ANALISI 1 — LEZIONE 113

Note Title 21/04/2017

ROAD MAP Come dimostro che f è / non è u.c. – Höld – lip ?

Lipschitzianità

SI
- derivata limitata
- somme, prod., composizioni
- definizione

NO
- derivata non limitata
- spero che non sia u.c.
- nego la definizione
- mancanza di sublinearità

Unif. continuità

SI
- Heine cantor
- spero sia lip. o Hölder
- spezzo l'insieme e incollo
- definizione
- cont. + asint. a u.c.

NO
- non estendibile
- non sublineare
- definizione negata

Hölderianità

SI
- lip + insieme limitato
- definizione
- criterio di Hölderianità

NO
- spero non unif. cont.
- non sub $|x|^\alpha$
- definizione negata.

Esercizio (superclassico)

È vero che $\boxed{f \ \tfrac{1}{2} \text{ Hölder} \iff f^2 \text{ è lip}}$?

Sono entrambe false!

① $f(x) = \sqrt{x}+1$ in $[0,1]$ è $\frac{1}{2}$-Hölder, ma

$[f(x)]^2 = x+1+2\sqrt{x}$ non è lip. ☹

② $f(x) = \pm 1$ a caso in $[0,1]$ può essere orribile, ma $f^2(x)$ è addirittura costante. ☹

Prop (Criterio di Hölderianità)
Sia A un intervallo (o una semiretta o tutto $\mathbb{R}$) e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $\alpha \in (0,1)$.
Supponiamo che
(i) $f(x)$ è continua in A
(ii) $|f(x)|^{1/\alpha}$ è lip. in A
Allora

$f(x)$ è α-Höld in A.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ipotesi so che

$$\left| |f(x)|^{\frac{1}{\alpha}} - |f(y)|^{\frac{1}{\alpha}} \right| \le L\,|x-y| \qquad \forall x\in A \ \forall y \in A$$

Come tesi vorrei che

$$|f(x) - f(y)| \le H\,|x-y|^{\alpha}$$

Dimostrazione quasi sbagliata

$$|f(x)-f(y)| = \left| \left(|f(x)|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} - \left(|f(y)|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} \right|$$

$$\leq \left| |f(x)|^{\frac{1}{\alpha}} - |f(y)|^{\frac{1}{\alpha}} \right|^{\alpha}$$

Ho usato $|A^\alpha - B^\alpha| \leq |A-B|^\alpha$ (vedi lez. prec.)

$$\leq |L|x-y||^{\alpha}$$

$$= L^\alpha \cdot |x-y|^\alpha$$

L'errore è precorsistico all'inizio: non è vero che $f(x) = \sqrt{f(x)^2}$

Bisogna distinguere 3 casi

- Se $f(x) \geq 0$ e $f(y) \geq 0$, allora la dim. sopra è ok.
- Se $f(x) \leq 0$ e $f(y) \leq 0$, allora messi i segni − che servono si ritorna alla dim. di sopra.
- Se wlog $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$, allora esiste un punto z fra x e y tale che $f(z) = 0$. Qui ho usato che f è cont. e sono su un intervallo. Ora aggiungo e tolgo $f(z)$:

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)|$$

(2 casi prec.) $$\leq L^\alpha |x-z|^\alpha + L^\alpha |z-y|^\alpha$$

(z sta tra x e y) $$\leq L^\alpha |x-y|^\alpha + L^\alpha |x-y|^\alpha$$

$$= 2L^\alpha |x-y|^\alpha.$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $f(x) = x \log x$ $A = (0,1)$

Non è lip $\rightsquigarrow$ $f'(x)$ non è limitata

Dico che è α – Hölder per ogni $\alpha \in (0,1)$

Essendo continua, basta verificare che $[f(x)]^{\frac{1}{\alpha}}$ è lip.

$$|f(x)|^{\frac{1}{\alpha}} = x^{\frac{1}{\alpha}} |\log x|^{\frac{1}{\alpha}} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} |\log x|^{\frac{1}{\alpha}} + x^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} |\log x|^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \frac{1}{x}$$

Dico che è limitata, ma poiché $\frac{1}{\alpha}-1 > 0$ avremo che

$g'(x) \to 0$ per $x \to 0$, il che salva la limitatezza.

<u>Esempio 2</u> $f(x) = \frac{1}{\log x}$ è UC. in $(0,\frac{1}{2})$ ma non α – Höld. qualunque sia $\alpha > 0$.

- È u.c. perché è estendibile a $[0,\frac{1}{2}]$ come funz. continua $\Rightarrow$ è u.c. in $[0,\frac{1}{2}]$ per H.C. $\Rightarrow$ è ancora meglio in $(0,\frac{1}{2})$
- Verifichiamo che NON è $\frac{1}{2}$ – Hölder. Vado per assurdo. Supponiamo che lo sia. Allora

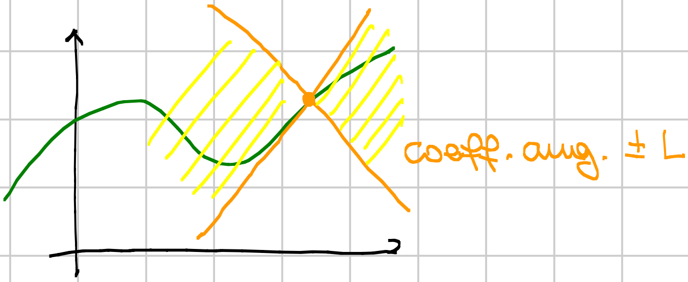
$$|f(x) - f(y)| \le H\sqrt{|x-y|} \qquad \forall x \in (0,\tfrac{1}{2}),\ \forall y \in (0,\tfrac{1}{2})$$

Faccio tendere $y \to 0^+$

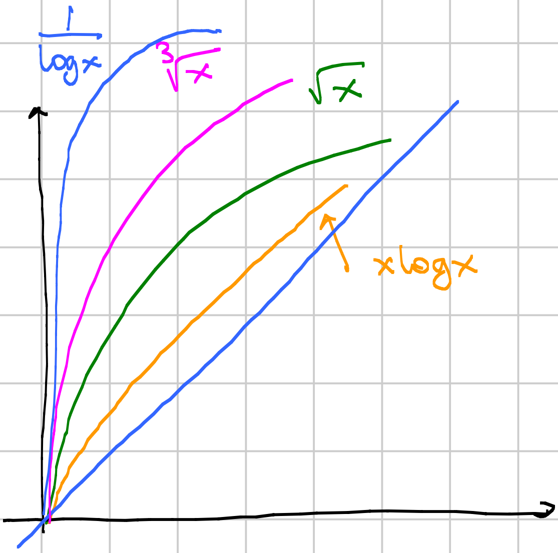
$$|f(x)| \le H\sqrt{x}, \text{ cioè } \frac{1}{|\log x|} \le H\sqrt{x}, \text{ cioè}$$

$H\sqrt{x}|\log x| \ge 1$. Faccio tendere $x \to 0^+$ e ottengo $0 \ge 1$ ☺

Idea mentale di Lip.



Idea mentale di $\frac{1}{2}$ − Höld



Esempio 3 $\quad f(x) = x \sin \frac{1}{x} \qquad A = (0,1)$

- È u.c. ⇝ estensione + H.C. + restrizione
- Non è lip. ⇝ $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \cancel{x}\cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^{\cancel{2}}}$ NO LIM.
- È $\frac{1}{2}$ Hölder ⇝ $g(x) = f^2(x) = x^2 \sin^2\frac{1}{x}$

$$g'(x) = 2x\sin^2\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\, 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$$ LIMITATA

$\Rightarrow g$ lip $\Rightarrow f$ $\frac{1}{2}$ Hölder

- Non è α − Hölder con $\alpha > \frac{1}{2}$ ⇝ esercizio (def. negata)