ANALISI 1 — LEZIONE 014

Note Title 06/10/2016

RETTA REALE ESTESA

<u>Def.</u> $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

<u>Utilità</u>: se dico $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ vuol dire che a_n è tipo ①, ②, ③.

Possiamo estendere 4 operazione classiche a $\overline{\mathbb{R}}$ quasi sempre, ad esempio

$$14 + (+\infty) = +\infty \qquad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$7 \cdot (-\infty) = -\infty \qquad \frac{5}{+\infty} = 0$$

I problemi nascono $\boxed{+\infty - \infty}$ $\boxed{0 \cdot (\pm\infty)}$ $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ $\boxed{\frac{7}{0}}$

TEOREMI ALGEBRICI

Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

$$a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

- $a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$
- $a_n - b_n \to \ell_1 - \ell_2$
- $a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

se l'operazione prevista a dx ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$

- Se $\lambda \neq 0$, allora $\lambda a_n \to \lambda \ell_1$

— o — o —

<u>Achtung! Achtung!</u> Quando l'operazione non ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$ allora si dice che siamo di fronte ad una FORMA INDETERMINATA. Questo non va confuso con il tipo ④. Vuol dire solo che non posso dedurre il lim di $a_n + b_n$, $a_n \cdot b_n$ da ℓ_1 e ℓ_2

Esempio Caso $0 \cdot (+\infty)$ $a_n \to 0$ $b_n \to +\infty$

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$ $a_n \cdot b_n = n \to +\infty$

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$ $a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \to 0$

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 15n$ $a_n \cdot b_n = 15 \to 15$

$a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = n^2$ $a_n \cdot b_n = -n \to -\infty$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$ $a_n \cdot b_n = (-1)^n$ NON HA LIMITE

Dimostrazione di qualche caso del teo. algebrico

$a_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$, $b_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$. Allora $a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$

Brutta copia Fisso $\varepsilon > 0$ e vorrei che

$|(\ell_1 + \ell_2) - (a_n + b_n)| \leq \varepsilon$ definitivamente

$|\underbrace{\ell_1 - a_n}_{x} + \underbrace{\ell_2 - b_n}_{y}| \leq |\ell_1 - a_n| + |\ell_2 - b_n|$ $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

$\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$

Bella copia: Fisso $\varepsilon > 0$. Uso la def. di limite con $\frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists\, n_a \in \mathbb{N}$ t.c. $|\ell_1 - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_a$ poiché $a_n \to \ell_1$

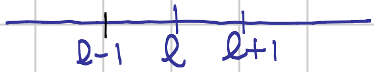
$\exists\, n_b \in \mathbb{N}$ t.c. $|\ell_2 - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_b$ " $b_n \to \ell_2$

Allora $\forall n \geq \max\{n_a, n_b\}$ si avrà che

$$|(l_1+l_2)-(a_n+b_n)| = |(l_1-a_n)+(l_2-b_n)|$$
$$\leq |l_1-a_n| + |l_2-b_n|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

<u>Lemma</u> Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, allora a_n è limitata

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di lim. con $\varepsilon = 1$ e ottengo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$l-1 \leq a_n \leq l+1 \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora $\quad m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se

$$M := \max\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, l+1\}$$

$$m := \min\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, l-1\}$$

<u>Achtung!</u> Se a_n è limitata, non è detto che abbia limite
$(a_n = (-1)^n)$

$a_n \to +\infty$, $b_n \to l \in \mathbb{R}$. Allora $a_n + b_n \to +\infty$

Poiché $b_n \to l \in \mathbb{R}$, di sicuro b_n è limitata, quindi esiste $K \in \mathbb{R}$ t.c. $|b_n| \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Voglio dimostrare che $a_n + b_n \to +\infty$, cioè
$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n + b_n \geq M$ definitiv.
Poiché $a_n \to +\infty$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq M+K$ definitiv.
Ma allora

$$a_n + \underbrace{b_n}_{\geq -K} \geq M + K - K = M \qquad \forall n \geq n_0.$$

$a_n \to l_1 \in \mathbb{R}$, $b_n \to l_2 \in \mathbb{R}$. Allora $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$

<u>Brutta copia</u> $|l_1 l_2 - a_n b_n| =$ TERMINE MISTO

$$= |l_1 l_2 - l_1 b_n + l_1 b_n - a_n b_n|$$

$$= |l_1 (l_2 - b_n) + (l_1 - a_n) \cdot b_n|$$

$$\leq |l_1| \cdot \underbrace{|l_2 - b_n|}_{\text{piccolo per } n \text{ grande}} + \underbrace{|l_1 - a_n|}_{\text{piccolo per } n \text{ grande}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\text{non enorme perché } b_n \text{ è limitata}}$$

<u>Bella copia</u> Poiché $b_n \to l_2 \in \mathbb{R}$, di sicuro è limitata, quindi

$$\exists B \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |b_n| \leq B \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Poiché $a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$

$$\exists n_a \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |l_1 - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2B} \qquad \forall n \geq n_a$$

$$\exists n_b \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |l_2 - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2|l_1|} \qquad \forall n \geq n_b$$

Ora $\forall n \geq \max\{n_a, n_b\}$ si ha che

$$|l_1 l_2 - a_n b_n| = \text{come sopra} \leq |l_1| \cdot \underbrace{|l_2 - b_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2|l_1|}} + \underbrace{|l_1 - a_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2B}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq B}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

☹ La dimostrazione ha dei problemi se $l_1 = 0$ e anche se $B = 0$

Come by-passo il problema se $\ell_1 = 0$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Se $\ell_1 = 0$, allora definitivamente

$$|a_n| = |a_n - 0| \le \frac{\varepsilon}{B}$$

Ma allora $\quad |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\le B} \le \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon$

che equivale a dire che $a_n \cdot b_n \to 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Nella dim. precedente sceglievo n_0 t.c.

$$|\ell_2 - b_n| \le \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+5)}$$

Nel gran finale ritrovo

$$\le |\ell_1| \cdot |\ell_2 - b_n| + \underbrace{\underbrace{|\ell_1 - a_n|}_{\le \frac{\varepsilon}{2B}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\le B}}_{\le \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\underbrace{|\ell_1| \cdot \frac{1}{2(|\ell_1|+5)}}_{\le 1} \varepsilon$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}$$

— o —

<u>Esercizio</u> Dimostrare altri casi del teorema algebrico, ad esempio $(+\infty) \cdot (-\infty)$.