ANALISI 1 — LEZIONE 116

Note Title 17/05/2025

FUNZIONI SEMICONTINUE

Una funzione f si dice CONTINUA in x_0 se $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Si dice SEMICONTINUA INFERIORMENTE in x_0 se $\boxed{\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)}$

" SEMICONTINUA SUPERIORMENTE in x_0 se $\boxed{\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)}$

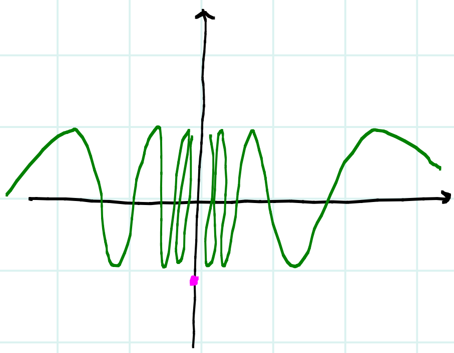
Fatto semplice f è continua in x_0 se e solo se f è contemporaneamente SCI e SCS in x_0

$$f(x_0) \underset{\text{SCI}}{\leq} \liminf_{x \to x_0} f(x) \underset{\text{fatto generale}}{\leq} \limsup_{x \to x_0} f(x) \underset{\text{SCS}}{\leq} f(x_0)$$

<u>Brutalmente</u> : f SCI in x_0 vuol dire che in x_0 la funzione $f(x)$ può "crollare" rispetto a quanto ci aspettiamo guardandola intorno.

<u>Esempio</u>

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ a & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



Se $a \leq -1$, allora f è SCI in $x = 0$
(e anche per $x \neq 0$, dove è continua)
Se $a \geq 1$, allora f è SCS in $x = 0$
Se $a \in (-1, 1)$ allora f non è SCI e non è SCS.

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione SCI.
Allora per forza esiste

$$\min \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

[Weierstrass SCI]

N.B. Il max non è obbligato ad esistere.

Analogamente: se f è SCS in $[a,b]$, allora esiste per forza il max, ma non è detto che esista il min.

— o — o —

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $\qquad 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \dots$

È chiaro che la serie converge (ci sono tanti modi:
→ criterio rapporto
→ criterio radice
→ confronto asintotico con $\frac{1}{n^{2025}}$)

Per calcolare la somma considero $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n^2}_{c_n} x^n$ e metto $x = \frac{1}{2}$

Per quali x converge? $\quad L = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$

$\rightsquigarrow R = \frac{1}{L} = 1 \quad \rightsquigarrow$ in questo caso conv. $\iff x \in (-1,1)$

$\boxed{\text{Oss. generale}}$ Quando non esiste $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, vale la stessa formula per R considerando il limsup (la dimostrazione è sostanzialmente la stessa)

Ora però devo calcolare $f(x)$ per ogni $x \in (-1,1)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } n=0 \\ \text{viene } 0}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (n x^n)'$$

$$\overset{\text{teo. scambio}}{=} x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)'$$

Ora pongo $g(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^n$ e cerco di calcolare questa

$$g(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n\geq 1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n\geq 1}^{\infty} (x^n)' =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo. scambio}}}{=} x \Big(\underbrace{\sum_{n\geq 1}^{\infty} x^n}_{\substack{\uparrow \\ \text{geometrica che so calcolare}}} \Big)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \, \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ma allora $f(x) = x\, g'(x) = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = x \left(x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right)'$

$$= x \left(\frac{1}{(1-x)^2} + x \, \frac{2}{(1-x)^3} \right)$$

$$= x \, \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Sostituendo $x = \frac{1}{2}$ abbiamo il valore richiesto

Strada facendo ho usato $\sum_{n\geq 1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$= x\,(1 + x + x^2 + \ldots)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrica}}}{=} x \, \frac{1}{1-x}$$

FATTO GENERALE Allo stesso modo si fanno tutte le serie

$$\sum_{n=a}^{+\infty} \underbrace{p(n)}_{\substack{\uparrow \\ \text{qualunque polinomio di } n}} x^n$$

Esercizio 2 Calcolare la somma di $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

$$\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$$

Questa converge se e solo se $x \in [-1,1]$ ($L=1$ e converge anche per $x=\pm 1$)

Chiamo $f(x)$ la somma. Allora

$$f'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\right]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo.} \\ \text{scambio}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n(n+1)}\right)' = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)}}_{\text{la chiamo } g(x)}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

Ora $$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = -\log(1-x) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primo termine}}}{x}$$

Quindi $g(x) = \frac{1}{x^2}(-\log(1-x) - x)$. Ma allora

$$f'(x) = -\frac{\log(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}$$

e quindi per trovare $f(x)$ basta fare la primitiva che si annulla in $x=0$ (perché $f(0)=0$ dalla serie)

$$\int \left(-\frac{\log(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = -\log|x| - \underbrace{\int \frac{\log(1-x)}{x^2}\, dx}_{\text{Questo si fa facilmente per parti}}$$

$\boxed{\text{Metodo alternativo}}$ $\frac{x^n}{n(n+1)}$ ora ricordiamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$ ... facendo il conto ... $A=1$ e $B=-1$, quindi

$$\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1} = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

si calcolano facilmente a partire dagli sviluppi di $\log(1-x)$

Discorso analogo per $\sum \frac{P(n)}{q(n)} x^n$.