ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 42

Note Title 24/11/2023

Esercizio 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

Trovare forma canonica e M di passaggio

$\boxed{1° \text{ fatto}}$ Rango $= 1 \rightsquigarrow \text{Dim}(\ker) = 3 \rightsquigarrow \lambda = 0$ autovalore con $m_g(0) = 3$

$Tr = 7 \rightsquigarrow$ gli autovalori sono $\underbrace{0,0,0}_{m_a(0) = m_g(0)},7$

$\boxed{2° \text{ fatto}}$ A è diag. sui reali e la sua forma canonica è $\begin{pmatrix} 7 & \\ & 0 \end{pmatrix} = D$

$\boxed{3° \text{ fatto}}$ Osservo che $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$. Quindi una possibile M di passaggio è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = M$$

↑ autovettore di 7

↑ base di ker A

Verifica: $M^{-1}AM = D$

oppure $AM = MD$

Potremmo trovare una M di passaggio ortogonale?

No! Questo è possibile se e solo se A è simmetrica.

—o—o—

Esercizio 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A \qquad \text{solite domande}$$

Gli autovalori sono $2, 2, 2$, quindi $m_a(2) = 3$ (triang. sup.)

Cerco $m_g(2)$

$$\text{Dim}(\ker(A - 2Id)) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow m_g(2) = 2$$

Quindi la forma canonica è

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Troviamo una M di passaggio. Cosa deve succedere?

$Av_1 = 2v_1 \qquad Av_2 = 2v_2 + v_1 \qquad Av_3 = 2v_3$

Quindi v_1 e v_3 sono autovettori di $\lambda = 2$.

Come faccio a sapere chi usare come v_1?

Prendiamo un blocco di jordan con tutti 0 sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J^2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & \\ & & & \end{pmatrix} = J^3$$

Più in generale, se io prendo $(J - \lambda Id)$ dove J è un blocco di jordan con λ sulla diagonale, allora ad ogni potenza la dimensione del suo ker aumenta di 1.

Quindi

$$\dim\ker(A - \lambda Id)^2 - \dim\ker(A - \lambda Id) = \#\text{ blocchi} \geq 2$$

$$(\qquad)^3 - (\qquad)^2 = \#\text{ blocchi} \geq 3$$

e così via.

Nell' esempio sopra, v_4 è l'unico vettore che non va a finire in 0 quando calcoliamo J^3.

Nell' esempio iniziale v_2 è l'unico vettore che non va in 0 quando calcoliamo $(A-2Id)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A-2Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $v_2 = (0,0,1)$

$$v_1 = (A-2Id)\, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(A-2Id) = \text{Span}((7,1,0), (1,0,0))$

posso mettere quasi chi voglio

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Av_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_1$$:)

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_2 + v_1$$:)

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_3$$:)

Oss. Questa complicazione c'è solo quando abbiamo + blocchi di Jordan con lo stesso autovalore

Esempio 3 $\quad f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \qquad p(x) \to p(x) + p(2x)$

Forma canonica e relativa base

Base canonica $\{1, x, x^2\}$

$p(x) = a + bx + cx^2$

$p(2x) = a + 2bx + 4cx^2$

$p(x) + p(2x) = 2a + 3bx + 5cx^2$

$1 \to 2$

$x \to 3x$

$x^2 \to 5x^2$

Già in questa base la matrice viene diagonale ☺ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Esempio 4 Come sopra $p(x) = p(2)\,x$

$$a + bx + cx^2 \to (a + 2b + 4c)\,x$$

$1 \to x$

$x \to 2x$

$x^2 \to 4x$

Matrice nella base canonica $A = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \\ \\ \\ \end{matrix}$

Gli autovalori sono $0, 0, 2$, quindi è diagonalizzabile con forma canonica $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La base in cui succede questo avrà

$v_1 \rightsquigarrow$ autovettore di 2, ad esempio x

$v_2, v_3 \rightsquigarrow$ base di ker $\rightsquigarrow$ guardando la matrice $(2, -1, 0)$

$(0, 2, -1)$

$v_2 = 2 - x$ $\quad v_3 = 2x - x^2$

Verifica: $x \to 2x$ ☺

$2 - x \to 0 \cdot x = 0$ ☺

$2x - x^2 \to 0 \cdot x = 0$ ☺

Esempio 5 $p(x) \to (x+3)\,p'(x)$

$1 \to 0$

$x \to x + 3$

$x^2 \to (x+3) \cdot 2x = 2x^2 + 6x$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Base in cui si realizza

$v_1 = 1$ $\quad$ $\ker = \text{Span}(1)$

$v_2 \in \ker(A - Id)$ $\quad$ $v_2 = 3 + x$ $\quad$ [Verifica a occhio]

$$A - Id = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ker = \text{Span}(3 + x) \rightsquigarrow (3, 1, 0)$

$v_3 \in \ker(A - 2Id)$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (9, 6, 1)$$

$v_3 = 9 + 6x + x^2 = (x+3)^2$ $\quad$ [Verifica a occhio]

— o — o —