ANALISI 1 — LEZIONE 105

Note Title 05/04/2017

FUNZIONI SEMICONTINUE

<u>Def.</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in A$ non isolato. Si dice che f è

- <u>semicontinua inferiormente</u> in x_0 se   SCI

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

- <u>semicontinua superiormente</u> in x_0 se   SCS

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

<u>Oss</u> Se f è SCI e SCS in x_0, allora f è continua in x_0

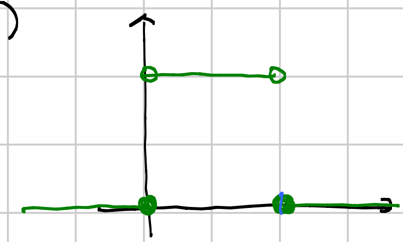
$$f(x_0) \underset{\text{SCI}}{\leq} \liminf_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup_{x \to x_0} f(x) \underset{\text{SCS}}{\leq} f(x_0)$$

Allora sono tutti uguali, quindi esiste il limite ed è $f(x_0)$.

Brutalmente, SCI vuol dire che al limite può crollare in giù
SCS " " " " " " " " in su.

<u>Esempio</u>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \notin (0,1) \end{cases}$$



Questa è

- SCI su tutto $\mathbb{R}$
- SCS su $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Fatto generale

- La funzione caratt. di un aperto è SCI
- " " " " " chiuso è SCS

LE DUE SU QUATTRO FACCE DELLA SEMICONTINUITÀ

$f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Allora sono fatti equivalenti

(i) f è SCI in x_0 nel senso di prima
(ii) per ogni succ. $x_n \to x_0$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

Dim. Più o meno è sempre la solita.

(i) ⇒ (ii) prendiamo una succ. $x_n \to x_0$
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la def. di liminf

$$\exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

Poiché $x_n \to x_0$, allora definitivamente

$$f(x_n) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

Passando al liminf

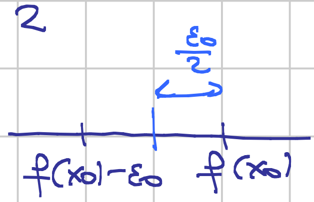
$$\liminf f(x_n) \geq f(x_0) - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ ... quindi}$$

(ii) → (i) Supponiamo per assurdo che

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon_0 \qquad \text{con } \varepsilon_0 > 0$$

Per definizione di liminf accade che

$$\inf\{f(x) : x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A\} \le f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{2}$$



per ogni $\delta > 0$. Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$

e ottengo $x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ t.c.

$f(x_n) \le f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{4}$. Passando al liminf trovo $x_n \to x_0$ e

$\liminf f(x_n) \le f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{4}$ che è contro l'ipotesi

— o — o —

<u>Esempio</u> $A = [0, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

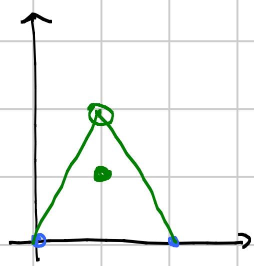
Allora

- $f(x)$ è SCI $\iff a \le -1$
- $f(x)$ è SCS $\iff a \ge 1$

— o — o —

<u>Teorema</u> (Weierstrass SCI) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.
Supponiamo che
(i) A è compatto
(ii) f è SCI.
Allora esiste per forza

$$\min\{f(x) : x \in A\}$$



<u>Oss</u>. Il max non si salva necessariamente

<u>Oss</u>. Se come ipotesi ho SCS salvo il max

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia I l'inf. dell'immagine, cioè

$$I := \inf\{f(x) : x \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Per il solito lemma $\exists \{y_n\} \subseteq f(A)$ t.c. $y_n \to I$

Per defin. di immagine $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $y_n = f(x_n)$

Poiché A è compatto $\exists\ x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A$

Dico che x_∞ è un p.to di min. Infatti

$$\underset{\substack{\uparrow \\ I \text{ è inf} \\ \text{di } f(A)}}{I \le f(x_\infty)} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ SCI}}}{\le} \liminf_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \to +\infty} y_{n_k}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} y_n = I$$

n cambiato dopo video

Poiché a dx e sx sono uguali abbiamo $f(x_\infty) = I$, che ora sappiamo essere un numero reale.

— o — o —

Esercizio Provare a fare dim. con caso SCS.

— o — o —

Esercizio Sia x_n una succ. e sia

$$L := \limsup_{n \to +\infty} x_n$$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Cosa posso dire di $\limsup_{n \to +\infty} f(x_n)$?

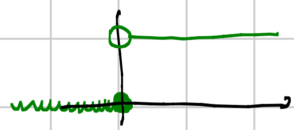
In generale nulla $x_n = -3, -2, -3, -2, -3, -2, \ldots$ $f(x) = x^2$

$\limsup x_n = -2$ $\limsup f(x_n) = 9$

<u>Fatto generale</u> Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è debolmente crescente, allora e continua

$$\limsup f(x_n) \leq f(L)$$

Senza la continuità è falso



$x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad x_n \to 0 = L$ $\qquad f(x_n) \to 1 > f(L) = 0$

$\boxed{\text{Dim fatto generale}}$ Fisso $\varepsilon > 0$. Per continuità di f in L e monotonia

$\exists \, \delta > 0$ t.c. $\qquad f(x) \leq f(L) + \varepsilon \qquad \forall x \leq L + \delta$

Ma allora definitivamente so che $x_n \leq L + \delta$ per caratt. del limsup, quindi

$$f(x_n) \leq f(L) + \varepsilon$$

e passando al limsup

$$\limsup f(x_n) \leq f(L) + \varepsilon$$

Essendo vero $\forall \varepsilon > 0$ ho finito

— o — o —

<u>Esercizio</u> Sia $a_n \to 2$ qualunque. Consideriamo la succ. per ricorrenza.. (supponiamo $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

$x_{n+1} = a_n \sqrt{x_n} \qquad x_0 = 2015$

Brutal mode:
$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & a_n & \sqrt{x_n} & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \ell & = & 2 & \sqrt{\ell} & \rightsquigarrow \ \ell = 4 \end{array}$$

Sarebbe ok se so che il limite esiste ed è reale.

Sia $L = \limsup x_n$. Allora $\limsup \sqrt{x_n} \leq \sqrt{L}$ e quindi passo al limsup a dx e sx e ottengo

$$\limsup x_{n+1} = \lim a_n \cdot \limsup \sqrt{x_n}$$

uno dei 2 è lim.

$$L \leq 2\sqrt{L} \qquad L \leq 4$$

Facendo lo stesso con il liminf ℓ ottengo

$$\ell \geq 2\sqrt{\ell} \qquad \ell \geq 4$$

Usando che ovviamente $\ell \leq L$ trovo che sono entrambi 4.

C'è qualche dettaglio da sistemare, tipo escludere $\ell = 0$ o $L = +\infty$.

Aggiunto dopo video: se f è continua e debolmente crescente, allora nel fatto generale vale il segno di $=$.