ANALISI 1 - LEZIONE 70

Note Title 01/03/2025

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Idea: uso la precedente con $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$

Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)$$
$$= f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)$$

Sostituendo ottengo

$$\int_a^b [f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)]\,dx = F(b)\,G(b) - F(a) \cdot G(a)$$

e, aggiustando i termini:

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot G(x)\,dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g(x)\,dx}$$

Formula di integrazione per parti "ufficiale"

Versione breve "abusiva" $\boxed{\int fG = FG - \int Fg}$

Utilizzo operativo: cerco di vedere la $\varphi(x)$ che devo integrare come prodotto di due funzioni

→ una f di cui so fare la primitiva F

→ una G che "derivando migliora"

Esempio 1 $\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{e^{2x}}\,dx$ (cerco la primitiva)

$$\int \underset{G}{x}\cdot \underset{f}{e^{2x}}\,dx = \underset{F}{\frac{1}{2}e^{2x}}\cdot \underset{G}{x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 1\,dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$ (fare verifica in 20 secondi)

Esempio 2 $\int x^2 \cos(3x)\,dx$

$$\int \underset{G}{x^2}\,\underset{f}{\cos(3x)}\,dx = \underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)}\cdot \underset{G}{x^2} - \int \underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)}\cdot \underset{g}{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) - \frac{2}{3}\int x\sin(3x)\,dx$$

$$\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\sin(3x)}\,dx = \underset{F}{-\frac{1}{3}\cos(3x)}\,\underset{G}{x} - \int \underset{F}{\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)}\cdot \underset{g}{1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cdot\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)$$

Conclusione:

$$\int x^2\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\sin(3x)$$

[Fare la verifica derivando]

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ In questo modo si fanno gli integrali del tipo

$$\boxed{\int p(x)\cdot e^{ax}\,dx \qquad \int p(x)\cdot \sin(ax)\,dx \qquad \int p(x)\cos(ax)\,dx}$$

con $p(x)$ polinomio (idea: usare $G = p(x)$ e f = resto)

Esempio 3 $\int \cos^2 x\, dx$

$$\int \underset{f}{\cos x}\cdot \underset{G}{\cos x}\,dx = \underset{F}{\sin x}\cdot \underset{G}{\cos x} - \int \underset{F}{\sin x}\,\underset{g}{(-\sin x)}\,dx$$

$$= \sin x\cdot\cos x + \int \sin^2 x\,dx$$

$\sin^2 = 1-\cos^2$ ↗

$$= \sin x\cdot\cos x + \int (1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \sin x\cdot\cos x + x \underbrace{- \int \cos^2 x\,dx}_{\text{grande ritorno!}}$$

Portando a sx ottengo

$$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cdot\cos x + x$$

e quindi $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x$ [Verifica!]

$\boxed{\text{Metodo alternativo}}$ Percorso da subito!

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, quindi $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ e quindi

$$\int \cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)}_{\substack{\text{uguale al precedente} \\ \text{perché } \sin(2x) = 2\sin x\cos x}}$$

Esempio 4 $\quad \int e^{2x} \cos(3x)\, dx$

$$\int \underset{f}{e^{2x}} \underset{G}{\cos(3x)}\, dx = \underset{F}{\tfrac{1}{2} e^{2x}} \cdot \underset{G}{\cos(3x)} - \int \underset{F}{\tfrac{1}{2} e^{2x}} \underset{g}{(-3 \sin(3x))}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{2} \int \underset{f}{e^{2x}} \underset{G}{\sin(3x)}\, dx \quad \leftarrow \text{spero vada bene}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{2} \left\{ \underset{F}{\tfrac{1}{2} e^{2x}} \cdot \underset{G}{\sin(3x)} - \int \underset{F}{\tfrac{1}{2} e^{2x}} \cdot \underset{g}{3 \cos(3x)}\, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{4} e^{2x} \sin(3x) \underbrace{- \frac{9}{4} \int e^{2x} \cdot \cos(3x)\, dx}_{\text{grande ritorno!}}$$

Portando a sx concludo che

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \cdot \cos(3x)\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{4} e^{2x} \sin(3x)$$

Basta moltiplicare per $\frac{4}{13}$ e fare la verifica!

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Con il GRANDE RITORNO si fanno integrali del tipo

$$\boxed{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx} \qquad \boxed{\int e^{ax} \sin(bx)\, dx}$$

e anche tutte le potenze di $\boxed{\sin(ax)}$ e $\boxed{\cos(bx)}$

UTILIZZI SMART dell'integrazione per parti

→ grande ritorno

→ trucco dell'1 nascosto.

Esempio 5 $\int \log x \, dx$

$$\int \log x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log x} \, dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\log x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x = x(\log x - 1)$$

Esempio 6 $\int \arctan x \, dx$

$$\int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} \, dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\arctan x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Esempio 7 $\int \tan x \, dx$

$$\int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} \, dx = \underset{F}{-\cos x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{F}{(-\cos x)} \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\sin x) \, dx$$

$$= -1 + \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx$$

Semplificando ottengo $0 = -1$!!!

Il problema nasce dalla formula abusiva, cioè senza estremi

Altro modo di ottenere il problema: scrivere

$\int 1 \, dx = \int e^{x} \cdot e^{-x} \, dx$ e procedere per parti!

— o — o —