$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = y - 3 \\ 2y = 6 + 4x \end{cases}$$

Studiare un sistema lineare vuol dire decidere in quale categoria si situa. Tre possibilità

→ sol. unica ⇝ trovarla

→ non ha soluzione

→ infinite soluzioni, dipendenti da un certo numero di parametri

$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$ $2^a - 1^a$: $7y = 9$ ⇝ $y = \frac{9}{7}$

⇝ $2x = 3y + 5$

⇝ $2x = \frac{27}{7} + 5 = \frac{62}{7}$ ⇝ $x = \frac{31}{7}$

⇝ soluzione unica $\boxed{(x,y) = \left(\frac{31}{7}, \frac{9}{7}\right)}$ → Perdere 15 sec. a fare la verifica

$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ -4x + 6y = 10 \end{cases}$ $1^a + 2^a$: $0 = 20$:(

⇝ NO SOLUZIONI

$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ ⇝ riga inutile, perché uguale alla prima moltiplicata per -1

$2x - 3y = 5$ ⇝ tutti gli ∞ p.ti della retta sono soluzioni!

Volendo posso porre $y = t$ e trovare $2x = 3y + 5 = 3t + 5$

$x = \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}$

Le infinite soluzioni sono

$\left(\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}, t\right)$ oppure $\left(\frac{5}{2}, 0\right) + t\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

verifica

oppure $\left(\frac{5}{2}, 0\right) + t\,(3, 2)$

$$\left\{\begin{array}{l} 2y = x+1 \\ x = 2y-1 \\ 2x-4y=2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = y+1 \\ 2y = x-y \\ 4y = 2x-1 \end{array}\right.$$

① ②

$$① \left\{\begin{array}{l} -x+2y = 1 \\ x-2y=-1 \\ 2x-4y=2 \end{array}\right.$$

ne basta una

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-1 \\ 2x-4y=2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x-2y=-1 \\ x-2y=1 \end{array}\right.$$

$1^a - 2^a$: $0 = -2$ ☹ ⇝ NO SOLUZIONI

$$② \left\{\begin{array}{l} x-y=1 \\ -x+3y=0 \\ -2x+4y=-1 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-2y=2 \\ \dots \\ -2x+4y=-1 \end{array}\right.$$

$1^a + 3^a$: $2y = 1 \rightsquigarrow y = \frac{1}{2}$

$x = y+1 = \frac{3}{2}$

Controllo la seconda: $-x+3y \overset{?}{=} 0 \qquad -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0$ ☺

Soluzione unica: $(x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Verifica ok

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y+2z=2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ y-3z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right.$$

$2^a - 2\cdot 1^a$

$3^a - 1^a$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ y-3z=0 \\ 4z=0 \end{array}\right.$$

$3^a - 2^a$ ⇝ $z = 0$ ⇝ $y = 3z = 0$ ⇝ $x = 2-y-z = 2$

⇝ soluzione unica $\boxed{(x,y,z) = (2,0,0)}$

PIVOT

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Lavorare alla GAUSS vuol dire prendere la tabella (matrice) e fare una delle seguenti operazioni

→ scambiare 2 righe

→ mettere al posto di una riga R_i la riga $aR_i + bR_j$ dove

- R_j è un'altra riga
- a e b sono due numeri con $a \neq 0$ (e $b \neq 0$)

Obiettivo: portare la matrice nella forma A SCALA

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y-2z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3-R_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ y-3z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$z = t \rightsquigarrow y = 3z \rightsquigarrow y = 3t \qquad x = 2-y-z = 2-3t-t = 2-4t$

Ho infinite soluzioni del tipo $(x,y,z) = (2-4t,\ 3t,\ t)$

$= (2,0,0) + t(-4,3,1)$

$$\begin{cases} -z+w=3 \\ x+y-w=1 \\ 2x+y+w=0 \\ x+z=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \updownarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} R_1 \\ R_2 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \updownarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

[Dopo video: questo sarebbe +3]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$-y-3w=-2 \rightsquigarrow$ trovo y

$-z+w=3 \rightsquigarrow z=w-3$

$5w=6 \rightsquigarrow w=\frac{6}{5}$

$=\frac{6}{5}-3=-\frac{9}{5}$

— o — o —