ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 01

Note Title 26/09/2023

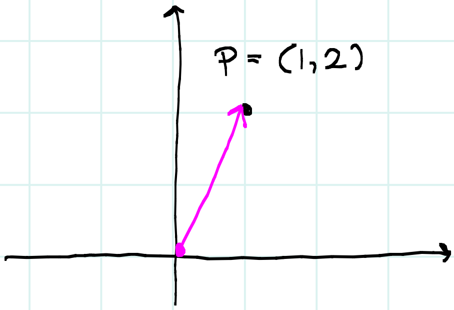
1 – Geometria analitica
2 – Sistemi lineari
3 – Spazi vettoriali e applicazioni lineari
4 – Prodotti scalari

MATRICI

— o — o —

Vettori geometrici

Idea: pensare ai p.ti nel piano cartesiano



$\mathbb{R}^2$ = p.ti con due coordinate (x, y)
$\mathbb{R}^3$ = " tre " (x, y, z)
$\vdots$
$\mathbb{R}^{37}$ = " 37 " $(x_1, x_2, \dots, x_{37})$

Un p.to lo posso indicare con una lettera singola

$P = (1,2)$ $\in \mathbb{R}^2$ $Q = (3, -2, \sqrt{5})$ $\in \mathbb{R}^3$ $\vec{v} = (1,2,7)$ $\in \mathbb{R}^3$

Operazioni tra vettori

- SOMMA (componente per componente)

$$(1,2,3) + (2,-4,5) = (3,-2,8)$$

- PRODOTTO TRA UN VETTORE E UN NUMERO

$$\underset{\text{numero}}{7}\ \underset{\text{vettore}}{(1,2,3)} = \underset{\text{vettore}}{(7,14,21)}$$

- PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

→ INPUT: 2 vettori → OUTPUT: numero

$\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Esempio In $\mathbb{R}^4$: $\vec{u} = (1,0,-1,2)$
$\vec{v} = (2,1,1,3)$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2+0-1+6 = 7$$

"Scalare" è sinonimo di numero

- NORMA DI UN VETTORE

Dato $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ si pone

$$\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}_{\text{Pitagora a } n \text{ variabili}} = \text{lunghezza del vettore}$$

- DISTANZA TRA DUE VETTORI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come prima

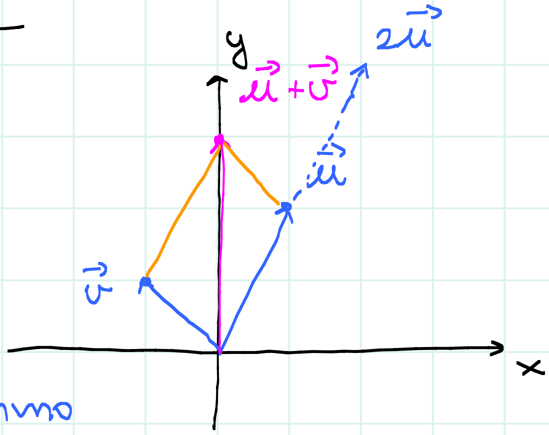
$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Relazioni ovvie

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$
- $\vec{v} - \vec{u} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = \vec{v} + (-1)\vec{u}$
- $\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

— o — o —

Esempi in $\mathbb{R}^2$ $\vec{u} = (1,2)$
$\vec{v} = (-1,1)$



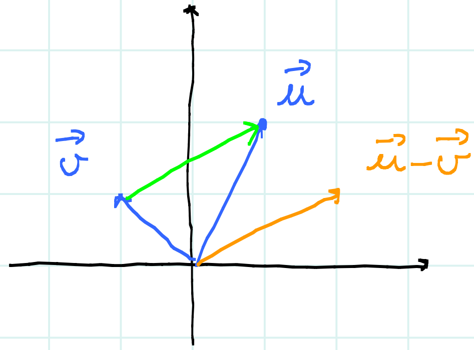
$\vec{u} + \vec{v} = (0,3)$

Somma = regola del parallelogrammo

$2\vec{u} = (2,4)$ raddoppio il vettore

$-2\vec{u} = (-2,-4)$ capovolgo se il segno è negativo

$\vec{u} - \vec{v} = (2,1)$ = vettore che parte da $\vec{v}$ e arriva a $\vec{u}$



= "quello che bisogna aggiungere a $\vec{v}$ per ottenere $\vec{u}$"

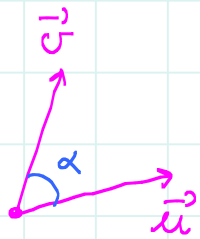
Da qui è evidente che dist $(\vec{u}, \vec{v})$ è la norma di $\vec{u}-\vec{v}$

$$\vec{v} - \vec{u} = -(\vec{u} - \vec{v})$$

Significato geometrico del prodotto scalare

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha}$$

angolo compreso fra u e v



$\vec{u} = (1,2)$ $\quad \vec{v} = (-1,1)$ $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -1+2 = 1$$

Dalla formula precedente

$$1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha \rightsquigarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Il segno del $\cos\alpha$ ci dice se l'angolo è acuto (>0), ottuso (<0), retto ($=0$)

<u>Oss</u>. Se i due vettori sono diversi da $\vec{0}$, quindi hanno norma $\neq 0$, allora

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \cos\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$$ cioè i vettori sono perpendicolari

Proprietà del prodotto scalare

Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tre vettori di $\mathbb{R}^n$

Sia λ un numero.

Allora

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \lambda x_1 \cdot y_1 + \dots + \lambda x_n \cdot y_n$$

$$= \lambda (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$$

$$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}_{\text{uguali}} + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

$$= \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

[Fare la verifica usando le componenti].

— o — o —