Eq. Diff. di ordine qualunque a coeff. costanti omogenee

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, u^{(i)}(t) = 0$$

numeri dati

derivata i-esima

Caso base: $n=2$

$$a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = 0$$

a, b, c numeri dati

Teoria generale: l'insieme delle soluzioni è uno spazio vett. di dim 2

Tradotto: la soluzione generale è del tipo

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

c_1, c_2 numeri reali

Domanda: come trovo u_1 e u_2? Dipende dalle radici del polinomio

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\rightsquigarrow$ equazione caratteristica

A seconda delle radici, si aprono 3 scenari

Radici reali distinte

Siano λ, μ queste due radici. Allora la soluzione generale è del tipo

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

Radici reali coincidenti

(Discriminante $= 0$) Sia λ la radice doppia

Allora la sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

$\boxed{\text{Radici complesse coniugate}}$ (Discriminante <0)

Siano $\alpha \pm i\beta$ le due radici.

Allora la soluzione generale è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)}$$

Oss. Volendo seguire la logica del primo caso, nel caso delle radici complesse coniugate dovrei scrivere

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

Quindi il terzo caso è coerente con il primo se si pensa agli esponenziali complessi.

Esempio 1 $\quad \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u = 0$

$\rightsquigarrow$ costruisco il polinomio $\quad x^2+3x+2=0$

$\rightsquigarrow$ calcolo le radici del polinomio $\quad (x+2)(x+1)=0$

$$x=-2 \qquad x=-1 \qquad \text{(reali distinte)}$$

$\rightsquigarrow$ la soluzione generale è $\quad u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$

costanti libere (posso determinare se ho le condizioni iniziali)

$\boxed{\text{Verifica}}$ $\quad \dot{u}(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$

$$\ddot{u}(t) = 4c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + 2u(t) &= 4c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \\ &\quad - 6c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-t} \\ &\quad + 2c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{-t} = 0\end{aligned}$$

Esempio 2 $\ddot{u} + 6\dot{u} + 9u = 0$

Pol. caratt. : $x^2 + 6x + 9 = 0$ $(x+3)^2 = 0$

$x = -3$ radice doppia

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}}$$

quando c'è molteplicità 2
si aggiunge la t

Esempio 3 $\ddot{u} + 6\dot{u} + 13u = 0$

Pol. caratt. : $x^2 + 6x + 13 = 0$ $x = -3 \pm \sqrt{9-13}$

$= -3 \pm \sqrt{-4}$

$= \underset{\alpha}{-3} \pm \underset{\beta}{2} i$

$\leadsto$ radici complesse coniugate

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{-3t} \cos(2t) + c_2 e^{-3t} \sin(2t)}$$ $e^{\alpha t} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (\beta t)$

Oss. Se conosco le condizioni iniziali del problema di Cauchy posso trovare c_1 e c_2 in modo unico.

La teoria si estende a eq. lin. a coeff. costanti di ordine qualunque.
Sostanzialmente per una equazione di ordine k la soluzione sarà la comb. lineare di k funzioni ottenute a partire dalle radici del polinomio in questo modo

→ radice reale λ di molt. 1 $\leadsto$ $e^{\lambda t}$

→ radice reale λ di molt m $\leadsto$ $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$

→ radice $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 $\leadsto$ $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

→ radice $\alpha \pm i\beta$ di molt m $\leadsto$ $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

e gli stessi moltiplicati per $t, t^2, \dots, t^{m-1}$

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ Trovare la soluzione generale di

$$\boxed{u^{(4)}(t) = u(t)}$$

Tradotto: trovare tutte le funzioni la cui derivata quarta è uguale a loro stesse

A occhio sembrano essere e^t, e^{-t}, $\sin t$, $\cos t$ e le loro combinazioni lineari. Vediamo di farlo seguire dalla teoria

Polinomio caratteristico: $x^4 = 1 \rightsquigarrow x^4 - 1 = 0$
$\rightsquigarrow (x^2+1)(x^2-1) = 0 \rightsquigarrow (x^2+1)(x+1)(x-1) = 0$

Radici: $+1, -1, i, -i$

$1 \rightsquigarrow e^t$

$-1 \rightsquigarrow e^{-t}$

$\pm i \rightsquigarrow \sin t \quad \cos t$

$\alpha \pm i\beta \rightsquigarrow e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ viene fuori $\sin t$ e $\cos t$

Conclusione: la soluzione generale è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t}$$

Oss. Posso anche scrivere la soluzione (volendo) come

$$\boxed{u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cosh t + c_4 \sinh t}$$

Traduzione in algebra lineare:

$\{e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t\}$ è una base dello spazio delle soluzioni

$\{\cos t, \sin t, \cosh t, \sinh t\}$ è un'altra base dello stesso spazio

$\boxed{\text{Esempio 5}}$ $\quad u''' = -u'$

Polinomio caratteristico : $\quad x^3 = -x \quad \rightsquigarrow \quad x^3 + x = 0$

$\rightsquigarrow \quad x(x^2+1) = 0$

Radici: $\quad x = 0 \qquad\qquad x = \pm i$

$\rightsquigarrow e^{0t} \qquad\qquad \rightsquigarrow e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$1 \qquad\qquad \cos t \qquad \sin t$

La soluzione generale è $\quad \boxed{u(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t}$

$\boxed{\text{Esempio 6}}$ $\quad u^{(4)} = u^{(2)}$ $\quad$ (Derivata 4^a = Derivata 2^a)

Polinomio caratt. $\quad x^4 = x^2 \quad \rightsquigarrow \quad x^4 - x^2 = 0$

$\rightsquigarrow \quad x^2(x^2-1) = 0$

Radici : $\quad x = 1 \qquad x = -1 \qquad x = 0$ radice doppia

$\downarrow \qquad\qquad \rightsquigarrow \qquad\qquad \rightsquigarrow$

$e^t \qquad\qquad e^{-t} \qquad\qquad e^{0t} \qquad t e^{0t}$

$1 \qquad t$

Soluzione generale:

$$\boxed{u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 + c_4 t}$$

— o — o —