ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 16

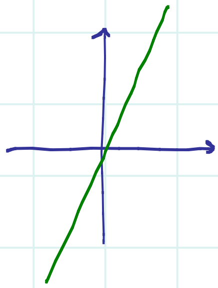
Note Title 17/10/2023

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e W sp. vett. Un'appl. lin. è una $f : V \to W$ t.c.

(i) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$

(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ per ogni $v \in V$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.



Esempi $V = W = \mathbb{R}$

$f(x) = 7x$ è lineare

(i) $f(x_1+x_2) \underset{\text{def. di } f}{=} 7(x_1+x_2) \underset{\text{precorso}}{=} 7x_1 + 7x_2 \underset{\text{def. di } f}{=} f(x_1) + f(x_2)$

(ii) $f(\lambda x) \underset{\text{def. di } f}{=} 7 \cdot \lambda x \underset{\text{precorso}}{=} \lambda \cdot 7x \underset{\text{def. di } f}{=} \lambda f(x)$

$f(x) = x^2$ NON è lineare

La somma può andare male (basta un esempio)

$f(1) = 1$ $f(2) = 4$ $f(3) = 9$ e non $f(1)+f(2) = 5$

Il prodotto può andare male

$f(2) = 4$ $f(3 \cdot 2) = 36$ e non $3f(2)$

$f(x) = 3x+2$ è lineare? NO!

La somma può andare male: $f(1) = 5$, $f(2) = 8$, $f(3) = 11$ e non 13

Il prodotto può andare male: $f(1) = 5$ $f(3 \cdot 1) = 11$ e non 15

Oss. Se $f : V \to W$ è lineare, allora per forza $f(\underset{0 \text{ di } V}{0}) = \underset{0 \text{ di } W}{0}$

$f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$ qualunque sia $v \in V$

$\boxed{\text{Teorema di struttura}}$ Siano V e W sp. vett.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una $\boxed{\text{base}}$ di V

Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ dei vettori $\boxed{\text{qualunque}}$ di W (non per forza una base).

Allora esiste un' unica $f: V \to W$ lineare tale che

$$f(v_i) = w_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

[Posso mandare una base dove mi pare e a quel punto l'applic. lineare esiste ed è unica]

$\boxed{\text{Idea fondamentale}}$ Ogni $v \in V$ lo posso scrivere come

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

e a quel punto

$$\begin{aligned} f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) && \text{[le comb. lin. escono fuori]} \\ &= c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) && [f(v_i) = w_i] \\ &= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n \end{aligned}$$

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^2 \qquad W = \mathbb{R}$

Come sono fatte tutte le applic. lin. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Prendo una base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio $(1,0)$ e $(0,1)$.

Pongo $\quad f(1,0) = a$

$\qquad\quad\; f(0,1) = b$

Ma allora

$$f((x,y)) = f(x(1,0) + y(0,1)) = x f((1,0)) + y f((0,1)) = ax + by$$

Quindi $\quad f((x,y)) = ax + by$

Analogamente da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ saranno del tipo

$$f((x,y,z)) = ax + by + cz \qquad \text{[a, b, c sono numeri dati]}$$

Def. Sia $f: V \to W$ lineare.

- Si dice $\ker(f)$ [o nucleo, Kernel] l'insieme
$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$$
- Si dice $\mathrm{Im}(f)$ [immagine] l'insieme
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(v) : v \in V\}$$

Prop. Si ha che

$\to$ $\ker(f)$ è un s.sp. vett. di V

$\to$ $\mathrm{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W

Esempio Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$f(x,y) = (3x-2y,\ 5x+y)$$
Si verifica facilmente che f è lineare.

Chi è $\ker(f)$?

Devo risolvere $\begin{cases} 3x-2y = 0 \\ 5x+y = 0 \end{cases}$

[I sistemi lineari omogenei sono la ricerca del ker di opportune applic. lineari]

Il sistema lo potevo anche scrivere come
$$x\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

[Studio della lin. indip. di vettori]

Se invece ho il sistema $\begin{cases} 3x-2y = a \\ 5x+y = b \end{cases}$ con a,b dati

questo ha soluzione se e solo se $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$

Oss. Se $v_1, \dots, v_n$ sono una $\boxed{\text{base}}$ di V, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono $\boxed{\text{generatori}}$ di $\mathrm{Im}(f)$, cioè ogni $w \in \mathrm{Im}(f)$ è comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_n)$

È il solito discorso del teo. di struttura, cioè

$$\underset{\substack{\uparrow \\ w \in \mathrm{Im}(f)}}{w =} f(v) \underset{\substack{\uparrow \\ v_i \text{ sono} \\ \text{una base}}}{=} f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è lin.}}}{=} c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)$$

Non è detto che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ siano lin. indip.
Lo sono quando $\ker(f) = \{0\}$, cioè quando f è INIETTIVA

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prendo una} \\ \text{comb. lin. nulla} \\ \text{di } f(v_1), \dots, f(v_n)}}{0 =} c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lin.}}}{=} f(\underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_n v_n}_{\in \ker(f)})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } \ker(f) = \{0\}}}{\rightsquigarrow} c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ v_i \text{ sono} \\ \text{una base}}}{\rightsquigarrow} c_1 = \dots = c_n = 0$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ (RANK-NULLITY) Sia $f : V \to W$ lineare.
Allora

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sp. di partenza}}}{V})}$$

$\boxed{\text{Corollari}}$ → Se $\dim V > \dim W$, allora f NON può essere iniettiva

$$\underbrace{\dim(\ker(f))}_{\substack{= 0 \\ \text{se è iniettiva}}} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\leq \dim(W)} = \dim(V)$$

→ Se $\dim V < \dim W$, allora f NON può essere surgettiva
(cioè non può essere $\mathrm{Im}(f) = W$)

Se fosse surgettiva, allora $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim W$, ma allora

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\ker) + \dim(\mathrm{Im}) \\ &= \dim(\ker) + \dim W \\ &\geq \dim W \end{aligned}$$

ma noi abbiamo assunto il contrario!

→ Se $\dim V = \dim W$, allora
f iniettiva $\iff$ f surgettiva

Supponiamo f iniettiva, cioè $\ker f = \{0\}$, allora

$$\underbrace{\dim(\ker)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \dim(\mathrm{Im}) = \dim(V)$$

$\rightsquigarrow$ $\dim(\mathrm{Im}) = \dim(V) = \dim(W)$
Ora $\mathrm{Im} \subseteq W$ e ha la stessa dim., quindi coincide.

Supponiamo f surgettiva, cioè $\mathrm{Im}\, f = W$, allora

$$\dim(\ker) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im})}_{\overset{\shortparallel}{\cancel{\dim} W}} = \cancel{\dim} V$$

$\rightsquigarrow$ $\dim(\ker) = 0$ $\rightsquigarrow$ $\ker = \{0\}$ $\rightsquigarrow$ f è iniettiva

— o — o —

Esempio $f : \mathbb{R}^{32} \to \mathbb{R}^{26}$. Cosa possiamo dire di $\dim(\ker)$?
Può essere 32? Certo! Basta che $f(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{32}$
Quanto vale $\dim(\ker)$ come minimo? Vale 6

— o — o —