ANALISI 1 — LEZIONE 070

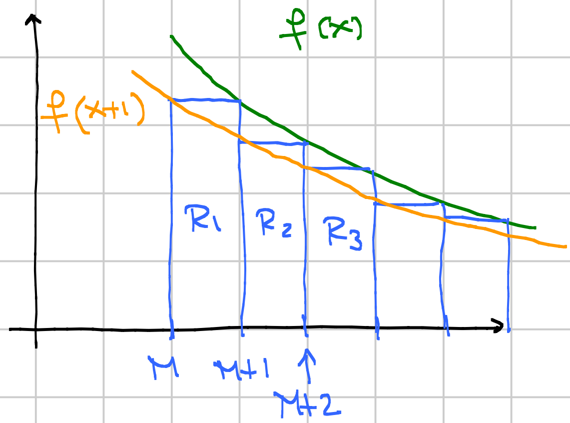
Note Title 19/12/2016

CONFRONTO SERIE – INTEGRALI

(gli integrali aiutano le serie)

Sia $M \in \mathbb{N}$ e sia $f:[M,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolm. decresc.

Allora valgono le disug.



$$\int_M^{+\infty} f(x+1)\,dx \le \underbrace{\sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n)}_{\text{somma aree rettangoli}} \le \underbrace{\int_M^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{area sotto } f(x)}$$

Con un cambio di variabili sul 1° otteniamo

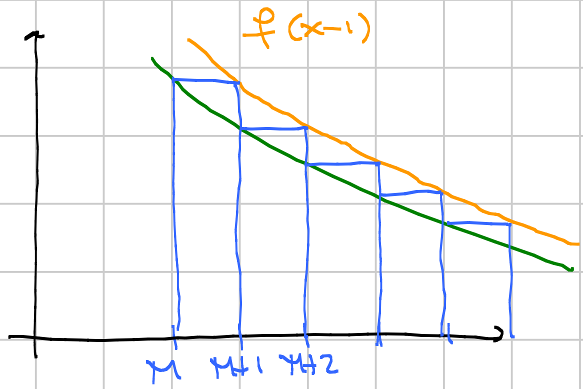
$$\boxed{\int_{M+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \le \int_M^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Analogamente

$$\boxed{\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=M}^{+\infty} f(n) \le f(M) + \int_M^{+\infty} f(x)\,dx}$$

1° rettangolo

$$\int_{M+1}^{+\infty} f(x-1)\,dx$$



Teorema (Confronto serie integrali)

Sia $M \in \mathbb{N}$ e sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è debolm. decrescente

(ii) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq M$.

Allora

$$\sum_{n \geq M}^{+\infty} f(n) \quad \text{si comporta come} \quad \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$$

Dim Date le relazioni precedenti

- se l'integrale diverge, allora guardo disug. sx
- " " converge, " " " dx.

—o—o—

<u>Oss.</u> Per dimostrare le disug. di confronto in maniera superformale dovrei definire una nuova funzione

$$g(x) = f(\underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\text{parte intera}})$$

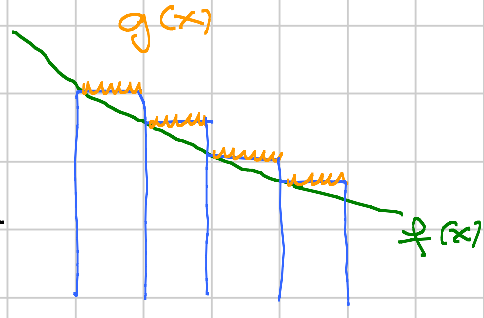
e osservare che

$$f(x-1) \leq g(x) \leq f(x)$$

e

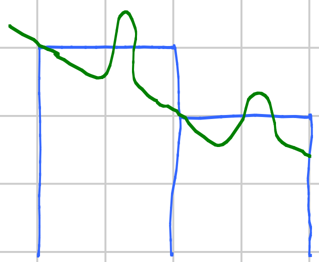
$$\int_M^{+\infty} g(x)\,dx = \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$

e quindi concludere con la monotonia dell'integrale.



<u>Oss.</u> Dove ho usato che $f(x)$ è deb. decr. ?

Se non lo fosse, non sarebbe più evidente la disug. di sopra.



—o—o—

Utilizzi classici

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^a}}_{f(x)}\, dx < +\infty \quad \text{per } a>1}_{\text{Questo si può dim. con la primitiva}} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \ \text{conv. per } a>1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx = +\infty \quad \text{per } a \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = +\infty \quad \text{per } a \leq 1$$

Stessa cosa per quelle del tipo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} \quad \text{che si confrontano con} \quad \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x}\, dx}_{\text{primitiva facile}}$$

<u>Esempio 1</u> $\quad \sum_{k=0}^{n} k^7 = a_n$

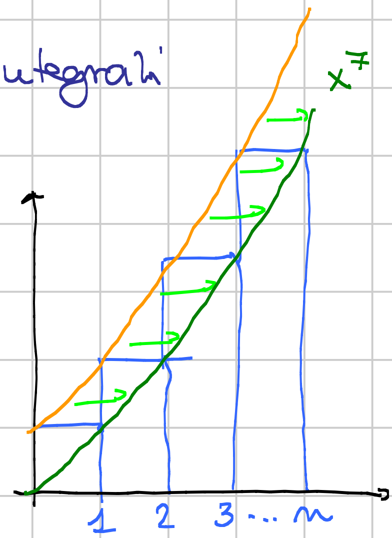
È evidente che $a_n \to +\infty$. Ma come? Ordine di ∞ e parte princ.

Risposta: $\quad a_n \sim \frac{1}{8} n^8 \qquad$ Brutale: $a_n \sim \int_0^n x^7\, dx = \frac{1}{8} n^8$

<u>Rigoroso</u>: cerco un confronto sommatoria / integrali

$$\int_0^n x^7\, dx \leq a_n \leq \int_0^n (x+1)^7\, dx$$

$$= \int_1^{n+1} x^7\, dx$$



$$\frac{1}{8} n^8 \leq a_n \leq \frac{1}{8}(n+1)^8 - \frac{1}{8}$$

Dividendo per n^8 e faccio il limite.

Esempio 2 Voglio calcolare in modo approx

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} = S$$

Detto altrimenti: se sommo i primi 100 termini, di quanto la somma differisce da S

$$S - S_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \underset{\uparrow}{\leq} \int_{100}^{+\infty} \frac{x^3}{3^x}\, dx$$

serie - integrali

Devo verificare che $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$ sia decrescente per $x \geq 100$, ma questo è uno studio di funzioni.
Non resta che calcolare l'integrale (la primitiva si fa per parti) e si ha una stima del resto.

Oss. Possiamo anche sostituire 100 con un valore incognito k e vedere quale k garantisce l'errore voluto.

— o — o —

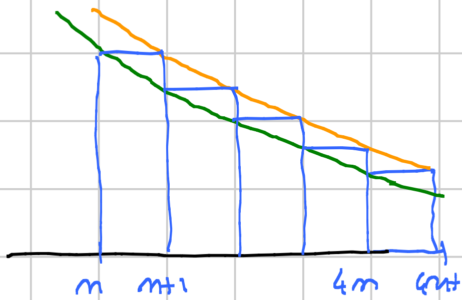
Esempio 3

$$a_n = \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k} \qquad a_n \to \log 4$$

Brutale: $a_n \sim \int_n^{4n} \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_n^{4n} = \log 4$

Rigoroso:

$$\int_n^{4n+1} \frac{1}{x}\, dx \leq a_n \leq \underbrace{\int_{n-1}^{4n} \frac{1}{x}\, dx}_{\int_n^{4n+1} \frac{1}{x-1}\, dx}$$



$$\log \frac{4n+1}{n} \leq a_n \leq \log \frac{4n}{n-1} \quad \text{e si conclude}$$

Esempio 4 $\qquad \displaystyle\sum_{k=n}^{4n} \sin\frac{1}{k} = a_n$

Si potrebbe ridurre a $\int \sin\frac{1}{x}\,dx$, ma ☹

Brutal mode: $\displaystyle\sum_{k=n}^{4n} \sin\frac{1}{k} \underset{\uparrow \text{ Taylor}}{\sim} \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}$ = come prima

Facile: $\sin x \geq x \quad \forall x \geq 0$, quindi

$$a_n \geq \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}$$

Difficile Per ogni $\varepsilon > 0$ vale che esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\sin x \leq (1+\varepsilon)x \qquad \forall x \in (0,\delta)$$

(segue da $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$, quindi per $x \sim 0$ ...)

Ma allora

$$\sin\frac{1}{k} \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{k} \qquad \text{definitiv.}$$

Ma allora, non appena $\frac{1}{n} \leq \delta$, vale

$$\underbrace{\sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}}_{\substack{\downarrow \\ \log 4}} \leq a_n \leq \underbrace{(1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}}_{\substack{\downarrow \\ (1+\varepsilon)\log 4}}$$

Da questo segue che defin.

$$\log 4 - \varepsilon \leq a_n \leq (1+\varepsilon)\log 4 + \varepsilon$$

da cui si conclude perché ε è arbitrario.

— o — o —