ANALISI 1 — LEZIONE 028

Note Title 24/10/2016

POLINOMI DI TAYLOR

Obiettivo: approssimare le funzioni con polinomi.

Problema: data una funzione $f(x)$ ed un intero positivo n, trovare un polinomio $P_n(x)$ tale che $\deg P_n \leq n$ e

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0}$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

(il resto è scritto come o piccolo)

Operativamente: nel calcolo di un limite che coinvolge $f(x)$ posso sostituire $f(x)$ con $P_n(x)$, pagando un $o(x^n)$

"Resto": se approx $f(x)$ con $P_n(x)$, il resto è l'errore che commetto, cioè $f(x) - P_n(x)$

Lemma Se per caso per un certo n esiste il $P_n(x)$, allora questo è unico

Dim. Supponiamo ce ne siano 2. Allora

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Sottraendo: $\underbrace{P_n(x) - Q_n(x)}_{\deg \leq n} = o(x^n)$

Questo è impossibile se $P_n - Q_n \neq 0$. Basta scrivere $P_n(x) - Q_n(x) = a_k x^k +$ potenze $+$ alte e dividere per x^n e fare il lim.

— o — o —

Teorema misterioso Sia $r>0$ e sia $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$. Sia $n\geq 1$.
Supponiamo che
(i) f è derivabile $n-1$ volte in $(-r,r)$.
(ii) f è derivabile n volte almeno in $x=0$.

se è derivabile + volte, meglio ancora

Allora esiste $P_n(x)$ ed è dato dalla seguente formula:

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

derivata n-esima

Osservazioni

① La formula di Taylor con resto di Peano si riscrive come

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)}$$

(Taylor - Mc Laurin)

② Passando dal grado n ad $n+1$ basta aggiungere un termine

③ Esistono esempi di funzioni che non sono nemmeno derivabili in $x=0$, ma che ammettono polinomi di Taylor di ogni ordine n.

— o — o —

POLINOMI DI TAYLOR DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

se mi serve il grado 2016, mi arresto quando arrivo a 2016

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

numero reale qualunque

<u>Oss.</u> ① Funzione pari = solo termini di deg pari
" dispari " " dispari

(Dim.: basta osservare che una funzione pari ha $f^{(2k+1)}(x)$ dispari, e quindi $f^{(2k+1)}(0) = 0$.
Idem per le funzioni dispari)

② Gli sviluppini sono gli sviluppi di Taylor con $n=1$, tranne quello del cos che ha $n=2$.

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x}$ uso Taylor con $n=2$

$\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$ (qui bastano gli sviluppini)

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sin x = x + o(x^2)$

Quindi numeratore: $\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \cancel{-1} - \cancel{x} - o(x^2) + x^2 = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dots \text{ solito finale } \to \frac{3}{2}$$

<u>Morale</u>: quando entrano in gioco termini succ. al 1°, allora i limiti notevoli non bastano. Se entra in gioco il coeff. di x^{2016}, servirebbero 2016 iterazioni di Hôp.

Classico:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$$ Ok, ma inutile: $o(x^2)$ si mangia $\frac{x^3}{6}$

$$\sin x = \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_3(x)} + o(x^3)$$ Ok: Taylor con $n=3$

$$\sin x = \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_4(x)} + o(x^4)$$ Ok: Taylor con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$ NO: manca $\frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{120}$

—o—o—

Dimostrazione sviluppi funzioni elementari:

$\boxed{e^x}$ Sia $f(x) = e^x$. Allora $f^{(k)}(x) = e^x$, quindi il coeff. di x^k è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

$\boxed{\sin x}$ $f(x) = \sin x$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \dots \quad f^{(2016)}(x) = \sin x$$
$$f^{(1)}(x) = \cos x$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

Quindi $f^{(k)}(0) = 0, 1, 0, -1, 0, \dots$ cioè 0 sui pari e alternativ. ± 1 sui dispari. Dividendo per $k!$ si ottiene lo sviluppo

$\boxed{\cos x}$ Stessa cosa...

$\boxed{\log(1+x)}$ $f(x) = \log(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad \dots$$

Congettura: $$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$ (si dimostra facilmente per induzione)

A questo punto

$$\text{coeff. di } x^k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

Casi speciali di sviluppo di $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$\boxed{\alpha=-1}$ $\quad \alpha=-1, \quad \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = 1, \quad \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = -1, \dots$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots}$$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$

— o — o —