EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Un' eq. diff. ha come incognita una funzione $u : (a,b) \to \mathbb{R}$

può essere anche semiretta o tutto $\mathbb{R}$

L'equazione è una relazione che lega la funzione u e un po' di sue derivate.

L'incognita la possiamo indicare con

$\boxed{u(t)}$ $\quad u(x) \quad y(x) \quad y(t)$ e così via

Esempi $\quad u'(t) = u(t) + 5 \quad \to$ cerco una funzione la cui derivata è uguale alla funzione stessa $+5$

$u''(t) = u(t) - t \quad \to$ derivata seconda = funzione stessa meno t

Def. Si dice ORDINE di una equazione il massimo ordine di derivazione compare.

In generale un' eq. diff. di ordine k si scrive nella forma

$$\boxed{\Phi\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)\right) = 0}$$

dove Φ è una funzione di $k+2$ variabili

Notazione rapida: $\boxed{\Phi\left(t, u, u', u'', \dots, u^{(k)}\right) = 0}$

Def. Un'eq. diff. si dice in $\boxed{\text{FORMA NORMALE}}$ se la derivata di ordine massimo è stata "ricavata" rispetto al resto, cioè si scrive nella forma

$$\boxed{u^{(k)}(t) = F\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t)\right)}$$

In notazione rapida: $\boxed{u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})}$

dipende da k+1 variabili

Esempi

$u'' = 3u' + tu^2$ — FORMA NORMALE

$u'' - 3u' + \sin t = 0$ — QUASI (basta spostare $u'' = 3u' - \sin t$)

$(u')^3 + 3u + t = 0$ — QUASI $\rightsquigarrow$ $u' = -\sqrt[3]{3u+t}$

$(u')^4 + 3u + t = 0$ — NO: non posso ricavare u' in modo unico

$tu'' = 5 + u'$ — NI: dovrei dividere per t, ma per questo serve $t \neq 0$.

Def. Un'eq. diff. si dice $\boxed{\text{AUTONOMA}}$ se la t non compare nell'equazione se non come variabile da cui dipende la u

Esempi

$u'' = u' - 3$	$u'' = u' - 3t$	$u'' = tu' - 3$
SI	NO	NO
$u''(t) = u'(t) - 3$	$u''(t) = u'(t) - 3t$	$u''(t) = tu'(t) - 3$

Proposizione Se u risolve un'eq. diff. autonoma, allora anche tutte le sue traslate temporali risolvono la stessa equazione.

Più precisamente, se $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ è soluzione, allora anche $v(t) := u(t+c)$, vista come $v : (a+c, b+c) \to \mathbb{R}$ è ancora una soluzione

[Motivo: $v^{(i)}(t) = u^{(i)}(t+c)$ per ogni $i \geq 0$ e ogni t ammissibile]

Esempio 1 $u'(t) = 2u(t)$ $[u' = 2u]$

Una soluzione è $u(t) = e^{2t}$ [verifica in 30 secondi!]

Dico che anche $v(t) = e^{2t+2025}$ è soluzione

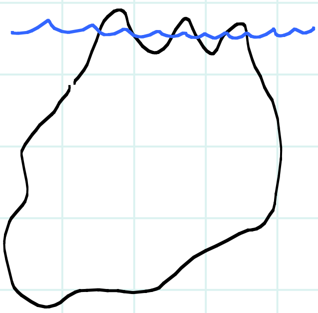
Verifica: $v'(t) = 2e^{2t+2025} = 2v(t)$:)

Esempio 2 $u'(t) = -u(t)^2$ $[u' = -u^2]$

Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$ [Verifica!]

Ma anche $v(t) = \frac{1}{t+42}$ è soluzione [Verifica!]

Esamineremo 3 classi di eq. diff.



1. Eq. primo ordine a variabili separabili
2. Eq. primo ordine lineari
3. Eq. ordine qualunque lineari a coeff. costanti
   - → omogenee
   - → non omogenee

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Variabili separabili}}$ Sono equazioni che si presentano come

$$\boxed{u' = f(t) \cdot g(u)}$$

→ Primo ordine

→ Forma normale

→ A destra c'è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u.

Esempi $\quad u' = 2t^2 u \qquad u' = 2t \cdot u^2 \qquad u' = u \cdot \cos t$

$u' = u^3$

$f(t)$ è sempre 1

Oss. Un' eq. del primo ordine in forma normale autonoma ricade sempre tra quelle a variabili separabili

$$u' = g(u) \cdot \underset{f(t)}{1}$$

2 Primo ordine lineari $\quad$ Sono eq. del tipo

$$\boxed{u' + a(t)\, u = b(t)}$$

compaiono "puliti", cioè non dentro funzioni

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni date.

3 Ordine qualunque lineari a coeff. costanti

Si presentano (o si possono facilmente portare) nella forma

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} c_i \, u^{(i)}(t) = f(t)}$$

dove i c_i sono numeri e $f(t)$ è una funzione data.

$\rightarrow$ Se $f(t) \equiv 0$ l'equazione è omogenea

$\rightarrow$ Se $f(t) \neq 0$ l'equazione è non omogenea

Esempi $\quad u'' + 3u' + 5u = \sin t$

$u''' - 5u' = \underset{f(t)}{7}$ $\quad$ ordine 3, lineare, coeff. cost.

NON omogenea

[A sx c'è una comb. lineare di u e di tutte le sue derivate fino all' ordine k (alcuni coeff. possono essere 0)]