ANALISI 1 - LEZIONE 107

Note Title 07/04/2017

$\boxed{\text{Dim teo. 3}}$ Ipotesi: A cpt. per ricoprimenti, $f: A \to \mathbb{R}$ continua
Tesi: $f(A)$ cpt. per ricoprimenti.

Prendo un ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i \in I}$ di $f(A)$ e dimostro che basta un s.ricopr. finito.
Pongo

$$\mathcal{U}_i := f^{-1}(V_i)$$

È chiaro che $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, cioè $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ sono un ricoprimento di A
(dato $x \in A$, trovo $i \in I$ t.c. $f(x) \in V_i$, quindi $x \in \mathcal{U}_i$).
Inoltre, essendo f continua, gli $\mathcal{U}_i$ sono aperti in partenza.
(ad essere precisi, gli $\mathcal{U}_i$ sono aperti in A, cioè sono intersezione di A con veri aperti di $\mathbb{R}$, cioè

$$\mathcal{U}_i = A \cap \underbrace{\hat{\mathcal{U}}_i}_{\text{aperto in } \mathbb{R}}$$
)

Concludendo: $\{\hat{\mathcal{U}}_i\}_{i \in I}$ sono un ricoprimento aperto di A, ma allora basta un s.ricopr. finito, cioè

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} \hat{\mathcal{U}}_i \qquad \text{con } J \text{ finito.}$$

Ma allora $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(\hat{\mathcal{U}}_i) = \bigcup_{i \in J} V_i$

e quindi ho trovato il s.ricopr. finito voluto.

— o — o —

Resta da dim. un pezzo del teo (i), cioè che (i) $\Rightarrow$ (iii) oppure (ii) $\Rightarrow$ (iii).

La dim. si basa su due lemmi.

LEMMA 1 (Raggio magico) (Numero di LEBESGUE)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme cpt. per successioni.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A.

Allora esiste $r > 0$ con questa proprietà

$$\forall x \in A \quad \exists i \in I \quad \text{t.c.} \quad (x-r, x+r) \subseteq U_i$$

Oss. Il fatto che gli U_i siano tutti aperti dice che

$$\forall x \in U_i \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad (x-r, x+r) \subseteq U_i$$

oppure che

$$\boxed{\forall x \in A \quad \exists i \in I \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad (x-r, x+r) \subseteq U_i}$$

quasi ovvia, perché r dipende da x

La tesi del lemma è

$$\boxed{\exists r > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists i \in I \quad \text{t.c.} \quad (x-r, x+r) \subseteq U_i}$$

qui r non dipende da x

LEMMA 2 (Lemma dei distributori)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato e sia $r > 0$ un numero qualunque.

Allora esiste un numero finito di p.ti $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$ (dipendente da r) con questa proprietà

$$\boxed{\forall x \in A \quad \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{t.c.} \quad |x - x_i| < r}$$

Interpretazione: posso piazzare dei distributori in $x_1, \dots, x_n$ in modo che ogni elemento abbia un distributore a distanza $\leq r$ da lui.

$\boxed{\text{Dati i due lemmi, dimostriamo che (i)+(ii) } \Rightarrow \text{ (iii)}}$

Ipotesi: A è chiuso + lim. (dunque anche cpt. per succ.)
Tesi: A è cpt. per ricoprimenti.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A.

(1) Per il lemma 1, il ricoprimento ammette un raggio magico $r > 0$.

(2) Per il lemma 2, applicato con il raggio magico, posso trovare dei punti $x_1, \dots, x_n$ in A (in numero finito) t.c.

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (x_k - r, x_k + r)$$

(3) Ora siano $i_1, \dots, i_n$ indici in I tali che

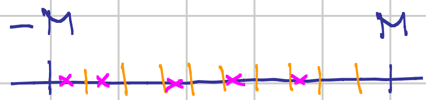
$$(x_k - r, x_k + r) \subseteq U_{i_k} \quad \text{(magicità di } r\text{)}$$

e sia $J = \{i_1, \dots, i_n\}$. È chiaro che J è finito (ha al max n elementi) e

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

Ecco ottenuto il s.ricopr. finito.

— o — o —



$\boxed{\text{Dim. distributori}}$ A per ipotesi è limitato, quindi $A \subseteq [-M, M]$ per opportuno reale M. Sia dato $r > 0$. Divido $[-M, M]$ in parti uguali di ampiezza $< r$. In ogni intervallino prendo (se c'è) un pto di A. Ho piazzato un numero finito di distributori e ogni altro p.to di A ne ha uno a distanza < 1 (quello stesso intervallo).

— o — o —

Dim. raggio magico Sono dati A ed un ricopr. aperto $\{U_i\}_{i\in I}$.
Devo dim. che

$$\exists r>0 \quad \forall x\in A \quad \exists i\in I \quad \text{t.c.} \quad (x-r,x+r)\subseteq U_i$$

Suppongo per assurdo che non sia vero, cioè

$$\forall r>0 \quad \exists x\in A \quad \forall i\in I \qquad (x-r,x+r)\not\subseteq U_i$$

Me la gioco prendendo $r:=\frac{1}{n}$. Ottengo un p.to $x_n\in A$ t.c.

$$\forall i\in I \qquad \left(x_n-\frac{1}{n},\, x_n+\frac{1}{n}\right)\not\subseteq U_i$$

Ora x_n è una succ. in A, dunque per ipotesi ammette una sottosucc. convergente, che per comodità non rinomino

$$x_n \longrightarrow x_\infty \in A$$

Ora $x_\infty\in A$, dunque $x_\infty\in U_{i_\infty}$ per un qualche indice $i_\infty\in I$.
Ma allora, essendo U_{i_∞} aperto, esiste r_∞ t.c.

$$(x_\infty - r_\infty,\, x_0 + r_\infty)\subseteq U_{i_\infty}$$

Ora definitivamente

$$x_n \in \left(x_\infty-\frac{r_\infty}{2},\, x_\infty+\frac{r_\infty}{2}\right)$$

Ma allora definitivamente gli x_n hanno garantito un raggio minimo, nel senso che

$$\left(x_n - \frac{r_\infty}{2}, x_n + \frac{r_\infty}{2}\right) \subseteq U_{i_\infty}$$

Ma questo va contro la definizione degli x_n, cioè il fatto che per loro nessun raggio del tipo $\frac{1}{n}$ andasse bene.

— o — o —

Idea per una dim. alternativa di W. senza usare nulla se non il sup (vedi AM1_15).

A cpt. (limitato + chiuso), $f: A \to \mathbb{R}$ continua

① Sia $A \subseteq [-M, M]$. Pongo $I := \inf f(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

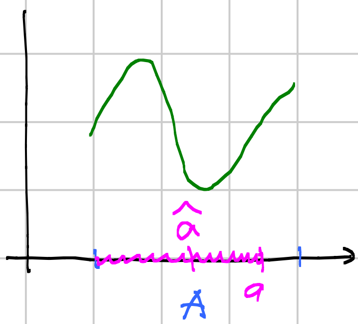
② Per ogni $a \in A$ considero

$$\inf \{ f(x) : x \in A \cap [-M, a] \} = g(a)$$

Osservo che $g(a)$ è decrescente in a e $g(M) = I$.

③ Pongo $\hat{a} := \inf \{ a \in [-M, M] : g(a) = I \}$

Dico che → $\hat{a} \in A$
→ $f(\hat{a}) = I$
(se per assurdo fosse $f(\hat{a}) > I$)



Completare per esercizio.

— o — o —