ANALISI 1 – LEZIONE 69

Note Title 01/03/2025

<u>Riassunto puntata precedente</u>

Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Sia $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA primitiva di φ

cioè Φ è continua in $[a,b]$ e

$$\Phi'(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora

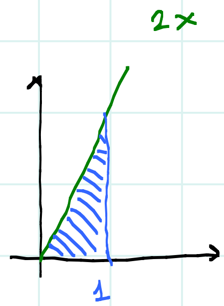
$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

<u>Notazione</u> : $\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\boxed{\text{Tecniche di integrazione}}$ Come ottenere $\Phi(x)$ da $\varphi(x)$

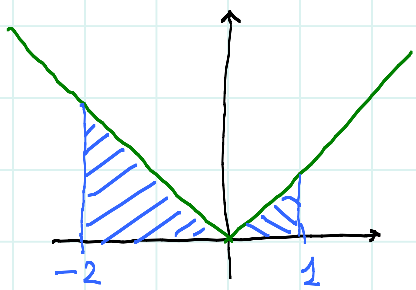
1. Primitive elementari
2. Integrazione per parti
3. Integrazione per sostituzione
4. Funzioni razionali
5. Sostituzioni razionalizzanti

0. Banali considerazioni geometriche



<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx$

$= \text{area triangolo} = \frac{1}{2} \cdot \underset{\uparrow\ \text{base}}{1} \cdot \underset{\uparrow\ \text{altezza}}{2} = 1$

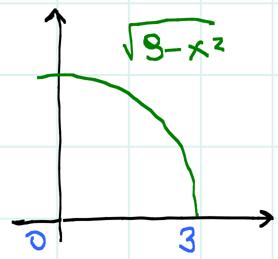


<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\int_{-2}^1 |x|\,dx$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2}_{sx} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1}_{dx} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Achtung! Non fare cose creative, tipo valore assol. della primitiva

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$



$y = \sqrt{9-x^2} \rightsquigarrow y^2 = 9-x^2 \rightsquigarrow x^2+y^2 = 9$

$= \frac{1}{4} \cdot$ area cerchio di raggio 3 $= \frac{1}{4}\pi \cdot 9 = \frac{9}{4}\pi$

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Primitive elementari}}$ Leggere al contrario la tabella delle derivate

$\varphi(x) = c$ $\qquad \Phi(x) = cx$

$\varphi(x) = x^a$ $\qquad \Phi(x) = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ $\quad$ se $a \neq -1$

$\varphi(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \Phi(x) = \log x$ $\quad$ corretta per $x > 0$

$\varphi(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \Phi(x) = \log|x|$ $\quad$ va bene per ogni $x \neq 0$

(se $x > 0$, allora $\Phi(x) = \log x$ e quindi $\Phi'(x) = \frac{1}{x}$
se $x < 0$, allora $\Phi(x) = \log(-x)$ e quindi $\Phi'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$)

$\varphi(x) = e^x$ $\qquad \Phi(x) = e^x$

$\varphi(x) = a^x$ $\qquad \Phi(x) = \frac{1}{\log a} a^x$ $\quad$ se $a > 0$ e $a \neq 1$

$\varphi(x) = \sin x$ $\qquad \Phi(x) = -\cos x$

$\varphi(x) = \cos x$ $\qquad \Phi(x) = \sin x$

$\varphi(x) = \sinh x$ $\qquad \Phi(x) = \cosh x$

$\varphi(x) = \cosh x$ $\qquad \Phi(x) = \sinh x$

$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \Phi(x) = \arctan x$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Phi(x) = \arcsin x$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Phi(x) = \arccos x$$

<u>Esempio 4</u> $\displaystyle\int_1^3 (x^2-3x)\,dx$

Cerco una primitiva $\displaystyle\int (x^2-3x)\,dx = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}$

Quindi $\displaystyle\int_1^3 (x^2-3x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3$

$$= \underbrace{\frac{27}{3} - \frac{27}{2}}_{x=3} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{3}{2}}_{x=1} = \dots \text{ si fa.}$$

<u>Esempio 5</u> $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

Deve venire un numero > 0

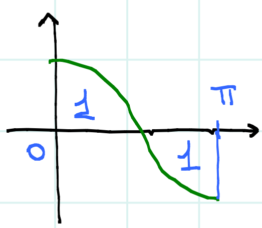
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = -0+1 = 1$$

Analogamente

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2.$$

doppio del precedente :)

<u>Esempio 6</u> $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$



Per ragioni di simmetria. Per verifica

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0-0 = 0 \quad :)$$

Esempio 7

$$\int_0^2 e^{3x}\,dx$$

Deve venire positivo

$$\int_0^2 e^{3x}\,dx = \Big[\underbrace{\tfrac{1}{3}e^{3x}}\Big]_0^2 = \frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^0 = \frac{1}{3}(e^6-1)$$

perdere 10 secondi a verificare che la derivata sia e^{3x}

Esempio 8

$$\int_0^2 \sqrt{x+3}\,dx$$

Devo trovare $\Phi(x)$ t.c. $\Phi'(x) = \sqrt{x+3}$

$$\int_0^2 \sqrt{x+3}\,dx = \Big[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 = \frac{2}{3}5^{3/2} - \frac{2}{3}3^{3/2}$$

perdere 10 secondi a verificare

$$= \frac{10}{3}\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$$

Esempio 9

$$\int_0^3 \sqrt{2x+3}\,dx$$

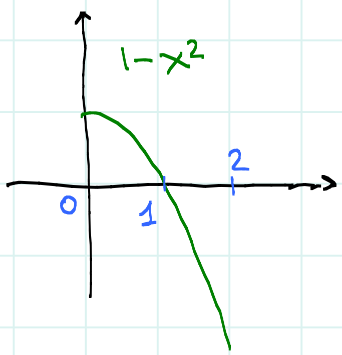
$$= \Big[\frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\Big]_0^3 = \frac{1}{3}9^{3/2} - \frac{1}{3}3^{3/2}$$

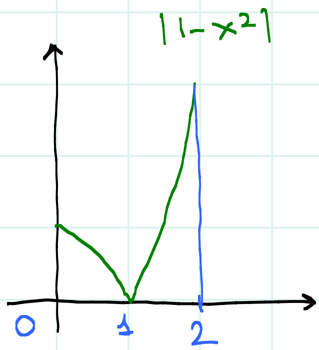
compensa la derivata di $2x$

$$= 9-\sqrt{3}.$$

Esempio 10

$$\int_0^2 |1-x^2|\,dx$$





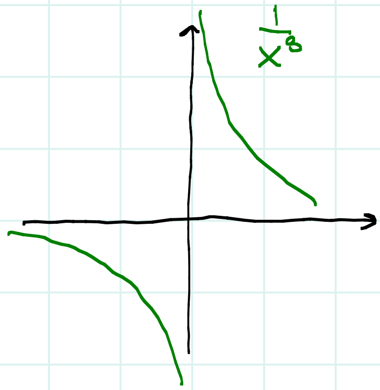
$$|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & x\in[0,1] \\ x^2-1 & x\in[1,2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 |1-x^2|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \quad = \text{si fa}$$

<u>Esempio 11</u> $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$



$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$$

↑ provare a derivare

No! No! Non si tratta di un integrale PROPRIO perché $\frac{1}{x^3}$ non è limitata all'interno della zona di integrazione !!!

<u>Oss finale</u> Prima di partire, accertarsi di avere un integrale PROPRIO !!!

— o — o —