ANALISI 1 — LEZIONE 092

Note Title 21/03/2017

VALORI SOGLIA PER SUCC. PER RICORRENZA

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n^2$ $\qquad x_1 = \alpha > 0$

Brutal mode: a cosa può tendere x_n? Mettiamo $x_n \to \ell$

Allora

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & \frac{n+1}{n} & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \ell & = & 1 & \ell^2 \end{array}$$

$\Rightarrow \ell = \ell^2 \rightsquigarrow \ell = 0, \ \ell = 1$, ma anche $\ell = +\infty$

Ci aspettiamo che per α grande $x_n \to +\infty$ e per α piccolo (vicino a 0) $x_n \to 0$

Congettura: esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

- se $\alpha > \alpha_0$, allora $x_n \to +\infty$
- se $\alpha \in (0, \alpha_0)$, allora $x_n \to 0$
- se $\alpha = \alpha_0$, allora $x_n \to 1$.

$\Big\}$ α_0 è il valore soglia

Notazione: indico con $x_n(\alpha)$ il valore di x_n quando parto con $x_1 = \alpha$

Per esempio: $x_1(\alpha) = \alpha$, $\quad x_2(\alpha) = \frac{2}{1} x_1^2(\alpha) = 2\alpha^2$

$$x_3(\alpha) = \frac{3}{2} x_2^2(\alpha) = \frac{3}{2} \cdot 4\alpha^4 = 6\alpha^4$$

$$x_4(\alpha) = \frac{4}{3} x_3^2(\alpha) = \frac{4}{3} \cdot 36\,\alpha^8 = 48\,\alpha^8$$

e così via.

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Esistono dei valori di α per cui $x_n \to +\infty$

Basta prendere $\alpha = 2$. Infatti posso dimostrare che

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\geq 1} x_n^2 \geq x_n^2 \underset{\text{se } x_n \geq 1}{\geq} x_n$$

quindi faccio piano standard con la monotonia:

(i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

} esecuzione standard

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Se $\beta > \alpha$, allora $x_n(\beta) > x_n(\alpha)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

[Dim: facile induzione]

$\boxed{\text{Passo 3}}$ L'insieme degli α per cui $x_n \to +\infty$ è una semiretta (grazie al passo 2). Il problema è vedere se la semiretta comprende o no l'estremo inferiore

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Supponiamo che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} > 1$. Allora da lì in poi cresce e tende a $+\infty$

(i) $x_n \geq x_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq n_0$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Passo 5 – IMPORTANTE}}$ Supponiamo che per un certo α si abbia che $x_n(\alpha) \to +\infty$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_0}(\alpha) > 1$. Ma $x_{n_0}(\alpha)$ è una funzione continua di α (composizione di funz. continue)

Ma allora $x_{n_0}(\beta) > 1$ per ogni β in un opportuno intorno $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$.

Quindi: se per un certo α si ha che tende a $+\infty$, allora tende a $+\infty$ anche un po' prima di α.

<u>Conseguenza</u>: LA SEMIRETTA NON COMPRENDE L'ESTREMO.

$\boxed{\text{PASSO 6}}$ Supponiamo che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha) < 1$$

Allora da lì in poi decresce e tende a 0

(i) $0 \leq x_n \leq x_{n_0}$ $\quad \forall n \geq n_0$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n$ $\quad \forall n \geq n_0$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

L'unica cosa non ovvia è il p.to (ii) che si fa per induzione.
Il passo base $n = n_0$ è l'ipotesi.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$

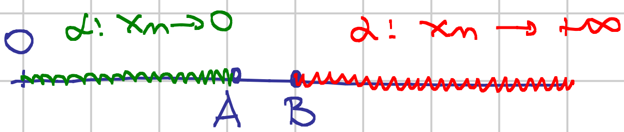
$$x_{n+2} = \frac{n+2}{n+1}\, x_{n+1}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ip. induttiva}}}{\leq} \frac{n+2}{n+1}\, x_n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{n+1}{n}}}{\leq} \frac{n+1}{n}\, x_n^2 = x_{n+1}$$

(Oss: la funzione $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ è decrescente)

$\boxed{\text{Passo 7}}$ Esistono dei valori $\alpha > 0$ per cui $x_n \to 0$.
Basta fare in modo che $x_2 < x_1 < 1$

$\alpha = \frac{1}{10}$ $\qquad x_1 = \frac{1}{10}$ $\qquad x_2 = 2x_1^2 = \frac{1}{50} < x_1 < 1$

Inoltre l'insieme dei valori per cui va a 0 è un segmento cioè se va a 0 per un certo α, va a 0 per tutti gli α prima.



Passo 8 Se per un certo α si ha che $x_n \to 0$, allora anche per alcuni valori $\beta > \alpha$ si ha che $x_n \to 0$.

Infatti per forza deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha) < 1$$

(altrimenti sarebbe crescente e non potrebbe tendere a 0)
Ma per continuità delle due funzione deve esistere $\varepsilon > 0$ t.c.

$$x_{n_0+1}(\beta) < x_{n_0}(\beta) < 1 \qquad \forall \beta \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon).$$

Passo 9 Sia $A = \sup\{\alpha : x_n \to 0\}$ = sup zona verde
$B = \inf\{\alpha : x_n \to +\infty\}$ = inf zona rossa

Cosa accade se parto con $\alpha = A$ oppure $\alpha = B$?
→ Non posso andare a 0 e non posso andare a $+\infty$
→ Non posso superare 1 (se lo supero devo tendere a $+\infty$)
→ Non posso dare un colpo di decrescenza (se lo faccio devo tendere a 0).
Quindi sono costretto a stare sempre sotto 1, e crescere, dunque avere limite, e l'unico compatibile è $l = 1$.

Sappiamo anche che $\forall \alpha \in [A, B]$ si ha che $x_n \to 1$

Passo 10 Vediamo che $A = B$. Supponiamo per assurdo che $A < B$. Allora $x_n(A) < x_n(B)$ per ogni $n \geq 1$.
Pongo $d_n := x_n(B) - x_n(A)$

$$d_{n+1} = x_{n+1}(B) - x_{n+1}(A) = \frac{n+1}{n}\left(x_n^2(B) - x_n^2(A)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{1} \underbrace{\left(x_n(B) + x_n(A)\right)}_{2} d_n$$

Allora definitivamente

$$d_{n+1} \geq \frac{3}{2} d_n$$

da cui deduco che $d_n \to +\infty$, cosa impossibile essendo differenza di 2 succ. che tendono a 1.

— o — o —

<u>Oss.</u> I punti fondamentali nel discorso sono

- aver dato una caratt. con disug. stretta dell'andare a $+\infty$
  (se $x_{n_0}(\alpha) > 1$, allora $x_n(\alpha) \to +\infty$)
  ⇝ questo ha prodotto zona rossa senza estremo

- aver dato una caratt. con disug. stretta dell'andare a 0
  (se $x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha) < 1$, allora $x_n(\alpha) \to 0$)
  ⇝ questo ha prodotto zona verde senza estremo alto.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\qquad x_{n+1} = x_n^{20} + \frac{1}{10^{n!}} \qquad x_1 = \alpha$

Ci aspettiamo lo stesso comportamento con la stessa dim.
I p.ti chiave sono

① Se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_0}(\alpha) > 1$, allora $x_n(\alpha) \to +\infty$
(facile induzione)

② Se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha) < 1$, allora $x_n(\alpha) \to 0$
(facile induzione)

Il tizio in mezzo non può portare sopra 1, né dare colpi di decrescenza. Quindi per quel valore iniziale la succ. è crescente e tende ad 1.

— o — o —