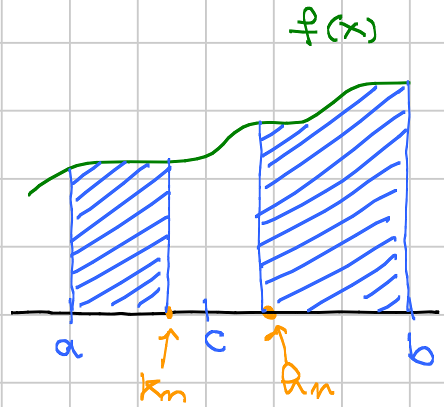
Esercizio 1 (L'integrale con il buco)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (integrale proprio). Sia $c \in (a,b)$ e siano $k_n \to c^-$ e $\ell_n \to c^+$.

Pongo

$$I_n := \int_a^{k_n} f(x)\,dx + \int_{\ell_n}^{b} f(x)\,dx$$



Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left| I_n - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - I_n \right|$$

$$= \left| \int_{k_n}^{\ell_n} f(x)\,dx \right| \le \int_{k_n}^{\ell_n} |f(x)|\,dx$$

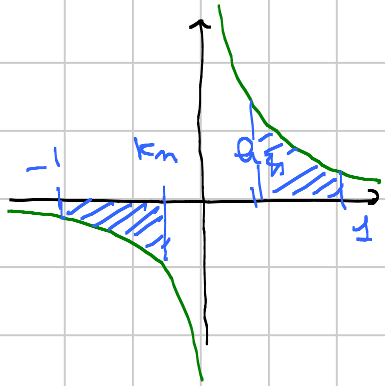
$$\le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante tale che} \\ |f(x)| \le M \text{ per ogni } x \in [a,b]}}{M} (\ell_n - k_n)$$

Quando $n \to +\infty$ il RHS $\to M(c-c) = 0$, quindi anche LHS $\to 0$.

Domanda: vale lo stesso se l'integrale è improprio con problemi in c?

Risposta: sì, tranne nel caso in cui gli integrali in $[a,c]$ e $[c,b]$ vengono $+\infty$ $-\infty$ (o viceversa).
In tal caso $(+\infty - \infty)$ il limite dipende dalla forma del buco!!

Esempio $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$



La teoria dice che è indeterminato

Prendiamo $k_n = -\frac{1}{n}$, $\ell_n = \frac{1}{n}$
(buco simmetrico)

Allora

$$I_n \to 0 \quad (\text{è } = 0 \text{ per ogni } n)$$

Prendiamo $k_n = -\frac{1}{n}$, $\ell_n = \frac{2}{n}$ (buco asimmetrico)

$$I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\frac{2}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\log|x|\right]_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \left[\log x\right]_{\frac{2}{n}}^{1} = \log\frac{1}{n} - \log\frac{2}{n}$$

$$= \log\frac{1}{2} \to -\log 2 \neq 0$$

Variando la forma del buco posso fare in modo che $I_n \to 2016$.

Esercizio 2 Calcolare $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

Perché converge? Provo un confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^7}$.
Devo fare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{\frac{1}{x^7}} = \lim_{x\to+\infty} x^{n+7} e^{-x} = 0$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$

[Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x grandi, quindi $f(x) \leq g(x)$ per x grandi]

e quindi siamo nel caso limite dalla parte giusta.

$$\int g(x)\,dx < +\infty \implies \int f(x)\,dx \text{ conv.}$$

Pongo I_n = integrale richiesto. Allora

$$I_n = \int_0^{+\infty} \underset{F}{x^n}\, \underset{g}{e^{-x}}\, dx = \left[\underset{F}{x^n}\, \underset{G}{(-e^{-x})}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underset{f}{n x^{n-1}}\, \underset{G}{(-e^{-x})}\, dx$$

$$= 0 + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\, I_{n-1}$$

Ho dim. che $I_n = n\, I_{n-1}$. Facile esercizio : $I_0 = 1$

Conclusione $\quad I_n = n!$

Per giustificare l'int. per parti impropria basta usare la def

$$\int_0^A x^n e^{-x} dx = \left[x^n(-e^{-x})\right]_0^A - \int_0^A n x^{n-1}(-e^{-x}) dx$$

e poi passare al lim per $A \to +\infty$

— o — o —

$\boxed{\text{GAMMA DI EULERO}}$

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ $\quad \Gamma(n) = (n-1)!$ $\qquad$ (fatto prima)

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ $\quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[t^x(-e^{-t})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1}(-e^{-t}) dt$$

$$= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\,\Gamma(x)$$

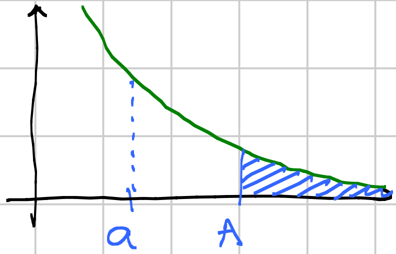
$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \underset{y=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{\cancel{y}} \cdot 2\cancel{y}\, dy = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Esercizio Supponiamo che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converga.

Allora $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $A \geq a$ e vale

$$\underbrace{\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{coda di un integr. impr.}} = 0$$



Si verifica con la solita def. che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{A} f(x)\,dx + \int_A^{+\infty} f(x)\,dx$$

da cui

$$\int_A^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^{A} f(x)\,dx}_{\downarrow \atop \int_a^{+\infty} f(x)\,dx} \longrightarrow 0$$

Esempio $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{\sqrt{n}}^{n} x^{20} e^{-x}\,dx}_{\text{“}a_n\text{”}} = 0$$

Idea: $\int_0^{+\infty} x^{20} e^{-x}\,dx$ converge

$$a_n = \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$$

= due code che tendono a 0.

Esercizio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\int_n^{+\infty} \frac{4x+\sin x}{x^3+\arctan x}\,dx}$$

a_n

$a_n \geq 0$ sempre

Brutal mode: $a_n \sim \int_n^{+\infty} \frac{4}{x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{x}\right]_n^{+\infty} = \frac{4}{n}$

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\, a_n$$

Passo alle funzioni. Pongo $F(x)$ = una primitiva di $f(x)$ dove $f(x)$ è l'integranda.

Ora

$$F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$$

Allora $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

e $a_n = \ell - F(n) = \int_1^{+\infty} - \int_1^n$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell - F(x)}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{ Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{+f(x)}{+\frac{1}{x^2}} = 4 \quad ☺$$

Esercizio Sia $F(x)$ una primitiva di e^{x^2} (teo. unst.: non si può esprimere usando le funzioni elementari).

Domanda: come cresce $F(x)$ quando $x \to +\infty$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{e^{x^2}} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}:\text{ Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2x\,e^{x^2}} = 0$$

Sorpresa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\frac{e^{x^2}}{x}} \underset{\text{Hop}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{2x e^{x^2}}{x} - \frac{e^{x^2}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$F(x) \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

— o — o —