ANALISI 1 - LEZIONE 083

Note Title 08/03/2017

Esempio 1 $\dot{u} = u^p \qquad u(0) = \alpha > 0$

Se $p=1$ è un' eq. lineare $\dot{u} = u$

Se $p>1$, allora tutte le soluzioni con $\alpha > 0$ hanno blow up nel futuro.

La integro come equ. a var. separabili $\frac{du}{dt} = u^p$

$$\frac{du}{u^p} = dt \; ; \quad u^{-p}\,du = dt \; ; \quad \frac{1}{-p+1} u^{-p+1} = t + c$$

$$u^{-p+1} = (1-p)t + c \; ; \quad \frac{1}{u^{p-1}} = c - (p-1)t$$

$$u^{p-1} = \frac{1}{c-(p-1)t} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{[c-(p-1)t]^{\frac{1}{p-1}}}$$

Trovo c

$$\alpha = u(0) = \frac{1}{c^{1/(p-1)}} \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha^{p-1}}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha^{p-1}} - (p-1)t\right]^{\frac{1}{p-1}}}}$$

$\Rightarrow$ BLOW UP quando $t = \frac{1}{p-1}\frac{1}{\alpha^{p-1}} > 0$

Oss. Più α è grande e più il tempo di vita è piccolo.

Ricordiamo che, essendo l' eq. autonoma, tutte le soluzioni si ottengono l' una dall' altra per traslazione dx - sx

Per $p<1$ la formula è la stessa, ma non è più vero che il tempo è positivo.

<u>Esempio 2</u> $\dot{u} = -u^p$ $\quad u(0) = \alpha > 0$

Ora le soluzioni sono decrescenti stesso conto di prima

$$u(t) = \frac{1}{[c + (p-1)t]^{\frac{1}{p-1}}} \qquad \text{con} \quad c = \frac{1}{\alpha^{p-1}}$$

Tutte le soluzioni sono definite per ogni $t \geq 0$ e tendono a 0. Inoltre l'ordine di infinitesimo e la parte principale non dipendo da α

$$u(t) \sim \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{p-1}}}$$

Invece se l'eq. fosse lineare $\dot{u} = -u$ le soluzioni sarebbero

$$u(t) = +\alpha e^{-t}$$

e quindi il comportamento all'infinito dipende da α.

—o—o—

<u>Esempio 3</u> $\dot{u} = \dfrac{\cos t}{u^2}$ $\quad u(0) = \alpha > 0$

Studiare, al variare di α, l'esistenza globale per $t \geq 0$.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\cos t}{u^2} \rightsquigarrow u^2\, du = \cos t\, dt \rightsquigarrow \frac{u^3}{3} = \sin t + c$$

$$u^3 = 3 \sin t + c \rightsquigarrow u(t) = \sqrt[3]{3 \sin t + c} \rightsquigarrow c = \alpha^3$$

$$\boxed{u(t) = \sqrt[3]{\alpha^3 + 3 \sin t}}$$

Per dare senso all'equazione occorre che sia $u(t) > 0$, quindi

$\alpha^3 + 3 \sin t > 0$ per ogni $t \geq 0$. Le cose vanno male quando

$\sin t = -\frac{1}{3}\alpha^3$. Quindi

- se $\alpha^3 > 3$, allora esist. gl.
- se $\alpha^3 \leq 3$, allora c'è BD in tempo finito.

Esempio 4 $\ddot{u} - 3\dot{u} - 4u = 0$ $\qquad \int_0^{+\infty} u(t)\,dt = 2017$

Due parametri liberi, una condizione...

$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad (x-4)(x+1) = 0 \qquad x = +4$ e $x = -1$

$$\boxed{u(t) = ae^{4t} + be^{-t}}$$ Sol. generale

Se voglio che l'int. impr. converga, allora per forza $a=0$
A quel punto resta

$$b\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt}_{1} = 2017 \rightsquigarrow b = 2017$$

$\Rightarrow$ L'unica soluzione è $u(t) = 2017\, e^{-t}$.

Esercizio 5 Autovalori della derivata seconda.
Determinare tutti i numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste una funzione u non identicamente nulla tale che

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$ $\leftarrow$ Non sono condizioni tipiche del pbm. di Cauchy.

Se voglio risolvere l'eq. ci sono 3 casi

$x^2 = \lambda$ e le radici dipendono dal segno di λ

Fatto 1 Se riesco a risolvere, allora $\lambda < 0$

$\ddot u = \lambda u$. Moltiplico a dx e sx per u

$\lambda u^2 = \ddot u u$ Integro in $[0,1]$

$$\lambda \int_0^1 u^2(t)\,dt = \int_0^1 \ddot u(t) u(t)\,dt = -\int_0^1 \dot u^2(t)\,dt + \underbrace{[\dot u(t) u(t)]_0^1}_{=0}$$

Quindi

$$\lambda \int_0^1 u^2(t)\,dt = -\int_0^1 \dot u^2(t)\,dt \Rightarrow \lambda < 0$$

(se fosse $\lambda = 0$ dovrebbe essere $\int_0^1 \dot u^2(t)\,dt = 0$ ma allora

$\dot u(t) \equiv 0$, cioè u costante, ma allora $u \equiv 0$ perché è 0 in $t=0$ e $t=1$)

Fatto 2 Sapendo che $\lambda < 0$, $x^2 = \lambda$ ha come radici $x = \pm\sqrt{-\lambda}\, i$ quindi la sol. gen. dell'eq. è

$$u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda}\, t) + b \cos(\sqrt{-\lambda}\, t)$$

Impongo le 2 condizioni $u(0) = 0 \rightsquigarrow b = 0$

$\rightsquigarrow u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda}\, t) \rightsquigarrow$ impongo $u(1) = 0$

$a \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \rightsquigarrow$ ci sono due casi

- se $\sin(\sqrt{-\lambda}) \neq 0$, allora $a = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ e non mi va bene
- se $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$, cioè $\sqrt{-\lambda} = k\pi$ (con $k \in \mathbb{N}_+$), cioè $\lambda = -k^2\pi^2$,

allora ogni valore di a va bene, quindi ci sono ∞ soluzioni

Conclusione: i valori di λ per cui esiste sol non nulla sono quelli del tipo $\lambda = -k^2\pi^2$.
Per quei valori di λ ci sono ∞ soluzioni.

— o — o —

Esercizio 6
$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 a(t) \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

È vero che tutte le soluz. hanno blow up per $t \geq 0$?

Formula $\quad \frac{du}{u^2} = a(t)\,dt \quad ; \quad -\frac{1}{u} = A(t) + c$

$$\frac{1}{u} = -A(t) + c \qquad \boxed{u(t) = \frac{1}{c - A(t)}}$$

$\alpha = u(0) = \frac{1}{c}$ se ho scelto $A(t)$ in modo che $A(0) = 0$

$\rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow u(t) = \frac{\alpha}{1 - \alpha A(t)}$

c'è blow up se $\quad A(t) = \frac{1}{\alpha}$

Se voglio che abbia soluzione per ogni $\alpha > 0$, serve che $A(t)$ assuma tutti i possibili valori positivi. Questo accade, per esempio, se

$$\int_0^{+\infty} a(t)\,dt = +\infty$$
$$\parallel$$
$$\lim_{t \to +\infty} A(t)$$

[Oss. Se $A(t)$ fosse limitata sup, allora per α piccolo non ci sarebbe soluzione di $A(t) = \frac{1}{\alpha}$]