ANALISI 1 — LEZIONE 101

Note Title 29/03/2017

TAYLOR Ambientazione generale: $r>0$ e $f:\underbrace{(-r,r)}_{\text{intorno dell'origine}} \to \mathbb{R}$

Taylor Peano Sia $n \in \mathbb{N}$ (ordine dello sviluppo)

Supponiamo che

(i) f derivabile $(n-1)$ volte in $(-r,r)$,

(ii) f derivabile n volte in $x=0$.

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ t.c. $\deg(P_n) \leq n$ e

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0}$$

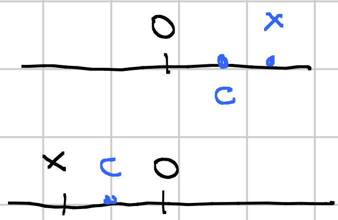
Taylor Lagrange Sia $n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che

(i) f derivabile $(n+1)$ volte in $(-r,r)$

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ t.c. $\deg(P_n) \leq n$ e

$\forall x \in (-r,r)$ $\exists c$ compreso tra x e 0 t.c.



$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}$$

In entrambi i casi il polinomio $P_n(x)$ è dato dalla solita formula

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

Oss. La formula con centro in $x_0 \neq 0$ si ottiene da quella di sopra considerando la funzione $g(x) = f(x_0 + x)$ (le deriv. di g in 0 sono quelle di f in x_0)

Dimostrazione classica dei due Taylor

Lemma 1 Consideriamo un monomio ax^i.
Allora la sua derivata k-esima è

$$(ax^i)^{(k)} = \begin{cases} \frac{i!}{(i-k)!} a x^{i-k} & \text{se } k \leq i \\ 0 & \text{se } k \geq i+1 \end{cases}$$

Nota bene: $\frac{i!}{(i-k)!} = i(i-1)(i-2)\dots(i-k+1)$

Dim: facile induzione a partire da $k=0$.

Come conseguenza, se calcolo la derivata in $x=0$, ottengo

$$\begin{cases} i!\,a & \text{se } k=i \\ 0 & \text{se } k\neq i \end{cases}$$

LEMMA 2 Sia $P(x)$ un polinomio, diciamo

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Allora

$$\boxed{P^{(i)}(0) = a_i\, i!}$$

Dim. Per il lemma 1, quando derivo i volte e sostituisco $x=0$, sopravvive solo il termine di grado i, che si ritrova moltiplicato per $i!$

— o — o —

LEMMA 3 Sia $f(x)$ come nei teoremi di Taylor e sia $P_n(x)$ dato dalla formula solita.
Poniamo
$$\varphi(x) := f(x) - P_n(x).$$
Allora
$$\boxed{\varphi^{(i)}(0) = 0 \qquad \forall\, i = 0, 1, \dots, n}$$
derivate i-esime

Dim. $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) - P_n^{(i)}(0) = 0$

$P_n^{(i)}(0)$ = coeff. di x^i moltiplicato per $i!$ = $\dfrac{f^{(i)}(0)}{\cancel{i!}} \cdot \cancel{i!} = f^{(i)}(0)$

Proprietà fondamentale del polinomio di Taylor

Se valgono le ipotesi di Taylor – Peano (quelle che chiedono meno) allora il pol. dato dalla formula è quell' unico polinomio le cui derivate in $x=0$ coincidono con quelle di $f(x)$ fino all' ordine n. (Da $n+1$ in poi sono nulle)

LEMMA 4 (PEANO) Sia $\varphi(x)$ tale che
$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$$
Allora $\qquad \varphi(x) = o(x^n) \quad$ per $\quad x \to 0$

Dim Si dimostra con De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x)}{n x^{n-1}} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(x)}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots$$

$$= \dots = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n!\, x}$$

Qui giunto vorrei rifare Hôpital, ma non posso perché ho assunto che $\varphi^{(n)}(x)$ esista solo per $x=0$. Ne esco con la def. di derivata

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(0)}{x}}_{\text{rapp. increm. di } \varphi^{(n-1)}(x) \text{ in } x=0} = \varphi^{(n)}(0) = 0.$$

Meno con i puntini... si può fare per induzione su n (il passo base $n=1$ è la def. di derivata, il passo induttivo si fa con Hôpital).

Dim Taylor-Peano: Lemma 1+2+3+4.

$\boxed{\text{Lemma 4 (Lagrange)}}$ Sia $\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}$, sia $n \geq 1$ intero
Supponiamo che
(i) φ derivabile $(n+1)$ volte in $(-r,r)$
(ii) $\varphi^{(i)}(0) = 0$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n$.
Allora per ogni $x \in (-r, r)$ esiste c compreso tra x e 0 t.c.

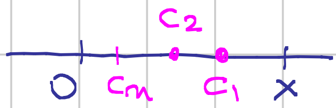
$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Sempre con i puntini. Se $x \neq 0$ posso dividere

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \text{uso Cauchy con } f(x) = \varphi(x), \; g(x) = x^{n+1}$$

(le hp di C valgono tra 0 e x)

$$= \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\, c_1^n}$$



$$= \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(0)}{(n+1)(c_1^n - 0^n)} = \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)n\, c_2^{n-1}}$$ con c_2 tra 0 e c_1

$$= \dots = \frac{\varphi^{(n)}(c_n)}{(n+1)!\, c_n}$$

$$= \frac{\varphi^{(n)}(c_n) - \varphi^{(n)}(0)}{(n+1)!\,(c_n - 0)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

Più rigoroso, senza puntini: induzione su n.
Per $n=1$ è proprio il teorema di Cauchy o di Lagrange.
Al passaggio induttivo applico una volta C

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\, c_1^n}$$

e osservo che la nuova funzione $\varphi'(x)$ ha tutte le derivate nulle fino alla $(n-1)$-esima e procedo con l'hp induttiva.

<u>Oss 1</u> Le ipotesi di Taylor Peano / Lagrange sono cond. sufficienti per l'esistenza del polinomio ma non necessarie (vedi esempi nella prima parte del corso).

<u>Oss. 2</u> Esiste una dim. di Taylor-Lagrange che usa solo Rolle (vedi AM1-15).

— o — o —