ANALISI 1 — LEZIONE 030

Note Title 26/10/2016

Composizioni "vere"

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$
$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

Allora $f(g(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$ per $x \to 0$

vale se $g(0) = 0$ e quindi $Q_n(x)$ non ha il termine noto

Esempio $e^{\sin x}$ $\quad n = 4$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

Al posto di t metto $\sin x$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(\sin^4 x)$$

Al posto di ogni $\sin x$ sostituisco il suo sviluppo

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}(\ldots)^2 + \frac{1}{6}(\ldots)^3 + \frac{1}{24}(\ldots)^4 + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \underset{\text{Doppio prodotto}}{\frac{1}{3}x^4}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(\sin^4 x)$$

Vorrei poter dire che $o(\sin^4 x)$ è $o(x^4)$. Questo è vero perché $\sin^4 x \sim x^4$ e quindi entra in gioco una propr. di o piccolo

Altro modo di vederlo $\quad \sin^4 x = x^4 + o(x^4)$, quindi

$$o(\sin^4 x) \underset{\text{propr. di o piccolo}}{=} o(x^4) + o(o(x^4)) = o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$$

$\boxed{\text{Dim fatto generale}}$ $f(g(x)) = P_n(g(x)) + o([g(x)]^n)$

$f(t) = P_n(t) + o(t^n)$

Fatto 1: $o(g(x)^n) = o(x^n)$

Smontiamo la definizione

$o(t^n) = t^n \omega(t)$ quindi $o(g(x)^n) = [g(x)]^n \omega(g(x))$

$$= x^n \underbrace{\boxed{\left[\frac{g(x)}{x}\right]^n}}_{\text{numero}} \underbrace{\omega(g(x))}_{\to 0 \text{ perché } g(x) \to 0}$$

$= x^n \cdot$ roba che tende a 0.

$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$$\frac{g(x)}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{Q_n(x)}{x}}}_{\text{coeff. di } x \text{ in } Q_n(x)} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x^n)}{x}}}_{\to 0}$$

Quindi $o([g(x)]^n) = o(x^n)$ grazie al fatto che $g(0) = 0$

Fatto 2 $P_n(g(x)) = P_n(Q_n(x) + o(x^n)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$

Questo va dimostrato monomio per monomio ...

$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$

$P_n(Q_n(x) + o(x^n)) = a_0 + a_1(Q_n(x) + o(x^n)) + a_2(Q_n(x) + o(x^n))^2 + \ldots$

$= a_0 + a_1 Q_n(x) + a_2 Q_n(x)^2 + a_3 Q_n(x)^3 + \ldots + o(x^n)$

$= P_n(Q_n(x)) + o(x^n).$

— o — o —

Esempio 2 $\cos(\sin x)$ $n = 4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

se voglio posso mettere $o(x^5)$ perché la funzione è pari

Esempio 3 $\sin(\cos x)$

La funzione più interna non si annulla in $x=0$, quindi non posso usare lo sviluppo di $\sin t$ centrato in $t=0$.
lo sviluppo in centro 0 approssima bene $\sin t$ per $t \sim 0$, ma $\cos x \sim 1$.

Via d'uscita: sviluppare $\sin t$ con centro in $t=1$, e qui entrano in gioco i centri $x_0 \neq 0$.

Esempio 4 $f(x) = e^x$ $x_0 = 6$

1° modo Calcolo tutte le derivate in $x_0 = 6$: fanno $f^{(k)}(6) = e^6$ quindi

$$e^x = e^6 + \frac{e^6}{1!}(x-6) + \frac{e^6}{2!}(x-6)^2 + \frac{e^6}{3!}(x-6)^3 + \dots$$

2° modo scrivo $x = 6 + h$ e penso $h \to 0$:

$$e^{6+h} = e^6 \cdot e^h = e^6\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \dots\right)$$

$h \to 0$

Esempio 5 $\quad f(x) = \sin x \qquad x_0 = 1$

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Farsi le derivate

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Scrivo $x = 1 + h$ e penso che $h \to 0$

$$\sin(1+h) = \sin 1 \cdot \cos h + \cos 1 \cdot \sin h$$

$$= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 + \dots\right) + \cos 1 \left(h - \frac{1}{6}h^3 + \dots\right)$$

Back to esempio 3 $\quad \sin(\cos x) \qquad n = 4$

Sviluppo prima la funzione DENTRO

$$\sin(\cos x) = \sin\Big(1 \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}_{h \to 0}\Big)$$

$$= \text{(uso formula dell'esempio precedente)}$$

$$= \sin 1 \left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}(\dots)^4\right]$$

$$+ \cos 1 \left[(\dots) - \frac{1}{6}(\dots)^3\right]$$

$$= \sin 1 \left[1 - \frac{1}{8}x^4\right] + \cos 1 \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right] + o(x^4)$$

Esempio 6 $\quad f(x) = \log x \quad$ Non ha senso sviluppare in $x = 0$ (dovrebbe essere definita in un intorno di 0)

$x_0 = 7, \quad n = 4$

$$\log(7+h) = \log\left[7\left(1 + \frac{1}{7}h\right)\right] = \log 7 + \log\left(1 + \frac{1}{7}h\right)$$

$$= \log 7 + \frac{1}{7}h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{7^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{7^3} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{7^4} + o(h^4)$$

<u>Esempio 6 bis</u> $f(x) = \log(2 + 5\cos x)$ $n = 3$ $x = 0$

Sviluppo $\cos x$:

$$f(x) = \log\left(2 + 5\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\right)$$

$$= \log\left(7 \underbrace{\boxed{- \frac{5}{2}x^2 + o(x^3)}}_{h}\right)$$

$$= \log 7 + \frac{1}{7}\left(-\frac{5}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \log 7 - \frac{5}{14}x^2 + o(x^3)$$

<u>Esempio 7</u> $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\arctan^2 x}}$ $[1^\infty]$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\arctan^2 x}} = e^{\frac{1}{\arctan^2 x} \log \frac{\sin x}{x}} \longrightarrow e^{-\frac{1}{6}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$\log(1+t) = t + o(t)$

<u>Esponente</u>

$$\frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{\arctan^2 x} = \frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \to -\frac{1}{6}$$