16 Introduzione analisi in più variabili

Fin'ora abbiamo visto: insiemi $\subset \mathbb{R}$, funzioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con i imiti di funzioni ed il calcolo differenziale, teoria dell'integrazione per funzioni di una variabile, successioni e serie numeriche. L'ultima parte del corso l'obbiettivo è lavorare con più variabili in particolare con $\mathbb{R}^n$, vorremmo definire l'insieme nel piano (nello spazio), derivare delle curve e studiare funzioni in più variabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quindi definire un limine la continuità, le derivare e studiare la funzione individuando massimi e minimi.

16.1 Struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$

Definizione 16.1.1. *Possiamo definire $\mathbb{R}^n$ come uno spazio vettoriale dove possiamo fare somma, prodotto per un numero, combinazioni lineare indipendenza lineare, la base ed i sottospazi. Se $x \in \mathbb{R}^n \to x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Per esempio $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, mentre $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Alle livello di notazioni si può scrivere $\mathbb{R}^2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$\mathbb{R}^2$ sarà un piano mentre $\mathbb{R}^3$ sarà uno spazio dove possiamo definire.

- Somma di 2 vettori: $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, e $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.
- Prodotto per un numero $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, ..., \lambda \cdot x_n)$.

16.2 Operazioni sullo spazio

Definiamo una la struttura di questo spazio, e lo facciamo definendo delle operazioni.

Definizione 16.2.1 (Prodotto scalare)**.** *Il **prodotto scalare** è un operazione che ha come input 2 vettori, dato $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiti come $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ il prodotto scalare è:*

$$< x, y >= x \cdot y = (x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Definizione 16.2.2 (Norma)**.** *La **norma** è un operazioni che ah come input un solo vettore e come risultato un numero maggiore o uguale a 0. Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ la norma è:*

$$||x|| = |x| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

La norma di x è la lunghezza del vettore x.

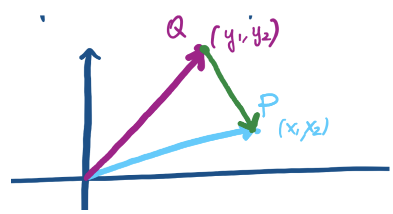
Definizione 16.2.3 (Distanza)**.** *La **distanza** è un'operazione che ha come input due vettori e come risultato un numero maggiore o uguale a 0. Dato un $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo la distanza come:*

$$dist(x, y) = d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Notare che con queste operazioni abbiamo definito in $\mathbb{R}^n$:
(misurare gli angoli)$<,>\xrightarrow{\text{induce}}$ (lunghezza di un vettore) $||.|| \xrightarrow{\text{induce}}$ (distanza tra due elementi) d Il prodotto scalare serve a misurare gli angoli perché geometricamente $< x, y >= ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\Theta$ dove Θ è l'angolo compreso fra i vettori x, y.

Note 16.2.1. Una piccola digressione per dire che possiamo dire sia punti (x_1, x_2) oppure il punto x è uguale dove in $\mathbb{R}^2$ se scrivo (x_1, x_2) questo rappresenta sia il punto che il vettore applicato nell'origine come punto della freccia in (x_1, x_2).

In questa rappresentazione la differenza tra i due vettori P, Q dove $P \leftrightarrow x = (x_1, x_2)$ e $Q \leftrightarrow y = (y_1, y_2)$, è $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \vec{P} - \vec{Q}$ (penso il vettore differenza come applicato un Q con punta della freccia in P). Quindi $d(x, y) = d(P, Q) = ||x - y||$.



16.3 Insiemi nello spazio $\mathbb{R}^n$

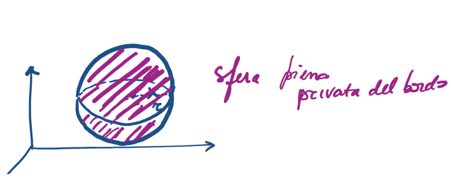
Data la nozione di distanza possiamo definire gli insiemi in uno spazio $\mathbb{R}^n$.

Definizione 16.3.1 (Palla)**.** *Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e dato $r > 0, r \in \mathbb{R}$ si dice* ***palla*** *di centro x e raggio r:*

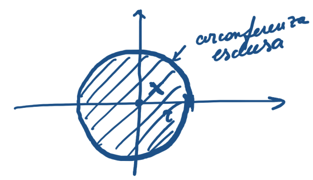
$$B(x,r) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x,y) < r\}$$

La palla di centro x e raggio r può essere chiamato anche intorno sferico di x di raggio r.

Per esempio in caso di $\mathbb{R}^2$, $B(x,r) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(x,y) < r\}$, sarà una circonferenza escluso il bordo. Nel caso di $\mathbb{R}^3$ invece sarà una sfera piena privata del bordo.
Se torniamo al caso $\mathbb{R}$ la $B_r(x) = \{\in \mathbb{R} \ : \ d(x,y) < r\}$ dove $d(x,y) = |x-y|$, quindi come il caso $\mathbb{R}^n$ solo che nel caso di $\mathbb{R}$ abbiamo un valore assoluto mentre nel caso $\mathbb{R}^n$ abbiamo una norma.



(a) Sfera piena priva di bordo



(b) Circonferenza esclusa

Definizione 16.3.2 (Sfera)**.** *Dato $x \in \mathbb{R}^n$. e dato $r > 0, r \in \mathbb{R}$ si dice* ***sfera*** *di centro x e raggio r l'insieme:*

$$S(x,r) = S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x,y) = r\}$$

Nel caso vedessimo la sfera in $\mathbb{R}$ avremmo $S_r(x) = \{x - r\} \cup \{x + r\}$.

Figure 49: Esempi sfera

16.4 Proprietà di $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo come notazione che se E è un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ allora indichiamo ocn $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E =$ complementare di E rispetto a tutto $\mathbb{R}^n$.

Definizione 16.4.1 (Punto interno, esterno, di frontiera)**.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice:*

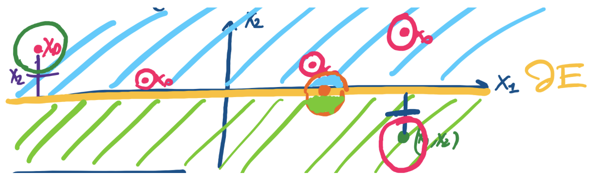
- ***Punto interno ad E*** *se esiste una palla di centro x_0 e raggio $r > 0$ contenuta in E, cioè se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset E$, si dice che x_0 è un punto interno ad E.*
- ***Punto esterno ad E*** *se esiste una palla di centro x_0 e raggio r tutta contenuta in E^x cioè se $\exists r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset E^c = R^n \setminus E$.*
- ***Punto di frontiera per E*** *se non è ne interno ne esterno. $\forall r > 0$ $V_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$ e $B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$.*

Osservazione 16.4.1. Alcune osservazioni su queste proprietà:

- Se x_0 è un punto interno ad E $\Longrightarrow x_0 \in E$.
- Se x_0 è punto esterno ad E $\Longrightarrow x_0 \notin E$.
- Se x_0 è punto di frontiera $\Longrightarrow x_0 \in E$ oppure $x_0 \notin E$.

A livello di notazione si indica $\mathring{E}$ l'insieme dei punti interni, e con $\delta E.$ l'insieme dei punti di frontiera di E.

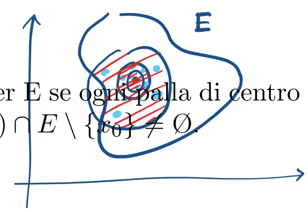
Esempio 16.4.1. Dato E $= \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = (x_1, x_2) \ : \ x_2 > 0\}$. Ci chiediamo quali siano $\mathring{E}$, δE e l'insieme dei punti esterni.



- L'insieme dei punti interni $\mathring{E} = E$. Per dimostrare prendo $(x_1, x_2) \in E$ appartenendo ad E ho che $x_2 > 0$ quindi scelgo $r < \frac{x_2}{2} \implies B_r(x_0) \subset E \to Ex_0 \in \mathring{E}$ quindi ho dimostrato che $E \subset \mathbb{E}$ e quindi $E = \mathring{E}$. In questo caso tutti i punti di E sono punti interni ad E (il viceversa è sempre vero).
- $\delta E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 = 0\}$ questo è vero perché qualsiasi punto i prenda fra i punti di frontiera andrò ad intersecare sia E che il suo complementare.
- A questo punto l'insieme dei punti esterni $= A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 < 0\}$. Per verificare di chiediamo se i punti esterni $\in E^c$, voglio dimostrare che se $A \subset$ punti esterni allora $(x_1, x_2) \in A$, $x_2 < 0 \to$ scelgo $r < \frac{|x_2|}{2}$, quindi $B_r(x_1, x_2) \subset E^c$ ed allora ho dimostrato che (x_1, x_2) è punto esterno.

Esempio 16.4.2. Prendo $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. L'esercizio consiste nel calcolare $\mathring{E}$, δE e l'insieme dei punti esterni di E.

16.5 Punto di accumulazione



Definizione 16.5.1 (Punto di accumulazione)**.**

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice **punto di accumulazione** per E se ogni palla di centro x esiste un punto di E diverso da x. Questo è vero se e solo se $\forall r > 0, B_r(x) \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Osservazione 16.5.1. Osserviamo che se un punto è interno $\implies$ è punto di accumulazione.

Definizione 16.5.2 (Punto isolato)**.** *Se un punto di E non di accumulazione per E allora si dice **punto isolato**.*

Definizione 16.5.3 (Insieme aperto e chiuso)**.** *Possiamo definire dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ che*

- *Questo insieme si dice **aperto** se ogni $x \in E$ è punto interno ad E cioè $E = \mathring{E}$.*
- *Questo insieme si dice **chiuso** se E^c è aperto.*

Esempio 16.5.1. Alcuni esempi di insiemi aperti e chiusi.

- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 > 0\}$ è aperto.
- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0\}$ è chiuso.

Teorema 16.5.1. Se E contiene tutto $\delta E \iff E$ è chiuso. Quindi diciamo che $\delta E \subset E \implies E$ chiuso.

Esempio 16.5.2. Qualche altro esempio.

- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ è aperto. La frontiera è $\gamma E = \{(x_1, x_2) \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.
- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0\}$, $2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$ è una retta quindi $E = \gamma E$ ed è chiuso.

16.6 Proprietà insiemi aperti e chiusi

Alcune proprietà degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$:

- Sia $\emptyset$ che $\mathbb{R}^n$ sono considerati insiemi aperti.
- L'unione (anche numerabile) è aperta. Quindi se prendo $E_1, ..., E_n, ...$ aperti $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$ è aperta.
- L'intersezione (finita) di insiemi aperti è un insieme aperto.

Alcune proprietà degli insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$:

- Sia $\emptyset$ che $\mathbb{R}^n$ sono considerati anche chiusi.
- L'unione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso.
- L'intersezione (anche numerabile) di un insiemi chiusi è chiusa.

16.7 Insieme limitato

Definizione 16.7.1 (Insieme limitato)**.** *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **limitato** se esiste un palla di centro l'origine che contiene tutto E. Ovvero se $\exists r > 0$ tale che $E \subset B_r(0)$.*

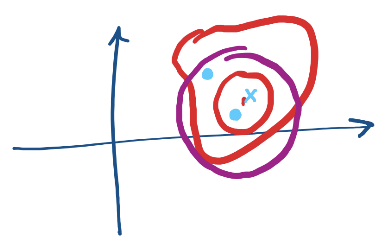
Esempio 16.7.1. Ad esempio se prendiamo un quadrato $\subseteq \mathbb{R}^2$ è limitato. Mentre invece una retta $\subseteq \mathbb{R}^2$ non è limitata.

Definizione 16.7.2 (Intorno)**.** *Un intorno di raggio r sferico di ∞ (o la palla di centro ∞ e raggio r) è il complementare della palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ con centro l'origine e raggio r.*

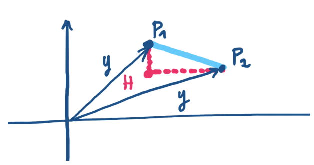
Esempio 16.7.2. Prendiamo per esempio $\mathbb{R}^2$, si ha $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x,y) < r\}$.
Se prendo invece centro $x = \infty$, si ha $B_r(\infty) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}$.
$\forall \overline{B_r(0)}$ trovo un intorno sferico di ∞ definito come $\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$.

Osservazione 16.7.1. Avendo introdotto $\mathbb{R}^n$ e ricordando la definizione di punto di accumulazione cioè $E \subseteq \mathbb{R}^n$, x si dice di accumulazione per E se in ogni palla di centro x esiste un punto E diverso da x. Un insieme non è limitato se e solo se ∞ è punto di accumulazione.

Questo perché ∞ è punto di accumulazione $\iff$ comunque grande io prenda la palla di centro 0 quando vado a prendere il suo complementare continuo a trovare punti che si intersecano con E. Vuol dire che E non può essere chiuso in una palla di centro 0.

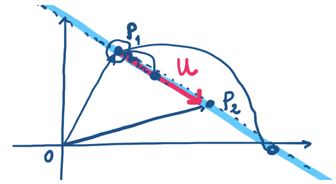


16.8 Oggetti su un piano $\mathbb{R}^2$



Ricordiamo ora che se prendiamo un piano $\mathbb{R}^2$, e due vettori $P_1 = x = (x_1, x_2)$, $P_2 = y = (y_1, y_2)$, la distanza $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, e questo viene dal teorema di Pitagora dove $(P_1P_2)^2 = (P_1H)^2 + (P_2H)^2$.

16.8.1 Retta per 2 punti



Prendiamo un piano con $P_1 = (x_1, y_1) = v$, $P_2 = (x_2, y_2) = w$. Noi vogliamo scrivere l'equazione di una retta che passa per due punti del piano. Per descrivere questa retta chiamiamo $u = w - v$, la retta è l'insieme dei punti che ottengo partendo da P_1 e spostandomi in direzioni di u. Analiticamente:

$$Retta = \{P_{t \in \mathbb{R}} = v + tu\} \text{ dove t è un paramento} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_y \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_y \end{pmatrix} \right\}$$

Questa forma in cui ho descritto la retta si chiama **forma parametrica** della retta passante per P_1 e P_2, perché usiamo un parametrica p. Da qui possiamo scrivere la forma cartesiana:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} = \begin{cases} t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Questa ultima forma senza t si chiama appunto **forma cartesiana** della retta passante per P_1 e P_2.

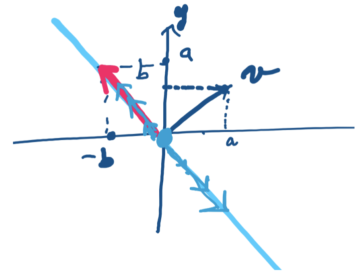
$$x - x_1 = \frac{(y - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = y\frac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$$

$$x - y\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} + \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} - x_1 = 0 \to ax + by + c = 0 \quad \text{almeno uno tra a e b deve} \neq 0$$

Osservazione 16.8.1. Nella forma $ax + by + c = 0$ due equazioni rappresentato la setta retta $\iff$ sono l'una multipla dell'altra.

16.8.2 Retta perpendicolare a v passante per l'origine

Quindi siamo sempre nel piano ed abbiamo un vettore $v = (a, b)$, (in questo caso al posto di x_1, x_2 uso a,b). Individuo il vettore $w \perp v$ passante per l'origine e descrivo $r : \{P = t \cdot w, t \in \mathbb{R}\}$.



Per trovare w partiamo dal fatto che abbiamo visto che $v \perp w \iff < v, w >= 0$ se do' a w due componenti $w = (w_1, w_2)$ sto cercando w_1 e w_2 tali che $w \perp v$, a questo punto posso imporre la condizione $< (a, b), (w_1, w_2) >= 0$ che è $a \cdot w_1 + b \cdot w_2 = 0$, mi accorgo che posso scegliere $w_1 = -b$ e $w_2 = a$ ed in questo modo ho $< v, w >= a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$ quindi ricapitolando w è determinato da v ed è $w = (-b, a)$ tale che $w \perp v$ (anche $-w = (a, -b) \perp v$) quindi adesso:

$$r = \{P = t \cdot w \; = \{\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\}$$

Questa è detta forma parametrica perché abbiamo appunto un parametro t. Da questa forma possiamo ricavare la forma cartesiana.

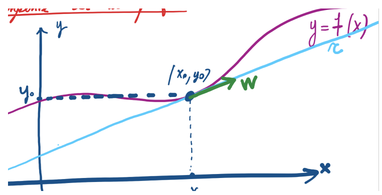
$$\begin{cases} x = -tb \\ y = ta \end{cases} = \begin{cases} t = \frac{y}{a} \\ y = -\frac{y}{a} \cdot b \end{cases} = ax + by = 0$$

Osservazione 16.8.2. Vediamo una serie di osservazioni.

1. $ab + by = 0$ è una forma cartesiana della retta passante per l'origine $\iff c = 0$, $e \perp a$, $v = (a, b)$.
2. Data una retta $ax + by + c = 0 \to v = (a, b)$ è $\perp r$.

16.8.3 Retta tangente ad un grafico

Siamo sempre in $\mathbb{R}^2$ e supponiamo di avere una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, derivabile e con derivate continue in tutto $\mathbb{R}$.



Il suo grafico $graf(f) \subset \mathbb{R}^2$. dato un $x_0 \in \mathbb{R}$ chiamo $y_0 = f(x_0)$ possiamo fare lo sviluppo di Taylor di f in x_0 di primo ordine, l'obbiettivo qui è scrivere l'equazione della retta che passa per x_0, y_0 tangente a f. Lo sviluppo è: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.

Sappiamo che $y = f(x)$ ci da il grafico di f, quindi ci chiediamo $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ che grafico sia. Possiamo vedere che:

1. Come prima cosa si tratta di una retta perché $f'(x_0)x + y - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 0$.
2. Poi osservo che questa retta passa per (x_0, y_0), perché se sostituisco $x = x_0$ ho $y = f(x_0) = y_0$ che sta sul grafico di f.
3. Inoltre grazie allo sviluppo di Taylor posso concludere che la differenza fra i due grafici $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$.

Date tutte queste considerazioni possono concludere che $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la retta tangente al grafico $y = f(x)$ in (x_0, y_0). Proviamo ora a riscriverla nella forma $ax + by + c = 0$.

$$y - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \to y - f(x_0) f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 = 0 \to -f'(x_0)x + y + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$$

Questa è la forma cartesiana della retta r dove $a = -f'(x_0)$ e $b = 1$.
$v = (a, b) = (-f'(x_0), 1)$ è perpendicolare a r $\implies w = (1, f'(x_0))$ è vettore tangente ad r tale che $< v, w >= 0$. Abbiamo quindi il vettore $w = (1, f'(x_0)$ che è tangente alla retta, posso allora dimostrare che questa retta è tangente. Prima di tutto sappiamo che la retta tange al grafico di $f(x)$ in (x_0, y_0) per definizione è la retta passante per il punto (x_0, y_0) che ha coefficiente angolare $= f'(x_0)$. La retta r di equazione $y - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$ che ha come vettore tangente w ha come coefficiente angolare $f'(x_0)$. Ora metto insieme tutte le informazione:

- La retta r passa per (x_0, y_0).
- La retta r ha come coefficiente angolare $f'(x_0)$

Quindi possiamo vedere che r è la retta tangente a $y = f(x)$ nel punto (x_0, y_0). Possiamo riscriverla nella seguente forma cartesiana:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Mentre la forma parametrica è la seguente.

$$r : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \right\}$$

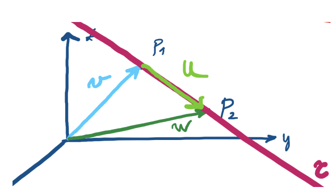
In $\mathbb{R}^2$ una retta è descritta da una sola equazione perché in $\mathbb{R}^2$ ho due gradi di liberta che sono le due variabili mentre su una retta posso solo muovermi sulla retta.

16.9 Spazio cartesiano in $\mathbb{R}^3$

Nel caso ci trovassimo in un $\mathbb{R}^3$ abbiamo un vettore scritto come $v = (x_1, y_1, z_1)$. $\mathbb{R}^3$ ha 3 gradi di liberà (x,y,z) mentre la retta ha 1 grado di libertà quindi ci aspettiamo che per descrivere una retta in uno spazio sarà descritta in 2 equazioni perché dai 3 gradi ne devo vincolare 2.

16.9.1 Retta passante per due punti

Una retta passante per 2 punti in $\mathbb{R}^3$ possiamo prendere due punti con i vettori associati $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2) = w$, noi vogliamo scrivere l'equazione della retta che passa per P_1, P_2.



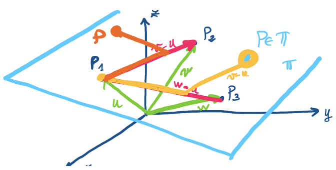
Chiamiamo $u = w - v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, ottengo la forma parametrica di r scrivendo r come:

$$r = \{P = v + tu \ : \ t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

La forma cartesiana di r invece la possiamo scrivere ricavando il paramento:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} = \begin{cases} t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ t = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \end{cases}$$

16.9.2 Piano in $\mathbb{R}^3$ passante per 3 punti



La prima cosa è scrivere l'equazione su $\mathbb{R}^3$ passante per 3 punti. Prendo innanzitutto 3 punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2 z_2), P_3 = (x_3 y_3, z_3)$. Vediamo poi che in un piano ci sono 3 gradi di libertà, mentre nello spazio abbiamo 3 gradi di liberà, quindi ci aspettiamo 1 equazione lineare per definire un piano dello spazio.

Chiamiamo i vettori per i 3 punti $u = P_1, v = P_1, w = P_3$. Poi definiamo il piano per questi 3 punti che chiamiamo π, scriviamo poi:
$P_2 - P_1 = v - u = (x_1 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $\quad P_3 - P_1 = w - u = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$
La forma parametrica di π può essere scritta come:

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1 + t(v-u) + s(w-v) : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se passo alla forma cartesiana vedo che l'equazione lineare che ottengo è una sola.

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - x_1) + s(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t + s\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t + s\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \\ \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t + s\frac{(z_3 - z_1)}{z_2 - z_1} \end{cases} = 1°\text{eq - } 2°\text{eq} =$$

$$= \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = s\left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}\right) \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = s\left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) \end{cases} = \begin{cases} s = \frac{\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right)}{\left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}\right)} \\ s = \frac{\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)}{\left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)} \end{cases} = \frac{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}{\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}} = \frac{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{z - z_1}{z_2 - z_2}}{\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Questa è 1 equazione linerare che è l'equazione cartesiana di π piano passante per P_1, P_2, P_3.

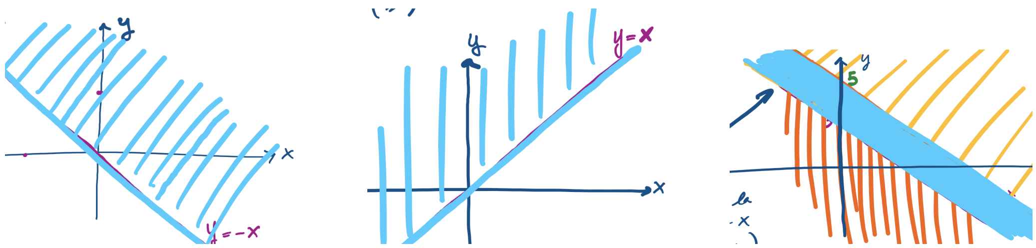
16.10 Disegno di insiemi nel piano

Il primo obbiettivo e dunque quello di disegnare insiemi di $\mathbb{R}^2$ descritti da equazioni e o disequazioni. Per farlo vediamo alcuni esempi per vedere come visualizzare nel piano.

Esempio 16.10.1. Prendiamo $x, y \in \mathbb{R}$, e disegnammo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x + y) \geq 10\}$. Sappiamo che $x + y \geq 0 \iff y \geq -x$ e questa è una retta della forma $y + y = 0$ ma noi prendiamo solo i punti sopra visto che usiamo un maggiore uguale.

Esempio 16.10.2. Disegnammo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - y \leq 0\}$, quindi abbiamo $y = x$ e visto che abbiamo il minore uguale prendiamo tutti i punti sotto.

Esempio 16.10.3. Ora prendiamo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 3 \leq x+y \leq 5\}$, in questo caso però ci sono due condizioni che devono essere verificate contemporaneamente quindi mettiamo tutto come un sistema:
$$\begin{cases} x+y \geq 3 \\ x+y \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} y \geq 3-x & \text{Si in individua una retta della forma } y = 3-x \\ y \leq 5-x & \text{Si in individua una retta della forma } y = 5-x \end{cases}$$
Disegniamo queste due rette e poi prendiamo i punti compresi fra entrambe. La soluzione è dunque l'intersezione fra i due insiemi.



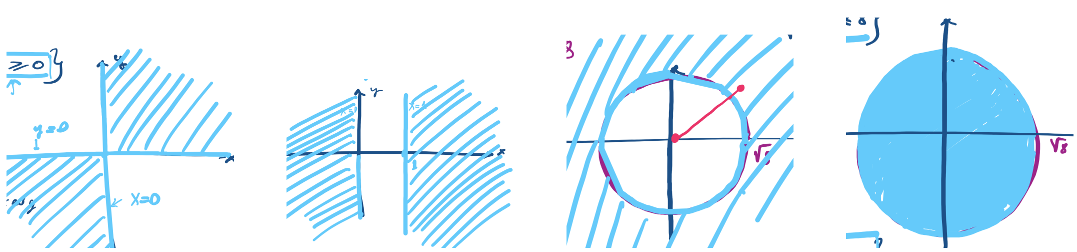
(a) Esempio 16.10.1 (b) Esempio 16.10.2 (c) Esempio 16.10.3

Esempio 16.10.4. Consideriamo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \cdot y \geq 0\}$ affinché il prodotto di x, y si maggiore e uguale di zero dobbiamo vedere i due casi mettendoli a sistema:
$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ Infatti affinché $x \cdot y \geq 0$ x ed y devono essere concordi. Quindi prendiamo le parti del piano che soddisfano la proprietà di avere x ed y concordi.

Esempio 16.10.5. Dato $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 - x \geq 0\}$. Sappiamo che $x^2 - x \geq 0$ è uguale a $x(x-0) \geq 0$ e questa equazione perché sia maggiore o uguale a 0: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ quindi $x \geq 0$ o $x \leq 0$.

Esempio 16.10.6. Consideriamo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \geq 8\}$. Se abbiamo un punto (x,y) e consideriamo $x^2 + y^2$ sappiamo che $d((x,y),(0,0)) = |(x+y) - (0,0)| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Quindi abbiamo che se $x^2 + y?^2 \geq 8 \iff$ distanza di (x,y) dall'origine maggiore o uguale a $\sqrt{8}$.

Esempio 16.10.7. In modo analogo all'esempio prima se consideriamo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 8\}$ abbiamo tutti i punti interni alla circonferenza con la circonferenza inclusa.



(a) Esempio 16.10.4 (b) Esempio 16.10.5 (c) Esempio 16.10.6 (d) Esempio 16.10.7

Esempio 16.10.8. Consideriamo l'insieme dei punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{\nvDash} \; : \; y \leq x^2 - x\}$. Sappiamo che $y = x^2 - x$ descrive una parabola con concavità verso l'alto e toccando l'asse x in 0 e 1. Questa equazione individua tutti i punti che stanno sotto la parabola inclusa appunto la parabola.

Esempio 16.10.9. Se andassi a considerare invece $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{\nvDash} \; : \; x^2 - x \leq y \leq 0\}$ come nell'esempio di prima si crea un parabola concava verso l'alto ma in questo caso dobbiamo mettere a sistema due condizioni:
$$\begin{cases} y \geq x^2 - x & \text{sopra la parabola} \\ y \leq 0 & \text{sotto l'asse x} \end{cases}$$

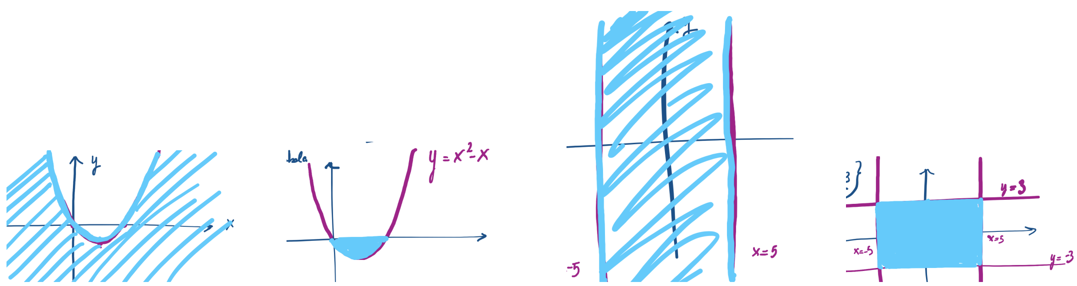
Esempio 16.10.10. Se andiamo a considerare $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 5\}$. Abbiamo che, essendo un valore assoluto, $-5 \leq x \leq 5$. Quindi andiamo a considerare che abbiamo la parte compreso fra le rette $x = -5$ e $x = 5$ comprese.
Mq in generale $\{|x| \leq A\}$ con A un generico numero, ha come soluzioni:

- Insieme vuoto se $A < 0$.
- Abbiamo poi $x = 0$ se $A = 0$.
- Ed in fine $-A \leq x \leq A$ se $A > 0$

Analogamente la disequazione $|x| \geq A$ (con $x \in \mathbb{R}$, i valore assoluto) ha come soluzioni:

- Tutto $\mathbb{R}$ se $A \leq 0$.
- Invece abbiamo $x \leq -A$ e $x \geq A$ se $A > 0$.

Esempio 16.10.11. Se ci troviamo allora a descrivere $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 5, |y| \leq 3\}$. Siccome sono nel caso in cui abbiamo due numeri positivi abbiamo:
Primo caso $|x| \leq 5 \iff -5 \leq x \leq 5$ e nel secondo caso $|y| \leq 3 \iff -3 \leq y \leq 3$, quindi combinando tutti questi casti risulta un area specifica.



(a) Esempio 16.10.4 (b) Esempio 16.10.5 (c) Esempio 16.10.6 (d) Esempio 16.10.7

16.11 Curva nel piano e nello spazio

Noi conosciamo come disegnare parabole, iperbole rette ma volgiamo poter definire anche un oggetto più generico.

Definizione 16.11.1 (Curva nel piano)**.** *Una **curva nel piano** è una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ con $I \subseteq \mathbb{R}$.*

Per noi possiamo avere sia $I = (a, b)$ intervallo aperto che $I = [a, b]$ intervallo chiuso. Se $I = [a, b]$ quindi intervallo chiuso allora possiamo definire una curva chiusa.

Definizione 16.11.2 (Curva chiusa)**.** *Dato un $I = [a, b]$, una $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ si dice **curva chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (per farlo sostituisco gli estremi nella funzione γ).*

Note 16.11.1. Notare che la funzione che abbiamo a valori in $\mathbb{R}^2$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, indico utilizzando la seguente notazioni, chiamo $t \in I$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

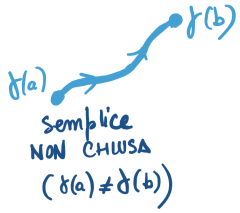
Esempio 16.11.1. $\gamma(t) = (t^2+1, 3t-2)$, con $t \in [0, 3]$ è una curva che ha come intervallo $[a,]b = [0, 3]$ e le componenti sono $x(t) = t^2 + 1, y(t) = 3t - 2$ che sono due funzioni in t. Per ogni punto $t \subseteq [0, 3]$ la curva γ. individua un punto del piano. Per esempio $t = 0 \to \gamma(0) = (1, -2)$ mentre $t = 3 \to \gamma(3) = (10, 7)$.

Con una curva sto rappresentano un punto che si muove nel piano, perché il paramento t lo posso interpretarlo come tempo quindi $\gamma(t)$ mi dice in che punto si trova la mia curva al tempo t.

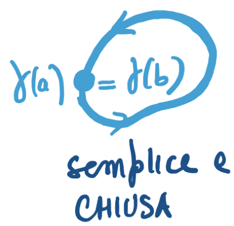
Definizione 16.11.3 (Curva nello spazio)**.** *Una **curva nello spazio** posso definirla come una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ con $I \subset \mathbb{R}$*

Esempio 16.11.2. Se prendiamo $\gamma(t) = (t^2, \sin t, e^t)$, $t \in [-1, 1]$ è un curva nello spazio. Vediamo che questa funzione prende 3 variabili che saranno 3 funzioni, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $x : I \to \mathbb{R}, y : I \to \mathbb{R}, <: I \to \mathbb{R}$.

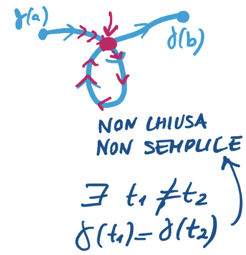
Definizione 16.11.4 (Curva semplice)**.** *Una curva si dice **semplice** se "non ritorna mai su se stessa" (tranne al massimo $\gamma(a) = \gamma(b)$ cioè agli estremi può tornare su se stessa ma non in altri punti).*



(a) Esempio 16.10.4



(b) Esempio 16.10.5



(c) Esempio 16.10.6

(d) Esempio 16.10.7

Definizione 16.11.5 (Sostegno di una curva)**.** *Si dice **sostegno** di una curva l'immagine della curva stessa, cioè la traiettoria percorsa dal punto.*

Per esempio possiamo avere $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, l'immagine $\gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^2$, ci darà quini un sottoinsieme. Se poi t lo consideriamo come il tempo allora $\gamma(t)$ punto in $\mathbb{R}^2$ dove si trova la curva al punto t.

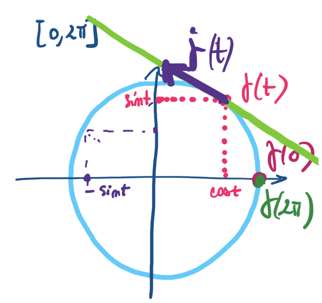
Definizione 16.11.6 (Vettore tangente alla curva)**.** *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^2$) con I intervallo $\subset \mathbb{R}$. Si dice **vettore tangente** alla curva il vettore $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, assumendo che $x'(t), y'(t)$ esistano.*

Osservazione 16.11.1. $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, abbiamo che $x'(t), y'(t)$ le sappiamo calcolare, quindi possiamo definire il vettore tangente.

Definizione 16.11.7 (Retta tangente ad una curva)**.** *La **retta tangente** ad una curva in un punto è la retta che passa per quel punto ed ha come direzione il vettore tangente alla curva in quel punto stesso.*

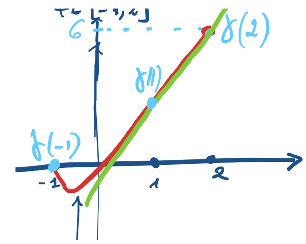
Esempio 16.11.3. Prendiamo la curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$con $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin(t)$.

Se facciamo $x^2(t) + y^2(t) = \cos t^2 + \sin t^2 = 1 \forall\, t \in [0, 2\pi]$ e quindi $x^2(t) + y^2(t) = 1$. Il sostegno di γ è la circonferenza (di $\mathbb{R}^2$) di equazioni $x^2 + y^2 = 1$ perché $\forall\, t \in [0, 2\pi] \gamma(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
Il vettore tangente invece sarà $\mathring{E}(t) = (\mathring{x}(t), \mathring{y}(t)) = (-\sin t, \cos t)$, se per esempio guardiamo il punto iniziale $\gamma(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ con $\gamma : [0, 2\pi]$, mente se prendo il punto finale della traiettoria $\gamma(2\pi) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$ e quindi ho $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ e quindi ho una curva chiusa.
La retta tangente nel punto t a $\gamma(t)$ la scrivo come: $r : \gamma(t) + s\mathring{\gamma}(t)$ che è la forma parametrica.



Esempio 16.11.4. Prendiamo la curva $\gamma(t) = (t, t^2 + t)$ con $t \in [-1, 2]$, abbiamo dunque che $x(t) = t$ e $y(t) = t^2 + t$. La curva percorre il tratto della parabole $y = x^2 + x$ però con $x \in [-1, 2]$.

Se prendiamo per esempio $\gamma(-1) = (1, 0)$, mentre $\gamma(2) = (2, 6)$. Proviamo a calcolare la retta tangente nel punto corrispondente a $t = 1$, $\gamma(1) = (1, 2)$ e $\gamma'(t) = (1, 2t + 1)$ quindi $\gamma'(1) = (1, 3)$, la retta tangente nel punto $\gamma(1) =$ la retta che passa per $\gamma(1) = (1, 2)$ con direzione (1,3), al forma parametrica e dunque $(1, 2) + s(1, 3)$ con $s \in \mathbb{R}$. Vediamo che la curva è semplice ma non è chiusa.



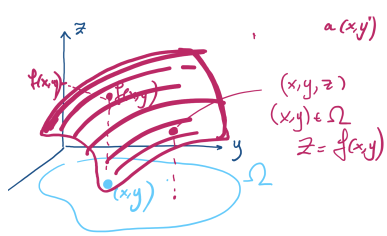
16.12 Funzioni di più variabili

Fin ora abbiamo visto funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Mentre nell'analisi in più variabili avremo funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o più genericamente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, queste funzioni posso anche essere $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione 16.12.1 (Funzione, dominio, codominio)**.** *Una* ***funzione*** *è una terna di oggetti che chiamiamo Ω, B, f dove Ω, B sono insieme e dove:*

- *Ω si dice* ***dominio****, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.*
- *B si dice* ***codominio****, $B \subseteq \mathbb{R}$.*
- *f è una legge che lega gli elementi di Ω a quelli di B. $f : \Omega \to B$ mette in corrispondenza ogni elemento di Ω con un solo elemento di B.*

Esempio 16.12.1. Una funzione in più variabili si può presentare come $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y + xy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ oppure come $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e quindi nella forma $f(x, y, z) = x + y$ con $z \in \mathbb{R}$.



Ricordiamo che nell'analisi finora se $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ chiamavamo il grafico di $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$ quindi abbiamo una linea nel piano $\mathbb{R}^2$. Nell'analisi in 2 variabili abbiamo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in questo caso per definire il grafico di $f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$.

Quindi il **grafico di f** è una superficie nello spazio dove $(x, y) \in \omega$ sa nel piano xy mentre $z = f(x, y)$ è la quota (altezza) del punto della superficie che sta sopra a (x, y).

Osservazione 16.12.1. Il dominio di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è uguale al il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dove è definita (ha senso scriverla) la funzione.

Possiamo anche prendere una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ il grafico può essere generalizzato come $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, y = f(x)\}$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore mentre $y \in \mathbb{R}$ è un numero.

16.13 Insiemi di livello

Per rappresentare meglio funzioni in n variabili si introduce il concetto di insiemi di livello (che nel caso di $n = 2$ si dicono linee di livello).

Definizione 16.13.1. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e dato $\lambda \in \mathbb{R}$ (pensato come quota)* ***l'insieme di livello*** *corrispondente a λ è il seguente insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \lambda\}$, è l'insieme quindi dei punti in $\mathbb{R}^2$ tale che la quota di f in questi punti è uguale a λ*

Possiamo vedere che $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \lambda\}$ (che viene chiamato anche insieme di livello λ per f) è un sottoinsieme dello spazio di partenza tale che in questo sottoinsieme la funzione vale sempre λ.

Esempio 16.13.1. Prendiamo un $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, quindi con $(x, y) \to x^2 + y^2$ (quadrato della distanza di (x, y) dall'origine). Gli insiemi di livello per questa funzione sono $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \lambda\}$ per trovare questo insieme devo intersecare il grafico di f con il pinao $z = \lambda$ e poi proietto sul piano xy.

- Se $\lambda < 0 \to \emptyset$.
- Se $\lambda = 0 \to (0,0)$.
- Se $\lambda > 0 \to$ trovo la circonferenza con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$.

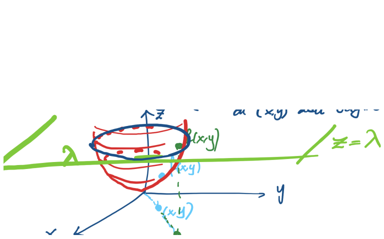
Se scegliesti $\lambda = 1$ allora $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ avrei la circonferenza di raggio 1, mentre se scelgo $\lambda = 2$ allora $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x^2 + y^2 = 2\}$ avrei la circonferenza di raggio 2 in entrambi i casi con centro in $(0,0)$, questi sono quindi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.
L'insieme di livello $\lambda = \{$ punti di $\mathbb{R}^{\nvDash}$ tali che in questi punti la funzione vale $\lambda\}$.

Esempio 16.13.2. Prendiamo $f(x,y) = x \cdot y$. dato $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello λ abbiamo che gli insiemi di livello sono $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = \lambda\} \subseteq \mathbb{R}^2$, vediamo dunque di che insieme stiamo parlando:

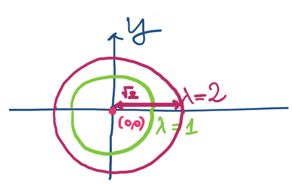
- Se $\lambda = 0 \ : \ xy = 0$ questi punti sono quelli che stanno sugli assi ($x = 0$ o $y = 0$) allora $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = \lambda\}$ =asse y $\cup$ asse x.
- Se $\lambda > 0$ vuol dire che stiamo guardando $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = \lambda\}$ con $y = \frac{\lambda}{x}$ e con λ numero positivo, queste curve sono iperbole equilatere che sono nel 1° e nel 3° quadrante.
- Se $\lambda < 0$ abbiamo sempre $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = \lambda\}$ ma questa volta con $y = \frac{\lambda}{x}$ con $\lambda < 0$ quindi saranno iperbole nel 2° e 3° quadrante.

Esempio 16.13.3. Prendiamo $f(x,y) = |x+y|$. Gli insiemi di livello di λ con $\lambda \in \mathbb{R}$ in questo caso saranno $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = \lambda\} \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x+y| = \lambda\}$.

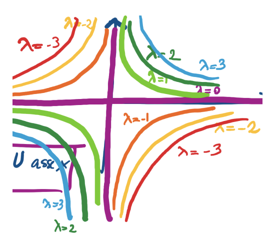
- Se $\lambda < 0$ allora il valore assoluto non può essere mai uguale a λ perché il valore assoluto e sempre positivo quindi $\to \emptyset$.
- Se $\lambda = 0$ sto guardando $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x+y| = 0\}$ e questo è vero se $x + y = 0 \iff y = -x$ quindi abbiamo la bisettrice del 2° e 4° quadrante.
- Se invece prendo $\lambda > 0$ sto cercando $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x+y| = \lambda\}$ ed in questo caso ci sono due possibilità, se $x + y > 0 \to y = \lambda - x$ mentre se $x + y < 0 \to -y = -\lambda - x$, quindi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x+y| = \lambda\}$ con $\lambda > 0$ sarà $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda - x, y > -x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x - \lambda, y < -x\}$. Dunque se per esempio $\lambda = 1 \to y = 1 - x$ e $y = -1 - x$ quindi ho l'unione di 2 rette.



(a) Esempio 16.13.1



(b) Esempio 16.13.2



(c) Esempio 16.13.3