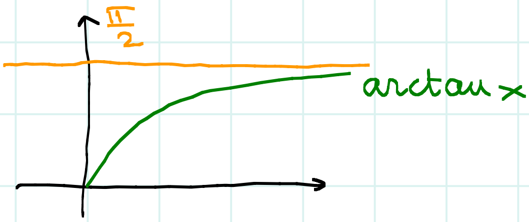
ANALISI 1 – LEZIONE 63

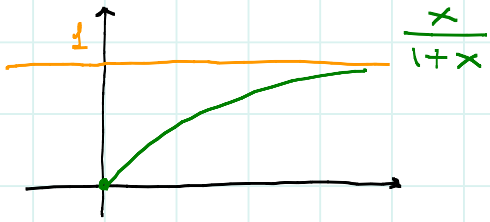
Note Title 14/12/2024

Esercizio 1 Determinare la migliore costante c tale che

$$\arctan x \geq c \, \frac{x}{1+x} \qquad \forall x \geq 0$$

Esplorazione





Dividendo troviamo (problemino per $x=0$, ma per $x=0$ ogni c è ok)

$$\frac{\arctan x}{x}(1+x) \geq c \qquad \forall x > 0$$

Il miglior c che posso usare è il minimo, o per lo meno l'inf. di $f(x)$ al variare di $x>0$.

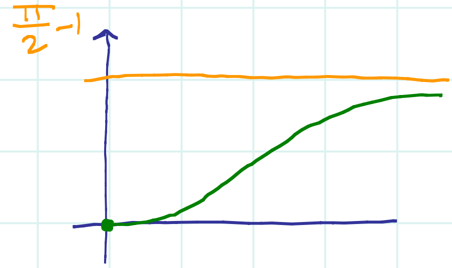
$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Di sicuro $c \leq 1$. Basta fare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

quindi al max c può essere.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Spero che $c=1$ vada bene, cioè $\arctan x \geq \frac{x}{1+x}$ per ogni $x \geq 0$.

Studio

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x}$$



$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\cancel{1}+2x+\cancel{x^2}-\cancel{1}-\cancel{x^2}}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} > 0$$

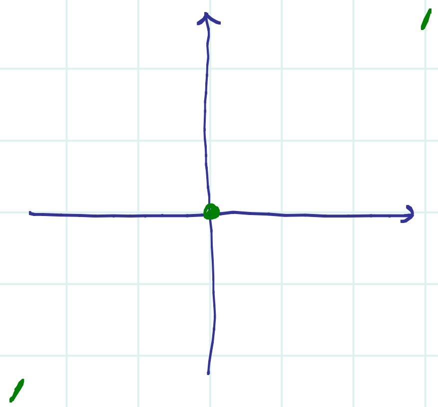
— 0 — 0 —

Esercizio 2 $\qquad \underbrace{\sinh x - x^2 \sin x}_{f(x)} = \lambda$

(a) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione

Basta osservare che $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

perché comanda $\sinh x$



(b) Se λ è abbastanza grande, allora la soluzione è unica

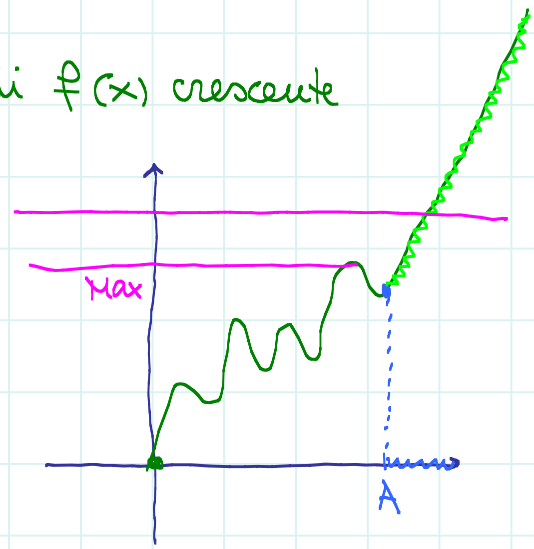
Idea: $f(x)$ può oscillare per colpa di $x^2 \sin x$, ma

$$f'(x) = \cosh x - 2x \sin x - x^2 \cos x$$

e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$$

Quindi $f'(x) > 0$ definitivamente, quindi $f(x)$ crescente definitivamente



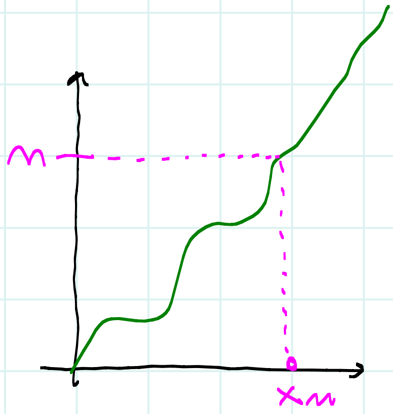
Diciamo che esiste $A > 0$ t.c. $f(x)$ è strett. cresc. per $x \geq A$.

Questo ci dice che l'intersezione è unica per ogni $\lambda >$ del massimo di $f(x)$ per $x \leq A$. Questo max esiste per il solito W. generalizzato.

Perché per $\lambda >$ Max la soluzione è unica?

$\to$ Esiste, non può essere $\leq A$, e dopo A la $f(x)$ è crescente.

(c) Per n sufficientemente grande, definiamo x_n come la soluzione (unica per n grande) di



$$\sinh x - x^2 \sin x = n$$

Calcolare $\lim_{n \to +\infty} (x_n - \log n)$

È evidente che $x_n \to +\infty$, ma quindi il limite richiesto è $+\infty - \infty$.

Problema: non ho una formula per x_n!

Brutal mode: $\underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x^2 \sin x}_{\sim \frac{e^x}{2}} = n$

$$\sim \frac{e^x}{2} = n \rightsquigarrow e^x = 2n \rightsquigarrow x = \log 2n = \log 2 + \log n$$

quindi è ragionevole che $x_n - \log n \to \log 2$.

Come dimostro tutto questo rigorosamente?

Spero che valga qualcosa del tipo

$$\log(2n - \sqrt{n}) \le x_n \le \log(2n + \sqrt{n})$$

Se dimostro questa, allora

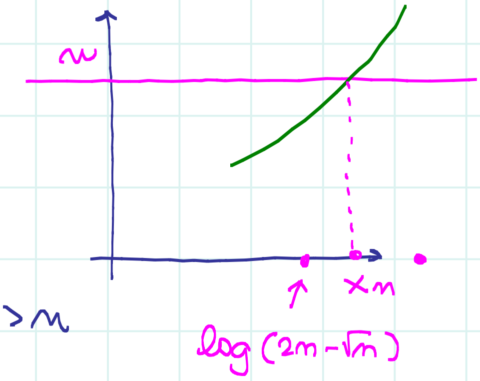
$$\underbrace{\log(2n-\sqrt{n}) - \log n}_{\downarrow \atop \log 2} \le x_n - \log n \le \underbrace{\log(2n+\sqrt{n}) - \log n}_{\downarrow \atop \log 2}$$

$$x_n - \log n \to \log 2$$

Come dimostro la disuguaglianza?

Basta far vedere che $f(\log(2n-\sqrt{n})) < n$ e $f(\log(2n+\sqrt{n})) > n$

Entrambe queste disuguaglianze si verificano facilmente.
Prendiamo la seconda



$$\sinh(\log(2n+\sqrt{n})) - \log^2(2n+\sqrt{n})\sin(\ ) > n$$

$$\frac{e^{\log(2n+\sqrt{n})} - e^{-\log(2n+\sqrt{n})}}{2} - \log^2(2n+\sqrt{n})\sin(\ ) \overset{?}{>} n$$

$$\frac{\cancel{2n}+\sqrt{n} - \frac{1}{2n+\sqrt{n}}}{2} - \log^2(\ )\sin n \geq \cancel{n}$$

Basta osservare che LHS $\to +\infty$ per merito di $\sqrt{n}$ che si mangia tutto il resto e quindi definitivamente LHS > 0.

— o — o —

Disuguaglianze "alla Taylor". Di solito ci sono disuguaglianze che legano le funzioni ai loro polinomi di Taylor.

Già visti: $\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$
$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$ } Si dimostravano studiando la differenza

Dico che $\cos x \leq 1 \quad \forall x \geq 0$

$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$ ⇝ $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$
$f'(x) = -\sin x + x \geq 0$

$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \geq 0$ ⇝ $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$
$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$

$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$