ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 07

Note Title 03/10/2023

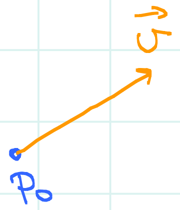
RETTE NELLO SPAZIO

Parametrica $\vec{P_0} + t\,\vec{v}$ [Esempio: $(1,2,1) + t(-3,1,4)$]

t: numero reale

$(1,2,1)$: p.to di partenza

$(-3,1,4)$: Direzione



Cartesiana Una retta nello spazio si può rappresentare come intersezione di due piani (sistema di 2 equazioni)
Questa rappresentazione è molto non unica.

Mutua posizione di due rette

→ COINCIDENTI (infinite intersezioni dipendenti da 1 parametro, direzioni una multipla dell'altra)

→ PARALLELE E DISTINTE (nessuna intersezione, direzioni multiple)

→ INCIDENTI (un p.to di intersezione)

→ SGHEMBE (nessuna intersezione, direzioni NON multiple)

Come interseco due rette? $P_0 + t v_0$ $\quad P_1 + s v_1$
e metto a sistema

Esempio $(1,1,0) + t(2,1,3)$ $\qquad (1,0,-1) + t(2,1,1)$

$(1+2t, 1+t, 3t)$ $\qquad (1+2s, s, -1+s)$

$$\begin{cases} 1+2t = 1+2s & \rightsquigarrow t = s \\ 1+t = s & \rightsquigarrow t = s-1 \\ 3t = -1+s & \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ NESSUNA SOLUZIONE

$\rightsquigarrow$ SGHEMBE perché le direzioni $(2,1,3)$ e $(2,1,1)$ non sono multiple

Mutua posizione di una retta e un piano

→ retta contenuta nel piano (infinite intersezioni dip da un parametro)

→ retta parallela al piano (nessuna intersezione)

→ incidenti (un solo punto di intersezione)

Come faccio retta ∩ piano? Sostituisco la parametrica della retta nella cartesiana del piano

Esempio Piano $x + 3z = 5$

Retta che passa per $A = (-1, 0, 3)$ $B = (1, 1, 1)$

Come sono messi?

La retta è $A + t(B - A)$ o variazioni

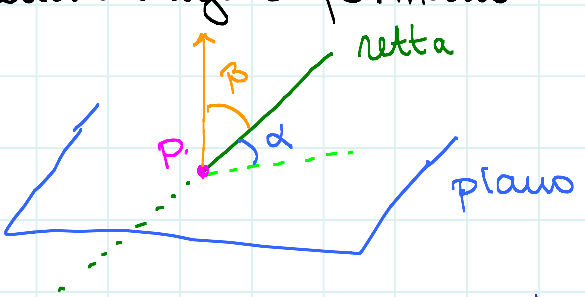
$(-1, 0, 3) + t(2, 1, -2) = (-1+2t, t, 3-2t)$

$-1 + 2t + 9 - 6t = 5 \rightsquigarrow -4t = -3 \rightsquigarrow t = \frac{3}{4}$

Sostituendo trovo il p.to P di intersezione $\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)}$

↑ verifico che sta nel piano

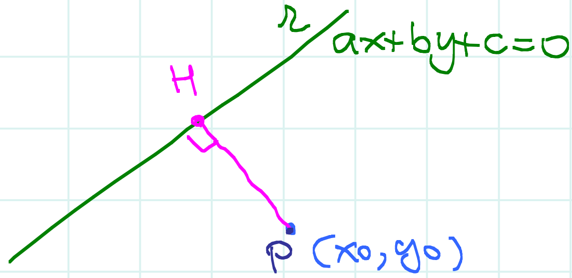
Quale angolo formano?



Osservo che $\alpha = 90° - \beta$, dove β è l'angolo tra la direzione della retta e la ⊥ al piano

Quindi $$\underset{\substack{\| \\ \sin\alpha}}{\cos\beta} = \frac{|\langle (1,0,3), (2,1,-2) \rangle|}{\underbrace{\|(1,0,3)\|}_{\substack{(a,b,c) \\ \text{del piano}}} \cdot \underbrace{\|(2,1,-2)\|}_{\substack{\text{direzione} \\ \text{della retta}}}} = \frac{4}{\sqrt{10}\ 3}$$

Distanza p.to retta nel piano



Strategia trovo H sulla retta in modo che PH ⊥ retta, e poi calcolo dist (P,H).

→ Scrivo per P la ⊥ alla retta r data

$$(x_0,y_0)+t\underbrace{(a,b)}_{\text{vettore }\perp\text{ alla retta}} = (x_0+ta,\, y_0+tb)$$

Ora interseco e trovo H:

$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c=0$$

e trovo
$$(a^2+b^2)t + ax_0+by_0+c=0$$
$$t=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

$$\text{dist}(P,H) = \| H-P \| = \| (x_0+ta,\, y_0+tb)-(x_0,y_0)\|$$
$$= \|(ta,tb)\| \quad \left[= \sqrt{t^2a^2+t^2b^2}\right.$$
$$= |t|\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

Formula generale

$$\boxed{\text{dist}(\text{p.to},\text{retta}) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Nel piano

Allo stesso modo nello spazio

$$\boxed{\text{dist}(\text{pto},\text{piano}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

<u>Esempio</u> $A=(1,0,2)$ $B=(-1,1,-1)$ $C=(2,1,1)$
$D=(1,0,3)$

→ Calcolare la distanza di D dal piano A,B,C

Piano in parametrica: $C+t(B-C)+s(A-C)$
$(2,1,1)+t(-3,0,-2)+s(-1,-1,1)$
$(2,1,1)+t(3,0,2)+s(1,1,-1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2,5,3) \rightsquigarrow \boxed{-2x+5y+3z=4}$$

Uso la formula: $\text{dist}(D,\text{piano }ABC) = \dfrac{\overset{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{|-2\cdot1+5\cdot0+3\cdot3-4|}}{\underset{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{38}}} = \dfrac{3}{\sqrt{38}}$

→ Calcolare l'angolo tra piano ABC e retta BD
Direzione retta BD $= D-B = (2,-1,4)$

$$\underset{90°-\alpha}{\cos\beta} = \frac{|\langle(-2,5,3),(2,-1,4)\rangle|}{\|(-2,5,3)\|\cdot\|(2,-1,4)\|} = \sin\alpha$$

α angolo tra retta e piano

— o — o —