ANALISI 1 - LEZIONE 106

Note Title 07/04/2017

TRE FACCE DELLA COMPATTEZZA

⇝ Nuove interpretazioni di Weierstrass

Def. (già vista) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO se è limitato + chiuso.

Def. (compattezza per successioni) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI se ogni successione a valori in A ammette una s.succ. convergente ad un elemento di A.
Detto più formalmente: per ogni succ x_n con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono naturali n_k strett. cresc ed esiste $\boxed{x_\infty \in A}$ t.c.

$$x_{n_k} \longrightarrow x_\infty$$

Def. (Ricoprimento) Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice RICOPRIMENTO di A una qualunque famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che indichiamo con $\{M_i\}_{i \in I}$ tale

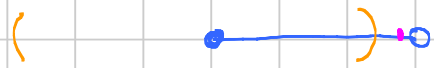
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$$

(gli Mi possono sovrapporsi tra di loro)

Def. (Compattezza per ricoprimenti) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO PER RICOPRIMENTI se ogni ricoprimento aperto di A ammette un sottoricoprimento finito, cioè per ogni ricoprimento $\{M_i\}_{i \in I}$ di A con M_i aperto per ogni $i \in I$ esiste un insieme $J \subseteq I$, con J finito, tale che

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} M_i \qquad \text{(ne basta un numero finito)}$$

Esempio $A = [0,1)$. Considero



$U_n = (-1, 1-\frac{1}{n})$ sono aperti e $\{U_n\}_{n\geq 1}$ è un ricoprimento di A, cioè

$$A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} U_n$$

Nessun sottoricoprimento finito basta per ricoprire A, perché rimarrebbe fuori un piccolo intervallino vicino ad 1. Quindi questo A non è compatto per ricoprimenti.

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti:

(i) A è limitato + chiuso,

(ii) A è compatto per successioni,

(iii) A è compatto per ricoprimenti.

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto per successioni e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora $f(A)$, cioè l'immagine, è compatta per successioni

(Le funzioni continue mandano compatti per succ. in compatti per succ.)

$\boxed{\text{Teorema 3}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ cpt. per ricoprimenti e sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua.

Allora $f(A)$ è cpt. per ricoprimenti.

(Le funz. cont. mandano cpt. per ricopr. in cpt. per ricopr.)

Oss. Le funzioni cont. non mandano necessariamente chiusi in chiusi e limit. in limitati.

$\boxed{\text{Meta dim. di Weierstrass}}$ (dando per buoni i teoremi)

Prendiamo $f: A \to \mathbb{R}$ con A compatto.

1. Dal teo. 1 sappiamo che A è cpt. per. succ. o per ricopr.
2. Dai teo. succ. sappiamo che $f(A)$ è cpt.
3. Abbiamo fatto per esercizio che i compatti ammettono max / min
4. Di conseguenza $f(A)$ ammette max / min.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim teo 1} \quad (i) \Leftrightarrow (ii)}$

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Ipotesi: A chiuso + limitato
Tesi: ogni succ. in A ammette s.succ. conv.

Questo è B-W + relativo corollario (visto che A è limitato ogni succ. $x_n \in A$ ammette $x_{n_k} \to x_\infty \in \mathbb{R}$. Visto che A è chiuso, per forza $x_\infty \in A$).

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Ipotesi: A è cpt. per succ.
Tesi: A è limitato + chiuso

<u>Dimostro che A è limitato</u>. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora

$\exists M \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \quad |a| \leq M$ se è limitato

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A$ t.c. $|a| > M$ negazione

Me la gioco con $M = n \in \mathbb{N}$ e trovo

$$a_n \in A \quad \text{t.c.} \quad |a_n| > n$$

Se questa avesse una s. succ. conv. $a_{n_k} \to a_\infty \in A$ avrei $|a_{n_k}| \to |a_\infty| \in \mathbb{R}$ ma sappiamo che $|a_{n_k}| > \underbrace{n_k}_{\to +\infty}$

<u>Dimostro che A è chiuso.</u> Prendo $a_0 \in \text{Clos}(A)$. Per un esercizio fatto tante volte sappiamo che esiste una succ.

$$A \ni a_n \to a_0$$

Ora sappiamo che a_n ammette una s.succ. che converge ad un elemento di A.
D'altra parte tutte le s.succ. devono convergere ad a_0 e quindi $a_0 \in A$, cioè $\text{Clos}(A) \subseteq A$, cioè A è chiuso

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teo. 2}}$ Ipotesi : A cpt. per succ.
$f : A \to \mathbb{R}$ continua
Tesi : $f(A)$ cpt. per succ.

Prendo una qualunque succ. $\{y_n\} \subseteq f(A)$.
Per def. di immagine, esistono $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$.
Poiché A e cpt. per succ., esiste

$$x_{n_k} \to x_\infty \in A$$

Per continuità

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to \underset{y_\infty}{\underset{\parallel}{f(x_\infty)}} \in f(A)$$

Ecco dimostrato che y_n ha una s.succ. conv.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. teo. 1, (iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Ipotesi : A cpt. per ricoprimenti
Tesi : A è limitato + chiuso

<u>Dimostro che è limitato</u>. Considero $\mathcal{U}_n = (-n, n)$ per $n \geq 1$
È evidente che

$$A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{U}_n \quad (= \mathbb{R})$$

Poiché A è cpt. per ricoprimenti ne deve bastare un numero finito, cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} U_n = (-n_0, n_0)$$

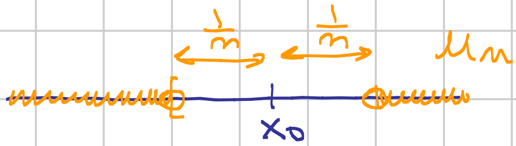
che è equivalente a dire che A è limitato.

<u>Dimostro che A è chiuso</u> Prendo $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$. Voglio dedurre che $x_0 \in A$.

- Se $x_0 \in A$, sono felice :)

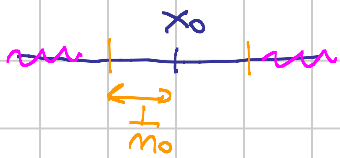
- Se $x_0 \notin A$, considero $U_n := \mathbb{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]$

Ora $\bigcup_{n \geq 1} U_n = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, quindi



$$A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n$$

Poiché A è cpt. per ricoprimenti, ne basta un numero finito, dunque



$$A \subseteq \mathbb{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}]$$

per un opportuno n_0. Ma allora $A \cap (x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}) = \emptyset$, e questo va contro l'ipotesi che $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$.

— o — o —