# ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 25

Note Title 27/10/2023

## Formula alternativa per la matrice inversa

Algoritmo :
- → $A_{ij}$
- → Aggiusto i segni
- → Trasposta
- → Divido per Det

**Esempio** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Det = $4+4+2-3 = 7$
Quindi l'inversa esiste

Per ogni el. della matrice, elimino la sua riga e colonna e faccio Det di ciò che rimane

$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 \\ -2 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Aggiusto i segni a scacchiera $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -11 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Divido per Det (A) = 7 $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -11 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Modulo errori di conto, dovrebbe essere la matrice inversa.

$\boxed{\text{Verifica su } 2\times 2}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (Formula già vista a suo tempo)

[La dimostrazione seguirebbe da Laplace]

# FORMULA DI CRAMER PER SISTEMI QUADRATI

Consideriamo un sistema del tipo $Ax = b$, con $A$ quadrata $n \times n$. Supponiamo $\det(A) \neq 0$

[Questo da solo ci dice che rango $A$ = rango $\hat{A}$, quindi il sistema ha soluz. unica, volendo $x = A^{-1}b$ ]

Allora
$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}}$$

dove $A_i$ è la matrice ottenuta $A$ sostituendo la $i$-esima colonna con i termini noti $b$.

Esempio
$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ x + y \quad &= 3 \\ x \quad - z &= 2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 3 & \boxed{5} & -1 \\ 1 & \boxed{3} & 0 \\ 1 & \boxed{2} & -1 \end{pmatrix}}{\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \text{il conto si fa}$$

[Anche questo segue da Laplace e/o dalle proprietà del Det.].

— o — o —

Esempio
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

Studiare il numero di soluzioni al variare di $a$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Det $= 2a - 3$

Vediamo il rango di $A$. Oss. che Span $(C_1, C_3)$ ha dim 1

Quindi tutto dipende da $C_2$

→ Se $a \neq \frac{3}{2}$, allora Rango $(A) = 2$, quindi anche Rango $(\hat{A}) = 2$, quindi il sistema ha sol. dipendenti da $3-2 = 1$ parametro

→ Se $a = \frac{3}{2}$, allora Rango $(A) = 1$ ($R_2$ è metà di $R_1$)
D'altra parte, Rango $(\hat{A}) = 2$ sempre per colpa del $2\times 2$ finale. Quindi non ci sono soluzioni.

— o — o —

| $V$ | Condizioni | Base | $D_K$ | $D_I$ | $D_{K\cap I}$ | Matrice |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $(1,2) \to (-1,1)$<br>$(1,0) \to (2,2)$ | $v_1 = (-1,2)$<br>$v_2 = (1,-3)$ | | | | |

Abbiamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,2) = (-1,1)$$
$$f(1,0) = (2,2)$$

① Dim. che esiste ed è unica

[Basta osservare che $(1,2)$ e $(1,0)$ sono una BASE di $\mathbb{R}^2$]

② Determina dim di ker e Im

$$\mathrm{Im} \supseteq \mathrm{Span}\,((-1,1),(2,2)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sono lin.} \\ \text{indip}}}{=} \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathrm{Im} = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}) = 2 \overset{RN}{\Rightarrow} \dim(\ker) = 0.$$

③ Determinare la matrice di $f$ dalla canonica alla canonica

$\boxed{\text{Bovino}}$ Devo fare $f(1,0)$ e $f(0,1)$ e usarli come colonne
Come faccio $f(1,0)$?
È dato $f(1,0) = (2,2) = a(1,0) + b(0,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mi serve $f(0,1)$.

$$f(1,2) - f(1,0) = f(0,2) = (-3,-1) \text{ e quindi}$$
$$f(0,1) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

**Superbovino** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Cosa deve succedere?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b = -1 \\ c+2d = 1 \\ a = 2 \\ c = 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} b &= -\frac{3}{2} \\ d &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Metodo RAPUANO**

$$f(1,2) = (-1,1)$$
$$f(1,0) = (2,2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}} \\ 0 & 1 & \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

↑ trasposta

**Metodo astuto** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Ho messo in colonna le due immagini

Questa matrice rappresenta la $f$ dalla base

$$v_1 = (1,2) \qquad v_2 = (1,0)$$

alla canonica. Ora devo comporre con il cambio base in partenza dalla canonica alla $\{v_1, v_2\}$. La matrice che lo fa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice richiesta tra le canoniche è

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$