4 Valore assoluto

Definizione 4.0.1 (Valore assoluto)**.** *Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x il massimo valore fra x e -x e si indica con $|x|$.*

$$|x| = max(\{x, -(x)\}) \tag{5}$$

Esempio 4.0.1. Esempi valore assoluto:

- $|5| = max(\{5, -5\}) = 5$
- $|-3| = max(\{-3, -(-3)\}) = 3$

4.1 Proprietà valore assoluto

(1) $x \leq \|x\| \ \forall \ x \in \mathbb{R}$	(2) $\|x\| = x$ se $x \geq 0, \|x\| = -x$ se $x \leq 0$
(3) $\|x\| \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$	(4) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(5) $\|-x\| = \|x\|$	(6) $-\|x\| \leq x \leq \|x\|$
(7) $\|x\| \leq M \iff -M \leq x \leq M$ con $M \geq 0$	(8) $\|x\| \geq M \implies x \geq M$ oppure $x \leq -M$

Table 4: Proprietà valore assoluto

4.1.1 Spiegazioni proprietà

Se stabiliamo un punto M maggiore del valore assoluto la funzione si troverà compreso fra M e -M. Se invece stabiliamo un punto M minore del valore assoluto la funzione sarà maggiore di M e minore di -M. Spiegazione grafica nell'immagine [24]

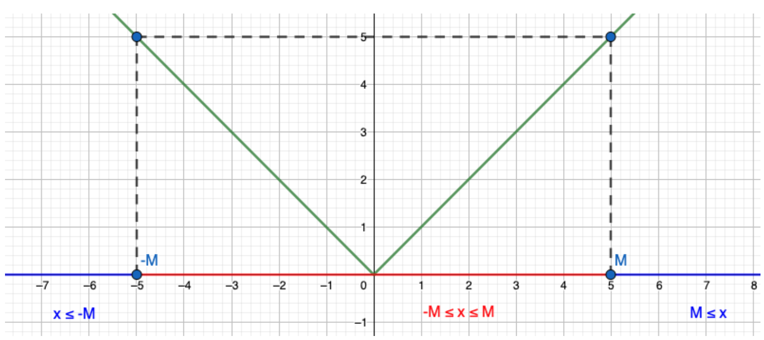

Figure 24: Spiegazione proprietà 7 e 8

4.2 Disuguaglianza triangolare

Definizione 4.2.1 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Dati due valore a e b tali che $a, b \in \mathbb{R}$ risulta che:*

$$(1) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \qquad (2) \quad ||a| + |b|| \leq |a - b| \tag{6}$$

Dimotrazione 4.2.1. Dimostrazione proprietà (1):
Dati due valori a e b calcoliamo il valore assoluto, che per la proprietà (6) in tabella 4 possiamo scrivere nella seguente forma:

$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad -|b| \leq b \leq |b| \tag{7}$$

Ora facciamo una somma di disuguaglianze fra le forme riportate sopra:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \tag{8}$$

Possiamo vedere la prima parte $-|a| - |b|$ come un -M, la parte $a + b$ come una x e l'ultima parte $|a| + |b|$ come M. Utilizzando a questo punto la proprietà (7) in tabella 4, $|x| \leq M$ quindi:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{9}$$

Osservazione 4.2.1. Perché una disuguaglianza triangolare a 3 numeri, $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$, vale?

Perché se $|a + b + c|$ lo dividiamo in $|(a + b) + c|$ possiamo applicare la propria triangolare su 2 valori considerando $(a + b)$ il primo e c il secondo questo fa si che $|(a + b) + c| \leq |a + b| + |c|$ andando poi a riapplicare la disuguaglianza triangolare questa volta solo su $|a + b|$ vediamo che:

$$|a + b + c| = |(a + b) + c| \leq |a + b| + |c| \leq |a| + |b| + |c| \tag{10}$$

Da qui possiamo dedurre che la disuguaglianza triangolare vale indipendentemente dal numero di valori:

$$|a_1, a_2, a_3, ..., a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| \tag{11}$$