$\boxed{\text{CRITERIO DI LEIBNITZ}}$ (serie a segno alterno).

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (la serie è a segno alterno)

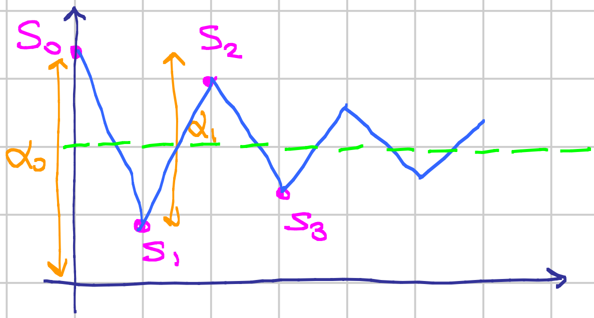
(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (a_n è deb. decr.)

(iii) $a_n \to 0$.

Allora la serie converge.

Achtung! Se (i) o (ii) non sono verificate, allora BOH.
Se (iii) non è verificata (cioè $a_n \to \ell > 0$), allora manca la cond. nec., quindi di sicuro la serie non converge (e quindi restano aperte 3 possibilità).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Disegniamo le somme parziali.



Idea:

$S_{2n+2} \leq S_{2n}$ (sui pari ↓)

$S_{2n+3} \geq S_{2n+1}$ (sui dispari ↗)

Inoltre

$$S_1 \leq S_n \leq S_0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se dimostro queste disuguaglianze, allora per il teo. delle succ. monotone

$$S_{2n} \longrightarrow \ell \qquad S_{2n+1} \longrightarrow m$$

Non resta che dimostrare che $\ell = m$.

D'altra parte

$$\underset{\downarrow\, m}{S_{2m+1}} - \underset{\downarrow\, \ell}{S_{2m}} = a_{2m+1} = \boxed{-\alpha_{2m+1}}$$

$$m - \ell = 0 \quad \text{(iii)}$$

Non resta che dim. le disuguaglianze.

$$S_{2m+2} = S_{2m} \underbrace{\boxed{-\alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2}}}_{\leq 0} \leq S_{2m}$$

$$S_{2m+3} = S_{2m+1} \underbrace{\boxed{+\alpha_{2m+2} - \alpha_{2m+3}}}_{\geq 0} \geq S_{2m+1}$$

Resta da dim. che $S_1 \leq S_n \leq S_0$

Dimostro quella di sx (l'altra è uguale). Ci sono due casi

- se n è dispari è ovvia (perchè sui dispari è $\nearrow$)
- se n è pari, diciamo $n = 2k$, allora

$$S_{2k} \geq S_{2k+1} \geq S_1$$

perché è dispari

$$S_{2k+1} = S_{2k} - \alpha_{2k+1}$$

— o — o —

Oss. Tutte le S_{2k} sono una approx dall'alto della somma della serie, mentre le S_{2k+1} lo sono dal basso.

— o — o —

ASSOLUTA CONVERGENZA

Def. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice **ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE** se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{converge}$$

Criterio Le serie assolutamente conv. sono convergenti, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

NON vale il viceversa

<u>Operativamente</u>: invece di studiare $\sum a_n$, studio $\sum |a_n|$ per cui ho tanti criteri a dispos.

- Se $\sum |a_n| < +\infty$, allora $\sum a_n$ conv.
- Se $\sum |a_n| = +\infty$, allora BOH.

Due dimostrazioni: ① via ordinamento
② via completezza dei reali (vedi 2° parte del corso).

<u>Lemma</u> (carabinieri per serie) Siano a_n, b_n, c_n tre succ. t.c.

$$a_n \le b_n \le c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(basta defin.)}$$

Supponiamo che $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano. (anche a somme diverse)
Allora
$$\sum b_n \text{ converge.}$$

Dim. Osserviamo che $\sum (c_n - a_n)$ converge (diff. di 2 serie convergenti).
Osserviamo che

$$0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n \qquad \text{(dall' ipotesi)}$$

e quindi anche $\sum (b_n - a_n)$ converge (confronto tra serie a termini ≥ 0).
Ma allora

$$\sum b_n = \sum [a_n + (b_n - a_n)] = \sum a_n + \sum (b_n - a_n)$$

è la somma di 2 serie convergenti. ☺

— o — o —

Dim. criterio Basta osservare che

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

se $\sum |a_n|$ converge, allora le laterali convergono, quindi converge la centrale. $\square$

— o — o —

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\cos n}{n^2}}$ Ora a_n ha segno variabile

$\underset{a_n}{\parallel}$

1° modo: $a_n \le \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ converge

NOOO!!!!! Il confronto secco lo posso usare solo se i termini sono ≥ 0.

2° modo (corretto): studio $\sum |a_n| = \sum \frac{|\cos n|}{n^2}$. Ora

$0 \le |a_n| \le \frac{1}{n^2}$; ora posso usare il confronto a 2

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \underset{\text{confr.}}{\Rightarrow} \sum |a_n| \text{ conv.} \underset{\text{assol. conv.}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ conv.}$$

— o — o —

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

Leibnitz classico con $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Devo fare 3 controlli

(i) $\alpha_n \ge 0$ ⇝ banale

(ii) $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$, $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ ⇝ banale

(iii) $\alpha_n \to 0$ ok.

Quindi la serie conv. per Leibnitz.

Oss. Questa serie non converge assol. Se metto $|a_n|$ viene $\sum \frac{1}{n}$, che diverge.

Analogamente, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$

- converge per ogni $a > 0$ per Leibnitz,
- converge assolutamente se e solo se $a > 1$.

Quindi nella fascia $a \in (0,1]$ l'assol. conv. non è utilizzabile.

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^3 - 7n + 8}{n^5 + 5n^2 + 2016}}}_{\alpha_n}$

Facciamo i controlli di Leibnitz:

(iii) $\alpha_n \to 0$ ⇝ banale

(i) $\alpha_n \geq 0$ ⇝ banale, almeno definitiv. (num → +∞, den → +∞, quindi defin. sono ≥ 0)

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ ⇝ uhm ...

(non pensare nemmeno cose del tipo: $\alpha_n > 0$ sempre e $\alpha_n \to 0$, quindi defin. è decrescente ⇝ Penelope)

Volendo evitare il punto (ii), si può usare direttamente l'assol. convergenza.

Pongo $a_n = (-1)^n \alpha_n$ e osservo che

$\sum |a_n| = \sum \alpha_n$ converge per confr. asint. con $\frac{1}{n^2}$, quindi
almeno def.

anche $\sum a_n$ converge.

— o — o —

Se ci fosse stato n^4 invece di n^5 erano guai.