ANALISI 1 — LEZIONE 098

Note Title 28/03/2017

Linguaggio topologico sulla retta reale

Ambientazione: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme.

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto. Si dice che

1 - x_0 è interno ad A se $\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq A}$

2 - x_0 è aderente ad A se $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset}$

3 - x_0 è sulla frontiera di A se $\forall\, \varepsilon > 0$ si ha che

$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$$

4 - x_0 è isolato in A se $\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A = \{x_0\}}$

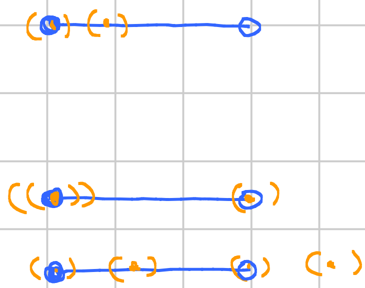
5 - x_0 è un punto di accumulazione di A se

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset}$$

Def. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si pone

1- $\mathrm{Int}(A)$ (detto anche $\mathring{A}$) l'insieme dei p.ti interni (parte interna)
2- $\mathrm{Clos}(A)$ (" " $\bar{A}$) l'insieme dei p.ti aderenti (chiusura)
3 - ∂A (\partial A) la frontiera di A
4 - $\mathrm{Isol}(A)$ l'insieme dei p.ti isolati
5 - $D(A)$ l'insieme derivato di A, costituito da tutti i punti di accumulazione per A.

Esempio 1 $A = [0,3)$



$\mathrm{Int}(A) = (0,3)$
$\mathrm{Clos}(A) = [0,3]$
$\partial A = \{0,3\}$
$\mathrm{Isol}(A) = \emptyset$
$D(A) = [0,3]$

Esempio 2 $A = (0,2) \cup (2,3] \cup \{4\}$

$\mathrm{Int}(A) = (0,2) \cup (2,3)$
$\mathrm{Clos}(A) = [0,3] \cup \{4\}$
$\partial(A) = \{0,2,3,4\}$
$\mathrm{Isol}(A) = \{4\}$
$D(A) = [0,3]$

Esempio 3 $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \text{ intero} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

$\mathrm{Int}(A) = \emptyset$
$\mathrm{Clos}(A) = A \cup \{0\}$ ← ogni interv. $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tocca A
$\partial A = A \cup \{0\}$
$\mathrm{Isol}(A) = A$
$D(A) = \{0\}$ ← ogni intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tocca A in un p.to diverso da 0 stesso.

Oss.

- Ha senso fare la derivata di una funzione nei punti interni ad A
- Ha senso fare i limiti di una $f : A \to \mathbb{R}$ per $x \to x_0 \in D(A)$

Proprietà banali (esercizi)

1. $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \text{Clos}(A)$
2. $\text{Isol}(A) \subseteq A$
3. $\partial A = \text{Clos}(A) \setminus \text{Int}(A)$
4. $\text{Clos}(A) = D(A) \cup \text{Isol}(A)$ e $D(A) \cap \text{Isol}(A) = \emptyset$
5. $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \text{Clos}(A)$
   $\text{Clos}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus \text{Int}(A)$
6. $\partial A = \text{Clos}(A) \cap \text{Clos}(\mathbb{R} \setminus A)$

Unioni e intersezioni

1. L'unione qualunque di aperti è aperto
2. L'intersezione qualunque di chiusi è chiusa

Def. (che andrebbe prima)

- Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se $A = \text{Int}(A)$
- " " " " " chiuso se $A = \text{Clos}(A)$

Famiglie di insiemi : $\{A_i\}_{i \in I}$ ⇝ I è un insieme di indici e per ogni $i \in I$ si ha che $A_i \subseteq \mathbb{R}$

Esempi $\{(n, n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ = famiglia numerabile di intervalli
$\{(x, x+1)\}_{\substack{x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}}}$ = famiglia di insiemi con indici reali

Dim (1) Siano A_i aperti per ogni $i \in I$ e sia $A := \bigcup_{i \in I} A_i$

Devo dim. che A è aperto, cioè che

$$\forall x_0 \in A \ \exists \varepsilon > 0 \ \text{t.c.} \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$$

Essendo $x_0 \in A$, esiste $i_0 \in I$ t.c. $x_0 \in A_{i_0}$.
Essendo A_{i_0} aperto, esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq A_{i_0} \subseteq A$.

$\boxed{\text{Dim. (2)}}$ Siano A_i chiusi per ogni $i \in I$ e sia $A := \bigcap_{i \in I} A_i$

Devo dim. che A è chiuso, cioè che ogni p.to aderente ad A sta a sua volta in A.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to aderente ad A.
Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\emptyset \neq (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \subseteq \underbrace{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A_i}_{\text{quindi questo è } \neq \emptyset} \qquad \forall i \in I$$

quindi x_0 è aderente a A_i per ogni $i \in I$, quindi $x_0 \in \operatorname{Clos}(A_i)$
ma $\operatorname{Clos}(A_i) = A_i$ perché A_i è chiuso, quindi $x_0 \in A_i \; \forall i \in I$
e dunque $x_0 \in A$.

—o—o—

Achtung! (1) L'unione qualunque di chiusi può non essere chiusa

$A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ sono chiusi, ma la loro unione è $(0, 1]$

(2) L'intersezione qualunque di aperti può non essere aperta

$A_n = \left(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right)$ sono aperti, ma la loro intersezione è $[1,2]$

Esercizio → Unione finita di chiusi è chiusa
→ Intersezione finita di aperti è aperta.
] basta farlo per due, poi induzione

Esercizi (hard) [A, Int (A), Clos (Int (A)), Int (Clos (Int (A))), ...
A, Clos (A), Int (Clos (A)), ...
[A, D(A), D(D(A)), D(D(D(A))), ...] [A, ∂(A), ∂(∂(A)), ...]
Quanti insiemi diversi posso ottenere nei vari casi.