VARIANTI DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS

Come dim. che max/min esistono anche se non sono verificate le ipotesi

Achtung! Quando le ipotesi di W non sono verificate, max e/o min possono esistere lo stesso

Esempio 1 $\max\left\{\dfrac{\log(7+\sin x)}{\cos^2 x+5} : x\in\mathbb{R}\right\}$ esiste?

Osserviamo che $f(x)$ è definita e continua per ogni $x\in\mathbb{R}$ (denominatore ≥ 5 sempre e $7+\sin x\geq 6$ sempre).
Inoltre $f(x)$ è 2π-periodica e questo basta per concludere.
Infatti per W. vero esiste

$$M=\max\{f(x): x\in[0,2\pi]\}$$

Ma allora M è max su tutto $\mathbb{R}$ perché i valori assunti sono sempre gli stessi.

Fatto generale Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è periodica e continua, allora ammette max e min su tutto $\mathbb{R}$.

Dim Basta prendere max e min. in un periodo, e quelli lo sono dappertutto.
I p.ti di max/min. sono infiniti (almeno 1 per periodo)

Esempio 1 bis f come nell'esempio 1. Allora esiste

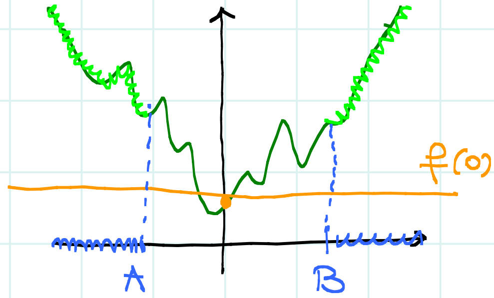
$$\min\{f(x): x\in \underbrace{(-1,27)}_{\text{in questo intervallo cade un intero periodo } [0,2\pi]}\}$$

$\boxed{\text{WEIERSTRASS GENERALIZZATO}}$ (Una delle tante varianti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



Allora per forza esiste

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Prendiamo un valore a caso, ad esempio $f(0)$.

Poiché $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, esiste $B > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) \qquad \forall x \geq B$$

Poiché $f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$, esiste $A < 0$ tale che

$$f(x) \geq f(0) \qquad \forall x \leq A$$

Per W. classico so che esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

Dico che m in realtà è minimo ovunque, cioè che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti

- se $x \in [A, B]$, allora $f(x) \geq m$ per definizione di m
- se $x > B$, allora

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per def.} \\ \text{di } B}}{\geq} f(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } 0 \in [A,B] \\ \text{e } m \text{ è il minimo su } [A,B]}}{\geq} m$$

- se $x < A$, allora vale lo stesso discorso.

Analogamente, esiste il massimo su tutto $\mathbb{R}$ se

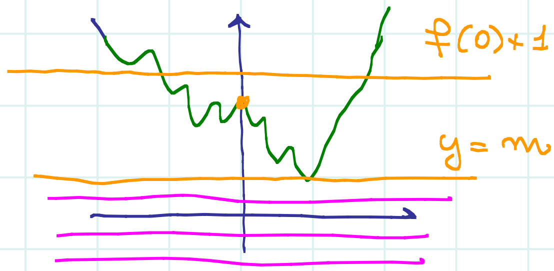
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Esempio 1 La funzione

$$f(x) = x^2 - \sin(x^6) + \cos(x^{20}) \cdot x$$

è surgettiva come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Banalmente NO, perché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, quindi per W generalizzato esiste il minimo su tutto $\mathbb{R}$, e i valori più piccoli di m non vengono presi



È iniettiva ?

NO! Basta considerare l'equazione

$$f(x) = f(0) + 1$$

Questa ha almeno una soluzione positiva e almeno una soluzione negativa (basta applicare il teorema di esistenza degli zeri in due intervalli opportuni).

$\boxed{\text{VARIANTE}}$ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

(i) $f(0) = 5$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 8$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 6$

Cosa possiamo dire di max e min su tutto $\mathbb{R}$?

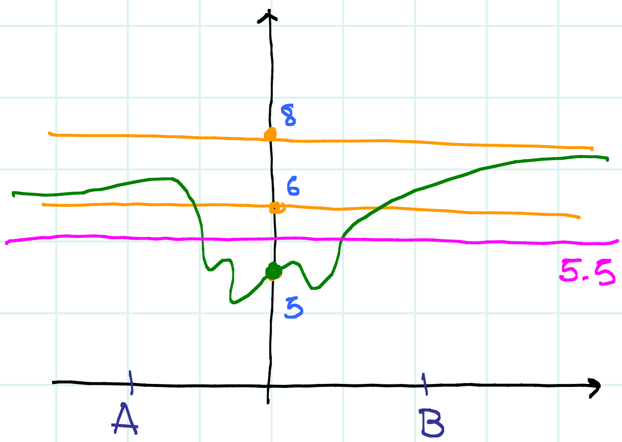
Non è iniettiva!

Ad esempio l'equazione

$$f(x) = 5.5$$

ha almeno una soluzione $x > 0$

e almeno una soluzione $x < 0$



Il max potrebbe non esistere (in tal caso il sup sarebbe 8).
Vedi figura.

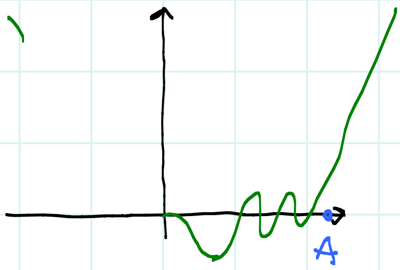
È intuitivo che il min. esiste per forza. Come dimostrarlo?

Come nella dim. di prima avremo che

- esiste $B > 0$ t.c. $f(x) \geq 5.5$ per ogni $x \geq B$
- esiste $A < 0$ " " " $x \leq A$

A questo punto il min. in $[A, B]$ è anche minimo su tutto $\mathbb{R}$

— o — o —



Esempio $f(x) = x^{20} - \sin(x^4)$

max / min su tutto $\mathbb{R}$ e su $(0, +\infty)$

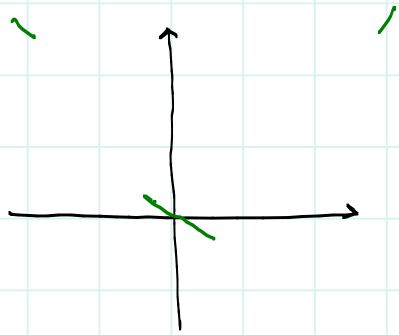
Essendo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ sappiamo

che su tutto $\mathbb{R}$ max non esiste e min sì

Su $(0, +\infty)$ non c'è il max perché $\sup = +\infty$

Il minimo esiste perché vicino a 0 si comporta come $-x^4$, quindi un po' a dx di $x=0$ diventa negativa e quindi la battaglia per il minimo si gioca in $[0, A]$ dove A è tale che

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq A$$



Esempio $f(x) = \log(1+x^2) - \arctan x$

tutto $\mathbb{R}$ oppure $(0, +\infty)$

Ancora una volta

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Vicino a 0 si comporta come $-x$, quindi diventa neg. un po' a dx di $x = 0$ e si chiude come prima :)

— o — o —