6 Autovalori

Definizione 6.0.1 (Autovalori)**.** *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ($dim(V) < \infty$) e $\phi : V \to V$. $\lambda \in \mathbb{R}$ è* ***autovalore*** *di ϕ se $\exists v \neq 0$ in V tale che $\phi(V) = \lambda \cdot v$. In questo caso v è* ***autovettore*** *di ϕ (associato a λ).*

Osservazione 6.0.1. Alcune osservazioni su questa definizione:

1. v può essere autovettore per un solo λ. Infatti, se $\begin{cases} \phi(v) = \lambda_1 \cdot v \\ \phi(v) = \lambda_2 \cdot v \end{cases} \implies (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2$
2. In generale ci sono molti autovettori associati allo stesso λ

Definizione 6.0.2 (Diagonalizzabile)**.** *ϕ è* ***diagonalizzabile*** *se $\exists$ base B tale che $[\phi]_B^B$ è una matrice* ***diagonale****.*

Proposizione 6.0.1. *ϕ è diagonalizzabile se e solo se V ammette una base costituita da autovettori di ϕ.*

Esempio 6.0.1. Se $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto A \cdot v$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \phi$ non è diagonalizzabile.

Proposizione 6.0.2. *Sia λ autovalore di ϕ, v autovettori associati a λ, insieme a 0, formano un sottospazio di V.*

Proposizione 6.0.3. *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono autovettori* ***distinti*** *di ϕ ($\lambda_1 \neq \lambda_j$, $i \neq j$)*

$$\left.\begin{matrix} v_1 \text{ autovettore per } \lambda_1 \\ \vdots \\ v_r \text{ autovettore per } \lambda_r \end{matrix}\right\} \implies v_1, \ldots, v_r \text{ sono linearmente indipendenti}$$

Corollario 6.0.0.1. *Valgono i seguenti punti:*

1. *Ci sono solo un numero finito di autovalori distinti di ϕ, infatti sono $\leq dim(V)$*
2. *ϕ è* ***diagonalizzabile*** *$\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori di ϕ, $dim(V_{\lambda_1}) + \ldots + dim(V_{\lambda_r}) = dim(V)$*
3. *Se ϕ ammette $n = dim(V)$ autovalori distinti, allora ϕ è diagonalizzabile*

Definizione 6.0.3 (Polinomio caratteristico)**.** *Il polinomio caratteristico di A è:*

$$P_A(t) := det(A - t \cdot i)$$

dove λ è autovalore per $A \iff \lambda$ è radice di $P_A(t)$.

Osservazione 6.0.2. $P_A(t)$ non dipende da A_{ij} ma dipende solo da ϕ'. Infatti, se B è la matrice di ϕ rispetto ad un'altra base, sappiamo:

$$B = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

6.1 Richiami sui polinomi

Un polinomio su $\mathbb{R}[x]$ è della forma $a_n X^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ se $a_n \neq 0$, $n = deg(f)$ il grado di f. $a \in \mathbb{R}$ è radice di f se $f(a) = 0$.

Proposizione 6.1.1. *Se $f \neq 0$, a radice di $f \implies f = (x-a)g$ dove $deg(g) = deg(f) - 1$.*

Corollario 6.1.0.1. *Si può scrivere $f = (x-a)^m h$, dove $h(a) \neq 0$. m è la molteplicità della radice a.*

6.2 Molteplicità

Definizione 6.2.1. *Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare con $dim(V) = n$, A matrice di ϕ rispetto ad ua base e λ un autovalore di ϕ:*

- *La* ***molteplicità algebrica*** *di λ è la sua molteplicità come radice di $P_A(t)$*
- *La* ***molteplicità geometrica*** *di λ è la dimensione dell'autospazio V_λ di λ.*

Teorema 6.2.1. La molteplicità algebrica di λ è $\geq$ della molteplicità geometrica di λ.

Corollario 6.2.1.1. *ϕ è diagonalizzabile se e solo se la somma della molteplicità algebriche degli autovalori è un per tutti gli autovalori λ:*

$$\textit{molt. alg. } (\lambda) = \textit{ molt. geom. } (\lambda)$$

Si osserva inoltre che molt. geom. $(\lambda) \geq 1$. Quindi se molt. alg. $(\lambda) = 1 \implies$ molt. geom. $(\lambda) =$ molt. alg. $(\lambda) = 1$.