ANALISI 1 — LEZIONE 066

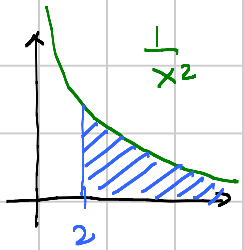
Note Title 14/12/2016

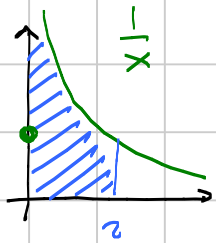
INTEGRALI IMPROPRI

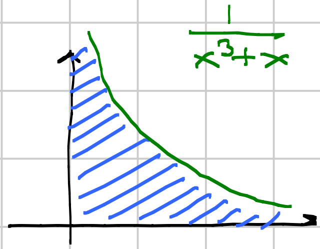
Integrali propri: (1) zona di integrazione limitata
(2) funzione integranda limitata

Se manca (1) e/o (2) l'integrale si dice improprio.

Esempi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+x}\,dx$







Manca (1)
(2) ok

Manca (2)
(1) ok

Mancano (1) e (2)

Achtung! $\int_0^2 \sin\frac{1}{x}\,dx$ è un integrale PROPRIO

→ zona integr. limitata
→ funzione limitata in $[-1, 1]$
(ed è pure integrabile perché continua tranne che in punto)

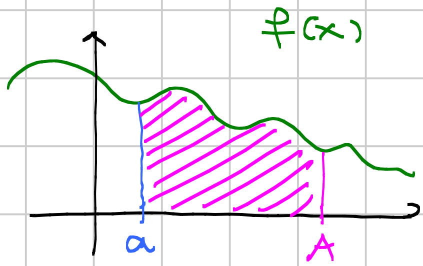
Prima classificazione:

→ integrali monoproblema (manca uno solo tra (1) e (2), e se manca (2) il pbm. è in un estremo)

→ integrali con più problemi.

INTEGRALI MONOPROBLEMA

Zona di integrazione non limitata

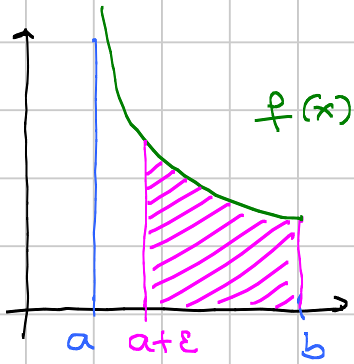


$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_a^{A} f(x)\,dx}_{\substack{\text{essendo } f(x) \text{ limitata} \\ \text{questo ha senso}}}$$

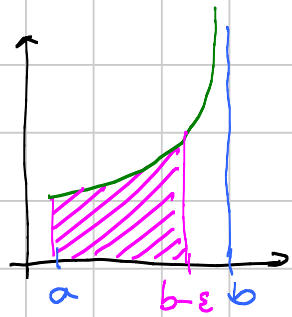
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{A\to-\infty} \int_A^{b} f(x)\,dx$$

= fare disegno!

Zona integr. limitata, pbm. in un estremo



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \underbrace{\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}_{\substack{\text{ha senso perché il pbm.} \\ \text{è solo in } a}}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Operativamente: un int. improprio è la composizione di un integrale + un limite, e da buon limite ha 4 comportamenti possibili

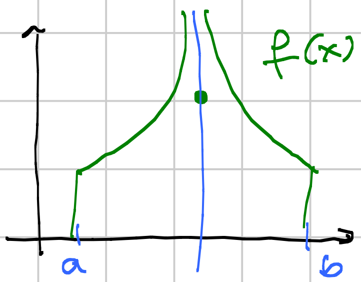
→ convergere ad un certo $\ell \in \mathbb{R}$

→ divergere a $+\infty$

→ divergere a $-\infty$

→ essere indeterminato.

Achtung!



Non è un integrale monoproblema

<u>Esempio 1</u>
$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-2x}\,dx$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^A$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\Big(-\frac{1}{2}\underbrace{e^{-2A}}_{\to 0}+\frac{1}{2}e^0\Big) = \frac{1}{2}$$

Molto brutal mode: $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}e^{-\infty}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

<u>Esempio 2</u>
$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^A$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\Big[-\underbrace{\frac{1}{A}}_{\to 0}+\frac{1}{2}\Big] = \frac{1}{2}$$

<u>Esempio 3</u>
$$\int_0^2\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^2\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\log x\right]_\varepsilon^2$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}(\log 2-\underbrace{\log\varepsilon}_{\to -\infty}) = +\infty$$

<u>Esempio 4</u>
$$\int_3^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A\cos x\,dx$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\left[\sin A-\sin 3\right] = \text{N.E.}$$

Quindi è indeterminato

<u>Esempio 5</u>
$$\int_0^1\log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[x\log x - x\right]_\varepsilon^1$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[1\underbrace{\log 1}_{=0}-1-\underbrace{\varepsilon\log\varepsilon}_{\to 0}+\underbrace{\varepsilon}_{\to 0}\Big] = -1.$$

Casi classici Sia $a>0$ fissato

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } b>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } b\le 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{a} \frac{1}{x^b}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } b<1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } b\ge 1 \end{cases}$$

Il caso $b=1$ va sempre male, gli altri si scambiano

Dim di qualcosa Per $b\neq 1$ vale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} \frac{1}{x^b}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{1-b}\,\frac{1}{x^{b-1}}\right]_a^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{1-b}\,\frac{1}{A^{b-1}} - \underbrace{\boxed{\frac{1}{1-b}\,\frac{1}{a^{b-1}}}}_{\text{numero}}\right)$$

per $b>1$ tende a 0
per $b<1$ tende a $+\infty$ moltiplicato per $\frac{1}{1-b}$ che è >0

Per $b=1$ si ha $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{A\to+\infty} (\log A - \log a) = +\infty$$

Per il caso con problema in $x=0$:

$$\int_\varepsilon^{a} \frac{1}{x^b}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\underbrace{\frac{1}{1-b}\,\frac{1}{a^{b-1}}}_{\text{numero}} - \frac{1}{1-b}\,\boxed{\frac{1}{\varepsilon^{b-1}}}\right)$$

$\nearrow +\infty$ se $b>1$
$\searrow 0$ se $b<1$

Cosa si fa se l'integrale ha + problemi?

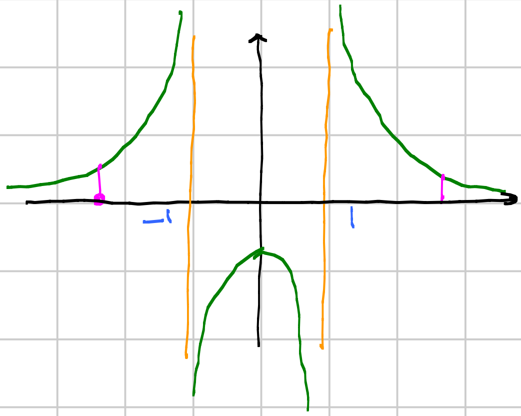
Si spezza in un numero suff. di integrali con un pbm. solo

Esempi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^{3} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

qualunque $a>0$ è ok

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\pi} e^{-x^2}\,dx + \int_{\pi}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx =$$



$$= \int_{-\infty}^{-3} + \int_{-3}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{7} + \int_{7}^{+\infty}$$

Dopo aver spezzato, studio i singoli pezzi e traggo le conclusioni con le operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$, con una grossa cautela

> Se esiste un pezzo che diverge a $+\infty$ ed esiste un pezzo che diverge a $-\infty$, allora per definizione quello globale si pone indeterminato

Esempio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6}\,dx =$ diverge sempre

(sono due pezzi e almeno 1 va male sempre).

— o — o —