ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 18

Note Title 17/10/2023

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x-3y, x+4y)$	$v_1=(1,2)$ $v_2=(1,3)$	$w_1=(1,4)$ $w_2=(1,5)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (2x-3y, x+4y)$

$f(v_1) = f(1,2) = (-4,9) = a(1,4) + b(1,5)$

$\begin{cases} a+b=-4 \\ 4a+5b=9 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-4 \\ b=25 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-29 \\ b=25 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} -29 & -48 \\ 25 & 41 \end{pmatrix}$

Matrice richiesta

Verifica: $(-4,9) = -29(1,4) + 25(1,5)$ ☺

$f(v_2) = f(1,3) = (-7,13) = a(1,4) + b(1,5)$

$\begin{cases} a+b=-7 \\ 4a+5b=13 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-7 \\ b=41 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-48 \\ b=41 \end{matrix}$

Verifica: $(-7,13) = -48(1,4) + 41(1,5)$ ☺

Significato della matrice: mettiamo che voglio calcolare

$f(3,2)$

Allora posso procedere in questo modo:

→ scrivo $(3,2)$ come comb. lin. di v_1 e v_2, cioè

$(3,2) = a(1,2) + b(1,3)$

$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+3b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=3 \\ b=-4 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=7 \\ b=-4 \end{matrix}$

Verifica: $(3,2) = 7(1,2) - 4(1,3)$ ☺

→ do in pasto le componenti trovate alla matrice di prima

$$\begin{pmatrix} -29 & -48 \\ 25 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -203+192 \\ 175-164 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

→ 11 e −11 sono le componenti di $f(3,2)$ rispetto alla base w_1, w_2, cioè

$f(3,2) = -11\, w_1 + 11\, w_2 = -11\ (1,4) + 11\ (1,5)$
$= (0, 11)$

verifica $f(3,2)$ usando la formula $= (0, 11)$ ☺

— o — o —

	V	W	Condizioni	E/U	V	W	Condizioni	E/U	
1	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (7,8)$	EU	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(2,4) \to (7,8)$	NON ESISTE	2
3	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(2,4) \to (4,6)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (2,3)$		4
5	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $(2,3) \to (1,0)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $(2,3) \to (1,1)$	EU	6

Esiste una applic. lineare con le proprietà richieste?
Se sì, è unica?

1 $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(1,2) = (2,3)$
$\qquad f(1,3) = (7,8)$

Uso il teorema di struttura: $(1,2), (1,3)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ (sp. partenza), quindi posso mandarla dove voglio e l'appl. lin. è univ. determinata

Dove va a finire $(5,-2)$?

Scrivo $(5,-2) = a\,(1,2) + b\,(1,3)$

$$\begin{cases} a+b = 5 \\ 2a+3b = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = 5 \\ b = -12 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 17 \\ b = -12 \end{matrix}$$

A quel punto

$$f(5,-2) = f(17\,(1,2) - 12\,(1,3))$$
$$= 17\, f(1,2) - 12\, f(1,3)$$
$$= 17\,(2,3) - 12\,(7,8)$$
$$= (-50, -43) \quad \text{se i conti sono giusti}$$

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(1,2) = (2,3)$

$f(2,4) = (7,8)$

Se $f(1,2) = (2,3)$, allora $f(2,4)$ deve fare $(4,6)$

Quindi NON ESISTE

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(1,2) = (2,3)$

$f(2,4) = (4,6)$

La seconda condizione è conseguenza della prima.

In questo caso f esiste ma NON è unica.

Infatti posso mandare $\quad f(1,2) = (2,3)$

$f(1,0) = (a,b)$ ← libero

Serve qui che $(1,2)$ e $(1,0)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

④ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(1,2) \to (2,3)$

$f(1,3) \to (2,3)$

Esiste ed è unica, perché è fissata in una base

⑤ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(1,1) = (2,3)$

$f(1,2) = (-1,-2)$

$f(2,3) = (1,0)$

Osserviamo che $v_3 = v_1 + v_2$, ma $f(v_3) \neq f(v_1) + f(v_2)$

quindi non esiste.

⑦	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,2,0) \to (0,0,2)$	← conseguenza della prima
⑧	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,0,1) \to (0,0,1)$	

⑦ Esiste ma non è unica e abbiamo liberi

$f(0,1,0) = (0,0,1)$

$f(1,0,0) = (a,b,c)$ 6 parametri liberi

$f(0,0,1) = (\hat{a},\hat{b},\hat{c})$

⑧ Esiste non è unica e dipende da 3 parametri

$f(0,1,0) = (0,0,1)$

$f(0,0,1) = (0,0,1)$

$f(1,2,3) = (a,b,c)$

Ci saranno funzioni surgettive fra tutte quelle con la proprietà ?

Essendo tra spazi della stessa dim., f è surgettiva $\iff$ f è iniettiva, e questa palesemente non lo è.

Ad esempio $(0,1,-1) \in \ker f$

$$\begin{array}{c} (0,1,-1) \\ \parallel \\ (0,1,0)-(0,0,1) \end{array}$$

— o — o —

$f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$p(x) \longrightarrow p(2x) + p(-x)$

Verificare che è lineare.

Scrivere la matrice usando in partenza ed arrivo la base

$1,\ x,\ x^2$

$1 \longrightarrow 2 \quad = 2\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$

$x \longrightarrow x \quad = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2$

$x^2 \longrightarrow 5x^2 \quad = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 5\cdot x^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Dove va a finire $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \longrightarrow 10x^2 - 3x + 2$$

— o — o —