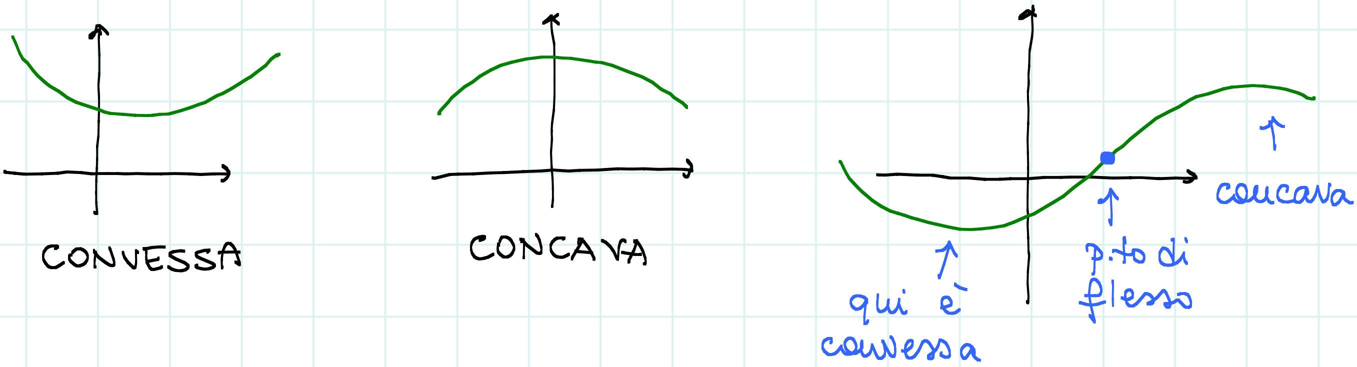
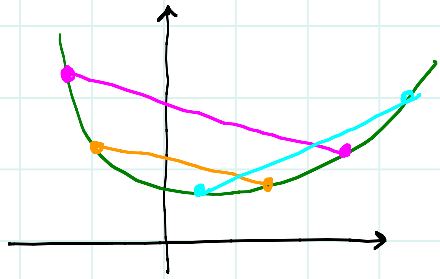
ANALISI 1 — LEZIONE 54

Note Title 05/12/2024

FUNZIONI CONVESSE / CONCAVE



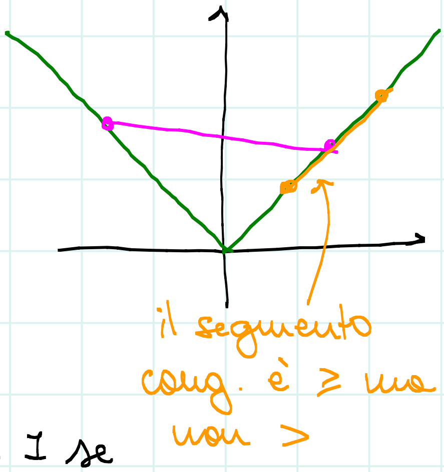
Def. geometrica Una funzione è convessa in una certa zona se, per ogni coppia di p.ti del grafico in quella zona, il grafico sta al di sotto del segmento che li congiunge



Concava ... il grafico sta al di sopra di ogni segmento congiungente

Debolmente / strettamente convessa: a seconda che il segmento sia $>$ oppure $\geq$

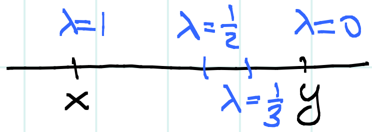
Esempio $f(x) = |x|$ è convessa, ma non strettamente convessa



Def rigorosa Sia $f : I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo, una semiretta, oppure tutto $\mathbb{R}$. Allora f si dice convessa in I se

$$\boxed{f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad \forall \lambda \in [0,1]}$$

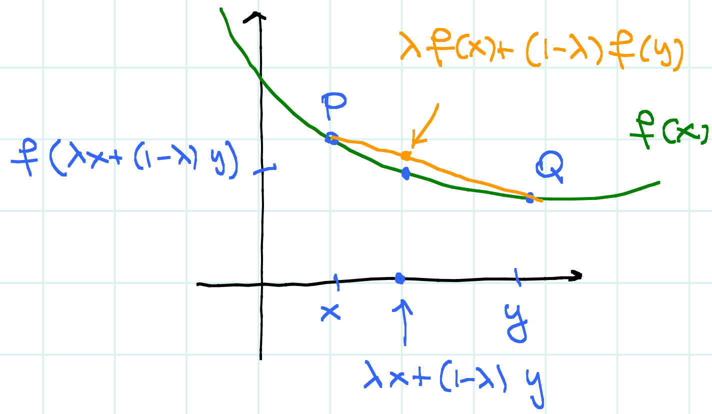
Perché è la stessa cosa?



Consideriamo due numeri reali x e y.
Allora $\lambda x+(1-\lambda)y$, al variare di $\lambda \in [0,1]$ rappresenta tutto il segmento di estremi x e y (per $\lambda=0$ viene y, per $\lambda=1$ viene x, per $\lambda=\frac{1}{2}$ viene $\frac{x+y}{2}$ = p.to medio)

Quindi $f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ è il valore di f in un p.to generico del segmento di estremi x e y.
Si può verificare che $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ è il valore della retta che passa per i p.ti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ calcolata in $\lambda x+(1-\lambda)y$.

Quindi la disuguaglianza è $f \le$ retta
$P=(x, f(x))$, $Q=(y, f(y))$



<u>Come capisco se $f(x)$ è convessa o concava in una certa zona?</u>

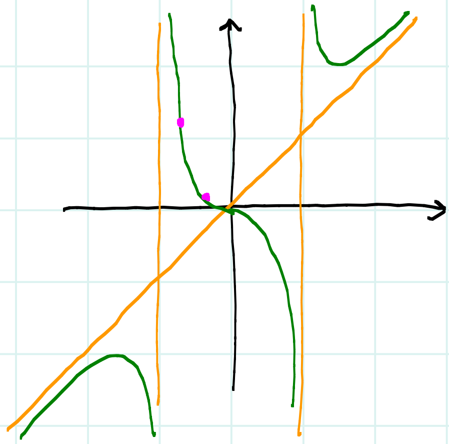
<u>Teorema</u> (misterioso) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che esistano derivata prima e seconda in $[a,b]$. Allora valgono le seguenti implicazioni.

$$\boxed{f''(x)\ge 0 \quad \forall x\in[a,b] \iff f \text{ convessa in } [a,b]}$$

$$\boxed{f''(x)>0 \quad \forall x\in[a,b] \implies f \text{ strett. convessa in } [a,b]}$$

<u>Oss</u> ① Vale enunciato analogo con la concavità e $f''\le 0$
② L'implicazione mancante in generale è falsa
($f(x)=x^4$ è strett. conv., ma $f''(x)=12x^2$ si annulla per $x=0$)

$\boxed{\text{Back to esempio lez. 52}}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$



Cosa ci aspettiamo da $f''(x)$?

$f''(x) > 0$ per $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$
$f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x\,(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{4x^5} - 4x^3 - 6x^3 + 6x - \cancel{4x^5} + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

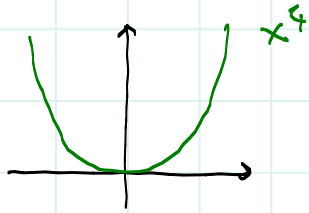
Studio il segno

		-1		0		1	
x	$- - -$		$- -$	0	$+ +$		$+ + +$
x^2+3	$+ + +$		$+ +$		$+ +$		$+ + +$
$(x^2-1)^3$	$+ + +$	0	$- -$		$- -$	0	$+ + +$
$f''(x)$	$- - -$		$+ + +$	0	$- - -$		$+ + + +$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$

Lo studio di $f''(x)$ conferma il grafico di sopra.

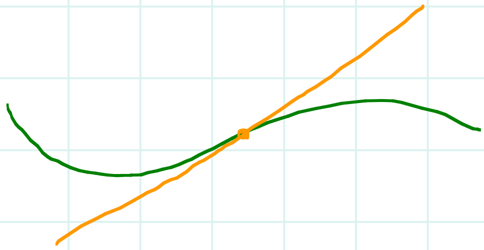
$\boxed{\text{P.ti di flesso}}$ Sono i p.ti di confine fra le zone di convessità e le zone di concavità.
Quando esiste $f''(x)$, sono i p.ti in cui $f''(x)$ cambia segno (positiva prima, neg. dopo o viceversa)
In quei p.ti in particolare $f''(x) = 0$.

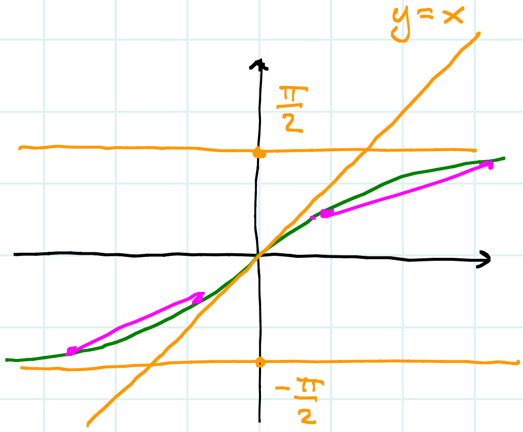
Achtung! I p.ti in cui $f''(x)=0$ NON sono per forza p.ti di flesso



Esempio $f(x)=x^4 \rightsquigarrow f''(x)=12x^2$
Quindi $f''(0)=0$ ma $x=0$ non è un p.to di flesso e $f(x)=x^4$ è strettamente convessa in tutto $\mathbb{R}$.

Oss. geometrica Nei p.ti di flesso il grafico di $f(x)$ "attraversa la retta tangente"

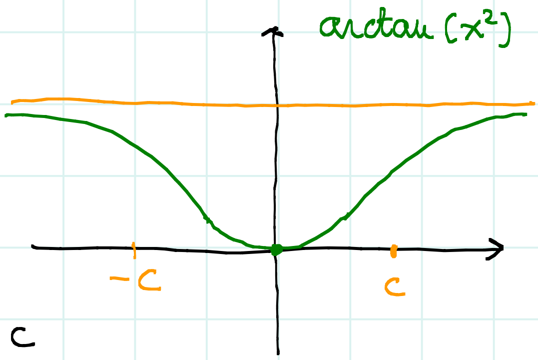




Esempio $f(x)=\arctan x$
$y=\frac{\pi}{2}$ asint. oriz. a $+\infty$
$y=-\frac{\pi}{2}$ " " a $-\infty$

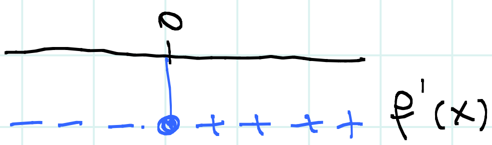
convessa in $(-\infty,0)$
concava in $(0,+\infty)$
$x=0$ p.to di flesso

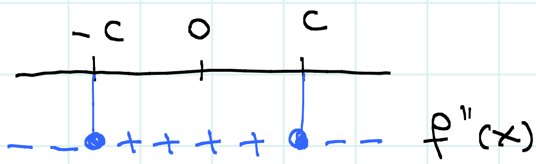
Calcolare $f''(x)$ e avere conferma della previsione



Esempio 2 $f(x)=\arctan(x^2)$

Ci aspettiamo





Cercare conferma con i conti :)

— o — o —