ANALISI 1 — LEZIONE 043

Note Title 14/11/2016

Esempio 1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + \cos x$

Iniettività e surgettività

Surgettiva sì perché $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$
e f è continua. Conclusione: teo. esistenza valori intermedi.
Questo dice che $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluz. per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

Iniettività: $f'(x) = 2 - \sin x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
Monotonia 2 $\Rightarrow$ f strett. cresc. $\Rightarrow$ iniettiva.

Esempio 2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x + \cos x$

Surg: come prima
Iniett.: $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ $\Rightarrow$ deb. cresc. il che non basta

Vedo dove $f'(x) = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$,
quindi $f'(x) \geq 0$ e si annulla "sporadicamente"

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f strett. cresc. $\Rightarrow$ iniettiva

Esempio 1+2 = 3 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \lambda x + \cos x$
Studiare iniettività e surg. al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

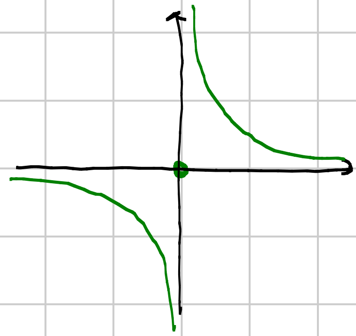
Surgettiva $\Leftrightarrow$ $\lambda \neq 0$. Infatti
- per $\lambda = 0$ non è chiaramente surg.
- per $\lambda \neq 0$ i limiti a $\pm\infty$ sono $\pm\infty$ (per $\lambda > 0$) o $\mp\infty$ ($\lambda < 0$) e quindi si conclude per esistenza degli 0.

Iniettiva $\iff |\lambda| \geq 1$. Ci sono sostanzialmente 2 casi

- $\lambda \geq 1$ (o simmetricamente $\lambda \leq -1$): $f(x)$ è strett. cresc. (o strett. decr.) per monotonia 2 o 3
- per $\lambda \in (-1, 1)$ non c'è iniettività. Quello che è evidente è che $f'(x)$ può cambiare di segno (basta mettersi dove $\sin x = 1$ oppure $\sin x = -1$). Apriamo una parentesi.

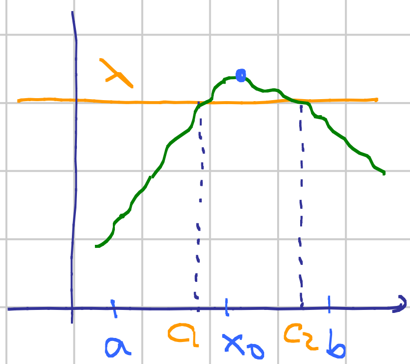
<u>Domanda</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva, possiamo dedurre che è monotona?

Senza continuità, risposta negativa

iniettiva, ma non monotona $\to$ 

<u>Rilancio</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata che cambia segno. (in $\mathbb{R}$)
Posso dedurre che è non iniettiva ?

Sì, ma va dimostrato per bene. Supponiamo che esistano $a < b$ con $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$. L'idea è che in mezzo ci sia un p.to di max. Infatti



- per W un p.to di max x_0 in $[a, b]$ c'è.
- per monotonia 1 escludo che x_0 sia a opp. b, quindi per forza $x_0 \in (a, b)$

Ora osservo che esiste un valore

$$\max\{f(a), f(b)\} < \lambda < f(x_0)$$

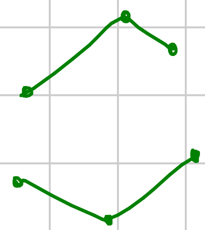
L'esistenza segue dal fatto che $f(x_0) > f(a)$ e $f(x_0) > f(b)$ per monotonia 1.
Ora concludo per teo. valori intermedi in $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$.

Il rilancio sistema l'esempio $1+2=3$.

<u>Rilancio finale</u>: se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e iniettiva, possiamo dedurre che f è monotona (strettamente)?

Si, ma si basa su un lemma misterioso, che non dimostrerò mai.

<u>Lemma</u> (del triangolino) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON monotona. Allora esistono 3 punti $a < b < c$ tali che



$$f(b) > f(a) \quad e \quad f(b) > f(c)$$

oppure

$$f(b) < f(a) \quad e \quad f(b) < f(c)$$

Dato il lemma misterioso, l'ulteriore rilancio è ovvio (basta tirare la retta $y = \lambda$ con λ opportuno.

— o — o —

<u>Esempio 4</u> Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + e^x}{2x^4 + 3x^2 + e^x}$$

non è surgettiva.

Osserviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Inoltre f è continua perché il denom. è sempre strett. > 0.

Trattandosi di una funzione continua, dai 2 limiti segue che f è limitata inferiormente e superiormente.

<u>Fatto generale</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se esistono

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \qquad e \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R},$$

allora f è limitata (dall'alto e dal basso).

Deve avere anche max/min? Non è detto: $f(x) = \arctan x$

<u>Dim.</u> Mostriamo che $f(x)$ è limitata dall'alto.
Per il limite a $+\infty$ sappiamo che esiste b, che posso supporre $b>0$, tale che

$$f(x) \le \ell_1 + 5 \qquad \forall x \ge b$$

Per il limite a $-\infty$ esiste a, che posso supporre <0, tale che

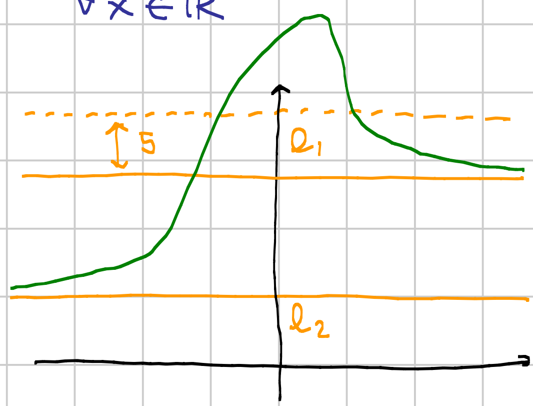
$$f(x) \le \ell_2 + 5 \qquad \forall x \le a$$

Tra a e b per W esiste M tale che

$$f(x) \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posso prendere il max}}}{M} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Conclusione

$$f(x) \le \max\{\ell_1 + 5, \ell_2 + 5, M\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

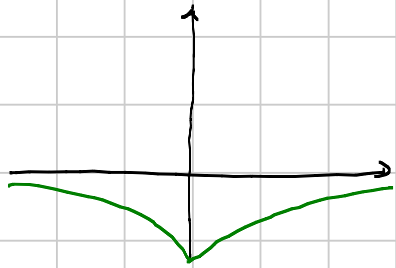


Esempio 5 Supponiamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e

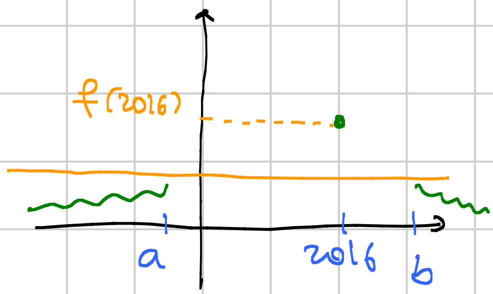
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

→ Posso dedurre che c'è il max ?

NO : basta prendere $f(x) = -e^{-|x|}$



→ Se inoltre suppongo che $f(2016) > 0$, posso ora dedurre che c'è il max ?



SI, ma va dimostrato ...
Per le definizioni di limite

- esiste $b > 2016$ tale che
$$f(x) < \frac{1}{2} f(2016) \quad \forall x \geq b$$
- esiste $a < 2016$ tale che
$$f(x) < \frac{1}{2} f(2016) \quad \forall x \leq a$$

Sia ora x_0 UN p.to di max in $[a,b]$. Dico che è p.to di max su tutto $\mathbb{R}$. Infatti

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$f(x_0) \geq f(2016) > \frac{1}{2} f(2016) \geq f(x) \qquad \forall x \geq b$$
idem $\qquad \forall x \leq a.$

Oss. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

ed esiste $a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq \max\{l_1, l_2\}$, allora di sicuro esiste

$$\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

(Dimostrarlo, con occhio al $\geq$ nell'ipotesi).