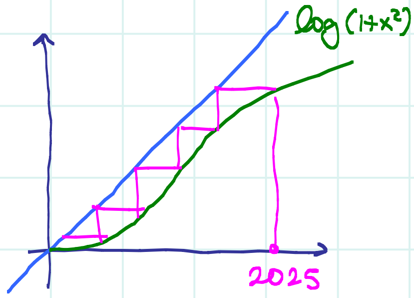
**Esercizio 1** Consideriamo la successione

$$x_{n+1} = \log(1+x_n^2) \qquad x_0 = 2025$$

Studiare

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^n x_n$$




$\boxed{1^a \text{ cosa}}$ Capire come è messa $f(x) = \log(1+x^2)$ rispetto alla bisettrice $y=x$

Ci piacerebbe che fosse $\log(1+x^2) \leq x$ per ogni $x \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $x=0$

Studio $g(x) = x - \log(1+x^2)$. Osservo che $g(0)=0$ e

$$g'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

Quindi $g'(x) \geq 0$ sempre con annullamento solo per $x=1$

Monotonia 3 $\Rightarrow$ $g$ strett. cresc. $\Rightarrow$ $g(x) > 0$ per ogni $x>0$.

Quindi il disegno è giusto :)

$\boxed{2^a \text{ cosa}}$ $x_n \to 0$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\log(1+x_n^2) \leq x_n$ vera per $x_n \geq 0$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ Teo succ. monotone

(iv) $\ell = 0$ L'unica sol. di $\log(1+\ell^2) = \ell$ è $\ell = 0$ come segue dallo studio di funzioni.

$\boxed{3^a \text{ cosa}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

Non abbiamo la formula esplicita, ma usiamo il rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+x_n^2)}{x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ y = x_n}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y^2)}{y} = 0 < 1$$

$\rightsquigarrow$ la serie converge :)

$\boxed{4^a \text{ cosa}}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^n x_n$

Proviamo il criterio della radice. Dobbiamo fare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n x_n}$ :(

Proviamo allora il rapporto

$$\frac{(n+1)^{n+1} x_{n+1}}{n^n x_n} = \underbrace{\boxed{(n+1)}}_{\downarrow \, +\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(n+1)^n}{n^n}}}_{= \, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e} \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+x_n^2)}{x_n}}}_{\downarrow \, 0}$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\downarrow \, e} \underbrace{\boxed{(n+1)\, x_n}}_{\downarrow \, 0} \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+x_n^2)}{x_n^2}}}_{\downarrow \, 1}$$

Ci basta quindi dimostrare che $(n+1)x_n \to 0$ e questo si fa a sua con il rapporto

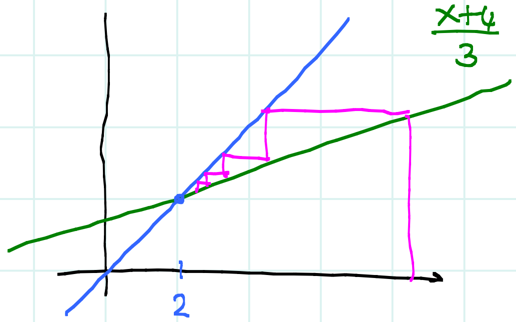
$$\frac{(n+2)\, x_{n+1}}{(n+1)\, x_n} = \underbrace{\boxed{\frac{n+2}{n+1}}}_{\downarrow \, 1} \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+x_n^2)}{x_n}}}_{\downarrow \, 0} \to 0$$

Ricostruendo $(n+1)x_n \to 0$ quindi $\dfrac{(n+1)^{n+1} x_{n+1}}{n^n x_n} \to 0 < 1$

quindi $n^n x_n \to 0$

quindi $x_n \to 0$ molto velocemente.

Esercizio 2 $\quad x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{3} \qquad x_0 = 2025$




A cosa tende?

$x_n \to 2$ con piano
(i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $x_n \to l \in \mathbb{R}$
(iv) $l = 2$

Cosa possiamo dire della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(x_n - 2)}_{a_n}$ ?

Intanto può convergere perché $a_n \to 0$. Inoltre è a termini $> 0$ (servirebbe un p.to (i) con $x_n > 2$ stretto che comunque si fa per induzione)

[ Achtung! Il fatto che $x_n > 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ non impedisce che $a_n \to 2$ ]

Proviamo con rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_{n+1} - 2}{x_n - 2} = \frac{\frac{x_n + 4}{3} - 2}{x_n - 2} = \frac{x_n - 2}{3(x_n - 2)} = \frac{1}{3} < 1$$

$\rightsquigarrow$ la serie converge

$\boxed{\text{Back to p.to precedente}}$ La funzione $f(x) = \frac{x+4}{3}$ è Lip. con costante $\frac{1}{3}$, quindi potevo fare il piano con la distanza :)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 \quad \text{perché } x_n \to 2$$

Più interessante: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n - 2} = \frac{1}{3}$ (per rapporto $\rightarrow$ radice)

Esercizio 3 $\quad x_{n+1} = \arctan\left(\frac{x_n}{n}\right) \qquad x_1 = 2025$

Dimostriamo che $x_n \to 0$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 < x_n \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall n \geq 2$ [Facile induzione]

(ii) $x_n \to 0$

Infatti dal p.to (i) sappiamo che (uso monotonia di arctan)

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\downarrow\, 0} < \underbrace{x_{n+1}}_{\downarrow\, 0} < \underbrace{\boxed{\arctan\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}}_{\downarrow\, 0}$$

Quindi $x_{n+1} \to 0$ e quindi anche $x_n \to 0$.

Studiamo la $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{8^n x_n}_{a_n}$

Per ora non è chiaro nemmeno che $a_n \to 0$. Però $a_n > 0$, quindi posso provare con il rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8^{n+1} x_{n+1}}{8^n \ x_n} = \lim_{n\to+\infty} 8 \ \frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{x_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 8 \underbrace{\boxed{\frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\downarrow\, 0} \to 0 < 1$$

basta osservare che $y = \frac{x_n}{n} \to 0$ e diventa il limite notevole

Quindi per il criterio del rapporto la serie converge

Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n}}{n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{x_n}{n^n}}$

Provo con il criterio rapporto → radice

$$\frac{\frac{x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{x_n}{n^n}} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x_n} = \frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{x_n}$$

$$= \underbrace{\frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}}}_{\to 1} n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \qquad \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}} \to 0$$

[ Forse c'è un errore con gli esponenti ]

[ Il vero esercizio era con $n$ al numeratore :) ]

— o — o —