ANALISI 1 — LEZIONE 120

Note Title 03/05/2017

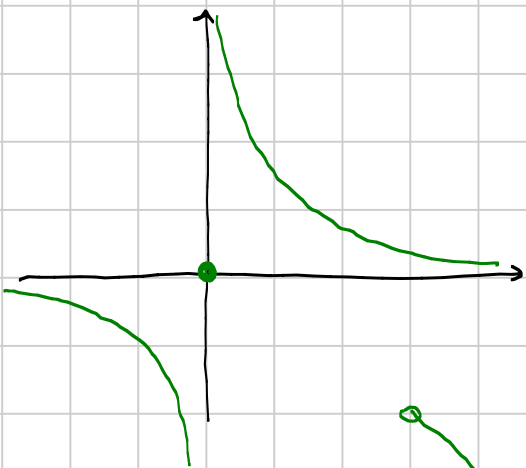
FUNZIONI INVERSE

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi.
Siano $f: A \to B$ e $g: B \to A$ due funzioni.
Si dice che g è la funzione inversa di f se

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B \end{array}}$$

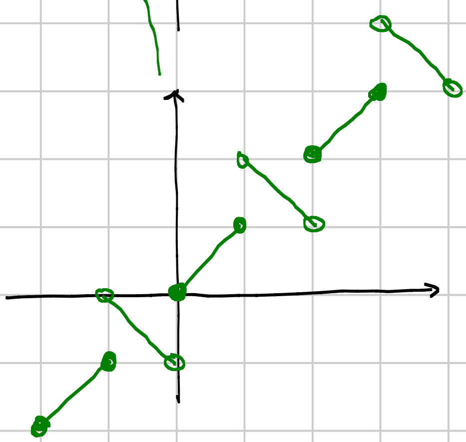
Domande: ① Rapporti invertibilità / monotonia
② Se f è continua, posso dire che g è continua ?
③ Se f è deriv. in $x_0 \in \text{Int}(A)$, posso dire g deriv. in $f(x_0)$
④ Se $f \in C^1$, posso dire $g \in C^1$?
⑤ Se $f \in C^k$, posso dire $g \in C^k$?

1.1 Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile, posso dire che f è monotona (strettamente)?



→ Se è monotona, lo è strettamente
(se $f(a_1) = f(a_2)$ con $a_1 \neq a_2$, allora addio iniettività

→ In generale la risposta è NO



1.2 Se $f: A \to B$ è monotona e invertibile, posso dire che g è monotona ?

$\boxed{\text{SI}}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo f crescente (per forza strettamente)
Voglio dim. che g è cresc. strett.
Prendo $b_1 < b_2$ e mostro che $g(b_1) < g(b_2)$
Se così non fosse, sarebbe

- $g(b_1) = g(b_2)$ $\rightsquigarrow$ NO, perché g non sarebbe iniettiva
- $g(b_1) > g(b_2)$ $\rightsquigarrow$ applico f (posso...)

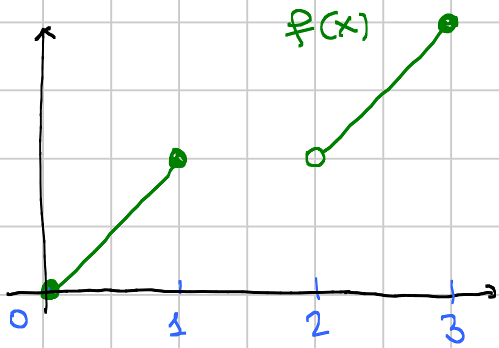
$$f(g(b_1)) > f(g(b_2)), \text{ cioè } b_1 > b_2, \text{ assurdo.}$$

Analogo nel caso decrescente (farlo!).

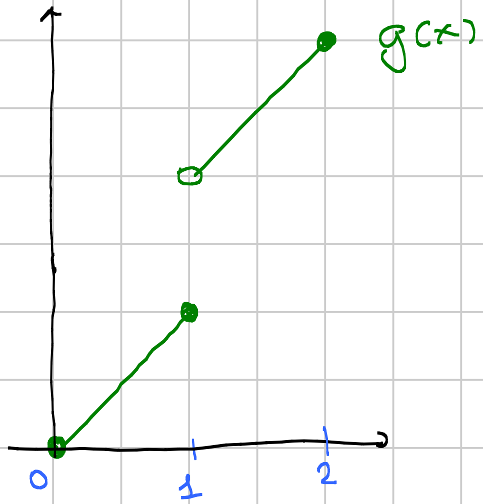
—o—o—

$\boxed{2}$ Rapporti invertibilità – continuità: se f è cont., g è cont.?

$\boxed{\text{NO}}$



$f : [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$
iniettiva e surg., quindi invertibile



$g : [0,2] \to [0,1] \cup (2,3]$

$g(x)$ è discontinua in $x=1$

$\boxed{2.1}$ Se A è compatto e f è continua e invertibile, allora g è continua

$\boxed{2.2}$ Se A è convesso e f è continua + invertibile, allora g è continua

LEMMA DELLA SOTTO-SOTTO

Sia a_n una successione. Supponiamo che ogni sottosucc. a_{n_k} abbia a sua volta una sotto-sotto-succ. $a_{n_{k_i}}$ convergente ad un certo $l \in \overline{\mathbb{R}}$
(sempre con lo stesso l).
Allora $a_n \to l$ (tutta quanta)

Dim. Voglio dim. che $a_n \to l$. Facciamo per semplicità il caso $l \in \mathbb{R}$. Mi serve che

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |a_n - l| \leq \varepsilon \qquad \text{definitivamente}$$

Supponiamo per assurdo che sia falso. Allora

$$\exists \, \varepsilon_0 > 0 \quad \text{t.c.} \quad |a_n - l| > \varepsilon_0 \quad \text{frequentemente},$$

cioè per infiniti indici, cioè esiste una s. succ. a_{n_k} tale che

$$|a_{n_k} - l| > \varepsilon_0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

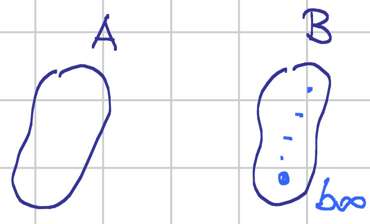
Per ipotesi questa s. succ. a_{n_k} ha una sotto-sotto $a_{n_{k_i}}$ che tende ad l, il che però va contro la disuguaglianza $(*)$.

— o — o —

Dim. teorema 2.1 A compatto, $f: A \to B$ inv. e cont.
$\Rightarrow g: B \to A$ continua.

Prendo una qualunque succ. $b_n \to b_\infty$ di elem. di B e voglio dimostrare che $g(b_n) \to g(b_\infty)$
Poniamo

$$a_n := g(b_n) \qquad a_\infty := g(b_\infty)$$



Vogliamo dimostrare che ogni s. succ. a_{n_k} ammette una s.s. succ. tendente ad a_∞.

Ora a_{n_k} è una succ. in A, che è cpt, quindi ammette

$a_{n_{k_i}} \longrightarrow l \in A$ Vorrei tanto che $l = a_\infty$

Applico $f(x)$ e ottengo

$$\begin{array}{ccc} f(a_{n_{k_i}}) & \longrightarrow & f(l) \quad (f \text{ cont.}) \\ \| & & \| \\ b_{n_{k_i}} & \longrightarrow & b_\infty \end{array}$$

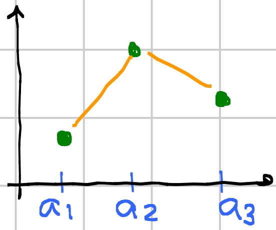
Quindi $f(l) = b_\infty$, cioè applicando g: $l = g(f(l)) = g(b_\infty) = a_\infty$

— o — o —

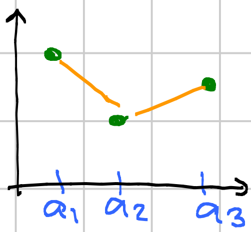
LEMMA Sia A convesso, sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua + iniettiva. Allora f è monotona.

LEMMA (del triangolino) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione NON monotona (nemmeno debolmente). Allora esistono 3 p.ti $a_1 < a_2 < a_3$ in A per cui vale una delle seguenti

① $f(a_2) > f(a_1)$, $f(a_2) > f(a_3)$



② $f(a_2) < f(a_1)$, $f(a_2) < f(a_3)$



Dim Non la so fare (brevemente)

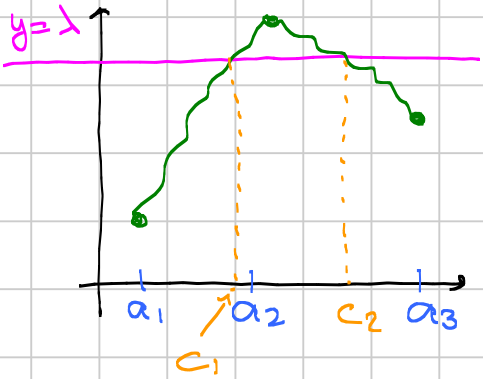
$\boxed{\text{Dim. che cont. + insieme conv. + iniett} \Rightarrow \text{monot.}}$

Supponiamo per assurdo che f non sia monotona. Allora vale la tesi del lemma del triangolino.

Supponiamo di essere nel 1° caso, cioè

esistono $a_1 < a_2 < a_3$ con $f(a_2) >$ degli altri 2.
Scelgo un valore λ tale che

$$f(a_1) < \lambda < f(a_2)$$
$$f(a_3) < \lambda < f(a_2)$$



Per il teo. valori intermedi in $[a_1, a_2]$
esiste $c_1 \in (a_1, a_2)$ t.c. $f(c_1) = \lambda$
Analogamente
esiste $c_2 \in (a_2, a_3)$ t.c. $f(c_2) = \lambda$
$\Rightarrow$ addio iniettività

Ho usato A convesso per applicare teo. valori intermedi.

— o — o —

$\boxed{\text{LEMMA}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$ strett. monotona.
Allora

$$f \text{ è continua} \iff f(A) \text{ è convessa}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ teorema dei valori intermedi

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo f NON continua in $x_0 \in A$.
Allora poniamo

$$\ell := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$
$$L := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

esistono per monotonia e verifico $\ell \leq L$

Se $\ell = L$, allora è continua in x_0. Se $\ell < L$, allora tutto l'intervallo (ℓ, L) non è contenuto nell'immagine (dopo x_0 f vale $\geq L$, prima di x_0 f vale $\leq \ell$)

— o — o —