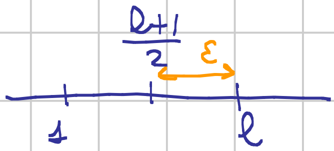
Radice (In versione liminf / limsup)

Sia $a_n \geq 0$ definitivamente. Allora

- Se $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ allora $a_n \to +\infty$ (e $\sum a_n = +\infty$)
- Se $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ allora $a_n \to 0$ (e $\sum a_n$ conv.)



Dim. Supponiamo di essere nel 1° caso

$\ell = \liminf \sqrt[n]{a_n}$.

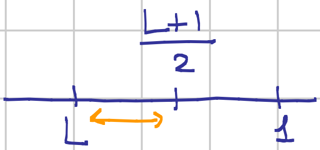
Per la caratt. avremo che

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \quad \text{definitiv.} \quad \text{quindi}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{a_n} \geq \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n} \quad \text{definitiv.}$$

Nel secondo caso poniamo $L = \limsup \sqrt[n]{a_n}$

Allora definitiv.



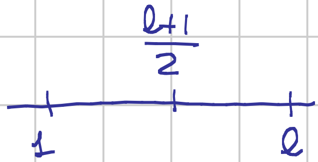
$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2} \quad \text{definitiv. da cui}$$

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^n \quad \text{Solita conclusione.}$$

Rapporto Supponiamo $a_n > 0$ definitiv. Allora

- $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$
- $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamo un pezzo del 1° caso. Sia $\ell = \liminf$. Allora



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \quad \text{definitivo.}$$

Detto meglio, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \quad \forall n \geq n_0$

cioè $\quad a_{n+1} \geq \frac{\ell+1}{2} a_n \quad \forall n \geq n_0$ da cui per induzione

$$a_{n_0+k} \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{o equivalentemente}$$

$$a_n \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \quad \text{da cui la tesi per confronto.}$$

L'altro caso è analogo

— o — o —

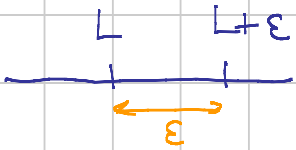
$\boxed{\text{Rapporto} \to \text{radice}}$ Sia $a_n > 0$ definitivamente. Allora

$$\boxed{\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

__Oss.__ Come sempre, se il rapporto ha limite, allora i due laterali sono uguali, dunque i due centrali sono uguali, dunque la radice n-esima ha limite (lo stesso limite).

$\boxed{\text{Dim.}}$ La disug. centrale è ovvia. Dimostro quella di dx (quella di sx è analoga).
Pongo

$$L := \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$



Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratt.

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon \qquad \forall n \geq n_0 \qquad \text{cioè} \qquad a_{n+1} \leq (L+\varepsilon)\, a_n$$

da cui per induzione

$$a_n \leq a_{n_0} (L+\varepsilon)^{n-n_0} \qquad \forall n \geq n_0$$

o ancora meglio $\quad a_n \leq (L+\varepsilon)^n \dfrac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}$

Facendo la radice ottengo

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon) \boxed{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}}} \to 1 \text{ perché } \sqrt[n]{\text{costante}} \to 1$$

(con Bernoulli)

Faccio limsup a dx e sx:

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon)$$

Essendo vera per ogni $\varepsilon > 0$, sarà $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L$.

— o — o —

Teoremi algebrici

- <u>Prodotto per una costante</u> Sia a_n una successione.

→ se $\lambda > 0$, allora

$$\limsup (\lambda a_n) = \lambda \limsup a_n \qquad (\text{idem per liminf})$$

→ se $\lambda < 0$, allora

$$\left.\begin{aligned} \limsup (\lambda a_n) &= \lambda \liminf a_n \\ \liminf (\lambda a_n) &= \lambda \limsup a_n \end{aligned}\right\} \text{ due esercizi}$$

Esempio $\quad a_n = 5 + (-1)^n \qquad \limsup = 6 \qquad \liminf = 4$

$-a_n = -5 - (-1)^n \qquad \limsup = -4 \qquad \liminf = -6$

- <u>Somma di due successioni</u>

Il limsup della somma non è in generale la somma dei limsup (idem per il liminf)

Esempio: $\quad a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$\qquad\qquad b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

In questo caso

$\lim (a_n + b_n) = 1$, ma $\limsup a_n + \limsup b_n = 2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \liminf a_n + \liminf b_n = 0$

Siano a_n e b_n due successioni. Allora vale (quasi sempre)

$$\boxed{\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) \leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n}$$

TRANNE quando almeno ad uno dei laterali ci sono $+\infty - \infty$.

Dim. Ci sono tanti casi da fare, facciamo quello in cui a dx non ci sono $+\infty$. Poniamo

$$S_n^a := \sup \{ a_k : k \geq n \} \qquad S_n^b := \sup \{ b_k : k \geq n \}$$

$$S_n^c := \sup \{ a_k + b_k : k \geq n \}$$

Allora vale $\quad S_n^c \leq \underbrace{S_n^a + S_n^b}$

↓ è un maggiorante per tutti gli a_k con $k \geq n$

Quindi per confronto tra limiti

$$\limsup (a_n+b_n) = \lim S_n^c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite della somma}}}{\leq} \lim S_n^a + \lim S_n^b$$

$$= \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Tutti gli altri casi sono analoghi.

— o — o —

- <u>Caso speciale del teorema della somma</u>

Se b_n ammette limite, allora (TRANNE nei casi $\pm\infty$)

$$\limsup (a_n+b_n) = \limsup a_n + \lim (\sup) \, b_n$$

$$\liminf (a_n+b_n) = \liminf a_n + \lim (\inf) \, b_n$$

Brutalmente: le oscillazioni di (a_n+b_n) sono in questo caso dovute solo alle oscillazioni di a_n

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamola per il liminf (una volta tanto ☺)

Sappiamo che vale $\boxed{\geq}$ per teo. precedente. (disug. dal basso)
Per i discorsi con il MINLIM, sappiamo che esiste una sottosucc. a_{n_k} t.c.

$$a_{n_k} \longrightarrow \liminf a_n$$

Allora $\underbrace{a_{n_k}}_{\downarrow \, \liminf} + \underbrace{b_{n_k}}_{\downarrow \, \lim} \longrightarrow \liminf a_n + \lim b_n$

Quindi $\underset{= \liminf}{\operatorname{minlim}} (a_n+b_n) \boxed{\leq} \liminf a_n + \lim b_n$

Oss. Vale l'uguale nel teorema della somma se esiste una sottosuccessione comune (la stessa per a_n e b_n) che realizza il liminf / limsup.

Oss. Non pensare nemmeno ad un teorema algebrico per il prodotto, a meno che non sia tutto positivo $\boxed{(a_n > 0,\ b_n > 0)}$.
In tal caso funziona allo stesso modo

$$\boxed{\limsup (a_n b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n}$$

TRANNE ... con $=$ quando uno dei due è limite.

— o — o —