UNIFORME CONTINUITÀ

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

Ripasso: f è continua in A se (versione ε/δ)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \ \boxed{\exists \delta > 0} \ \forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

questo δ dipende da ε e da x

potrei scrivere $\delta(\varepsilon, x)$

Def. f è uniformemente continua in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \boxed{\exists \delta > 0} \ \forall x \in A \ \forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

questo δ dipende solo da ε,

quindi c'è un δ comune che va bene per ogni $x \in A$

Oss. Si ottengono def. equiv. chiedendo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

o imponendo $y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$

(pensarci per bene!)

Oss. La negazione dell'unif. continuità è

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in A \ \exists y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

Brutalmente: se f non è unif. continua, allora posso trovare x e y vicini quanto voglio con $f(x)$ e $f(y)$ lontani almeno ε_0

Prop. Se $f: A \to \mathbb{R}$ è lip., allora è pure unif. continua

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$ t.c. ...
Per ipotesi esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Pongo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ e ottengo che, se $|x-y| \leq \delta$ vale

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon .$$

Esempio 1 $f(x) = x^2 \qquad A = [0, 27]$

f lip. in A ($f'(x)$ limitata) $\Rightarrow$ f unif. cont. in A.

Esempio 2 $f(x) = x^2 \qquad A = \mathbb{R}$

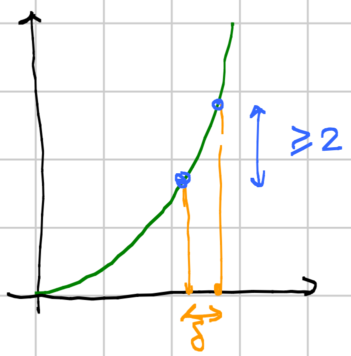
Allora f non è unif. continua

Devo far vedere che posso trovare x e y vicini quanto voglio, ma con immagini lontane

$$|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = |x-y| \cdot |x+y|$$

Dato $\delta > 0$ pongo $\quad x = \frac{1}{\delta}, \quad y = \frac{1}{\delta} + \delta \quad$ e ho che

$$x - y = \delta \qquad e \qquad f(y) - f(x) = \delta\left(\frac{2}{\delta} + \delta\right) \geq 2$$



Brutalmente: l'uniforme continuità dice che se controllo il gap orizzontale, so controllare il gap verticale.

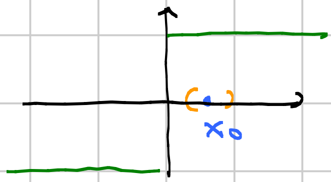
<u>Oss.</u> Nel mondo reale, supponiamo di voler calcolare $f(x)$ con un certo errore. L'unif. continuità mi dice che se l'errore orizz. è $\leq \delta$, allora l'errore verticale è $\leq \varepsilon$. (Voglio calcolare $f(\sqrt{2})$ calcolando $f(1.4\ldots)$)

<u>Oss.</u>
- La continuità è una proprietà locale, l'unif. cont. è una propr. globale.
- La continuità è una proprietà topologica, l'unif. cont. è una proprietà metrica.
- La continuità si rincolla, l'unif. continuità NO, cioè

$$f \text{ cont. in } A + f \text{ cont. in } B \Rightarrow f \text{ cont. in } A \cup B$$

$$f \text{ unif. cont in } A + f \text{ unif. cont. in } B \underset{\text{NO}}{\not\Rightarrow} f \text{ unif. cont. in } A \cup B$$

<u>Esempio</u> $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ zona A / $\rightsquigarrow$ zona B

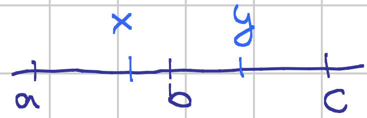


f non è u.c. in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (trovo p.ti vicini quanto voglio con immagini lontane)

Prop. (Buon rincollamento) Siano $a < b < c$ e sia $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. Supponiamo f u.c. in $[a, b]$ e $[b, c]$. Allora f è UC in $[a, c]$.

$\boxed{\text{Dim}}$ Prendo $\varepsilon > 0$. Allora esistono
- $\delta_1 > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni x e y in $[a, b]$ con $|x - y| \leq \delta_1$
- $\delta_2 > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni x e y in $[b, c]$ con $|x - y| \leq \delta_2$.

Dico che $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ va bene ovunque.
Prendo x e y in $[a,c]$ con $|x-y| \leq \delta$. Ho 3 casi



- Se x e y stanno in $[a,b]$ è fatta
- " " " " $[b,c]$ è fatta
- resta il caso wlog in cui $x \in [a,b]$ e $y \in [b,c]$
  Allora

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f(b)| + |f(b)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(bisogna notare che $|y-b| \leq \delta_2$ e $|b-x| \leq \delta_1$)

— o — o —

<u>Proprietà semplici</u>

① f u.c. in A e $B \subseteq A \Rightarrow f$ u.c. in B (chiedo meno)

② f e g u.c. in $A \Rightarrow f+g$ u.c. in A

<u>Dim</u>. Fisso $\varepsilon > 0$. Ottengo

- $\delta_1 > 0$ t.c. $|f(y)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \forall$ x e y in A con $|x-y| < \delta_1$
- $\delta_2 > 0$ t.c. $|g(y)-g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad$ " $\quad$ " $< \delta_2$

Prendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e vedo che sommando le cose funzionano.

③ f u.c. in A, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$ u.c. in A

(Basta prendere nuovo δ = vecchio δ corrispondente a $\frac{\varepsilon}{\lambda}$)

④ f e g U.C. in A $\Longrightarrow$ $f \cdot g$ U.C. in A

No! No!

(Basta prendere $f(x) = g(x) = x$ su $\mathbb{R}$)

⑤ f e g U.C. e limitate in A $\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x)$ U.C. in A.

SLOGAN: termine misto

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| = |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)|$$

$$\leq |f(y)g(y) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(x)g(x)|$$

$$= |f(y)| \cdot |g(y) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f(y) - f(x)|$$

Dim. Siano $|f(x)| \leq M_f$

$|g(x)| \leq M_g$ per ogni $x \in A$

Sia $M := \max\{M_f, M_g\}$. Dato $\varepsilon > 0$, prendo δ_f e δ_g corrispondenti a

$$\frac{\varepsilon}{2M}$$

Prendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e ho finito perché

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| \leq$$

$$\leq |f(y)| \cdot |g(y) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f(y) - f(x)|$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

se $|x - y| \leq \delta$.

Domanda: e se una sola delle 2 è limitata?