ANALISI 1 — LEZIONE 100

Note Title 30/04/2025

Esempio 1 $\displaystyle f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt$

[Ora entrambi gli estremi dipendono da x]

Detta $g(x)$ $\boxed{\text{UNA qualunque}}$ primitiva di $\dfrac{1}{\arctan x}$, allora

$$f(x) = [g(t)]_{2x}^{3x} = g(3x) - g(2x)$$

$\boxed{\text{Zona di definizione}}$ Definita per ogni $x \neq 0$ (in ogni caso evito $t=0$ in cui ci sono problemi)

$\boxed{\text{Simmetrie}}$ Mi aspetto che sia PARI

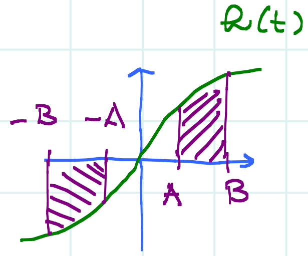
$$f(-x) = \int_{-2x}^{-3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt \underset{\uparrow}{=} -\int_{-3x}^{-2x} \dots dt \underset{\uparrow}{=} \int_{2x}^{3x} \dots dt = f(x)$$

inverto gli estremi

$\dfrac{1}{\arctan t}$ è dispari

Ho usato: se $h(t)$ è dispari, allora

$$\int_A^B h(t)\, dt = -\int_{-B}^{-A} h(t)\, dt$$

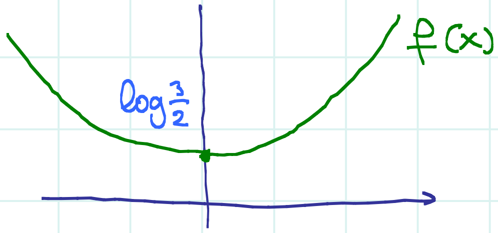


$\boxed{\text{Limiti agli estremi}}$ Devo calcolare (gli altri due sono uguali per parità)

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt \qquad \lim_{x \to 0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt$$

$$\sim \int_{2x}^{3x} \frac{2}{\pi}\, dt \sim \frac{2}{\pi} x \to +\infty \qquad \sim \int_{2x}^{3x} \frac{1}{t}\, dt = [\log t]_{2x}^{3x} = \log \frac{3}{2}$$

Quindi possiamo aspettarci un grafico del tipo qui accanto



$\boxed{\text{Monotonia}}$ $\quad f'(x) = [g(3x) - g(2x)]'$

$$= 3g'(3x) - 2g'(2x)$$

$$= \frac{3}{\arctan(3x)} - \frac{2}{\arctan(2x)}$$

Sarà vero che è >0 per ogni $x>0$?

Ci serve dimostrare che

$$\frac{3\arctan(2x) - 2\arctan(3x)}{\underbrace{\arctan(3x)}_{>0}\cdot\underbrace{\arctan(2x)}_{>0}} \overset{?}{>} 0 \qquad \forall\, x>0$$

Ci basta dimostrare che $\quad \varphi(x) = 3\arctan(2x) - 2\arctan(3x) > 0$ per ogni $x>0$.

Osservo che $\varphi(0)=0$ e

$$\varphi'(x) = 3\,\frac{2}{1+4x^2} - 2\,\frac{3}{1+9x^2} = 6\left(\frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{1+9x^2}\right) > 0$$

per ogni $x>0$ quindi $\varphi(x)$ è strett. crescente e quindi, visto che $\varphi(0)=0$, di sicuro $\varphi(x)>0$ per $x>0$.

$\boxed{\text{Andamento all'infinito}}$ $\quad$ Dico che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$$

Una volta saputo che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ posso usare Hôp e viene

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\arctan(3x)} - \frac{2}{\arctan(2x)}$$

$$= 3\cdot\frac{2}{\pi} - 2\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$ ☺

<u>Esempio 2</u> Calcolo delle derivate

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\arctan t}{t^2}\,dt$$

Derivata di x

$$f'(x) = \boxed{\frac{\arctan(x^2)}{x^4}} \cdot \boxed{2x} - \boxed{\frac{\arctan x}{x^2}} \boxed{\cdot 1}$$

Ho sostituito x^2 nell'integranda

derivata dell'esterno

sostituito x nell'integranda

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^3} e^{-t^2}\,dt$$

$$f'(x) = e^{-x^6} \cdot 3x^2 - e^{-\sin^2 x} \cdot \cos x$$

sostituisco x^3

Deriv. di x^3

sostituisco $\sin x$

Derivata di $\sin x$

Perché funziona? Sia $g(x)$ UNA primitiva qualunque di e^{-x^2}, cioè $g'(x) = e^{-x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora

$$f(x) = g(x^3) - g(\sin x)$$

Quindi

$$f'(x) = [g(x^3) - g(\sin x)]'$$

$$= g'(x^3)\cdot 3x^2 - g'(\sin x)\cdot \cos x$$

$$= e^{-x^6}\cdot 3x^2 - e^{-\sin^2 x}\cdot \cos x$$

$\boxed{\text{Formula generale}}$ Se

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t)\,dt$$

allora

$$\boxed{f'(x) = \varphi(b(x)) \cdot b'(x) - \varphi(a(x)) \cdot a'(x)}$$

Derivata di un integrale con estremi dipendenti da x

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ Risolvere la disequazione

$$\arctan x > \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Poniamo $f(x) = \arctan x - \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ e studiamo $f(x)$.

Osserviamo che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$.
Vediamo se è monotona (intanto f è dispari)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2} \overset{?}{>} 0$$

$$\frac{1-(1+x^2)\,e^{-x^2}}{1+x^2} \overset{?}{>} 0$$

Il segno dipende dal solo numeratore, che è una funzione pari. Quindi studio

$$g(x) = 1 - (1+x^2)\,e^{-x^2}$$

Vediamo subito che $g(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

e $$g'(x) = -2x\,e^{-x^2} - (1+x^2) \cdot (-2x\,e^{-x^2})$$
$$= \cancel{-2x\,e^{-x^2}} + \cancel{2x\,e^{-x^2}} + 2x^3 e^{-x^2} > 0 \text{ per } x > 0.$$

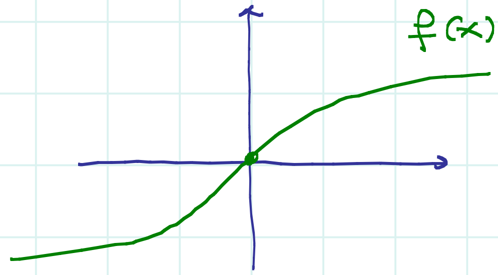
Riassunto: $g(0)=0$ e $g'(x)>0$ per $x>0$

quindi $g(x)>0$ per $x>0$

quindi $f'(x)>0$ per $x>0$

quindi (essendo $f(0)=0$) anche $f(x)>0$ per $x>0$.

Essendo f dispari avremo che $f(x)<0$ per $x<0$



Quindi $\quad \arctan x > \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ se e solo se $x>0$

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{x^2}}_{+\infty} \underbrace{\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt}_{0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt}{e^{-x^2}} =$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$: Hôp

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^4}\cdot 2x - e^{-x^2}\cdot 1}{-2x e^{-x^2}} = 0$$

regola generale

raccolgo sopra (o semplifico) e^{-x^2}

— o — o —