ANALISI 1 — LEZIONE 056

Note Title 28/11/2016

<u>Domanda</u>: esistono funzioni integrabili?

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ Le seguenti classi di funzioni sono integrabili su un intervallo

1. funzioni continue,
2. funzioni monotone,
3. funzioni con un numero finito di punti di discontinuità.

Ce ne sono anche altre.

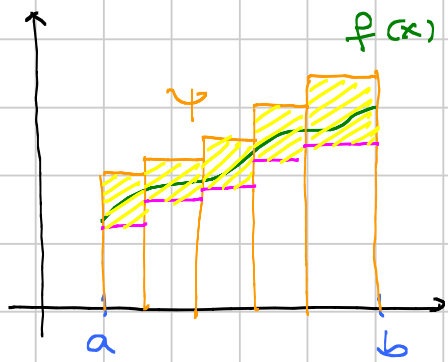
<u>Oss.</u> Anche solo per dimostrare che le costanti sono integrabili si passa per le seccature descritte alla lez. precedente.

<u>Criterio di integrabilità</u> Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono 2 step functions $\varphi_\varepsilon(x)$ e $\psi_\varepsilon(x)$, definite a partire dalla stessa suddivisione di $[a,b]$, tali che

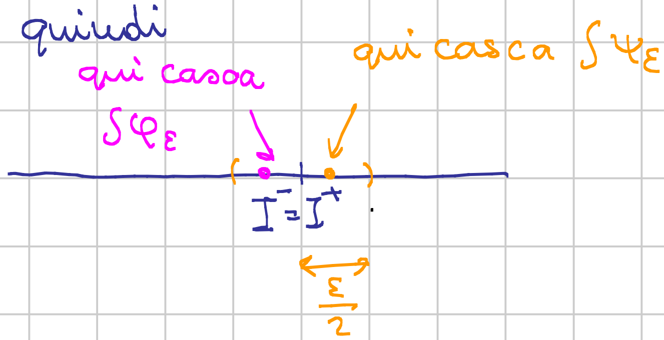
$$\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e

$$\underbrace{\int_a^b \left(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)\right) dx}_{\substack{\shortparallel \\ \text{somma aree degli "avanzi"}}} \leq \varepsilon$$



$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta osservare che $I^+ = I^-$, quindi



—o—o—

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTEGRABILI

① Se f e g sono integrabili in $[a,b]$, allora $f+g$ lo è e

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso il criterio di integrabilità. Fisso $\varepsilon > 0$.
Poiché f è integrabile, esistono φ_ε^1 e ψ_ε^1 s.f. tali che

$$\varphi_\varepsilon^1(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon^1(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon^1(x) - \varphi_\varepsilon^1(x))\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente per g ...

$$\varphi_\varepsilon^2(x) \leq g(x) \leq \psi_\varepsilon^2(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon^2(x) - \varphi_\varepsilon^2(x))\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora sommando $\underbrace{\varphi_\varepsilon^2(x) + \varphi_\varepsilon^1(x)}_{\varphi_\varepsilon(x)} \leq f(x) + g(x) \leq \underbrace{\psi_\varepsilon^2(x) + \psi_\varepsilon^1(x)}_{\psi_\varepsilon(x)}$

e

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x))\,dx = \int_a^b \psi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^2 + \int_a^b \psi_\varepsilon^1 - \varphi_\varepsilon^1 \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon = \varepsilon$$

sto usando che l'integrale della somma è la somma degli int., ma solo a livello di s.f.

—o—o—

② Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x)$ è integrabile e

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Dim. Analoga a prima, ma occhio al caso $\lambda < 0$ (le step sopra / sotto si invertono)

Riassunto di ① e ② L'insieme delle funzioni integrabili è uno sp. vett. e l'integrale è un'appl. lineare.

Achtung! Non è vero in generale che

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_a^b f(x) \cdot dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

Domanda: quando è vero?

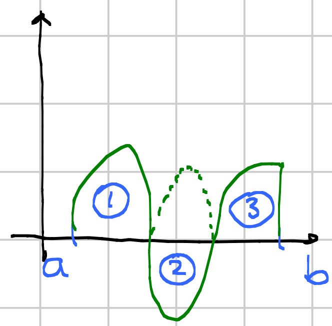
③ Se $f(x)$ è integrabile, allora $|f(x)|$ è integrabile e vale

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx}$$

Interpretazione geometrica

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = |\text{Area ①} - \text{Area ②} + \text{Area ③}|$$

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \text{Area ①} + \text{Area ②} + \text{Area ③}$$



Ci si riduce alla disug. da precorso $|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$

④ Se $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$ e $f(x)$ è integrabile, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

Più in generale, se $f(x) \geq g(x)$ in $[a,b]$ e sono integrabili, allora

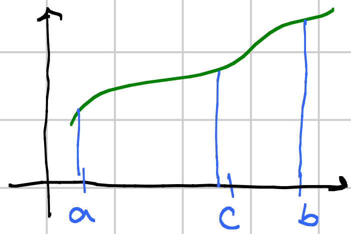
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$ (MONOTONIA dell'integrale)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta dim. la prima e poi usare la linearità $(f-g)$
Per la prima, basta osservare che $\varphi(x) \equiv 0$ è una step function che contribuisce a def. $I^-(f,[a,b])$

⑤ Additività rispetto zona di integrazione

Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e $c \in (a,b)$, allora f è integr. in $[a,c]$ e $[c,b]$ e vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta aggiungere sempre c tra i punti della suddiv. quando si fanno le sf sopra/sotto.

In alternativa: se ho definito l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ ponendo la funzione $=0$ fuori dall'intervallo, allora diventa un caso particolare di integrale della somma.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_{ab}(x)\,dx \qquad f_{ab}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_{ac}(x)\,dx \qquad f_{ac}(x) = \dots$$

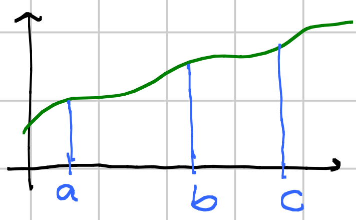
$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_{cb}(x)\,dx \qquad f_{cb}(x) = \dots$$

Allora $f_{ab}(x) = f_{ac}(x) + f_{cb}(x)$.

Oss. Un enunciato analogo vale anche se $c \notin [a,b]$, ricordando la def. iniziale ad estremi invertiti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

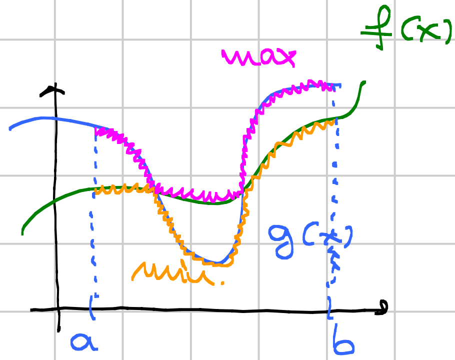
$$\int_c^b f(x)\,dx \;\text{"="}\; -\int_b^c f(x)\,dx$$



⑥ Proprietà di reticolo Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili, allora

$$\max\{f(x), g(x)\} \quad e \quad \min\{f(x), g(x)\}$$

sono integrabili (nello stesso intervallo)



$\boxed{\text{Dim.}}$ Posso usare le step. f, ma va lunga.

Trucco algebrico: per ogni a e b in $\mathbb{R}$

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Quindi segue dalla linearità e dal valore assoluto.

⑦ Prodotto Il prodotto di funzioni integrabili è integrabile (anche se non c'è la formula per l'integrale del prodotto)

Cose non dimostrate: → valore assoluto,
→ prodotto.

— o — o —