ANALISI 1 — LEZIONE 72

Note Title 07/03/2025

Integrazione delle funzioni razionale

$$\text{Funzione razionale} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$ polinomi

<u>Buona notizia</u> : $\boxed{\text{SE}}$ siamo capaci di fattorizzare $Q(x)$, allora sappiamo trovare una primitiva fatta di 3 pezzi

→ funzione razionale

→ un po' di logaritmo

→ un po' di arctan

Road map

1. Divisione
2. Fattorizzazione
3. Sistema lineare (decomposizione)
4. Integrazione

1 Divisione

Devo calcolare $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$

Se grado $(P(x))$ < grado $(Q(x))$ non faccio nulla

Se grado $(P(x)) \geq$ grado $(Q(x))$, allora divido $P(x)$ per $Q(x)$.

Ottengo

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + \underbrace{R(x)}_{\text{resto con grado } R(x) < \text{grado } Q(x)}$$

Dividendo trovo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{A(x)}_{\text{polinomio che so integrare}} + \boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Nuova funz. raz. con grado num < grado denom

Conseguenza: basta saper integrare quando grado sopra < grado sotto

Esempio 1 $\int \frac{x^3+3}{x-4}\,dx$ Divido

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & & +3 & x-4 \\ \hline -x^3 & +4x^2 & & x^2+4x+16 \\ \hline & 4x^2 & +3 & \\ & -4x^2 & +16x & \\ \hline & & 16x+3 & \\ & & -16x+64 & \\ \hline & & 67 & \end{array}$$

Dalla divisione sappiamo che

$$\underbrace{x^3+3}_{P(x)} = \underbrace{(x-4)}_{Q(x)}\underbrace{(x^2+4x+16)}_{A(x)} + \underbrace{67}_{R(x)}$$

$$\int \frac{x^3+3}{x-4}\,dx = \int (x^2+4x+16)\,dx + \int \frac{67}{x-4}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3+2x^2+16x + 67\log|x-4|$$ [Verifica!]

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{Fattorizzazione}}$ Si tratta di scomporre il denomin. $Q(x)$

Teorema misterioso Ogni polinomio $Q(x)$ a coeff. reali si "può" scrivere come prodotto di fattori di primo grado oppure di secondo grado a loro volta non ulteriormente scomponibili

La fase 2 consiste nello scrivere

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{N} (A_j x^2 + B_j x + C_j)^{M_j}$$

Gli esponenti m_i e M_j sono le molteplicità dei fattori.

I fattori di 2° grado non sono ulteriormente scomponibili se

$$B_j^2 - 4A_jC_j < 0$$ (discriminante negativo)

Esempi $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

$x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

↑ Non si scompone oltre

$x^3+1 = (x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta = 1-4=-3<0}$

Achtung! L'esistenza della fattorizzazione non vuol dire che la sappiamo trovare esplicitamente!!

3 Sistema lineare (Decomposizione)

Si tratta di scrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali "più semplici":

→ caso facile

→ caso generale

Caso facile : nella scomposizione di $Q(x)$ tutti i fattori (di primo e secondo grado) hanno moltepl. $= 1$

Allora si può scrivere la frazione come somma di frazioni che hanno come denominatore i singoli fattori.

Esempi $$\frac{3x^2+4}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5}$$

Voglio trovare numeri A, B, C in modo che funzioni

Se faccio il denom. comune trovo

$$\frac{A(x+3)(x+5)+B(x-1)(x+5)+C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{3x^2+4}{(\dots)(\dots)(\dots)}$$

Calcolo il numeratore

$$Ax^2 + 8Ax + 15A + Bx^2 + 4Bx - 5B + Cx^2 + 2Cx - 3C = 3x^2 + 4$$

$$\begin{cases} A + B + C = 3 \\ 8A + 4B + 2C = 0 \\ 15A - 5B - 3C = 4 \end{cases}$$

Sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite $\rightsquigarrow$ c'è speranza di trovare in modo unico A, B, C.

<u>Teorema misterioso</u> Sì, ci riesco sempre.

<u>Modo astuto di by-passare il sistema</u>: guardiamo i numeratori nell'ultima riga della pagina precedente.

Sostituisco $x = 1 \rightsquigarrow 24A = 7 \rightsquigarrow A = \frac{7}{24}$

$x = -3 \rightsquigarrow -8B = 31 \rightsquigarrow B = -\frac{31}{8}$

$x = -5 \rightsquigarrow 12C = 79 \rightsquigarrow C = \frac{79}{12}$

Trovati A, B, C l'integrale è fatto!!

Se ci sono fattori di 2° grado, su quelli occorre mettere un numeratore di 1° grado

<u>Esempio</u> $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\,dx$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Cosa diventa il sistema lineare?

$$A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) = x^2+1$$ (guardo solo i numeratori)

$$Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C = x^2 + 1$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B + C = 0 \\ A - C = 1 \end{cases}$$ $\rightsquigarrow$ risolvo e trovo A, B, C

Scorciatoia: metto $x=1$ subito e trovo $3A=2 \rightsquigarrow A=\frac{2}{3}$

$\rightsquigarrow B=\frac{1}{3} \rightsquigarrow C=-\frac{1}{3}$

Quindi $$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\,\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

Basta integrare quello che è rimasto

Regola generale: se le molteplicità sono tutte 1, allora

$\rightsquigarrow$ costanti sopra i fattori di primo grado

$\rightsquigarrow$ roba di primo grado su quelli di secondo

$\rightsquigarrow$ il sistema ha sempre soluzione unica

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{x^3}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$$

— o — o —