ANALISI 1 — LEZIONE 46

Note Title 28/11/2024

SERIE DI POTENZE Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

c_n: numeri dati: coefficienti

Brutalmente: polinomio di grado ∞: $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

Domande ① Per quali valori $x \in \mathbb{R}$ converge?

② Quando converge, a cosa converge?

Oss. Di sicuro converge per $x = 0$ e converge al termine noto c_0.

Teorema 1 (Raggio di convergenza)

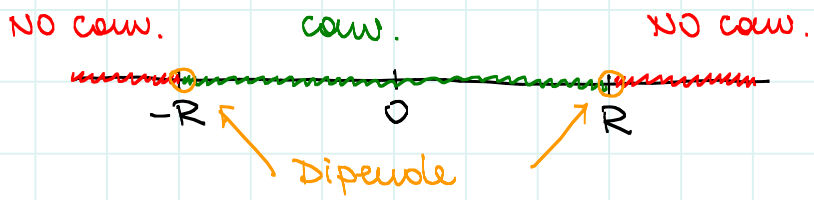
Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ con questa proprietà.

(1) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < R$ la serie converge, e anzi converge assolutamente

(2) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > R$ la serie non converge, anzi non verifica nemmeno la cond. nec.

(3) Per $|x| = R$, cioè $x = \pm R$, dipende dai casi (può anche andare diverso in $\pm R$)

Oss. La situazione è descritta dal seguente disegno



La zona di convergenza è un intervallo centrato nell'origine, con o senza estremi a seconda dei casi

Casi speciali

- Se $R = 0$ la serie converge a c_0 per $x = 0$ e per $x \neq 0$ non c'è nemmeno la cond. necessaria
- Se $R = +\infty$ la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Oss. Nella dim. si porrebbe $R = \sup\{x \geq 0 : \text{la serie converge in } x\}$.

Teorema 2 (Formula per il raggio di convergenza)
Supponiamo che esista

$$\boxed{L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (la formula si interpreta: se $L = 0$, allora $R = +\infty$; se $L = +\infty$, allora $R = 0$)

Oss. Se il limite non esiste, R esiste comunque per il Teorema 1, solo che non è dato da quella formula, ma da una analoga con $\boxed{\limsup}$ invece di lim

molto più avanti nel corso

Dim. Consideriamo la nostra serie $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{c_n x^n}}_{= a_n}$

Consideriamo $|a_n|$ e applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|c_n|} \to |x| \cdot L$$

Ora abbiamo due casi

- Se $|x| \cdot L > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, allora $|a_n| \to +\infty$, quindi non c'è cond. necessaria
- Se $|x| \cdot L < 1$, allora $\sum |a_n|$ converge, ma allora $\sum a_n$ converge per assoluta convergenza. Oss: $|x| \cdot L < 1 \iff |x| < \frac{1}{L}$.

Soliti 3 esempi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$c_n = 1 \qquad c_n = \frac{1}{n} \qquad c_n = \frac{1}{n^2}$$

$$c_0 = 0 \qquad c_0 = 0$$

In tutti e 3 i casi $\sqrt[n]{|c_n|} \to \underset{L}{\overset{\shortparallel}{1}}$, quindi $R = \frac{1}{1} = \frac{1}{L}$

→ Nel primo caso abbiamo una serie geometrica che converge per $x \in (-1,1)$ e la somma fa $\frac{1}{1-x}$

→ Nel secondo caso la serie converge per $x \in [-1, 1)$

converge per Leibnitz

armonica con $a=1$ ⇝ diverge

→ Nel terzo caso la serie converge per $x \in [-1, 1]$

assoluta conv. grazie ad n^2

— o — o —

Data una serie di potenze, chiamiamo $f(x)$ la sua somma, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \forall x \in \text{zona convergenza}$$

Teorema 3 (Regolarità della somma)

La funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte all'interno del raggio di convergenza (diciamo se $R>0$). Inoltre tutte le sue derivate si calcolano "derivando la serie", cioè ad esempio

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} \qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n\,(n-1)\, x^{n-2}$$

e così via. Tutte le serie delle derivate hanno lo stesso raggio di conv. di quella iniziale (ma il comp. in $\pm R$ può cambiare)

$\boxed{\text{SERIE DI TAYLOR}}$ Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte, consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Questa si chiama $\boxed{\text{serie di Taylor di } f(x)}$ con centro in $x_0 = 0$, ed è la serie di potenze che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

$\boxed{\text{Teorema 4}}$ $\boxed{\text{Sotto opportune ipotesi}}$ La serie di Taylor di $f(x)$ converge proprio ad $f(x)$ per ogni x appartenente alla zona di convergenza (eventualmente anche negli estremi)

$\boxed{\text{E le opportune ipotesi?}}$ Le funzioni per cui sono soddisfatte si chiamano $\boxed{\text{ANALITICHE}}$.
Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari usando composizioni e/o operazioni algebriche sono analitiche.

Esempio Consideriamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

In questo caso $c_n = \frac{1}{n!}$, quindi $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow 0 = L$

Dal teorema 2 sappiamo che $R = \frac{1}{L} = +\infty$, quindi la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ grazie al teorema 1.
Ora osserviamo che è la serie di Taylor di e^x, quindi per il Teorema 4 converge ad e^x. In particolare mettendo $x = 1$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

— o — o —