5 Continuità

Definizione 5.0.1 (Funzione continua)**.** *Dato un insieme A ed una funzione $f(x)$ tale che $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, la funzione f si dice* ***continua*** *in x_0 se $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che se data una $x \in A$:*

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{12}$$

La condizione scritta sopra [12] può essere scritta anche tramite due condizioni:

- $|x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$
- $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Longleftrightarrow f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$

Esempio 5.0.1. Ora per capire meglio facciamo un esempio di funzione non continua:

Innanzitutto stabiliamo una $f(x)$ e verifichiamo che $f(x)$ in $x_0 = 0$ non è continua.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ se & x \leq 0 \\ 1 \ \ se & x > 0 \end{cases}$$

Come prima cosa stabiliamo un $\epsilon = \frac{1}{2}$. Ora, qualunque sia $\delta > 0$ se andiamo a prendere una x tale che $x \in (0, \delta) \Longrightarrow f(x) = 1$ quindi la disuguaglianza $f(x_0) - \epsilon > f(x) < f(x_0) + \epsilon$, che diventerebbe $0 - \frac{1}{2} < f(x) < 0 + \frac{1}{2}$, è falsa.

Deduciamo quindi che in $x_0 = 0$ questa funzione non è continua.

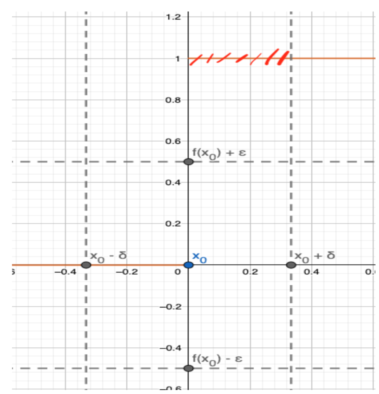


Figure 25: funzione non continua

Definizione 5.0.2. *Dato un insieme A ed una funzione $f(x)$ tale che $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ed un insieme $B \subset \mathbb{R}$ si dice che f è continua in B e f è continua in ogni punto $x_0 \in B$.*

Se invece si dice semplicemente che f è continua senza specificare il sotto insieme B vuol dire che f è continua in tutti i punti del suo dominio A.

Esempio 5.0.2. Esempio basato sulla funzione vista sopra:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ se & x \leq 0 \\ 1 \ \ se & x > 0 \end{cases} \qquad f \text{ è continua in } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

5.1 Permanenza del segno

Teorema 5.1.1 (Permanenza del segno)**.** Dato un insieme A ed una funzione f tale che $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$ allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. se $x \in A$ è $|x - x_0| < \delta \longrightarrow f(x) > 0$. Analogo risultato se $f(x_0) < 0$.

Dimotrazione 5.1.1. Sappiamo che $f(x_0) > 0$. Ora scegliamo un $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ ed utilizziamolo nella definizione di continuità:

$$\exists\ \delta > 0 \mid x \in A, |x - x_0| < \delta \Longleftarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{13}$$

Ciò che risulta dalle condizioni poste dalla continuità è che:

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \tag{14}$$

Se prendiamo la prima parte $f(x_0) - \epsilon < f(x)$ e facciamo le dovute sostituzioni risulta che:

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \tag{15}$$

Visto che $f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}$ è sempre maggiore di 0 risulta anche che $f(x)$ è maggiore di 0. ■

Corollario 5.1.1.1. *Se f è continua in x_0 $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f(x_0) > M$ con $M \in \mathbb{R}$, $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$. (Vale anche con $f(x_0) < M \Longrightarrow f(x) < M$)*

Dimotrazione 5.1.2 (Dimostrazione del corollario 5.1.1.1)**.** La dimostrazione di questo corollario è immediata e si fa applicando al teorema precedente 5.1.1 la funzione $g(x) = f(x) - M$, perché se la funzione $f(x) - M > 0$ è come dire $f(x) > M$. ■

5.2 Continuità con operazioni fra funzioni

Teorema 5.2.1. Prendendo due funzioni f e g continue in un punto x_0 allora le funzioni $f + g$, $f * g$ e $|f|$, se inoltre $f(x_0) \neq 0$ allora anche $\frac{1}{f}$ è continua.

Corollario 5.2.1.1. *Prendendo due funzioni f e g continue in un punto x_0 allora $\frac{f}{g}$ è continua se $g(x_0) \neq 0$*

5.3 Funzioni invertibili e continuità

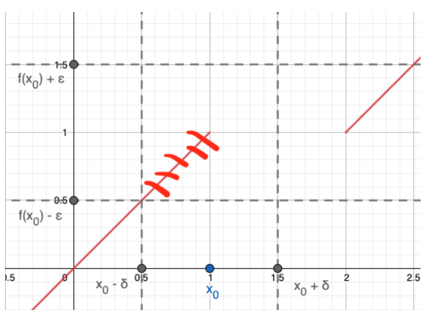
Proposizione 5.3.1. *Prendendo due insiemi I (I deve essere un intervallo) e B tale che $I \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ ed una funzione $f : I \longrightarrow B$, se f è continua in I ed è invertibile allora f^{-1} è continua in B.*

Osservazione 5.3.1. Possiamo osservare che ipotesi della proposizione 5.3.1 dice che il domino sia un intervallo, questo non può essere omesso.

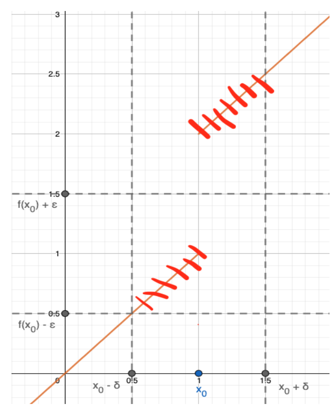
Esempio 5.3.1. Verifichiamo questa osservazione con un' esempio:

Prendiamo una funzione $f(x)$ definita in $f : (-\infty, 1] \cup (2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x \;\; se & x \leq 1 \\ x - 1 \;\; se & x > 1 \end{cases}$

Qui di seguito le rappresentazioni della funzione $f(x)$ e della sua inversa $f(x)^{-1}$



(a) Osservazione proposizione 5.3.1, funzione $f(x)$



(b) Osservazione proposizione 5.3.1, funzione $f(x)^{-1}$

- **Domanda 1°:** f è continua in $x_0 = 1$?
  La risposta a questa prima domanda è SI, essendo che noi andiamo a considerare solo i punti all'interno del dominio, quindi la parte compresa fra 1 e 2, dove la funzione presenta una discontinuità, non si considera.
- **Domanda 2°:** f è continua in $x_0 = 2$?
  La risposta in questo caso è che non ha senso considerare il punto $x_0 = 2$ visto che 2 non fa parte del dominio.

Quindi f è continua in tutto il suo dominio. Essendo f continua in tutto il suo dominio allora teoricamente f^{-1} è una funzione invertibile.

Possiamo però vedere che la funzione f^{-1}, figura [26b] non è continua in $x_0 = 1$ perché essendo la funzione inversa f^{-1} è definita come $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$, quindi dobbiamo considerare come dominio tutto $\mathbb{R}$, così facendo ci sono dei punti, in particolare con $x > 0$ che non rientrano nell'intervallo fra $f(x_0) - \epsilon$ e $f(x_0) + \epsilon$.

In conclusione da questo esempio deduciamo che, se f non è definita in un intervallo potrebbe succedere che f^{-1} non è continua anche se f è continua.

5.4 Continuità delle funzioni elementari

$f(x) = x$ è una funzione continua. Da questa considerazione segue che tutte le funzioni con polinomi sono continue.

Note 5.4.1. Ricorda che anche le funzioni costanti sono sempre continue

Definiamo in maniera generica così una funzione formata da polinomi continua:

$$P(x) = a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ... + a_1 * x + a_0 \ \ con \ \ a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Quindi: $x^2 = x * x$ è continua $\qquad x^3 = x^2 * x$ è continua $\qquad x^n$ è continua $\forall x \in \mathbb{N}$

Le funzioni razionali sono continue nel loro insieme di definizione. Le funzioni razionali sono uguali a quoziente di polinomi: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q polinomi, la funzione $f(x)$ è definita se $q(x) \neq 0$.

Assumendo che e^x, $\sin x$, $\cos x$ sono funzioni continue quindi anche $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\tan x$, $\arctan x$ sono continue.

5.5 Continuità fra composizione di funzioni

Teorema 5.5.1. Date due funzioni $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, ed un $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0) \in B$. Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora $g \bullet f$ è continua in x_0.

Esempio 5.5.1. Facciamo un esempio usando la funzione $e^{\cos x}$.
$e^{\cos x}$ è una funzione continua perché è la composizione di $f(x) = \cos x$, funzione continua, e $g(x) = e^y$, pure essa funzione continua.

Osservazione 5.5.1. Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ allora $\sup(f(x))$ con $x \in (a, b) = \sup(f(x))$ con $x \in [a, b]$. E ugualmente $\inf(f(x))$ con $x \in (a, b) = \inf(f(x))$ con $x \in [a, b]$.

Esempio 5.5.2. $f(x) = x^2$ con $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\sup(f(x)) = f(1) = 1$ con $x \in [0, 1] \qquad \sup(f(x)) = f(1) = 1$ con $x \in (0, 1)$ [4]

5.6 Teorema degli zeri

Teorema 5.6.1 (Teorema degli zeri)**.** Data una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$

Questo teorema dice che prendendo una funzione, che deve essere obbligatoriamente continua, se i valori di $f(x)$ nei due estremi moltiplicati fra di loro risultano minori di 0 la funzione passa per 0 in un ponto c e questo accade perché se il prodotto fra i due estremi torni inferiore a 0 vuol dire che hanno segno discorde.

Esempio 5.6.1. Facciamo un esempio di un caso in cui la funzione NON è continua:

Prendiamo $f(x) = [x] + \frac{1}{2} \quad f : [1, -1] \longrightarrow \mathbb{R}$

Se ora prendiamo la f(x) nei due estremi e facciamo il prodotto torna che:
$f(1) \cdot f(-1) < 0$ ma $\nexists x \in [-1.1]$ t.c. $f(x) = 0$ come possiamo vedere nell'immagine 27.

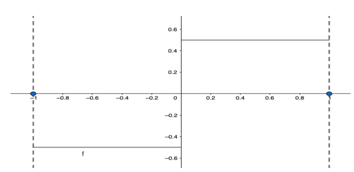


Figure 27: $f(x) = [x] + \frac{1}{2}$

[4] Ricorda che $\sup(imm(f(x))) = \sup(0,\ 1) = 1$

5.7 Teorema valori intermedi

Teorema 5.7.1 (Teorema dei valori intermedi)**.** Prendendo un intervallo $I \subset R$, ed una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $f(I)$ è un intervallo.

Questo teorema dice che se il nostro dominio è un intervallo e la f è continua all'ora anche il codominio o immagine di f sarà un intervallo.

Corollario 5.7.1.1. *Prendendo sempre un $I \subset R$, una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, se f assume y_1 e y_2 allora assume anche tutti i valori compresi fra y_1 e y_2.*

5.8 Teorema di Weirstrass

Teorema 5.8.1 (Teorema di Weirstrass)**.** Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo.

Note 5.8.1. Notare che $a, b \in \mathbb{R}$ e non in $\overline{\mathbb{R}}$ perché $a, b \neq \pm\infty$ e gli estremi devono essere compresi.

Esempio 5.8.1. Facciamo ora un esempio per confermare come il teorema di Weirstrass possa valore solo con un intervallo chiuso:
Dato $f(x) = \frac{1}{x}$ con $f(x) : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

in questo caso f ha come dominio un intervallo non chiuso a sinistra
f è continua ma non ha max perché $\sup(f) = +\infty$

Esempio 5.8.2. Facciamo ora un esempio per confermare come il teorema di Weirstrass possa valore solo con un intervallo limitato:
Dato $f(x) = \arctan x$ con $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

in questo caso f è una funzione continua definita come $-\frac{\pi}{1} < f(x) < \frac{\pi}{2}$
Possiamo notare però che f non toccherà mai ne $-\frac{\pi}{2}$ ne $\frac{\pi}{2}$ e quindi non ha ne massimo ne minimo.