ANALISI 1 - LEZIONE 071

Note Title 20/12/2016

LEMMA DI ABEL (Sommazione per parti)

Siano f_k e g_k due successioni. Siano $0 \le m \le n$ numeri naturali.

Allora

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} \underbrace{(f_{k+1} - f_k)\, g_k}_{\int_m^n f' g} = \underbrace{f_{n+1}\, g_{n+1} - f_m g_m}_{[fg]_m^n} - \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} (g_{k+1} - g_k)}$$

$$- \int_m^n f g'$$

Dim. 1 Shift degli indici sul LHS (left-hand side) [RHS]

$$\text{LHS} = \sum_{k=m}^{n} f_{k+1}\, g_k - \sum_{k=m}^{n} f_k\, g_k$$

shift degli indici

$$= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1}\, g_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} f_{k+1}\, g_{k+1}$$

$$= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1}\, g_k - \sum_{k=m}^{n} f_{k+1}\, g_{k+1} + f_{n+1}\, g_{n+1} - f_m\, g_m$$

$$= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} (g_k - g_{k+1}) + f_{n+1}\, g_{n+1} - f_m\, g_m$$

$$= \text{RHS}.$$

— o — o —

Dim 2 (Segue la linea della dim. dell'integr. per parti)

$$f_{n+1}\, g_{n+1} - f_m\, g_m = \underbrace{\sum_{k=m}^{n} (f_{k+1}\, g_{k+1} - f_k\, g_k)}_{\text{telescopica}}$$

$$= \sum_{k=m}^{n} (f_{k+1}\, g_{k+1} \overbrace{- f_{k+1}\, g_k + f_{k+1}\, g_k}^{\text{termine misto}} - f_k\, g_k)$$

$$= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} (g_{k+1} - g_k) + \sum_{k=m}^{n} (f_{k+1} - f_k)\, g_k .$$

— o — o —

$\boxed{\text{CRITERIO DI DIRICHLET}}$ Siano a_n e b_n due successioni.
Supponiamo che
(i) b_n debolmente decrescente
(ii) $b_n \to 0$ (quindi $b_n \geq 0$ sempre)
(iii) esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

("la primitiva di a_n è limitata")

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \quad \text{converge}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Poniamo $A_n := \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. ($A_0 = 0$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dal lemma di Abel otteniamo che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(A_{k+1} - A_k)}_{a_k} b_k \qquad \text{(Abel con } f_k = A_k,\ g_k = b_k\text{)}$$

$$= A_{n+1} b_{n+1} - \underbrace{A_0 b_0}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} - \sum_{k=0}^{n} A_{k+1}(b_{k+1} - b_k)$$

$A_{n+1} b_{n+1} \to 0$ (perché A_{n+1} è lim. e $b_{n+1} \to 0$)

$A_0 b_0 = 0$ perché $A_0 = 0$

Dico che l'ultima serie è assolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{n} |A_{k+1}(b_{k+1} - b_k)| = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|A_{k+1}|}_{\leq M} \cdot |b_{k+1} - b_k|$$

$$\leq M \sum_{k=0}^{n} |b_{k+1} - b_k|$$

$$= +M \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) \leftarrow \text{telescopica}$$

$$= +M(b_0 - b_{n+1}) \xrightarrow{\text{per } n \to +\infty} +M b_0 . \qquad \square$$

Caso speciale $\quad a_n = (-1)^n$. In questo caso $A_n = 1, 0, 1, 0, \dots$ quindi limitate

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{primit. limitata}} \underbrace{b_n}_{\text{tende a 0 decrescendo}}$$

Quindi: Leibnitz è un caso particolare di Dirichlet.

$\boxed{\text{Esempio vero}}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

L'assoluta convergenza non sembra funzionare

$$\frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty \implies \text{BOH}$$

Provo con Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\sin n}}_{= a_n} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{= b_n} \quad \text{(ipotesi ok)}$$

Mi "basta" dimostrare che le somme parziali di a_n sono limit., cioè $\exists M$ t.c.

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \sin k \right| \leq M$$

Ci sono due modi:

→ esiste una formula esplicita che si dim. per induzione

→ uso i numeri complessi

$$e^{ik} = \cos k + i \sin k \qquad \text{(formula misteriosa)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} \cos k + i \sum_{k=0}^{n} \sin k$$

Posso riscrivere come

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k + i \sum_{k=0}^{n} \sin k = \sum_{k=0}^{n} (e^{i})^k \quad \text{(geometrica)}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^{i} - 1}$$

Passando ai moduli

$$|LHS| \leq \frac{|e^{i(n+1)} - 1|}{|e^{i}-1|} \leq \frac{|e^{i(n+1)}| + 1}{|e^{i}-1|} \leq \frac{2}{|e^{i}-1|} = M$$

$\Rightarrow$ parte reale ed immaginaria di LHS sono limitate.

Oss. Così ottengo la formula esplicita

$$LHS = \frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^{i}-1} = \frac{\cos(n+1) + i \sin(n+1) - 1}{\cos 1 + i \sin 1 - 1}$$

Razionalizzando la frazione ottengo formula per parte reale ed immaginaria

— o — o —

Oss. $e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2}(i\theta)^2 + \frac{1}{6}(i\theta)^3 + \frac{1}{24}(i\theta)^4 + \dots$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$= \boxed{1} + i\boxed{\theta} \boxed{- \frac{1}{2}\theta^2} \boxed{- \frac{1}{6} i\theta^3} \boxed{+ \frac{1}{24}\theta^4}$$

$$= \cos\theta + i \sin\theta$$

— o — o —

Integrali notevoli misteriosi $\rightsquigarrow$ Analisi 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{(integrale di Gauss)}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_{0}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Esercizio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (funzione pari)

Esercizio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$

Pongo $y = \sqrt{a}\,x$

$dy = \sqrt{a}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(Andrebbe giustificato il cambio di variabili usando la def.)

Delirio: pongo $a = -i$

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{-i}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,(1+i)$$

$\downarrow$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx + i\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

— o — o —