ANALISI 1 — LEZIONE 059

Note Title 01/12/2016

INTEGRAZIONE PER PARTI

Partenza: teo. fond. calcolo integrale

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva.

Allora

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

Caso speciale: $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$. Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = F'(x)\,G(x) + F(x)\,G'(x)$$

$$= f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x)$$

Sostituendo

$$\int_a^b \underbrace{(f(x)G(x) + F(x)g(x))}_{\varphi(x)}\,dx = \underbrace{F(b)G(b)}_{\Phi(b)} - \underbrace{F(a)G(a)}_{\Phi(a)}$$

$$= \left[F(x)G(x)\right]_a^b$$

Riorganizzando

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = \left[F(x)\,G(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\boxed{\int fG = FG - \int Fg}$$ Formula "abusiva"

Operativamente: → cerco di vedere l'integranda come prodotto $f\,G$

→ G spero che derivando "migliori"

→ f spero di saper fare ~~la~~ una primitiva

Esempio 1 $\displaystyle\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{e^{7x}}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\frac{1}{7}e^{7x}} - \int \underset{F}{\frac{1}{7}e^{7x}}\cdot \underset{g}{1}\,dx$

$$= \frac{1}{7}xe^{7x} - \frac{1}{7}\int e^{7x}\,dx$$

$$= \frac{1}{7}xe^{7x} - \frac{1}{49}e^{7x}$$

Oss. Calcolata una primitiva, conviene fare la verifica, cioè derivare e vedere se viene xe^{7x}.

Esempio 2 $\displaystyle\int \underset{G}{x^2}\,\underset{f}{\cos(3x)}\,dx = \underset{G}{x^2}\,\underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)} - \int \underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)}\cdot \underset{g}{2x}\,dx$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) - \frac{2}{3}\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\sin(3x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[\underset{G}{x}\underset{F}{\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)} - \int \underset{F}{\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)}\cdot \underset{g}{1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{9}\int \cos(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\sin(3x)$$ VERIFICA !!

— o — o —

Fatto generale Con lo stesso metodo si calcolano le primitive

$$\boxed{\int p(x)\,e^{ax}\,dx} \qquad \boxed{\int p(x)\sin(ax)\,dx} \qquad \boxed{\int p(x)\cos(ax)\,dx}$$

dove $p(x)$ è un qualunque polinomio.

Idea: i polinomi a forza di derivarli migliorano.

Utilizzi SMART dell'integrazione per parti:
→ grande ritorno
→ trucco dell'1 nascosto

<u>Esempio 3</u> $\int \underset{F}{e^{2x}} \underset{g}{\cos x}\, dx = \underset{F}{e^{2x}} \underset{G}{\sin x} - \int \underset{f}{2e^{2x}} \underset{G}{\sin x}\, dx$

$= e^{2x} \sin x - 2 \int \underset{F}{e^{2x}} \underset{g}{\sin x}\, dx$ ⇝ sembra meglio

$\phantom{= e^{2x} \sin x - 2 \int} g \quad F$ ⇝ si torna da capo

$= e^{2x} \sin x - 2 \left[\underset{F}{e^{2x}} \underset{G}{(-\cos x)} - \int \underset{f}{2e^{2x}} \underset{G}{(-\cos x)}\, dx \right]$

$= e^{2x} \sin x + 2 \cos x\, e^{2x} \underbrace{- 4 \int e^{2x} \cos x\, dx}_{\text{GRANDE RITORNO}}$

Portandola a sx:

$$5 \int e^{2x} \cos x\, dx = e^{2x} \sin x + 2 \cos x\, e^{2x}$$

Divido per 5 e ho la primitiva.

—o —o —

Allo stesso modo faccio tutte le primitive del tipo

$$\boxed{\int e^{ax} \sin(bx)\, dx} \qquad \boxed{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx}$$

Nota bene: $4^x = e^{x \log 4}$, quindi ricade nei casi precedenti.

Nota bene: il prodotto di 2 o più funzioni trigonometriche si può sempre trasformare in somma o differenza mediante formule precorsistiche
product to sum

Esempio 4 $\int \log x\,dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\log x}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\log x} - \int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\frac{1}{x}}\,dx$

$= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x$ Verifica!

Esempio 5 $\int \arctan x\,dx =$

$= \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\arctan x}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\arctan x} - \int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\frac{1}{1+x^2}}\,dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

Esempio 6 $\int \cos^2 x\,dx =$

$= \int \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos x}\,dx = \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{G}{\sin x} - \int \underset{f}{(-\sin x)}\,\underset{G}{\sin x}\,dx$

$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x\,dx$ (se continuo per parti torno indietro)

$\underset{\text{Recorso}}{=} \cos x \cdot \sin x + \int (1-\cos^2 x)\,dx$

$= \cos x \cdot \sin x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx$ Grande ritorno

$\Rightarrow 2\int \cos^2 x\,dx = \cos x \cdot \sin x + x$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x$

Allo stesso modo calcolo

$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x$ (la somma delle primitive di $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$ deve fare la prim. di 1, cioè x)

Alternativa: percorso da subito!

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx \qquad \int \sin^2 x = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2x)}_{2\sin x \cdot \cos x} \qquad = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

— o — o —

Esempio finale $\int \tan x \, dx =$

$$= \int \underset{g}{\sin x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{\cos x}}\, dx = \underset{G}{(-\cos x)}\underset{F}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{G}{(-\cancel{\cos x})}\underset{f}{\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}(-\sin x)dx$$

$$= -1 + \int \tan x \, dx$$

Pessimo ritorno: semplificando ottengo $0 = -1$

Oss. Con gli estremi la formula sarebbe corretta, anche se inutile.
Per questo la formula senza estremi è abusiva.
Un modo di aggiustare la formula è di pensarla come uguaglianza tra insiemi, definendo

$$\int \varphi \, dx = \{\text{tutte le primitive di } \varphi\}.$$

Oss. Provare $\int 1 \, dx = \int \underset{F}{e^{2x}} \cdot \underset{g}{e^{-2x}} dx = \ldots$