ANALISI 1 — LEZIONE 067

Note Title 15/12/2016

Criteri di convergenza per integrali impropri

Come stabilire se un int. impr. converge o no senza calcolare la primitiva

Notazione : $\int_E f(x)\,dx$

E ← zona di integr: intervallo oppure semiretta

$\boxed{f(x) \text{ segno costante } (\geq 0)}$

- Criterio confronto
- Criterio confr. asintotico
  - → casi standard
  - → casi limite
- metodo dei triangolini (rettangolini)

$\boxed{f(x) \text{ segno variabile}}$

- assoluta integrabilità
- trucco integraz. per parti

Oss. fondamentale Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$, allora l'integrale improprio può solo
- convergere
- divergere a $+\infty$

Oss. La condizione $f(x) \geq 0$ basta che sia verificata "vicino al problema", cioè
- per x abbastanza grande se $E = [a, +\infty)$
- in un intorno dx di a se $E = [a,b]$ e il problema unico dell'integrale è in a
- analogo se è in b.

Criterio del confronto Supponiamo che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in E \text{ "vicino al problema"}$$

Allora valgono le implicazioni

$$\int_E g(x)\,dx < +\infty \implies \int_E f(x)\,dx < +\infty$$

$$\int_E f(x)\,dx = +\infty \implies \int_E g(x)\,dx = +\infty$$

Ogni altra implicazione è abusiva.

Criterio confronto asintotico (caso standard). Supponiamo che

$$f(x) \geq 0 \quad e \quad g(x) > 0 \qquad \forall x \in E \text{ "vicino al pbm".}$$

Supponiamo inoltre che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

è il pbm (cioè $+\infty$ se $E = [a, +\infty)$, e l'estremo a o b se la zona è $[a,b]$ e c'è pbm. in uno degli estremi)

Allora i due integrali si comportano allo stesso modo cioè

$$\int_E f(x)\,dx \underset{=}{<} +\infty \iff \int_E g(x)\,dx \underset{=}{<} +\infty$$

Oss. ① Quanto detto sopra vale per integrali MONOPROBLEMA con unico pbm. in x_0

② Nei casi limite $l = 0$ opp $l = +\infty$, si ragiona come con le serie, ricadendo nel caso $f(x) \leq g(x)$ opp. $f(x) \geq g(x)$ del criterio del confronto.

Criterio assoluta convergenza (assol. integrabilità)

$$\boxed{\int_E |f(x)|\,dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)\,dx \ \text{converge}}$$

$$\boxed{\int_E |f(x)|\,dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{BOH}}$$

$\boxed{\text{Dim di 1 caso}}$ Confronto normale con $E = [a, +\infty)$.

Supponiamo per ipotesi che

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad \forall x \ge a$$

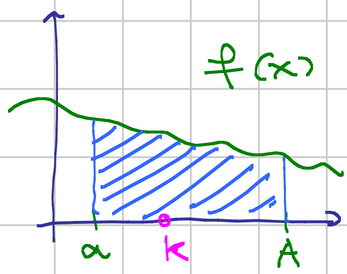
Allora per ogni $A \ge a$ vale

$$\int_a^A f(x)\,dx \le \int_a^A g(x)\,dx \qquad \text{(monotonia int. propri)}$$

Basta ora fare il limite a dx e sx (limite per $A \to +\infty$)
I lim. a dx e sx esistono perché come funzioni di A sono debolmente crescenti (serve che le integrande siano ≥ 0)

Variante Supponiamo ora che

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad \forall x \ge k$$



Allora basta osservare che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^{+\infty} f(x)\,dx$$

e questa segue da

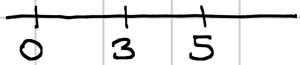
$$\int_a^A f(x)\,dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^A f(x)\,dx \qquad \forall A \ge k \ge a$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{numero fisso} + \int_k^{+\infty} f(x)\,dx$$

Oss. Quando ho un integrale con 2 pbm., diciamo in 0 e $+\infty$ allora in mezzo posso spezzare dove mi pare

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^{+\infty} f(x)\,dx$$



$$= \int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^{+\infty} f(x)\,dx$$

(è come spezzare in 3 e ricombinare diversamente i vari pezzi).

Esempio 1 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+5x+6}\,dx$

Integrale improprio con unico pbm. a $+\infty$ e integranda $f(x) \geq 0$

Brutale : $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, quindi converge

Rigoroso : C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \uparrow \\ \text{pbm}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad \Rightarrow \text{stesso comportamento}$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+5x+6}\,dx$

Brutale : $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, quindi diverge

No! Il secondo integrale diverge per colpa del pbm. in $x=0$, mentre il confronto l'abbiamo fatto a $+\infty$

Brutale : $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, quindi $\int f(x)\,dx$ con unico pbm. a $+\infty$, si comporta come $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con unico pbm. a $+\infty$, quindi conv.

Volendo potrei spezzare:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\text{int. proprio, quindi numero}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{confronto con } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx}$$

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

Ora ci sono due pbm., quindi spezzo: $\displaystyle\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

<u>Problema a $+\infty$</u>: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, quindi si comporta come l'int. di $\frac{1}{x^2}$ con pbm. a $+\infty$, quindi converge

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}} = 1$$

<u>Problema a 0</u>: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$, quindi si comporta come l'integr. di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ con pbm. in $x=0$, quindi converge

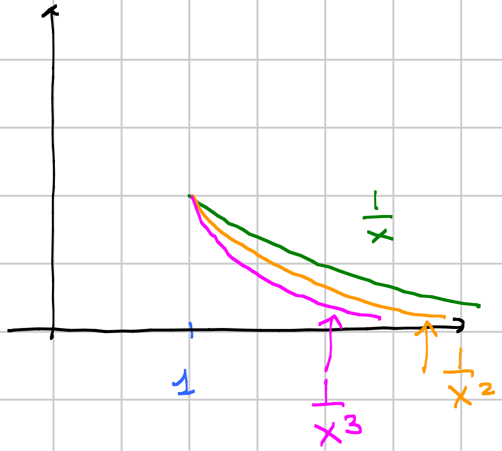
(a 0 gli esponenti "buoni" sono quelli <1)

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ \uparrow \\ \text{pbm}}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = 1$$

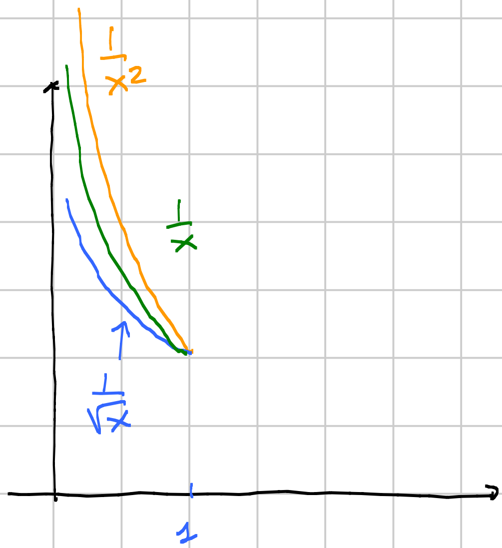
[Se avessi scelto $g(x) = \frac{1}{x^2}$ veniva lim $=0$, quindi

$f(x) \le g(x)$ vicino al pbm., ma $\int g(x) = \int \frac{1}{x^2}$ con pbm. in $x=0$ diverge $\Rightarrow$ BOH]

Oss. (sui pbm. a 0 e +∞)



Per il pbm. a +∞, più l'esponente è grande, più è facile che converga



Per il pbm. in 0, più l'esp. è grande, e più è facile che diverga.