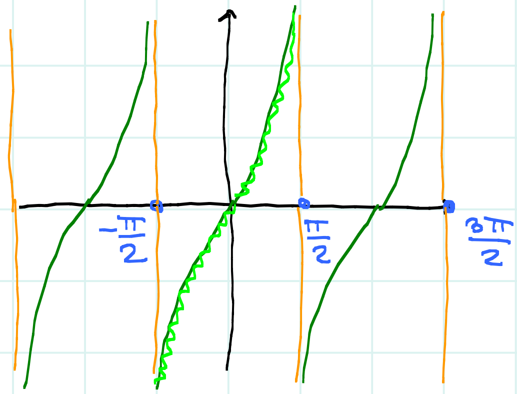
ANALISI 1 – LEZIONE 012

Note Title 05/10/2024

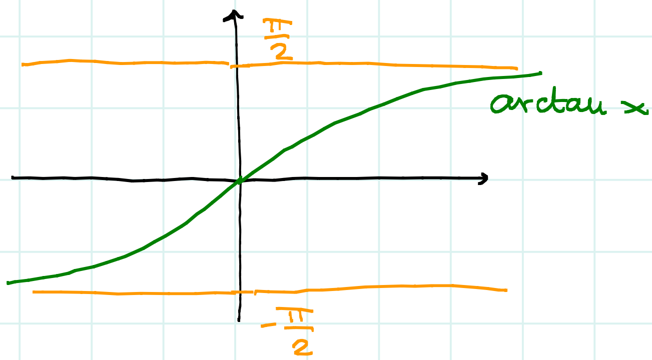
$\boxed{\text{TANGENTE}}$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



La funzione $f(x) = \tan x$ vista come $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\} \to \mathbb{R}$ è
→ dispari
→ periodica di periodo minimo π
→ non iniettiva, SI surgettiva, NON monotona

Vista invece come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ diventa
→ strett. crescente
→ iniettiva e surgettiva.

La sua inversa $g: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è $g(x) = \arctan x$ ed è una funzione
→ dispari
→ strett. crescente.



— o — o —

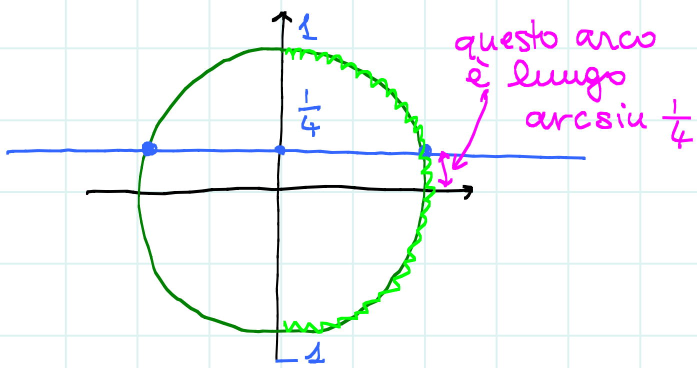
<u>Interpretazione geometrica di arcsin, arccos, arctan</u>

arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

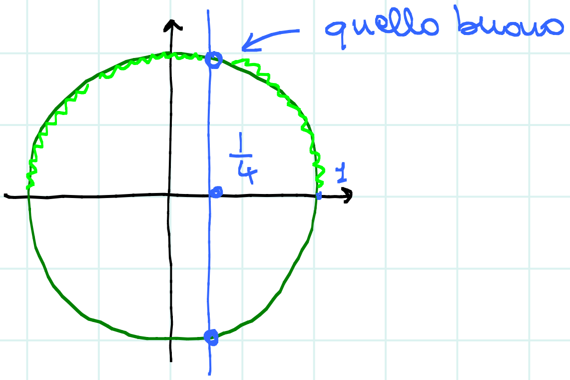
arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$

arctan : $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

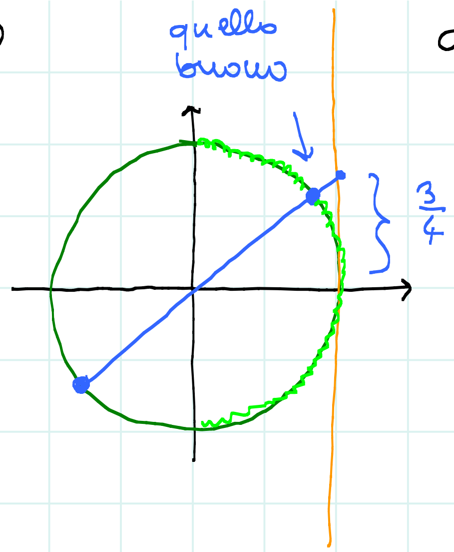
Cosa vuol dire calcolare arcsin $(\frac{1}{4})$



Cosa vuol dire calcolare $\arccos \frac{1}{4}$?



$\arctan \frac{3}{4}$



— o — o —

Operazioni sui grafici

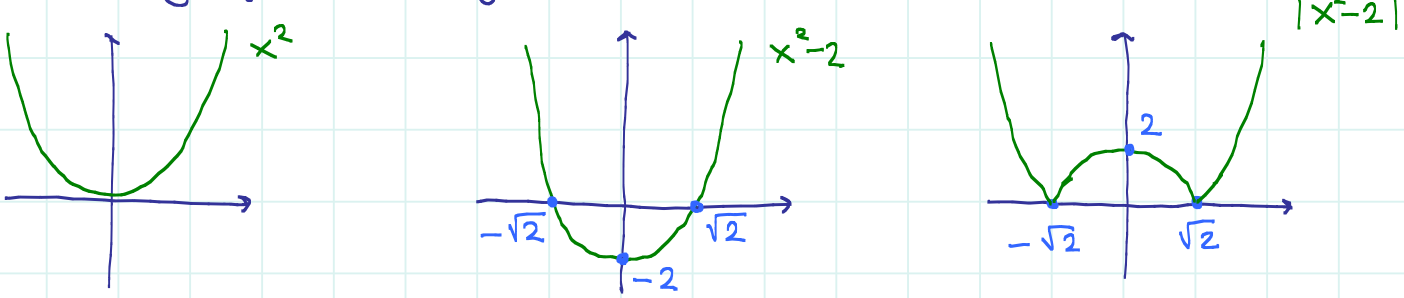
Dato il grafico di $f(x)$, e dato $a > 0$, come trovo il grafico di

- $f(x) \pm a$ ⤳ traslato alto / basso (alto se segno +)
- $f(x \pm a)$ ⤳ traslato dx / sx (sx se segno +)
- $-f(x)$ ⤳ ribalto sopra / sotto
- $f(-x)$ ⤳ ribalto dx / sx
- $|f(x)|$ ⤳ prendo le parti con $y < 0$ e le ribalto in alto
- $f(|x|)$ ⤳ per $x \geq 0$ non cambio nulla e poi osservo che è diventata una funzione pari

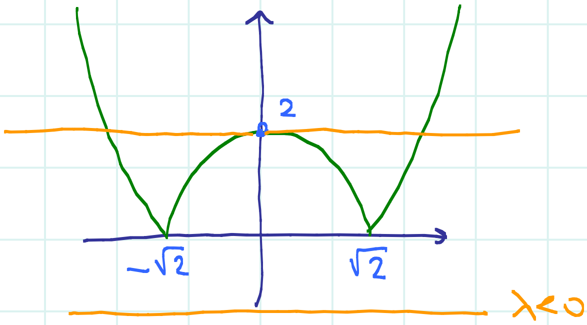
<u>Esempio 1</u> Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$|x^2 - 2| = \lambda$$

Serve il grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 2|$



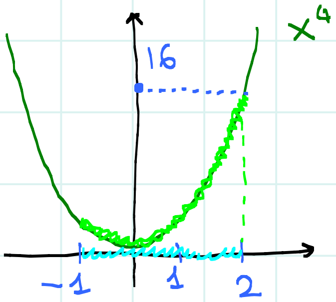
Per risolvere l'equazione $f(x) = \lambda$, interseco il grafico di $f(x)$ con le rette del tipo $y = \lambda$



- Se $\lambda < 0 \rightsquigarrow 0$ soluzioni
- Se $\lambda = 0 \rightsquigarrow 2$ soluz.
- Se $\lambda \in (0,2) \rightsquigarrow 4$ soluz.
- Se $\lambda = 2 \rightsquigarrow 3$ sol.
- Se $\lambda > 2 \rightsquigarrow 2$ sol.

<u>Esempio 2</u> Consideriamo $f(x) = x^4$ come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Calcolare $\underbrace{f([-1,2])}_{\text{immagine di un insieme}}$ e $\underbrace{f^{-1}([-1,2])}_{\text{controimmagine di un insieme}}$



Per fare l'immagine penso $[-1,2]$ nell'insieme di partenza. Poi vado sul grafico.
Infine proietto sull'asse y.
Ottengo $f([-1,2]) = [0,16]$

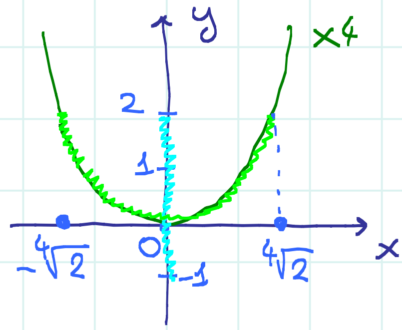
Calcolare inf / sup / max / min di

$$\underbrace{\{x^4 : x \in [-1,2]\}}_{\text{questo è } f([-1,2])} = [0,16]$$

$\min = \inf = 0 \qquad \max = \sup = 16$

Per la controimmagine è la stessa cosa ma partendo da $[-1,2]$ sull'asse y. Vado sul grafico e proietto giù sull'asse x. Ottengo

$$f^{-1}([-1,2]) = [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}]$$

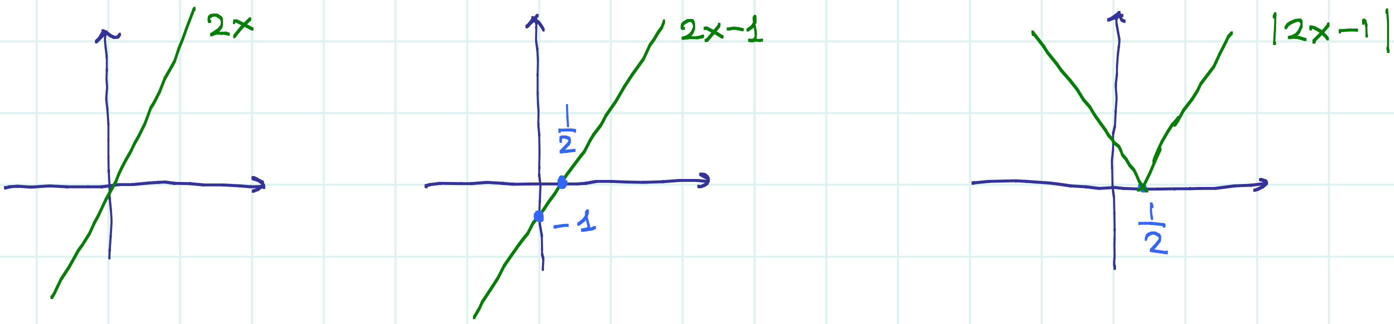


Esempio 3 Calcolare

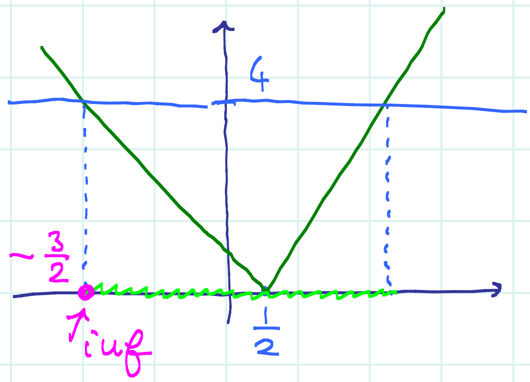
$\inf\{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \le 4\}$ CONTROIMM. $\boxed{\text{MONDO } x}$

$\inf\{|2x-1| : x \le -4\}$ IMMAGINE $\boxed{\text{MONDO } y}$

Intanto facciamo il grafico di $f(x) = |2x-1|$



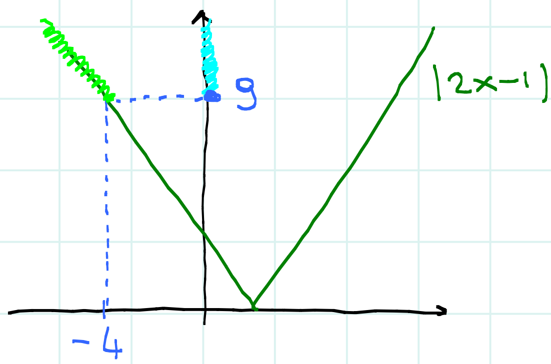
$\{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \le 4\}$ Sono delle x



$|2x-1| = 4 \leadsto 1-2x = 4$

$\leadsto 2x = -3 \leadsto x = -\frac{3}{2}$

$\inf\{|2x-1| : x \le -4\} = 9$



"Calcoliamo $|2x-1|$ per ogni $x \le -4$"

Che cosa otteniamo? Delle y

L'insieme $\{|2x-1| : x \le -4\}$ è $f((-\infty,-4)) = [9,+\infty)$

— o — o —