ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 39

Note Title 21/11/2023

FORMA CANONICA DI JORDAN

Blocco di JORDAN: Matrice quadrata con
- → tutti λ sulla diagonale (λ può essere anche 0 o 1)
- → tutti 1 sopra la diagonale
- → tutto il resto sono zeri

$$\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Matrice di JORDAN: Matrice ottenuta mettendo "lungo la diagonale" dei blocchi di Jordan, con λ uguali o diversi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & & & \\ & 4 & 1 & \\ & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

Oss. Una matrice diagonale è in particolare una matrice di Jordan.
Il numero λ sulla diagonale può essere reale o complesso

Fatto importante: ogni matrice quadrata è simile ad una matrice di JORDAN

— o — o —

$\boxed{\text{Riassunto su diagonalizzazione e Jordan}}$

Due modi equivalenti di intendere il problema

→ Data una matrice quadrata A, trovare una matrice M invertibile tale che

diagonale o JORDAN

$$\boxed{M^{-1} A M = C}$$

→ Data $f: V \to V$ lineare, trovare una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V in cui la matrice associata a f sia la C.

— o — o —

① Una matrice A è $\boxed{\text{diagonalizzabile in } \mathbb{C}}$ se e solo se tutti gli autovalori λ hanno

$$\boxed{m_g(\lambda) = m_a(\lambda)}$$

esponente di $(x-\lambda)$ nella fattorizzazione del pol. caratteristico

dim. autospazio
$= \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda Id))$

La condizione è verificata gratis se gli autovalori sono tutti distinti

② Una matrice A è $\boxed{\text{diagonalizzabile in } \mathbb{R}}$ se e solo se tutti gli autovalori λ sono reali e verificano $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.
Ancora una volta è gratis se sono reali e distinti

③ Una matrice A è $\boxed{\text{diagonalizzabile mediante una } M \text{ ortogonale}}$ (in termini di applicazioni lineari è come dire che la base è ortonormale) se e solo se A è $\boxed{\text{SIMMETRICA}}$, cioè $A^t = A$.

(Questo ci dice in particolare che le matrici simmetriche hanno tutti gli autovalori reali e con $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$)
Questo è il TEOREMA SPETTRALE

④ Una matrice A è jordanizzabile in $\mathbb{C}$ sempre. In tal caso
→ i λ che finiscono sulla diagonale sono gli autovalori contati secondo la loro molteplicità algebrica
→ il numero dei blocchi con un certo λ è $m_g(\lambda)$
(ad esempio se $m_a = 3$ e $m_g = 1 \rightsquigarrow 1$ blocco da 3
$m_a = 3$ e $m_g = 2 \rightsquigarrow 2+1$)
→ in generale il numero di blocchi di grandezza $\geq k$ è dato dalla formula

$$\boxed{\dim(\ker(A-\lambda Id)^k) - \dim(\ker(A-\lambda Id)^{k-1})}$$

⑤ Una matrice A è jordanizzabile in $\mathbb{R}$ se e solo se gli autovalori sono tutti reali

⑥ Se gli autovalori non sono tutti reali, ma i coeff. di A lo sono, esiste una forma di JORDAN reale che si ottiene da quella complessa con la procedura che andiamo a descrivere.

Oss. Se A è reale e $a+ib$ è autovalore di A, allora anche $a-ib$ è autovalore di A (gli autovalori arrivano a coppie)
Inoltre ad ogni blocco di Jordan con $a+ib$ ne corrisponde uno uguale con $a-ib$.

Procedura

$$\begin{pmatrix} a+ib & \\ & a-ib \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+ib & 1 & & \\ & a+ib & & \\ & & a-ib & 1 \\ & & & a-ib \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ & & a & b \\ & & -b & a \end{pmatrix}$$

Esempio di applicazione della procedura

$$\begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2+3i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2-3i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} \boxed{7} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 & & & & \\ & 2+i & 1 & & & \\ & & 2+i & & & \\ & & & 2-i & 1 & \\ & & & & 2-i & 1 \\ & & & & & 2-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 & & \\ -1 & 2 & 0 & 1 & & \\ \hline & & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & & -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline & & & & 2 & 1 \\ & & & & -1 & 2 \end{array}$$

Anche la base di Jordan reale si ottiene prendendo parti reali e immaginarie di quella su $\mathbb{C}$

Stessa cosa per la M di passaggio.

— o — o —