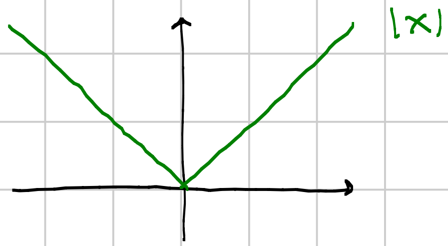
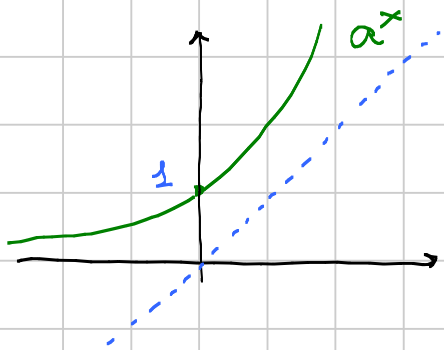
VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



FUNZIONI ESPONENZIALI

$f(x) = a^x$ con $a > 0$ FISSATO e x variabile $\left(2^x, 3^x, \pi^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$



$a > 1$

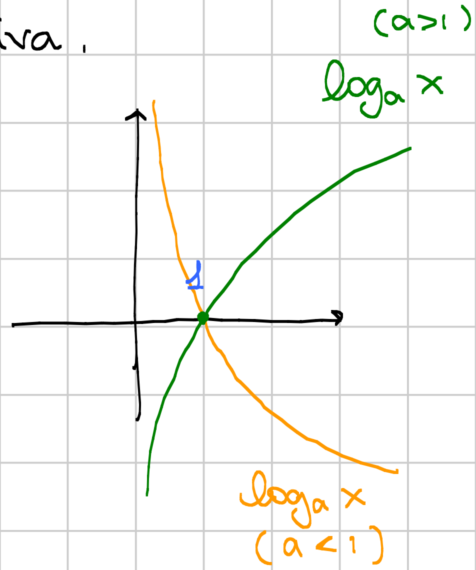
$0 < a < 1$

Dando per buoni i grafici, consideriamo il caso $a > 1$.

$f(x) = a^x$ pensata come $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è strettamente crescente, iniettiva e surgettiva.

L'inversa $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è

$$g(x) = \log_a x$$



Come si DEFINIREBBE l'esponenziale ?

Per ogni $a > 0$ esiste un'unica funzione $f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tale che

(i) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$ $\quad [a^{x+y} = a^x \cdot a^y]$

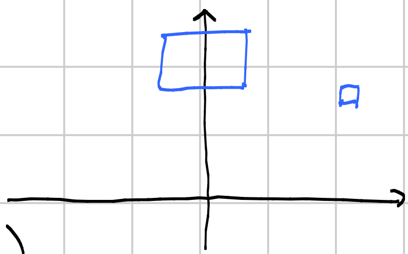
(ii) $f_a(1) = a$

(iii) va scelta tra un po' di opzioni

Date le proprietà (i) e (ii) si può dimostrare che esiste un'UNICA funzione $f_a : \mathbb{Q} \to (0,+\infty)$ che la verifica

Tuttavia esistono infinite funzioni $f_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ che verificano (i) + (ii). Se voglio che sia unica devo aggiungere qualcosa a scelta tra

- f_a è continua
- f_a è monotona
- esiste un rettangolo contenuto nel 1° ∪ 2° quadrante che non contiene p.ti del grafico



Si verifica poi che l'unica soluzione decente ha le proprietà dette prima (invertibilità)

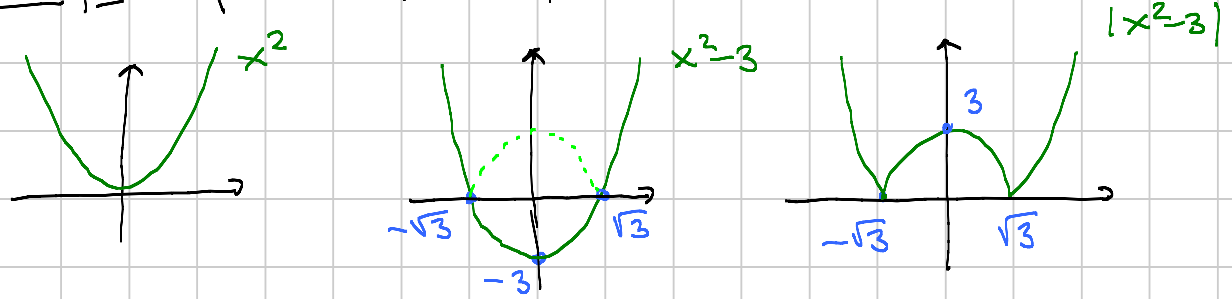
In questo modo $2^{\pi} = \sup \{ 2^{q} : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q < \pi \}$

Resterebbero le funzioni trigonometriche

<u>Operazioni sui grafici</u> Sia dato il grafico di $f(x)$.
Come ottengo il grafico di

$f(x)+a$	traslazione verticale ($\uparrow$ se $a>0$)
$f(x+a)$	" orizzontale ($\leftarrow$ se $a>0$)
	[pensare a x^2 e $(x+1)^2$]
$-f(x)$	ribalto rispetto asse x
$f(-x)$	" " " y
$-f(-x)$	" " origine
$\lvert f(x) \rvert$	ribalto parti negative
$f(\lvert x \rvert)$	sparisce parte con $x \leq 0$ sostituita dal ribaltato risp. asse y della parte con $x \geq 0$

Esempi $f(x) = |x^2-3|$



Graficamente:

- f è iniettiva se ogni retta // asse x interseca il grafico in 0 oppure 1 p.to
- f è surg. se ogni retta // asse x ... in 1 o più punti.

Equazioni e iniettività $\quad 2^{5x+4} = 2^{7x+2} \rightsquigarrow 5x+4 = 7x+2$

$$\cancel{f}(5x+4) = \cancel{f}(7x+2) \rightsquigarrow 5x+4 = 7x+2$$

Questo è possibile SE f è $\boxed{\text{iniettiva}}$ $\quad f(a_1) = f(a_2)$ e voglio dedurre $a_1 = a_2$

$$\log_5(5x-4) = \log_5(7x-2)$$

Posso eliminare i $\log_5$, ma devo imporre che gli argomenti siano >0.

Disequazioni $\quad \cancel{f}(5x-4) \geq \cancel{f}(7x-2)$

Se f è strett. crescente, allora la posso eliminare

[$f(a) \geq f(b)$ e so che f è strett. cresc. posso dedurre che $a \geq b$
Se così non fosse, avrei $a < b$, ma allora sarebbe $f(a) < f(b)$]

Se f è strett. decresc., allora posso eliminare, ma devo invertire

$$f(a) \geq f(b) \implies a \leq b$$

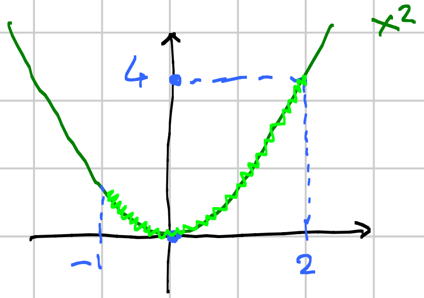
Esercizio Vedere quando valgono i passaggi

$$f(a) > f(b) \implies a > b$$

[Dim. detta a voce]

Come si vedono immagine e controimmagine

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ $f([-1,2]) = [0,4]$



IMMAGINE

→ segno $[-1,2]$ sull'asse x

→ vedo il tratto di grafico corr.

→ proietto sull'asse y

$$f^{-1}([-1,2]) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-1,2]\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

→ segno $[-1,2]$ sull'asse y

→ vado al grafico

→ proietto sull'asse x