ANALISI 1 — LEZIONE 018

Note Title 12/10/2016

STRUMENTI PER IL CALCOLO DEI LIMITI

→ Teoremi algebrici
→ Teoremi di confronto (a 2 e a 3)
→ Funzioni continue
→ Cambi di variabile

esattamente come con le successioni

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in D$.

- Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(è definita nel punto e vale quello che uno si aspetta)

- si dice che f è continua in D se è continua in ogni $x_0 \in D$.

In queste ipotesi, per fare il limite basta sostituire x_0 dentro $f(x)$.

METATEOREMA Qualunque funzione ottenuta da quelle elementari mediante composizioni e/o operazioni algebriche è continua dove non presenta problemi burocratici.

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(2 + \sin(3^x))}{\arctan(x+5)} = \frac{\log(2 + \sin 1)}{\arctan 5}$$

Ho sostituito $x = 0$ nella funzione, che è continua per il metateorema.

Cosa dovrei dimostrare?

1 – che le funzioni elementari sono continue dove definite.
2 – che la composizione di funzioni cont. è cont.
3 – che somma, prodotto, quoziente di cont. sono continue

LIMITI NOTEVOLI

PADRI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

FIGLI

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

NIPOTI

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \qquad \forall a>0$$

$[\log x = \ln x = \log_e x]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

LIMITE DIMENTICATO

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$$

— o — o —

CAMBIO DI VARIABILI NEI LIMITI (Enunciato non preciso)

Esempio 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Pongo $y = x^2$
Quando $x \to 0$ si ha che $y \to 0$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Esempio 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}}_{1} \cdot 3 = 3$$

Pongo $y = 3x$ e diventa il solito

Esempio 3 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$ $\left[\frac{e^0-1}{0} = \frac{0}{0}\right]$

$$\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} \to 1$$

pongo $y = \sin x$ e osservo che per $x \to 0$ ho che $y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$$

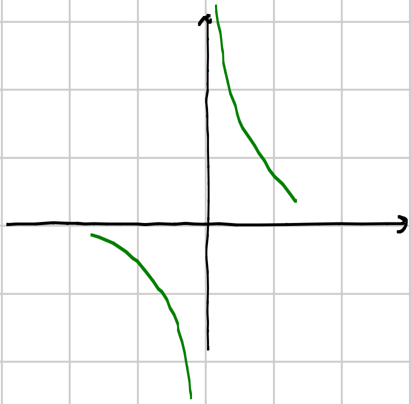
Esempio 4 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 \cdot 1 = 1$

teo. algebrico

Esempio 5 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$ = NON ESISTE

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] -\infty$$



Esempio 6 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = 1$ NO!!!!!

Pongo $y = \cos x$ Quando $x \to 0$ abbiamo che $y \to 1$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{\sin y}{y} = \sin 1$$

la funzione è continua in $y=1$

Esempio 7 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\arctan(2x)}$

$$\underbrace{\boxed{\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}}}_{\to 1} \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} \underbrace{\boxed{\frac{2x}{\arctan(2x)}}}_{\to 1} \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

Li faccio uno per uno

$$\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} = \frac{\log(1+y)}{y} \quad \text{per } y \to 0$$

Il terzo diventa con $y = 2x$: $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\arctan y} = 1$

Esempio 8 $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \quad \left[= \frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \right]$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log[1+(\cos x - 1)]}{\cos x - 1}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow \, -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Pongo $y = \cos x - 1$. Quando $x \to 0$ ho che $y \to 1-1=0$

Quindi diventa $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

Esempio 9 Diamo per buono che $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$ per $a > 1$ e $b > 0$

Dimostriamo che $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ (potenze battono log)

Pongo $y = \log x$. Quando $x \to +\infty$ ho che $y \to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{\sqrt{e^y}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{(\sqrt{e})^y} = 0$$

esponenziale vs potenza

Esempio 10 $\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+3^x)}{x} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Modo 1 $\quad \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+3^x)}{3^x}}}_{\downarrow \, 1} \underbrace{\boxed{\frac{3^x}{x}}}_{\downarrow \, +\infty} \to +\infty$

Posto $y = 3^x$ non è vero che $y \to 0$

Modo 2 Si tratta di log vs potenza, quindi vince la potenza, quindi $\to 0$ Sopra non c'è $\log x$ pulito

SONO SBAGLIATI ENTRAMBI!!

$$\frac{\log(1+3^x)}{x} \sim \frac{\log 3^x}{x} = \frac{x\log 3}{x} = \log 3$$

$$\frac{\log(1+3^x)}{x} = \frac{\log\left(3^x\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\right)}{x} = \frac{x\log 3 + \log\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{x}$$

Precorso

$$= \log 3 + \boxed{\frac{\log\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{x}} \to \log 3$$

$$\frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$$