6 Calcolo combinatorio

6.1 Cardinalità insiemi

Il calcolo combinatorio serve per dare delle risposte a domande come: quanti sono? In quanti modi? Quante possibili combinazioni? Per questa forma di calcolo si fa molto utilizzo del concetto di cardinalità di un insieme.

Definizione 6.1 (Cardinalità)**.** *La* ***cardinalità*** *di un insieme (finito) A è il numero dei suoi elementi e si indica con $|A|$.*

Esempio 6.1.1. $|\{a, e, i, o, u\}| = |\{i, i, i, o, u, e, a, a\}| = 5$ (Le ripetizioni non si contano)
$|\emptyset| = 0$ $\quad |n| = |\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| = n$ $\quad |2| = |\{0, 1\}| = 2$

Lemma 6.1.1 (Lemma-x)**.** *Dato un insieme A, sia $P = \{A_i\}_{i \in I}$ una partizione di A quindi:*

- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$ *(Punto (2) della definizione di partizione)*
- $\forall i, j \in I. i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ *(Punto (3) della definizione di partizione)*

Allora vale che $|A| = \sum\limits_{i \in I} |A_i|$.

Note 6.1.1. *Notare che nella proposizione sopra non è necessario che valga la condizione (1) di una partizione quindi che ($\forall i \in I. A_i \neq \emptyset$), e ciò perché se consideriamo una partizione vuota essa non andrà ad influire sulla somma delle cardinalità avendo valore 0.*

Dimostrazione 6.1.1. Per dimostrare questa proposizione supponiamo che $|A| \neq \sum\limits_{i \in I} |A_i|$, quindi $|A|$ sarà o maggiore o minore della sommatoria delle sue partizioni:

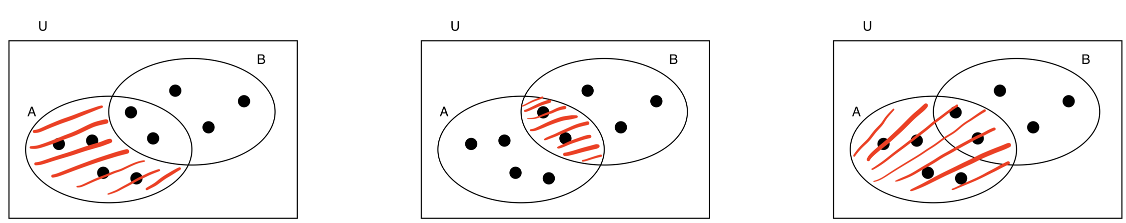
- $|A| > \sum\limits_{i \in I} |A_i|$: questo caso contraddice il secondo punto della definizione di partizioni infatti fosse vero questo caso dovrebbe esistere un $a \in A$ che però $a \notin \forall i\ A_i$
- $|A| < \sum\limits_{i \in I} |A_i|$: questa casistica invece contraddice il terzo punto delle partizioni, infatti per far si che la cardinalità di A sia inferiore alla somma delle cardinalità delle partizioni dovrebbe esistere un $a \in A$ che contiamo due volte (ed è quindi presente in due partizioni distinte) ma questo farebbe si che $\exists A_i \neq A_j$ dove $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. ■

6.1.1 Cardinalità di operazioni su insiemi

Proposizione 6.1.1. *Per tutti gli insiemi A e B valgono i seguenti fatti:*

1. $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$
2. $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$

Dimostrazione 6.1.2. Dimostrazione con i diagrammi di eulero-vann della proprietà (1).



(a) (b) (c)

Figure 31: In (a) $|A \setminus B|$, in (b) $|A \cap B|$, in (c) la somma di (a) e (b) uguale a $|A|$

Corollario 6.1.1. *Per tutti gli insiemi A e b valgono i seguenti fatti:*

1. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
3. $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ *e sono uguali* $\iff$ *A e B sono disgiunti (lemma 6.1.1)*
4. *Se* $B \subseteq A$ *allora* $|B| \leq |A|$

6.1.2 Principio di inclusione-esclusione

La cardinalità dell'unione fra due insiemi si può definire come:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Questa formula può essere generalizzata a a 3 insiemi, essa si scrive come:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Dimostrazione 6.1.3. Scriviamo $|A \cup B \cup C|$ come $|(A \cup B) \cup C|$ e prendiamo $(A \cup B)$ come fosse un unico insieme ed applichiamo la formula base.

- $|(A \cup B) \cup C| = |(A \cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$ (Ri-applichiamo la formula base su $(A \cup B)$).
- $= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$ (Scriviamo $|(A \cup B) \cap C|$ usando le proprietà degli insiemi).
- $= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$ (Usiamo lo stesso ragionamento iniziale su $|(A \cap C) \cup (B \cap C)|$).
- $= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) + (B \cap C)| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|$ (Riscriviamo $(A \cap C) \cap (B \cap C)$).
- $= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) + (B \cap C)| - |A \cap B \cap C|$ ■

Possiamo generalizzare ulteriormente questa formulala estendendola su n insiemi .

Definizione 6.2 (Principio di inclusione-esclusione)**.** *Presi r insiemi $S_1, S_2, ..., S_r$, abbiamo la seguente uguaglianza, dove $(-1)^i$ vale 1 se i è un numero pari e vale -1 se i è dispari:*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{r} S_j\right| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,r\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} S_i\right| \tag{34}$$

Questa formula spiegata a parole più semplici dice che:

- Per ogni possibile sottoinsieme non vuoti $I \subseteq \{1, 2, ..., r\}$ consideriamo tutti gli insiemi S_i tali che $i \in I$, e calcoliamo la cardinalità n_i della loro intersezione.
- Sommiamo tutti i valori n_I così calcolati per cui la cardinalità di I è un numero dispari, e sottraiamo tutti i valori n_I per cui la cardinalità di I è un numero pari.

Esempio 6.1.2. Facciamo un esempio vedendo come si va a ricreare la stessa formula vista in precedenza con il caso $|A \cup B \cup C|$. Prendiamo come $I \subseteq \{1, 2, 3\}$ prima $I = \{1\}$ poi $I = \{2\}$ e poi $I = \{3\}$ essi fanno si che $(-1)^{|I|+1} = 1$ quindi abbiamo che $|A| + |B| + |C|$ (Perché $\left|\bigcap_{i \in I} S_i\right|$ con $I = \{1\}$, $I = \{2\}$, $I = \{3\}$ fa $|A|$ per il primo caso, $|B|$ per il secondo e $|C|$ per il terzo).

Continuiamo prendendo ora $I = \{1, 2\}$ poi $I = \{2, 3\}$ e poi $I = \{1, 3\}$, in questo caso $(-1)^{|I|+1} = (-1)^{2+1} = -1$ quindi aggiungiamo le intersezioni ed otteniamo $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$.

Prendiamo ora l'ultimo sottoinsieme che ci manca e cioè $I = \{1, 2, 3\}$, questo fa si che $(-1)^{|I|+1} = (-1)^{3+1} = 1$ e così otteniamo $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ che è la formula a vista in precedenza

Dal principio di inclusione-esclusione seguano come corollari il lemma 6.1.1 visto sopra, la formula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, e come visto nell'esempio anche la formula $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

6.1.3 Cardinalità del prodotto cartesiano

Proposizione 6.1.2. *Per tutti gli insiemi A,B vale che* $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Dimostrazione 6.1.4. Per dimostrare questa proposizione usiamo il lemma 6.1.1. Innanzitutto definiamo $\forall a \in A$ una partizioni $S_a = \{(a, b)|b \in A\}$ in modo che $S_a \subseteq A \times B$. Vediamo anche che $|S_a| = |B|$. Ora se verifichiamo i due punti della lemma-x per vedere se possiamo applicare il lemma.

1. $\bigcup\limits_{a \in A} S_a = A \times B$ è vera visto che S_a si forma di coppie $(a_1, b_1), (a_1, b_2)$... per tutti gli elementi di B quindi andando ad unire tutti gli S_a (cioè le varianti con tutte le $a \in A$) abbiamo $A \times B$.

2. $\forall a \neq a' S_a \cap S'_a = \emptyset$ perché se cambiamo le a avremo due insiemi completamente diversi.

Vediamo dunque che l'insieme $S = \{S_a\}_{a \in A}$ (l'insieme di sotto insiemi) è una partizione di $A \times B$. Quindi per il lemma-x abbiamo che:

$$|A \times B| = \sum_{a \in A} |S_a| = \sum_{a \in A} |B| = |A| \cdot |B|. \blacksquare$$

Proposizione 6.1.3. *Per ogni* $n \geq 1$, *per tutti gli insiemi* $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ *vale che:*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_{n-1} \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_{n-1}| \cdot |A_n|$$

Dimostrazione 6.1.5. Dimostriamo questa proprietà per induzione.

1. Caso base: prendiamo $n = 1$, quindi $|A_1| = |A_1|$ verifica quindi la proprietà. Mentre se prendiamo $n = 2$, abbiamo che $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$ che anche è dimostrata perché $|A_1| \cdot |A_n| = |A_1| \cdot |A_2|$.

2. Passo induttivo: Ora per induzione prendiamo come vera $P(n)$ e dimostriamo $P(n+1)$.
   Per dimostrare il passo induttivo ricordiamo che (a) $A \times B \times C \cong (A \times B) \times C$ e che (b) due insiemi hanno una biezione se e solo se hanno la stessa cardinalità.

   $P(n+1) = |A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times A_{n+1}|$ applicando la proprietà (a) e (b) riscritte sopra otteniamo $|(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) \times A_{n+1}|$ se poi scriviamo che $B = (A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)$ abbiamo che $|B \times A_{n+1}|$ che per caso base è uguale a $|B| \cdot |A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_{n+1}|$. Abbiamo così concluso la dimostrazione $\blacksquare$.

Esempio 6.1.3. Un esempio di cardinalità di prodotti cartesiani sono le targhe delle macchine italiane. Le targhe hanno un formato XXCCCXX dove X è l'alfabeto (esclusi I,O,Q,U) e C sono le 10 cifre decimali. Quindi $|X| = 22$ e $|C| = 10$. L'insieme delle possibili targhe di calcola dunque facendo $X \cdot X \cdot C \cdot C \cdot C \cdot X \cdot X = 22 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22 \cdot 22$.

Corollario 6.1.2. *Sia* A^n *l'insieme delle sequenze di lunghezza* n *su un inseme* A. *La sua cardinalità è* $|A^n| = |A|^n$

Esempio 6.1.4. Esempio con la sequenza di caratteri ASCII esteso, di lunghezza n: con A = 256, quindi $|A^n| = 256^n$.

Esempio 6.1.5. Esempio con sequenza binaria di lunghezza n: con $A = \{0, 1\} = 2$, abbiamo $|2^n| = 2^n$

Possiamo calcolare $|2^n|$ anche induttivamente. Sia $B(n)$ il numero di sequenze binarie di lunghezza n.

- Caso base: $B(0) = 1$, la sequenza vuota.
- Passo induttivo: Ogni sequenza binaria di lunghezza $n + 1$ + ottenuta aggiungendo 0 o 1 a una sequenza di lunghezza n, quindi: $B(n+1) = 2 \cdot B(n)$.

6.2 Relazioni e cardinalità

Proposizione 6.2.1. *Per tutti gli insiemi A, B e per tutte le relazioni $R : A \leftrightarrow B$ (quindi $R \subseteq A \times B$ e $0 \geq |R|$ ed anche $|R| \leq |A| \cdot |B|$) vale che:*

- *Se R è* ***totale*** *allora $|A| \leq |R|$.*
  Perché se è totale tutti gli elementi dell'insieme di partenza hanno almeno un collegamento con l'insimeme di arrivo, perciò in R dovranno esserci almeno $|A|$ coppie ordinate o più (una per ciascun elemento di A che indica un collegamento).
- *Se R è* ***univalente*** *allora $|R| \leq |A|$.*
  Perché sia univalente tutti gli elementi di A devono collegarsi al più con uno di B dunque al massimo ci saranno $|A|$ coppie ordinate in R e non di più (sennò ci saranno per forsa ripetizioni di elementi di A).
- *Se R è* ***surgettiva*** *allora $|B| \leq |R|$. Per surgettività discorso simili a quello del totale solo riferito agli elementi dell'insieme di arrivo.*
- *Se R è* ***iniettiva*** *allora $|R| \leq |B|$. Anche per iniettività discorso simili a quello di univalenza solo riferito all'insieme B.*

Note 6.2.1. *Nota anche che per far si che la relazione R sia una funzione $|R| = |A|$ e per far si che R sia biiezione allora $|R| = |A| \land |R| = |B|$ quindi $|A| = |B|$.*

6.2.1 Pigeonhole Principle

Se abbiamo n piccioni e li vogliamo collocare nelle m caselle di una piccionaia, se $n > m$ allora almeno una casella conterrà due piccioni. Possiamo formalizzare questo enunciato nel seguente modo.

Definizione 6.3 (Pigeonhole Principle)**.** *Dati due insiemi P e C, se $|P| > |C|$ allora non esiste nessuna relazione $R : P \leftrightarrow C$ che sia totale e iniettiva. Infatti se esistesse una tale R, per la proposizione 6.2.1 avremo $|P| \leq |R|$ (R totale) e $|R| \leq |C|$ (R iniettiva), da cui $|P| \leq |C|$ per transitività, contraddicendo l'ipotesi $|P| > |C|$.*

6.2.2 Regola di biiezione

Possiamo formalizzare quello scritto nella nota 6.2.1 riguardante la biiezione nel seguente corollario.

Corollario 6.2.1 (Regola di biiezione)**.** *Per tutti gli insiemi A,B vale che se esiste una biiezione $R : A \leftrightarrow B$ allora $|A| = |B|$.*

Proposizione 6.2.2. *Per ogni coppia di insiemi A e B vale che $|Fun(A, B)| = |B^{|A|}| = |B|^{|A|}$*

Dimostrazione 6.2.1. Per dimostrare che $|Fun(A, B)| = |B|^{|A|}$ dimostriamo che esiste una biiezione fra $|Fun(A, B)|$ e $|B|^{|A|}$.
Fun è totale e univalente, questo vuol dire che $\forall a \in A$ f assegna esattamente 1 elemento di B.
Possiamo scrivere $f : A \to B$ come $f : a_1, a_2, a_3, ..., a_{|A|}$ e $|B|^{|A|}$ come $b_1, b_2, b_3, ..., b_{|A|}$.
Vediamo così che i due insiemi contengono lo stesso numero di elementi quindi può esistere una biiezione fra i due insiemi. ■

Proposizione 6.2.3. *Per tutti gli insiemi A e per tutti i numeri naturali $n \in \mathbb{N}$ vale che; se $|A| = n$ allora $A \cong n$.*

Questa proposizione è vera perché se consideriamo n come un insieme di n elementi (esempio $2 = \{0, 1\}$) avendo A la stessa cardinalità di n (ricorda che $|n| = n$) esisterà una biiezione fra i due insiemi.

Teorema 6.2.1. *Per tutte le coppie di insiemi A e B vale che:*

$$A \cong B \text{ se e solo se } |A| = |B|$$

Dimostrazione 6.2.2. Per dimostrare il teorema, trattandosi si un se e solo se, dobbiamo dimostrare i due versi della freccia:

- $A \cong B \Longrightarrow |A| = |B|$ immediato dal corollario 6.2.1.
- $A \cong B \Longleftarrow |A| = |B|$ assumiamo che $|A| = |B| = n$. Per la proposizione 6.2.3 $A \cong n$ e $B \cong n$ quindi per le proprietà della biiezione $A \cong B$. ■

6.3 Permutazioni

Fra i classici problemi del calcolo combinatorio abbiamo il caso in cui dato un insieme di n oggetti, determinare quanti "raggruppamenti" diversi si possono avere disponendoli su k posti. Da qui si possono usare formule diverse a seconda che l'ordine abbia importanza oppure no, ci possano essere ripetizioni oppure no.

Definizione 6.4 (Permutazione)**.** *Sia A un insieme con* $|A| = n$. *Una* ***permutazione*** *di A è una sequenza ordinata di tutti gli elementi di A:* $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$.

Possiamo definire in maniera alternativa una permutazione di A come una funzione (una biiezione):

$$\pi : A \to n \text{ con } n = |A|$$

Infatti π mappa ogni elemento di A con la posizione in cui si trova nella permutazione, è biiezione perché le permutazioni non ammettono ripetizioni e perché le permutazioni prevedono tutti gli elementi.

Esempio 6.3.1. Facciamo un esempio delle possibili permutazioni di $A = \{a, b, c, d\}$, $Perm(A)$ sono:
abcd - abdc - acbd - acdb - adbc - adcb - bacd - badc - bcad - bcda - bdac - bdca - ecc...
Il loro numero si calcola con $4! = 24$.
Se prendiamo un insieme $B = \{1, 2, 3, 4\}$ o $S = \{$cuori, quadri, fiori, picche $\}$ il numero di permutazione è sempre $4! = 24$.

Note 6.3.1. *Possiamo notare dall'esempio precedente che il numero di permutazioni dipende sola dal numero di elementi. Formalmente:*

$$|A| = |B| \Longrightarrow |Perm(A)| = |Perm(B)|$$

E questo perché $Perm(A) \cong Bii(A, |A|) \cong Bii(B, |B|) \cong Perm(B)$

Proposizione 6.3.1. *Sia A un insieme di cardinalità* $n > 0$. *Allora ci sono esattamente*

$$P(n) = n!$$

La dimostrazione per induzione è uguale a quella del fattoriale.

6.3.1 Cardinalità delle biiezioni tra due insiemi

Come visto in precedenza le permutazioni possono essere viste come una biiezione, da questa considerazione possiamo dimostrare che:

$$Bii(A, B) = \begin{cases} 0 & se \ \ |A| \neq |B| \\ |A|! & se \ \ |A| = |B| \end{cases}$$

Possiamo infatti immaginare che partendo dal primo elemento di A, a_1 esso avrà $|A|$ possibili scelte nell'insieme di partenza con cui essere in biiezione, l'elemento a_2 invece ne avrà $|A|$ meno l'elemento scelto per a_1 quindi $|A| - 1$ e così per tutti gli elementi:
$a_1 \to |A|$, $a_2 \to |A| - 1$, $a_3 \to |A| - 2$, ..., $a_{|A|} \to 1$ Quindi $|Bii(A, B)| = |A| \cdot |A| - 1 \cdot ... \cdot 1 = |A|!$

6.3.2 Anagrammi e permutazioni con ripetizioni

Esempio 6.3.2. Esempio di un anagramma: CERTOSA è anagramma di COSTARE.
CERTOSA ha $7! = 5040$ possibili anagrammi.

Se prendiamo invece $ANNA$ ha 6 anagrammi:
AANN ANAN ANNA NAAN NANA NNAA
Possiamo vedere dunque ch non possiamo usare la normale formula delle permutazioni, infatti $6 \neq 4! = 24$, avendo ANNA 2 caratteri ripetuti.[26]

Proposizione 6.3.2 (Permutazioni con ripetizioni)**.** *Sia* $S = s_1, s_2, ..., s_k$ *una sequenza di elementi di un insieme* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *di cardinalità n, ogni elemento di A può comparire 0 o più volte. Inoltre per ogni* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *sia* c_i *il numero di volte che l'elemento* a_i *compare nelle sequenza S. Il numero di* ***permutazioni con ripetizioni*** *della sequenza è dato da:*

$$\frac{k!}{c_1! \cdot c_2! \cdot ... \cdot c_n!} \tag{35}$$

[26] Ricorda che una parola non è un insieme ma è una sequenza di lettere, e può quindi contenere ripetizioni

6.4 Disposizioni

Definizione 6.5 (Disposizioni)**.** *Dato un insieme finito A con* $|A| = n$ *e un intero* $k \leq n$*, una **disposizione** degli elementi d A in k posti è una sequenza ordinata* $a_1, ..., a_k$*.*

Esempio 6.4.1. Se per esempio prendiamo $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $k = 2$ (quindi 2 posti dove disporre gli elementi dell'insieme) abbiamo 20 possibili disposizioni:
ab, ae, bd, cb, da, de, ec, ac, ba, be, cd, db, ea, ed, ad, bc, ca, ce, dc, eb

Proposizione 6.4.1. *Sia A un insieme di cardinalità* $n > 0$ *e k tale che* $0 < k \leq n$*. Allora ci sono esattamente:*

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{36}$$

disposizioni degli elementi di A in k posti.

Questa formula è semplicemente ricavata da una permutazione al numeratore (che però da sola conterrebbe potenzialmente anche elementi in posizioni extra) e da le posizione da non conteggiare al denominatore.

Dimostrazione 6.4.1. Dimostriamo per induzione su k questa proprietà.

1. Caso base: Per $k = 1$ abbiamo $D(n, 1) = n = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!}$.

2. Passo induttivo: Assumiamo vero $P(k)$ e dimostriamo $P(k + 1)$. Quindi $D(n, k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ la consideriamo vera mentre noi dobbiamo dimostrare: $D(n, k + 1) = \dfrac{n!}{(n-(k+1))!}$

   $D(n, k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} \cdot (n-k) = \dfrac{n!}{(n-(k+1))!}$.

   (Perché andando ad aggiungere un posto "k+1" dovremo mantenere una posizione in più nella permutazione nel quale si sceglierà fra n-k elementi).■

6.5 Combinazioni

Definizione 6.6 (Combinazioni)**.** *Sia A un insieme di cardinalità n e sia* $k \leq n$ *un numero naturale. Una **combinazione** di k elementi di A è un k-insieme di A, cioè un sottoinsieme di A di cardinalità k. L'insieme di tutte le combinazioni di k elementi di A è quindi denotato con* $\mathcal{P}_k(A)$.

Esempio 6.5.1. Prendiamo per esempio l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$, le 10 combinazioni possibili sono: abc, abe, ace, bcd, bde, abd, acd, ade, bce, cde.

Note 6.5.1. *Nota che nelle combinazioni non ci interessa l'ordine degli elementi* $\{a, b, c\} = \{c, b, e\}$.

Definizione 6.7 (Coefficiente binomiale)**.** *Dato un insieme A di cardinalità n, il numero di combinazioni di k elementi è chiamo **coefficiente binomiale**.*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{37}$$

Per giustificare questa formula partiamo dal fatto che per disporre n elementi in k posti si deve applicare una disposizione del tipo $D(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$, essendo una disposizioni però teniamo conto della posizione degli elementi, andando così a creare più possibilità rispetto alle combinazioni dove non teniamo conto delle posizioni. Per eliminare dunque le possibilità extra andiamo a dividere per le permutazioni degli n elementi $P(n) = n!$ otteniamo dunque:

$$\tbinom{n}{k} = \tfrac{D(n,k)}{P(k)} = \tfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \tfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Dimostrazione 6.5.1. Dimostrazione per induzione del coefficiente binomiale:

1. Caso base: Definiamo due casi base.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

2. <u>Passo induttivo:</u> Prendiamo come vera l'ipotesi induttiva $P(k)$ e dimostriamo $P(k+1)$. Dobbiamo dunque dimostrare la validità della formula:

$$\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-(k+1))!}$$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)}$ (Spiegazioni della formula usata su dispense).

$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k))} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)$ (Raccogliamo le due frazioni).

$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k))} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (Risolviamo l'equazione). ■

Esempio 6.5.2. Calcoliamo le combinazioni di 3 elementi di $A = \{a, b, c, d, e\}$.
$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5!}{5!\cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$

6.6 Contare sui grafi

6.6.1 Grafi non orientati

Partiamo ponendoci una domanda. Dati i nodi $\{1, 2, ..., n\}$, quanti grafi diversi possiamo comporre? Chiamiamo G_n l'insieme di grafi con n nodi, quindi quello che cerchiamo è la sua cardinalità. Per riuscire a contare tutte le possibilità dobbiamo considerare quanti grafi possono esistere dando un numero di archi.

Esempio 6.6.1. Prendiamo $n = 3$ nodi e calcoliamo:
Quanti grafi esistono con 0 archi? Esiste 1 grafo.
Se invece vogliamo quanti grafi esistono con 1 arco questi sono 3.
Possiamo continuare vino ad il caso con 3 archi perché andando a tutti le casistiche con archi > 3 abbiamo che non esistono grafi.

Possiamo notare che nel caso di $n = 3$ nodi e 0 archi il calcolo si bassa su fare $\binom{n}{0}$ mentre per $n = 3$ e 3 archi abbiamo $\binom{n}{1}$, cosi anche per tutti i casi con numero di archi minori o uguali a n. Vediamo dunque che il modo di calcolare il numero di grafi con n nodi è:

$$|G_n| = \sum_{i\in\{0,...,m_{max}\}} \binom{m_{max}}{i} \text{ con } m_{max} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ il numero massimo di archi}$$

Esiste però un metodo alternativo per contare i grafi dati n nodi, e si passa su valutare, per ogni arco se includerlo oppure no, infatti da questo ragionamento vediamo che per ogni arco abbiamo due scelte, da qui possiamo vedere che per calcolare tutte i grafi possibili basta fare 2^m con $m = \frac{n(n-1)}{2}$.

Il conteggio di tutti i possibili sottoinsiemi di m elementi è anche noto come insieme delle parti, questo ci aiuta anche a dimostrare che:

$$\mathcal{P}(m_{max}) = \sum_{i\in\{0,...,m_{max}\}} \binom{m_{max}}{i} = 2^{m_{max}}$$

Come conseguenza possiamo notare che c'è una biezione fra $\mathcal{P}(m_{max}) \cong fun(m_{max}, 2) \cong \{0, 1\}^{m_{max}}$.
E vediamo anche due proprietà del coefficente bionomiale che vengono di conseguenza:

$$\sum_{i\in\{0,...,k\}} \binom{k}{i} = 2^k, \text{ e quindi } \forall\, k > 0, i \geq 0 \binom{k}{i} < 2^k$$

6.6.2 Grafi orientati

Per i grafi orientati possiamo usare la stessa logica, l'unica cosa è che dobbiamo contare ogni arco due volte, avendo per ogni 2 nodi due possibili archi che li collegano, e dobbiamo anche considerare i cappi; questo vuol dire che abbiamo n^2 possibili archi.

Teorema 6.6.1. *Esistono $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ grafi non orientati su n nodi, e 2^{n^2} grafi orientati su n nodi.*