19 Massimi e minimi per funzioni di più variabili

19.1 Ripasso in una variabile

Ricordiamo che nell'analisi in una variabili abbiamo visto una serie di teoremi per trovare i massimi ed i minimi, come il teorema di Weristrass, esso diceva che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua allora esistono sicuramente $\max\limits_{x\in[a,b]} f$ e $\min\limits_{x\in[a,b]} f$.
Le ipotesi importanti in questo teorema è che a,b sono inclusi nell'intervallo e l'intervallo è chiuso, f continua su $[a, b]$ e che max, min sono il massimo valore assunto della funzione il minimo valore assunto della funzione. I punti in cui la funzione assume il max, min si dicono punti di max, min.

Dove cerchiamo i punti di massimo e minimo in una dimensione?

1. Possiamo cercare i punti $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$. Questi punti si dicono punti stazionari interni. Si dice stazionario perché è legato all'annullarsi della derivata prima, interni è perché siamo in (a,b) e quindi escludiamo gli insiemi.

2. Sennò possiamo cercare i punti $x_0 \in (a, b)$ tali che $f'(x_0)$ non esiste, che si dicono punti singolari interni, singolari perché la derivata non esiste.

3. L'ultima categoria sono i punti $x_0 = a$ e $x_0 = b$ che sono gli estremi dell'intervallo e si chiamano i punti di bordo o di frontiera.

Nell'analisi ad una dimensione quindi si trovano i punti del tipo (1) (2) (3), si vanno a costituire in f e si controlla dove f viene massimizzato o minimizzato.
Quello che dobbiamo ora fare e generalizzare questo metodo a funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Per farlo dobbiamo generalizzare:

- La continuità, che però l'abbiamo già fatto infatti sappiamo quando $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua.
- La chiusura, che sappiamo infatti $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se E^c è aperto, in sintesi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se contiene tutto il suo bordo.
- La limitatezza, che pure sappiamo: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists\, R > 0$ tale che $E \subseteq B_r(0)$.

Ci manca un un unica definizione per poi poter generalizzare.

19.2 Teorema di Weristrass in n dimensioni

Definizione 19.2.1 (Compatto)**.** *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **compatto** se è limitato e chiuso.*

Esempio 19.2.1. Esempio di un compatto, $\mathbb{R}(n = 1)[a, b]$ è un compatto di $\mathbb{R}$

Teorema 19.2.1 (Teorema di Weristrass in n dimensioni)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $\max\limits_{x\in A} f(x)$ e $\min\limits_{x\in A} f(x)$

I punti di minimo e massimo vanno ricercate nelle 3 categorie seguenti:

1. Punti stazionari interni: che sonno i punti interni all'insieme in cui $\nabla f = 0$.
2. Punti singolari interi: punti interni all'insieme in cui f non è differenziabile.
3. Punti di bordo: i punti del bordo in n dimensioni possono essere ∞.

Osservazione 19.2.1. Non appena una le ipotesi non sono verificate, allora il massimo ed il minimo possono comunque esistere ma non necessariamente.

19.3 Calcolo massimi e minimi

Per funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se x_0 è un punto $x_0 \in (a, b)$ di massimo o minimo e in quel punto $\exists\, f'(x_0)$ allora $f(x_0) = 0$. C'è un analogo anche per le funzioni in n variabili.

Teorema 19.3.1. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$, se x_0 è punto di massimo o minimo interno ad A se esistono le derivate parziali di f in x_0 allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Quindi $\nabla f(x_0) = 0$ è una condizione necessaria affinché un punto sia di minimo e di massimo.

Dimotrazione 19.3.1. Supponiamo di avere $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e che $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ (punti interni di A) e supponiamo che (x_0, y_0) sia punto di minimo (o massimo) e supponiamo anche che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono in (x_0, y_0).
Io ora voglio dimostrare che $\frac{\partial 0}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e che $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ (quindi che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$). Consideriamo la funzione $g(t) = f(x_0 + t, y_0)$, poiché abbiamo ipotizzato che (x_0, y_0) è punto di minimo per f $\implies g(t)$ ha un minimo per $t = 0$. g(t) però è una funzione di una variabile ed ha un minimo per il teorema in una dimensioni si può concludere che $g'(0) = 0$ che è $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.
Analogamente, possiamo considerare la funzione $h(t) = (x_0, y_0 + t)$, anche in questo caso se vado a considerare $h'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ poiché f ha un minimo per $t = 0$. Se (x_0, y_0) fosse stato un massimo, avrei ragionato in modo analogo. ■

A livello pratico quando cerco punti di massimo e minimo andrò a considerare i punti stazionari interi, cioè quelli dove $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.
A questo punto possiamo vedere come determinare i massimi ed i minimi di una funzione f continua su in insieme compatto A.

19.3.1 Calcolo intuitivamente

Esempio 19.3.1. Prendiamo $f(x, y) = 2x + 3y$ definita su $A = [0, 1] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ e f continua su A compatto e quindi in A $x \geq 0$ e $y \geq 0$, quindi per il teorema di Weristrass ci dice che $\exists\, max, min$ in f. Intuitivamente il punto di massimo sarà il punto in cui massimizzo sia x che y, infatti il punto sarà $(1, 2)$ ed il massimo sarà $f(1, 2) = 8$ mentre il punto dove minimizzo f quindi minimizzo sia x che y quindi sarà il punto $(0, 0)$ e varrà $f(0, 0) = 0$.

Esempio 19.3.2. Prendiamo $f(x, y) = 2x - 3y$ e insieme $A = [0, 1] \times [0, 2]$ in A $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Anche in questo caso troviamo il massimo con la massima x ed la massima y quindi $(1, 0)$ quindi $f(1, 0) = 2$, mentre per il minimo si cercherà la (x, y) minima possibile che è $(0, 2)$ e quindi $f(0, 2) = -6$. Notiamo che $\nabla f = (2, -3)$ e quindi $\nabla f \neq 0$, (1,0) e (0,2) sono punti di bordo infatti il gradiente non si annulla mai.

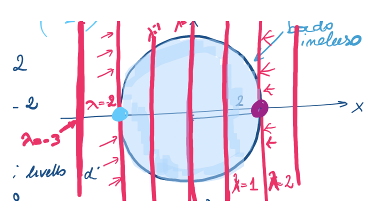
Esempio 19.3.3. $f(x, y) = x^2 - y$, prendiamo $A = [-1, 2] \times [-2, 3]$, f continua su A, in questo caso però la x e la y possono cambiare segno.
Per trovare un punto si massimo bisogna vedere quando viene massimizzato il valore assoluto di x ed in questo caso viene massimizzato con $x = 2$ rispetto a y, visto che sto "togliendo" devo prendere il valore più negativo perché ci sarà un cambio di segno e si aggiungerà il valore più grande, quindi $y = -2$, il risultato è il punto $(2, -2)$, quindi $f(2, -2) = 6$.
Per il punto di minimo bisogna vedere quando viene minimizzato x^2 che è 0, e per la y si cerca il valore più grande visto che abbiamo un "-y", il risultato è (0,3), e quindi $f(0, 3) = -3$,

19.3.2 Metodo degli insiemi di livello

Vediamo alcuni esempi per spiegare questo metodo di calcolo.

Esempio 19.3.4. Consideriamo $f(x, y) = x$ e con A = cerchio (disco) con centro in (0,0) e raggio 2 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 4\}$.

In questo caso ci aspettiamo che il punto di massimo sia $(2, 0)$ e il minimo $(-2, 0)$ quindi $max(f) = 2$ e $min(f) = -2$.
Le linee di livello di $f(x, y)$ sono $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x, y) = \lambda\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\not\leq} \;:\; x = \lambda\}$ = linee di livello sono rette parallele all'asse y.

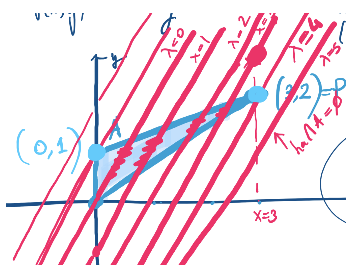


- Si può osservare in questo esempio che il massimo di $f(x,y)$ in A è il più grande λ tale che $A \cap \{(x,y)\ :\ f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset$, in questo caso è $\lambda = 2$ che è il massimo di f.

- Mentre il minimo di $f(x,y)$ in A è il più piccolo λ tale che $A \cap \{(x,y)\ \ f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset$, quindi in questo caso $\lambda = -2$ e quindi $min(f) = -2$.

Possiamo riassumere questo metodo dicendo che andiamo a cercare il più grande e il più piccolo λ per i quali l'insieme di livello λ interseca A.

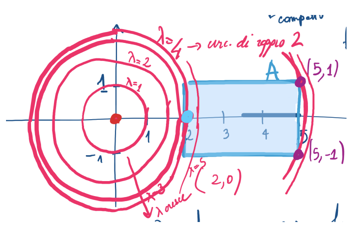
Esempio 19.3.5. Dato $f(x,y) = 2x - y$ e $A =$ triangolo con vertici $(0,0), (0,1), (3,2)$.



f continua si A e compatto quindi per Weirstrass esiste sia massimo che minimo in f. In questo caso il metodo intuitivo non è fattibile quindi si usa le linee di livello, sappiamo che $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ f(x,y) = \lambda\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x - y = \lambda\}$ linee di livello λ. Se $\lambda = 2$ ho $y = 2x - 2$, con $\lambda = 3$ ho $y = 2x - 3$ (in questo caso ancora la retta interseca il triangolo), con $\lambda = 4$ ho $y = 2x - 4$ per $x = 3$ ho $y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$ retta passante per $(3,2)$, se λ più grande per cui l'insieme dato A interseca le linee di livello λ è $\lambda = 4$ quindi per il metodo delle linee di livello $max(f) = 4$ che il punto $(3,2)$.

Per il punto minimo si procede analogamente ma con λ più piccoli, possiamo vedere in questo caso che $\lambda = -1$ è il pià piccolo λ tale che $\{\text{linee di livello } \lambda\} \cap A \neq 0$, quindi $min(f) = -1$ ed il punto di minimo è $(0,1)$.

Esempio 19.3.6. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ su $A = [2,5] \times [-1,1]$, anche in questo caso f è continua su A compatto quindi esistono massimo e minimo.



Le linee di livello λ sono circonferenze con centro nell'origine e raggio $\sqrt{\lambda}$. Il λ più piccolo tale che $L_\lambda \cap A \neq \emptyset$ è $\lambda = 4$ quindi $min(f) = 4$. I punti di coordinate $(5,1)$ e $(5,-1)$ sono tali che $5^2 + 1^2 = 26$ quindi $L_{26} \cap A = (5,1) \cup (5,-1)$, quindi 25 è il λ più grande tale che $L_\lambda \cap A \neq \emptyset$ quindi $max(f) = 26$ e i punti di max sono due $(5,1)$ e $(5,-1)$.

19.3.3 Metodo di parametrizzazione

Per capire questo metodo rifacciamo l'esercizio visto sopra usando appunto questa metodologia di risoluzione.

Esempio 19.3.7. Data $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = [2,5] \times [-1,1]$. Questo metodo ci dice che bisogna cercare i punti max e min in varie categorie.

- Punti stazionari interi, interni perché $(x_0, y_0) \in (2,5) \times (-1,1)$ e $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Nel nostro caso $\nabla f = (2x, 2y)$ che si annulla soltanto se $(x,y) = (0,0)$, ma (0,0) non è punto interno di A quindi non ci sono punti interni stazionari.

- Punti singolari interi, che sono quelli in cui la funzione non è differenziabile. Nel nostro caso $f(x,y) = x^2 + y^2$ è differenziabile su tutto A, quindi non abbiamo punti singolari interni.

- Punti di bordo. Per cercare questi punti ci sono vari metodi, uno di questi è il **metodo della parametrizzazione**, ocn questo metodo parametrizzo i vari pezzi del bordo, e così facendo vedo la funzione come si comporta rispetto questi pezzi.

  1. $\{(t,1)\ \ t \in [2,5]\}$, quindi $g_1(t) = f(t,1) = t^2 + 1$.
  2. $\{(5,t)\ :\ t \in [-1,1]\}$, quindi $g_2(t) = f(5,t) = t^2 + 25$.
  3. $\{(t,-1)\ :\ t \in [2,5]\}$, quindi $g_3(t) = f(t,-1) = t^2 + 1$.

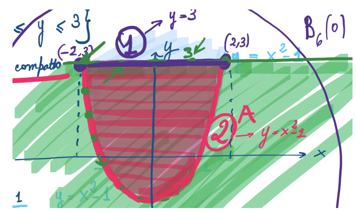
4. $\{(2, t) : t \in [-1, 1]\}$, quindi $g_4(t) = f(2, t) = t^2 + 4$.

Adesso studio le 4 funzioni sopra definite ed ho per ciascuna dei massimi e dei minimi su ogni tratto, poi li confronto e rendo il più piccolo ed il più grande che corrispondono al minimo ed al massimo.

1. Minimo per $t = 2$ e massimo per $t = 5$.
2. Minimo per $t = 0$ e massimo per $t = \pm 1$.
3. Minimo per $t = 2$ e massimo per $t = 5$.
4. Minimo per $t = 0$ e massimo per $t = \pm 1$.

Quindi concludo che $(2, 0)$ è minimo e che $(5, -1)$ e $(5, 1)$ è il punto di massimo.

Esempio 19.3.8. Prendiamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^2 - y + 3$ sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$, A è compatto (essendo sia chiuso che limitato), f è continua su un compatto quindi f ammette max e min per Weirstrass.



In questo caso le linee di livello tali che $3x^2 - y + 3 = \lambda$, $y = 3x^2 + (x + 3)$ non sono un metodo semplice da attuare, quindi optiamo per il metodo classico:

- Calcoliamo i punti stazionari interni $\nabla f = 0$, che quindi è $\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = (6x, -1)$ ma $(6x, -1) \neq 0$ perché -1 è sempre diverso da 0, quindi non esistono punti stazionari interne quindi non esistono max e min tra i punti interni non singolari di A.

- Punti singolari interni non esistono quindi non esistono max e min tra i punti interni di A.

- Punti di bordo, andiamo ad usare la parametrizzazione.

  1. Punti di bordo sono quelli che (1) stanno sulla retta $y = 2$ quindi posso porre $x^2 - 1 = 3$ quindi $x = \pm 2$ e quindi abbiamo come punti $(-2, 3)$ e $(2, 3)$, per parametrizzarlo chiamo $x = t$ e $y = 2$ quindi i punti di tipo (1) sono $(x, y) = (t, 3)$ con $t = [-2, 2]$. Quindi la funzione f rispetto a (1) possiamo chiamarla $g_1(t) = f(t, 3)$ con $t \in [-2, 2]$ è $g_1(t) = 3t^2$.
  2. Abbiamo poi i punti che stanno sulla parabola $y = x^2 - 1$ per $x \in [-2, 2]$ quindi di tipo (2), per parametrizzare questo bordo prendiamo i punti che possono essere scritti come $(x, y) = (t, t^2 - 1)$ con $t \in [-2, 2]$ quindi avendo come parametro $x = t$, su questo secondo bordo definirò $g_2(t) = f(t, t^2 - 1) = 3t^2 - t^2 + 1 + 4 = 2t^2 + 4$.

Ho quindi sul bordo (1) $g_1(t) = 3t^2$ e su (2) ho $g_2(t) = 2t^2 + 4$ per $t \in [-2, 2]$, ora dobbiamo cercare i massimi ed i minimi.
Per $g_1(t) = 3t2$ ho che:

- Il massimo per $t = -2$ o per $t = 2$ è $g_1(t) = 12$.
- Mentre il minimo per $t = 0$ è. $g_1(t) = 0$.

Invece per $g_2(t) = 2t^2 + 4$ vediamo che:

- Il massimo per $t = -2$ o per $t = 2$ avrò che $g_2(t) = 12$.
- Mentre il minimo come sempre ho $t = 0$ con il quale ho $g_2(t) = 4$.

Avremo dunque come massimo $t = -2$ e $t = 2$ perché abbiamo il valore massimo in entrambi i $g_1, g_2 = 12$, il punto minimo di f è $(0, 3)$ e $f(0, 3) = g_1(0) = 0$.

Ecco alcuni casi notevoli per andare a parametrizzare i bordi:

1. Segmento di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2). Questi punti possono essere parametrizzati andando a scrivere $(x, y) = (a_1, b_1) + t(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ con $t \in [0, 1]$.

2. Il tratto del grafico $y = \varphi(x)$ con $x \in [a, b]$. In generale descriviamo $(x, y) = (t, \varphi(t))$ con $t \in [a, b]$.
3. La circonferenza con centro in $(0, 0)$ e raggio r. Questo caso si parametrizza prendendo $(x, y) = (r \cdot \cos \Theta, r \cdot \sin \Theta)$ con $\Theta \in [0, 2\pi]$.
4. La circonferenza con centro in punto (x_0, y_0) e raggio r. Analogo alla precedente, quindi $(x, y) = (x_0 + r \cdot \cos \Theta, y_0 + r \cdot \sin \Theta)$ con $\Theta \in [0, 2\pi]$.
5. L'ellisse di equazione $ax^2 + by^2 = 1$ con $a, b > 0$. Si parametrizza simile alla circonferenza quindi con $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{a}} \cos \Theta, \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \Theta)$ con $\Theta \in [0, 2\pi]$.

19.3.4 Moltiplicatori di Lagrange

Definizione 19.3.1 (Luogo di zeri)**.** *Data una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ allora l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = 0\}$ si dice **luogo di zeri** della funzione φ (linea di livello $\lambda = 0$).*

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrande serve per trovare possibili punti di massimo e minimo di una funzione f su un insieme A quando il bordo di A è un luogo di zeri di una funzione.

Esempio 19.3.9. Prendiamo $f(x, y)$ su $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$. Il bordo di A è la circonferenza data da $x^2 + y^2 = 3$ (quindi la circonferenza che delimita) questa circonferenza la posso scrivere come $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2 + y^2 - 3 = 0$, se definisco $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ allora il bordo di A è il luogo di zeri della funzione φ e quindi posso usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio 19.3.10. Se invece prendiamo un insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 5\}$, analogamente in questo caso il bordo di A sarà il luogo di zeri della funzione $\varphi = 2x^2 + 3y^2 - 5$ perché quando $\varphi(x, y) = 0$ se e solo se è il bordo di A.

Supponiamo per semplicità di essere in $\mathbb{R}^2$ e supponiamo che V sia il luogo di zeri di $\varphi(x, y)$, allora i candidati ad essere punti di minimo o massimo di f in V si cercano tra le seguenti due categorie.

1. Punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ \nabla \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ Quindi se esiste un punto che soddisfa questo sistema (1) allora tale punto è candidato a punto di massimo e minimo.
   In questo caso (con $\mathbb{R}^2$) ho 3 condizioni perché bisogna determinare che la derivata sia rispetto a x che y sia 0, con più variabili aumentano anche il numero di condizioni.
2. Punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla \varphi(x, y) \text{ per } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$ Deve quindi accadere che il gradiente di f è un multiplo del gradiente di φ. Anche in questo caso dobbiamo risolvere una sistema di 3 equazioni perché dobbiamo verificare sia la derivata rispetto a x che rispetto a y, cerco quindi in questo caso $\lambda, (x, y)$ tali che (2) valga, e quindi in questo caso 3 equazioni per 3 incognite che è più semplice da risolvere. (Il numero λ si dice moltiplicatore di Lagrange)

Esempio 19.3.11. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x - 2y$ e come insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$, f continua su A quindi esiste massimo e minimo. Proviamo come prima cosa proviamo ad utilizzare il metodo classico per la ricerca dei massimi e i minimi, quindi cerchiamo i punti stazionari interni, i punti singolari interni e i punti di bordo.

1. Punti stazionari interni. Il gradiente è $\nabla f(x, y) = (1, -2)$ che è costante e quindi possiamo vedere che non ci sono punti stazionari interni.
2. Punti singolari interni. Dal caso prima possiamo anche dire che non ci sono punti singolari interni.
3. Punti di bordo. I punti del bordo sarà l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$, V è luogo di zeri di $\varphi = x^2 + y^2 - 3$ se $(x, y) \in V \iff \varphi(x, y) = 0$, andiamo allora ad utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per cerare i punti di max e min sul bordo.

(a) Come prima cosa dobbiamo trovare i punti (x, y) tali che $\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ \nabla\varphi(x,y) = 0 \end{cases}$.
Abbiamo già che $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ quindi andiamo a calcolare il gradiente $\nabla\varphi(x, y) = (2x, 2y)$. Possiamo ora scrivere la condizione come $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ le ultime due però sono incompatibili con la prima e quindi non esistono soluzioni per questo sistema.

(b) Ora dobbiamo provare a trovare soluzioni nel sistema $\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ \nabla f(x,y) = \lambda\nabla\varphi(x,y) \end{cases}$, quindi cerco λ, x, y tali che questo sistema sia verificato. Quindi risolviamo

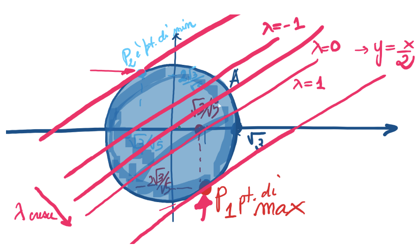
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 1 = \lambda(2x) \\ -2 = \lambda(2y) \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{1}{2x} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{1}{2x} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ 1 + 4 = 3 \cdot 4\lambda^2 \end{cases}$$

l'ultima equazione è uguale a $5 = 12\lambda^2 \implies \lambda^2 = \frac{5}{12} \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$, allora ho le soluzioni

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Quindi ho 2 soluzioni al sistema (2 terne di soluzioni).

I candidati punti di massimo e minimo di f sul bordo $P_1 = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$ e $P_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$, per ora sapere qualche è il massimo e quale è il minimo dovrò valutare $f(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{15}$ che è il max e $f(P_2) = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -15$ che è il min.
Quindi P_1 e punto di massimo e P_2 è punto di minimo.



Possiamo ora chiederci se avessimo usato il metodo delle linee di livello avremmo ottenuto lo stesso risultato. Tramite questo metodo abbiamo la linee di livello $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = \lambda\}$ ovvero $2y = x - \lambda$ oppure $y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}$, quindi le linee di livello sono con $\lambda = 0 \to y = \frac{x}{2}$, con $\lambda = 1 \to y = 1 \to y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ e con $\lambda = -1 \to y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, possiamo vedere come infatti esce una soluzione analoga ma più complessa.

Esempio 19.3.12. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x \cdot y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+3y^2 \leq 5\}$, A è compatta e f è continua su A quindi esistono massimo e minimo.

Andiamo ora a cercare max e min con il metodo classico.

- Punti stazionari interni, $\nabla f(x, y) = (y^2, 2xy)$ vediamo ora i punti dove il gradiente si annulla $\nabla f(x, y) = 0$ quindi $y^2 = 0$ e $2xy = 0$ che fa si che $y = 0$, in tutti questi punti $f(x, 0) = 0$.

- Punti singolari interni non esistono perché il gradiente sull'ellisse considerata non hanno problemi.

- Punti di bordo. Punti in cui $\varphi(x, y) = 0$, dove $\varphi(x, y) = x^2+3y^2-5$, per risolverlo usiamo il metodo dei moltiplicatori di lagrange.

1. Prima proviamo il sistema $\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ \nabla\varnothing = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 5 = 0 \\ 2x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$
dove possiamo vedere che $x = 0$ e $y = 0$ ma questo è incom-

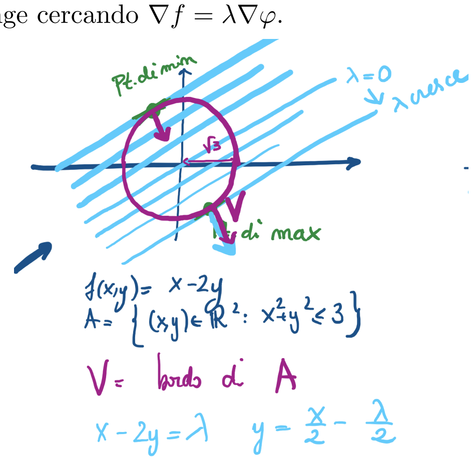
patibile con la prima equazione quindi questo sistema non ha soluzioni.

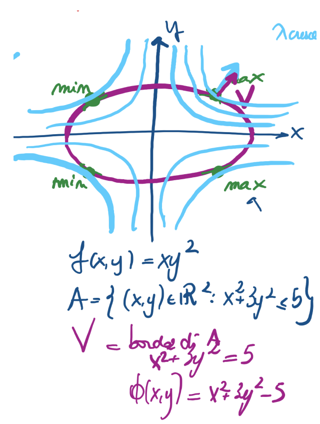
2. Usiamo il secondo sistema
$$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ \nabla f(x,y)=\lambda\nabla\varphi(x,y)\end{cases}=\begin{cases}x^2+3y^2-5=0\\ y^2=2\lambda x\\ 2xy=6\lambda y\end{cases}=\begin{cases}x^2+3y^2-5=0\\ xy=3\lambda y\\ y?2=2\lambda x\end{cases}$$
dalla seconda equazione posso ricavare $y(x-3\lambda)=0$ che mi fa ottenere $x=3\lambda$ e $y=0$ con il quale ottengo $\begin{cases}x=3\lambda\\ y^2=2\lambda\cdot(3\lambda)=6\lambda^2\\ 9\lambda^2+18\lambda^2=5\end{cases}=$
$$\begin{cases}\lambda^2=\frac{5}{27}\to\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\\ x=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\\ y=\pm\sqrt{6}\lambda\end{cases}\quad\text{con il quale ottengo 4 punti}$$
$P_3=(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}), P_4=(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}), P_5=(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},-\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}), P_6=(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},-\sqrt{6}\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}})$
$$\begin{cases}y=0\\ 2\lambda x=0\\ x^2+5=0\end{cases}=\begin{cases}y=0\\ \lambda=0\\ x=\pm\sqrt{5}\end{cases}$$
. Quindi ottengo i due punti $P_1=(\sqrt{5},0)$ e $P_2=(-\sqrt{5},0)$.

In totale o quindi 6 punti e da qui dobbiamo calcolare f in questi punti e prendere i massimo per il max ed il minimo per il min. Vediamo così che $f(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},\pm\frac{\sqrt{10}}{3})=\frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}$ che è il max e $f(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},\pm\frac{\sqrt{10}}{3}=-\frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}$ che è il min.

Se andassimo a vedere le linee di livello, definite dall'equazione $xy^2=\lambda$ che possiamo scrivere come $y^2=\frac{\lambda}{3}$, abbiamo una soluzione analoga a quella con il metodo classico, solo più complessa.

Osservazione 19.3.1. Osserviamo che nei punti di massimo o minimo le linee di livello e la linea di bordo (grafico di φ) sono tangenti. Noi però sappiamo anche che il gradiente è perpendicolare alle linee di livello, e quindi i due gradienti ∇f e $\nabla\varphi$ saranno paralleli, ecco perché nei punti di massimo e minimo risolviamo il sistema (2) in Lagrange cercando $\nabla f=\lambda\nabla\varphi$.





19.3.5 Lagrange geometricamente

Sia V il bordo di A tale che $f:A\to\mathbb{R}$ con $A\subset\mathbb{R}^2$, supponiamo che V sia il luogo dei zeri di $\varphi(x,y)$, e questo vuol dire che V è linea di livello per φ.

1. Nei punti di massimo e minimo le linee di livello di f e la linea di livello $\lambda = 0$ di φ sono tangenti (le linee di livello sono tangenti a V nei punti di massimo e minimo).

2. Sappiamo che ∇f è sempre perpendicolare alle linee di livello di f, e $\nabla\varphi$ è perpendicolare alle linee di livello di $\varphi \implies$ i due gradienti devono essere paralleli tra loro.

3. Quindi ∇f deve essere un multiplo del $\nabla\varphi \implies \nabla f = \lambda\nabla\varphi$.

   In conclusione, geometricamente, risolvere il sistema (2) in Lagrange equivale a cercare quei punti di V in cui le linee di livello di f sono tangenti all'insieme di V stesso.
   Gli esempi in cui il sistema (1) ha soluzioni sono casi molto particolari, vediamo alcuni esempi di questo caso.

   Esempio 19.3.13. $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$, allora $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -3y^2$, quindi il sistema (1) è uguale a $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \end{cases}$
   vediamo che $(x,y) = (0,0)$ è soluzione. Ora però chiediamoci come è fatto V, quindi come è fatto il luogo di zeri di φ. $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \varphi(x,y) = 0\}$, $\varphi(x,y) \iff y^3 = x^2 \iff y = x^{\frac{2}{3}}$. Il risultato geometrico è una cuspide in cui non so definire la condizione di tangenza.

   Esempio 19.3.14. Prendiamo $\varphi(x,y) = xy$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x$, il sistema (1) è uguale a $\begin{cases} xy = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ quindi $(0,0)$ è soluzione. $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, xy = 0\}$ corrisponde hai due assi, quindi il punto (0,0) è l'incrocio dei 2 rami.

19.4 Teorema di Weristrass generalizzato

Nell'analisi ad 1 variabile, il teorema di Weristrass generalizzato ci dice che, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, supponiamo che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ allora esiste $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.
Quindi questa generalizzazione sta nel fatto che l'insieme è definito in un insieme non compatto, per colmare la mancanza di questa ipotesi dobbiamo fare un ipotesi dei limiti ad ∞.

Ora chiediamoci cosa succede per funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Prima cosa dobbiamo chiederci cosa vuol dire andare all'∞ in $\mathbb{R}^n$, questo vuol dire allontanarsi sempre di più dall'origine cioè che $|x|$ (norma) di x va all'∞. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \iff \lim\limits_{x^2+y^2} \to +\infty \iff \lim\limits_{|x|\to+\infty} \iff \lim\limits_{\rho\to\infty}$. Quindi $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$ vuol dire che $\forall\, M \in \mathbb{R}\; \exists R > 0$ tale che $f(x,y) \geq 0$ questo $\forall (x,y) \in B_R((0,0))$, quindi in generale se chiamiamo $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ abbiamo che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande) $\exists\, R > 0$ tale che $f(x) \geq M \;\forall\, x \in B_R(0)^c$ (intorno di ∞).
Da qui possiamo riformulare il teorema di Weristrass generalizzato nel caso di funzioni in più variabili.

Definizione 19.4.1 (Weristrass generalizzato minimo)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e supponiamo che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ (che vuol dire $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$) allora, esiste $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.*

Dimotrazione 19.4.1. Sappiamo che $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$, quindi da definizione di limite $\forall\, M \exists\, R > 0$ tale che $f(x) \geq M \,\forall\, x \in (B_R(0))^c$, scelgo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uguale a $M = f(0) + 1$

allora $\exists\, R > 0$ tale che $f(x) \geq f(0) + 1 \forall\, x \in (B_R(0))^c$.
Considero $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}$ (la linea sopra indica la palla chiusa) con $f : \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq R\}$ ora questo insieme che è $\overline{B_R(0)}$ è compatto, allora so per Werstrass classico che $\exists \min_{x \in \overline{R_R(0)}} f(x) = m$, ora vogliamo dimostra che m è minimo su tutto R^n e non solo su $\overline{B_R(0)}$. Ci sono due casi.

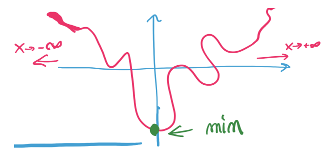
1. Se $|x| \leq R$ (dentro la palla), allora $f(x) \geq m$ per definizione di $m = \min_{B_R(0)} f$.

2. Se $|x| \geq R$ (fuori la palla), allora $f(x) \geq M = f(0) + 1$ (questo per come ho scelto R) $\geq f(0) \geq m$ e questo perché 0 sta nella palla $|x| \leq R$, quindi anche in questo caso $f(x) \geq m$.

   Quindi ho dimostrato che $f(x) \geq m \forall x \in \mathbb{R}^n$ e per il Teorema di Weristrass classico sappiamo che $\exists\, x_0 \in B_R(0)$ tale che $f(x_0) = m$ quindi ho trovato il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$. ■

Tutto questo può essere enunciato in maniera analoga per il massimo di una funzioni in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 19.4.2 (Weristrass generalizzato massimo)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e supponiamo che $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = -\infty$ allora, esiste $\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.*



20 Derivate parziali seconde

Nell'analisi in una variabile per studiare localmente una funzione nell'intorno di un punto stazionario, quindi si faceva $f'(x_0) = 0$ e poi su studiava il segno della derivata seconda $f''(x)$ e concludevamo che se $f''(x_0) > 0$ c'era un minimo locale. Nell'analisi in più variabili non possiamo derivare più volte perché non abbiamo una sola variabile, quindi dobbiamo introdurre le derivate successive per funzioni di più variabili.

La prima cosa che ci verrebbe in mento è quello di derivare parzialmente più volte, quindi avere $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che sono le derivate parziali prime e, per iniziare, come fare le derivate parziali seconde.

Esempio 20.0.1. $f(x, y) = x^2 + y^3 + x^4 \cdot y^5$, $\frac{\partial f}{\partial} = 2x + 4x^3y^5 = g(x, y)$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 5x^4y^4 = h(x, y)$ da qui dobbiamo partire da $g(x, y)$, $h(x, y)$ e ricalcolare le derivate, quindi avrei per esempio per $g(x, y)$ le derivate $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ che però a loro volta si potrebbero scrivere come $\frac{\partial \partial f}{\partial \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$ e $\frac{\partial \partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$. Nel caso di $h(x, y)$ invece ho $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$ e $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$.
Per questo esempio, ho quindi nel caso di une derivata parziali seconde 4 derivate prime. In maniera più generale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \implies n \cdot n = n^2$ derivate parziali seconde.

Osservazione 20.0.1. In generale per una funzioni di n variabili ci sono n derivate parziali prime e n^2 derivate parziali seconde. Il metodo di calcolo è sempre lo stesso.

Esempio 20.0.2. Tornando all'esempio scritto sopra ho che $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x + 4x^3y^5$ che poi va $f_{xx} = 2 + 12x^2y^5$ e $f_{xy} = 20x^3 \cdot y^4$, mentre $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3y^2 + 5^4y^4$ mentre le derivate seconde sono $f_{yy} = 6y + 20x^4y^3$ e $f_{yx} = 20x^3y^4$.

Vediamo dall'esempio sopra che se derivo f_{yx} e f_{xy} abbiamo due risultati uguali, posso quindi dire che in generale questi valori sono sempre uguali. Da qui possiamo enunciare un teorema che parla dell'ordine di derivazione, enunciamo questo teorema per il caso di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorema 20.0.1 (Inversione dell'ordine di derivazione)**.** Se f_{xy} e f_{yx} esistono in un intorno del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$ e sono continue nel punto (x_0, y_0) allora coincidono ovvero $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.