LINGUAGGIO DEGLI INFINITESIMI : SIMBOLI DI LANDAU

- → o piccolo — fondamentale per i limiti
- → O grande — non è utilissimo per ora
- → equivalenza asintotica $\sim$ — pericolosa per i limiti

<u>Def.</u> Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un p.to in cui fare i limiti.
Sia $g: D \to \mathbb{R}$.
Si dice che f è o piccolo di g per $x \to x_0$, e si scrive

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0}$$

se esiste $\omega: D \to \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x) = \omega(x)\, g(x)} \quad \forall x \in D$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0}$$

Brutalmente: se $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora $f(x) \to 0$ "di più"

<u>Def. quasi equivalente</u> Nel caso in cui $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, la definizione è come chiedere che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

<u>Def.</u> Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, se come sopra con

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1$$

quasi equiv.: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Esempio 1 $\quad x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$

$$\underbrace{x^3}_{f(x)} = \underbrace{x}_{\omega(x)} \cdot \underbrace{x^2}_{g(x)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$$

Esempio 2 $\quad \sin^2 x = o(x)$ per $x \to 0$

1° modo

$$\underbrace{\sin^2 x}_{f(x)} = \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{\omega(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}$$

Devo verificare

$$\lim_{x\to 0} \omega(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0$$

2° modo : uso def. quasi equiv. (posso perché $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

Esempio 3 $\quad \tan^2 x = o(\arctan x)$ per $x \to 0$

2° modo : posso dividere perché...

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\tan^2 x}{x^2}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\arctan x}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0} = 0$$

Esempio 4 $\quad \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ per $x \to 0$

1° modo :

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{g(x)} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{\omega(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$$

In questo caso $f(x)$ e $g(x)$ non tendono a 0 per $x \to 0$.

$\boxed{\text{Proprietà algebriche di o piccolo}}$

Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x)) \quad e \quad f_2(x) = o(g(x)) \qquad per\ x \to x_0$$

- $\boxed{\text{SOMMA}}$ $\quad \boxed{f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))}$

$$f_1(x) = g(x)\,\omega_1(x) \qquad\qquad f_2(x) = g(x)\,\omega_2(x)$$

$$\text{con} \quad \lim_{x\to x_0} \omega_1(x) = \lim_{x\to x_0} \omega_2(x) = 0$$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x)\underbrace{[\omega_1(x) + \omega_2(x)]}_{=\omega_3(x) \to 0}$$

- $\boxed{\text{PRODOTTO}}$ $\quad \boxed{f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x)^2)}$

$$f_1(x)\,f_2(x) = g(x)\,\omega_1(x)\,g(x)\,\omega_2(x) = g(x)^2 \cdot \underbrace{[\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)]}_{=\omega_3(x) \to 0}$$

- $\boxed{\text{MULTIPLO}}$ $\quad \boxed{\alpha f_1(x) = o(g(x))}$

$$\alpha f_1(x) = \alpha\, g(x)\,\omega_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{[\alpha\,\omega_1(x)]}_{\omega_3(x) \to 0}$$

- $\boxed{\text{RAPPORTO}}$ $\quad \boxed{\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \text{Nulla di furbo}}$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)}\,\omega_1(x)}{\cancel{g(x)}\,\omega_2(x)} = \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = \text{BOH ?!?}$$

Brutalmente: f_1 batte g, f_2 batte g, ma che accade tra f_1 ed f_2?

Riassunto proprietà algebriche

$$o(g) + o(g) = o(g)$$
$$o(g) - o(g) = o(g)$$
$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$
$$\alpha\, o(g) = o(g)$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{boh!}$$

— o — o —

Sia $\alpha \neq 0$ e sia $f(x) = o(\alpha g(x))$ per $x \to x_0$. Cosa posso dire?

$$f(x) = \alpha g(x) \cdot \omega(x) \qquad \text{con } \lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

$$= g(x) \cdot \underbrace{\alpha \omega(x)}_{\omega_1(x) \to 0} \qquad \rightsquigarrow \quad f(x) = o(g(x))$$

$$\boxed{o(\alpha g) = o(g)}$$

— o — o —

$\boxed{\text{TRANSITIVITÀ}}$ Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$;

allora

$$f(x) = o(h(x)) \text{ per } x \to x_0$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ipotesi

$$f(x) = g(x)\,\omega_1(x) \qquad \omega_1(x) \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$
$$g(x) = h(x)\,\omega_2(x) \qquad \omega_2(x) \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

Ma allora

$$f(x) = h(x)\, \underbrace{\omega_2(x)\, \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0}$$

— o — o —

$\boxed{\text{COMPOSIZIONI}}$ Supponiamo che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$

① $\arctan(f(x)) = o(x)$

② $f(\arctan x) = o(x)$

$\boxed{\text{Dim. di ②}}$ Per ipotesi

$f(x) = x \cdot \omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$ per $x \to 0$.

$$f(\arctan x) = \arctan x \cdot \omega(\arctan x)$$

$$= x \underbrace{\boxed{\frac{\arctan x}{x} \cdot \omega(\arctan x)}}_{\omega_1(x) \to 0}$$

quindi $f(\arctan x) = o(x)$

$$\lim_{x\to 0} \omega_1(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan x}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\omega(\arctan x)}}_{\to 0} = 0$$

pongo $y = \arctan x$
e osservo che $y \to 0$

$\boxed{\text{Dim. di ①}}$ $\arctan(f(x)) = x \dfrac{\arctan(f(x))}{x}$

$$= x \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(f(x))}{f(x)} \; \frac{f(x)}{x}}}_{\omega_1(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \omega_1(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(f(x))}{f(x)}}}_{\to 1} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x}}}_{\to 0} = 0.$$

— o — o —

Esempio 1 $\quad \sin(2x) \sim 2x \quad$ per $x \to 0$

2° modo: posso dividere... $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$

1° modo: $\quad \sin(2x) = 2x \underbrace{\boxed{\frac{\sin(2x)}{2x}}}_{\omega(x) \to 1}$

Esempio 2 $\quad e^x - \cos x \sim x \quad$ per $x \to 0$

2° modo: $\quad \frac{e^x - \cos x}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{e^x - 1}{x}}}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x \cdot x}}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0} = 1.$

Esempio 3 $\quad f(x) = o(g(x)) \quad$ per $x \to x_0$
$g(x) \sim h(x) \quad$ per $x \to x_0$

Allora

$$f(x) = o(h(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Dim. $\quad f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) \quad$ con $\omega_1(x) \to 0$ per $x \to x_0$
$g(x) = h(x) \cdot \omega_2(x) \quad$ con $\omega_2(x) \to 1 \quad$ "

Ma allora $\quad f(x) = h(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x)\, \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0 \cdot 1 = 0}$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = o(g(x)) & \text{per } x \to x_0 \\ h(x) \sim f(x) & \text{per } x \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x) = o(g(x))$$

Dim. come sopra

$$h(x) = f(x) \cdot \underset{\downarrow\, 1}{\omega_1(x)} = g(x) \cdot \underbrace{\overset{0\, \uparrow}{\omega_2(x)} \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0}$$