ANALISI 1 — LEZIONE 050

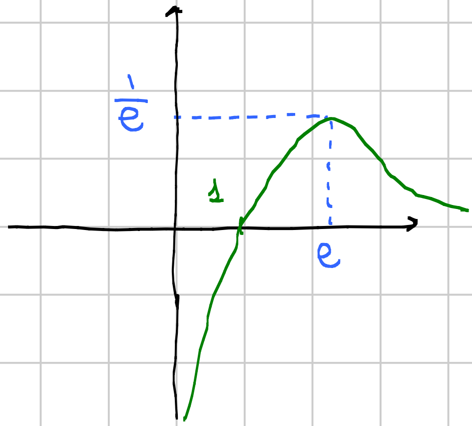
Note Title 21/11/2016

Esempio 1 Determinare, al variare del parametro $\boxed{a>0}$, il numero di sol. dell'equazione

$$\boxed{a^x = x^a}$$

Lo scrivo come $e^{x\log a} = e^{a\log x} \rightsquigarrow x\log a = a\log x$

$$\frac{\log x}{x} = \boxed{\frac{\log a}{a}} = b$$



$\boxed{1^\circ \text{ passo}}$ Studio al variare di b

→ per $b \le 0 \rightsquigarrow 1$ sol.

→ per $b \in (0, \frac{1}{e}) \rightsquigarrow 2$ sol.

→ per $b = \frac{1}{e} \rightsquigarrow 1$ sol.

$\boxed{2^\circ \text{ passo}}$ Torno in a

→ per $\frac{\log a}{a} \le 0 \rightsquigarrow 1$ sol. $\quad a \in (0,1] \rightsquigarrow 1$ sol.

→ per $\frac{\log a}{a} = \frac{1}{e} \rightsquigarrow 1$ sol. $\quad a = e \rightsquigarrow 1$ sol.

→ per $0 < \frac{\log a}{a} < \frac{1}{e} \rightsquigarrow 2$ sol. $\quad a \in (1,e) \cup (e,+\infty) \rightsquigarrow 2$ sol.

Oss. Per $a=2$ diventa $2^x = x^2 \rightsquigarrow$ ha 2 sol. che sono $x=2$ e $x=4$

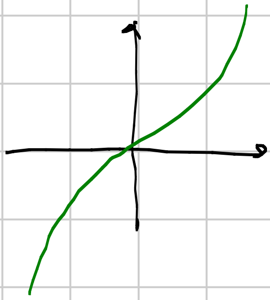
Per $a=3$ si riesce a scrivere le 2 sol. $\rightsquigarrow$ provarci

Per $a=e$ diventa $e^x = x^e$: sol. unica $x=e$

Per $a=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2^x} = \sqrt{x} \rightsquigarrow \text{sol unica } x = \frac{1}{2}$$

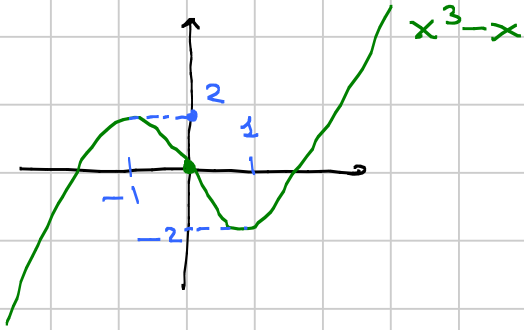
Esempio 2 $\quad \underbrace{x^3+x}_{f(x)} = a^3+a \quad$ al variare di a



$f(x)$ è strett. cresc. e surg.

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ la sol. è unica $(x=a)$

Esempio 3 $\quad \underbrace{x^3-3x}_{f(x)} = a^3-3a$



$f'(x) = 3x^2-3$

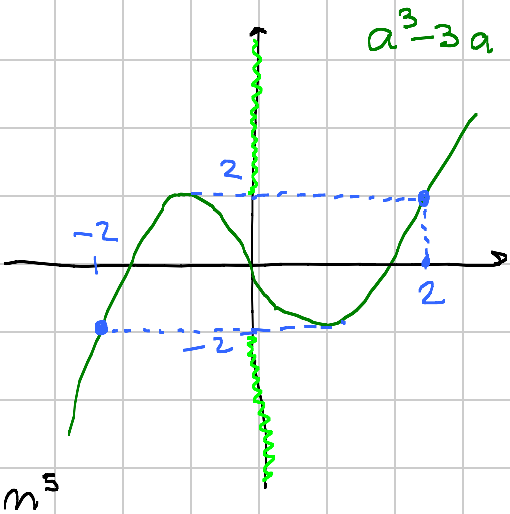
Studio $x^3-3x = b$ e ottengo

- $b \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \rightsquigarrow$ 1 sol.
- $b = \pm 2 \rightsquigarrow$ 2 sol.
- $b \in (-2,2) \rightsquigarrow$ 3 sol.

Torno in a:

- 1 sol. se $a^3-3a \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

  cioè $a \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$



Altri casi sono analoghi

— o — o —

Esempio 4 Consideriamo la succ. $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$.

Dimostrare che ha max e calcolarlo.

Esistenza del max $\quad$ Prendo $n=2$ ottengo $a_2 = 8$

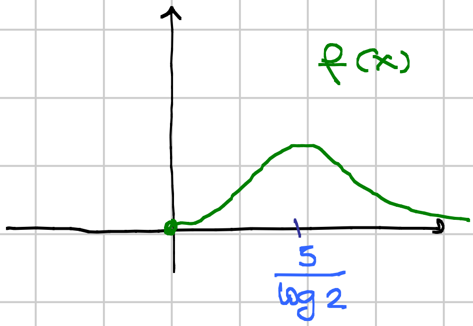
Osservo che $a_n \to 0$, quindi $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq 7 \quad \forall n \geq n_0$

Quindi $\underbrace{\max\{a_n : n=0,\dots,n_0\}}_{\text{numero finito, quindi esiste ed è } \geq 8} = \max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Provo il max: passo alla funzione $f(x) = x^5 2^{-x}$ e la studio

$$f'(x) = 5x^4 2^{-x} - x^5 2^{-x} \log 2$$

$$= x^4 2^{-x} (5 - x \log 2)$$



Per passare ad u occorre stimare $\frac{5}{\log 2}$

In realtà basta calcolare i valori di a_n fino a quando inizia a decrescere: l'ultimo prima della decrescenza è il max.

— o — o —

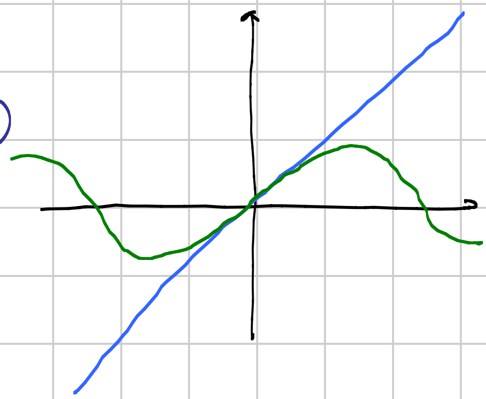
Disuguaglianze classiche

$\sin x \le x$	$\iff$	$x \ge 0$	con uguaglianza solo per	$x = 0$
$\arctan x \le x$	$\iff$	$x \ge 0$	"	$x = 0$
$\log(1+x) \le x$	$\iff$	$x > -1$	"	$x = 0$
$e^x \ge 1 + x$	$\iff$	$x \in \mathbb{R}$	"	$x = 0$

Sono confronti tra funzioni e sviluppini.
Si dimostrano tutte con studio di funzione

$\sin x \le x$ ⇝ pongo $f(x) = x - \sin x$ ⇝ osservo che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 - \cos x$. Ora $f'(x) \ge 0$ sempre con annullamento sporadico. Monotonia 3 $\Rightarrow$ f è strett. cresc. Quindi

$f(x) > 0$ per $x > 0$ (quindi $x > \sin x$)
$f(x) = 0$ per $x = 0$ (" $x = \sin x$)
$f(x) < 0$ per $x < 0$ (" $x < \sin x$)

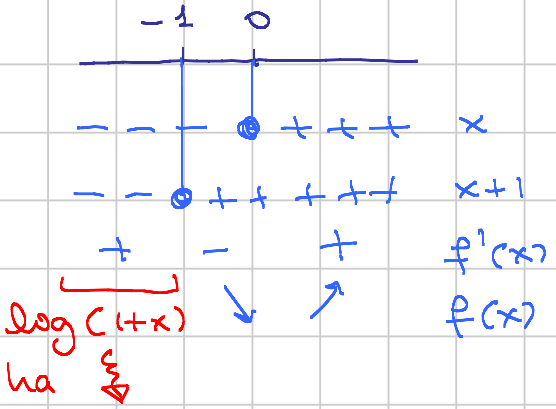


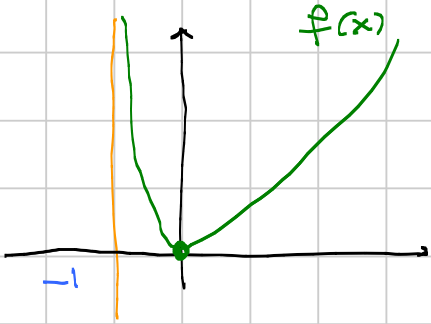
$\arctan x \leq x \rightsquigarrow$ stessa cosa con $f(x) = x - \arctan x$

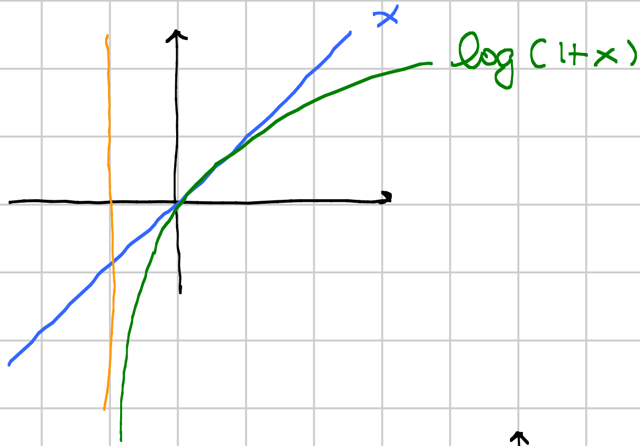
strett. cresc. e $f(0)=0$.

- $\log(1+x) \leq x \rightsquigarrow$ studio $f(x) = x - \log(1+x)$

$f(0)=0$ e $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$ per $x > 0$

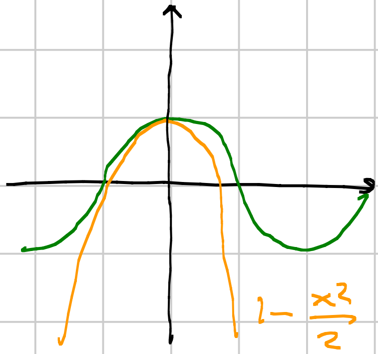






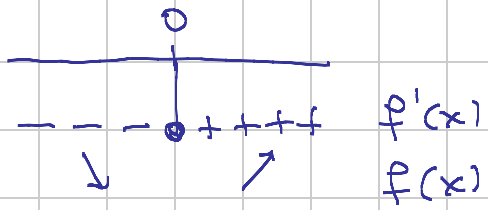
$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

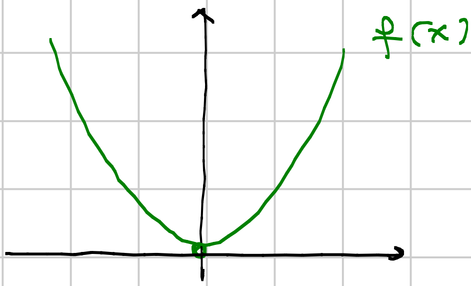
con uguaglianza $\Leftrightarrow x=0$



Pongo $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$. Osservo che

$f(0)=0$ e $f'(x) = x - \sin x$

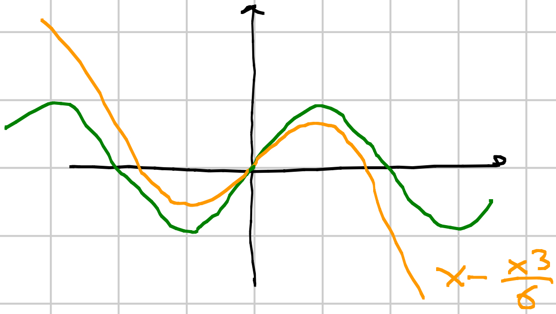




$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ per ogni $x \geq 0$ con ug. $\Leftrightarrow x = 0$

$\frac{1}{6}x^3 - x + \sin x = f(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x$ = quella di prima!



<u>Conclusione</u> Posso stimare $\sin x$ e $\cos x$, ma anche $\arctan x$, con opportuni pol. di Taylor dall'alto e dal basso.

— o — o —