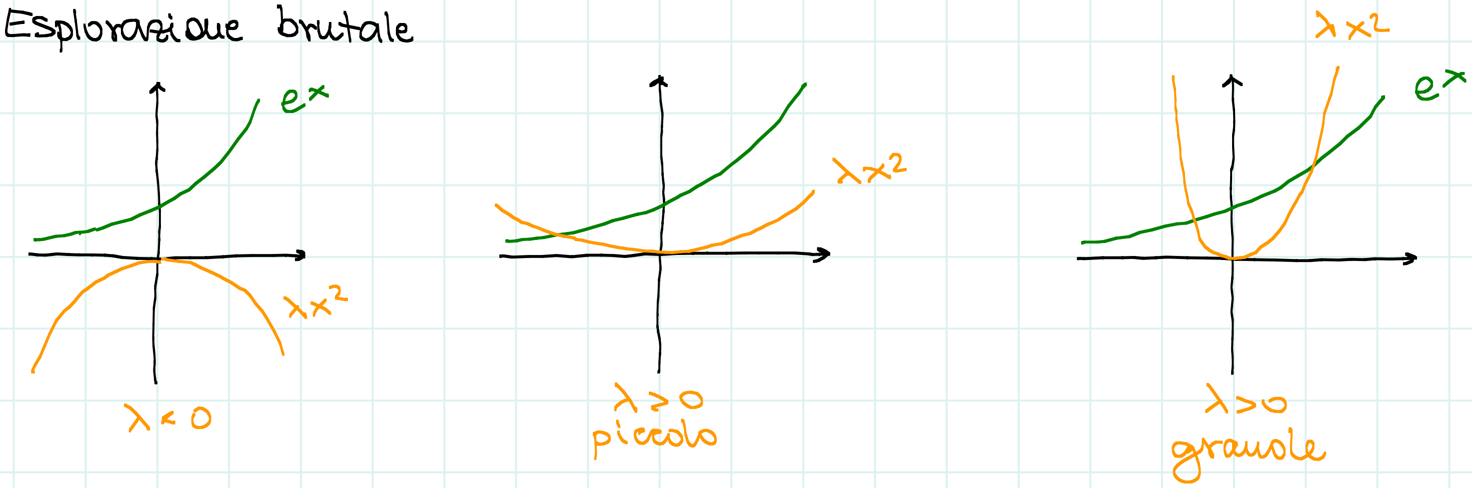
ANALISI 1 - LEZIONE 59

Note Title 12/12/2024

Esempio 1 Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di

$$e^x = \lambda x^2$$

Esplorazione brutale



Mi aspetto

- → per $\lambda \leq 0$ ⇝ nessuna sol.
- → per $\lambda > 0$ piccolo ⇝ una sol. negativa
- → per $\lambda > 0$ grande ⇝ due sol., una pos. e una neg.

Problema: stabilire quando si passa da una situazione alla successiva

$\boxed{\text{SLOGAN : ISOLARE IL PARAMETRO}}$

$$\frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

Dividere per x^2 è pericoloso se $x=0$, ma tanto $x=0$ non è mai soluzione, quindi no problem.

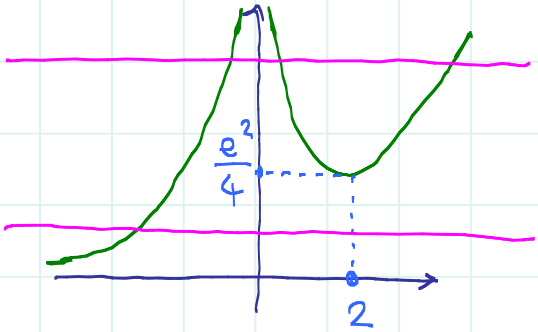
Adesso studio la funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

Nessuna simmetria

Definita per $x \neq 0$ e sempre > 0.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \overset{\text{espon. batte potenza}}{=} +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) \underset{\frac{0}{+\infty}}{=} 0^+ \qquad \lim_{x \to 0} f(x) \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

Da queste sole info. ci aspettiamo un grafico come in figura.



Cerchiamo il p.to di min per $x>0$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

Studiamo il segno

		0		2	
e^x	$++++$		$+++$		$+++$
$x-2$	$----$		$--$		$+++$
x^3	$---$		$++++$		$+++$
$f'(x)$	$+++$		$--$	$f'=0$	$+++$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Dallo studio di $f'(x)$ scopriamo che $x=2$ è il p.to di min. loc.

$$f(2) = \frac{e^2}{4}$$

Conclusione

$\rightarrow$ per $\lambda \leq 0 \rightsquigarrow$ 0 soluzioni

$\rightarrow$ per $0 < \lambda < \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow$ 1 soluzione, che è negativa

$\rightarrow$ per $\lambda = \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow$ 2 soluzioni, una positiva e una negativa

$\rightarrow$ per $\lambda > \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow$ 3 soluzioni, una negativa e due positive.

OPS, il brutale ha sbagliato ☹ Perché?

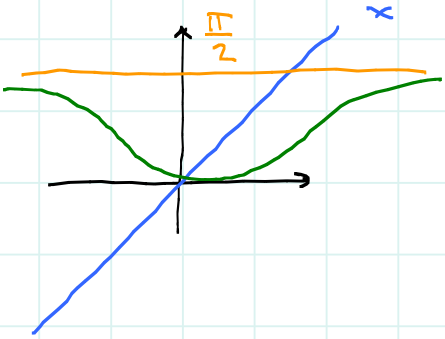
Per λ grande la situazione è questa

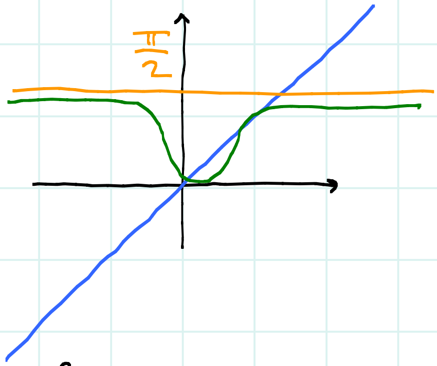
$\leftarrow$ l'esponenziale alla fine cresce più della parabola

$\lambda = \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow$ tangenza tra parabola ed espon.

$\boxed{\text{Morale}}$ Mai sovrapporre due grafici!

<u>Esempio 2</u> Risolvere $x = \arctan(x^2)$



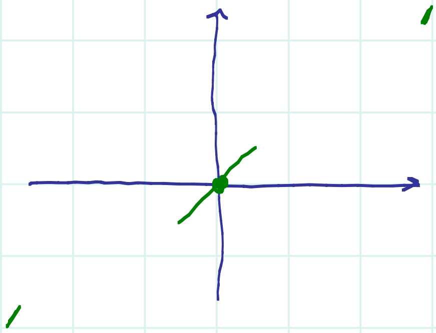


Quale dei disegni è quello corretto?

Studio la funzione $f(x) = x - \arctan(x^2)$.

Nessuna simmetria, come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva, poi $f(0) = 0$

Se fosse monotona, saremmo ☺



$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4}$$

$$= \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

Il denominatore è >0, ma il numeratore? Non è evidente...

<u>Idea</u>: studio la funzione $g(x) = x^4 - 2x + 1$.

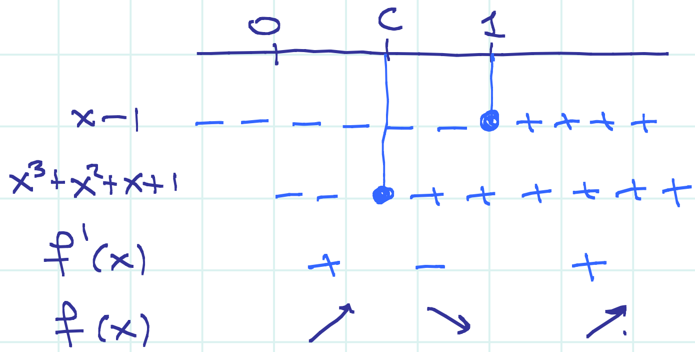
Si vede a occhio un p.to in cui si annulla: $x = 1$, quindi si può scomporre

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x + 1 & x-1 \\ \hline -x^4 + x^3 & x^3 + x^2 + x - 1 \\ \hline x^3 - 2x + 1 & \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 - 2x + 1 & \\ -x^2 + x & \\ \hline -x + 1 & \end{array}$$

Conclusione (per ora): $x^4-2x+1 = (x-1)(x^3+x^2+x-1)$

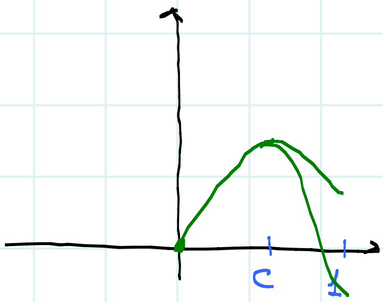
Ora chiamo $h(x) = x^3+x^2+x-1$

Per $x \geq 0$ questa funzione è crescente, perché somma di funzioni crescenti. Inoltre $h(0) = -1$ e $h(1) = 2$, quindi si annulla per un certo $c \in (0,1)$. Quindi la situazione è questa



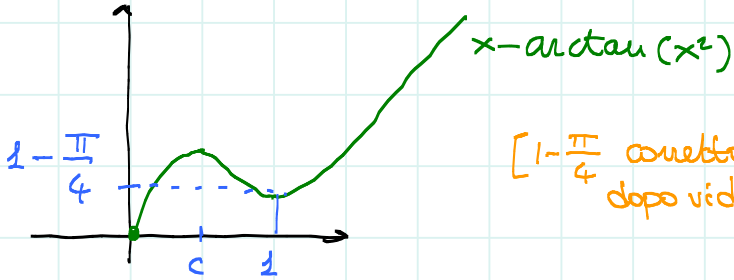
Domanda: in $x=1$ si ha $f(1)>0$

oppure $f(1)<0$?



$f(1) = 1-\arctan 1 = 1-\frac{\pi}{4} > 0$ di poco

La situazione è questa

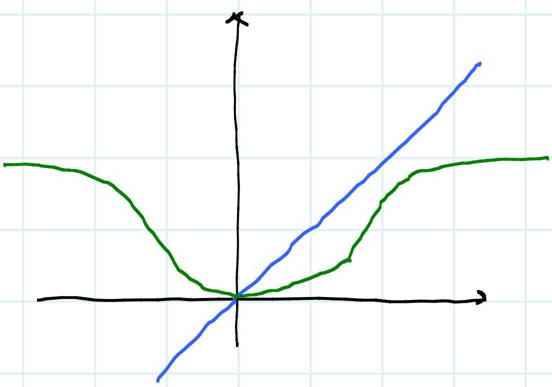


[$1-\frac{\pi}{4}$ corretto dopo video]

Per $x<0$ non c'è problema perché $f(x)$ è somma di due termini negativi.

<u>Conclusione</u> $\arctan(x^2) \leq x$ se e solo $x > 0$

e vale il segno di uguale se e solo se $x=0$.



<u>Oss.</u> Per $x>0$ i due grafici

→ per un po' si allontanano

→ poi si avvicinano, ma non abbastanza

→ poi si ri-allontanano definitivamente.

—o—o—