ANALISI 1 — LEZIONE 68

Note Title 28/02/2025

Basi teoriche per il calcolo operativo degli integrali

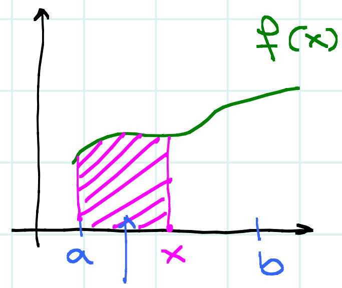
Due concetti : → FUNZIONE INTEGRALE
→ PRIMITIVA

Setting : intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile

Def. Chiamiamo **funzione integrale** la funzione

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

altro nome visto che x è già un estremo

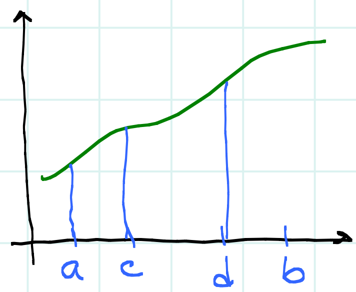


$\Phi(x)$ è l'area con segno di questa zona

Proprietà base Per ogni intervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ si ha che

$$\int_c^d f(t)\,dt = \Phi(d) - \Phi(c)$$

$$\int_a^d f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt$$



Dim : Immediata conseguenza dell'additività rispetto alla zona di integrazione

Conseguenza operativa : $\boxed{\text{se}}$ conosco $\Phi(x)$, allora so calcolare l'integrale di f in ogni intervallo $\subseteq [a,b]$

Def. Supponiamo $f(x)$ continua in $[a,b]$.
Si dice $\boxed{\text{PRIMITIVA}}$ di f $\boxed{\text{una}}$ qualunque funzione

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$

tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Oss. Primitiva in inglese = ANTIDERIVATIVE

Oss. La primitiva, posto che esista, non è mai unica
(se $F(x)$ è primitiva, anche $F(x) + 3724$ è primitiva)

Prop. Due primitive della stessa f hanno come differenza una costante

$\boxed{\text{Dim.}}$ Siano F_1 ed F_2 due primitive. Allora

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

Quindi la diff. ha derivata nulla, quindi è costante. Perché?
Lagrange! Se $g'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora

$$g(x) - g(a) = (x-a) \underbrace{g'(c)}_{=0} = 0$$

quindi $g(x) = g(a)$ sempre!

Anello di congiunzione: la funzione integrale è una primitiva!!
Quindi per calcolare operativamente un integrale, diciamo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

→ cerco una qualunque $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $F'(x) = f(x)$
→ calcolo $F(b) - F(a)$

Fatto importante: la differenza NON dipende da quale primitiva uso

Dim. Siano F_1 e F_2 due primitive. Allora sappiamo che

$$F_2(x) = F_1(x) + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

ma allora

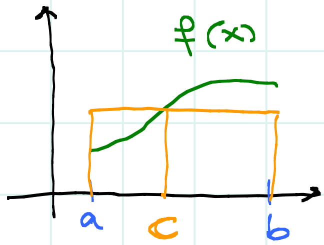
$$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) + \cancel{c} - F_1(a) - \cancel{c} = F_1(b) - F_1(a)$$

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema media integrale}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

Allora esiste $c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$



Brutalmente: riscrivo la tesi come

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

altezza di un rettangolo che ha la stessa area dell'integrale

Dim. Siano m ed M il min e il max di $f(x)$ in $[a,b]$, quindi

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Allora per monotonia dell'integrale

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$m \le \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \le M$$

valore compreso tra min e max di f → essendo f continua, assume tutti i valori tra m e M.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

(La funzione integrale è una primitiva)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, e sia

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

la funzione integrale. Allora

$$\phi'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b).$$

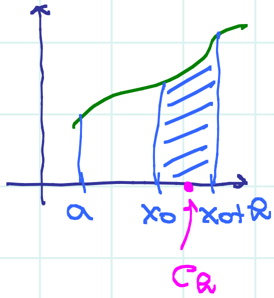
$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $x_0 \in (a,b)$ e calcolo

$$\frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left\{ \underbrace{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt}_{\phi(x_0+h)} - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right\}$$

per lo meno se $h > 0$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

lunghezza intervallo $[x_0, x_0+h]$



teo. media integrale in $[x_0, x_0+h]$

$$= f(c_h)$$

p.to misterioso compreso tra x_0 e x_0+h

Quando $h \to 0^+$ avremo che $c_h \to x_0$ per i carabinieri, quindi $f(c_h) \to f(x_0)$ perché f è continua.

Nel caso in cui h è negativo, è ancora vero che

$$\frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} = f(c_h) \qquad \text{con ora} \quad c_h \in [x_0+h, x_0]$$

— o — o —

$\boxed{\text{Il famigerato } +c}$ $\int f(x)\,dx$ = una qualunque primitiva di $f(x)$

$\uparrow$
senza estremi

ad esempio $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

Aggiungere $+c$ non serve a nulla per il calcolo con gli estremi (perché se ne va).

Uno vorrebbe metterlo per descrivere l'insieme di TUTTE le primitive, ma achtung!

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$ $\leftarrow$ una primitiva

Tutte le primitive di $\frac{1}{x^2}$ non sono $-\frac{1}{x}+c$!!!

Infatti posso usare c diversi per $x>0$ e $x<0$

Quindi per descrivere TUTTE le primitive, mettere $+c$ non basta!

— o — o —