ANALISI I — LEZIONE 28

Note Title 07/11/2024

Esempio motivazionale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\arctan(2\sin x)} - \cos(\tan x) + \log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{\arcsin(3x^2) - 7|x\sin x| + 5\tan x} = \frac{4}{5}$$

Divido e moltiplico sopra e sotto per x

$$\frac{\underbrace{\boxed{\dfrac{e^{\arctan(2\sin x)}-1}{x}}}_{\to 2} + \underbrace{\boxed{\dfrac{1-\cos(\tan x)}{x}}}_{\to 0} + \underbrace{\boxed{\dfrac{\log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{x}}}_{\to 2}}{\underbrace{\boxed{\dfrac{\arctan(3x^2)}{x}}}_{\to 0} - 7\underbrace{\boxed{\dfrac{|x\sin x|}{x}}}_{\to 0} + 5\underbrace{\boxed{\dfrac{\tan x}{x}}}_{\to 1}}$$

Facciamo i 6 limiti

$$\frac{\tan x}{x} \to 1$$

$$\frac{\arcsin(3x^2)}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\arcsin(3x^2)}{3x^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{3x^2}{x}}}_{\to 0}$$

[Nel video c'è arctan invece che arcsin]

$$\frac{|x\sin x|}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché} \\ x\to 0^+}}{=} \frac{\cancel{x}\sin x}{\cancel{x}} \to 0$$

$$\frac{\log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x}))}{\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})}}}_{\to 1} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\,\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}}_{\to 1}}{} \frac{2\sqrt{x}}{\cancel{x}} \to 2$$

$$\frac{e^{\arctan(2\sin x)}-1}{x} = \underbrace{\frac{e^{\arctan(2\sin x)}-1}{\arctan(2\sin x)}}_{\to 1} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(2\sin x)}{2\sin x}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{2\boxed{\sin x}}{\boxed{x}}}_{\to 1} \to 2$$

L'ultimo con il cos per esercizio...

SIMBOLI DI LANDAU (Linguaggio degli infinitesimi)

o piccolo (utile per fare i limiti)

O grande (utile per altre cose)

$\sim$ equivalenza asintotica (pericolosa per fare i limiti)

$\boxed{o \text{ piccolo}}$ Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

Siano $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$ due funzioni

Sia x_0 un p.to in cui fare i limiti $(x_0 \in \overline{\mathbb{R}})$

Def. Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se esiste una funzione $\omega : D \to \mathbb{R}$

$\uparrow$ omega piccolo

tale che

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \qquad \forall x \in D$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

[In poche parole: $f = g \cdot$ qualcosa che tende a 0 per $x \to x_0$]

Def. (Quasi equivalente) Supponiamo di poter dividere per $g(x)$ (cioè $g(x) \neq 0$ per x vicini e diversi da x_0).

Allora $f(x) = o(g(x))$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

[Brutalmente: pensando che $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 per $x \to x_0$, questo dice che "f batte g" quando vengono messe a confronto]

<u>Esempio 1</u> (in tutti gli esempi prendiamo $x_0 = 0$)

$$\underset{\uparrow f(x)}{\sin^2 x} = o(\underset{\uparrow g(x)}{x}) \quad \text{per } x \to 0$$

Con la def. quasi equivalente posso dividere per x e devo verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\boxed{\sin x}}_{\downarrow 0}$$

Con la def. ufficiale sarebbe

$$\underset{\uparrow f(x)}{\sin^2 x} = \underset{\uparrow g(x)}{x} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin^2 x}{x}}}_{= \omega(x) \to 0 \text{ per } x \to 0}$$

<u>Esempio 2</u> $\arctan(x^2) = o(\sin x)$ per $x \to 0$

Posso dividere per $\sin x$ e con la def. quasi equivalente verifico che

$$\frac{\arctan(x^2)}{\sin x} = \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(x^2)}{x^2}}}_{\downarrow 1} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow 1} \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow 0} \longrightarrow 0$$

<u>Esempio 3</u> $$\underset{\uparrow f(x)}{\frac{1}{x^2}} = o\Big(\underset{\uparrow g(x)}{\frac{1}{\sin^3 x}}\Big) \quad \text{per } x \to 0$$

<u>Oss</u>. In questo esempio $f(x)$ e $g(x)$ non tendono a 0 per $x \to 0$

Uso def. ufficiale $$\underset{\uparrow f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \underset{\uparrow g(x)}{\frac{1}{\sin^3 x}} \quad \underset{\uparrow \omega(x)}{\frac{\sin^3 x}{x^2}}$$

$$\omega(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \sin x \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \to 0.$$

$\boxed{\text{Proprietà di o piccolo}}$ Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$
$$f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

$\boxed{f_1 + f_2}$ Per ipotesi

$$f_1(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) \qquad \lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = \lim_{x \to x_0} \omega_2(x) = 0$$
$$f_2(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$$

Ma allora

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{[\omega_1(x) + \omega_2(x)]}_{\omega_3(x) \to 0 \text{ perché somma...}}$$

Quindi $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$

Stessa cosa per la differenza

$\boxed{7 f_1}$ $\quad 7 f_1(x) = 7 g(x) \cdot \omega_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{7\omega_1(x)}_{= \omega_3(x) \to 0}$

Quindi $7 f_1(x) = o(g(x))$ e più in generale

$$a f_1(x) = o(g(x)) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}$$

$\boxed{f_1 \cdot f_2}$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) \cdot g(x) \cdot \omega_2(x)$$
$$= g(x)^2 \cdot \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x) \to 0}$$

Quindi $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x)^2)$

$\boxed{\dfrac{f_1}{f_2}}$ $\quad \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\cancel{g(x)} \cdot \omega_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot \omega_2(x)} = \dfrac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = \dfrac{0}{0} \rightsquigarrow$ BOH

supp. di poter dividere

[Brutalmente: se f_1 e f_2 battono entrambe g, non ho informazioni per sapere chi vince tra f_1 ed f_2]

Riassunto brutale

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$
$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$
$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH}$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

Transitività di o piccolo

Supponiamo che $f(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$
$h(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Allora

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

Per ipotesi $f(x) = h(x) \cdot \omega_1(x)$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = \lim_{x \to x_0} \omega_2(x) = 0$
$h(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$

Ma allora

$$f(x) = g(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x) \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0}$$

Altra proprietà Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$, allora
$\sin(f(x)) = o(g(x))$ per $x \to 0$
(almeno nel caso in cui $f(x) \to 0$)

Per ipotesi $f(x) = g(x)\,\omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$

Ma allora

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x) \cdot \omega(x))$$

$$= \frac{\sin(g(x) \cdot \omega(x))}{g(x) \cdot \omega(x)}\, g(x) \cdot \omega(x)$$

$$= g(x) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin(g(x) \cdot \omega(x))}{g(x) \cdot \omega(x)}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{\omega(x)}}_{\downarrow\, 0}$$