Equazioni lineari a coeff. costanti NON omogenee

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)}(t)}_{\text{comb. lineare di } u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}} = f(t)$$

↑ funzione data

La soluzione generale sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\text{soluzione qualunque}\\ \text{dell'eq. non omogenea}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t)}_{\substack{\text{soluzione generale della}\\ \text{corrispondente equazione}\\ \text{omogenea}}}$$

← si trovano come nella lez. precedente

$\boxed{\text{Come trovo } \bar{u}(t)\text{?}}$ Due metodi

1 → provare a indovinare

2 → metodo di variazione delle costanti (funziona sempre, ma calcoloso)

Esempio 1 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^t$

Devo trovare una soluzione qualunque. È ragionevole cercarla del tipo $u(t) = ae^t$.

Calcolo $\dot{u}(t) = ae^t$, $\ddot{u}(t) = ae^t$. Sostituisco:

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = ae^t + 5ae^t + 6ae^t = e^t \rightsquigarrow 12ae^t = e^t \rightsquigarrow a = \frac{1}{12}$$

Quindi $\bar{u}(t) = \frac{1}{12} e^t$

Risolvo l'eq. omogenea associata : $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = 0$

$\rightsquigarrow \quad x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (x+2)(x+3) = 0$

$\rightsquigarrow \quad x = -2$ e $x = -3$

Soluzione generale: $u(t) = \underbrace{\frac{1}{12} e^t}_{\text{soluzione qualunque della non omogenea}} + \underbrace{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}_{\text{soluzione generale dell'eq. omog. corrispondente}}$

Esempio 1-bis $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{7t}$

Cerco la soluzione speciale del tipo $u(t) = a e^{7t}$

Calcolo $\dot{u} = 7a e^{7t} \qquad \ddot{u} = 49 a e^{7t}$

Sostituisco

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = 49a e^{7t} + 35a e^{7t} + 6a e^{7t} = e^{7t}$$

$$\rightsquigarrow \quad 90a e^{7t} = e^{7t} \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{1}{90}$$

Soluzione generale: $u(t) = \underbrace{\frac{1}{90} e^{7t}}_{\text{soluzione speciale}} + \underbrace{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}_{\text{dipende dall'omogenea}}$

Esempio 2 $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{-2t}$

La tentazione è cercare la soluzione del tipo $u(t) = a e^{-2t}$

ma fallisce miseramente perché e^{-2t} è soluzione dell'omogenea

quindi NON PUÒ FUNZIONARE ☹

In questi casi basta aggiungere una t ☺

Provo con

$$u(t) = a\,t\,e^{-2t}$$

$$\dot{u}(t) = a e^{-2t} - 2at\,e^{-2t}$$

$$\ddot{u}(t) = -2ae^{-2t} - 2ae^{-2t} + 4at\,e^{-2t} = -4a\,e^{-2t} + 4at\,e^{-2t}$$

Sostituisco nell' equazione e trovo

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = \underbrace{-4ae^{-2t} + \cancel{4ate^{-2t}}}_{\ddot{u}} + \underbrace{5ae^{-2t} - \cancel{10ate^{-2t}}}_{5\dot{u}} + \underbrace{\cancel{6ate^{-2t}}}_{6u} = e^{-2t}$$

I termini con la t devono andarsene. Cosa resta?

$$ae^{-2t} = e^{-2t} \quad \rightsquigarrow \quad a = 1$$

La soluzione generale è $\boxed{u(t) = te^{-2t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}$

$\boxed{\text{Regola generale}}$ Se a destra il termine non omogeneo è del tipo $e^{\lambda t}$, allora si cerca una soluzione del tipo

$$u(t) = a e^{\lambda t}$$

Funziona se $e^{\lambda t}$ non è già soluzione dell' omog.
Se lo è, si mettono delle t davanti "finché basta"

Esempio 3 $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = t^2$

Cerco una soluzione del tipo $u(t) = at^2 + bt + c$.

Calcolo $\dot{u}(t) = 2at + b$, $\quad \ddot{u}(t) = 2a$

Sostituendo

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = \underbrace{2a} + \underbrace{10at} + \underbrace{5b} + \underbrace{6at^2} + \underbrace{6bt} + \underbrace{6c} = \underbrace{t^2}$$

$$\begin{cases} 6a = 1 & \text{coeff } t^2 \\ 10a + 6b = 0 & \text{coeff } t \\ 2a + 5b + 6c = 0 & \text{termine noto} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{5}{3}a = -\frac{5}{18} \\ c = \dots \text{ si trova} \end{array}$$

Trovata la soluzione speciale $\bar{u}(t)$, quella generale sarà

$$u(t) = \bar{u}(t) + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Esempio 4 $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = \sin(2t)$

Cerco una soluzione del tipo $\quad u(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$

Faccio i conti:

$\dot{u}(t) = 2a\cos(2t) - 2b\sin(2t)$

$\ddot{u}(t) = -4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u &= -4a\sin(2t) - 4b\cos(2t) && \ddot{u} \\ &\quad + 10a\cos(2t) - 10b\sin(2t) && +5\dot{u} \\ &\quad + 6a\sin(2t) + 6b\cos(2t) && +6u \\ &= (-4a - 10b + 6a)\sin(2t) + (-4b + 10a + 6b)\cos(2t) \\ &= \sin(2t) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 2a - 10b = 1 \\ 10a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + 50a = 1 \\ b = -5a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{52} \\ b = -\frac{5}{52} \end{cases}$$

La sol. generale è

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{52}\sin(2t) - \frac{5}{52}\cos(2t) + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}$$

Regola generale: se ho a destra roba del tipo $\sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$

provo con qualcosa del tipo

$$\bar{u}(t) = a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)$$

Funziona sempre? NI! Non funziona quando $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ sono soluzioni dell'omogenea. In questi casi se ne esce mettendo delle t davanti finché basta.

$\boxed{\text{Riassunto dei tentativi}}$

$f(t) = e^{\lambda t}$ — $u(t) = a e^{\lambda t}$

$f(t) =$ polinomio — $u(t) =$ polinomio dello stesso grado

$f(t) = \sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$ — $u(t) =$ comb. lineare di $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$

$f(t) =$ somma di tanta roba come sopra — $u(t) =$ somma dei singoli tentativi

$f(t) =$ polinomio $\cdot\, e^{\lambda t}$ — $u(t) =$ polinomio dello stesso grado $\cdot\, e^{\lambda t}$

(stessa cosa con sin e cos)

$f(t) =$ roba che risolve l'omogenea — $u(t) =$ tentativo corrispondente moltiplicato per t finché basta

— o — o —