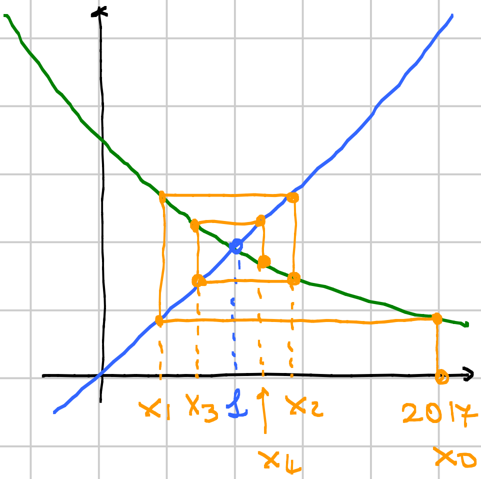
ANALISI 1 — LEZIONE 089

Note Title 15/03/2017

Successioni per ricorrenza spiraleggianti

<u>Esempio 1</u> $x_{n+1} = \dfrac{7}{2x_n + 5}$ $x_0 = 2017$



Due tipi di piano possibili:

→ piano con la distanza
→ piano con le due sottosucc.

Brutta notizia: x_n non è monotona

$\boxed{\text{PIANO}}$ con la distanza Pongo $d_n := |x_n - 1|$

presunto limite

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{14}{25} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{14}{25}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione a partire da (ii))

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 1$ (carabinieri a partire da (iii))

$f(x) = \dfrac{7}{2x+5}$ $f'(x) = -\dfrac{7 \cdot 2}{(2x+5)^2}$

quindi $\sup\{|f'(x)| : x \geq 0\} = \sup\left\{\dfrac{14}{(2x+5)^2} : x \geq 0\right\} = \dfrac{14}{25}$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Solita Lip.

$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| \leq \frac{14}{25} |x_n - 1| = \frac{14}{25} d_n$

Lip. (forse si poteva fare anche sostituendo $f(x_n) = \frac{7}{2x_n+5}$)

Domanda Per quali $\alpha > 0$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\alpha^n}{n^2}(x_n - 1)}}_{a_n}$$

Non posso usare il criterio del rapporto perché $x_n - 1$ ha segno variabile. Provo assoluta convergenza e faccio il rapporto su $|a_n|$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{|x_{n+1} - 1|}{|x_n - 1|} \frac{n^2}{\alpha^n} = \underbrace{\boxed{\frac{n^2}{(n+1)^2}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\alpha}_{\downarrow\, \alpha} \underbrace{\left| \frac{f(x_n) - 1}{x_n - 1} \right|}_{\downarrow\, f'(1) = \frac{2}{7}}$$

Quindi

- se $\alpha < \frac{7}{2}$ $\leadsto$ lim. rapp. < 1 $\leadsto$ $\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ conv.
- se $\alpha > \frac{7}{2}$ $\leadsto$ lim. rapp > 1 $\underset{\text{rapp. per succ.}}{\leadsto}$ $|a_n| \to +\infty$ $\Rightarrow$ no cond. nec. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ non converge
- se $\alpha = \frac{7}{2}$ è tutto più delicato ☹.

— o — o —

PIANO (con le 2 sottosuccessioni)

L'idea è che

- a_{2n} è decrescente
- a_{2n+1} è crescente

(i) $a_{2n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq a_{2n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{2n+2} \leq a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ sui pari $\downarrow$

$a_{2n+3} \geq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ sui dispari $\uparrow$

(iii) $a_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

$a_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$

(iv) $m = \ell = 1$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Segue da (i) + (ii) + teo. succ. monotone
(ma m ed l potrebbero essere diversi)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Bisogna scrivere l'iterazione sui pari e sui dispari

$$x_{2m+1} = \frac{7}{2x_{2m}+5} \qquad\qquad x_{2m+2} = \frac{7}{2x_{2m+1}+5}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$m = \frac{7}{2l+5} \qquad\qquad l = \frac{7}{2m+5}$$

Ho ottenuto un sistema che posso risolvere

$$\begin{cases} 2ml + 5m = 7 \\ 2ml + 5l = 7 \end{cases}$$

Sottraggo: $m = l$ e quindi $2l^2+5l=7$
da cui $2l^2+5l-7=0$

$$\rightsquigarrow \quad l = \begin{cases} 1 \\ -\frac{7}{2} \leftarrow \text{incompatibile con 1} \end{cases}$$

Quindi $a_{2m} \to l$, $a_{2m+1} \to l$, ed essendo lo stesso $a_n \to l$
(convincersene e magari dimostrarlo)

$\boxed{\text{Dim (i) e (ii)}}$ Volendo si possono fare per induzione

Brutal mode: $x_0 = 2017$, $x_1 = \frac{7}{4034+5} = \frac{7}{4039} = 0,\text{poco}$

$$x_2 = \frac{7}{2x_1+5} = \frac{7}{5+\text{poco}} = 1+\text{poco}$$

Quindi $0 \leq x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq x_0$

Applico $f(x)$, e inverto le disug. perché f è monot. decr.

$$f(0) \geq f(x_1) \geq f(1) \geq f(x_2) \geq f(x_0)$$

$$\underbrace{\frac{7}{5}}_{\text{ignoro}} \geq x_2 \geq 1 \geq x_3 \geq x_1 \geq 0$$

Riapplico $f(x)$ e inverto nuovamente

$$f(x_2) \leq f(1) \leq f(x_3) \leq f(x_1)$$
$$x_3 \leq 1 \leq x_4 \leq x_2$$

Morale: ogni volta che applico $f(x)$ ottengo una delle relazioni che mi servono!

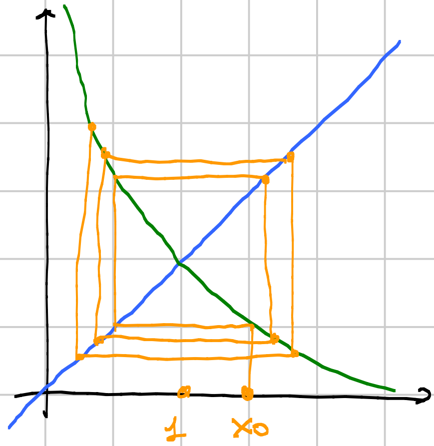
Volendo essere rigorosi: metto (i) e (ii) insieme nella catena

$$\boxed{0 \leq x_{2n+1} \leq x_{2n+3} \leq 1 \leq x_{2n+2} \leq x_{2n}}$$

Questa si dimostra facilmente per induzione semplicemente applicando $f(x)$ due volte (gli indici salgono di 2, e le disug. tornano nello stesso verso).

—o—o—

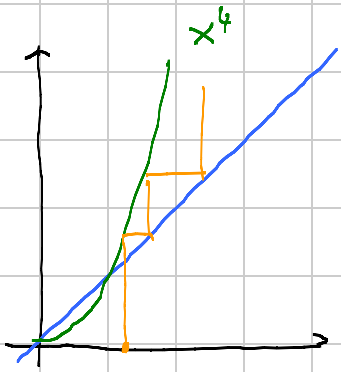
Esempio 2 $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} \qquad x_0 = \frac{2017}{2016}$



Tira aria di spiraleggiamento USCENTE.
Cosa dimostro? Che $x_{2n} \to +\infty$ e
$x_{2n+1} \to 0$
da cui x_n non ha limite.
Posso scrivere la doppia iterazione.
Pongo $y_n := x_{2n}$

$$y_{n+1} = x_{2n+2} = \frac{1}{x_{2n+1}^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_{2n}^2}\right)^2} = (x_{2n})^4 = y_n^4$$

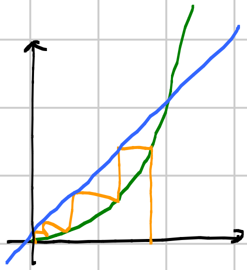
Ma allora y_n risolve $\qquad y_{n+1} = y_n^4$
$\qquad y_0 = \frac{2017}{2016}$



e questa si fa con la monotonia

Analogamente pongo $z_n := x_{2n+1}$ e vedo che

$$z_{n+1} = z_n^4 \quad \text{con partenza} \quad z_0 = x_1 < 1$$



da cui $z_n \to 0$ con piano monotonia

<u>Oss</u>. Tutte le volte che ho $x_{n+1} = f(x_n)$ con f decresc. posso considerare y_n e z_n come sopra e vedere che risolvono

$$y_{n+1} = f(f(y_n)) \qquad\qquad z_{n+1} = f(f(z_n))$$

e $f(f(x))$ è monotona crescente, quindi si ricade nei casi precedenti (provare con l'esempio 1).

— o — o —