INSIEMI NUMERICI (Da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{R}$ passando per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$)

Numeri naturali (Assiomi di PEANO)

I numeri naturali sono una terna $(\mathbb{N}, 0, s)$ dove

- $\mathbb{N}$ è un insieme
- $0 \in \mathbb{N}$ è un elemento
- $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione (moralmente il successivo) tale che

  (i) s è iniettiva

  (ii) l'immagine di s è $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, cioè

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad s(m) = n$$

  (iii) per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$, se valgono le 2 proprietà
  - $0 \in A$
  - $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in A \Rightarrow s(n) \in A$

  allora $A = \mathbb{N}$.

Oss. La proprietà (iii) è il principio di induzione (pensiamo ad A come l'insieme degli $n \in \mathbb{N}$ per cui una certa P_n è vera)

Oss. Quella sopra è una definizione assiomatica.

Teoremone I numeri naturali esistono e sono unici a meno di isomorfismo, nel senso che per ogni altra terna $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{0}, \hat{s})$ che soddisfa gli assiomi esiste

$$\varphi : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$$

tale che

- φ è iniettiva e surgettiva
- $\varphi(0) = \hat{0}$
- $\hat{s}(\varphi(n)) = \varphi(s(n))$

$\boxed{\text{Dim}}$ Esistenza : tutt'altro che ovvia, e serve qualcosa in teoria degli insiemi che permetta la costruzione

Unicità Data la terna alternativa $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{0}, \hat{s})$ devo costruire $\varphi : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$.

Pongo

$$\varphi(0) = \hat{0}$$

e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ prendo il valore $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$s(m) = n \qquad \text{(esiste ed è unico per Peano)}$$

e pongo

$$\varphi(n) = \hat{s}(\varphi(m)) \qquad \text{(gratis terza richiesta)}$$

Ho veramente definito φ ovunque ? Sì : sia $A \subseteq \mathbb{N}$ il sottoinsieme per cui l'ho definita. Allora

- $A \ni 0$
- se $m \in A$, anche $s(m) \in A$

Quindi per l'assioma di Peano sull'induzione $A = \mathbb{N}$.

Resta la (facile) verifica che φ è bigettiva.

—o—o—

$\boxed{\text{Operazioni e ordinamento in } \mathbb{N}}$

Somma $a+b$ Def.

- $a + 0 = a \qquad \forall a \in \mathbb{N}$
- $a + s(b) = s(a+b) \qquad \forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N}$

Esercizio Dimostrare che la somma è commutativa e associativa (è una vera pena)

Prodotto $a \cdot b$ **Def.**

- $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$
- $a \cdot s(b) = a \cdot b + a \quad \forall a \in \mathbb{N} \ \forall b \in \mathbb{N}$

Esercizio Stesso di sopra

Ordinamento Si dice che $m \geq n$ se esiste $z \in \mathbb{N}$ t.c.

$$m = n + z$$

Esercizio Verificare gli assiomi di ordinamento e quelli che legano ordin. e operazioni

— o — o —

$\boxed{\text{Definizione di } \mathbb{Z}}$ Moralmente $z = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{n} - \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{m}$

Considero le coppie di naturali $\mathbb{N}^2$ e definisco una relaz. di equiv.

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

$n_1 - m_1 = n_2 - m_2$ ⇝ riscrivo senza usare segno −

Dicesi $\mathbb{Z}$ il quoziente $\mathbb{N}^2/\sim$

Operazioni

$$(n_1, m_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Z}}}{+} (n_2, m_2) = (n_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{+} n_2, m_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{+} m_2)$$

$$(n_1, m_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Z}}}{\cdot} (n_2, m_2) = (n_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{} n_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{+} m_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{} m_2, n_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{} m_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{+} n_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{} m_1)$$

Esercizio ☺

- Le operazioni passano al quoziente
- Le operazioni verificano le proprietà di anello di $\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Definizione di } \mathbb{Q}}$ $\quad q = \frac{m}{n}$

Coppie $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ e definisco la rel. di equiv.

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$$

Dicesi $\mathbb{Q}$ il quoziente $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$

Con un po' di pazienza definisco le operazioni, verifico che passano al quoziente e le proprietà di campo di $\mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Definizione di } \mathbb{R}}$

<u>Def.</u> via <u>sezioni di DEDEKIND</u> (Dedekind cuts)

Parto da $\mathbb{Q}$ e definisco sezione di Dedekind ogni coppia (A, B) tale che

(i) $A \subseteq \mathbb{Q}$ e $B \subseteq \mathbb{Q}$

(ii) $A \cap B = \emptyset$

(iii) $A \cup B = \mathbb{Q}$

(iv) $a < b$ per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$

(v) $\forall a \in A \ \exists a' \in A$ t.c. $a < a'$ (moralmente A è una semiretta sx aperta)

<u>Oss.</u> Dato A, si ha che B è univoc. determinato.

<u>Def.</u> Dicesi $\mathbb{R}$ l'insieme di tutte le sezioni di Dedekind.

(Moralmente: penso A come $\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$

reale che ho in mente

Con molta pazienza dovrei

- definire le operazioni
  - → facile per la somma
  - → una pena per il prodotto
- definire l'ordinamento
  - → quasi banale ($r_1 > r_2$ se la sua semiretta contiene quell'altra)
- verificare propr. algebriche e di ordinamento (una pena)
- verificare l'assioma di continuità (il sup è l'unione delle semirette)

<u>Oss.</u> Da tutti gli assiomi segue che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono contenuti dentro $\mathbb{R}$, cioè

→ esiste $i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ iniettiva con un minimo di proprietà tipo

- $i(\underset{\mathbb{N}}{0}) = \underset{\mathbb{R}}{0}$
- $i(\underset{\mathbb{N}}{s(n)}) = i(n) + \underset{\mathbb{R}}{1}$ (el. neutro della moltiplic.)

Analogamente per $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Posto di aver fatto tutto, uno ha dim. l'esistenza dei reali.

Per l'unicità, dati degli altri reali $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{\geq})$ occorre costruire

$$\varphi : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$$

che commuta... L'idea è

- si parte con $\varphi(0) = \hat{0}$ e $\varphi(1) = \hat{1}$ (sempre $1 \neq 0$)
- si estende all'immagine di $\mathbb{N}$, poi a quella di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$,
- sfruttando l'assioma di continuità si estende a tutto $\mathbb{R}$, pensando agli elementi come semirette sinistre

— o — o —