ANALISI 1 — LEZIONE 047

Note Title 17/11/2016

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è lip. in A se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y| \qquad \forall x \in A, \forall y \in A}$$

Oss. Se un certo L va bene, allora vanno bene tutti i successivi

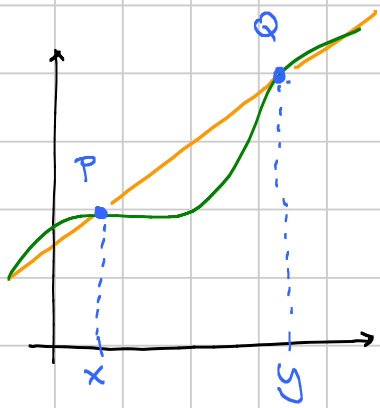
Def. Se f è lip. A, allora il più piccolo L che va bene si dice costante di Lipschitz di f in A, ed è dato da

$$\boxed{L := \sup \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x \in A, y \in A, x \neq y \right\}}$$

Interpretazione geometrica Se f è lip. in A, allora vale

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \le L \qquad \forall x \neq y \text{ in } A$$

coeff. angolare della retta PQ



Quindi geom.

$$\boxed{f \text{ lip. in } A \iff \text{le rette PQ hanno pendenza limitata}}$$

Oss. La lip. dice che errore commetto sulle funzioni noto l'errore commesso sugli argomenti.

Esempio 1 $\quad f(x) = x^2$ $\quad$ Non è lip. in $\mathbb{R}$

Se lo fosse, esisterebbe L tale che

$$|x^2-y^2| \leq L\,|x-y| \qquad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Uso $y=0$ e $x=n$ e ottengo $\quad n^2 \leq Ln$ $\quad$ che è assurdo per n grande

Avrei potuto usare $\quad y=n$ e $x=n+1$:

$$|(n+1)^2-n^2| \leq L\,|n+1-n| \;; \qquad |2n+1| \leq L \qquad \text{assurdo}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = x^2$ è lip. in $[0,100]$

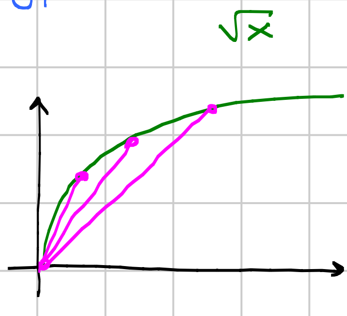
Devo dim. che esiste $L\in\mathbb{R}$ tale che

$$|x^2-y^2| \leq L\,|x-y| \qquad \forall\, x\in[0,100] \quad \forall\, y\in[0,100]$$

$$|(x+y)(x-y)|$$

Semplificando viene $\quad |x+y| \leq L$ $\quad$ e questa è ok se prendo $L=200$.

Bella copia : $\quad |x^2-y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 200}\cdot|x-y| \leq 200\,|x-y|$



Esempio 3 $\quad f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ è lip. in $[0,+\infty)$?

No! Per colpa delle rette vicine a 0

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}\,| \leq L\,|x-y|$$

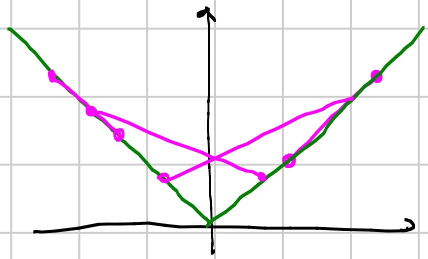
Scelgo $y=0$ e $x=\frac{1}{n}$: $\quad \left|\sqrt{\frac{1}{n}}\right| \leq L\,\frac{1}{n}$, cioè $\quad \sqrt{n} \leq L$

il che è assurdo per n grande.

LIPSCHITZIANITÀ E DERIVATA PRIMA

Fatto: le funzioni lip. non sono obbligate ad essere derivabili

Esempio $f(x) = |x|$ è lip. in $\mathbb{R}$ ma non derivabile in $x=0$



La lip. con costante 1 segue dalla disuguaglianza

$$\big||x|-|y|\big| \underset{\substack{\uparrow \\ L=1}}{\leq} |x-y| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(si dimostra facilmente per via elementare ⇝ precorso)

$\boxed{\text{Teorema}}$ (lip. e derivata prima) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme decente (intervallo, semiretta, tutto $\mathbb{R}$) e sia $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$$\boxed{f \text{ lip. in } A \iff |f'(x)| \text{ è limitata in } A}$$

Non solo, ma la costante di lip. di f in A in tal caso è

$$\boxed{L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ipotesi: f lip. in A con costante L
Tesi: $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in A$

Prendo $x_0 \in A$ e per definizione

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \underbrace{\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right|}_{\leq L \text{ per ogni } h \text{ ammissibile}} \leq L$$

Ipotesi : $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in A$

Tesi : $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ per ogni x e y in A

Per il teorema di Lagrange vale

$$|f(x)-f(y)| = \overbrace{|f'(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punto tra } x \text{ e } y \text{ (ignoto)}}}{c})|}^{\leq L} \cdot |x-y| \leq L|x-y|$$

Oss. È fondamentale che l'insieme di def. di f non abbia buchi, cioè se x e y stanno in A, allora tutto il segmento con estremi x e y deve essere contenuto in A, in modo che possa applicare Lagrange.

Oss. Nella seconda parte della dim. ho mostrato che la costante di Lip. di f in A è $\leq$ del sup di $|f'(x)|$.
Dovrei dimostrare che f non può essere Lip. con una costante $<$ del sup. Per far questo bisogna tornare nella prima parte della dimostrazione.

Esempio 1 $\quad f(x) = x^2$ in $[0,100]$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in [0,100]\} = \sup\{2x : x \in [0,100]\} = 200$$

quindi è Lip. con costante 200

Esempio 2 $\quad f(x) = x^2$ su tutto $\mathbb{R}$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\} = +\infty \implies \text{no Lip.}$$

Esempio 3 $\quad f(x) = \sqrt{x}$ in $A = [1,+\infty)$

$$\sup\{|f'(x)| : x \geq 1\} = \sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x \geq 1\right\} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\sqrt{x}$ è Lip con costante $\frac{1}{2}$ in $[1,+\infty)$, cioè

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le \frac{1}{2}|x-y| \qquad \forall x \ge 1, \forall y \ge 1$$

Analogamente

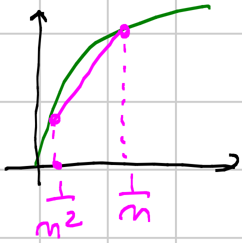
$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le \underset{\uparrow}{5}\,|x-y| \qquad \forall x \ge \frac{1}{100}, \forall y \ge \frac{1}{100}$$

$$\sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x \ge \frac{1}{100}\right\}$$

<u>Esempio 4</u> $f(x)=\sqrt{x}$ è Lip. in $(0,+\infty)$? No!

$$\sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x\in(0,+\infty)\right\} = +\infty \Rightarrow \text{NO}$$

[Volendo usare la definizione e trovare un assurdo, posso prendere $x=\frac{1}{n}$, $y=\frac{1}{n^2}$]



<u>Esempio 5</u> $f(x) = x^2 \sin(x^3)\, e^{-\sqrt{x}}$ è Lip. per $x \ge 0$?

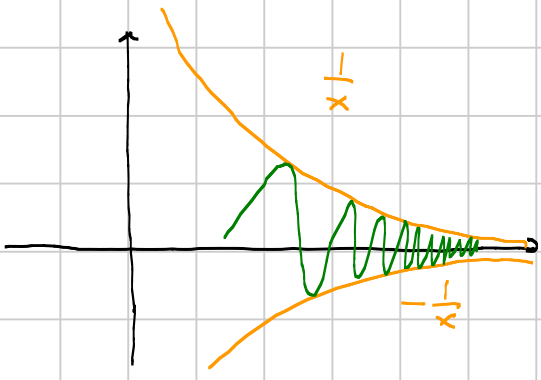
Facciamo la derivata (in $x=0$ andrebbe fatta a parte)

$$f'(x) = 2x\sin(x^3)e^{-\sqrt{x}} + 3x^4\cos(x^3)e^{-\sqrt{x}} - x^2\sin(x^3)e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Mi serve che sia limitata su tutto $[0,+\infty)$. Questo è vero perché in $x=0$ non ci sono problemi e tende a 0 per $x\to+\infty$.

<u>Esempio 6</u> $f(x) = \dfrac{\sin(x^{20})}{x}$ è Lip. in $[10,+\infty)$?

No! La derivata non è limitata!



<u>Domanda</u>: e se $f(x)\to 0$ ed è monotona?