ANALISI 1 — LEZIONE 17

Note Title 17/10/2024

<u>Strumenti per il calcolo di limiti</u> (versione BABY)

① Definizione (si usa quasi mai)

② Teoremi di confronto

③ Teoremi algebrici

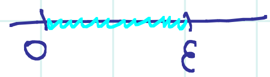
④ Tabelline di limiti notevoli

<u>Esempio 1</u> $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Uso la definizione: devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^2 \geq M$ definitivamente

- Se $M \leq 0$, allora $n^2 \geq M$ sempre, cioè $\forall n \in \mathbb{N}$
- Se $M > 0$, allora $n^2 \geq M$ per ogni $n \geq \sqrt{M}$ e questo accade definitivamente

<u>Esempio 2</u> $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$



Uso la definizione: devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitivamente

La disuguaglianza $0 < \frac{1}{n}$ è vera $\forall n \geq 1$

La seconda $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ è vera $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{molt. per } n \\ \text{(posso ...)}}}{\Longleftrightarrow}$ $1 \leq n\varepsilon$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{diviso per } \varepsilon \\ \text{(posso ...)}}}{\Longleftrightarrow}$ $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

e anche questa è vera definitivamente.

Teoremi di confronto

CONFRONTO A 2 Siano a_n e b_n due succ. tali che

$$a_n \leq b_n \text{ definitivamente}$$

Allora

- se $a_n \to +\infty$, allora anche $b_n \to +\infty$
- se $b_n \to -\infty$, allora anche $a_n \to -\infty$

[Ogni altra implicazione è abusiva]

CONFRONTO A 3 (Teorema dei CARABINIERI)

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente}$$

Supponiamo che $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$ (stesso $\ell \in \mathbb{R}$)

Allora anche $b_n \to \ell$ (stesso ℓ degli altri).

(Se i due laterali vanno nello stesso posto, allora ci va pure il centrale. I due laterali sono i carabinieri)

Dim. confronto a 2 Facciamo il caso in cui $a_n \to +\infty$

Ipotesi: $a_n \to +\infty$ Tesi: $b_n \to +\infty$

Fissato $M \in \mathbb{R}$, per ipotesi sappiamo che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_n \geq M \qquad \forall n \geq n_0$$

D'altra parte $b_n \geq a_n$, quindi pure

$$b_n \geq M \qquad \forall n \geq n_0.$$

[Stessa cosa nel caso in cui $b_n \to -\infty$].

Dim. confronto a 3

<u>Ipotesi</u>: $a_n \to \ell$

$c_n \to \ell$

$a_n \leq b_n \leq c_n$ definitiv.

Tesi: $b_n \to \ell$

Fissiamo il solito $\varepsilon > 0$. Dalle ipotesi sappiamo che

$\ell - \varepsilon \boxed{\leq} a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitiv. (diciamo $\forall n \geq n_1$)

$\ell - \varepsilon \leq c_n \boxed{\leq} \ell + \varepsilon$ definitiv. (diciamo $\forall n \geq n_2$)

$a_n \boxed{\leq} b_n \boxed{\leq} c_n$ definitiv. (diciamo $\forall n \geq n_3$)

Allora per ogni $n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$ si avrà che

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq \ell + \varepsilon$$

e quindi

$$\ell - \varepsilon \leq b_n \leq \ell + \varepsilon$$

che è quello che volevo.

— o — o —

<u>Esempio 3</u> $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Proviamo ad usare la definizione: devo dimostrare che

$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $2^n \geq M$ definitivamente

Uno può dire che

- se $M \leq 0$, allora $2^n \geq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- se $M > 0$, allora $2^n \geq M$ se e solo se $n \geq \log_2 M$ e questo è vero definitivamente.

Per fare questo dobbiamo aver definito $\log_2 x$.
Per farlo serve che $f(x) = 2^x$, vista come $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è surgettiva.
Per dimostrare la surgettività, serve sapere prima che $2^n \to +\infty$.

Dimostrazione ufficiale del limite: partiamo da

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x > -1$$

La uso con $x = 1$ e ottengo $\qquad 2^n \geq n+1$
(volendo lo potevo dimostrare direttamente per induzione).
Ora concludo per confronto a 2

$$\underbrace{2^n}_{\substack{\to +\infty \\ \text{per confronto}}} \geq \boxed{n+1}_{\to +\infty}$$

(qui posso usare la definizione)

Esempio 3-bis $\qquad a^n \to +\infty \qquad$ per ogni $a > 1$

Dim $\qquad (1+x)^n \geq 1+nx \qquad$ uso $x = a-1$, che è > 0

$$\underbrace{a^n}_{\substack{\to +\infty \\ \text{per confronto}}} \geq \boxed{1+(a-1)n}_{\to +\infty}$$

(si fa bene per definizione)

RETTA REALE ESTESA $\qquad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Su $\overline{\mathbb{R}}$ possiamo, entro certi limiti, estendere le classiche operazioni algebriche.
Ad esempio

- $7 + (+\infty) = +\infty$
  $12 \cdot (+\infty) = +\infty$
  $+\infty + (+\infty) = +\infty$
- $8 - (+\infty) = -\infty$
  $-\dfrac{\infty}{2} = -\infty$
  $\dfrac{1}{-\infty} = 0 \quad (0^-)$

$+\infty + (-\infty)$ BOH $\qquad 0 \cdot (+\infty)$ BOH $\qquad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Teoremi algebrici (Enunciato molto brutale)

Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che $a_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

(maniera veloce di includere i tipi 1, 2, 3).

Allora

$$a_n + b_n \to l_1 + l_2$$

$$a_n - b_n \to l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$$

TRANNE nei casi in cui l'operazione richiesta tra l_1 ed l_2 non ha senso ($+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, dividere per 0, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Achtung! Cosa succede nei casi che rientrano nel TRANNE?

Siamo di fronte ad una FORMA INDETERMINATA, che non vuol dire tipo 4, ma solo che il limite finale non dipende solo dal limite di a_n e di b_n)

Esempio Se $a_n \to 7$ e $b_n \to +\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n}$ può fare quello che gli pare, a seconda di chi sono a_n e b_n.

— o — o —