ANALISI 1 — LEZIONE 127

Note Title 23/05/2017

$\boxed{\text{Dim. teorema}}$

$\boxed{\text{Darboux unrestricted} \iff \text{Darboux ortodossa}}$

Facile: basta pensarci, anzi sono uguali gli integrali inferiori e superiori prodotti con i due metodi.

Punti essenziali

- $S_D^+(f,P)$ sono particolari somme della costruzione unrestricted
- per ogni somma superiore unrestricted ne esiste una ortodossa che è $\leq$ (basta usare le stesse basi)

$\boxed{\text{Riemann} \Rightarrow \text{Darboux}}$

Ipotesi: f integrabile secondo Riemann

Tesi: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ partizione P tale che

$$S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) \leq \varepsilon$$

Dato $\varepsilon > 0$ scelgo il $\delta > 0$ corrispondente nella def. di R., cioè quello che assicura

$$\operatorname{diam}(P) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |I - S_R(f,P,T)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La disuguaglianza vale qualunque sia T. Ora in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ scelgo t_i in modo che $f(t_i)$ sia vicino quanto voglio a $\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

In questo modo riesco ad ottenere

$$|I - S_D^+(f,P)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Allo stesso modo ottengo $\quad |I - S_D^-(f,P)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
e concludo con la triangolare

$$|S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P)| \leq |S_D^+ - I| + |I - S_D^-| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Darboux} \Rightarrow \text{Riemann}}$

Ipotesi: f int. secondo Darboux ortodosso, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \ \text{t.c.} \quad S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) \leq \varepsilon$$

Tesi: f int. secondo Riemann, cioè esiste $I \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ \text{diam}(P) \leq \delta \Rightarrow |I - S_R(f,P,T)| \leq \varepsilon$$

(deve essere vero $\forall P$ con diam $\leq \delta$)

Il valore I è l'integrale di Darboux, che esiste per ipotesi.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per Darboux, posso trovare P_ε partizione tale che

$$|I - S_D^+(f,P_\varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad |I - S_D^-(f,P_\varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

[Da qui in poi è stata riscritta a posteriori, sperabilmente in maniera più efficiente che nel video live]

Devo ora scegliere δ e lo scelgo in modo tale che

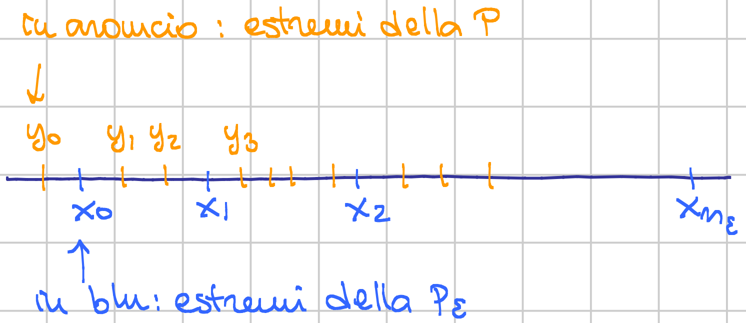
$$\underbrace{\delta \leq \text{diam}(P_\varepsilon)}_{\text{condizione comoda, ma non strettamente necessaria}} \qquad \delta \leq \frac{\varepsilon}{4M(n_\varepsilon + 1)}$$

numero di punti della partizione P_ε

costante t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{CLAIM}}$ Il valore di δ appena scelto è ok per la def. di Riemann

Prendo quindi una qualunque partizione taggata (P,T) con $\mathrm{diam}(P) \leq \delta$



Considero una nuova partizione Q_ε ottenuta unendo P e P_ε, cioè considerando come p.ti sia quelli provenienti da P, sia quelli prov. da P_ε.
Osservo che vale (fatto gen. che vale quando si uniscono 2 partizioni)

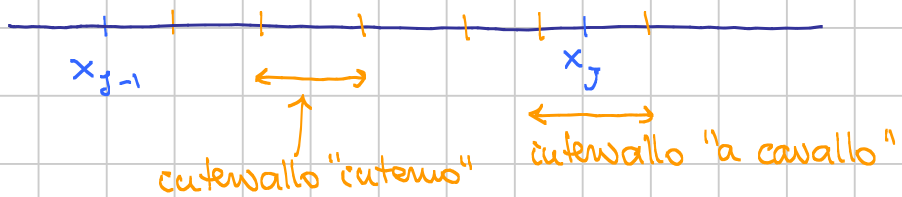
$$S^+_D(f, Q_\varepsilon) \leq S^+(f, P_\varepsilon) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}$$

e analogamente

$$S^-_D(f, Q_\varepsilon) \geq S^-(f, P_\varepsilon) \geq I - \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora divido gli intervallini della P in due categorie:

- quelli che sono contenuti in un intervallino della P_ε (che chiamo "interni") e che quindi sono anche intervallini della Q_ε
- quelli che sono "a cavallo" di due intervallini della P_ε, e che quindi sono unione di due intervallini della Q_ε.



Più precisamente, detti $y_0 < y_1 < \dots < y_n$ i p.ti della P, definiamo

$$\mathrm{Int} := \{ i \in \{1, \dots, n\} : (y_{i-1}, y_i) \text{ è interno rispetto alla } P_\varepsilon \}$$

$$\mathrm{Cav} := \{ i \in \{1, \dots, n\} : (y_{i-1}, y_i) \text{ è a cavallo rispetto alla } P_\varepsilon \}.$$

Ora ovviamente

p.ti "taggati" da T

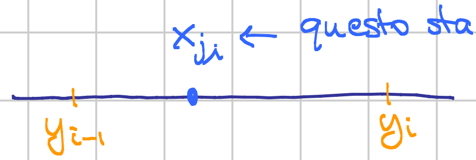
$$S_R(f, P, T) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)$$

$$= \sum_{i \in \mathrm{Int}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) + \sum_{i \in \mathrm{Cav}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) \qquad (\star)$$

Ora

$$\sum_{i \in \mathrm{Int}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) \leq \underbrace{\sum_{i \in \mathrm{Int}} (y_i - y_{i-1}) \sup_{x \in [y_{i-1}, y_i]} f(x)}_{\text{e questi sono addendi della } S_D^+(f, Q_\varepsilon)}$$

Per stimare il secondo pezzo, osserviamo che la situazione è questa



e scriviamo

$$(y_i - y_{i-1}) f(t_i) = (y_i - x_{j_i}) f(t_i) + (x_{j_i} - y_{i-1}) f(t_i)$$

$$= \boxed{(y_i - x_{j_i}) \sup_{[x_{j_i}, y_i]} f(x) + (x_{j_i} - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1}, x_{j_i}]} f(x)} + \boxed{(y_i - x_{j_i}) \underbrace{\left(f(t_i) - \sup_{\dots} \dots \right)}_{\leq 2M} + (x_{j_i} - y_{i-1}) \underbrace{\left(f(t_i) - \sup_{\dots} \dots \right)}_{\leq 2M}}$$

Questi sono addendi della $S_D^+(f, Q_\varepsilon)$

$\leq 2M (y_i - y_{i-1})$

Tornando alla $(\star)$, abbiamo ottenuto che

$$\begin{aligned} S_R(f,P,T) \le {}& \left.\begin{aligned} &\sum_{i\in Int} (y_i - y_{i-1}) \sup_{x\in[y_{i-1},y_i]} f(x) \\ &+ \sum_{i\in Car}(y_i - x_{j_i}) \sup_{x\in[x_{j_i},y_i]} f(x) \\ &+ \sum_{i\in Car}(x_{j_i}-y_{i-1}) \sup_{x\in[y_{i-1},x_{j_i}]} f(x) \end{aligned}\right] = S_D^+(f,Q_\varepsilon) \\ & \left.+ \sum_{i\in Car} 2M \underbrace{(y_i-y_{i-1})}_{\le\delta}\right] \le 2M\delta\cdot(\text{numero el. di Car}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \le 2M\delta(n_\varepsilon+1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} S_R(f,P,T) &\le S_D^+(f,Q_\varepsilon) + \underbrace{2M\delta(n_\varepsilon+1)}_{\downarrow\ \text{scelta di } \delta} \\ &\le I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= I+\varepsilon. \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga si dimostra che

$$S_R(f,P,T) \ge I - \varepsilon.$$

Questo completa la dimostrazione. ☺