ANALISI 1 — LEZIONE 33

Note Title 09/11/2024

$\boxed{\text{Derivate di alcune funzioni elementari}}$

$\boxed{f(x) = x^2}$ $\boxed{\text{Via rapp. increm.}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} (2x_0+h) = 2x_0$$

$\boxed{\text{Via diff.}}$

$$\underbrace{(x_0+h)^2}_{f(x_0+h)} = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + 2x_0 \cdot h + \underbrace{h^2}_{o(h)}$$

$2x_0$: per forza è $f'(x_0)$

Idem con il cubo (e altre potenze intere)

$$(x_0+h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot h + \underbrace{\boxed{3x_0h^2 + h^3}}_{o(h)}$$

$3x_0^2$: $f'(x_0)$

$\boxed{f(x) = e^x}$ $\boxed{\text{Via rapp. increm.}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \boxed{\frac{e^h - 1}{h}} = e^{x_0}$$

$\frac{e^h-1}{h} \to 1$

$\boxed{\text{Via diff.}}$

$$e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^h = e^{x_0}(1 + h + o(h))$$

sviluppino

$$= e^{x_0} + e^{x_0} \cdot h + o(h)$$

e^{x_0}: $f'(x_0)$

$\boxed{f(x) = \sin x}$ $\boxed{\text{Via rapp. increm.}}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

Formula SUM → PRODUCT

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\sin x_0 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h}}}_{\to 0} + \cos x_0 \underbrace{\boxed{\frac{\sin h}{h}}}_{\to 1} \right] = \cos x_0$$

$\boxed{\text{Via diff.}}$

$$\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h$$

$$= \sin x_0 \, (1 + o(h)) + \cos x_0 \, (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + \underbrace{\cos x_0}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h)$$

$\boxed{f(x) = \cos x}$ Via differenziale:

$$\underbrace{\cos(x_0+h)}_{f(x_0+h)} = \cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h$$

$$= \cos x_0 \, (1 + o(h)) - \sin x_0 \, (h + o(h))$$

$$= \underbrace{\cos x_0}_{f(x_0)} \underbrace{- \sin x_0}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h)$$

$\boxed{f(x) = \tan x}$

$$[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]'$$

Uso regola per quoziente

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \rightsquigarrow \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\rightsquigarrow 1 + \tan^2 x$$

$\boxed{f(x) = \log x}$ $\boxed{\text{Via rapp. increm.}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log(x_0)}{h} \underset{\uparrow \text{propr. log.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}} \cdot x_0 = \frac{1}{x_0}$$

$\downarrow 1$ pongo $y = \frac{h}{x_0}$

e vedo che $y \to 0$

$\boxed{\text{Via diff.}}$ $\log(x_0+h) = \log\left[x_0 \cdot \frac{x_0+h}{x_0}\right]$

sviluppino $\log(1+t) = t + o(t)$

$$= \log x_0 + \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

$$= \log x_0 + \underset{\uparrow f'(x_0)}{\frac{1}{x_0}} \cdot h + o(h)$$

$\boxed{\text{Morale della favola}}$ → Derivate delle funzioni elementari

→ Limiti notevoli

→ Sviluppini

sono tre facce della stessa medaglia

$\boxed{f(x) = a^x}$ $[a^x]' = [e^{x\log a}]'$ regola della composizione

$$= e^{x\log a}[x\log a]' = \log a \cdot e^{x\log a} = \log a \cdot a^x$$

$\boxed{f(x) = x^\alpha}$ $[x^\alpha]' = [e^{\alpha\log x}]'$ ... composizione ...

$\uparrow \alpha \in \mathbb{R}$

$$= e^{\alpha\log x} \cdot [\alpha\log x]' = e^{\alpha\log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x}$$

$$= \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$\boxed{\text{Funzioni inverse}}$ Sia $f(x)$ una funzione che ammette una funzione inversa $g(x)$

[occorrerebbe precisare da dove a dove]

cioè $f(g(x)) = x$.

$\boxed{\text{Supponendo}}$ che tutto sia derivabile, avremmo che

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \qquad \text{cioè} \qquad \boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

Teorema (misterioso) Se f è derivabile e il denominatore è diverso da 0, allora vale la formula.

$\boxed{f(x) = \tan x \quad \text{e quindi} \quad g(x) = \arctan x}$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$[\tan x]' = 1+\tan^2 x$

$\boxed{f(x) = e^x \quad \text{e quindi} \quad g(x) = \log x}$

$$[\log x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(\log x)} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

$\boxed{f(x) = \sin x \quad \text{e quindi} \quad g(x) = \arcsin x}$

$\cos = \sqrt{1-\sin^2}$

$$[\arcsin x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Oss. Abbiamo usato che $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Questa formula è corretta nel primo e quarto quadrante, cioè per $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Fortunatamente abbiamo usato la formula con $\alpha = \arcsin x$, che assume solo valori in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La dimostrazione per $\arccos x$ è analoga.

Esempi (Calcolo di derivate)

$f(x) = \cos(e^x)$

$f'(x) = -\sin(e^x)\cdot e^x$ (composizione)

$f''(x) = -\cos(e^x)\, e^x\cdot e^x - \sin(e^x)\cdot e^x$ composizione e prodotto

$= -e^{2x}\cos(e^x) - e^x \sin(e^x)$

$f(x) = \arctan(\log(1+x^2))$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\log^2(1+x^2)}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+3x} = (x^2+3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+3x)^{-\frac{2}{3}}(2x+3) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+3x)^2}}\cdot(2x+3)$$

$f(x) = x^{\sin x}$ $\qquad f'(x) = \left[e^{\sin x\cdot\log x}\right]'$

$$= \left[e^{\sin x\cdot \log x}\right]\cdot\left(\cos x\cdot\log x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\log x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\sin x - 1}\cdot\sin x + x^{\sin x}\cdot\log x\cdot\cos x$$

— o — o —