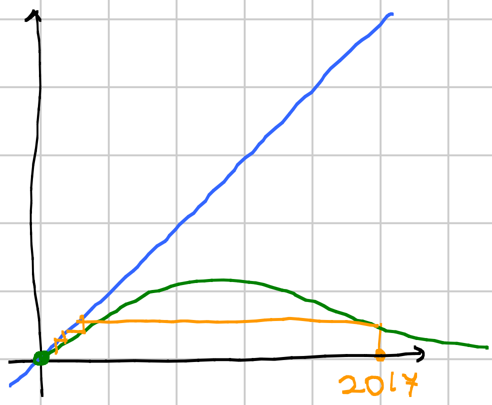
ANALISI 1 - LEZIONE 088

Note Title 15/03/2017

Esempio 1 $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n^2 + 2}$ $x_0 = 2017$

$$f(x) = \frac{x}{2+x^2}$$



Come è messa $f(x)$ risp. a x

$f(x) = x$ $f(x) > x$

$$\frac{x}{2+x^2} > x \iff \frac{x}{2+x^2} - x > 0$$

$$\iff \frac{x(1-2-x^2)}{2+x^2} = -\frac{x(x^2+1)}{x^2+2} > 0 \iff x < 0$$

Vale il segno di uguale $\iff x = 0$. Riassumendo

$$f(x) = x \iff x = 0 \quad ; \quad f(x) > x \iff x < 0$$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (Piano con la monotonia)

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim. (i)}}$ Facile induzione

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Ricorrenza + disequazione. Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $f(x_n) \leq x_n$. Risolvendo $f(x) \leq x$ trovo $x \geq 0$, quindi $x_n \geq 0$, che è vera per il p.to (i)

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Per la (ii) x_n è deb. decr.
Per la (i) x_n è lim. inf.
Teo. succ. monotone $\Rightarrow$ $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Sapendo che ℓ è reale, passo al limite nella ricorr.

succ. shiftata

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \dfrac{x_n}{2+x_n^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \dfrac{\ell}{2+\ell^2} \end{array}$$

$f(x)$ è continua ovunque

Trovo l'eq. $\ell = f(\ell)$ che sappiamo avere come unica sol. reale $\ell = 0$.

Domanda: $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} x_n$ converge? ($x_n \to 0$ è cond. nec.)

Voglio usare il criterio del rapporto.
Prima cosa: osservo che $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (facile induz.)
A quel punto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{x_n}{2+x_n^2}}{x_n} = \frac{1}{2+x_n^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \text{la serie converge}$$

(Brutalmente è come se fosse $x_n \sim \frac{1}{2^n}$)

Altra domanda: per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \underbrace{\alpha^n x_n}_{b_n}$$

Faccio il rapporto su b_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\alpha^{n+1} x_{n+1}}{\alpha^n x_n} = \frac{\alpha}{2+x_n^2} \longrightarrow \frac{\alpha}{2}$$

per $\alpha = 2$ è più diff.
per $\alpha > 2$ div. a $+\infty$
per $\alpha < 2$ conv.

PIANO ALTERNATIVO (Piano con la distanza)

Voglio dim. che $x_n \to 0$. Pongo d_n = distanza tra x_n ed il presunto limite

$$d_n = |x_n - 0| = |x_n|$$

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \frac{d_0}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 0$

Dim (iv) $\quad 0 \underset{\text{val. assol.}}{\leq} d_n \underset{\text{(iii)}}{\leq} \frac{d_0}{2^n}$ + carabinieri

Dim (iii) Segue per induzione dal punto (ii)
(per fare funzionare il seguito serve che al punto (ii) ci sia $d_{n+1} \leq c\, d_n$ con $c < 1$)

Dim (ii) Voglio che $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 0| = |f(x_n) - f(0)| \leq L |x_n - 0| = L d_n$$

L: costante di Lip. di $f(x)$

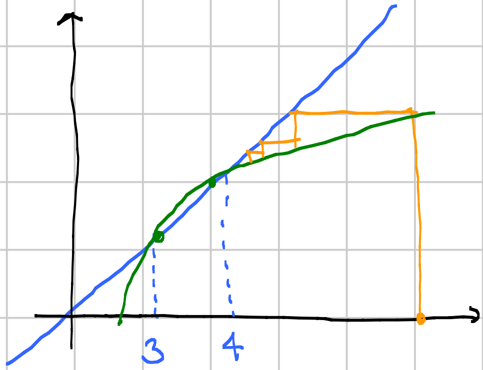
Ora $\quad L = \sup\{|f'(x)| : x \geq 0\} \qquad f'(x) = \frac{2+x^2-2x^2}{(2+x^2)^2}$

$$= \sup\left\{\frac{|2-x^2|}{(2+x^2)^2} : x \geq 0\right\} = \frac{1}{2}$$

bisognerebbe fare lo studio di funzioni

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7x_n - 12} \\ x_0 = 2017 \end{cases}$



$f(x) = \sqrt{7x-12}$ $\qquad f(x) = x$

$x = \sqrt{7x-12}$, $x^2 = 7x-12$, $x = \begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ \searrow 4 \end{smallmatrix}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ Con la distanza

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x-12}}$$ quindi per $x \geq 4$ ho che $0 \leq f'(x) \leq \frac{7}{8}$

quindi $f(x)$ è Lip. in $[4, +\infty)$ con costante $\frac{7}{8}$

Pongo $d_n := |x_n - 4|$

(i) $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione come ler. prec.)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{7}{8} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ((ii) + induzione)

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 4$ ((iii) + carabinieri)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 4| = |f(x_n) - f(4)| \leq \frac{7}{8}|x_n - 4| = \frac{7}{8} d_n$$

$f(x)$ è Lip. con cost. $\frac{7}{8}$ in $[4, +\infty)$

Domanda: come si comporta $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n^{2017}(x_n - 4)}_{a_n}$?

Osservo (cioè dimostro ☺) che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

A quel punto provo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2017}}{n^{2017}} \frac{(x_{n+1}-4)}{(x_n-4)} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2017}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\frac{f(x_n)-4}{x_n-4}}_{\downarrow \atop \frac{7}{8}} \to \frac{7}{8}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-4}{x_n-4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{7x_n-12}-4}{x_n-4} \cdot \frac{\sqrt{\dots}+4}{\sqrt{\dots}+4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{7x_n-12-16}{(x_n-4)(\sqrt{\dots}+4)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7\cancel{(x_n-4)}}{\cancel{(x_n-4)}(\sqrt{\dots}+4)} = \frac{7}{8}$$

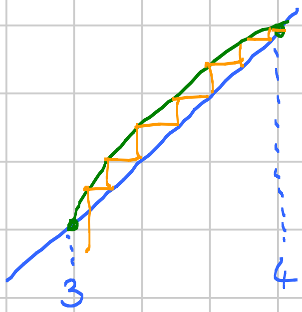
In alternativa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-4}{x_n-4} \underset{x=x_n}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-4}{x-4} \underset{\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 4} \frac{f'(x)}{1} = f'(4) = \frac{7}{8}$$

Poiché rapporto $\to \frac{7}{8}$, la serie converge.

— o — o —

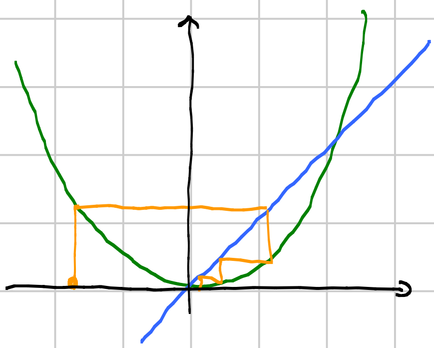
<u>Oss. 1</u> Se avessi avuto dato iniziale $x_0 = 3{,}0001$, allora $x_n \to 4$ crescendo



- Il piano con la monotonia era ok
- Il piano con la distanza NON può funzionare bene, perché serviva la costante di Lip in $[3{,}0001, 4]$, ma questa è di sicuro > 1. (infatti $f'(3) > 1$)

<u>Oss. 2</u> Se ho $\quad x_{n+1} = x_n^2$
$\quad x_0 = -\frac{1}{2}$

conviene fare un piano con monotonia decrescente, ma a partire da $n = 1$.



— o — o —