TEOREMA DI DE L'HÔPITAL Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{con } x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Teorema (misterioso) Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$, esistenza delle derivate, possibilità di dividere per $g(x)$ e $g'(x)$)

(ii) il limite sopra sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oppure $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$ (gli eventuali segni - si portano fuori)

(iii) esista

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$ (primi 3 casi)

Allora $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$ (stesso ℓ).

Operativamente Devo fare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ma è una forma indet.

Provo a fare $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(1) Se questo non esiste, allora BOH (manca ipotesi (iii))

(2) Se esiste e fa $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche quello iniziale fa ℓ

(3) Se è ancora una forma indeterminata, posso provare a reiterare usando $f''(x)/g''(x)$ e così via.

Esempio 1 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} \underset{\text{Hôp}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$

No! Non è forma indeterminata, quindi non posso usare Hôp.

In realtà il limite non esiste perché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty \quad \left[\frac{1}{0^+}\right] \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty \quad \left[\frac{1}{0^-}\right]$$

Esempio 2 $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+\sin x}{x} \underset{\text{Hôp}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{3+\cos x}{1} = \text{N.E.}$

No! Quando $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, allora BOH, cioè quello iniziale può esistere o no a seconda dei casi

In realtà $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+\sin x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(3+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}}$

$$= \lim_{x\to +\infty} 3 + \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 0} = 3$$

Ricordiamo che $\underbrace{\boxed{-\frac{1}{x}}}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 0} \leq \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0}$ per $x \to +\infty$.

Oss. Dal p.to di vista pratico il teo. di De L'Hôpital è poco utile nel calcolo dei limiti, perché facendo derivate di solito "le funzioni si complicano".

Esempio 3 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ $[+\infty\cdot 0]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{0}{0} \rightsquigarrow \text{Hôp}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Si poteva fare senza? Sì, ma occorre usare che

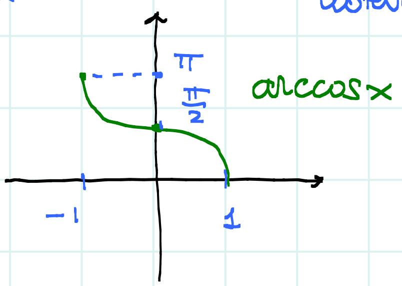
$$\frac{\pi}{2}-\arctan x = \arctan\frac{1}{x} \qquad \forall x>0$$

(vedi lez. funz. trigon. inverse)

A questo punto diventa

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{y=\frac{1}{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to0^+}\frac{\arctan y}{y} \underset{\text{limite notevole}}{\overset{\uparrow}{=}} 1$$

Esempio 4 $\lim_{x\to0^+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$



Usando De L'Hôpital provo a calcolare

$$\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}+2x-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{2}$$

(raccolgo x nella radice al denominatore)

Oss. Abbiamo così dimostrato che

$$\boxed{\arccos(1-x) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} \quad \text{per } x\to0^+$$

(basta usare la definizione)

Esempio 5 $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x + x^4}{x^3}$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ (limiti notevoli)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 - \boxed{\frac{\sin x}{x}}^{\nearrow 1}\right) + x^4}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ (Equiv. asintotica) Uso che $\sin x \sim x$

$$\frac{x - \sin x + x^4}{x^3} \sim \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^4}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \to 0$$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ (Hôpital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x + x^4}{x^3} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + 4x^3}{3x^2} \underset{\left[\frac{0}{0} \leadsto \text{Hôp}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + 12x^2}{6x} \underset{\left[\frac{0}{0} \leadsto \text{Hop}\right]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 24x}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{OPS!}$$

Esempio 6 $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2}$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ (limiti notevoli)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x - x + x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left[\boxed{\frac{e^x - 1}{x}}^{\nearrow 1} + \boxed{\frac{1 - \cos x}{x^2}}^{\nearrow \frac{1}{2}} x^{\nearrow 0} - 1\right] + x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ (Equiv. asintotica) $e^x \sim 1 + x$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

Sostituisco

$$\frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + x^2}{x^2} \to \frac{3}{2} \qquad \text{OPS}$$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ (Hôpital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x + x^2}{x^2} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x - 1 + 2x}{2x} \underset{\text{Hôp}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \cos x + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{Doppio OPS}$$

$\boxed{\text{MORALE}}$ NON SI FANNO I LIMITI METÀ PER VOLTA

NON SI USA L'EQUIVALENZA ASINTOTICA