9 Derivate

Definizione 9.0.1 (Derivata)**.** *Dato un $A \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$, un $x_0 \in Acc(A) \cap A$. Se esiste il limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ allora l si dice derivata di f in x_0. Se $l \in \mathbb{R}$ (è finito) allora f si dice derivabile in x_0 la derivata si indica con $f'(x)$ oppure $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x)$, quindi:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

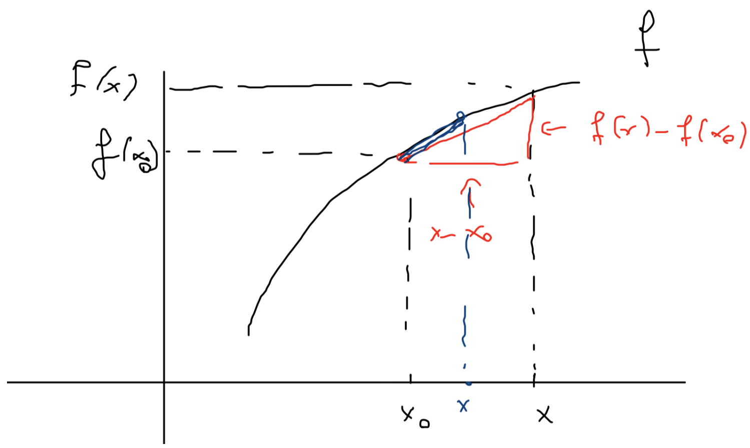


Figure 39: Derivata $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ con rapporto incrementale

Osservazione 9.0.1. Osserviamo che l'esistenza della derivata e la derivabilità sono due cose diverse perché la derivata potrebbe valere anche $\pm\infty$. In tal caso f non è derivabile ma esiste la derivata

Esempio 9.0.1. Prendiamo $f(x) = \sqrt{x}$ con $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Calcoliamo al derivata in $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$
$f'(0) = +\infty$ quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$

9.1 Continuità funzioni derivabili

Teorema 9.1.1 (Continuità funzioni derivabili)**.** Se prendiamo una f che è derivabili in x_0 allora f è continua in x_0

Dimotrazione 9.1.1. Per dimostrare questo teorema proviamo a fare il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0))$ (Andiamo a sommare e sottrarre una costante $f(x_0)$)

$= f(x_0) + \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))$ (Portiamo fuori una costante dal limite)

$= f(x_0) + \lim\limits_{x \to x_0} (\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}) \cdot (x - x_0))$ (Moltiplichiamo e dividiamo per $x - x_0$, otteniamo il rap. increm.)

$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0) + 0 = f(x_0)$ (Risolviamo il rap. increm.)

Allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ quindi f è continua in x_0. ■

Osservazione 9.1.1. Possiamo però osservare che non è vero il contrario infatti se f è continua non è detto che sia derivabile.

Esempio 9.1.1. Facciamo un esempio per verificare questa osservazione. $f(x)|x|$ con $x_0 = 0$.
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$. Ma abbiamo che $|x| = x$ con $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$ quindi dobbiamo fare il limite destro e sinistro: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$.
Essendo diversi questi due limiti non esiste il limite e quindi non esiste la derivata di $|x|$ in $x_0 = 0$

9.2 Derivata destra e sinistra

Definizione 9.2.1 (Derivata destra e sinistra)**.** *Se esiste* $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *questa si chiama* ***derivata destra*** *di* f *in* x_0*. Invece* $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *si dice* ***derivata sinistra****. Si indicano con* $f'_+(x_0)$ *e* $f'_-(x_0)$*.*

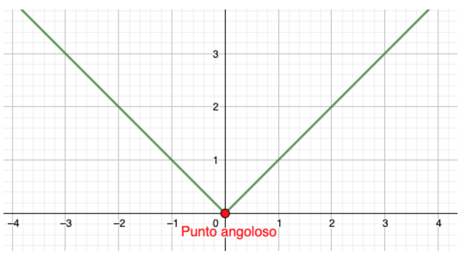
Osservazione 9.2.1. Una funzione f è derivabili in x_0 se e solo se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambi finite.

Esempio 9.2.1. Facciamo un esempio di derivata destra e sinistra con $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.
$f'_+(0) = 1$ mentre $f'_+(0) = -1$ quindi $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

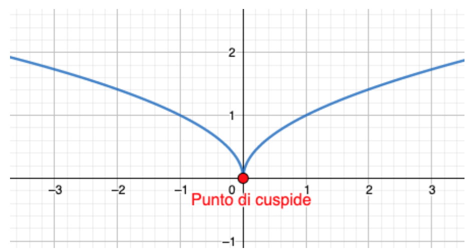
9.3 Punto angoloso o di cuspide

Definizione 9.3.1 (Punto angoloso)**.** *Se esiste* $f'_+(x_0)$ *e* $f'_-(x_0)$ *entrambi finite ma diverse tra loro allora* x_0 *si dice* ***punto angoloso***

Definizione 9.3.2 (Punto di cuspide)**.** *Se* $f'_+(x_0) = +\infty$ *e* $f'_-(x_0) = -\infty$ *(o viceversa) il punto* x_0 *si dice* ***punto di cuspide****.*



(a)



(b)

Figure 40: In (a) un punto angoloso ed in (b) un punto di cuspide

Esempio 9.3.1. Prendiamo una $f(x) = \sqrt{|x|}$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f'_+(0) = +\infty$ mentre $f'_-(0) = -\infty$, quindi f in $x_0 = 0$ ha un punto di cuspide.

9.4 Retta tangente ad un punto

Osservazione 9.4.1. f è derivabile in x_0 se e solo se $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$.
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$ (Porto tutto dalla stessa parte)

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = 0$ (Porto tutto alla stesso denominatore)

$= f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = o(x - x_0)$ che è uguale $f(x) = f(x) + f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$.

La parte $f(x) + f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ha un utilizzo particolare.

Definizione 9.4.1. *Se* f *è derivabile in* x_0 *allora la retta* $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ *si dice retta tangente al grafico di* f *nel punto di coordinate* $(x_0, f(x_0))$*.*

9.5 Derivate di ordine superiori al primo

$f : A \to \mathbb{R}$ supponiamo che f sia derivabile in ogni punto $x \in A$. Allora $\exists f'(x) \forall x \in A$ e costituiscono la funzione derivata di f. $f' : A \to \mathbb{R}$.

Se la funzione f' è a sua volta derivabile posso calcolare la derivata che chiamo derivata seconda di f ed indico con f''.
Posso in questo modo definire le derivate successive continuando a derivare le funzioni che otteniamo (se ovviamente sono derivabili).

Esempio 9.5.1. $f''(x) = (f')'$, $f'''(x) = (f'')'$, $f^(4)(x) = (f''')'$, ..., $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'$.
Per convenzione si indica con $f^{(0)}$ la funzione stessa $f^{(0)} = f$.

Definizione 9.5.1. *Dato $n \in \mathbb{N}$ si dice che f è di classe C^n se f è derivabile n-volte e $f^{(n)}$ è continua.*

9.6 Operazioni sulle derivate

Teorema 9.6.1. Se f, g sono funzioni derivabili in x_0 allora:

1. $f + g$ è derivabile in x_0 è vale che $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
3. Se $f(x_0) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e $(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$

Osservazione 9.6.1. Se f, g sono derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora andando a combinare il punto (2) e (3) del teorema sopra otteniamo che:

$$\frac{f}{g} \text{ è derivabile in } x_0 \text{ e } (\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

9.6.1 Derivata funzione inversa

Definizione 9.6.1 (Derivabile della funzione inversa)**.** *Data una $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona (quindi invertibile), se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ ed è uguale a:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ricordiamo che $x_0 = f^{-1}(y_0)$ è possibile scriverlo come:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Esempio 9.6.1. Facciamo un esempio con $f(x) = e^x$

$y = e^x \implies x = \log(y) \implies f^{-1}(y) = \log(y)$, quindi $f'(x) = e^x$

$(\log(y))' = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}$ con $y > 0$ quindi la $D(\log(y)) = \frac{1}{y}$

9.7 Derivate con funzione crescente e decrescenti

Proposizione 9.7.1. *Prendiamo $A \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora $f'(x_0) \geq 0$. Se f è debolmente decrescente, e valgono le stesse condizione scritte prima, $f'(x_0) \leq 0$.*

Dimotrazione 9.7.1. Prendiamo $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ma se f è debolmente crescente allora $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, ma visto che f mantiene l'ordinamento, quindi numeratore e denominatore sono concordi in segno. A questo punto passando al limite si mantiene la disuguaglianza, quindi otteniamo che $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. ■

Osservazione 9.7.1. Se f è strettamente crescente non posso dedurre che $f'(x_0) > 0$. Ma solo che $f'(x_0) \geq 0$ questo perché quando passiamo al limite le disuguaglianze strette potenzialmente si indeboliscono, come visto nel teorema di confronto.

Esempio 9.7.1. Con $f(x) = x^3$ che è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, abbiamo che $f'(x) = 3x^2$ e $f'(x) = 0$, quindi $f' \geq 0$ mentre $f > 0$ (la funzione ”si indebolisce”).

9.8 Teorema di Fermat

Teorema 9.8.1 (Teorema di Fermat)**.** $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto interno ad A che è di massimo o di minimo locale per f, e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimotrazione 9.8.1. Se f è derivabile in x_0 allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
Supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale per f, in un intorno di x_0 succederà che:

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dove $f(x) - f(x_0) \geq 0$ e $x - x_0 \geq 0$. Quindi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'_+(x_0) \geq 0$
$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dove $f(x) - f(x_0) \leq 0$ e $x - x_0 \leq 0 \Longrightarrow f'_-(x_0) \leq 0$.
Ma noi sappiamo che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Longrightarrow f'_+(x_0) = 0, f'_-(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$

Osservazione 9.8.1. Osserviamo che se il punto non è interno al dominio allora il teorema non è necessariamente valido.

Esempio 9.8.1. Prendiamo per esempio $f(x) = x^2$ ma definita come $f : [2, 3] \to \mathbb{R}$ dove quindi il $min(f) = f(2) = 4$ ed il $max(f) = f(3) = 9$. Se calcoliamo la derivata abbiamo che $f'(x) = 2x$ e $f'(2) = 4$ ed ancora $f'(3) = 9$. In questo caso 2 e 3 sono punti agli estremi del dominio e quindi non sono punti interni.

Osservazione 9.8.2. L'ipotesi di derivabilità è necessaria. Quindi possono esserci punti di minimo o di massimo locale dove la derivata non si annulla (perché non esiste).

Esempio 9.8.2. Infatti se prendiamo la funzione $f(x) = |x|$ il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto (e quindi anche locale) ma la derivata $f'(0)$ non esiste.

Osservazione 9.8.3. Il teorema è condizione necessaria per un massimo o un minimo locale ma non sufficiente.

Esempio 9.8.3. Prendiamo $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ ma $f'(x) = 0$ ma $x = 0$ non è ne punti di massimo ne di minimo.

9.9 Teorema di Rolle

Teorema 9.9.1 (Teorema di Rolle)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in [a,b] e derivabile in (a, b).Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists x \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

Dimotrazione 9.9.1. Se f è continua in $[a, b]$ per il teorema di Weirstrass assume massimo minimo. Siano x_1 e $x_2 \in [a, b]$ i punti di max e di min (2 dei possibili punti di massimo e minimo, essendo che possono essercene di più), cioè $f(x_1) = max(f)$ e $f(x_2) = min(f)$, distinguiamo 2 casi:

1. $x_1 = a, x_2 = b$ o viceversa. Dato che $f(a) = f(b)$ allora sarebbe $max(f) = min(f)$ questo vuol dire che f è costante in $[a, b] \Longrightarrow f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$

2. Almeno uno dei due punti x_1 o x_2 non è negli estremi. Allora esiste un punto di massimo o di minimo interno ad (a,b), per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$ (nel quale x_1 o x_2 uguale a c). ■

9.10 Teorema di Lagrange

Teorema 9.10.1 (Teorema di Lagrange)**.** Data una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dimotrazione 9.10.1. Definiamo una nuova funzione $r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ che è una retta che passa per gli estremi del grafico, che sarebbero $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
Definiamo anche $g(x) = f(x) - r(x)$, g è continua in [a,b] e derivabile in (a,b).

$g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) = 0 \qquad g(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(b) = 0$

Allora $g(a) = g(b)$ e quindi possono applicare Rolle alla funzione g. Quindi $\exists x \in (a,b)$ tale che $g'(c) = 0$. Calcoliamo ora $g'(x)$.

$g'(x) = f'(x) - r'(x) \;\; = \;\; f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Se $g'(c) = 0$ allora $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

9.10.1 Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema 9.10.2. Dato un $I \subset \mathbb{R}$ sia un intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile nei punti interni di I cioé in int(I). Allora valgono le seguenti affermazioni:

1. Se $f'(x) = 0 \forall x \in Int(I) \Longrightarrow f$ è contante in I.
2. Se $f'(x) \geq 0 \forall x \in Int(I) \Longrightarrow f$ è debolmente crescente in I.
3. Se $f'(x) \leq 0 \forall x \in Int(I) \Longrightarrow f$ è debolmente decrescente in I.
4. Se $f'(x) > 0 \forall x \in Int(I) \Longrightarrow f$ è strettamente crescente in I.
5. Se $f'(x) < 0 \forall x \in Int(I) \Longrightarrow f$ è strettamente decrescente in I.

Dimotrazione 9.10.2. Dimostriamo il punto (4).
Prendiamo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Devo dimostrare che $f(x_1) < f(x_2)$.

Visto x_1 o x_2 stanno in I osservo che $(x_1, x_2) \subset Int(I)$. Allora applico il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$ (lo posso fare perché la funzione è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2)).
Quindi $\exists c \in (x_1, x_2)$ tale che: $f'(x) = \frac{f(x_1)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Ma $f'(c) > 0 \Longrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, quindi $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (perché $x_2 - x_1 > 0$ visto che $x_1 < x_2$) $\Longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$. ■

Osservazione 9.10.1. Se f non è definita su un intervallo il teorema potrebbe no essere vero.

Esempio 9.10.1. $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \neq 0$, ma f non è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

Esempio 9.10.2. Prendiamo $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan\frac{1}{x}$ che è derivabile.
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \;\; = \;\; \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow f$ è costante in $(0, +\infty)$.
Per calcolare la costante basta calcolare in un qualsiasi punto, per comodità prendiamo $x = 1$.
$f(1) = \arctan(1) + \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Quindi $f(x) = \frac{\pi}{2}$ se $x > 0$ (visto che $x \in (0, +\infty)$).
Se $x < 0$ f è costante perché $f'(x) = 0$ (va definita la funzione $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$).Per calcolare la costante valuto f in $x = -1$. $f(-1) = \arctan(-1) + \arctan\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.
Quindi $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ se $x < 0$.
Questa seconda considerazione si poteva anche dedurre dal fatto che $f(x)$ è una funzione dispari.

Proposizione 9.10.1. *Dato un $I \subset \mathbb{R}$, una $f : A \to \mathbb{R}$, ed un $x_0 \in I$, f derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ e continua in I. Valgono (con f' non necessariamente definita in x_0):*

1. *Se $f'(x) \leq 0$ in un introno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di minimo locale per f.*

2. *Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di massimo locale per f.*

Esempio 9.10.3. Data una $f(x) = x^3 - x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 - 1$, studiamo il segno di f': $3x^2 - 1 \geq 0 \iff 3x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{3} \implies |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ cioè $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

Esempio 9.10.4. Vediamo ora un caso in cui f non sia derivabile in x_0.
$f(x) = |x|$ f non è derivabile in $x_0 = 0$, $f'(x) = \begin{cases} 1 & sex \geq 0 \\ -1 & sex < 0 \end{cases}$.

Avrò dunque che $x_0 = 0$ è punto di minimo anche se in quel punto la funzione non è derivabile.

Esempio 9.10.5. $f(x) = \sqrt{|x|}$, questa funzione ha una cuspide in $x = 0$, in questo punto quindi la funzione non è derivabile ma ugualmente il punto è un punto di minimo.

Teorema 9.10.3. Dato $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Int(A)$, con f derivabile 2 volte in x_0 e $f'(x_0) = 0$. Valgono allora le seguenti affermazioni:

1. Se x_0 è punto di minimo locale $\implies f''(x_0) \geq 0$.

2. Se x_0 è punto di massimo locale $\implies f''(x_0) \leq 0$.

3. Se $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ è punto di minimo locale.

4. Se $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ è punto di massimo locale.

Note 9.10.1. In questo teorema le condizioni (1) e (2) sono **necessarie** mentre le (3) e (4) sono **sufficienti**.

Esempio 9.10.6. Dato $f(x) = x^2$ e $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, f'' è sempre > 0.
$f'(0) = 0$, $f''(x) > 0 \implies x = 0$ è punti di minimo locale.

Esempio 9.10.7. Definiamo una $g(x) = -x^2$ e $g'(x) = -2x$, $g''(x) = -2$.
$g'(0) = 0$ e $g''(0) = -2 < 0 \implies x_0 = 0$ è punto di massimo locale.

Note 9.10.2. Se $f''(x_0) = 0$ (la disuguaglianza quindi è debole) non posso affermare niente.

Esempio 9.10.8. Per verificare la nota prendiamo $h(x) = x^3$, $h'(x) = 3x^2$ e $h''(x) = 6x$.
$h'(0) = 0$, $h''(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ non è ne di massimo ne di minimo locale.

Esempio 9.10.9. $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^3$.
$f(0) = 0$ e $f''(0) = 0$ e in questo caso $x_0 = 0$ è punto di minimo.
Mentre se prendo $g(x) = -x^4$ e $g'(0) = 0$ e $g''(0) = 0$ e quindi $x_0 = 0$ è punto di massimo.

9.11 Teorema di Cauchy

Teorema 9.11.1. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

Se inoltre $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ allora la relazione precedente si può scrivere come:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Questa formula ci dice che c'è un punto in cui il rapporto delle derivate delle due funzioni in quel punto è uguale al rapporto degli incrementi totali delle funzioni sull'intervallo. Inoltre l'ipotesi $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$ garantisce che non ci siano punti in cui la derivata prima si annulli.

9.12 Teorema di de l'Hopital

Teorema 9.12.1. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b). Se valgono le seguenti condizioni:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ oppure $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$.
2. $g'(x) \neq 0$ in un introno destro di a.
3. $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

allora $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. (Stesso risulta con per $x \to b^-$)

Note 9.12.1. Questo teorema funziona anche nel caso di x_0 interno all'intervallo perché basta fare i due limiti destro e sinistro, e se coincidono otteniamo il limite complessivo.

Esempio 9.12.1. Facciamo un esempio per capire il funzionamento di questo teorema.

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-2+x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$.
$f(x) = 2\cos(x) - 2 + x^2$ e $g(x) = x^4$ $\quad f'(x) = -2\cos(x) + 2x$ e $g'(x) = 4x^3$
Provo a fare $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)+2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$, ancora indeterminato quini applico de l'Hopital.

$f(x) = -2\sin(x) + 2x$ e $g(x) = 4x^3$, quindi $f'(x) = -2\cos(x) + 2x$ e $g(x)12x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)+2}{12x^2} = \frac{0}{0}$, ancora indeterminato quindi riapplico de l'Hopital.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(x)}{24x} = \frac{1}{12} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12}$

Esempio 9.12.2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$, applico de l'Hopital derivando numeratore e denominatore.
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$, derivo di nuovo, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.

Osservazione 9.12.1. Verificare sempre l'ipotesi (1) di de l'Hopital, cioè di essere una forma indeterminata.

Esempio 9.12.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.
Se non mi accordo che l'ipotesi (1) non vale e applicando de l'Hopital (sbagliando) e derivo: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$, sbagliano.

Osservazione 9.12.2. Potrebbe non esistere il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ma esistere il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Esempio 9.12.4. $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ e $g(x) = x$.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x} = \frac{0}{0}$. Se applico de l'Hopital e quindi derivo succede che:
$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ e $g'(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1}$ ma $2x\sin\frac{1}{x}$ tende a 0 mentre $-\cos\frac{1}{x}$ non esiste quindi il limite complessivamente non esiste.

Ma invece non uso de l'Hopital e faccio $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$.
Quindi noto che in questo caso $\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$ ma invece $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Sarebbe quindi sbagliato dire che se $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \nexists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

Osservazione 9.12.3. Se $\exists \lim_{x\to x0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (limite finito), e $\nexists \lim_{x\to x_0} g(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to x_0}(f+g) = 0$.

Dimotrazione 9.12.1. Per assurdo se $\exists \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = m$ allora $g(x) = (f+g)(x) - f(x)$ dove $(f+g)(x) \to m$ mentre $f(x) \to l$ quindi $g(x) = (f+g)(x) - f(x) \to m - l$ ma questo è assurdo perché $\nexists \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Corollario 9.12.1.1. *Se f è continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0 (eccetto al più in x_0) e se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow f'(x_0) = l$.*

Esempio 9.12.5. Prendiamo $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x \geq 0 \\ x^2 & se\ x < 0 \end{cases}$. f è derivabile in $x_0 = 0$?

$f'(x) = \begin{cases} 2x & se\ x > 0 \\ 2x & se\ x < 0 \end{cases}$, (per ora non consideriamo 0).

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ perché f non è continua, e quindi non posso usare il corollario.

Osservazione 9.12.4. Se $\nexists \lim_{x\to x_0} f'(x)$ non è detto che f non sia derivabile in x_0.

Esempio 9.12.6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$.

La funzione è continua in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0\cdot$ limitata $= 0 = f(0)$.

Vediamo se è derivabile:

1. Calcolare il limite della derivata. Se $x \neq 0$ $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2}) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = 0-$ una cosa che non esiste $\Longrightarrow$ non esiste il limite di $f'(x)$. Da questo no posso concludere che f non è derivabile in $x_0 = 0$.

2. Limite del rapporto incrementale: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. Quindi f è derivabile e $f'(0) = 0$.

Esempio 9.12.7. Esempio di de l'Hopital.

Calcoliamo $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{0^+}}}{0^+} = \frac{0}{0}$ e quindi posso usare de l'Hopital.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{x^2})}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$, notiamo dunque che la situazione è peggiorata andando ad usare d l'Hopital rispetto a come si era partiti.

Possiamo osservare che $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}} \to \frac{\infty}{\infty}$, riproviamo con de l'Hopital.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}$ derivando viene che $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2}{e^{\frac{1}{x}}\cdot x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$, in questo caso la situazione è migliorata anche se è ancora indeterminato del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, applico di nuovo de l'Hopital.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\infty} = 0$.