PRODOTTI SCALARI IN GENERALE

Prodotto scalare Sia V uno sp. vettoriale

INPUT : 2 vettori $v \in V$ e $w \in V$

OUTPUT : numero $\langle v, w \rangle$

Proprietà : $\rightarrow$ simmetria $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

$\rightarrow$ linearità rispetto alle due variabili

$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

numero

Matrice associata ad un prodotto scalare

Sia V uno sp. vettoriale, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $\langle v, w \rangle$ un prodotto scalare in V.

Allora posso costruire la matrice $n \times n$ B definita da

$$B_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Si tratta di una matrice simmetrica

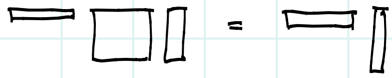
$$B_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle = B_{j,i}$$

Esempio Se $V = \mathbb{R}^n$ e abbiamo il solito prodotto scalare con la solita base canonica, la matrice $B = Id$

Utilità della matrice : $\langle v, w \rangle = y^t B x$ dove

x pensato come colonna sono le componenti di v rispetto a $v_1, \dots, v_n$

y " " " " " w " "

Nota bene $y^t B x =$  $=$ numero

$$\langle v, w\rangle = y^t B x = (y^t B x)^t = x^t B^t y = x^t B y = \langle w, v \rangle$$

trasposto di un numero

Domanda Se B rappresenta $\langle v, w \rangle$ nella base $v_1, \dots, v_n$.
Se cambio base e uso $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$, quale sarà la nuova matrice?

Risposta: $M^t B M$ dove M è il cambio di base dalla $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ alla $\{v_1, \dots, v_n\}$ quindi la matrice che ha come prima colonna le componenti di $\hat{v}_1$ rispetto a $v_1, \dots, v_n$, e così via

Idea: siano x e y le componenti di v e w rispetto alla base nuova. Allora le componenti di v e w rispetto alla vecchia sono Mx e My. Ma allora

$$\langle v, w \rangle = (My)^t B (Mx) = y^t \underbrace{M^t B M}_{\hat{B}} x$$

Domanda finale. Se scelgo bene la base, quanto può diventare bella la matrice B?

Può diventare diagonale con solo $0, 1, -1$ sulla diagonale (sylvestrizzazione)

Achtung! Abbiamo affrontato 2 problemi diversi

→ Matrici simili A e $M^{-1}AM$ ⇝ diagon., Jordan
→ Matrici congruenti B e $M^t A M$ ⇝ Sylvestrizzazione

— o — o —

1. Consideriamo i prodotti scalari in $\mathbb{R}^2$ rappresentati, rispetto alla base canonica, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Per ciascuno di essi si richiede di

(a) determinare se è definito positivo oppure no,

(b) determinare il prodotto scalare tra i vettori $(1,2)$ e $(3,-1)$,

(c) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base $\{(-1,2),(3,-2)\}$ (si consiglia per le prime volte di svolgere questo punto sia direttamente con la definizione, sia con il cambio di base),

(d) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1,1)$,

(e) determinare un vettore ortogonale al sottospazio di equazione cartesiana $x+2y=0$,

(f) determinare una base "Sylvesterizzante".

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad Tr = 6$

Det $= -1 \rightsquigarrow$ Autov $+\,- \rightsquigarrow$ NO Def. pos.

(b) Prod. scalare tra $(1,2)$ e $(3,-1)$ $\quad$ Uso $y^t B x$

$$(1\ 2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (1\ 2)\begin{pmatrix} 9 \\ -13 \end{pmatrix} = 9-26 = -17$$

$$(3,-1)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3\ -1)\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -17$$ ☺

(c) Consideriamo la nuova base $\underset{\hat{v}_1}{(-1,2)}$ e $\underset{\hat{v}_2}{(3,-2)}$. Determinare la nuova matrice.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ BOVINO

$$<\hat{v}_1,\hat{v}_1> = (-1\ 2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1\ 2)\begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix} = 30$$

$$<\hat{v}_2,\hat{v}_2> = (3\ -2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (3\ -2)\begin{pmatrix} 12 \\ -17 \end{pmatrix} = 70$$

$$<\hat{v}_1,\hat{v}_2> = (-1\ 2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1\ 2)\begin{pmatrix} 12 \\ -17 \end{pmatrix} = -46$$

La nuova matrice è

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 30 & -46 \\ -46 & 70 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 \end{array} & \end{array} = \hat{B}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso cambio base $\hat{B} = M^t B M$ dove

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Input: componenti risp. a $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$
Output: " " alla canonica

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 11 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -46 \\ -46 & 70 \end{pmatrix}$$ ☺

(d) Equazione del sottospazio ortogonale al vettore $(1,-1)$

Sono tutti gli (x,y) che hanno prod. scalare nullo con $(1,-1)$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \boxed{5x - 7y = 0}$$

eq. cartesiana

potevo anche metterlo a dx

Lo stesso sottospazio lo posso descrivere come

Span $((7,5))$

(e) Trovare un vettore $\perp$ al s.sp. di equazione $y + 2x = 0$

Lo scrivo intanto come Span $((1,-2))$

e ora trovo un vettore ortogonale a $(1,-2)$:

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2x - 3y \quad -3x + 4y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x - 3y + 6x - 8y = 8x - 11y$$

Una possibilità è $(11, 8)$

Verifica: $(1 \ -2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$(1 \ -2) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$ ☺

(f) Sylvesterizzare la matrice

Devo trovare matrice M invertibile tale che

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale avremo
$n_+ \rightsquigarrow +1$
$n_- \rightsquigarrow -1$
$n_0 \rightsquigarrow 0$

Poniamo $v_1 = (1,-1)$. Quanto fa $\langle v_1, v_1 \rangle$?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 12 \quad (\text{segno } +)$$

Poniamo $v_2 = (7,5)$. Sappiamo dal conto precedente che

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Quanto fa $\langle v_2, v_2 \rangle$?

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -12$$

Se uso come base $(1,-1)$ e $(7,5)$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Basta dividere v_1 e v_2 per $\sqrt{12}$, quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}} \right) \qquad \left(\frac{7}{\sqrt{12}} \; \frac{5}{\sqrt{12}} \right)$$

e volendo

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{7}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{5}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

Verifica: $M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

— o — o —