ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 15

Note Title 13/10/2023

Somma e intersezione di sottospazi

Riassunto teoria.

Siano V e W due s.sp. vett. di uno stesso spazio vettoriale X.
Allora
→ $V \cap W$ è ancora un s.sp. vett.
→ $V + W = \{ v + w : v \in V, w \in W \}$ è ancora un s.sp. vett.
e vale la FORMULA DI GRASSMANN

$$\boxed{\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)}$$

Se inoltre $V \cap W = \{0\}$, allora la somma si dice **DIRETTA** e si scrive

$$V \oplus W$$

e a questo punto ogni vettore in $V \oplus W$ si scrive in modo **unico** come $v + w$ con $v \in V$ e $w \in W$.

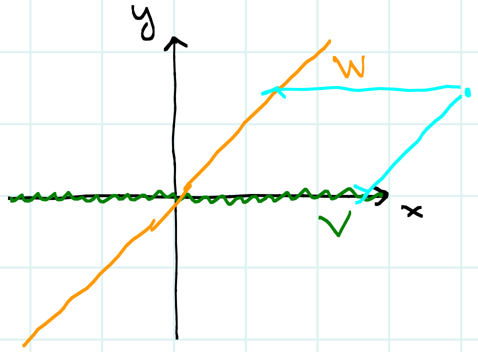
— o — o —

Esempi

X	V	W	$\dim(V)$	$\dim(W)$	$\dim(V \cap W)$	$\dim(V+W)$	
$\mathbb{R}^2$	$(1,0)$	$(1,1)$	1	1	0	2	1
$\mathbb{R}^2$	$(1,1)$	$(2,2)$ $(3,3)$	1	1	1	1	2
$\mathbb{R}^2$	$(1,2)$	$(3,4)$ $(5,6)$	1	2	1	2	3

generatori

1



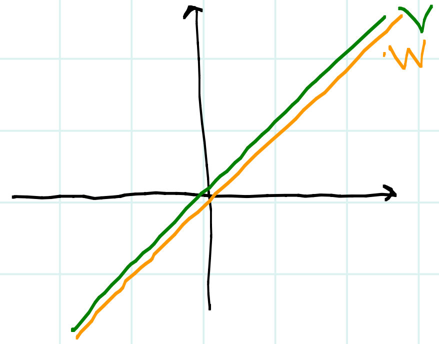
$V = \mathrm{Span}\,(1,0)$

$W = \mathrm{Span}\,(1,1)$

$V \cap W = \{(0,0)\}$

$V + W = \mathrm{Span}\,\underbrace{((1,0),(1,1))}_{\text{sono una base}} = \mathbb{R}^2$

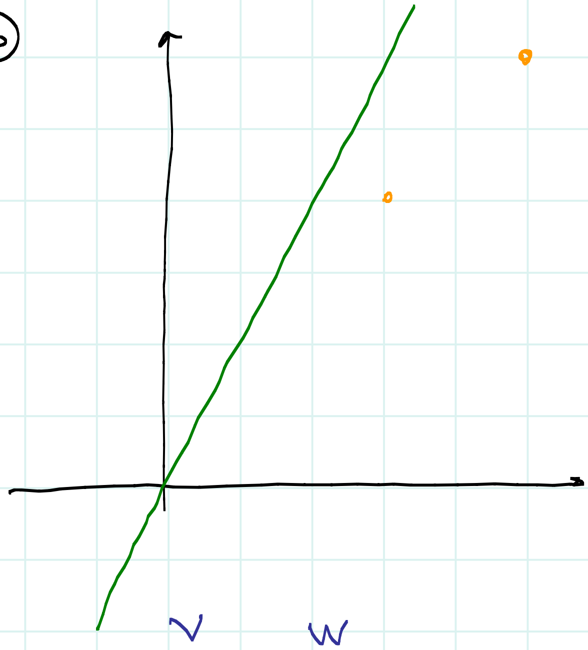
2



$V = W = \text{Span}\,(1,1)$

$V \cap W = V = W = V + W$

3



$V = \text{Span}\,(1,2)$

$W = \text{Span}\,\underbrace{((3,4),(5,6))}_{} = \mathbb{R}^2$

Non sono multipli, quindi sono lin. indip., quindi sono una base di $\mathbb{R}^2$

$V \cap W = V \qquad V + W = \mathbb{R}^2$

	V	W					
$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(1,1,0)$ $(0,2,-1)$					4
$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,1)$ $(1,1,1)$					5

V = retta   W = piano perché sono lin. indip.

Volendo il piano potremmo scriverlo

Parametrica $\rightsquigarrow \quad a\,(1,1,0) + b\,(0,2,-1)$

Cartesiana $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,1,2) \rightsquigarrow x - y - 2z = 0$

La retta non è contenuta nel piano ((1,2,3) non verifica eq.)

Quindi $V \cap W = \{(0,0,0)\}$.

Grassmann

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim (V \cap W)} + \dim (V + W) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim (V)} + \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim (W)}$$

$\rightsquigarrow \dim (V+W) = 3 \rightsquigarrow V + W = \mathbb{R}^3$ anzi $V \oplus W = \mathbb{R}^3$

In alternativa, potevo osservare che
$$V+W = \mathrm{Span}\left((1,2,3),(1,1,0),(0,2,-1)\right)$$
Ora potevo verificare che sono lin. indip. (... Gauss... pivot) dedurre che sono una base di $\mathbb{R}^3$, quindi $V+W$ ha dim. 3, quindi $V \cap W$ ha dim 0, cioè è il solo vettore nullo.

(5) $V = \mathrm{Span}(\overset{v_1}{(1,1,0)}, \overset{v_2}{(1,0,1)})$ = piano

$W = \mathrm{Span}(\underset{w_1}{(0,1,1)}, \underset{w_2}{(1,1,1)})$ = piano

Possono essere in somma diretta? NO!
$$\underbrace{\dim(V\cap W)}_{\text{almeno 1 deve essere}} + \underset{\text{al max } 3}{\dim(V+W)} = \underset{2}{\dim(V)} + \underset{2}{\dim(W)}$$

Abbiamo 2 scenari: $2+2 = 2+2$ ⤳ piani coincidenti

$1+3 = 2+2$ ⤳ piani incidenti

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Passo alle cartesiane, e vai come sempre

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Cerco di capire chi è $\mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$

Osservo che $v_1 + v_2 + w_1 = 2w_2$, quindi
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1, \cancel{w_2}) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1)$$
e spero che l'ultimo sia tutto $\mathbb{R}^3$, cioè che siano lin. indip.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
:-)

			$V \cap W$	$V+W$	V	W
$\mathbb{R}^4$	$(1,2,0,1)$ $(3,0,-1,1)$	$(1,0,1,0)$ $(0,2,-1,1)$	2 1 0	2 3 4	2	2
	v_1 v_2	w_1 w_2				

$\dim(V) = 2$ $\dim(W) = 2$

Scenari possibili: sono 3.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Per capire chi è la somma, osservo che

$V+W = \text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$

e provo a vedere se sono lin. indip.

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Per capire chi è l'intersezione, provo a risolvere

$$a(1,2,0,1) + b(3,0,-1,0) = c(1,0,1,0) + d(0,2,-1,1)$$

Se trovo come unica soluz. $a=b=c=d=0$, allora $V \cap W = \{0\}$ e quindi siamo nello scenario $0+4$.

(Osserviamo che il conto equivale alla lineare indip.)

— o — o —

1. Spazio vettoriale $X = \mathbb{R}^3$.

(a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = z\}$, $W = \text{Span}\{(1,-1,1),(0,1,0)\}$;

(b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = z,\ x - z = 0\}$,
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y = z,\ x + z = 0\}$;

(c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $W = \text{Span}\{(1,2,3)\}$

(a) $V = \text{piano} = \text{Span}((1,0,2),(0,1,3))$

$W = \text{piano} \rightsquigarrow \text{cartesiana}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,0,1) \rightsquigarrow \boxed{x - z = 0}$$

$V \cap W = \text{retta}$ (che volendo trovo), $V + W = \mathbb{R}^3$ per Grassmann.

(b) $V = $ retta che se voglio trovo $= \text{Span}(v)$

$W = $ " $= \text{Span}(w)$

Se v e w sono multipli, allora $V = W = V+W = V \cap W$

Se no $V \cap W = \{0\}$ e $V+W = \text{piano} = \text{Span}(v,w)$.