ANALISI 1 — LEZIONE 35

Note Title 14/11/2024

Esempi precedenti tenendo conto di o piccolo

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3} \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x = x + o(x)}}{=} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + x^4}{x^3} = \frac{x^4 + o(x)}{x^3} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{BOH}}}{\boxed{\frac{o(x)}{x^3}}}$$

$$\frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2} \underset{\uparrow}{=}$$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} + x^2}{x^2} = \frac{3}{2} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{BOH}}}{\boxed{\frac{o(x)}{x^2}}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\frac{o(x^2)}{x^2}}}$$

— o — o —

SVILUPPI DI TAYLOR Caso con centro in $x_0 = 0$ (McLAURIN)

Idea generale: data una funzione $f(x)$, definita almeno in un intorno dell'origine, cioè in $(-r, r)$ per qualche $r > 0$, sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$ tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0^+}$$

Il polinomio $P_n(x)$ ha grado $\leq n$.

Brutalmente: posso sostituire $f(x)$ con $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$ (n lo scelgo io a seconda delle esigenze)

Teorema misterioso Sia $r>0$, sia $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$ una funzione, sia $m\in\mathbb{N}$.

Supponiamo che f sia derivabile n volte in $(-r,r)$ (basta un pelino meno in realtà).

Allora $P_n(x)$ esiste ed è dato dalla formula

derivata n-esima

$$P_m(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Abbiamo quindi la seguente formula

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad \text{per } x\to 0}$$

Formula di Taylor di $f(x)$ con centro in $x_0=0$ e resto di PEANO (o piccolo)

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{m!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

(Funzione dispari $\leadsto$ solo potenze dispari)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

(Funzione pari: potenze pari)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

(Funzione dispari)

reale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \underbrace{\alpha}_{\binom{\alpha}{1}} x + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}}_{\binom{\alpha}{2}}x^2 + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}}_{\binom{\alpha}{3}}x^3 + \dots$$

Esempio 1 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + x^4}{x^3}$

Ho x^3 al denominatore, quindi lo scontro finale è su x^3.
Quindi sviluppo tutto con $n=3$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P_3(x)} + o(x^3) \qquad \text{(Taylor di } \sin x \text{ con } n=3)$$

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + x^4 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}} \to -\frac{1}{6}$$

$$\frac{o(x^3)}{x^3} \to 0$$

Esempio 2 $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2}$

Uso gli sviluppi con $n=2$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Sostituisco:

$$\frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - o(x^2) - \cancel{x} + x^2}{x^2} = \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= 2 + \boxed{\frac{o(x^2)}{x^2}} \to 2$$

$$\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$$

Come decido a quale n mi fermo? Bisogna andare per tentativi
Tuttavia
- → se mi fermo troppo presto (n troppo piccolo) mi viene BOH
- → se mi fermo troppo tardi va bene uguale, ma mi trovo tanti termini inutili

Esempio precedente con sviluppi di ordine 4 $(n=4)$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

Quindi

$$\frac{e^x-\cos x-x+x^2}{x^2} = \frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cancel{\frac{x^4}{24}}-\cancel{1}+\frac{x^2}{2}-\cancel{\frac{x^4}{24}}-\cancel{x}+o(x^4)+x^2}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x^2} = 2+\underbrace{\boxed{\frac{x}{6}}}_{\to 0}+\underbrace{\boxed{\frac{o(x^4)}{x^2}}}_{\to 0}$$

<u>Oss.</u> Questo limite NON si poteva fare con i limiti notevoli, perché coinvolge il termine $\frac{x^2}{2}$ nello sviluppo di e^x.

<u>Esempio</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+\cos x-2-x}{\arctan x-\sin x}$$

$\boxed{\text{Taylor con } n=3}$ Vado in tabellina

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \qquad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Sostituisco:

$$\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{6}+\cancel{1}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\cancel{2}-\cancel{x}+o(x^3)}{\cancel{x}-\frac{x^3}{3}-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \to -1$$

— o — o —