11 Convessità

11.1 Funzione convessa

Definizione 11.1.1 (Convessa)**.** *Dato un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo*[11] *ed una $f : I \to \mathbb{R}$. f si dice* ***convessa*** *in I se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f il segmento che li unisce è sopra il grafico di f.*

In formule si esprime dicendo che: f si dice convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e $\forall t \in (0,1)$ risulta che:

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

Se la stessa disuguaglianza vale con il $<$ (minore stretto) allora f si dice strettamente convessa.

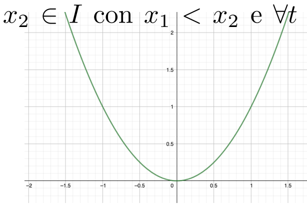


Figure 41: Funzione convessa

11.2 Funzione concava

Definizione 11.2.1 (Concava)**.** *f si dice concava se $-f$ è convessa. Strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa.*

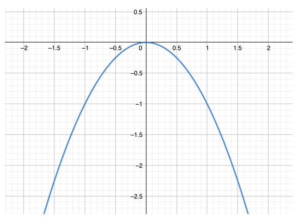


Figure 42: Funzione concava

Se andiamo a scrivere in formule una funzione concava è uguale a:

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

Note 11.2.1. Nota che, come per la concavità, se andiamo scrivere $>$ (maggiore stretto) allora f si dice strettamente concava.

11.3 Calcolo della convessità

Proposizione 11.3.1. *Dato $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Sono equivalenti:*

1. *f è convessa (strettamente convessa).*
2. *f' è debolmente crescente (strettamente crescente).*
3. *$f'' \geq 0$ ($f'' > 0$).*

Note 11.3.1. La proposizione è uguale per la concavità ma con il segno scambiato.

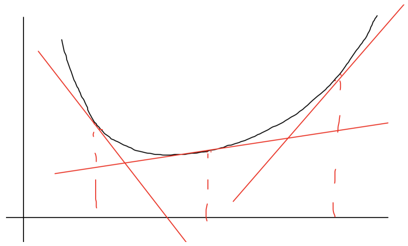
Esempio 11.3.1. $f(x) = x^2$ da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f'8x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \implies f$ è convessa (anche strettamente) in tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 11.3.2. $f(x) = e^x$ e $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$ sempre $\implies f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa.

Esempio 11.3.3. $f(x) = \log(x)$ con $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} < 0\, \forall x > 0 \implies f$ è strettamente concava.

11.4 Interpretazione geometrica

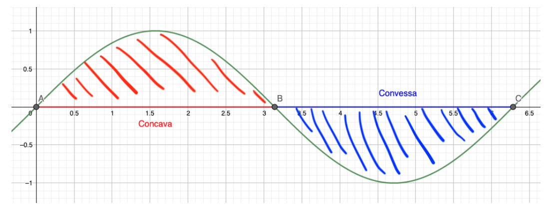
[11] Si parla sempre di intervalli quando si parla di convessità perché la convessità non ha senso sennò



Dire che f' è crescente vuol dire che diciamo che il coefficiente angolare sulla tangente cresce, e questo vuol dire che se noi pensiamo alla retta tangente come un punto che tocca il grafico e mano a mano si sposta sul grafico e così facendo va a cambiare inclinazione ruotando, quindi possiamo dire che ”la tangente ruota in senso antiorario”.

Esempio 11.4.1. Esempio di funzione concava e convessa solo in sotto intervalli del dominio.

$f(x) = \sin x,\ f : [0, 2\pi]$. $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$.
$-\sin x \geq 0. \iff \sin x \leq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$.
$f''(x) \geq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$ $\quad f''(x) \leq 0 \iff x \in [0, \pi]$



Proposizione 11.4.1. *Prendiamo un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, una $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa in I se e solo se $\forall\, x_0 \in I$ il grafico di f è sopra la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ cioè, $\forall\, x_0, x \in I$:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Concava se vale il $\leq$. Stret. convessa se vale $>$ con $x \neq x_0$ e stret. concava se vale $<$ con $x \neq x_0$.

Note 11.4.1. Il grafico di $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la retta tangente.

Esempio 11.4.2. $f(x) = e^{-|x|}$, questa è una funzione pari e $f(x) = e^{-x}$ se $x \geq 0$.
Questa funzione non è ne concava ne convessa in tutto $\mathbb{R}$, perché ci sono dei tratti dove f sta sotto altri dove sta sopra.

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi se $x > 0$ $f'(x) = -e^{-x}$ e $f''(x) = e^{-x} > 0 \implies f$ è convessa sull'insieme $\{x > 0\}$.
Mentre se $x < 0$ $f'(x) = e^{-x}$ e $f''(x) = e^{x} > 0 \implies f$ è convessa sull'insieme $\{x \leq 0\}$.

Da questo esempio vediamo che se prendiamo f in due intervalli separati, in entrambi questi intervalli è convessa ma nell'unione dei due intervalli f smette di essere convessa. Il motivo è che abbiamo un punto in $x = 0$ di non derivabilità.

Esempio 11.4.3. Se invece prendiamo $f(x) = e^{|x|}$ quindi $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

In questo caso f è convessa in $(-\infty, 0]$ ed è convessa anche in $[0, +\infty)$ e in questo caso f è convessa anche in tutto $\mathbb{R}$.

Possiamo notare che nel secondo esempio se calcoliamo $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$ mentre se vediamo l'esempio prima $f'_-(0) = 1$ e $f'_+(0) = -1$.

Proposizione 11.4.2. *Prendiamo un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, x_0 punto interno di I, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $I \setminus \{x_0\}$. Siano $I_1 = \{x \in I \mid x < x_0\}$ e $I_2 = \{x \in I \mid x > x_0\}$ abbiamo che se f è convessa in I_1 e I_2 e x_0 è un punto angoloso per f allora f è convessa in I se e solo se $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.*

Questa cosa perché, se noi prendiamo una funzione che presenta un angolo e tracciamo la tangente, data dalla derivata, a sinistra notiamo che mano a mano che ci spostiamo verso destra questa tangente "ruoterà" sul grafico, nel punto x_0 avremo due tangenti una dalla derivata destra ed una dalla sinistra, possiamo notare che se la funzione rimane concava o convessa questa tangente continuerà a "ruotare" nello stesso verso senza fare "uno scatto" nel suo andamento, in caso contrario allora non manterrà la concavità o la convessità.

11.5 Flessi

Definizione 11.5.1 (Flesso)**.** *Dato un $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, x_0 punto interno ad I si dice punto di flesso se f è derivabile in x_0 ed esiste un intorno $U \subset I$ di x_0 t.c. la quantità*

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} \text{ non cambia segno in } U \setminus \{x_0\}$$

Dire che $\frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0}$ non cambia segno vuol dire che il grafico della funzione passa da sopra a sotto la tangente (o viceversa).

Definizione 11.5.2 (Flesso a tangente verticale)**.** *Se invece $f'(x) = \pm\infty$ (f non è derivabile), f è continua in x_0, e se f è convessa in un intorno destro di x_0 e concava in un intorno sinistro di x_0 (o viceversa) allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale.*

Un flesso verticale è un cambiamento di convessità con un flesso verticale.

Osservazione 11.5.1. Se avete una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo ed f derivabile due volte in I. Allora se $f''(x_0) = 0$ e f cambia segno in x_0 allora x_0 è punto di flesso.

Cambia segno vuol dire che $f''(x) \leq 0$ se $x \leq x_0$ e $f''(x) \geq 0$ se $x \geq x_0$ (o viceversa), con $x \in U$ intorno di x_0.

Esempio 11.5.1. Calcoliamo il flesso di $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$.
Vediamo dall'immagine che esiste un flesso in $x = 0$, infatti:
$f''(x) = 0$, $f''(x) \leq 0$ se $x \leq 0$ e $f''(x) \geq 0$ se $x \geq 0$.

Osservazione 11.5.2. $f''(x_0) = 0$ non è sufficiente per aver un flesso

Esempio 11.5.2. Prendiamo per verificare l'osservazione $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.
Anche se $f(0) = 0$ abbiamo che $f''(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \implies$ f è convessa in $\mathbb{R}$.

Osservazione 11.5.3. Ci possono essere punti di flesso dove non esiste la derivata seconda.

Esempio 11.5.3. $f(x) = x \cdot |x| \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Possiamo vedere che $x_0 = 0$ è punto di flesso, infatti f è derivabile in $x_0 = 0$ infatti $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$. La retta tangente in $x = 0$ è $y = 0$. f passa da sopra la tangente in $x_0 = 0$, quindi x_0 è un punto di flesso. Però non esiste la derivata seconda in $x_0 = 0$ perché in questo punto c'è un punto angoloso.

Osservazione 11.5.4. Se abbiamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$, f convessa nei punti interni di I, ed f continua in tutto $I \implies f$ è convessa in I.
Quindi se abbiamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convessa in (a, b) ed f continua in $[a, b] \implies f$ è convessa in $[a, b]$.