ANALISI 1 — LEZIONE 25

Note Title 26/10/2024

$$\boxed{\text{LIMITE} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Supponiamo di sapere che $\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Dividendo per $\sin x$ troviamo (tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ si ha che $\sin x > 0$)

$$\underset{\downarrow \, 1}{\boxed{1}} \leq \underset{\downarrow \, 1}{\frac{x}{\sin x}} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \underset{\downarrow \, 1}{\boxed{\frac{1}{\cos x}}} \qquad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

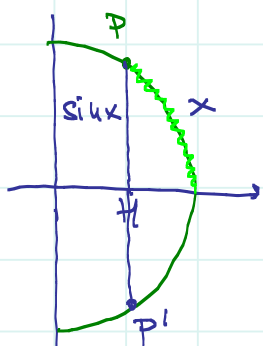
Per i carabinieri avremmo che $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ e quindi anche

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

Per $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$ basta osservare che $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari, cioè $f(-x) = f(x)$ e quindi il lim per $x \to 0^+$ è uguale a quello per $x \to 0^-$.

Quindi tutto sta a dimostrare che

$$\boxed{\sin x \leq x \leq \tan x \qquad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})}$$



Guardando la figura:

lungh. segmento $PP' = 2\sin x$

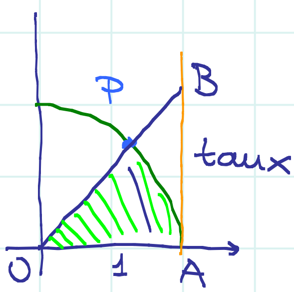
lungh. arco $PP' = 2x$

Basta dire che lungh. segm. $\leq$ lungh. arco

Area triangolo OAB $= \frac{1}{2}\tan x$

Area settore OPA : Area cerchio $= x : 2\pi$

Area settore $= \frac{x \cdot \pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$



Area sett. $\leq$ Area OAB

$\boxed{\text{CRITERIO FUNZIONI} \to \text{SUCCESSIONI}}$ I limiti di funzione aiutano i limiti di successioni

Esempio $\lim\limits_{n \to +\infty} n \sin \frac{1}{n}$ $[+\infty \cdot \sin 0 = +\infty \cdot 0 \leadsto$ forma indet. $]$

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \to +\infty$ ho che $x \to 0^+$ e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\boxed{\text{Enunciato}}$ Sia $\{a_n\}$ una successione.

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (può essere anche $\pm\infty$)

Supponiamo che

(i) $x_n \longrightarrow x_0$

(ii) $x_n \in D$ ~~defin~~definitivamente e $x_n \neq x_0$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $f(x_n) \longrightarrow \ell$

[Brutalmente: pongo $x = x_n$ e ho che

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \;]$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Facciamo per semplicità il caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$.

Devo dim. che $f(x_n) \to \ell$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

Per l'ipotesi (iii) sappiamo che $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D \setminus \{x_0\}$$

D'altra parte per le ipotesi (i) e (ii) sappiamo che

$x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e $x_n \in D$ e $x_n \neq x_0$ definitiv. $\square$

Idea: per n grande x_n è vicino a x_0
e quando x_n è vicino a x_0, $f(x_n)$ è vicino a ℓ.

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{26}-1\right)$ $[+\infty\cdot(1-1)=+\infty\cdot 0]$

$$n\left(\sqrt[n]{26}-1\right)=\frac{\sqrt[n]{26}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{26^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$ Pongo $x=\frac{1}{n}$ ...

$$\lim_{x\to 0}\frac{26^x-1}{x}=\log 26$$

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ $[+\infty\cdot 0]$

$$n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=\frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{e^{\frac{1}{n}\log n}-1}{\frac{1}{n}}=\underbrace{\boxed{\frac{e^{\frac{1}{n}\log n}-1}{\frac{1}{n}\log n}}}_{\downarrow\, 1}\cdot\underbrace{\boxed{\log n}}_{\downarrow\, +\infty}$$

Per dire che il primo tende a 1 serve che $x=\frac{\log n}{n}\to 0$
e questo è vero perché le potenze battono i logaritmi.

FATTO GENERALE
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{[\log x]^a}{x^b}=0 \quad \forall a>0,\ \forall b>0}$$
idem per le successioni

Per dimostrarlo pongo $y=\log x$, da cui $x=e^y$.
Osservo che $y\to+\infty$ quando $x\to+\infty$ e quindi diventa

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^a}{(e^y)^b}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^a}{(e^b)^y}=0$$ perché esponenziale batte potenza

$e^b>1$ poiché $b>0$.

Esempio 4 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(5+2^x)}{x} = \log 2$

I log che pendono dalle potenze sono quelli che hanno x come argomento

Brutalmente: $\frac{\log(5+2^x)}{x} \sim \frac{\log(2^x)}{x} = \frac{x \cdot \log 2}{x} = \log 2$

Rigorosamente: $\frac{\log(5+2^x)}{x} = \frac{\log\left[2^x \cdot \left(1+\frac{5}{2^x}\right)\right]}{x}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. log}}}{=} \frac{x\log 2 + \log\left(1+\frac{5}{2^x}\right)}{x} = \log 2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\log\left(1+\frac{5}{2^x}\right)}}_{\to \log 1 = 0}$$

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

$a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$

Analog: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Esempio 5 $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Voglio dim. che tende a 0: basta che dim. che

$$\left|\frac{1-\cos x}{\tan x}\right| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| \to 0$$

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \left|\frac{1-\cos x}{\tan x}\right| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{1-\cos x}{\tan x}\right|}_{\to 0}$$

$$\frac{1-\cos x}{\tan x} = \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x}{\tan x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\to 0}$$