ANALISI 1 - LEZIONE 009

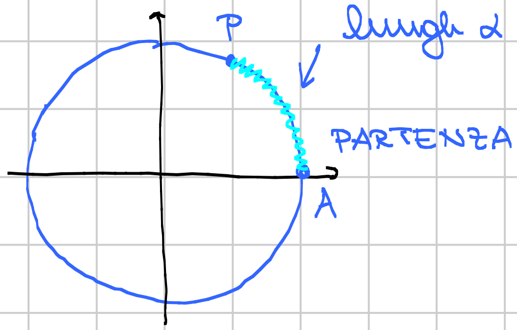
Note Title 03/10/2016

Presentazione funzioni elementari

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE E LORO INVERSE

Angoli vs archi

Archi

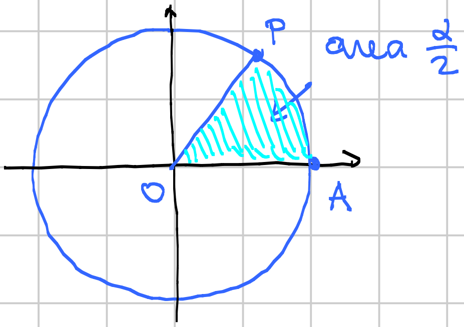


$x^2+y^2=1$

P corrisponde ad un arco α se l'arco $\widehat{AP}$ è lungo α.

Se α è negativo, vuol dire che "giro al contrario"
Se $\alpha > 2\pi$, vuol dire fare + volte il giro.

Settori



P corrisponde ad un settore α se l'area del settore circolare OPA è $\frac{\alpha}{2}$.

$\boxed{\text{Area} : \text{lungh} = \pi : 2\pi}$

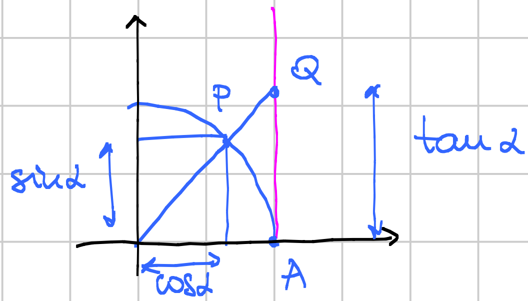
Area sett $= \frac{1}{2}$ lungh. arco

"Def. funzioni trigonometriche"

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, questo individua in modo unico un p.to P della circ. trigonometrica (sia nel 1°, sia nel 2° modo). A quel p.to

$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



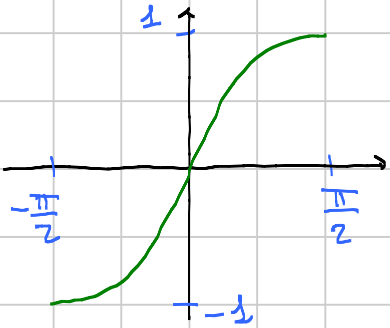
$\boxed{\sin x}$ $f(x) = \sin x$

vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari e periodica di periodo minimo 2π

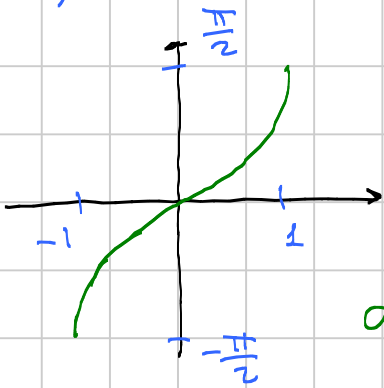
Vista come $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è invertibile e strett. crescente.

L'inversa è una $g : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ detta

$$g(x) = \arcsin x \quad \text{(dispari)}$$



$\sin x$



$\arcsin x$

$\boxed{\cos x}$ Come sopra... $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo min 2π e pari

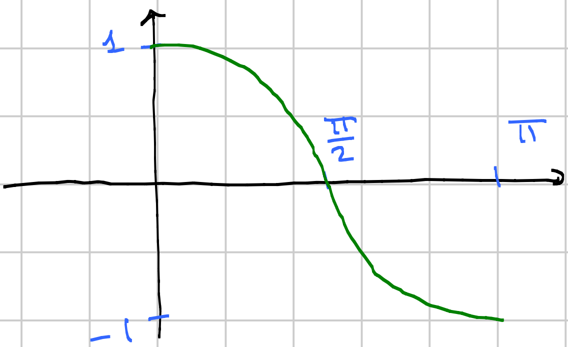
Vista come $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ è strett. decresc. e invertibile.

L'inversa è

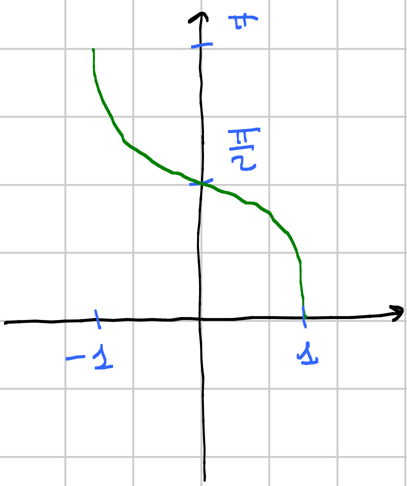
$$g : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

detta

$$g(x) = \arccos x$$



$\cos x$



$\arccos x$

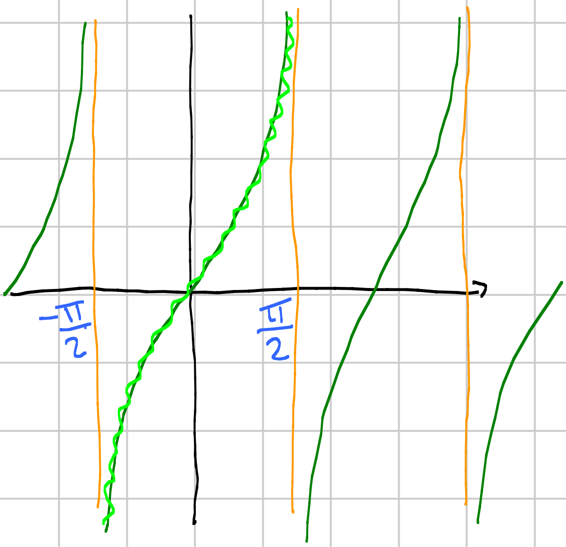
$\boxed{\tan x}$ Definita su $\underbrace{\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}}_{\text{Qui } \cos = 0} = A$

Vista come $f: A \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo π e dispari. Inoltre è surg., ma non iniettiva.
Vista come $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è strett. cresc. e invertibile.

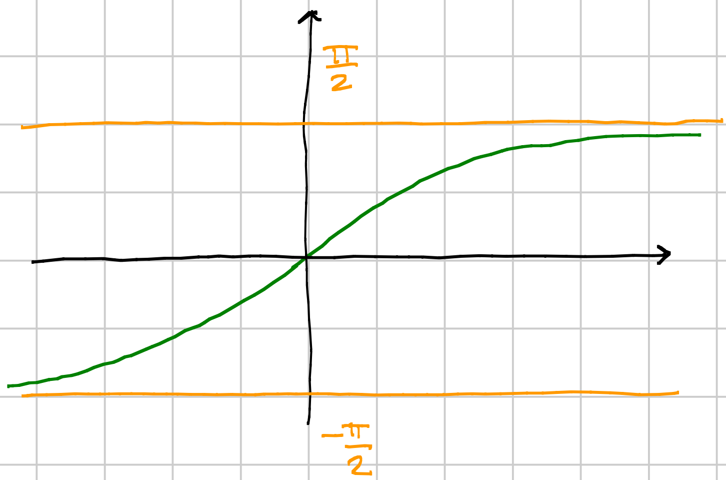
L'inversa è $g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e si chiama

$$g(x) = \arctan x$$

(dispari)



$\tan x$



$\arctan x$

— o — o —

$\arcsin(\sin 1) = 1$

$\arcsin(\sin 2) = \boxed{2}$ ← NO!! Non può essere 2 perché è fuori dall'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\left.\begin{array}{lll} \arcsin(\sin x) = x & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos(\cos x) = x & \forall x \in [0, \pi] \\ \arctan(\tan x) = x & \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right]$$

$\forall x \in$ insieme di partenza della funzione usata per fare l'inversa

$$\left.\begin{array}{lll} \sin(\arcsin x) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \cos(\arccos x) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \tan(\arctan x) = x & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

$\forall x \in$ insieme di arrivo della funz. usata per definire l'inversa

$f: A \to B$ $\quad$ $g: B \to A$ funzione inversa.

Allora

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$
$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Oss. C'è lo stesso pbm. con le potenze/radici di indice pari

$$\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \geq 0 \qquad \sqrt{x^2} = |x| = \sqrt[4]{x^4}$$

$$\sqrt[4]{x^4} = x \quad \forall x \geq 0$$

— o — o —

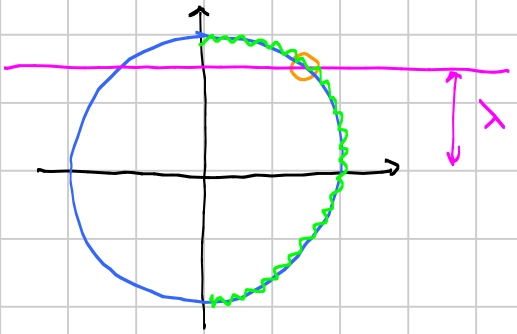
Esercizio Calcolare

$\arcsin(\sin 2) =$ NON è 2

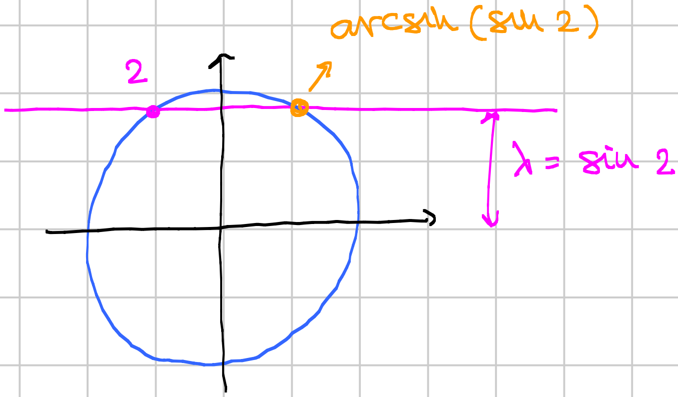
$\arccos(\cos 2) = 2$ (basta osservare che $2 \in [0, \pi]$)

$\arccos(\cos 4) =$ NON è 4

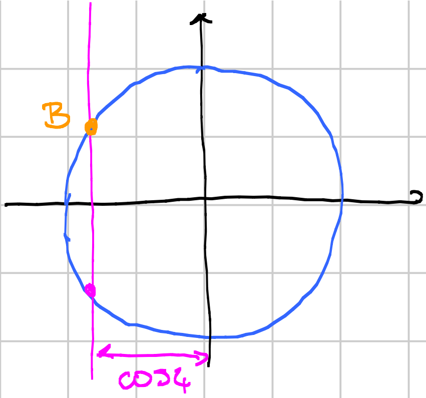
Osservazione geometrica: per calcolare $\arcsin \lambda$ vuol dire intersecare la circ. trigo. con la retta $y = \lambda$ e prendere l'intersezione a dx



Per $\arccos \lambda$ è la stessa cosa solo che prendo $x = \lambda$ e considero l'intersezione sopra.



$$\arcsin(\sin 2) = \pi - 2$$



B corrisponde ad $\arccos(\cos 4)$

Viene $2\pi - 4$

— o — o —

Formula interessante

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0}$$

Dim. Sia $\alpha = \arctan x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ perché $x > 0$

Considero $\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chi è la sua tangente?

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\text{PCM}}{=} \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$$

Nota: siamo nella zona dove $\arctan(\tan \ldots) = \ldots$

Faccio arctan a dx e sx e ottengo $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan \frac{1}{x}$ che è quello che volevo.

— o — o —

Formule analoghe $\qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]}$$

La seconda segue da $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ per ogni α.
Nella zona giusta si può applicare arccos a dx e sx.

— o — o —