ANALISI 1 — LEZIONE 30

Note Title 07/11/2024

Equivalenza asintotica Siano $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ ed x_0 come nella definizione di o piccolo

Def. Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se

"f è asintoticamente equivalente a g"

esiste $\omega: D \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \quad \text{per ogni } x \in D$$

e

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1$$

La definizione quasi equivalente (quando posso dividere per g) è che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

[Brutalmente: f(x) e g(x) pareggiano quando $x \to x_0$]

Sviluppini in versione equivalenza asintotica:

$\sin x \sim x$ $\qquad$ $\cos x \sim 1$

$\tan x \sim x$ $\qquad$ $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$\arctan x \sim x$ $\qquad$ $e^x \sim 1 + x$

$\arcsin x \sim x$ $\qquad$ $\log(1+x) \sim x$

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$$

[Sono gli stessi di prima senza o piccolo]

Achtung! Achtung! Usare l'equivalenza asintotica nel calcolo dei limiti è ESTREMAMENTE PERICOLOSO

Fatto generale

Se $f(x) = x + o(x)$ allora
$$f(ax) = ax + o(x)$$

$$f(x) = x + x\omega(x) \rightsquigarrow f(ax) = ax + x\omega(ax)$$
$$= ax + x \cdot \boxed{a\omega(ax)}$$
$\omega_1(x) \to 0$

Se $f(x) = x + o(x)$, allora
$$f(x^3) = x^3 + o(x^3) \quad \text{(e idem con altre potenze)}$$

$$f(x) = x + x\omega(x) \rightsquigarrow f(x^3) = x^3 + \underbrace{\boxed{x^3\omega(x^3)}}_{o(x^3)}$$

Se $f(x) = x + o(x)$, allora $\quad f(x)^2 = x^2 + o(x^2)$

$$f(x) = x + x\omega(x) \rightsquigarrow f(x)^2 = x^2 + 2x^2\omega(x) + x^2\omega(x)^2$$
$$= \underbrace{x^2 + x^2\underbrace{[2\omega(x) + \omega(x)^2]}_{\to 0}}_{o(x^2)}$$

Se $f(x) = x^2 + o(x^3)$, allora $\quad f(x)^2 = x^4 + o(x^5)$

$$f(x) = x^2 + x^3\omega(x) \rightsquigarrow f(x)^2 = x^4 + 2x^5\omega(x) + x^6\omega(x)^2$$
$$= x^4 + x^5\underbrace{[2\omega(x) + x\omega(x)^2]}_{\to 0}$$

Se avessi scritto $f(x)^2 = x^4 + o(x^4)$ era sbagliato?
Sono entrambe scritture corrette, ma quella sopra dà più informazioni

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$ Ok!

$\sin(x^2) = x^2 + o(x)$ Corretta, ma buffa

È buffa perché $x^2 = o(x)$ e quindi tanto varrebbe scrivere
$$\sin(x^2) = o(x)$$

Brutalmente: $o(x)$ si mangia tutti gli x^a con $a > 1$.

Esempio 1

$$\frac{\sin(2x+x^3)+x}{\arctan(3x-x^5)-x} \qquad \Bigg| \qquad \Bigg\| \qquad \frac{\cos(x+x^2)-1}{x\sin x + x\log(1+2x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x+x^3)+x}{\arctan(3x-x^5)-x} = \frac{3}{2}$$

Brutalmente: $\dfrac{2x+x^3+x}{3x-x^5-x} \sim \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

$$\sin(2x+x^3) = \underbrace{2x+x^3}_{\downarrow\, o(x)} + \underbrace{o(2x+x^3)}_{\downarrow\, o(x)} = 2x + o(x)$$

Come giustificare che $o(2x+x^3) = o(x)$?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $\quad o(2x+x^3) = (2x+x^3)\,\omega(2x+x^3)$

$$= x\,\underbrace{\boxed{(2+x^2)\,\omega(2x+x^3)}}_{=\,\omega_1(x)\,\to\,0}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\quad \dfrac{o(2x+x^3)}{x} = \underbrace{\boxed{\dfrac{o(2x+x^3)}{2x+x^3}}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\boxed{\dfrac{2x+x^3}{x}}}_{\downarrow\, 2} \to 0$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ $\quad o(2x+x^3) \overset{?}{=} o(2x) + o(x^3) = o(x) + o(x) = o(x)$

È vero che $o(g_1+g_2) = o(g_1) + o(g_2)$?

$$o(g_1+g_2) = (g_1(x)+g_2(x))\,\omega(x) = \underbrace{g_1(x)\,\omega(x)}_{=\,o(g_1)} + \underbrace{g_2(x)\cdot\omega(x)}_{=\,o(g_2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x+x^2)-1}{x\sin x + x\log(1+2x)} \quad \left[\sim \frac{1-\frac{1}{2}(x+x^2)^2-1}{x^2+2x^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} \sim -\frac{1}{6}\right]$$

$\sin x = x + o(x)$ $\qquad$ $x \sin x = x^2 + x\, o(x) = x^2 + o(x^2)$

$x\, o(x) = x \cdot x \cdot \omega(x) = x^2 \omega(x) = o(x^2)$

$\log(1+2x) = 2x + o(x) \quad \rightsquigarrow \quad x \log(1+2x) = 2x^2 + x\, o(x)$
$= 2x^2 + o(x^2)$

Denominatore $= x^2 + o(x^2) + 2x^2 + o(x^2) = 3x^2 + o(x^2)$

$\cos(x+x^2) = 1 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o((x+x^2)^2) \overset{?}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\cos t \qquad = 1 - \frac{1}{2} t^2 + o(t^2)$

$(x+x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4 = x^2 + o(x^2)$

Analogamente

$o((x+x^2)^2) = o(x^2 + 2x^3 + x^4) = o(x^2) + o(2x^3) + o(x^4)$
$= o(x^2)$.

Oss. Ha senso o piccolo per le successioni?
Certo, solo che va fatto per $n \to +\infty$

Esempio $\qquad n^2 = o(n^3)$ per $n \to +\infty$

$n^2 = n^3 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\to 0}$ $\qquad$ e quindi è vero!!

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ A zero comandano le potenze piccole, a ∞ comandano le potenze grandi

$f(x) = \dfrac{x + x^5}{\sin(2x) - 3x^5}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ $\quad \left[\dfrac{x + o(x)}{2x + o(x)} \right]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ $\quad \left[\dfrac{x^5}{-3x^5} \to -\frac{1}{3} \right]$

— o — o —