punto x_0.

Oss. (geometrica) Una funzione convessa sta sopra le rette tang.
" " concava " sotto " " "

Di conseguenza "nei punti di flesso il grafico attraversa la retta tangente"

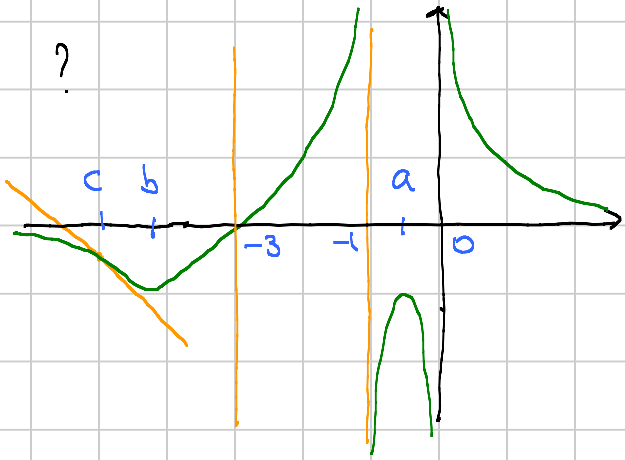


conv. – conc.



conc. – conv.

Cosa ci aspettiamo con $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+x}$?



- per $x > 0$ è convessa
- per $x \in (-1, 0)$ è concava
- esiste $c < b$ p.to di flesso con f convessa in $[c, -1)$ e concava per $x \in (-\infty, c]$.

Teorema misterioso (Convessità e derivata seconda)

Supponiamo che f'' esista in un certo insieme A (intervallo, semiretta o tutto $\mathbb{R}$).

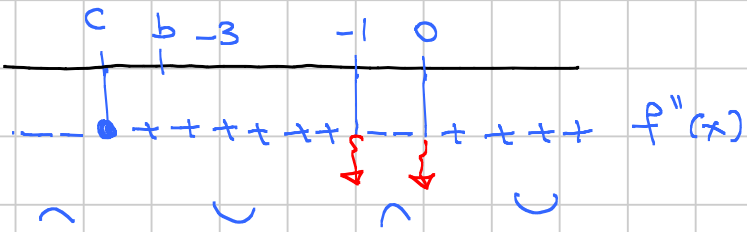
Allora valgono le seguenti implicazioni

$$\boxed{f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in A \iff f \text{ è convessa in } A}$$

$$\boxed{f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in A \implies f \text{ strett. conv. in } A}$$

$\Leftarrow$ in generale è falsa (pensare a x^4)

Nell' esempio ci aspettiamo dalla $f''(x)$ un segno del tipo



Teorema misterioso Se $f''(x)$ esiste in A e vale

- $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$
- $f''(x) = 0$ non ha come soluzione un intero intervallo,

allora f è strett. conv. in A.

Achtung! I punti in cui $f''(x) = 0$ NON sono per forza p.ti di flesso. Per esserlo occorre che $f''(x)$ cambi segno in quel punto.
Come esempio pensare sempre a x^4.