ANALISI 1 — LEZIONE 42

Note Title 21/11/2024

$\boxed{\text{CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO}}$ (casi standard)

Siano a_n e b_n due successioni con

$a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty)$$

(diverso da 0 e da $+\infty$)

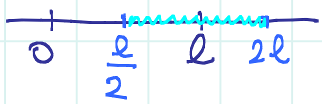
Allora le due serie hanno lo stesso tipo di comportamento, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

Nel caso in cui convergono, il numero a cui convergono può essere diverso.

<u>Operativamente</u> Devo studiare $\sum a_n$, e spero di trovare una $\sum b_n$ che conosco per cui $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0$ e $\neq +\infty$

$\boxed{\text{Dim}}$ Poiché $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0$ e $\neq +\infty$



allora definitivamente $\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$, cioè

$$\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2\ell\, b_n \quad \text{definitiv.}$$

(ho potuto moltiplicare senza cambiare le disug. perché $b_n > 0$).

Se $\sum b_n = +\infty$, allora $\sum \frac{\ell}{2} b_n = +\infty$, e quindi $\sum a_n = +\infty$ per la disug. di sinistra.

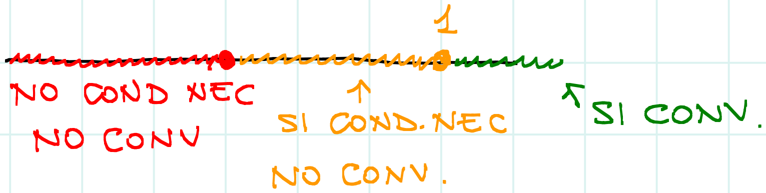
Se $\sum b_n$ conv., allora anche $\sum 2\ell b_n$ conv., e quindi $\sum a_n$ conv. per la disug. di destra.

Serie armoniche generalizzate (armonica vera: quella con $a=1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

Oss. In entrambi i casi la cond. nec. è sempre verificata quando $a>0$



Come si dimostra questa tabellina?

* criterio di condensazione di CAUCHY
* disuguaglianze e confronti
* confronti serie - integrali (che vedremo un giorno)

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+3n^2-7}$

$a_n \to 0$, quindi può convergere.
Inoltre $a_n \geq 0$ definitiv.

Brutale: $a_n \sim \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$ $\rightsquigarrow$ armonica generalizzata con $a=2>1$ $\rightsquigarrow$ converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n+5}{n^3+3n^2-7}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2(n+5)}{n^3+3n^2-7} \longrightarrow 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, che converge in quanto armonica generalizzata con $a = 2 > 1$.

<u>Esempio 2</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ voglio dimostrare davvero che converge

Faccio il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2-n}$
dopo aver osservato che a_n e b_n sono positive definitivamente.
Ora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2-n}{n^2} \longrightarrow 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\sum \frac{1}{n^2}$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^2-n}$, che avevamo visto convergere essendo telescopica.

<u>Conseguenza</u> Poiché $\frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$ e ogni $a \geq 2$

l'esempio precedente dimostra la convergenza dell'armonica generalizzata almeno quando $a \geq 2$ (resta aperto il range $(1,2)$).

<u>Esempio 3</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

Confronto asintotico con $b_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
Tutta roba positiva e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log(1+x)} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\sum \frac{1}{n}$ si comporta come $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, che diverge in quanto telescopica

Conseguenza Poiché $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 1$ e per ogni $a \leq 1$ questo dimostra che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge per ogni $a \leq 1$.

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{n}$

Intanto $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Per ora è $\frac{+\infty - \infty}{+\infty}$

Brutale: $a_n = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{n(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} \sim \frac{\text{cost}}{n^{3/2}}$

Ora $3/2 > 1$, quindi converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{n(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} \cdot n\sqrt{n} = \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \to \frac{3}{2} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, che converge.

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sinh \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

Brutale: $a_n \sim n \left(\cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6n^3} \right) \sim n \cdot \frac{1}{3n^3} \sim \frac{1}{3n^2}$

$\sinh t = t + \frac{1}{6} t^3 + \dots$

$\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + \dots$

$\leadsto$ converge perché $2 > 1$

Rigoroso: confronto asint. con $\frac{1}{n^2}$

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{7} - 1)$ (Intanto $a_n \to 0$ e $a_n \geq 0$)

$a_n = \sqrt[n]{7} - 1 = 7^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log 7} - 1 \sim \cancel{1} + \frac{1}{n} \log 7 - \cancel{1}$

quindi si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge.

— o — o —