ANALISI 1 — LEZIONE 49

Note Title 30/11/2024

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

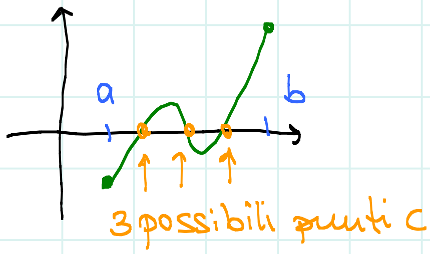
Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione
↑ è importante che sia intervallo, estremi inclusi

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a,b]$

(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè f ha valori di segno diverso in a e b)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.



Oss. Il punto c non è obbligato ad essere unico

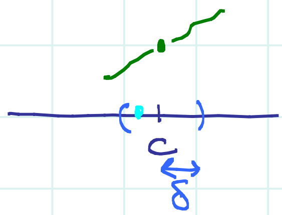
Oss. È fondamentale che siamo sui reali. Sui razionali potrebbe non valere. Esempio: $f(x) = x^2 - 2$ è negativa in 0, è positiva in 5, ma non si annulla in nessun $x \in \mathbb{Q}$.

Dim Poniamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Definiamo

$$c := \inf \underbrace{\{x \in [a,b] \text{ t.c. } f(x) > 0\}}_{\text{Questo insieme non è } \emptyset \text{ perché contiene almeno il p.to } b}$$

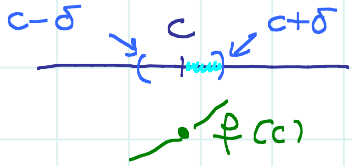
Dico che $f(c) = 0$. Se non fosse, sarebbe $f(c) > 0$ oppure $f(c) < 0$. Vediamo che in entrambi i casi si arriva ad un assurdo.

$\boxed{f(c) > 0}$ Essendo f continua, per la permanenza del segno esisterebbe $\delta > 0$ t.c. $f(x) > 0$ per ogni $x \in [c-\delta, c+\delta]$.



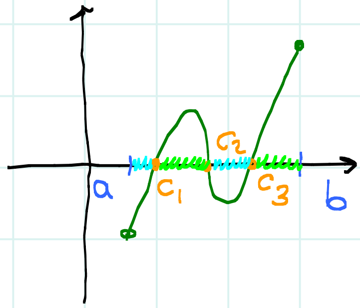
Ma allora ci sarebbero punti $x < c$ in cui $f(x) > 0$, e quindi c non sarebbe l'inf.

$\boxed{f(c)<0}$ Anche in questo caso esisterebbe $\delta>0$ t.c. $f(x)<0$ per ogni $x\in[c-\delta, c+\delta]$.



D'altra parte, per caratterizzazione dell'inf, per ogni $\delta>0$ deve esistere $c<x<c+\delta$ tale $f(x)>0$. Ma questo è impossibile perché f è negativa in un intervallino a destra di c.

— o — o —



<u>Oss.</u> Capiamo bene la definizione di c.

$$\underset{\uparrow c_1}{c} = \inf\{x\in[a,b] : f(x)>0\}$$

Avrei potuto definire

$$\underset{\uparrow c_3}{c} = \sup\{x\in[a,b] : f(x)<0\}$$

Avrei anche potuto definire

$$c = \inf\{x\in[a,b] : f(x)\geq 0\}$$
$$c = \sup\{x\in[a,b] : f(x)\leq 0\}$$

<u>Esercizio</u> 1 Provare a fare la dimostrazione usando le altre tre definizioni di c

2 Trovare un esempio di una funzione per cui le 4 definizioni danno 4 c diversi.

Corollario 1 Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e sia $\lambda\in\mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f è continua
(ii) $f(a)<\lambda$ e $f(b)>\lambda$ (o viceversa)
Allora esiste almeno un $c\in(a,b)$ t.c. $f(c)=\lambda$

<u>Dim</u>: basta considerare $g(x)=f(x)-\lambda$ e applicare il teorema.

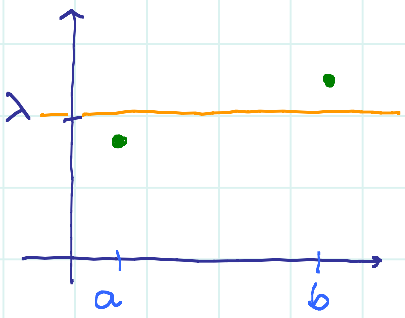
$\boxed{\text{Corollario 2}}$ Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo (con o senza estremi) oppure una semiretta (con o senza estremo) oppure tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo

$$\inf\{f(x) : x \in I\} \quad e \quad \sup\{f(x) : x \in I\}$$

Se f è continua, allora assume tutti i valori compresi tra inf e sup, estremi esclusi

$\boxed{\text{Dim}}$ Sia $\inf < \lambda < \sup$



Allora esiste

$a \in I$ tale che $f(a) < \lambda$

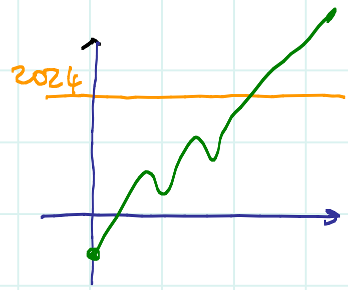
ed esiste

$b \in I$ tale che $f(b) > \lambda$

Ma allora in (a, b) esiste almeno un c tale che $f(c) = \lambda$.

<u>Esempio 1</u> Dimostrare che l'equazione

$$x^2 - \log(7 + x^{20}) + \sin(x^3) = 2024$$



ha almeno una soluzione reale

La funzione a sx è una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Basta trovare

$a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < 2024$ e $b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(b) > 2024$

↑ posso usare $a = 0$

in quanto $f(0) = -\log 7 < 0$

Per quanto riguarda b, sappiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

quindi $\forall M \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\exists\, x \in \mathbb{R}}$ t.c. $f(x) \geq M$.

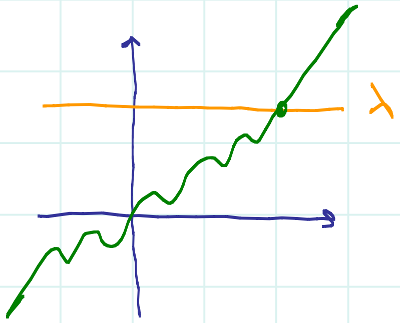
anzi $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. è vero per ogni $x \geq k$

La uso con $M = 3000$ e ho finito ☺.

Esempio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3+x^{30}} - x^{20}$$

Domanda: f è surgettiva?



$\boxed{\text{Ovviamente}}$ Devo dimostrare che

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) = \lambda$$

Basta trovare $a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) < \lambda$ e
$b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(b) > \lambda$

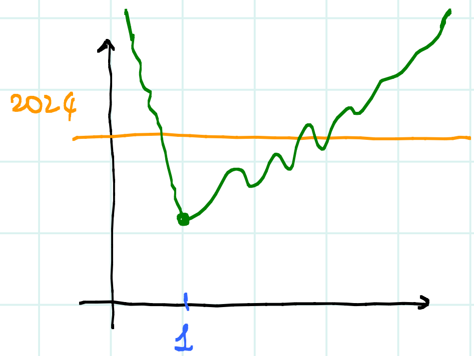
Come prima la fatica la fa la definizione di limite perché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Esempio 3 L'equazione

$$\arctan x + e^x - \log x = 2024$$

ha almeno DUE soluzioni reali



Osserviamo che $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e
per colpa o merito di e^x

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{(per colpa o merito di } \log x\text{)}$$

Infine $f(1) = \frac{\pi}{4} + e < 2024$.

Quindi ci sarà almeno una soluzione $x \in (0,1)$ e almeno una soluzione $x > 1$

— o — o —