ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 41

2. Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$

(a) è diagonalizzabile sui reali,
(b) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale,
(c) ha il ker non banale,
(d) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,
(e) ammette l'autovalore $\lambda = 2 + i$,
(f) ammette $(1, 5)$ come autovettore,
(g) non è diagonalizzabile sui complessi.

(b) Teorema spettrale $\Leftrightarrow$ simmetrica $\Leftrightarrow a = 2$

(c) $\Leftrightarrow$ Det $= 0 \Leftrightarrow 3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

In questo caso

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = \text{Span}((-2, 1))$$

(a) $\Leftrightarrow$ autovalori reali con $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

$Tr = 4 \qquad Det = 3 - 2a \qquad p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + (3 - 2a) = 0$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3 + 2a} = 2 \pm \sqrt{2a+1}$$

- $2a + 1 > 0$, cioè $a > -\frac{1}{2}$, allora 2 radici reali distinte $\rightsquigarrow$ diagonalizzabile in $\mathbb{R}$
- $2a + 1 < 0$, cioè $a < -\frac{1}{2}$, allora 2 radici davvero complesse e distinte $\rightsquigarrow$ diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ ma non in $\mathbb{R}$
- $2a + 1 = 0$ cioè $a = -\frac{1}{2}$, allora due radici reali coincidenti che per forza sono 2 (essendo $Tr = 4$)

Dipende dalle molteplicità

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \qquad A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad m_g(2) = 1 \rightsquigarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusione: diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ $\iff$ $a > -\frac{1}{2}$

(g) Se $a \neq -\frac{1}{2}$ allora è diag. in $\mathbb{C}$ (autovalori distinti)

Se $a = -\frac{1}{2}$ allora non è diag. in $\mathbb{C}$

(d) Ammette autovalore $\lambda = 1$ $\iff$ $A - Id$ ha ker non banale

$\iff$ $\text{Det}(A - Id) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix} \qquad A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 0 \iff a = 0$$

Verifica: per $a=0$ diventa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ che si vede avere autovalori 1 e 3, quindi forma canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e volendo si trova la M di passaggio.

(e) Ammette autovalore $\lambda = 2 + i$ (l'altro sarà $\lambda = 2 - i$)

$\boxed{1^\circ \text{modo}}$ $\text{Det}(A - (2+i)Id) = 0$

$$A - (2+i)Id = \begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ a & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = (1-i)(-1-i) - 2a$$

$$= -1 - \cancel{i} + \cancel{i} - 1 - 2a = 0$$

$$\iff 2a = -2 \iff a = -1$$

$\boxed{2^\circ \text{modo}}$ Avevamo scoperto che $\lambda = 2 \pm \sqrt{2a+1}$

e questo diventa $2 \pm i$ se e solo se $2a+1 = -1$,

cioè $a = -1$ ☺

(f) Ammette $(1,5)$ come autovettore

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$11 = \lambda$ l'altro sarà -7

$a + 15 = 5\lambda \rightsquigarrow a + 15 = 55$

$\rightsquigarrow a = 40$

[Verificare che per $a = 40$ la forma canonica sia $\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ trovando anche la M di passaggio]

Esercizio Trovare la forma canonica di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$

[Per esercizio provare a calcolare bovinamente $p_A(\lambda)$]

Più astuto: rango $= 2$ $\Rightarrow$ Dim (ker) $= 2$

$\Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore con $m_g(0) = 2$

(quella algebrica non la sappiamo)

Osservo che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

Questo ci dice che $\lambda = 8$ è un autovalore e $(1,1,1,1)$ sta nel suo autospazio.

In questo momento conosciamo gli autovalori $0, 0, 8$.

Per forza l'ultimo è -4 (perché $\operatorname{Tr} A = 4$)

[Il bovino avrebbe trovato $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-8)(\lambda+4)$]

Ora sappiamo che A è diagonalizzabile poiché $m_g(0) = m_a(0)$ quindi la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Resta da trovare la M di passaggio

$\rightarrow$ La 3ª colonna è un autovettore di 8, cioè ad es $(1,1,1,1)$

$\rightarrow$ Le prime due colonne sono una base di ker

$\rightarrow$ La 4ª colonna è un autovettore di -4 oppure un qualunque vettore $\perp$ ai primi 3, ad esempio $(1,-1,1,-1)$

Posso rendere le colonne di M ortonormali prendendo

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

In questo modo $M^{-1} = M^t$

[Verifica: $M^t A M = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 8 & \\ & & & -4 \end{pmatrix}$]

Esercizio $\mathbb{R}_{\leq 3}[x] = V$ $\qquad p(x) \to p'(x)$

Trovare la forma canonica.

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Scrivo la matrice dell'applic. usando in partenza ed arrivo la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$1 \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow 1$

$x^2 \longrightarrow 2x$

$x^3 \longrightarrow 3x^2$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x^3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (1)' & (x)' & (x^2)' & (x^3)' \end{matrix} & \end{array}$$

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Calcolo gli autovalori. Essendo triangolare superiore, $\lambda = 0$ è l'unico autovalore con $m_a(0) = 4$

$m_g(0) = \mathrm{Dim}(\ker) = 1$ perché rango $= 3$.

Quindi la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

unico blocco da 4

Trovo base jordanizzante

$f(v_1) = 0 \rightsquigarrow v_1 = 1$ (o anche $v_1 = 7$)

$f(v_2) = v_1 \rightsquigarrow (v_2)' = 1 \rightsquigarrow v_2 = x$

$f(v_3) = v_2 \rightsquigarrow (v_3)' = x \rightsquigarrow v_3 = \frac{1}{2}x^2$

$f(v_4) = v_3 \rightsquigarrow (v_4)' = \frac{1}{2}x^2 \rightsquigarrow v_4 = \frac{1}{6}x^3$

Quindi la base jordanizzante è $\{1, x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{6}x^3\}$

[Scrivere M di passaggio e fare la verifica].

— o — o —