ANALISI 1 — LEZIONE 66

Note Title 28/02/2025

INTEGRALI Indice:
1. Notazioni
2. Significato geometrico
3. Definizione
4. Tecniche di calcolo

1 Notazioni

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

estremi di integrazione

variabile di integrazione

simbolo di integrale (ricorda che sono parenti delle somme)

funzione da integrare (INTEGRANDA)

Notazione più estesa: $\int_A f(x)\, dx$

si intende che $A \subseteq \mathbb{R}$: zona di integrazione

Integrali
- PROPRI
- IMPROPRI

L'integrale si definisce $\boxed{\text{PROPRIO}}$ se succedono due cose

→ la zona di integrazione è un intervallo del tipo $[a,b]$ oppure un insieme limitato ($A \subseteq [a,b]$)

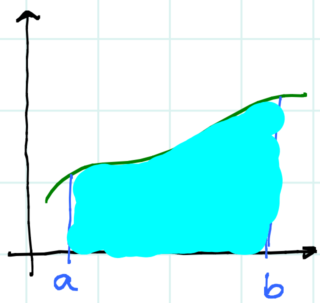
→ l'integranda $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata, cioè

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$$

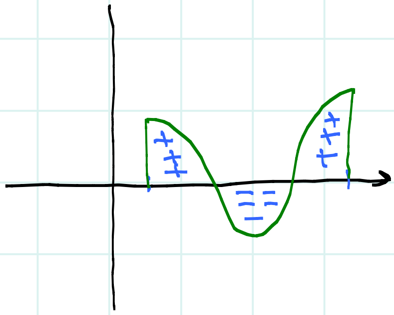
Se manca almeno uno dei due, l'integrale si dice $\boxed{\text{IMPROPRIO}}$

2

$\int_a^b f(x)\, dx$ = area $\boxed{\text{CON SEGNO}}$ della parte di piano compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x.



CON SEGNO: le aree sopra asse x contano +
quelle sotto contano in negativo



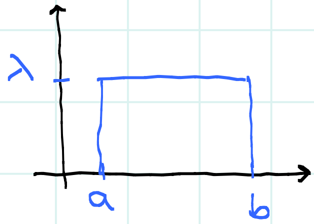
Estensione della definizione:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{(estremi coincidenti)}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{(estremi scambiati)}$$

$\boxed{3}$ Definizione Si procede in 3 passaggi

$\boxed{3.1}$ Caso banale $f(x) = \lambda$ costante

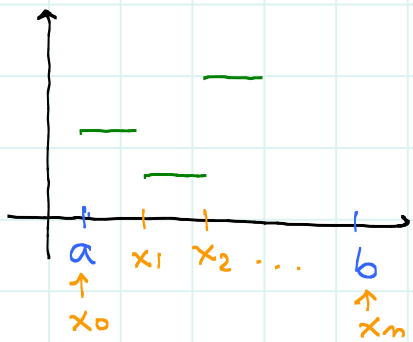


In questo caso per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda \underbrace{(b-a)}_{\text{base}} = \text{area con segno del rettangolo}$$

↑ altezza con segno

$\boxed{3.2}$ Caso semi-banale



Prendiamo una partizione di $[a,b]$ della forma

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

e sia

$$f(x) = \lambda_i \quad \text{per ogni } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

↑ costante in ogni sottointervallo (agli estremi non importa)

In questo caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) = \text{somma algebrica delle aree dei singoli rettangoli}$$

Queste speciali funzioni si chiamano

→ funzioni semplici

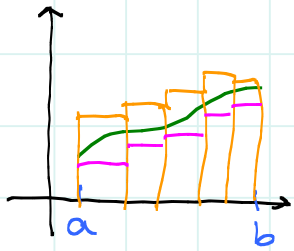
→ funzioni a gradino

→ STEP FUNCTION

$\boxed{3.3}$ <u>Caso generale</u> Sia ora $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione $\boxed{\text{LIMITATA}}$

Si definisce $\boxed{\text{INTEGRALE SUPERIORE}}$ di $f(x)$ in $[a,b]$ il numero

$$I^+(f,[a,b]) = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \text{ è step. funct. e } \psi(x) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$



Analogamente si definisce l' $\boxed{\text{INTEGRALE INFERIORE}}$ come

$$I^-(f,[a,b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \text{ è una step. function e } \varphi(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Per ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata si ha che

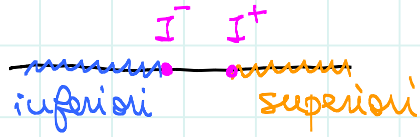
$$\boxed{I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b])}$$

<u>Oss.</u> La limitatezza di f garantisce che esiste almeno una step function $\geq f$ e almeno una step function $\leq f$.

<u>Nomenclatura</u> Quelle che intervengono nella defin. di I^+ si chiamano somme di RIEMANN superiori

... inferiori ...

Fatto generale: Ogni somma di Riemann superiore è $\geq$ di
" " " " inferiore

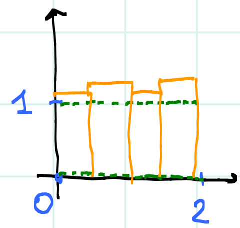


$\boxed{\text{Definizione}}$ Se accade che $I^+(f,[a,b]) = I^-(f,[a,b])$, allora si dice che f è integrabile in $[a,b]$ e il valore comune è l'integrale (INTEGRALE DI RIEMANN).

Ci sono esempi perversi in cui $I^+ > I^-$.

Esempio (Funzione di DIRICHLET) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Si verifica che

→ tutte le somme di Riemann superiori sono ≥ 2 (le altezze sono ≥ 1)

→ " " " " " inferiori sono ≤ 0

Quindi $I^+ = 2$ e $I^- = 0$

$\boxed{\text{Criterio di integrabilità}}$ Una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se

$\forall \varepsilon > 0$ esistono step functions φ e ψ, con

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

ottenute a partire dalla stessa partizione

tali che

$$\underbrace{\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx}_{\text{area intercapedine tra } \varphi(x) \text{ sotto e } \psi(x) \text{ sopra}} \leq \varepsilon$$