ANALISI 1 — LEZIONE 22

Note Title 24/10/2024

Limiti di funzioni Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione

Andremo a definire

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x)} \qquad \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ con } x_0 \in \mathbb{R}}$$

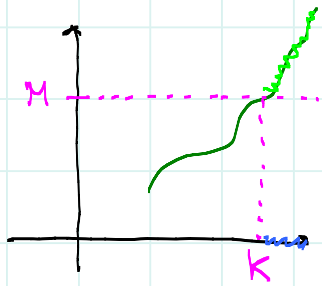
Limite per $x \to +\infty$ Prerequisito: $\sup D = +\infty$, cioè D non è limitato superiormente

Ci sono le solite 4 possibilità

<u>Def</u> Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

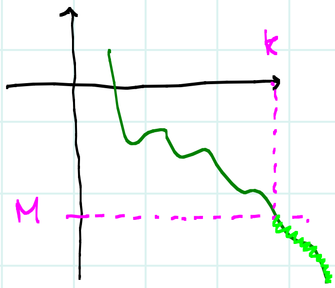
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D$ con $x \geq K$



<u>Def.</u> Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$ con $x \geq K$

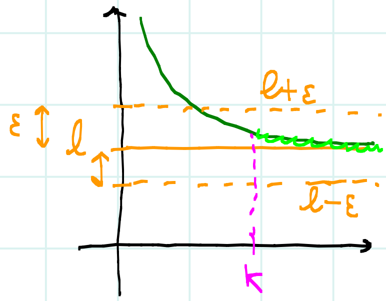


<u>Def.</u> Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

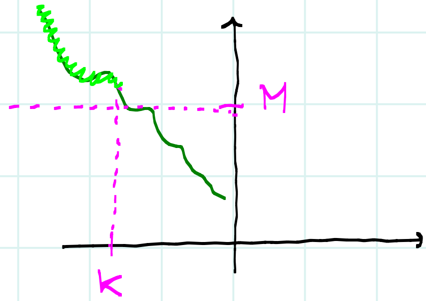
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in D$ con $x \geq K$

$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$



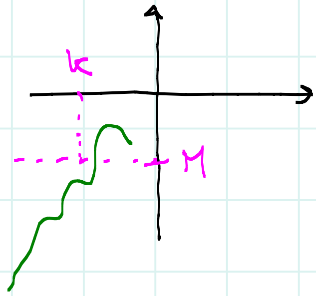
<u>Def.</u> Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste se non rientra in nessuno dei casi precedenti

$\boxed{\text{Limite per } x \to -\infty}$ Prerequisito: $\inf D = -\infty$, cioè D non limitato inferiormente



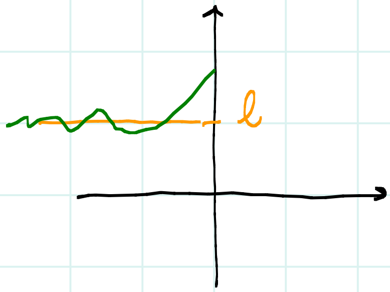
Def. Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D$ con $x \leq K$



Def. Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$ con $x \leq K$



Def. Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in D$ con $x \leq K$
$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Def. Si dice .... non esiste ... se ... nessuno dei precedenti

Valgono le solite varianti con ℓ^+ ed ℓ^-.
Ad esempio

f(x) tende a ℓ da sx o dal basso

- si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{\ell^-}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \boxed{<} \ell \quad \forall x \in D$ con $x \geq K$

stretto

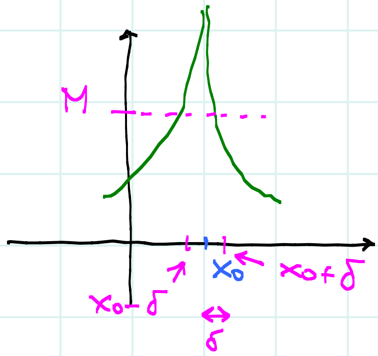
- Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell^+$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell \boxed{<} f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in D$ con $x \leq K$

$\boxed{\text{Limite per } x \to x_0}$ Prerequisito: per ogni $\delta > 0$ l'insieme $[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D$ contiene almeno un punto diverso da x_0, cioè

$$\boxed{[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset}$$

In questo caso si dice che x_0 è un **punto di accumulazione** per D



<u>Def</u>. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

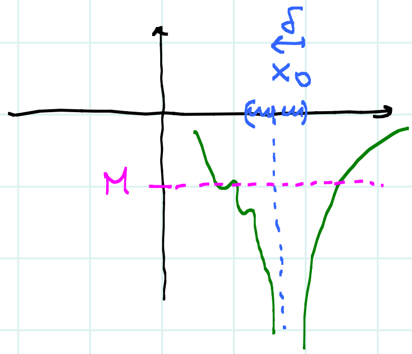
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$

$$\forall x \in \underbrace{[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \{x_0\}}$$

↑ il limite se ne frega del valore della funzione in x_0

Anzi: $f(x_0)$ potrebbe non essere nemmeno definito

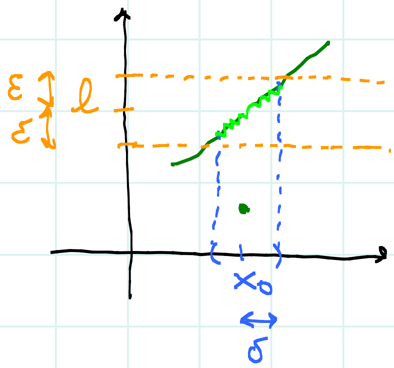


<u>Def</u>. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$

$$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \{x_0\}$$



<u>Def</u>. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$

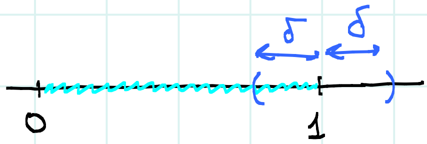
$$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D \setminus \{x_0\}$$

<u>Def</u>. Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste ... nessuno dei precedenti

$\underline{\text{Oss.}}$ Se $f : \overset{D}{\overbrace{(0,1)}} \to \mathbb{R}$, allora non ha senso calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Ha senso calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ quando $x_0 \in [0,1]$ estremi COMPRESI

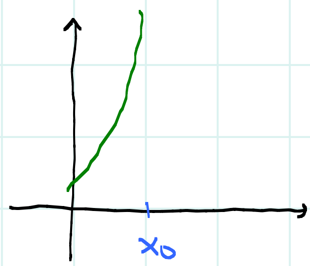


Ogni intervallo $[1-\delta, 1+\delta]$ interseca D in un p.to $\neq 1$.
Questo vuol dire che 1 è un p.to di accumulazione per $(0,1)$.

$\boxed{\text{Varianti}}$ Si possono definire $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

x tende a x_0 da dx/sx

- Si dice che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ se

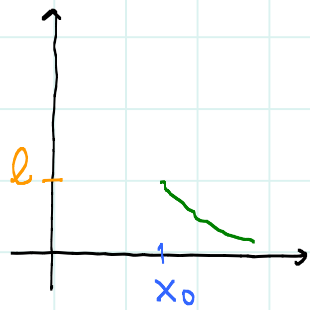


$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$
$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0) \cap D$

escluso

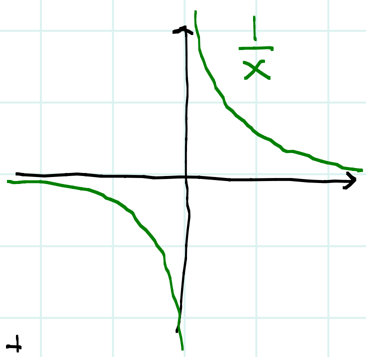
(guardo solo quello che succede a sx di x_0)

- Si dice che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^-$ se



$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell$
$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta] \cap D$

$\underline{\text{Esempio}}$ Prendiamo $f(x)$ con $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ non esiste} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

— o — o —