ANALISI 1 — LEZIONE 007

Note Title 03/10/2024

FATTORIALI, BINOMIALI, BINOMIO DI NEWTON

Versione BABY:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$\vdots$$
$$(a+b)^{2024} = a^{2024} + \ldots a^{2023}b + \ldots a^{2022}b^2 + \ldots$$

Domanda: come trovo i coefficienti?

Risposta BABY: mediante il triangolo di TARTAGLIA

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

...

Due regole:
- → ai lati ci sono degli 1
- → ogni numero è la somma dei due che gli stanno sopra

Problema: se voglio sapere in $(a+b)^{2024}$ chi sta davanti a $a^{1000}b^{1024}$, devo calcolare tutte le righe

Altra domanda: perchè funziona questo procedimento

FATTORIALI

Per ogni $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ il fattoriale di n, che si indica con $n!$, è definito come

$0! = 1$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ se $n \geq 1$

[definizione ricorsiva $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$]

Significato combinatorio del fattoriale

Prendiamo un insieme di n studenti e organizziamo una corsa. Quanti sono i possibili ordini di arrivo?

Esempio con 3 studenti $\{A, B, C\}$. I possibili ordini di arrivo sono

A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	A	B
C	B	C	A	B	A

Sono $6 = 3!$

In generale i possibili ordini di arrivo sono $n!$

Perché? → Il primo lo posso scegliere in n modi

→ Il secondo " " " $(n-1)$ modi

→ Il terzo " " " $(n-2)$ modi

... e così via.

Tutte le scelte sono tra loro indipendenti, quindi

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

l'ultimo è univoc. determinato dalla scelta degli altri

Problema analogo Quanti sono gli anagrammi di una parola di n lettere tutte diverse. $\rightsquigarrow n!$

PARCO 5 lettere diverse $\rightsquigarrow 5! = 120$ anagrammi

BINOMIALI Significato combinatorio.

Ho un gruppo di 180 studenti. Di questi, 60 supereranno AM1.
In quanti modi posso scegliere 60 persone su 180 ?

Supponiamo di scegliere le 60 persone una per volta.
→ La prima la posso scegliere in 180 modi
→ La seconda " " 179 modi
→ La terza " " 178 "
⋮
→ La 60-esima " " $\boxed{121}$ modi
↑ occhio non 120

In questo modo lo stesso gruppo di 60 persone viene scelto più volte, a seconda dell'ordine in cui le 60 persone sono state selezionate.
Lo stesso gruppetto compare 60! volte, quindi bisogna dividere, e viene

$$\frac{180\cdot 179\cdot\ldots\cdot 121}{60!} = \binom{180}{60}$$

← BINOMIALE "180 SU 60"

Più in generale

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}$$

si intende che n e k sono in $\mathbb{N}$ e $k \le n$

<u>Oss.</u>

$$\frac{180\cdot 179\cdot\ldots\cdot 121}{60!} = \frac{180\cdot 179\cdot\ldots\cdot 121\cdot 120\cdot 119\cdot\ldots\cdot 1}{60!\ \ 120\cdot 119\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{180!}{60!\,120!}$$

e così in generale

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

altro modo di scrivere la formula con solo fattoriali

BINOMIALI VS TARTAGLIA

Fissato n, i numeri $\binom{n}{k}$ al variare di k, sono la riga n del triangolo di Tartaglia

Esempio per $n=4$ $\quad \binom{4}{0} = \dfrac{4!}{0!\,4!} = \boxed{1}$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{24}{6} = \boxed{4} \qquad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = \boxed{6}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = \frac{24}{6} = \boxed{4} \qquad \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\,0!} = \boxed{1}$$

Oss. generali $\quad \binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1 \quad$ (tutte le righe iniziano con 1)

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$
(il secondo termine di ogni riga è n)

se devo scegliere una sola persona su n, lo posso fare in n modi

$$\underset{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\binom{n}{k}} = \underset{\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}}{\binom{n}{n-k}}$$
(ogni riga del triangolo è simmetrica)

scegliere le k persone promosse è equivalente a scegliere le $n-k$ persone bocciate

Relazione "alla Tartaglia"

$$\underbrace{\binom{n+1}{k+1}}_{\text{numero della riga } n+1} = \underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}_{\text{due numeri della riga } n \text{ che gli stanno "sopra"}}$$

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \overset{?}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{(n+1)\cancel{n!}}{(k+1)\cancel{k!}\,(n-k)\cancel{(n-k-1)!}} \overset{?}{=} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}\,(n-k)\cancel{(n-k-1)!}} + \frac{\cancel{n!}}{(k+1)\cancel{k!}\,\cancel{(n-k-1)!}}$$

$$\frac{n+1}{(k+1)(n-k)} \overset{?}{=} \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}$$

Vero per facile conto

Domanda iniziale: chi sta davanti a $a^{1000} b^{1024}$ in $(a+b)^{2024}$?

Risposta: $\binom{2024}{1000} = \dfrac{2024!}{1000!\,1024!} = \binom{2024}{1024}$

Domanda: in un campionato a n squadre, quante sono le partite del girone di andata ?

Sono $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

— o — o —