ALGEBRA LINEARE

Introduzione: sistemi di 2 equazioni a 2 variabili.

Ad esempio:

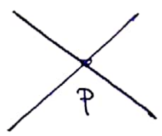
1) $E_1: \quad x + y = 3$
$E_2: \quad x + 2y = 5$ $\Big\} \Rightarrow E_2 - E_1: \ \boxed{y} = 5 - 3 = \boxed{2}$
sostituzione $\Rightarrow \boxed{x} = \boxed{1}$

2) $E_1: \quad x + y = 3$
$E_2: \quad 2x + 2y = 6$ $\Big\} \ E_2 - 2E_1: \quad 0 = 0$
Infatti, $E_2 = 2E_1 \Rightarrow$ hanno le stesse soluzioni
[un'infinità!]

3) $E_1: \quad x + y = 3$
$E_2: \quad 2x + 2y = 5$ $\Big\} \Rightarrow E_2 - 2E_1: \quad 0 = -1$ ↯
nessuna soluzione comune!

Quindi abbiamo 1, ∞ o $\emptyset$ soluzioni comuni. Sarà così in generale.

Interpretazione geometrica: in ogni caso E_1 e E_2 sono le equazioni di due rette nel piano.

Nel caso 1)  hanno un punto in comune $P = (1, 2)$

2) coincidono $\Rightarrow \infty$ punti in comune

3)  sono paralleli $\Rightarrow \nexists$ punto in comune

---

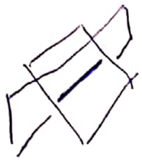
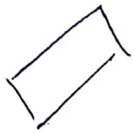
Equazione tipo a 3 variabili: $x + 2y + 3z = 4$

È l'equazione di un piano nello spazio 3-dimensionale.

Soluzioni comuni di 2 equazioni lineari a 3 variabili

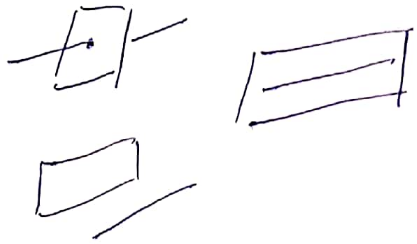
$\Updownarrow$

punti nell'intersezione di 2 piani. 3 casi:

a)  retta b)  coincidenza c) 
paralleli

Se c'è una 3a equazione $\longleftrightarrow$ corrisponde a un terzo piano.
L'intersezione con i precedenti da:

a) $\{\text{retta}\} \cap \text{piano} = \begin{cases} \text{punto} \\ \text{la retta} \\ \emptyset \end{cases}$



b) Intersezione di due piani: 3 casi come sopra.

c) Rimane $\emptyset$.

<u>Sintesi</u>: Le soluzioni comuni di 3 equazioni lineari a 3 variabili corrispondono all'intersezione di 3 piani nello spazio 3-dimensionale.

L'intersezione può essere:
- un punto [unica soluzione]
- una retta o un piano [∞ soluzioni]
- $\emptyset$

<u>Caso generale</u>: sistema di n equazioni lineari a m variabili

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\
E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\
&\quad \vdots \\
E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_m
\end{aligned}
\qquad (E)
$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$

$n, m > 0.$

Cerchiamo soluzioni comuni:

Def. Il sistema (E) è omogeneo se $b_1 = \dots = b_n = 0$.

Se no, possiamo considerare il sistema omogeneo associato:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned} \qquad (E_{om})$$

Prop. Se $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ e $(d_1, \dots, d_m)$ sono soluzioni di (E) $\Rightarrow$ $(c_1 - d_1, c_2 - d_2, \dots, c_m - d_m)$ sono soluzioni di (E_{om})

Dim. Si fà la sostituzione $x_j = c_j$ e $x_j = d_j$ in E_i:

$$\left.\begin{aligned} a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{im}c_m &= b_i \\ a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \dots + a_{im}d_m &= b_i \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$a_{i1}(c_1 - d_1) + \dots + a_{im}(c_m - d_m) = 0 \qquad \forall i$$

Teorema. Se $(c_1, \dots, c_m)$ è soluzione di (E), tutte le soluzioni sono della forma $(c_1 + e_1, c_2 + e_2, \dots, c_m + e_m)$ dove $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ è soluzione di (E_{om}).

Dim. Prop $\rightarrow$ le soluzioni hanno questa forma. Viceversa, se $(e_1, \dots, e_m)$ è sol. di (E_{om}) $\Rightarrow$ $(c_1 + e_1, \dots, c_m + e_m)$ sol. di (E).

Sintesi: "soluzione generale" = "soluzione particolare" + + "soluzione omogenea"

Osservazione: $(0, \dots, 0)$ è sempre soluzione di (E_{om}).

Quindi se (E) ammette una soluzione, questa soluzione è unica $\Leftrightarrow$ $(0, \dots, 0)$ è l'unica soluzione di (E_{om})

Interpretazione geometrica per (E_{om}): "iperpiani attraverso l'origine".

Esempio: $n=1$ $m=2$ E_1: $2x+3y=5$

Soluzione particolare: $x=y=1$

Eq. omogenea: E_1^{om}: $2x+3y=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$

Soluzione generale: se s parametro nel ruolo di y

$x = 1+\left(-\frac{3}{2}\right)s$, $y = 1+s$.

Come trovare soluzioni comuni di (E)? Semplificare!

3 operazioni: A) Moltiplicare un'equazione E_i per una costante $\lambda \neq 0$ $E_i \rightsquigarrow \lambda E_i$

B) Moltiplicare E_i per $\lambda \neq 0$ e fare la somma con E_j $E_j \rightsquigarrow E_j + \lambda E_i$

C) Scambiare due equazioni.

All'inizio abbiamo sempre fatto operazioni di tipo (B).

Ad esempio: $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}$ $E_2 \rightsquigarrow E_2 - 2E_1$: $0=0$.

Prop. Le operazioni A), B), C) non cambiano l'insieme delle soluzioni di (E).

Dim. C) ovvio. A): se $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ soluzione di (E) $\Rightarrow$ anche di (λE) e viceversa.

B) se $(c_1, \dots, c_m)$ è soluzione di E_i, E_j $\Rightarrow$ anche di $E_j + \lambda E_i$

Viceversa, se è soluzione di $E_i, E_j + \lambda E_i$ $\Rightarrow$ anche di $E_j = (E_j + \lambda E_i) - \lambda E_i$.

Prossima volta: sistematizzando A), B), C) si ottiene un algoritmo per semplificare (E), poi trovare le soluzioni.

Metodo per semplificare (E_{om}):

Mettiamo i coefficienti in una matrice $n \times m$ $[a_{ij}]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad R_i : \text{riga N}^\circ\ i$$

Le operazioni A), B), C) corrispondono a:

A') moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$: $R_i \mapsto \lambda \cdot R_i$

B') sostituire la riga R_j con una somma: $R_j \mapsto R_j + \lambda \cdot R_i$

C') scambiare due righe.

Def. Una matrice $n \times m$ è in forma a scalini per righe se

(1) Le righe $(0, \dots, 0)$ sono "in fondo"

(2) Il primo elemento di ogni riga (se esiste) è a destra del primo elemento $\neq 0$ della riga precedente.

Un tale elemento si chiama pivot.

Esempi
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
NO SI NO

Sono in forma a scalini?

Algoritmo di Gauss: Ogni matrice $n \times m$ si mette in forma a scalini (per righe) con operazioni del tipo B'), C').

0) Se la matrice è già in forma a scalini $\Rightarrow$ END

1) Si cerca il primo elemento $\neq 0$ della prima colonna $\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_4]{C'} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Cambiando righe si può supporre che questo elemento è il pivot della prima riga. Notiamolo p

Se siamo in forma a scalini → END. Se no,

3) Si annullano tutti gli elementi della colonna di p <u>sotto</u> p con operazioni di tipo B')

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Se siamo in forma a scalini → END

4) Se no, si ricomincia con la matrice ottenuta cancellando la prima riga. FINE DESCRIZIONE ALGORITMO

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 + 2R_2]{R_3 + \frac{4}{3}R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice non è ancora a scalini, quindi si cancella R_2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + (-\frac{3}{4})R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Altro esempio</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ corrisponde a $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$R_2 - 3R_1$
$R_3 - R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$$
$$2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$-x_3 - 5x_4 = 0$$

x_4 ⟷ colonna senza pivot - variabile libera!

Se si mette $\boxed{x_4 = t}$ parametro, andando sopra si ottiene:

$\boxed{x_3 = -5t}$, $2x_2 - 5t + t = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2t}$

$x_1 - 2t + 3t = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -t}$

Metodo per equazioni non omogenei: si aggiunge una colonna con $b_1, \dots, b_n$ e si applica l'algoritmo di Gauss.

Esempi

1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - 2R_1]{R_2 - R_1,\ R_3 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{array}\right] \leadsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 + R_2}$$

$$\leadsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Corrisponde a:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 9 \\ x_2 - x_4 &= -2 \\ x_3 - x_4 &= -1 \\ -5x_4 &= -15 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = 2, x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0.$

Soluzione unica!

L'unicità si vede già sul sistema omogeneo:

$x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $(0,0,0,0)$ unica soluzione

E sempre così se ogni colonna ~~e ogni riga~~ contiene un pivot. [Forma a scalini:
$$\left[\begin{array}{cccc} * & & * & \\ & * & & \\ 0 & & * & \\ & & & * \\ \hline & 0 & & \end{array}\right]$$
]

2) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 &= 2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -10 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 5 \end{array}\right] \underset{R_3 - 5R_1}{\overset{R_2 - 2R_1}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 + 8R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

x_3 variabile libera! Se $\boxed{x_3 = t}$, $\boxed{x_2 = 2t}$, $\boxed{x_1 = 1 + 2t}$

Soluzione particolare: $(1, 0, 0)$ generale: $(1+2t, 2t, t)$

omogenea: $(2t, 2t, t)$

Se c'è una colonna senza pivot $\Rightarrow$ $\exists$ variabile libera $\Rightarrow$ ∞ soluzioni.

3) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 - 9x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -9 & 7 \end{array}\right] \underset{R_3 - 4R_1}{\overset{R_2 - 3R_1}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right] \overset{R_3 - 5R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right] \leftrightarrow 0 = 25 \lightning$$

Nessuna soluzione!

È sempre così se c'è un pivot nell'ultima colonna.

$\nexists$ soluzione particolare! (Ma il sistema omogeneo ammette ∞ soluzioni)

<u>Sintesi</u>. Se nella forma a scalini

* ogni colonna "non aggiunta" ha un pivot $\Leftrightarrow$ unica soluzione
* c'è un pivot nell'ultima colonna $\Leftrightarrow$ $\nexists$ soluzione
* c'è una colonna "non aggiunta" senza pivot e l'ultima colonna non ne ha $\Leftrightarrow$ ∞ soluzioni

Def. Una matrice è in forma ridotta a scalini se

* è in forma a scalini

** ogni pivot è uguale a 1

*** — " — l'unico elemento $\neq 0$ nella sua colonna

Esempi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ è in forma ridotta a scalini

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ in forma a scalini ma non ridotta

Algoritmo di Gauss-Jordan: con operazioni del tipo A'), B'), C') produce una matrice a forma ridotta a scalini

Funziona così:

1) Con l'algoritmo di Gauss la matrice si mette in forma a scalini. Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \mapsto \frac{1}{2} R_2$

$R_3 \mapsto \frac{1}{3} R_3$

2) In ogni riga si cerca il pivot (se esiste). Poi se il pivot è $\lambda \neq 1$, moltiplicare la riga per $\frac{1}{\lambda}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Nelle colonne dei pivot gli elementi sotto (e nella riga a sinistra) sono già $=0$. Annullare gli elementi sopra della colonna con operazioni del tipo B').

[Questa operazione non cambia gli altri pivot perché sono o a sinistra o sotto!]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operazioni:

$R_1 - 3R_2$, poi

$R_2 - 2R_3$,

$R_1 + 2R_3$.

Esempi

1)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Per facilitare il calcolo, $R_2 \rightsquigarrow 2R_2$, $R_4 \rightsquigarrow 2R_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 10 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - 5R_1]{R_2 - 3R_1,\ R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 9 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 + 9R_2]{R_3 + 5R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - \frac{18}{8}R_3]{R_3 \rightsquigarrow \frac{1}{8}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{array}$$

2)
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 9x_4 = 3 \\ 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 9 & 8 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

R_2
$\downarrow$
$2R_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 6 & -12 & 2 & 18 & 16 \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \mapsto -\frac{1}{7}R_2$$

$$R_3 \mapsto -R_3$$

Scanned with CamScanner

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right] \overset{R_3 + R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 - 3R_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \mapsto \frac{1}{2} R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

colonne senza pivot

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = s \\ x_4 = t \end{array}\right\} \text{variabili liberi}$$

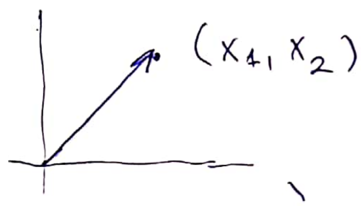
$$x_1 = 3 + 2s - 4t$$

$$x_3 = -1 + 3t$$

Spazi vettoriali

Motivazione: punti e vettori nel piano $\mathbb{R}^2$

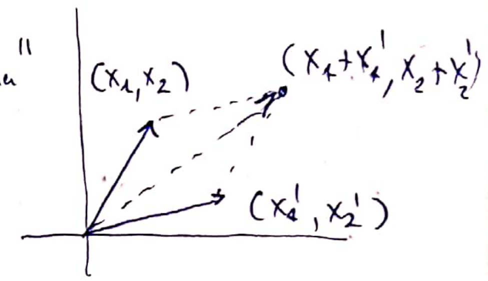
Un punto di $\mathbb{R}^2$ si può descrivere con due coordinate (x_1, x_2), ma anche con un vettore [i.e. una freccia] dall'origine $(0,0)$ a (x_1, x_2):



Si può fare la somma di due vettori. Sulle coordinate:

$$(x_1, x_2) + (x_1', x_2') := (x_1 + x_1', x_2 + x_2')$$

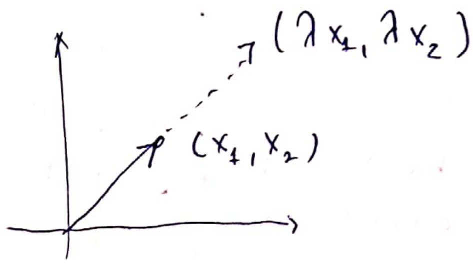
Geometricamente: "legge di parallelogramma"



Un vettore si può anche moltiplicare con uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

La lunghezza è moltiplicata da λ, ma l'angolo non cambia!



Generalizzazione

Si definisce $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ spazio n-dim. standard

o "spazio delle vettori colonna" con le operazioni

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{bmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Casi $n = 2, 3$ $\longleftrightarrow$ piano, spazio euclidiani.

Adesso facciamo un'assiomatizzazione.

Def Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:

* Somma: $v_1, v_2 \in V \rightsquigarrow v_1 + v_2 \in V$
* Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: $v \in V \rightsquigarrow \lambda \cdot v \in V$

Le operazioni devono soddisfare:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$
$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$
$$\exists! \, 0 \in V: \quad 0 + v = v + 0 = v \ \forall v$$
$$\forall v \ \exists! -v \in V: \quad v + (-v) = (-v) + v = 0.$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$$
$$\lambda (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$
$$(\lambda_1 \lambda_2) v = \lambda_1 (\lambda_2 v)$$
$$1 \cdot v = v$$

Esempio: $\mathbb{R}^n$ con le operazioni sopra è uno spazio vettoriale.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$$

Altri esempi:

1) Matrici $n \times m$. Notazione: $M_{n \times m}(\mathbb{R})$

Somma: se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$.

Matrice 0: $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$

Matrice opposta: $-A = [-a_{ij}]$. [Infatti, $[a_{ij} + (-a_{ij})] = 0$.]

[Si osserva: $M_{n \times 1} = \mathbb{R}^n$.]

2) Polinomi a coefficienti reali.

$\mathbb{R}[x] = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 : \ a_i \in \mathbb{R}, \ n \geq 0 \}$

Somma: $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0)$

[diciamo $m \geq n$] $\quad b_m x^m + \dots + (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$

Prodotto con λ: $\lambda (a_n x^n + \dots + a_0) = \lambda a_n x^n + \dots + \lambda a_0$.

3) Funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Somma: $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$

Prodotto con λ: $\quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$.

Con la definizione seguente si ottengono altri esempi.

Def. Sia V uno spazio vettoriale. Uno sottospazio $W \subset V$ è un sottoinsieme tale che $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$

$v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \quad \forall \lambda$.

Prop. Uno sottospazio $W \subset V$ è uno spazio vettoriale.

Dim. Dobbiamo verificare gli assiomi. Tutto è ovvio, con l'eccezione di: (*) $0 \in W$, (**) $v \in W \Rightarrow -v \in W$.

(*) Se $v \in V$, $0 \cdot v = 0$. Infatti,

$v = 1 \cdot v = (0+1) v = 0 \cdot v + 1 \cdot v = 0 \cdot v + v$

Ma allora se $v \in W$, $0 \cdot v = 0 \in W$.

(**) In modo simile, basta vedere $(-1) v = -v$.

Infatti, $0 = 0 \cdot v = (1 + (-1)) v = 1 \cdot v + (-1) v =$

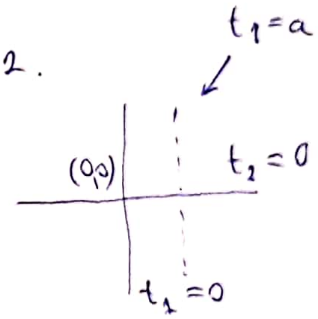
$= v + (-1) v$.

Esempi di sottospazi

1) $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ t_1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio.

In modo simile, $t_2 = 0$, $t_3 = 0, \dots, t_n = 0$ definiscono sottospazi.
Ma $t_1 = a$ non definisce un sottospazio se $a \neq 0$!
[Ad esempio, $\lambda a \neq a$ se $\lambda \neq 1$.]

Interpretazione geometrica: supponiamo $n = 2$.



$t_1 = 0$ definisce una retta attraverso $(0,0)$.
$t_2 = 0$ —"—

Ma $t_1 = a$ per $a \neq 0$ definisce una retta che non contiene $(0,0)$!

Per $n = 3$ $t_i = 0$ definisce un sottospazio [piano attraverso $(0,0)$]
ma se $a \neq 0$ $t_i = a$ —"— un piano che non contiene $(0,0,0)$!

Però abbiamo visto: un sottospazio $W \subset V$ contiene sempre l'elemento 0.

2) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a = 0 \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio. Ma $a = 1$ non definisce un sottospazio!

3) $\{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq d \} \subset \mathbb{R}[x]$ è un sottospazio $\forall d \geq 0$.
Ma $\{ f : \deg(f) = d \}$ no se $d \geq 1$!

4) $\{ f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = 0 \} \subset \mathbb{R}[x]$ è un sottospazio.
Anche $\{ f \in \mathbb{R}[x] : f(a) = 0 \}$ è un sottospazio $\forall a \in \mathbb{R}$!

Ma $\{ f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = a \}$ NO se $a \neq 0$.

5) $\mathbb{R}[x]$ è un sottospazio di $\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funzione continua} \}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t_1 + t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio.

Più generalmente, se $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fissi,

$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 t_1 + a_2 t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio

Ancora più generalmente, se $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ fissi,

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_m t_m = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^m \text{ sottospazio.}$$

Quindi: le <u>soluzioni</u> di un equazione lineare omogeneo a n variabili definiscono un <u>sottospazio</u> di $\mathbb{R}^m$.

Generalizzazione ultima:

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{array}{l} a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + \dots + a_{1m} t_m = 0 \\ a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + \dots + a_{2m} t_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} t_1 + a_{n2} t_2 + \dots + a_{nm} t_m = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^m \text{ sottospazio}$$

Quindi: le soluzioni di un <u>sistema</u> di equazioni lineari omogenei definisce un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.

<u>Vedremo</u>: ogni sottospazio di $\mathbb{R}^m$ è il sottospazio delle soluzione di un sistema lin. omogeneo.

<u>Combinazioni lineari</u>

<u>Def.</u> Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.
Una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$ è una somma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.
La combinazione lineare è detta <u>banale</u> se $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. In questo caso $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda v_m = 0$.

<u>Nota</u>: Una combinazione lineare può essere 0 ma non banale.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Allora $-2 v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$.

Def Siano $v_1, \dots, v_m \in V$ m vettori. Il sottospazio generato da $v_1, \dots, v_m$ è:

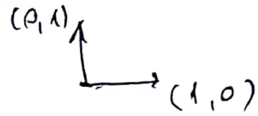
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m) := \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \}$$

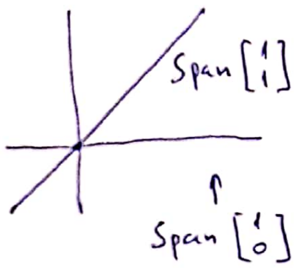
Quindi $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ è l'insieme delle combinazioni lineari.

Prop. $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) \subset V$ è un sottospazio.

Dim. Verificare $v, w \in \mathrm{Span} \Rightarrow v + w \in \mathrm{Span}$ e $\lambda v \in \mathrm{Span}$ $\forall \lambda$.

Esempi 1) $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$





$\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sono due rette.

Ma anche $\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ è una retta.

2) Sia $W := \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t_1 = 0 \right\}$

Allora $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Quindi un sottospazio può essere lo Span di vettori diversi!

Def I vettori $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sono linearmente indipendenti se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ vale solo per $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Altrimenti sono linearmente dipendenti.

Prop. $v_1, v_2, \dots, v_m$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ $\exists i$: v_i è combinazione lineare dei v_j per $j \neq i$.

Dim. $\Rightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_m = 0$.
non tutti $= 0$

Ad esempio $\lambda_i \neq 0$. Dividiamo per λ_i:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_i} v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_i} v_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} v_m.$$

$\Leftarrow$: Se $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_m v_m$

allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_m v_m = 0$.

Come si vede se m vettori $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono lin. indipendenti?

Siano

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

L'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ vale se e solo se $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ è soluzione del sistema

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

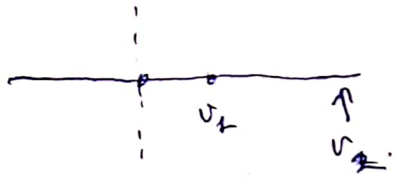
[si ricorda che il vettore 0 di $\mathbb{R}^n$ è $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$!]

Quindi $v_1, \dots, v_m$ sono lin. <u>indipendenti</u> $\Leftrightarrow$ $(*)$ ammette <u>solo</u> la soluzione <u>banale</u> $(0, \dots, 0)$.

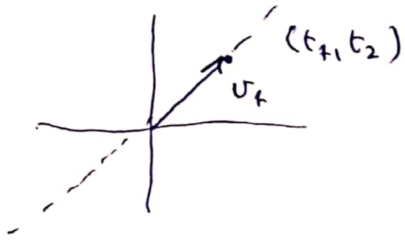
<u>Interpretazione geometrica</u> : $n = 2$

v_1, v_2 sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ v_1 o $v_2 = 0$ oppure $\exists \lambda : v_2 = \lambda v_1$

Ad esempio, se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora $v_2 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$, i.e. corrisponde a un punto della retta $x_2 = 0$:



In generale, se $v_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$, v_2 deve essere $\begin{bmatrix} \lambda t_1 \\ \lambda t_2 \end{bmatrix}$, quindi



v_1, v_2 sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ i punti corrispondenti sono sulla stessa retta attraverso $(0,0)$.

Per $n = 3$ si verifica: v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow$ i punti corrispondenti sono nello stesso <u>piano</u> attraverso $(0,0,0)$.

Scanned with CamScanner

Esempio: si decide se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono lin. indipendenti: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Dobbiamo cercare le soluzioni del sistema lineare omogeneo con la matrice di coefficienti associata: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Algoritmo di Gauss:

$$\underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots, una variabile libera $\Rightarrow \infty$ soluzioni!

Quindi il sistema ammette soluzioni non banali $\Rightarrow$ i vettori sono lin. dipendenti!

Però lo stesso argomento dà: i primi 3 vettori sono lin. indipendenti!

Osservazione: In questo esempio $\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

Come $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, basta vedere: $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$. Infatti, se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, applicando Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3-3b_1 \end{array}\right] \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3-b_1-b_2 \end{array}\right]$$

3 pivots nelle 3 colonne a sinistra $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_1 \\ 2x_1 &= b_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

ammette una (unica soluzione) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

i.e. il vettore generale v è contenuto in $\text{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

In generale:

<u>Prop.</u> Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono vettori tali che v_n è combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ $\Rightarrow$
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$$

<u>Dim.</u> Si ricorda che
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$
Se d'altra parte $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$,
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \underbrace{(\lambda_1 + \alpha_1) v_1 + (\lambda_2 + \alpha_2) v_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \alpha_{n-1}) v_{n-1}}_{\in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})}$$

<u>Corollario.</u> Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, si possono trovare $r \leq n$ vettori tra loro, diciamo $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ tali che $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r})$ e $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ sono linearmente <u>indipendenti</u>.

<u>Dim.</u> Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono indipendenti $\Rightarrow$ FINITO.
Se no, $\exists v_i$ che è combinazione lineare degli altri.
Cambiando notazione, si può supporre $v_i = v_n$.
Ma allora $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$. [Prop.]
Si ripeta la procedura con $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

<u>Esempi</u>: 1) Nell'esempio precedente v_4 era combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 [ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ l'era].
e v_1, v_2, v_3 erano già indipendenti.

2) Se $v_2 = 2v_1$, $v_3 = 3v_1$, la procedura precedente dà:
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1).$$
Quindi è possibile che alla fine rimane un solo vettore!

Def. Un sistema $v_1, \dots, v_n$ di vettori è una <u>base</u> di V se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono lin. <u>indipendenti</u> e $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$.

Oss. Dunque l'osservazione (Cor.) precedente dice: se $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$, si può scegliere una <u>base</u> di V fra i $v_1, \dots, v_n$.

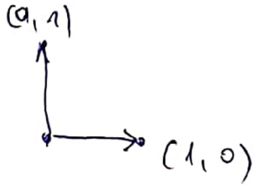
Esempi: 1) Base standard di $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ Si osserva:

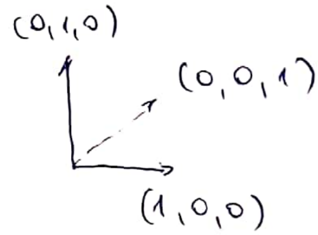
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$ Dunque

$\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

$n = 2$:



$n = 3$:



Ma questa non è l'unica base, ce ne sono tante! Ad esempio, per $n = 2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base: si guarda $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) Base standard di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq d} := \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(x) \leq d \}$:

$1, x, x^2, \dots, x^d$. Infatti,

$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_d \cdot x^d$,

è il sistema è indipendente (differenza di gradi!)

~~Def.~~ 4) $\mathbb{R}[x]$ non ammette di base finita. Infatti,
$\nexists\, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x] : \quad \text{Span}(f_1, \dots, f_n) = \mathbb{R}[x]$,
perché se $f \in \text{Span}(f_1, \dots, f_n)$, allora
$\deg(f) \leq \max(\deg(f_1), \dots, \deg(f_n))$.

[Comunque è vero: $\text{Span}(1, x, x^2, x^3, \dots) = \mathbb{R}[x]$ e ogni sottoinsieme finito di $1, x, x^2, \dots$ è lin. indipendente]

Prop. Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di V, $v \in V$ un vettore. Allora
$\exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

[i.e. ogni vettore si scrive in modo unico come comb. lineare degli elementi della base]

Dim. Come $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$, l'esistenza degli α_i è chiara.
Se adesso $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow$

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ perché i v_i sono lin. indipendenti.

Def. Gli α_i sono le coordinate di v rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$.

Esempi 1) Sappiamo già: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
sono una base di $\mathbb{R}^3$. Troviamo le coordinate di $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a questa base:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \mapsto \frac{1}{2} R_2]{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_3 &= -1 \end{aligned}$$

2) Verifichiamo: $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Si dimostra che
$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$
ammette un'unica soluzione $\forall\, b_1, b_2, b_3$ [in particolare, per $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ solo la soluzione banale $\Rightarrow$ sono lin. indipendenti] Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b_1\\0&0&1&b_2\\1&0&1&b_3\end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b_1\\0&0&1&b_2\\0&-2&-2&b_3-b_1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&b_1\\0&-2&-2&b_3-b_1\\0&0&1&b_2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\mapsto -\frac{1}{2}R_2]{R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b_3\\0&1&1&\frac{1}{2}(b_1-b_3)\\0&0&1&b_2\end{array}\right] \xrightarrow[R_2-R_3]{R_1-R_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&b_3-b_2\\0&1&0&\frac{1}{2}(b_1-b_3)-b_2\\0&0&1&b_2\end{array}\right]$$

$\Rightarrow \alpha_1 = b_3 - b_2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(b_1-b_3) - b_2, \quad \alpha_3 = b_2.$

Ad esempio, le coordinate di $\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$ rispetto a questa base sono $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0$.

3) In $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $1, x, x^2$ è una base.

Si verifica: anche $1, 1+x, (1+x)^2$ formano una base.

Indipendenza lineare: $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3\underbrace{(1+x)^2}_{1+2x+x^2} = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\cdot 1 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)x + \lambda_3 x^2 = 0.$

$1, x, x^2$ indipendenti $\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

$\mathrm{Span}(1, 1+x, (1+x)^2) = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$: Basta vedere che $1, x, x^2 \in \mathrm{Span}(1, 1+x, (1+x)^2)$ [poi fare sostituzioni in $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.] Ma

$$1 = 1\cdot 1 + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x)^2$$
$$x = (-1)\cdot 1 + 1\cdot(1+x) + 0\,(1+x)^2$$
$$x^2 = 1\cdot 1 + (-2)(1+x) + 1\,(1+x)^2$$

<u>Adesso</u>: siano $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Metodo per trovare un sistema di equazioni lineari omogenei tale che il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ associato sia $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$:

1) Si sceglie una base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$. Possiamo supporre: questa base è $v_1, \dots, v_r$ per $r \leq m$ [rinumerotazione]

2) Siano $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, v_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{bmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix}$

$v_1, \dots, v_r$ lin. indipendenti $\Leftrightarrow$ nella forma a scalini di A c'è un pivot in ogni colonna.

3) Sia adesso $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ qualsiasi.

$v \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_r) \Leftrightarrow v_1, v_2, v_3, \dots, v_r, v$ sono lin. <u>dipendenti</u> $\Leftrightarrow$ nella forma a scalini della matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & b_n \end{bmatrix}$ ci sono sempre r pivots nelle prime r colonne

$\Leftrightarrow$ l'ultima colonna non contiene di pivots.

Questo dà equazioni lineari per i $b_1, b_2, \dots, b_n$.

<u>Esempio</u>.

1) $n = 3$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono lin. indipendenti perché v_2 non è multiplo di v_1. Metodo sopra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

2 pivots nelle prime 2 colonne. La terza non contiene di pivot $\Leftrightarrow b_3 - b_1 = 0$.

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \{$ soluzioni di $x_3 - x_1 = 0\}$.

2) $n = 4$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

Qui v_1, v_2 sono lin. indipendenti, ma $v_3 = v_1 + v_2$
$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ lin. dipendenti. Quindi
v_1, v_2 è una base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

Metodo sopra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ 1 & 3 & b_3 \\ 0 & 4 & b_4 \end{bmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 4 & b_4 \end{bmatrix} \underset{R_4 - 4R_2}{\overset{R_3 - 2R_2}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$$

2 pivots nelle prime 2 colonne come atteso.
La terza colonna non contiene di pivots $\Leftrightarrow$

$$b_3 - 2b_2 + b_1 = 0$$
$$b_4 - 4b_2 + 4b_1 = 0$$

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \{$ soluzioni del sistema

$$x_3 - 2x_2 + x_1 = 0$$
$$x_4 - 4x_2 + 4x_1 = 0 \quad \}$$

Dimensione

La dimensione di uno spazio V sarà definita come il numero degli elementi di una base. Per questo bisogna sapere: questo numero è lo stesso per ogni base.

Prop. Sia V uno spazio vettoriale che ammette una base $e_1, e_2, \dots, e_n$. Se $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ e $\boxed{r > n} \Rightarrow$ $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono lin. dipendenti.

Dim. per $n = 2$. Prima osservazione: se la prop. vale per $r = 3$, vale per ogni $r > 2$. Infatti, se
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ è una comb. lin. non banale,

allora $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + \dots + 0 \cdot v_r = 0$
è una comb. non banale (perchè λ_1, λ_2 o λ_3 è $\neq 0$).

Quindi siano $n = 2$, $r = 3$, e_1, e_2 una base di V.
Come $V = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $v_1, v_2, v_3 \in \mathrm{Span}(e_1, e_2)$. Quindi

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ v_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \\ v_3 &= a_{31} e_1 + a_{32} e_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Dobbiamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, non tutti $= 0$ tali che
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Facciamo la sostituzione di $(*)$:

$$\lambda_1 (a_{11} e_1 + a_{12} e_2) + \lambda_2 (a_{21} e_1 + a_{22} e_2) + \lambda_3 (a_{31} e_1 + a_{32} e_2) = 0.$$
$$\Updownarrow$$
$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31}) e_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{22}) e_2 = 0$$

Ma e_1, e_2 sono lin. indipendenti, quindi

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} &= 0. \end{aligned} \qquad (+)$$

Questo è un sistema omogeneo di equazioni per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ con matrice di coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Se faccio l'algoritmo di Gauss, ottengo ≤ 2 pivots [ci sono solo due righe] $\Rightarrow$ ci sarà ≥ 1 colonna senza pivot $\Rightarrow$ il sistema avrà ∞ di soluzioni $\Rightarrow$ ci sarà una soluzione <u>non banale</u> $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ma se $(+)$ ha una soluzione non banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\Rightarrow$ anche $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ sarà una combinazione non banale $\Rightarrow$ SONO HAPPY.

La dimostrazione per n, r generale è la stessa: alla fine ottengo un sistema lineare di n equazioni in $r > n$ variabili $\Rightarrow$ c'è sempre una soluzione non banale.

Cor. 1. Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di V.
Se $v_1, \dots, v_n$ è un sistema lin. indipendente
$\Rightarrow$ anche $v_1, \dots, v_n$ è una base di V.

Dim. Dobbiamo dimostrare: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V$.
Sia $v \in V$. Dopo la proposizione, il sistema di $n+1$ vettori $v_1, \dots, v_n, v$ è lin. dipendente.
Quindi $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$ tali che
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v = 0$. $(*)$
Se $\lambda_{n+1} = 0$, allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ perché $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti
$\Rightarrow$ $\lightning$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$.
Quindi $\lambda_{n+1} \neq 0$. Ma allora $(*)$ mi dà

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) v_n \Rightarrow v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n).$$

Questo vale per ogni $v \in V \Rightarrow V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

Cor. 2. Se $v_1, \dots, v_r$ ed $e_1, \dots, e_n$ sono due basi di V
$\Rightarrow \boxed{r = n}$

Dim. Se $r > n$, $v_1, \dots, v_r$ è lin. dipendente dopo la prop. se $e_1, \dots, e_n$ è una base. Quindi $r \leq n$.
Se $r < n$ e $v_1, \dots, v_r$ è una base $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ è lin. dipendente $\lightning$. Dunque $r = n$.

Def. Se V ammette una base $e_1, \dots, e_n$,
n è la dimensione di V. [ben definita secondo Cor. 2.]

Cor. 3. Se la dimensione di V è n [NOTAZIONE: $\dim V = n$] e $v_1, \dots, v_m$ sono vettori lin. indipendenti con $\boxed{m < n} \Rightarrow \exists\, w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n$:
$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$ sono una base di V.

Dim. $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$ non può essere V, perchè se $\text{Span}(v_1, \dots, v_m) = V \Rightarrow v_1, \dots, v_m$ è una base, ma $m < n$ e $\dim V = n$ ↯

Quindi $\text{Span}(v_1, \dots, v_m) \neq V \Rightarrow \exists\, w_{m+1} \in V$:
$w_{m+1} \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$. Ma allora
$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}$ sono lin. indipendenti: Se
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} w_{m+1} = 0$,
$\lambda_{m+1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ ~~non può essere 0~~ come nella dim. del Cor. 1.
~~Ma allora~~ Se $\lambda_{m+1} \neq 0 \Rightarrow v_{m+1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}}\right) v_1 + \dots + \left(\frac{-\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right) v_m \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$ ↯

Per ricapitolare: Se $\dim V = n$ e $v_1, \dots, v_r \in V$

$\boxed{r > n} \Rightarrow v_1, \dots, v_r$ sono lin. dipendenti.

$\boxed{r = n}$ e $v_1, \dots, v_n$ lin. indipendente $\Rightarrow$ è una base.

$\boxed{r < n}$ e $v_1, \dots, v_r$ lin. indipendente $\Rightarrow$ si completa in una base di V.

Esempio: a) Decidiamo se
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ se sono indipendenti, formano una base.

Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pivots $\Rightarrow$ vettori dipendenti. Però i pivots sono nelle colonne 1, 3 $\Rightarrow$ $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ indipendenti!

b) Completiamo questo sistema indipendente in una base. $\dim \mathrm{Span}(v_1, v_2) = 2$, $\dim \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ basta trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ non contenuto in $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

Come trovarlo? Idea: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è la base standard.

Se $e_1, e_2, e_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \Rightarrow \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3) \subset$
$\subset \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

Ma $\mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ impossibile!

Quindi (almeno) uno di $e_1, e_2, e_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

Cerchiamo quello.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ e_3 buono!

Ma per esempio e_1 non è buono!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Solo due pivots!

Questa idea funziona in generale!

Prop. [$\dim V < \infty$] Sia $W \subset V$ un sottospazio. Allora
1) $\dim W \leq \dim V$.
2) Se $W \neq V$, allora $\dim W < \dim V$.

Dim. 1) Sia $w_1, \dots, w_r$ una base di W. Se $r > \dim V$
[Prop. p. 18] $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ dipendenti in V $\Rightarrow$ anche in W.
2) Se $r = \dim V \Rightarrow w_1, \dots, w_r$ base anche di V
$\Rightarrow \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r) = V \Rightarrow V = W$.

La prop. è molto utile per calcolare dimensioni di sottospazi.

Esempio: Sia $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}$ matrici simmetrici

$\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ [base standard!]

$V \neq M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim V \leq 3$. Ma

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono indipendenti [facile] $\Rightarrow \dim V = 3$.

Esempio: a) $V = \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 3, \ f(1) = 0 \}$ sottospazio di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$V \subsetneq \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \Rightarrow \dim V < \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = 4$
[$1, x, x^2, x^3$ base]

Ma $x-1, x^2-1, x^3-1 \in V$ e sono indipendenti [facile] $\Rightarrow \dim V \geq 3 \Rightarrow \dim V = 3$.

b) $W = \{ f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 3, \ f(1) = f(2) = 0 \}$

$W \subsetneq V$ sottospazio $\Rightarrow \dim W \leq 2$.

Ma $(x-1)(x-2), \ (x-1)^2(x-2) \in W$

e sono indipendenti [ovvio] $\Rightarrow \dim W = 2$.

$(x-1)(x-2), \ (x-1)^2(x-2)$ è una base di W

Si completa in una base di V:

$x-1, \ (x-1)(x-2), \ (x-1)^2(x-2)$

E di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$: $1, \ x-1, \ (x-1)(x-2), \ (x-1)^2(x-2)$.

Esempio:

Sia $V \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici dove la somma di ogni ~~rango~~ riga è 0. [V è infatti un sottospazio.] Calcoliamo dim V.

Si ricorda: $\dim M_{3\times 3}(\mathbb{R}) = 9$. Quindi $\dim V < 9$.

Si verifica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

lin. indipendenti [ciascuna ha un elemento $\neq 0$ dove gli altri sono $=0$]

Quindi $\dim V \geq 6$. Dimostriamo che infatti $\dim V = 6$.

Siano $V_1 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima riga $=0\}$

$V_2 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima e seconda riga $=0\}$

Allora $M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq V \implies$

$9 = \dim M_{3\times 3}(\mathbb{R}) > \dim V_1 > \dim V_2 > \dim V \geq 6$

$\implies \dim V = 6.$

Intersezioni di sottospazi: se $W_1, W_2 \subset V$ sottospazi $\implies W_1 \cap W_2$ sottospazio. [infatti, $w, w' \in W_1 \cap W_2 \implies w + w' \in W_1 \cap W_2$, $\lambda w \in W_1 \cap W_2$.]

Anche $W_1 \cap \ldots \cap W_r \subset V$ è un sottospazio se $W_1, \ldots, W_r$ lo sono.

Esempio. Sia $W_i \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio delle soluzioni dell'equazione omogeneo $E_i: a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0$ $\quad i = 1, \ldots, r$.

Allora $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_r$ è il sottospazio delle soluzioni comuni di $E_1, E_2, \ldots, E_r$.

La formula di Grassmann

Def. Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi.

$$V_1 + V_2 := \{ v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$$ la somma di V_1, V_2

Oss. $V_1 + V_2 \subset V$ è un sottospazio.

Dim. Se $v, w \in V_1 + V_2$,

$$\left.\begin{array}{ll} v = v_1 + v_2 & (v_i \in V_i) \\ w = w_1 + w_2 & (w_i \in V_i) \end{array}\right\} \Rightarrow v + w = \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(v_2 + w_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v = \lambda(v_1 + v_2) = \underbrace{\lambda v_1}_{\in V_1} + \underbrace{\lambda v_2}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

Altre notazioni: $\langle V_1, V_2 \rangle$, $\mathrm{Span}(V_1, V_2)$. Infatti:

Prop. Se $v^1, v^2, \dots, v^n \in V_1 + V_2 \Rightarrow \mathrm{Span}(v^1, \dots, v^n) \subset V_1 + V_2$.

Dim. $V_1 + V_2$ è un sottospazio che contiene $v^1, \dots, v^n \Rightarrow$ contiene le loro combinazioni lineari.

Esempi. 1) $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sottospazi:

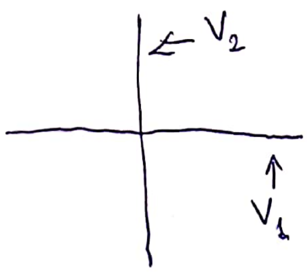
$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

2) $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, ma anche $V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

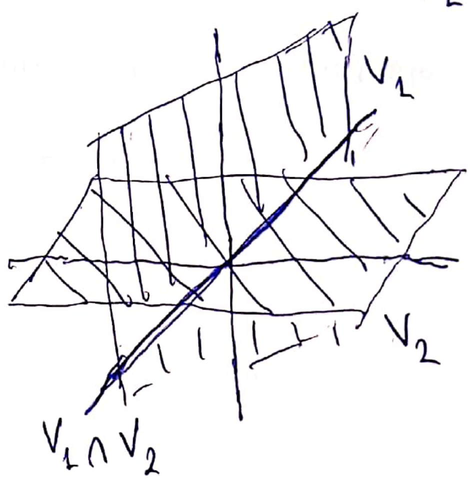
Geometricamente:

1)



$V_1 + V_2$ **non** è una **riunione**!!

2)

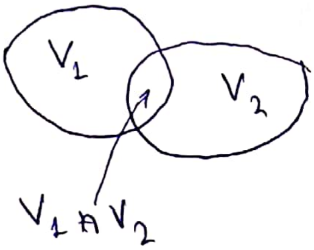


V_1, V_2 due piani in $\mathbb{R}^3$, $V_1 \cap V_2$ una retta, $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$

Teorema. Se $\dim V < \infty$, $V_1, V_2 \subset V$ sottospazi,
$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$
[Formula di Grassmann.]

Negli esempi precedenti: 1) $2 = 1+1-0$, 2) $3 = 2+2-1$.

Dim.



Sia $e_1, \dots, e_r$ una base di $V_1 \cap V_2$. Si completa in una base
$e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ di V_1
$e_1, \dots, e_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ di V_2.

Quindi $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, $\dim V_1 \cap V_2 = r$.

Verifichiamo: $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n, w_{r+1}, \dots, w_m$ è una base di V_1+V_2. Se vero $\Rightarrow \dim(V_1+V_2) = n+m-r$

Indipendenza lineare: Sia
$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n + \nu_1 w_{r+1} + \dots + \nu_{m-r} w_m = 0$$
Tutti i coefficienti $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$. Dobbiamo vedere: tutti $=0$.
$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n}_{\in V_1} = \underbrace{-\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m}_{\in V_2}.$$

Quindi $-\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow$
come $e_1, \dots, e_r$ è una base di $V_1 \cap V_2$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_r$:
$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = -\nu_1 w_{r+1} - \dots - \nu_{m-r} w_m.$$
Quindi
$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \nu_1 w_{r+1} + \dots + \nu_{m-r} w_m = 0.$$
Ma $e_1, \dots, e_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ base di $V_2 \Rightarrow$ lin. indipendenti $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \boxed{\nu_1 = \dots = \nu_{m-r} = 0.}$

Ma allora
$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \dots + \mu_{n-r} v_n = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_{n-r} = 0}$$
perché $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ base di V_1. OK!

$\text{Span}(e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}, w_1, \dots, w_{m-r}) = V_1 + V_2$:

Se $v \in V_1 + V_2$, $v = v^1 + v^2$: $v^1 \in V_1$, $v^2 \in V_2$.

Ma allora $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$:

$v^1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} v_1 + \dots + \alpha_n v_{n-r}$

$v^2 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_r e_r + \beta_{r+1} w_1 + \dots + \beta_m w_{m-r}$

perchè $e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-r}$ base di V_1

$e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_{m-r}$ base di V_2

$\Rightarrow v_1 = v^1 + v^2 = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) e_r +$

$+ \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n + \beta_{r+1} w_1 + \dots + \beta_m w_m$ ✓

Esempi (vecchi esercizi di compito)

1) In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W = \text{Span}\left(w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $\dim(V \cap W)$, $\dim(V + W)$.

$\dim W = 2$ perchè ovviamente $w_1 \neq \lambda w_2$.

Calcoliamo $\dim V$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}$$

x_3, x_4 variabili liberi $\Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -x_3 - 3x_4 \\ x_1 = -2(-x_3 - 3x_4) - x_3 \\ \quad = x_3 + 6x_4 \end{array}$

Sol. generale: $\begin{bmatrix} x_3 + 6x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_3+6x_4 \\ -x_3-3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w_2}$$

Quindi $\dim V = 2$ e v_1, v_2 è una base.

Cerchiamo $\dim(V+W)$:

$V + W = \mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$

Troviamo una base con Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{R_3-R_1}{\overset{R_2+R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3+2R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_4-3R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times\tfrac{1}{3} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ le prime 3 colonne sono indipendenti, ma v_1, v_2, w_1, w_2 dipendenti $\Rightarrow \dim(V+W) = 3$.

Grassmann: $\dim V \cap W = \underbrace{\dim V}_{2} + \underbrace{\dim W}_{2} - \underbrace{\dim(V+W)}_{3} = 1$.

Ma possiamo anche calcolare $\dim(V\cap W)$ direttamente.

$$V\cap W = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ che soddisfano } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right.$$

$$\left.\begin{aligned} (2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 2(-2\lambda_2) + (\lambda_1 - 2\lambda_2) &= 0 \\ -(2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-2\lambda_2) + 3\lambda_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \dim(V\cap W) = 1$

perché $V \cap W = \{\lambda(w_1 + w_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2) Siano

$$V = \text{Span}\left(\overset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}} \right), \quad W = \text{Span}\left(\overset{w_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix}} \right)$$

Trovare basi di $V+W$, $V \cap W$.

Per $V+W$:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&2\\1&1&1&0\\1&-1&0&2\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-1&1\\0&0&0&-1\\0&-2&-1&1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ $\dim(V+W) = 3$, base: v_1, v_2, w_2.

Grassmann: $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 2+2-3 \boxed{= 1}$.

Quindi ogni vettore di $V \cap W$ è una base se $\neq 0$.

$0 \neq w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 \in V \cap W$ ed è una base.

Come calcolare $V \cap W$ direttamente? Trovare equazioni per $V, W, V \cap W$.

Per V:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\1&-1&x_2\\1&1&x_3\\1&-1&x_4\end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&-2&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&-2&x_4-x_1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&-2&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&0&x_4-x_2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_3 - x_1 = 0, \quad x_4 - x_2 = 0 \qquad (*)$

Per W:

$$\begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&2&x_2\\1&0&x_3\\0&2&x_4\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&2&x_2\\0&-1&x_3-x_1\\0&2&x_4\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&1&x_1\\0&2&x_2\\0&0&x_3-x_1+\frac{x_2}{2}\\0&0&x_4-x_2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_3 - x_1 + \frac{x_2}{2} = 0, \quad x_4 - x_2 = 0 \qquad (**)$

Per $V \cap W$: $(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow$ $x_3 = x_1, \ x_4 = x_2$

$x_2 = 0$

$\Rightarrow x_3 = x_1, \quad x_2 = x_4 = 0.$

Quindi $V \cap W = \{\lambda w_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ come l'abbiamo visto.

Metodo con Grassmann più veloce!!

Applicazioni lineari

Def. Siano V_1, V_2 spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Un' applicazione lineare (o mappa lineare) è una mappa $\varphi: V_1 \to V_2$ soddisfando

a) $\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_1$

b) $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in V_1.$

Esempi

1) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ fisso.

Infatti, a) $\lambda_1(a_1+b_1) + \dots + \lambda_n(a_n+b_n) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

b) $\lambda(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1(\lambda a_1) + \dots + \lambda_n(\lambda a_n).$

Però non sono lineari:

i) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + c$ se $c \neq 0$,

ii) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 a_1^2 + \dots + \lambda_n a_n^2$

2) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^2$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \\ \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n \end{pmatrix}$$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ fissi.

Questo esempio si generalizza da 2 a m: mappe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

3) $V_1 = \mathbb{R}^{n}$, $V_2 = \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$ Esempi simili $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}$, $\mathbb{R}^{n-3}$ ecc.

4) $V_1 = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ $\quad V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$ $\quad \varphi(f) := f'$.

Infatti, $(f_1+f_2)' = f_1' + f_2'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$

Ma si vede anche su $(a_d x^d + \dots + a_0)' = d a_d x^{d-1} + (d-1)a_{d-1}x^{d-2} + \dots + a_1.$

5) $V_1 = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}, \int_0^1 f < \infty \}$

$V_2 = \mathbb{R} \qquad \varphi(f) := \int_0^1 f.$

Infatti, $\int_0^1 (f_1 + f_2) = \int_0^1 f_1 + \int_0^1 f_2$, $\int_0^1 (\lambda f) = \lambda \int_0^1 f$.

Due sotto-spazi importanti: se $\varphi : V_1 \to V_2$ mappa lineare

$\operatorname{Ker}(\varphi) := \{ v \in V_1 : \varphi(v) = 0 \}$ nucleo di φ

$\operatorname{Im}(\varphi) := \{ w \in V_2 : \exists\, v \in V_1 \text{ tale che } w = \varphi(v) \}$ immagine di φ

Prop. $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset V_1$, $\operatorname{Im}(\varphi) \subset V_2$ sono dei sottospazi.

Dim. Ker: $*$ se $\varphi(v_1) = 0$, $\varphi(v_2) = 0 \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0$

$**$ se $\varphi(v) = 0$, $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = 0$.

Im: $*$ se $w_1 = \varphi(v_1)$, $w_2 = \varphi(v_2)$,

$w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$.

$**$ se $w = \varphi(v)$, $\lambda w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im}(\varphi)$.

Teorema. Se $\dim V_1 < \infty$, $\varphi : V_1 \to V_2$ lin. $\boxed{\dim \operatorname{Ker}(\varphi) + \dim \operatorname{Im}(\varphi) = \dim V_1.}$

Dim. Sia $v_1, \dots, v_r$ una base di $\operatorname{Ker}(\varphi)$ [quindi $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = r$]

$w_1, \dots, w_s$ una base di $\operatorname{Im}(\varphi)$. [quindi $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = s$]

Siano $\underbrace{\bar v_1, \dots, \bar v_s}_{\in V_1}$ tali che $\varphi(\bar v_1) = w_1, \dots, \varphi(\bar v_s) = w_s$.

Dimostriamo che $v_1, \dots, v_r, \bar v_1, \dots, \bar v_s$ è una base di V_1.

[$\Rightarrow \dim V_1 = r + s$, ed il teorema è vero.]

Indipendenza: Supponiamo

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} \bar v_1 + \dots + \lambda_{r+s} \bar v_s = 0$. Applichiamo φ:

$0 + \varphi(\lambda_{r+1} \bar v_1 + \dots + \lambda_{r+s} \bar v_s) = 0 \qquad [\varphi(v_i) = 0 \ \forall i]$

$\lambda_{r+1} \varphi(\bar v_1) + \dots + \lambda_{r+s} \varphi(\bar v_s) = 0$

$\lambda_{r+1} w_1 + \dots + \lambda_{r+s} w_s = 0$

$\Rightarrow \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{r+s} = 0$ perché $w_1, \dots, w_s$ base

Quindi $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ perché $v_1, \ldots, v_r$ base di $Ker(\varphi)$.

In fine, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0$ ✓

$Span(v_1, \ldots, v_r, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s) = V_1$: sia $v \in V_1$.

$\varphi(v) \in Im(\varphi) \Rightarrow \exists \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s$: $\varphi(v) = \bar{\lambda}_1 w_1 + \ldots + \bar{\lambda}_s w_s$.

Ma allora $\varphi(v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s) =$

$$= \varphi(v) - \bar{\lambda}_1 \underbrace{\varphi(\bar{v}_1)}_{w_1} - \ldots - \bar{\lambda}_s \underbrace{\varphi(\bar{v}_s)}_{w_s} = 0.$$

Quindi $v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s \in Ker(\varphi)$.

Ma allora $v - \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 - \ldots - \bar{\lambda}_s \bar{v}_s = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$

$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r$: perché $v_1, \ldots, v_r$ base di $Ker(\varphi)$.

In somma, $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \bar{\lambda}_1 \bar{v}_1 + \ldots + \bar{\lambda}_s \bar{v}_s$ ✓

Esempi

1) $V = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \right)$ [soluzioni dell'equazione omogenea $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$] Qui $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ non tutti $= 0$.

Osservazione: $V = Ker(\varphi)$, dove $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n.$$

Se $a_1, \ldots, a_n$ non tutti $= 0 \Rightarrow Im(\varphi) \neq 0 \Rightarrow Im(\varphi) = \mathbb{R}$.

[perché $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}$ è un sottospazio ed i soli sottospazi sono $0, \mathbb{R}$]

$\Rightarrow \dim Im(\varphi) = 1 \Rightarrow \dim Ker(\varphi) = \dim V = \boxed{n-1}$

2) $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$: $f \mapsto f'$.

$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq d} = d+1$ [$1, x, \ldots, x^d$ base]

$Ker(\varphi) = \{ f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} : f' = 0 \} = \{ f = \text{costante} \}$

$\Rightarrow \dim Ker(\varphi) = 1$.

Allora $\dim Im(\varphi) = d+1-1 = d \Rightarrow Im(\varphi) = \mathbb{R}[x]_{\leq d-1}$.

Infatti, $\left(\frac{a_{d-1}}{d} x^d + \frac{a_{d-2}}{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0 x \right)' = a_{d-1} x^{d-1} + a_{d-2} x^{d-2} + \ldots + a_0$.

3) Se $\varphi: V_1 \to V_2$, $e_1, \dots, e_n$ base di V_1, φ è completamente determinata da $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.
Infatti, se $v \in V_1$ generale, $\exists!\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:
$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \Rightarrow \varphi(v) = a_1 \varphi(e_1) + \dots + a_n \varphi(e_n)$.
Viceversa, se $w_1, \dots, w_n \in V_2$ qualsiasi, $\varphi(e_1) := w_1, \dots$
$\dots, \varphi(e_n) = w_n$ definisce un'unica appl. lineare.
Esempio concreto: $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ base standard. Allora $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) := 0$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
invia $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ generale su $\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Span}(e_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \end{bmatrix} : a_2 \in \mathbb{R} \right\}$
$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Span}(e_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\}$

In questo caso $\underline{\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = 0}$, $\mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$.
Ma se $\psi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) := 0$, $\psi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, allora
$\psi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \end{bmatrix} : a_1 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \underline{\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\psi)} = \mathrm{Span}(e_1)$!
In entrambi i casi $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi) = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

4) Nuova soluzione di un'esercizio precedente.

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0 \end{array} \right\}$$

$\dim V = ?$

Sia $\varphi: M_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & & a_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix}$

φ è lineare con $\mathrm{Ker}(\varphi) = V$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \dim V = \dim M_{3\times3}(\mathbb{R}) - \dim \mathbb{R}^3$
$= 9 - 3 = 6.$

[Infatti, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\right)$.]

Problema: Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'appl. lineare. Conoscendo i valori di φ sulla base standard, come calcolare $\varphi(v)$ per $v \in \mathbb{R}^n$ generale?

Caso $n=m=2$ Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la base standard

Se $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare, $\exists\, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ generale, allora come φ è lineare,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = b_1 \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + b_2 \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 \end{bmatrix}$$

Def. Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$, loro prodotto è il vettore in $\mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{v} := \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \dots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} b_n \\ \vdots \\ a_{m1} b_1 + a_{m2} b_2 + \dots + a_{mn} b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Oss. Nel caso precedente $\varphi(v) = Av$, dove $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

In generale, sia $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la base standard

Notiamo per $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \varphi\left(\begin{bmatrix} \cancel{a_{1n}}\ 0 \\ \cancel{a_{2n}}\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

e sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Prop. Se $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è un vettore generale,

allora $\varphi(v) = A \cdot v$.

Dim. Stesso argomento: scrivere $v = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n$

$\Rightarrow \varphi(v) = b_1 \varphi(e_1) + \ldots + b_n \varphi(e_n)$

Ma $\varphi(e_i) =$ colonna Nº i di A !!

Esempio. 1) Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z$.

Trovare $\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Naturalmente è $1 \cdot 1 + 2(-1) + 3 \cdot 1 = 2$

Ma anche:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2.$$

2) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

E infatti, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}$.

Conclusione: Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare,

$e_1, \ldots, e_n$ la base standard

* $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ determina φ di maniera unica

* $\forall v$ possiamo calcolare

$\varphi(v) = A \cdot v$,

dove $A \in M_{\cancel{n \times m}\ m \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice definita sopra.

Generalizzazione. Sia $\varphi: V \to W$ lineare.

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V $[\dim V = n]$

$\mathcal{B}' = \{e_1', \dots, e_m'\}$ — " — W $[\dim W = m]$

Scriviamo
$$\varphi(e_1) = a_{11} e_1' + a_{21} e_2' + \dots + a_{m1} e_m'$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} e_1' + a_{22} e_2' + \dots + a_{m2} e_m'$$
$$\vdots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n} e_1' + a_{2n} e_2' + \dots + a_{mn} e_m'$$

Def. La matrice di φ rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Quindi $A = \left[\varphi(e_1) \,\middle|\, \varphi(e_2) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \varphi(e_n) \right]$ colonne: coordinate di $\varphi(e_i)$ rispetto a $e_1', \dots, e_m'$.

Teorema. Se $v = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ è un vettore di V consideriamo il vettore colonna in $\mathbb{R}^n$: $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Allora le coordinate di $\varphi(v)$ rispetto a $\mathcal{B}' = \{e_1', \dots, e_m'\}$ sono date dal vettore colonna
$$A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Dim. Come sopra per $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$!

Importante: la matrice A è sempre definita con due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$!

Però nel caso $V = W$, possiamo scegliere $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. In questo caso si parla della matrice di $\varphi: V \to V$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Esempi:

1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x + 2y.$

Matrice di φ rispetto alle base standard:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

Adesso consideriamo la base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ (e 1 di $\mathbb{R}$)

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3 \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ in queste basi.}$$

2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice rispetto alla base $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se scriviamo le coordinate non rispetto alla base standard, ma rispetto a questa base, φ diventa molto semplice: $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \end{bmatrix}$

Torneremo a questa situazione quando studiamo gli autovettori.

3) $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad \varphi(f) = f'$.

Base standard: $1, x, x^2$. Matrice di φ rispetto alla base standard:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \varphi(x) &= 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \varphi(x^2) &= 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In realtà, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. In $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ prendiamo come base $1, x, x^2$, ma in $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ $\quad 2, x+1$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 = 0\cdot 2 + 0\cdot (x+1) \\ \varphi(x) &= 1 = \tfrac{1}{2}\cdot 2 + 0\,(x+1) \\ \varphi(x^2) &= 2x = (-1)2 + 2\,(x+1) \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4) $\dim V = n$, $\varphi : V \to V$ $\quad \varphi(v) = v \quad \forall v$.

Matrice di φ rispetto ad <u>ogni</u> base $v_1, \dots, v_n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$ matrice identità. [Perchè $\varphi(v_i) = v_i \ \forall i$].

Fissiamo $\lambda \in \mathbb{R}$, e sia $\varphi_\lambda : V \to V$ $\quad \varphi_\lambda(v) := \lambda v$.

Matrice di φ_λ rispetto ad <u>ogni base</u>:

$$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

Ancora più generalmente, se $\exists$ base $e_1, \dots, e_n$ tale che $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$ per $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, allora la matrice rispetto a questa base è

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

matrice <u>diagonale</u>.

Vedremo: tale base non esiste sempre, ma in buoni casi <u>sì</u>.

Problema: Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare, di matrice A [rispetto alle base standard]. Come trovare $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ utilizzando A?

$\mathrm{Ker}(\varphi)$: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$v \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff Av = 0 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ soluzione di $\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix}$

Quindi: per trovare $\mathrm{Ker}(\varphi)$, bisogna risolvere il sistema omogeneo [per esempio con Gauss].

$\mathrm{Im}(\varphi)$: Sappiamo che se $e_1, \dots, e_n$ è la base standard,

$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \varphi(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

Ma $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Span}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

[Infatti, se $w \in \mathrm{Im}(\varphi) \overset{def}{\Rightarrow} \exists v \in \mathbb{R}^n : w = \varphi(v)$

Ma $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \Rightarrow w = \varphi(v) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n)$]

Quindi $\mathrm{Im}(\varphi)$ è lo span delle colonne di A in $\mathbb{R}^m$.

Per trovare $\dim \mathrm{Im}(\varphi)$, bisogna determinare la dimensione di questo span.

Def. Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, il rango di A e'

$$\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right)$$

Conclusione: Se φ ha matrice A, $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{rg}(A)$.

Metodo per calcolare $rg(A)$: bisogna estrarre una base di Span (colonne).

Facciamo l'algoritmo di Gauss per A.

Abbiamo visto: numero delle colonne lin. indipendenti = numero dei pivots della forma a scalini. Quindi:

Prop. $rg(A)$ = numero dei pivots della forma a scalini.

[Ricordiamo l'argomento: nella forma a scalini le colonne che contengono un pivot sono lin. indipendenti. Aggiungendo una colonna senza pivot abbiamo colonne dipendenti perchè il sistema lin. associato ha una soluzione non banale.]

Esempio: Sia $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ di matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Troviamo basi di $Ker(\varphi)$, $Im(\varphi)$.

Gauss: La forma ~~ridotta~~ è a scalini $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pivots nelle prime due colonne $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ base di $Im(\varphi)$ [rango = 2]

$Ker\,\varphi \leftrightarrow$ soluzioni di
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$
$$-x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 = -3x_3 - 4x_4 \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} x_4$$ sol. generale del sistema

$\Rightarrow$ v_1, v_2 base di $Ker(\varphi)$.

Da notare: $Ker(\varphi) \subset \mathbb{R}^4$, $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$!

$\dim Ker(\varphi) + \dim Im(\varphi) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

come il teorema lo dice.

Def. Un'applicazione lineare $\varphi: V_1 \to V_2$ è un isomorfismo se $\mathrm{Im}(\varphi) = V_2$ e per $v_1, v_1' \in V_1$ $\varphi(v_1) = \varphi(v_1') \iff v_1 = v_1'$. Notazione: $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$.

Dunque: φ è un isomorfismo $\iff \forall v_2 \in V_2 \ \exists! \, v_1 \in V_1 : \varphi(v_1) = v_2$.

Osservazione: φ è un isomorfismo $\iff \mathrm{Im}(\varphi) = V_2$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$,
[perché $\varphi(v_1) = \varphi(v_1') \iff v_1 - v_1' \in \mathrm{Ker}(\varphi)$]

Esempio. $V_1 = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $V_2 = \mathbb{R}^4$ $\quad \varphi: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$ è un isomorfismo.

Ma anche $$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ definisce un isomorfismo $\psi: \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Qui $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ sono l'identità.

In generale: Se $\varphi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ è un isomorfismo,
Si può definire un isomorfismo $\varphi^{-1}: V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$
via $\varphi^{-1}(v_2) :=$ l'unico $v_1 \in V_1$ tale che $\varphi(v_1) = v_2$.

[Nell'esempio precedente $\psi = \varphi^{-1}$.]

Infatti, φ^{-1} è lineare perché se $v_2, v_2' \in V_2$, $v_1 := \varphi^{-1}(v_2)$, $v_1' := \varphi^{-1}(v_2')$

$\Rightarrow \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1') = v_2 + v_2'$

$\Rightarrow v_1 + v_1' = \varphi^{-1}(v_2 + v_2')$ e d'altra parte $v_1 + v_1' = \varphi^{-1}(v_2) + \varphi^{-1}(v_2')$.

Inoltre $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1) = \lambda v_2 \Rightarrow \lambda v_1 = \varphi^{-1}(\lambda v_2)$, ma
$\lambda v_1 = \lambda \varphi^{-1}(v_2)$.

φ^{-1} è l'applicazione inversa di φ.

Osservazione: sia V uno spazio vettoriale, $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V.

Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$.

Allora $v \longmapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ definisce un isomorfismo $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.
[$\mathcal{B} \mapsto$ base standard di $\mathbb{R}^n$.]

Infatti, φ è lineare, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Da notare: φ dipende dalla base $\mathcal{B}$! Un'altra base definisce un altro isomorfismo.

Esempi. 1) Nell'esempio precedente φ è definita dalla base standard $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) La base standard $1, x, x^2, \dots, x^n$ definisce un isomorfismo $\mathbb{R}[x]_{\leq n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1}$.

Adesso sia $\varphi : V_1 \to V_2$ una qualsiasi applicazione lineare, dove $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$.

Siano $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V_1

$\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ base di V_2

Sia A la matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Si ricorda: colonna N° j di A = coordinate di $\varphi(e_j)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

D'altra parte, $\mathcal{B}$ definisce $\psi : V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}'$ definisce $\psi' : V_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$

Allora $\psi' \circ \varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare tale che la matrice rispetto alle basi standard è A! [perché $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \leftrightarrow$ basi standard]

$$\begin{tikzcd} e_1,\dots,e_n \arrow[d, leftrightarrow] & V_1 \arrow[r, "\varphi"] & V_2 \arrow[d, "\psi'"] & e'_1,\dots,e'_m \arrow[d, leftrightarrow] \\ \text{base standard} & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\psi^{-1}"] \arrow[r, "v \mapsto Av"'] & \mathbb{R}^m & \text{base standard} \end{tikzcd}$$

<u>Lemma</u>. 1) ψ^{-1} induce un isomorfismo $\mathrm{Ker}(v \mapsto Av) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\varphi)$

2) ψ' — " — ~~Ker~~ $\mathrm{Im}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(v \mapsto Av)$

<u>Dim</u>. 1) Se $v \in \mathbb{R}^n$, $Av = 0 \iff \psi' \circ \varphi \circ \psi^{-1}(v) = 0 \iff$
$\varphi \circ \psi^{-1}(v) = 0$ [perché ψ' isom.]

2) Simile.

<u>Cor</u>. 1) $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$ è la dimensione dello sottospazio delle soluzioni di $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$ in $\mathbb{R}^n$.

2) $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ = rango di A.

[Finora l'abbiamo visto solo per $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^m$!!]

<u>Esercizio</u>. Sia $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$,

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_3 + a_2 + a_1)x^3 + a_0x^2 + 2a_1$$

Trovare basi di $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Matrice rispetto alla base standard $1, x, x^2, x^3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\varphi))$ = rango (matrice) = 3 e $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\} = \{x^2, 2 + x^3, x^3\}$ base di $\mathrm{Im}(\varphi)$ [Base più semplice: $1, x^2, x^3$]

$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 4 - 3 = 1$.

Ogni vettore $\neq 0$ in $\mathrm{Ker}(\varphi)$ una base, ad esempio $x^3 - x^2$.

Scanned with CamScanner

Problema: Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ applicazioni lineari.
Allora $\psi \circ \varphi : V_1 \to V_3$ è lineare.
Siano $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V_1
$\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ base di V_2
$\mathcal{B}_3 = \{g_1, \dots, g_r\}$ base di V_3.
Siano B = matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$
A = matrice di ψ rispetto a $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$.
Qual è la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$?

Caso $\boxed{n = m = r = 2}$: allora A, B e la matrice di $\psi \circ \varphi$ sono in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Dobbiamo trovare le coordinate di $(\psi\circ\varphi)(e_1), (\psi\circ\varphi)(e_2)$ rispetto a $\mathcal{B}_3 = \{g_1, g_2\}$. Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$ Allora

$$\varphi(e_1) = b_{11} f_1 + b_{21} f_2, \quad \varphi(e_2) = b_{12} f_1 + b_{22} f_2.$$

$$\psi(\varphi(e_1)) = b_{11}\psi(f_1) + b_{21}\psi(f_2), \quad \psi(\varphi(e_2)) = b_{12}\psi(f_1) + b_{22}\psi(f_2).$$

Ma $\psi(f_1) = a_{11} g_1 + a_{21} g_2, \quad \psi(f_2) = a_{12} g_1 + a_{22} g_2.$

$$(\psi\circ\varphi)(e_1) = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) g_1 + (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) g_2$$

$$(\psi\circ\varphi)(e_2) = (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) g_1 + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) g_2.$$

Quindi la matrice è
$$\begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{bmatrix}.$$

La situazione generale è simile:

Def. Siano $A \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Loro prodotto $(A \cdot B) \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$ è definito da:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = [c_{ij}]_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le m}} \qquad c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

["riga N° i x colonna N° j"]

Casi particolari: 1) $n = 1$ $\quad B =$ vettore colonna v

$A \cdot B = A \cdot v$ definito prima

2) $n = m = r = 2$ definito sopra.

Teorema. Siano $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3$ come sopra

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ basi di V_1, V_2, V_3

$B =$ matrice di φ [in $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$], $A =$ matrice di ψ [$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$]

Allora la matrice di $\psi \circ \varphi$ rispetto a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$ è $A \cdot B$.

Dim. Stesso tipo di calcolo come nel caso $n = m = r = 2$.

Esempio. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(e_1) = e_2$

$\varphi(e_2) = e_3$

[e_1, e_2, e_3 base standard] $\quad \varphi(e_3) = 0$.

Allora per un vettore generale $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Matrice di φ rispetto a e_1, e_2, e_3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di $\varphi \circ \varphi$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E di $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infatti, $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = 0$!

Proprietà della moltiplicazione

1) $A(BC) = (AB)C$

Si può calcolare, ma anche: $A \leftrightarrow \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$

$B \leftrightarrow \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$C \leftrightarrow \rho : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$

e $(\psi \circ \varphi) \circ \rho = \psi \circ (\varphi \circ \rho)$.

2) $AB = BA$ non è vero in generale! Esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Sia $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ la matrice identità di $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Allora $\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad I \cdot A = A \cdot I = A$

Si può calcolare, ma anche $I \leftrightarrow id_{\mathbb{R}^n}$ $\quad A \leftrightarrow \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

e $\varphi \circ id = id \circ \varphi = \varphi$.

4) Se $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ isomorfismo, abbiamo visto: $\exists \varphi^{-1} : V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$ tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{V_2}$, $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{V_1}$. Se fissiamo basi $\mathcal{B}_1$ di V_1, $\mathcal{B}_2$ di V_2, φ ha matrice A

φ^{-1} — " — A^{-1}

$\Rightarrow \quad A \cdot A^{-1} = I, \quad A^{-1} A = I. \quad [I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, dove $n = \dim V_1 = \dim V_2]$

Matrice inversa. Non esiste sempre, solo se $A \leftrightarrow \varphi$ isomorfismo.

Esempio. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}$

Infatti,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

In generale, vedremo una formula per A^{-1}.

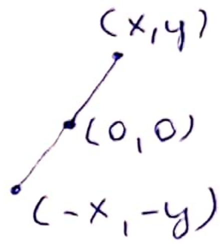
$\exists$ anche algoritmo per calcolare A^{-1}.

Esempi di geometria piana

1) **Riflessione rispetto all'origine**: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{R_0} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

Matrice rispetto ad ogni base:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Da notare: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



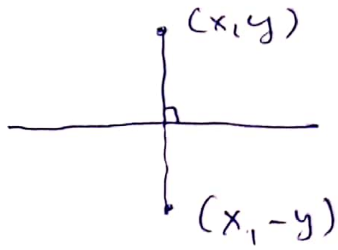
e infatti $R_0 \circ R_0 =$ identità.

Quindi R_0 è un isomorfismo, e $R_0^{-1} = R_0$.

2) **Riflessione rispetto all'asse $y = 0$**: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{R_y} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Anche $R_y \circ R_y =$ identità,



quindi R_y isomorfismo con $R_y^{-1} = R_y$.

Riflessione rispetto all'asse $x = 0$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{R_x} \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

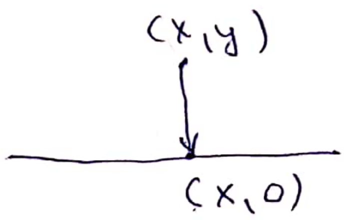
Matrice rispetto alla base standard:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si osserva: $R_x \circ R_y = R_y \circ R_x = R_0$

Infatti, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3) **Proiezione all'asse $y = 0$**: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xmapsto{\pi_y} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrice rispetto alla base standard:



$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si osserva:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e infatti $\pi_y \circ \pi_y = \pi_y$.

π_y <u>non</u> è un isomorfismo perché

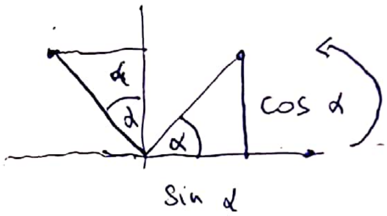
$Ker(\pi_y) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} \neq 0$. Ma anche

$Im(\pi_y) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \neq \mathbb{R}^2$. Infatti, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 1!

4) <u>Rotazione</u> di angolo α intorno a $(0,0)$ [direzione $\circlearrowleft$]

$\rho_\alpha \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$

$\rho_\alpha \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$



$\Rightarrow$ la matrice è $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ rispetto alla base standard.

Si osserva: ρ_α è un isomorfismo, con inversa $\rho_{-\alpha}$.
La matrice di $\rho_{-\alpha}$ è $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ nella base standard.

Infatti, $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ perché $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Se β è un altro angolo, $\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta}$. Infatti,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Nuova dimostrazione delle formule trigonometriche!

Problema: Sia V uno spazio di dim. n, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V. Sia $\varphi: V \to V$ un'applicazione lineare.
Notazione: $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} :=$ matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{B}'$ in arrivo. Se $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, si nota $[\varphi]_{\mathcal{B}} := [\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. La questione è: qual è la relazione tra le matrici $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ e $[\varphi]_{\mathcal{B}'}$?

Esempio: Siano $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\varphi: v \mapsto A \cdot v$, dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Allora

$[\varphi]_{\mathcal{B}} = A$, calcoliamo $[\varphi]_{\mathcal{B}'}$:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi $[\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Qual è la relazione con A?

In generale, poniamo:

Def. Sia V uno spazio vettoriale di dim. n, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi. La matrice di cambiamento di base (rispetto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$) è definita da $P := [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Esempio. Calcoliamo P nella situazione dell'esempio precedente. $\varphi =$ identità, quindi

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è più semplice: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Si nota: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

In generale: $[id_V]^{B}_{B'} \cdot [id_V]^{B'}_{B} = [id_V \circ id_V]_B = [id_V]_B$

è la matrice identità. Quindi P è invertibile e $P^{-1} = [id_V]^{B}_{B'}$.

Teorema: Se B, B' sono due basi di V, $P =$ matrice di cambiamento $\varphi : V \to V$ applicazione lineare con $A = [\varphi]_B$ allora $[\varphi]_{B'} = PAP^{-1}$.

Dim. $[\varphi]_{B'} = [id_V \circ \varphi \circ id_V]_{B'} = [id_V]^{B'}_{B} [\varphi]^{B}_{B} [id_V]^{B}_{B'} = PAP^{-1}$.

Esempio. Nell'esempio precedente

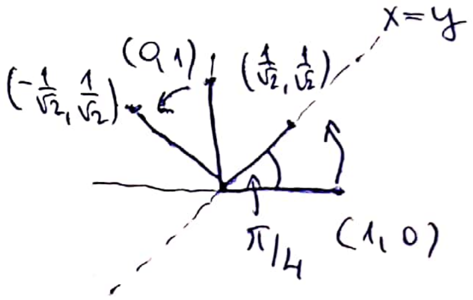
$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Esempio geometrico.

Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione alla retta $\{x=y\}$.

Qual è la sua matrice rispetto alla base standard?

Sia B^* la base $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$



$\pi\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\pi\left(\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow [\pi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: A$. Se B' è la base standard, $P = [id]^{B'}_{B} =$ matrice della rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$!

$$= \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante

Il determinante sarà una funzione $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con la proprietà fondamentale:

$$\det(A) = 0 \overset{(*)}{\iff} \text{le righe di } A \text{ sono lin. dipendenti}$$
$$\iff \text{le colonne} \text{ —"— } \text{ —"— }$$

<u>Esempi</u>. 1) $n=1$ $\quad A = [a] \quad \det(A) := a.$

2) $n = 2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) := ad - bc$

Verifichiamo la proprietà fondamentale $(*)$ per $n=2$.

$\Rightarrow$: Se $ad - bc = 0$, allora:

* Se $a = 0$, allora $b = 0$ o $c = 0$
  - Se $a = b = 0$, la prima riga è 0 $\Rightarrow$ righe dipendenti
  - se $a = c = 0$, ma $b \neq 0$, $[0 \ d] = \frac{d}{b}[0 \ b]$
* Se $a \neq 0$, sia $\lambda := \frac{b}{a}$

  $ad = bc \Rightarrow d = \lambda c \Rightarrow \begin{array}{l} [a \ b] = a[1 \ \lambda] \\ [c \ d] = c[1 \ \lambda] \end{array}$ dipendenti!

[Dipendenza delle colonne simile.]

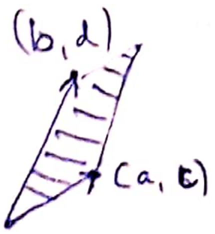
$\Leftarrow$: Se $a = c = 0$, $ad - bc = 0$.

* Se $a \neq 0$ e le righe sono dipendenti,

  $c = \lambda a$, $d = \lambda b$ per $\lambda = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow ad - bc = \lambda(ab - ab) = 0$.
* Se $c \neq 0$, argomento simile, anche per le colonne.

Il determinante ha un'interpretazione geometrica:

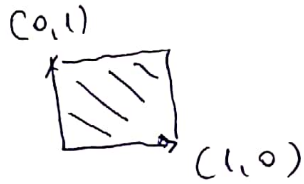
<u>Teorema</u>. $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ area della parallelogramma definita da $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$



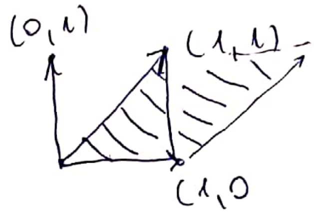
Se $a, b, c, d \geq 0$ e $ad - bc \geq 0$.

Esempi.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 1$

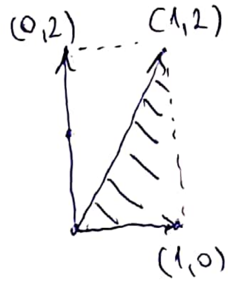


2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 1$



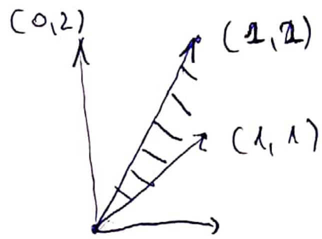
area della par. = area del quadro

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 2$



area della par. = area del rettangolo = 2

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 2-1 = 1$



Qui area della par. = area della par. di 3) −
− — " — di 2 = 2 − 1 = 1.

Oss. Lo stesso argomento che dimostra 4) dimostra il teorema per il caso dove $a = b$ (e $c < d$).

Dim. del teorema. Se $a = 0$, allora come $a, d, b, c \geq 0$ e $ad - bc \geq 0$ $\Rightarrow$ $ad - bc = 0$ & $b = 0$ o $c = 0$.
Ma se $a = b = 0$ o $a = c = 0$, i vettori sono dipendenti e l'area $= 0$.
Quindi supponiamo $a \neq 0$. Se $b = a$ $\Rightarrow$ osservazione sopra. Altrimenti,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \cdot \frac{a}{b} \\ c & d \cdot \frac{a}{b} \end{bmatrix} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \det \begin{bmatrix} a & a \\ c & \frac{ad}{b} \end{bmatrix}$$

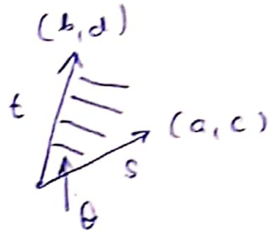
Infatti, $\frac{b}{a}\left(ad \cdot \frac{a}{b} - ac\right) = ad - bc$. [se $b \neq 0$]

D'altra parte, sappiamo dalla scuola:

Se P = parallelogramma con lati di lunghezza s, t e angolo θ, $\text{area}(P) = s \cdot t \cdot \sin(\theta)$

Quindi, se non cambio s, θ, ma cambio $t \rightsquigarrow \lambda \cdot t$ $(\lambda > 0)$

$\text{area}(P) \rightsquigarrow \lambda \cdot \text{area}(P)$. Nel nostro caso:



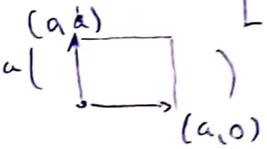
se cambio $(b, d) \rightsquigarrow (\lambda b, \lambda d)$

$t \rightsquigarrow \lambda t$

$\text{area}(P) \rightsquigarrow \lambda \cdot \text{area}(P)$.

Sopra abbiamo utilizzato $\lambda = \frac{b}{a}$, e la stessa sostituzione fa $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$! Quindi abbiamo ridotto il caso generale al caso $a = b$.

[Caso $b = 0$: * se anche $c = 0$, abbiamo $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ facile!

$\det = a \cdot d$, area(

) $= ad$.

* se anche $d = 0$,
allora $\det = \text{area} = 0$.

* se $c, d \neq 0$, moltiplichiamo per $\frac{d}{c} \rightsquigarrow$
si riduce al caso $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & c \end{bmatrix}$ – simile al caso sopra.]

Def. generale del determinante: induzione su n.

$n = 1, 2$: abbiamo visto. Se det è già definita per $n-1$:

Per $A = [a_{ij}]$ sia A_{ij} la matrice ottenuta cancellando la riga № i e la colonna № j, per i, j fisso.

Fatto: i numeri

* $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per i fisso

* $\sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ per j fisso

sono tutti uguali $\forall i, j$.

Scanned with CamScanner

Def. $\det(A) :=$ uno ($\Rightarrow$ tutti) dei numeri sopra.

Se i è fisso, parliamo dello sviluppo secondo la riga N° i

Se j — " — — " — — " — — " — colonna N° j.

Non verifichiamo il fatto sopra in generale.

Ma per $n=2$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a \cdot d + b(-c) && \text{sviluppo secondo la prima riga} \\
&= c(-b) + d \cdot a && \text{— " — seconda — " —} \\
&= a \cdot d + c \cdot (-b) && \text{— " — prima colonna} \\
&= b(-c) + d \cdot a && \text{— " — seconda colonna}
\end{aligned}$$

Promemoria dei segni $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

Notazione: $|A| := \det(A)$

Esempio $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3.$$

Sviluppo secondo la seconda colonna:

$$0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2 + 1 = 3.$$

Caso generale $n=3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

sviluppo secondo la prima riga:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Osserviamo: in ogni prodotto $\exists!$ elemento di ogni riga & colonna.

Questo è così per n generale, solo i segni sono da determinare.

Esempio: Sia $A = [a_{ij}]$ una matrice triangolare superiore, i.e. $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Allora $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & * \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dimostrazione: induzione su n. $n = 1$ ✓

Sviluppo secondo la prima colonna:

$\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$. Ma A_{11} è triangolare di taglia $n-1$

$\Rightarrow \det(A_{11}) = a_{22} \cdots a_{nn} \Rightarrow \det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

Un risultato simile vale per le matrici triangolari inferiori.

Ricordiamo: L'algoritmo di Gauss, applicato a una matrice $n \times n$, produce una matrice triangolare superiore.

Qual è l'effetto delle operazioni elementari dell'algoritmo sul det?

1) Cambio di due righe: $\det(A) \rightsquigarrow -\det(A)$

Infatti, se si scambiano due righe adiacenti $i \leftrightarrow i+1$ le sottomatrici $A_{ij} \leftrightarrow A_{i+1,j}$ dopo lo scambio.

Ma $(-1)^{(i+1)+j} = -(-1)^{i+j} \Rightarrow$ nella formula $\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ si cambiano tutti i segni.

Poi, scambiare le righe № i e j $\Leftrightarrow$ cambiare righe adiacenti $(i-j) + (i-j-1) = 2(i-j) - 1$ volte.

Questo è un numero dispari!

2) Sostituzione della riga R_i con $R_i + \lambda R_j$ $(j \neq i)$: il determinante non si cambia.

La verifica si fa così:

I) Se A ha due righe uguali $\Rightarrow \det(A) = 0$.

[Infatti, quando si cambiano questi due righe, $\det(A) \rightsquigarrow -\det(A)$, ma non si cambia nulla.]

II) Se alla riga R_i si sostituisce $\lambda \cdot R_i$ $(\lambda \neq 0)$

$\det(A) \rightsquigarrow \lambda \cdot \det(A)$.

[Facciamo lo sviluppo rispetto alla riga R_i:

$a_{ij} \rightsquigarrow \lambda \cdot a_{ij}$ $\forall j$, ma A_{ij} non si cambia.]

III) Se in A $R_i = \lambda \cdot R_j \Rightarrow \det(A) = 0$.

[Infatti, dopo II) $\det(A) = \lambda \cdot \det(B)$ dove in B $R_i = R_j$, ma allora $\det(B) = 0$ secondo I).]

IV) Sia B la matrice ottenuta da A sostituendo la riga $R_i = [a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}]$ con $[b_{i1}\ b_{i2} \dots b_{in}]$

Allora $\det(A) + \det(B) = \det(C)$, dove C è ottenuta da A sostituendo R_i con $[a_{i1}+b_{i1}\ \ a_{i2}+b_{i2} \dots a_{in}+b_{in}]$

[Fare lo sviluppo rispetto alla riga N° i]

Finalmente, sia C la matrice ottenuta da A sostituendo R_i con $R_i + \lambda R_j$. Allora dopo IV)

$\det(C) = \det(A) + \det(B)$

dove B è la matrice ottenuta con la sostituzione $R_i \rightsquigarrow \lambda R_j$.

Ma $\det(B) = 0$ secondo III).

<u>Conclusione</u>: se facciamo l'algoritmo di Gauss,

$\det(A) \rightsquigarrow (-1)^r \det(A)$, dove r = numero di scambi di righe

Questo si può utilizzare per calcolare $\det(A)$, riducendola in forma triangolare.

<u>Esempio</u>: calcoliamo il determinante di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ con questo metodo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} =: B$$

$\det(B) = 25$, ma abbiamo fatto uno scambio di righe

$\Rightarrow \det(A) = -25$.

<u>Altro esempio</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4&0&0&1\\ 1&1&2&0\\ 0&2&1&1\\ 1&1&0&1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 1&1&2&0\\ 0&2&1&1\\ 4&0&0&1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&2&1&1\\ 0&-4&0&-3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&-4&0&-3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&0&2&-1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&2&-1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

Questo metodo è pratico se la matrice è grande, con molti elementi $\neq 0$. Ma quando la matrice ha molti elementi $= 0$, lo sviluppo è più pratico:

Esempio. $A = \begin{bmatrix} 1&0&0&4\\ 0&2&0&1\\ 3&0&1&2\\ 1&0&0&5 \end{bmatrix}$ La terza colonna ha solo un elemento $\neq 0$, con segno $+$.

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1&0&4\\ 0&2&1\\ 1&0&5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2&1\\ 0&5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0&2\\ 1&0 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4 \cdot 2 = 2.$$

Def. Se $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, la sua matrice trasposta è $A^t = [a_{ji}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Quindi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si nota: $\det(A) = \det(A^t)$
perché lo sviluppo rispetto alla colonna N° i di A
= —"— —"— alla riga N° i di A^t.

Teorema. $\det(A) = 0 \iff$ le righe di A sono lin. dipendenti
$\iff$ le colonne —"— —"—

Dim. Righe di A = colonne di A^t. Come $\det(A) = \det(A^t)$
$\Rightarrow$ basta fare la dimostrazione per le colonne.

Facciamo l'algoritmo di Gauss per A: $A \sim B$
dove B è una matrice a scalini $\Rightarrow$ triangolare superiore.

* Se $\det(A) = 0$ $\Rightarrow$ la diagonale contiene un elemento $= 0$ in B $[\Rightarrow \det(B) = 0]$
$\Rightarrow$ una colonna non contiene di pivot in B $\rightarrow$ le colonne di B sono dipendenti $\Rightarrow$ anche le colonne di A.
* Se le colonne sono dipendenti $\Rightarrow$ una colonna di B non contiene di pivot $\Rightarrow$ questa colonna ha 0 nella diagonale $\rightarrow \det(B) = 0$
$\Rightarrow \det(A) = 0$.

Cor. Sia $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare data da $v \mapsto A \cdot v$.
Allora $\ker(A) \neq 0 \iff \operatorname{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n \iff \det(A) = 0$.

Addesso generalizziamo questo cor. a $\varphi : V \rightarrow V$, $\dim V = n$.

Teorema. Se $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Verifica solo per $n = 2$ [caso generale difficile]:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

$$(ad - bc)(a'd' - b'c') = aa'dd' + bb'cc' - a'bcd' - ab'c'd$$

$$(aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') =$$

$$= \cancel{aa'cb'} + aa'dd' + bb'cc' + \cancel{bc'dd'} - \cancel{aa'b'c} - ab'c'd$$
$$- a'bcd' + \cancel{bc'dd'}$$

Cor. Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, A^{-1} esiste $\iff \det(A) \neq 0$
e allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Dim. A^{-1} esiste $\iff$ $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo
$\iff \ker(A) = 0$ & $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^n \iff \det(A) \neq 0$ [Cor. precedente]
$A \cdot A^{-1} = I$ $\quad \det(I) = 1$ [matrice triangolare]
Teorema $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$.

Prop. Sia $\varphi : V \rightarrow V$ una mappa lineare, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V, A la matrice di φ rispetto a $\mathcal{B}$, A' rispetto a $\mathcal{B}'$.

Allora $\det(A) = \det(A')$.

Quindi $\det(A)$ dipende solo da φ, non della base!

Dim. Sappiamo: $\exists P$ matrice invertibile: $A' = PAP^{-1}$.

Teorema $\Rightarrow \det(A') = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(A)\det(P)\det(P^{-1})$
$= \det(A)\cdot 1$.

Cor. Se $\varphi: V \to V$ è un'applicazione lineare, A la matrice di φ rispetto ad una [qualsiasi] base
$\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \neq V \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Def. Se $\underset{[a_{ij}]}{\underset{\shortparallel}{A}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, la matrice aggiunta di A è $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$

dove $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$

[si nota lo scambio di i e j!]

Formula di Cramer: $A \cdot \tilde{A} = \det(A)\cdot I$

dove $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è la matrice identità.

Cor. Se $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\cdot \tilde{A}$.

Esempio: $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ se $ad - bc \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

[formula già vista]

Esempio concreto per $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

[sviluppo rispetto alla seconda riga/colonna]

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -11 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{22}\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Dim. della formula di Cramer: calcoliamo $A \cdot \tilde{A}$.

* [prima riga di A] × [prima colonna di $\tilde{A}$]

$(-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n})$

$= \det(A)$ [sviluppo rispetto alla prima riga]

* di maniera simile,

[riga N° i di A] × [~~riga~~ colonna N° i di $\tilde{A}$] = $\det(A)$

[sviluppo rispetto alla ~~p~~ riga N° i di A]

* [prima riga di A] × [seconda colonna di A]:

$(-1)^{1+2} a_{11} \det(A_{21}) + (-1)^{2+2} a_{12} \det(A_{22}) + \ldots + (-1)^{2+n} a_{1n} \det(A_{2n})$

Si osserva: questo è il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dove abbiamo sostituita la seconda riga di A con la prima riga.
Ma allora ci sono due righe uguali
$\Rightarrow \det(A) = 0$.

* Di maniera simile,

[riga N° i di A] × [colonna N° $j \neq i$ di A] = 0.

Con la formula di Cramer si può dare una seconda dimostrazione del teorema "$\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono dipendenti."

$\Rightarrow$: Se $\det(A) = 0$, allora dopo Cramer $A\tilde{A} = 0$. Fissando una colonna $C_i \neq 0$ di $\tilde{A}$, la relazione $AC_i = 0$ dà una relazione lineare $\neq 0$ tra le colonne di A.

$\Leftarrow$: Se le colonne di A sono dipendenti, $\operatorname{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n$, ma un sottospazio di dim. $< n$. Ma allora $\operatorname{Im}(A\tilde{A}) \subset \operatorname{Im}(A) \neq \mathbb{R}^n$.
Se $\det(A) \neq 0$, ~~Im~~ $A\tilde{A} = \det(A) \cdot I \Rightarrow \operatorname{Im}(A\tilde{A}) = \mathbb{R}^n$ ↯

Richiami sui polinomi

Un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ è un'espressione $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, dove $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. $n := \deg(f)$ è il grado di f.

Divisione con resto: se $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{R}[x]$ è un'altro polinomio con $\boxed{m \leq n}$, esistono $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tali che $f = q \cdot g + r$, e $\deg(r) < \deg(g)$. Tali q, r sono unici.

q, r si trovano utilizzando l'algoritmo di Euclide:

Si considera $f_1 := f - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g$.

Si osserva: $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g = a_n x^n + \frac{a_n b_{m-1}}{b_m} x^{n-1} + \ldots$

Quindi $\deg(f_1) \leq n-1$. Se $\deg(f_1) < m$, allora $f_1 = r$ e FINITO.

Se no, il processo si ripeta con f_1 al posto di f.

Esempio: 1) $f = x^4 + 2$, $g = x^3 + 2$.

$f_1 = f - xg = x^4 + 2 - (x^4 + 2x) = 2 - 2x =: r$

$q = x$.

2) $f = x^4 + 2$, $g = x^3 + 3x^2$

$f_1 = f - xg = x^4 + 2 - x^4 - 3x^3 = -3x^3 + 2$

$f_2 = f_1 + 3g = -3x^3 + 2 + 3x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 2 =: r$

$\Rightarrow f_1 = -3g + r \Rightarrow f = f_1 + xg = (x-3)g + r$.

Def. $a \in \mathbb{R}$ è radice di f se $f(a) = 0$.

Prop. Se a è radice di f, allora $f = (x-a)q$, dove $q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(q) = \deg(f) - 1$.

Dim. Si fa la divisione con resto: $f = (x-a)q + r$ dove $\deg(r) < \deg(x-a) = 1 \Rightarrow r$ è una costante!

Ma allora $\underset{0}{\underset{\parallel}{f(a)}} = (a-a)q + r = r \Rightarrow r = 0$.

<u>Cor.</u> Se $f(a)=0$, esiste $m>0$ tale che $f=(x-a)^m g$ dove $g(a)\neq 0$. Qui $m \leq \deg(f)$.

<u>Dim.</u> Sappiamo: $f=(x-a)q$ dove $\deg(q)=\deg(f)-1$.
Se $q(a)\neq 0$, FINITO. Se no, $q=(x-a)q_1$
$\Rightarrow f=(x-a)^2 q_1$ dove $\deg(q_1)=\deg(f)-2$.
Il processo si ripeta: troviamo $q_1, q_2, \dots, q_i$ finché $q_i(a)\neq 0$. [Può essere: q_i = costante!]

<u>Def.</u> Il numero m si chiama la <u>molteplicità</u> della radice a di f.

<u>Oss.</u> Se $b\neq a$ è un'altra radice di f e $f=(x-a)^m g$ allora $\underset{0}{\underset{\parallel}{f(b)}} = (b-a)^m g(b) \Rightarrow g(b)=0$.

Quindi $g=(x-b)^{m'} h \Rightarrow f=(x-a)^m (x-b)^{m'} h$
dove $\deg(h)=\deg(f)-(m+m')$, $h(a)\neq 0$, $h(b)\neq 0$.
A questo punto ci sono due casi:
- o h non ammette radici in $\mathbb{R}$ [esempio: $h=x^2+1$]
- o h ammette una radice $c\in\mathbb{R}$ diversa da a, b, e il processo può essere continuato.

Finalmente, arriviamo al teorema seguente:

<u>Teorema.</u> Ogni $f\in\mathbb{R}[X]$ ha un numero finito di radici $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}$. Se m_i = molteplicità di a_i, allora $m_1+m_2+\dots+m_s \leq \deg(f)$ e
$$f=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_s)^{m_s}\, g$$
dove $g\in\mathbb{R}[x]$ non ammette radici in $\mathbb{R}$.

<u>NB:</u> Se $\deg(f)\geq 5$, non abbiamo metodi esatti per trovare le radici, solo metodi ad hoc o approssimativi.

Autovalori, autovettori

Def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim V < \infty$, $\varphi: V \to V$ appl. lineare. $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di φ se $\exists\, v \neq 0$ in V:
$$\varphi(v) = \lambda \cdot v.$$
In questo caso v è un autovettore associato a λ.

Oss. 1) v può essere autovettore per un solo λ. Infatti, se v è autovettore per λ_1, λ_2,
$$\lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{come } v \neq 0.$$

2) Fissando λ, possiamo avere molti autovettori associati allo stesso λ. Caso estremo: $\varphi = id$. In questo caso $\varphi(v) = v$ $\forall v \in V \Rightarrow \forall v \in V$ autovettore per $\lambda = 1$.
Esempio simile: $\varphi(v) = \alpha v$ $\forall v$, quindi $\varphi = \alpha \cdot id$.
Allora $\forall v \in V$ è autovettore per α.

Prop. a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, gli autovettori per λ insieme con 0, formano un sottospazio di V. [Notazione: V_λ, terminologia: autospazio.]

b) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = (0)$.

Dim. a) Se $v_1, v_2 \in V$ tali che $\varphi(v_1) = \lambda v_1$, $\varphi(v_2) = \lambda v_2$
$$\Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$
$$\varphi(\alpha v_1) = \alpha \varphi(v_1) = \alpha \lambda v_1 = \lambda(\alpha v_1).$$

b) risulta da 1) sopra.

Perchè sono interessanti?

Def. φ è diagonalizzabile se $\exists$ base di V dove la matrice di φ è diagonale.

[Se $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $v \mapsto A \cdot v$, diciamo anche che la matrice A è diagonalizzabile.]

Prop. φ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ base di V costituita di autovettori di φ.

Dim. $\Rightarrow$: Se $e_1, \dots, e_n$ è una base dove la matrice di φ è $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ [i λ_i non necessariamente distinti!]

$\Rightarrow \varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$.

$\Leftarrow$: Viceversa, se $e_1, \dots, e_n$ è una base di V dove $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n e_n$, la matrice è come sopra.

Non tutte le φ sono diagonalizzabili! Esempio più semplice:

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi : v \mapsto Av$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi(v) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \varphi(v) = \lambda v$ vale se per $v \neq 0$ $\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$

Seconda eq^{ne} $\Rightarrow$ $\lambda = 1$ o $x_2 = 0$.

Se $\lambda = 1$, $x_2 = 0$ dalla prima eq^{ne} e viceversa.

Quindi $\underset{v \neq 0}{\varphi(v) = \lambda v} \Leftrightarrow \lambda = 1$ $\underline{\underline{e}}$ $x_2 = 0$

Ma allora solo i moltipli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono autovettori

$\Rightarrow \nexists$ base di autovettori per φ.

Come decidere se φ è diagonalizzabile? La chiave è data da:

Prop. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono autovalori <u>distinti</u> di φ, v_i autovettore associato a λ_i $i = 1, \dots, r$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_r$ sono linearmente <u>indipendenti</u>.

Cor. 1) Ci sono un numero finito di autovalori distinti. [Perchè $\dim V < \infty$]

2) φ è diagonalizzabile $\iff$ se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di φ, $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = \dim V$.

[Infatti, sia

$e_{11}, \dots, e_{1m_1}$ base di V_{λ_1}

$e_{21}, \dots, e_{2m_2}$ —"— V_{λ_2}

$\vdots$

$e_{r1}, \dots, e_{rm_r}$ —"— V_{λ_r}

Prop $\Rightarrow$ $e_{11}, \dots, e_{1m_1}, \dots, e_{r1}, \dots, e_{rm_r}$ lin. indipendenti perchè se

$$\underbrace{\alpha_{11} e_{11} + \dots + \alpha_{1m_1} e_{1m_1}}_{\in V_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{\alpha_{r1} e_{r1} + \dots + \alpha_{rm_r} e_{rm_r}}_{\in V_{\lambda_r}} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_{11} e_{11} + \dots + \alpha_{1m_1} e_{1m_1} = 0, \dots, \alpha_{r1} e_{r1} + \dots + \alpha_{rm_r} e_{rm_r} = 0$ dopo la Prop., ma allora $\forall \alpha_{ij} = 0$ perchè gli e_{ij} sono elementi di basi. Finalmente, gli e_{ij} formano una base di V se il loro numero è $= \dim V$.]

3) Se $n = \dim V$ e φ ha n autovalori distinti $\Rightarrow$ φ è diagonalizzabile. [Dopo la Prop. ha n autovettori indip!] Il reciproco è falso! Esempio: $\varphi = id$.

Insomma, metodo per decidere se φ è diagonalizzabile:

1) Trovare gli autovalori.
Se ci sono $n = \dim V$ distinti $\Rightarrow$ siamo HAPPY.
Se no,

2) Trovare gli autovettori per ogni λ_i e calcolare $\dim V_{\lambda_i}$.
Se $\sum \dim V_{\lambda_i} = \dim V$, φ è diagonalizzabile.
Se $\sum \dim V_{\lambda_i} < \dim V$, φ non è diagonalizzabile.

Nell'esempio $\varphi(v) = Av$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$ solo autovalore, $\dim V_1 = 1 < 2$.

Dim. della Prop. Siano $v_1, \dots, v_r$ autovettori per $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$. $(*)$

Dimostriamo $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ con induzione su r. $r=1$ ovvio.

Applichiamo φ a $(*)$: $\alpha_1 \varphi(v_1) + \dots + \alpha_r \varphi(v_r) = 0$.

Quindi per ipotesi $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$.

Moltiplichiamo $(*)$ per λ_1: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_1 v_r = 0$ $\Big\} -$

[se $\lambda_1 = 0$, scegliamo un altro λ_i]

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + \alpha_r (\lambda_r - \lambda_1) v_r = 0.$$

Per ipotesi di induzione, $v_2, \dots, v_r$ sono <u>indipendenti</u>

Quindi $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) = 0$ $i = 2, \dots, r$. Ma $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ $\forall i$ $\Rightarrow$

$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow$ dopo $(*)$ $\alpha_1 v_1 = 0$.

Ma $v_1 \neq 0 \Rightarrow$ anche $\alpha_1 = 0$.

Come trovare gli autovalori?

$\underset{\neq 0}{v}$ autovettore di φ per λ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow (\varphi - \lambda \cdot id) v = 0$.

Quindi λ autovalore di $\varphi \Leftrightarrow Ker(\varphi - \lambda \cdot id) \neq 0$.

Ma abbiamo visto: se A è la matrice di φ rispetto ad una base $\Rightarrow$ $A - \lambda I$ è la matrice di $\varphi - \lambda \cdot id$, e

$Ker(\varphi - \lambda \cdot id) \neq 0 \Leftrightarrow Ker(A - \lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

<u>Def.</u> Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, il <u>polinomio caratteristico</u> di A è

$P_A(t) := \det(A - t \cdot I) \in \mathbb{R}[x]$ [t è una variabile]

[Spesso $P_A(t)$ si definisce come $\det(t \cdot I - A)$; la differenza è solo un segno.]

<u>Conclusione</u>: λ è autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ radice di $P_A(t)$

dove A = matrice di φ rispetto ad una base.

<u>Oss.</u> Infatti, $P_A(t)$ dipende solo da φ, non da A.

La matrice di φ rispetto ad un altra base è PAP^{-1}

[P = matrice di cambiamento di basi]

$$P_{PAP^{-1}}(t) = \det(PAP^{-1} - t\cdot I) = \det(PAP^{-1} - t\cdot PP^{-1})$$
$$= \det(P(A - t\cdot I)P^{-1}) = \cancel{\det}(P)\det(A-tI)\cancel{\det}(P^{-1})$$
$$= \det(A-tI) = P_A(t).$$

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(t) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{bmatrix}$

Vediamo: $\deg P_A(t) = n$.

<u>Esempi.</u> 1.) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & -1-t \end{bmatrix} = (1-t)(-t)(-1-t)$$

Autovalori: $1, 0, -1$. Distinti $\Rightarrow$ φ diagonalizzabile.

Cerchiamo gli autovettori per trovare la "buona" base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = x \\ z = y \\ -z = z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e moltipli.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e moltipli.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = -x \\ z = -y \\ -z = -z \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ +2 \end{bmatrix} \text{ e moltipli.}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^3$

1 solo autovalore!

3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & 3 & 0 \\ 1 & -2-t & 0 \\ 1 & -3 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$= (1-t) \begin{vmatrix} -t & 3 \\ 1 & -2-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2+2t-3) =$$

$$= (1-t)(t-1)(t+3) = -(t-1)^2(t+3)$$

Autovalori: 1, -3

Autovettori per 1: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\quad \begin{aligned} 3y &= x \\ x - 2y &= y \\ x - 3y + z &= z \end{aligned}$

$\Rightarrow x = 3y \Rightarrow \dim(V_1) = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto x - 3y\right)\right) = 3 - 1 = 2$

Una base di V_1: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovettori per -3: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{bmatrix}$ $\quad \begin{aligned} 3y &= -3x \\ x - 2y &= -3y \\ x - 3y + z &= -3z \end{aligned}$

$\Rightarrow x = -y, \quad -4y = -4z \Rightarrow x = -y = -z \Rightarrow \dim V_{-3} = 1$

Una base di V_{-3}: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Insomma: A è diagonalizzabile

nella base $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dove diventa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2) [cont.] Autovettori per 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} x + y &= x \\ y + z &= y \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = z = 0$$

$\Rightarrow$ autovettori multipli di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ NON DIAGONALIZZABILE

4) Per quali valori del parametro $\underline{\underline{a}}$ è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

diagonalizzabile?

$$P_A(t) = \det\begin{bmatrix} 2a-t & 1 & 1 \\ 1 & a-t & 1 \\ -1 & 1 & a-t \end{bmatrix} = (2a-t)[(a-t)^2 - 1] -$$

$$-[a-t+1] + [1+a-t] = (2a-t)[(a-t)^2-1]$$

$\Rightarrow$ autovalori: $2a, \ a+1, \ a-1$

Se $a \neq \pm 1$, autovalori <u>distinti</u> $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

$\boxed{a=1}$ autovalori: $2, 2, 0$

* autovettori per 2: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 2x \\ x + y + z = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -z \\ x = 2y = -2z \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim V_2 = 1$

* autovettori per 0:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -z \\ x = 0 \end{array} \quad \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim V_0 = 1$

$\dim V_2 + \dim V_0 = 2 < 3 \Rightarrow$ non diagonalizzabile!

$\boxed{a=-1}$ autovalori: $-2, 0, -2$

* autovettori per -2:

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y + z = -2x \\ x - y + z = -2x \\ -x + y - z = -2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -z \\ x = -2y \end{array}$$

$\Rightarrow$ come sopra $\dim V_{-2} = 1$ & $\dim V_0 = 1$

$\Rightarrow$ non diagonalizzabile!

La considerazione seguente può semplificare i calcoli.

<u>Def.</u> Sia λ un autovalore di φ.

La molteplicità <u>algebrica</u> di λ è la molteplicità di λ come radice di $P_A(t)$

La molteplicità <u>geometrica</u> di λ è $\dim V_\lambda$.

Prop. molteplicità geometrica di $\lambda \leq$ molteplicità algebrica di λ.

<u>Dim.</u> Sia $\dim V = n$, $\dim V_\lambda = r$. Sia $e_1, \dots, e_r$ una base di V_λ. Completiamola in una base di V: $e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n$. Rispetto a questa base la matrice di φ è così:

$$r\left\{\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{matrix} & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right]\right. \qquad \underbrace{}_{r} \; \underbrace{}_{n-r}$$

$$\leadsto \quad P_A(t) = \det \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t\end{matrix} & * \\ \hline 0 & B - tI \end{array}\right]$$

$$= \cancel{\det} \; (\lambda - t)^r \det(B - tI) = (\lambda - t)^r P_B(t).$$

[sviluppo rispetto alla prima colonna + induzione]

Quindi molt. algebrica di $\lambda \geq r = \dim V_\lambda$.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono gli autovalori distinti di φ, la somma delle molt. algebriche è $\leq n = \dim V$. Quindi $n \geq \sum_{i=1}^{m} \dim V_{\lambda_i}$ [già visto!] e l'uguaglianza vale $\Leftrightarrow$ φ è diagonalizzabile.

<u>Conclusione</u>: φ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ autovalore λ di φ è reale, e molt. algebrica $=$ molt. geometrica.

In particolare, se troviamo λ con molt. geom. $<$ molt. alg $\Rightarrow$ φ <u>non</u> è diagonalizzabile.

Nell'esempio precedente: per $a = 1$ basta guardare $\lambda = 2$
$a = -1$ — " — $\lambda = -2$.

---

5) Per quali valori di k è
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
diagonalizzabile?

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ k & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$
$$= (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Autovettori per $\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 2x \\ x + 3y &= 2y \\ kx + 2z &= 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -y \\ kx &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ se $k \neq 0$, $\dim V_\lambda = 1$ [multipli di $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$]

Se invece $k = 0$, $\dim V_\lambda = 2$. Una base: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quindi per $k \neq 0$, A non è diagonalizzabile [molt. geom. di 2 $= 1 < 2$]

per $k = 0$ A è diagonalizzabile,

perché $\exists \geq 1$ autovettore per $\lambda = 4$ [trovargli!]

che insieme con $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ forma una base di autovettori.

6) Sia $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base standard. È possibile che la matrice di φ rispetto ad un'altra base è

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$?

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$$P_B(t) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 \quad \text{uguali!}$$

Cerchiamo gli autovettori di A per 1.

$$\left.\begin{aligned} 2x &= x \\ 3x + y &= y \\ 5x + y + z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \dim V_1 = 1 < 2$$

non diagonalizzabile!

Invece per B:
$$\left.\begin{aligned} x+3z &= x \\ y+4z &= y \\ 2z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &z=0 \\ &x, y \text{ arbitrari} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\dim V_1 = 2$ e B è diagonalizzabile [$\exists$ anche autovettore per 2!]
Quindi B non può essere la matrice di φ rispetto a nessuna base perché φ non è diagonalizzabile.

7) Per quali valori di $\underline{a}$ la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & a-t \end{bmatrix} = (1-t)(a-t)+1 = t^2-(a+1)t + a+1$

Discriminante di $P_A(t)$: $\Delta = \cancel{\tfrac{1}{4}}\,[(a+1)^2 - 4(a+1)] = \cancel{\tfrac{1}{4}}\,(a+1)(a-3)$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow a > 3$ o $a < -1 \Leftrightarrow$ due radici distinti di $P_A(t) \Leftrightarrow A$ diagonalizzabile

$\Delta < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 3 \Leftrightarrow \nexists$ radice reale di A
$\Rightarrow$ a non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a = -1$ o $a = 3$.

$\underline{a=-1}$ $\Rightarrow$ $\lambda = 0$ autovalore di molt. algebrica 2.

Autovettori: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = y$

$\Rightarrow$ $\dim V_0 = 1 < 2$ $\underline{\text{non}}$ diagonalizzabile

$\underline{a=3}$ $\Rightarrow$ $\lambda = 2$ autovalore di molt. alg. 2

Autovettori: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x-y &= 2x \\ x+3y &= 2y \end{aligned} \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \dim V_2 = 1$$
$\Rightarrow$ non diag.

Esercizio. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Trovare [se esistono] una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $A = PDP^{-1}$.

Soluzione. P, D esistono $\Leftrightarrow$ A è diagonalizzabile. Decidiamo se è vero.

$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & 2 & 1 \\ 2 & 3-t & 2 \\ 1 & 2 & -t \end{bmatrix} = -t[-t(3-t)-4] - 2[-2t-2] + 1 + t = -t^3 + 3t^2 + 9t + 5$

$t = -1$ radice $\Rightarrow P_A(t) = (t+1)[-t^2 + 4t + 5] = -(t+1)^2(t-5)$

$\Rightarrow$ 5 autovalore di molt. alg. 1, -1 di molt alg. 2

Autovettori per -1: $\left.\begin{array}{l} 2y + z = -x \\ 2x + 3y + 2z = -y \\ x + 2y = -z \end{array}\right\} \Leftrightarrow x + 2y + z = 0$

Una base di V_{-1}: $\underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$. $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

Autovettori per 5: $\left.\begin{array}{l} 2y + z = 5x \\ 2x + 3y + 2z = 5y \\ x + 2y = 5z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = 2z \end{array}$

$\Rightarrow \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$ base di V_5

Rispetto alla base v_1, v_2, v_3 la matrice di $v \mapsto Av$ è $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} =: D$.

Matrice di cambiamento di base dalla base ~~standard~~ a $\{v_1, v_2, v_3\}$: alla base standard: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =: P$

Numeri complessi

Un numero complesso è un'espressione $z = a + bi$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ ed i è un parametro formale con la proprietà $i^2 = -1$.

Esempi: $1 + 2i$, $3 - \sqrt{2}\, i$, $\pi - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\, i$ etc.

Ogni $a \in \mathbb{R}$ è anche un numero complesso: $a = a + 0 \cdot i$.

Notazione: $\mathbb{C}$ è l'insieme dei numeri complessi. [Quindi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$]

Operazioni su $\mathbb{C}$: * se $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$

$$z + z' := (a + a') + (b + b')i.$$

* se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda z = \lambda(a + bi) := \lambda a + \lambda b i$

Osservazione: Con queste operazioni $\mathbb{C}$ ha una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una base è data da $\{1, i\}$. Dunque $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

[Infatti, $a + bi \mapsto (a, b)$ definisce un isomorfismo tra $\mathbb{C}$ [come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale] e $\mathbb{R}^2$.]

Prodotto di numeri complessi:

$$z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

In particolare, se $z = a \in \mathbb{R}$, $a z' = aa' + ab'i$ come sopra.

Esempi: * $i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1$.

* $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$.

* $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^4 = -4$

* $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

* Se $\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta < 0$, $(\sqrt{-\Delta}\, i)^2 = \Delta$.

$\Rightarrow$ $\forall$ polinomio $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ ha radici in $\mathbb{C}$.

Def. Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, il suo <u>coniugato</u> è $\bar{z} := a - bi$.

<u>Si osserva</u>: $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

In particolare, $z \cdot \bar{z} = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0$, e $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Quindi se $z \neq 0$, si può definire $\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$.

E se $z' = a' + b'i \in \mathbb{C}$, $\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{aa' + bb' + (-ab' - a'b)i}{a^2 + b^2}$.

Quindi le 4 operazioni di base $+, -, \times, \div$ si possono fare in $\mathbb{C}$.

<u>Oss.</u> $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{(z \cdot z')} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$. Infatti:

$$a + a' - (b + b')i = a - bi + a' - b'i,$$

$$aa' - bb' - (ab' + a'b)i = (a - bi)(a' - b'i).$$

In particolare, $z \mapsto \bar{z}$ è un'applicazione lineare su $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$!

Abbiamo visto: ogni polinomio quadratico $f \in \mathbb{R}[x]$ ammette una radice in $\mathbb{C}$. Più generalmente:

<u>Teorema</u>. Ogni polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti <u>complessi</u> ammette una radice in $\mathbb{C}$: $\exists z_1 \in \mathbb{C}$, $f(z_1) = 0$.

Ma allora la divisione con resto come in $\mathbb{R}[x]$ dà:

$f = (x - z_1) f_1$, dove $f_1 \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f_1 = \deg f - 1$.

Continuando con f_1: $f_1 = (x - z_2) f_2$ per un $z_2 \in \mathbb{C}$, ecc. $\Rightarrow$

<u>Cor.</u> Se $f \in \mathbb{C}[x]$, $\exists z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$, $m_1, \dots, m_r > 0$:

$$f = (x - z_1)^{m_1} (x - z_2)^{m_2} \cdots (x - z_r)^{m_r}.$$

In particolare, ogni $f \in \mathbb{R}[x]$ ammette una fattorizzazione di questo tipo, con alcuni z_i reali, ma altri complessi (in generale).

<u>Esempio</u>: $x^3 - 1 = (x - 1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Si osserva: in questo esempio $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ è il coniugato di $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

In generale: se $f \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$ tale che $f(z)=0 \Rightarrow$ anche $f(\bar{z})=0$.

Infatti, se $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$,

$$0 = \bar{0} = \overline{f(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_0} = a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \dots + a_0 = f(\bar{z}).$$

Quindi le radici di $f \in \mathbb{R}[x]$ sono o reali, o vengono in coppie di numeri complessi coniugati.

Esempio: $f = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Se $\Delta \geq 0$, le radici sono reali, se $\Delta < 0$, coppie $\frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{-\Delta}\, i\right]$.

Osservazione: C'è una teoria di spazi vettoriali e appl. lineari su $\mathbb{C}$ (stesse definizioni, teoremi...) Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definisce anche un appl. lineare $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v \mapsto A\cdot v$ (perché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Il polinomio caratteristico $P_A(t)$ ha sempre radici complessi $\Rightarrow$ su $\mathbb{C}$ ci sono sempre autovalori e autovettori.

Esempi. 1) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad P_A(t) = \det \begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = t^2 + 1.$

Non ci sono autovalori su $\mathbb{R}$! Ma su $\mathbb{C}$ $t^2+1 = (t+i)(t-i) \Rightarrow i, -i$ autovalori distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad P_A(t) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & -1 & 2-t \end{bmatrix} =$

$$(2-t)\big(\underbrace{(2-t)^2+1}_{\text{non ha radici su } \mathbb{R}}\big)$$

Su $\mathbb{R}$ $\lambda = 2$ solo autovalore, con molteplicità 1 $\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile.

Ma su $\mathbb{C}$: $p_A(t) = (2-t)(2+i-t)(2-i-t)$

$\Rightarrow$ autovalori distinti $2,\ 2+i,\ 2-i$ $\Rightarrow$ A diagonalizzabile

Autovettori:

$\boxed{\lambda = 2}$ $\quad \left.\begin{aligned} 2x &= 2x \\ x+2y+z &= 2y \\ -y+2z &= 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 0 \\ x &= -z \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e multipli

$\boxed{\lambda = 2+i}$ $\quad \left.\begin{aligned} 2x &= (2+i)x \\ x+2y+z &= (2+i)y \\ -y+2z &= (2+i)z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ z &= iy \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$ e multipli

$\boxed{\lambda = 2-i}$ di maniera simile $x = 0$ $z = -iy$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$ e multipli

In questa base la matrice diventa $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$

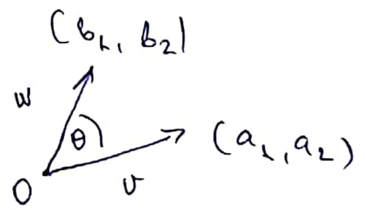
Prodotto scalare

Alla scuola abbiamo visto il prodotto scalare di due vettori piani:

$v \cdot w := \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$

dove θ è l'angolo tra v, w

e $\|v\|$ = lunghezza di v.

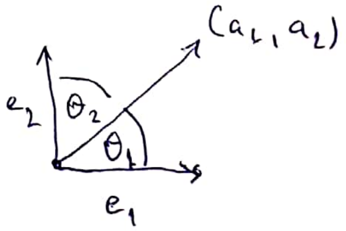


Si osserva: $v \cdot w \in \mathbb{R}$ e $\|v\| = \sqrt{(v \cdot v)} \geq 0$. Inoltre, $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v \cdot w = 0$.

Se v ha coordinate (a_1, a_2)
$\quad w$ —"— (b_1, b_2) $\Big\} \Rightarrow v \cdot w = a_1 b_1 + a_2 b_2$

[Dimostrazione: se $e_1 = (0,1)$, $e_2 = (1,0)$ è la base standard, $v \cdot e_1 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos\theta_1 = a_1$

$v \cdot e_2 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos\theta_2 = a_2$



dove $v = a_1 e_1 + a_2 e_2$. Di maniera simile,

$w = b_1 e_1 + b_2 e_2 \Rightarrow w \cdot e_1 = b_1,\ w \cdot e_2 = b_2$.

Quindi $v \cdot w = (a_1 e_1 + a_2 e_2) w = a_1 (e_1 \cdot w) + a_2 (e_2 \cdot w) = a_1 b_1 + a_2 b_2$]

Def. Siano $v := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $w := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ due vettori in $\mathbb{R}^n$.

Il loro prodotto scalare è
$\langle v, w \rangle := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}$
$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si chiama prodotto scalare standard.

Proprietà

1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

2) Per $v \in \mathbb{R}^n$ fisso la funzione $w \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Di maniera simile, per w fisso $v \mapsto \langle v, w \rangle$ è lineare.

3) $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \langle v, v \rangle \geq 0$, e $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.
[Infatti, per v come sopra $\langle v, v \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$.]

Def. Se $v \in \mathbb{R}^n$, la sua norma è $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Complemento: In generale, se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, un prodotto scalare su V si definisce come una funziona $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$ con le proprietà 1), 2), 3).
In generale ci sono molti prodotti scalari su V. Per esempio, se $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ e $V = \mathbb{R}^n$,

$$(v, w) \mapsto \lambda_1 a_1 b_1 + \dots + \lambda_n a_n b_n$$

è un prodotto scalare. Il prodotto standard è il caso $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$. Noi lavoreremo sempre con il prod. standard.

La nozione generale di perpendicolarità è:

Def $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono ortogonali se $\langle v, w \rangle = 0$.
$v_1, \dots, v_r$ è un sistema ortogonale se
$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.
$v_1, \dots, v_r$ è un sistema ortonormale se è ortogonale e $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ $\forall i$.

Prop. Un sistema ortogonale di vettori è lin. indipendente.

Dim. Sia $v_1, \dots, v_r$ un sistema ortogonale.

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \quad / \langle -, v_1 \rangle$

$$\alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=\lambda \neq 0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_1 \rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$. Di maniera simile, facendo il prodotto scalare con $v_2, v_3, \dots, v_n$, si ottiene $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$.

Esempio. Se $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, allora $e_1, \dots, e_n$ è un sistema ortonormale.

Osservazione: Abbiamo visto che per v fisso la funzione $\varphi_v : w \mapsto \langle v, w \rangle$ è lineare.

Se $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, $\langle v, e_i \rangle = a_i \quad i = 1, \dots, n$.

Viceversa, ogni funzione lineare $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ è determinata da $\varphi(e_1) =: a_1, \varphi(e_2) =: a_2, \dots, \varphi(e_n) =: a_n$ perchè se $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$, allora

$\varphi(w) = b_1 \varphi(e_1) + b_2 \varphi(e_2) + \dots + b_n \varphi(e_n) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Quindi $\varphi(w) = \langle v, w \rangle$, dove $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$!

Conclusione: Per ogni funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(w) = \langle v, w \rangle \; \forall w \in \mathbb{R}^n$, quindi $\varphi = \varphi_v$.

Osservazione: Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo $\varphi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Allora

$\mathrm{Ker}(\varphi_v) = \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \}$

Notazione: $\mathrm{Ker}(\varphi_v) =: \langle v \rangle^\perp$.

Terminologia: $\langle v \rangle^\perp$ è il sottospazio ortogonale a v.

Se $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$,

$$\langle v \rangle^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0 \right\}$$

quindi $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ è soluzione di $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.

Generalizzazione: Se $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp := \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r)$$
$$= \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle = \dots = \langle v_r, w \rangle = 0 \}$$
$$= \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r) \}$$
$$\uparrow$$

[Infatti, se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$,

$\langle v, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \dots + \alpha_r \langle v_r, v \rangle = 0$]

Se $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \dots, v_r = \begin{bmatrix} a_{r1} \\ a_{r2} \\ \vdots \\ a_{rn} \end{bmatrix}$,

$\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp$ = soluzioni del sistema omogeneo
$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Esempio. Siano $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Troviamo il sottospazio

$\langle v, w \rangle^\perp$. Dopo la ricetta sopra, è il sottospazio delle soluzioni di
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

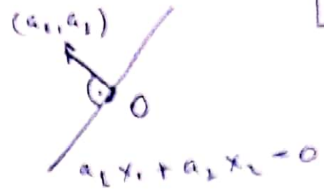
Troviamo una base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= -x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Soluzione generale: $\begin{bmatrix} s \\ -s-t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=: v_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: v_2}$

$\Rightarrow v_1, v_2$ è una base di $\langle v, w \rangle^\perp$.

Interpretazione geometrica: se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,



$\langle v \rangle^\perp$ = retta di equazione $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$

[perpendicolare a $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$]

Se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\langle v \rangle^\perp$ = piano di equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (perpendicolare a v)

__Teorema__. Ogni sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale. [=: ON]

__Dim.__ Induzione su $\dim V$.

$\dim V = 0, 1$: ovvio. Supponiamo $\dim V = m$ e il teorema conosciuto per $m-1$. Sia $v \neq 0$ un vettore di V. Poniamo:

$\langle v \rangle^\perp := \{ w \in V : \langle v, w \rangle = 0 \}$. Allora

$\langle v \rangle^\perp = \mathrm{Ker}(\varphi_v)$, dove $\varphi_v : w \mapsto \langle v, w \rangle \quad \forall w \in V$.

Come $v \neq 0$, $\mathrm{Im}(\varphi_v) = \mathbb{R} \Rightarrow \dim \langle v \rangle^\perp = m-1$.

Per ipotesi di induzione, $\langle v \rangle^\perp$ ammette una base ortonormale $v_2, \dots, v_m$. Sia $v_1 := \frac{v}{\|v\|}$. Allora $\|v_i\| = 1 \ \forall i$ e $v_1, \dots, v_m$ è una base ortonormale di V [infatti, $\langle v_1, v_i \rangle = 0$ $i > 1$ perché $v_i \in \langle v \rangle^\perp$ $i > 1$ e $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $i \neq j > 1$ per ipotesi.
Quindi $v_1, \dots, v_m$ è un sistema ortogonale $\Rightarrow$ lin. indipendente di m vettori in V.]

__Cor.__ Sia $v_1, \dots, v_r$ un sistema ortonormale in $\mathbb{R}^n$. Allora $\exists \, v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$: $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una base ON di $\mathbb{R}^n$

__Dim.__ Dopo il teorema $\langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp$ ammette una base ON $v_{r+1}, \dots, v_m$. Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $v \mapsto \begin{bmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_r \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$

Allora $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)$ è la base standard di $\mathbb{R}^r$.

Quindi $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = n - \dim \mathrm{Im}(\varphi) = n - r$.

Ma $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp \Rightarrow m = n$ e $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è una base ON di $\mathbb{R}^n$.

La dimostrazione dà anche:

__Cor.__ $\dim \langle v_1, \dots, v_r \rangle^\perp = n - r$.

Se $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio, sia $V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w\rangle = 0 \ \forall v \in V\}$

Cor. $V \cap V^\perp = \{0\}$ e $\mathrm{Span}(V, V^\perp) = \mathbb{R}^n$. In particolare, $\dim V + \dim V^\perp = n$.

Dim. Se $v \in V \cap V^\perp$, $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Per il resto, sia $v_1, \dots, v_r$ una base ON di V. Allora $V^\perp = \langle v_1, \dots, v_r\rangle^\perp$ e si applica il Cor. precedente.

A cosa serve una base ON di $\mathbb{R}^n$?

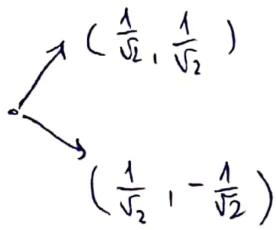
Prop. Se $v_1, \dots, v_n$ è una base ON di $\mathbb{R}^n$, allora $\forall v \in \mathbb{R}^n$:
$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$$
[L'abbiamo già visto nel caso della base standard]

Dim. Come $v_1, \dots, v_n$ è una base, $\exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$: $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Ma allora
$$\langle v, v_i\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i\rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_i\rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i\rangle = \alpha_i$$
perchè $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ $i \neq j$ è $= 1$ $i = j$.

Quindi il prodotto scalare dà le coordinate di un vettore rispetto ad una base ON.

Esempi. 1) La base standard di $\mathbb{R}^n$ è ON, notiamola $e_1, \dots, e_n$.

Se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $a_i = \langle v, e_i\rangle$.



2) $\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{=: u_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{=: u_2}$ è una base ON di $\mathbb{R}^2$

[Infatti, $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ e $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = 1$.]

Cerchiamo le coordinate di $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ rispetto a u_1, u_2: $\langle e_1, u_1\rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle e_1, u_2\rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Di maniera simile, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Come trovare esplicitamente una base ON in $V \subset \mathbb{R}^n$?

<u>$\dim V = 1$</u>. se $V = \langle v \rangle$, $\bar{v}_1 := \frac{v}{\|v\|}$ è una base ON.

<u>$\dim V = 2$</u>: se v_1, v_2 base di V, $\bar{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ come sopra

$w_2 := v_2 - \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1$ soddisfa

$$\langle w_2, \bar{v}_1 \rangle = \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle - \langle v_2, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}_{1} = 0.$$

Quindi se $\bar{v}_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|}$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ è una base ON

<u>$\dim V = 3$</u>: Se v_1, v_2, v_3 base di V, cambiamo $v_1 \rightsquigarrow \bar{v}_1$, $v_2 \rightsquigarrow \bar{v}_2$ tali che $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ base ON di $\langle v_1, v_2 \rangle$
[possibile, l'abbiamo visto nel caso $\dim V = 2$.] Sia

$w_3 := v_3 - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2$. Allora

$$\langle w_3, \bar{v}_1 \rangle = \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle}_{1} - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle}_{0} = 0,$$

$$\langle w_3, \bar{v}_2 \rangle = \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle - \langle v_3, \bar{v}_1 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle}_{0} - \langle v_3, \bar{v}_2 \rangle \underbrace{\langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle}_{1} = 0$$

$\Rightarrow$ Se $\bar{v}_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|}$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ base ON

<u>Caso generale</u> $\dim V = n$: se $v_1, \dots, v_n$ base di V
possiamo successivamente modificarla:

$v_1 \rightsquigarrow \bar{v}_1$ base ON di $\langle v_1 \rangle$

$v_1, v_2 \rightsquigarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2$ — " — $\langle v_1, v_2 \rangle$

$\vdots$

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rightsquigarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ base ON di $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$

$$w_n := v_n - \langle v_n, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle v_n, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2 - \dots - \langle v_n, \bar{v}_{n-1} \rangle \bar{v}_{n-1}.$$

Come sopra, si verifica che con $\bar{v}_n := \frac{w_n}{\|w_n\|}$
$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ è una base ON di V.

Questo è l'<u>algoritmo</u> di <u>Gram - Schmidt</u>.

Esempi. 1) Sia $V = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_2}\right) \subset \mathbb{R}^3$

Gram-Schmidt:

$\|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow \bar{v}_1 := \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

$\langle v_2, \bar{v}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow w_2 := v_2 - \langle v_2, \bar{v}_1\rangle \bar{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{bmatrix}$

$\|w_2\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \bar{v}_2 := \begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\\sqrt{2}/\sqrt{3}\end{bmatrix}$ e $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ base ON

2) $V = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$. Gram-Schmidt dà una base ON di V abbastanza brutta (si può provare!) (*)

Ma si può anche osservare che

$V = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ base ON

Quindi Gram-Schmidt produce <u>una</u> base ON, non necessariamente la più semplice!

3) $V = \mathrm{Span}(u_1, u_2) \subset \mathbb{R}^3$, $u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}4\\0\\-1\end{bmatrix}$ Gram-Schmidt:

$\|u_1\| = \sqrt{2}$, $\bar{v}_1 := \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$ come sopra.

$\langle u_2, \bar{v}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_2, u_1\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}}$.

$w_2 := \begin{bmatrix}4\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}$ $\|w_2\| = 3$

$\Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}2/3\\-2/3\\-1/3\end{bmatrix}$ soddisfa $\|\bar{v}_2\| = 1$ e $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ base ON.

Cerchiamo di completarla in una base ON di $\mathbb{R}^3$:

$V^\perp$ è il sottospazio dei soluzioni di
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = -x_2 = \frac{x_3}{4} \Rightarrow w = \begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$ base di $V^\perp$.

$\|w\| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 := \begin{bmatrix}1/3\sqrt{2}\\-1/3\sqrt{2}\\4/3\sqrt{2}\end{bmatrix}$ base ON di $\mathbb{R}^3$.

(*) Soluzione: $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$ $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{28-18\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix}2\sqrt{2}-3\\\sqrt{2}-3\\0\end{bmatrix}$

Il teorema spettrale

Def. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$.
$\overset{\shortparallel}{[a_{ij}]}$ Formulazione equivalente: $A = A^T$ dove A^T = matrice trasposta.

Lemma. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simetrica, allora $\forall v,w \in \mathbb{R}^n$ vale
$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ con il prodotto scalare standard.

Dim. Siano $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix}$

$$Av = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \dots + a_{nn}b_n\end{bmatrix} \Rightarrow \langle Av, w\rangle = \begin{cases} a_{11}b_1c_1 + \dots + a_{1n}b_nc_1 + \\ a_{21}b_1c_2 + \dots + a_{2n}b_nc_2 + \dots \\ \vdots \\ a_{n1}b_1c_n + \dots + a_{nn}b_nc_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle Av, w\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_jc_i$$

In modo simile, $\langle v, Aw\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_jb_i$

Come $a_{ij} = a_{ji}$, questi sono uguali.

Teorema spettrale per matrici simetriche:
Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simetrica, ogni autovalore di A è reale, ed A è diagonalizzabile in una base ON di autovettori.

Quindi una matrice simetrica è sempre diagonalizzabile!
Un'applicazione:

Cor. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice simetrica tale che ogni autovalore di A è ≥ 0. Allora $\exists \sqrt{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:
$$(\sqrt{A})^2 = A.$$

Dim. Se $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$ è diagonale, si prende

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$$ [possibile perchè $\forall \lambda_i \geq 0$]

Nel caso generale $\exists P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile : $D = P^{-1}AP$ è diagonale (dopo il teorema spettrale). Abbiamo appena visto: $\sqrt{D}$ esiste. Quindi $\sqrt{A} := P\sqrt{D}P^{-1}$ soddisfà

$$(\sqrt{A})^2 = P\sqrt{D}P^{-1}P\sqrt{D}P^{-1} = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Oss. $\sqrt{A}$ non esiste sempre! Infatti, se $n=1$, $A=[a]$ e $\sqrt{A}$ esiste solo se $a \geq 0$. In generale, se $A = B^2 \Rightarrow \det(A) = \det(B)^2$ $\Rightarrow \sqrt{A}$ non esiste se $\det(A) < 0$.

Una parte della dimostrazione del teorema è data dalla

Prop. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha autovalori reali e soddisfà $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ $\forall v, w \Rightarrow \exists$ base ON di autovettori di A.

Si ricorda che se A è simetrica, $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ vale (Lemma).

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di A e v autovettore: $Av = \lambda v$. Scambiando $v \rightsquigarrow \frac{v}{\|v\|}$ si può supporre $\|v\| = 1$.
Induzione su n: per $n=1$ v base ON. Se $n>1$, sia $V := \langle v\rangle^{\perp}$. Si osserva: $\forall w \in V$ $Aw \in V$. Infatti, $\langle v, Aw\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = 0$ perchè $w \in \langle v\rangle^{\perp}$.
Ma allora $Aw \in \langle v\rangle^{\perp}$, i.e. $Aw \in V$.
Come $\dim V = n-1$, $\exists$ base ON di autovettori $v_2, \ldots, v_n$ per A come applicazione lineare su $V (\simeq \mathbb{R}^{n-1})$. Allora $v, v_2, \ldots, v_n$ è base ON per A su $\mathbb{R}^n$.

Resta da dimostrare che gli autovalori di una matrice simetrica sono reali. Per questo bisogna passare a $\mathbb{C}^n$.

Def. Prodotto scalare standard su $\mathbb{C}^n$:
Se $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$

$$\langle v, w\rangle := a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \ldots + a_n\bar{b}_n$$ [$\bar{\ }$ = coniugazione complessa $a+bi \mapsto a-bi$]

Norma di $v \in \mathbb{C}^n$:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2}$$

Da notare: se $v, w \in \mathbb{R}^n$, questo è il prodotto scalare stand. su $\mathbb{R}^n$.

Proprietà: simili al prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, ma:

* $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
* $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ per $\lambda \in \mathbb{C}$, ma $\langle v, \lambda w\rangle = \bar\lambda\langle v, w\rangle$.

Prop. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, considerata come matrice in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
Allora $\forall v, w \in \mathbb{C}^n$ $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$.

Dimostrazione: come nel caso di $\mathbb{R}^n$, utilizzando che $a_{ij} = a_{ji} = \overline{a_{ji}}$.

Cor. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, ogni autovalore di A è reale.

Dim. Lavoriamo su $\mathbb{C}^n$: sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore, $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore. Allora $Av = \lambda v$, quindi
$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar\lambda\langle v, v\rangle$
Come $v \neq 0$, $\langle v, v\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar\lambda$.

Complemento: Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice tale che $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i, j$. [Tale matrice si chiama autoaggiunta o Hermitiana]. Allora i stessi argomenti mostrano: gli autovalori di A sono reali ed A è diagonalizzabile in una base ON di $\mathbb{C}^n$.
[Forma complessa del teorema spettrale.]

Esempio: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ Vediamo subito: A simmetrica $\Rightarrow$ diagonalizzabile

Di più, colonne di A dipendenti $\Rightarrow$ rango$(A) < 3$ (infatti $= 1$)
$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) \neq 0 \Rightarrow 0$ autovalore. $\Downarrow$ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$

Quindi c'è un terzo autovalore. Troviamolo insieme con un autovettore:
$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda y = -2\lambda x = -\lambda z \Rightarrow w := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2\end{bmatrix}$ autovettore

$\|w\| = 3 \Rightarrow \frac{w}{\|w\|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3\end{bmatrix}$ ha norma 1. $\Rightarrow \lambda = -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 = 7$

Resta da trovare una base ON di $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix} : -x + 2y - 2z = 0\right\}$

Una base: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0\end{bmatrix}$ (sono lin. indep. e Ker ha dimensione 2)

Gram-Schmidt: $\bar v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2\end{bmatrix}$, $\langle \bar v_1, v_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt2}$

$\Rightarrow w_2 = v_2 - \langle v_2, \bar v_1\rangle \bar v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1/2\end{bmatrix} \Rightarrow \bar v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{3}{\sqrt2}\cdot w_2$.