ANALISI 1 — LEZIONE 068

Note Title 15/12/2016

Esempio 1 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$

Int. improprio con unico pbm. a $+\infty$ e $f(x) \geq 0$ vicino al pbm.
$\left(\frac{1}{x} \in (0,1) \text{ per } x \text{ grande, quindi } \sin\frac{1}{x} > 0\right)$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x}$, quindi $\int f(x)\,dx$ con pbm. a $+\infty$ si comporta come $\int \frac{1}{x}\,dx$ con pbm. a $+\infty$, quindi diverge.

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$ che si riduce a fare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$

$f(x) \geq 0$ con due pbm: 0 e $+\infty$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$

Problema a $+\infty$: $f(x) \sim \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^{3/2}}$, quindi conv. perché $\frac{3}{2} > 1$

Problema a 0: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi conv. perché $\frac{1}{2} < 1$

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\,dx$

$f(x) \geq 0$. Problema a $+\infty$: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge

Problema a 0: NON ESISTE perché $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{6}$ (Taylor)

quindi l'integranda è limitata in ogni intervallo $[0, A]$

Problemi in p.ti diversi da 0

Supponiamo che il pbm. sia in un certo $a \in \mathbb{R}$. Allora

può essere un qualunque numero positivo

$$\boxed{\int_a^{a+1} \frac{1}{|x-a|^b}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } b<1 \\ \searrow \text{div. a } +\infty & \text{se } b \geq 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_{a-1}^{a} \frac{1}{|x-a|^b}\,dx = \text{come sopra}}$$

"Dim" vorrei fare la sostituzione

$$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^b}\,dx$$

Pongo $y = x-a \rightsquigarrow dx = dy$

$x = a \rightsquigarrow y = 0$; $x = a+1 \rightarrow y = 1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y^b}\,dy$$ e questo è in tabellina.

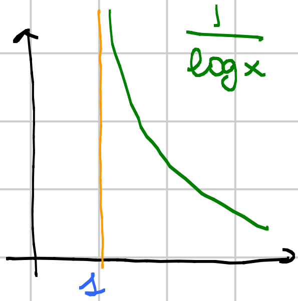
Dovrei dimostrare che si può fare sostituzione in int. impropri

$$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^b}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{a+1} \frac{1}{(x-a)^b}\,dx = \text{(qui posso sostituire)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{y^b}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y^b}\,dy.$$

— o — o —

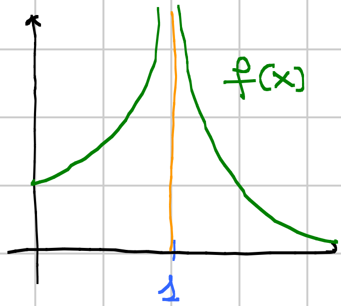
Esempio 4 $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\log x}\,dx$



Portiamo pbm in 0 ponendo $y = x-1$

$$\int_1^4 \frac{1}{\log x}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy \quad \left[\sim \int_0^3 \frac{1}{y}\,dy \Rightarrow \text{diverge} \right]$$

Esempio 5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{|x^4-1|^{1/2}}\,dx$



Spezzo in 3: $\displaystyle\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^{+\infty}$

$\boxed{[2,+\infty)}$: $f(x) \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ converge perché $2>1$

$\boxed{[1,2]}$: $$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}}_{\text{colpevole dell'improprietà!}}\ \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}}}_{\text{tranquillo}}$$

Brutal mode: $\int f(x)\,dx$ con pbm in $x=1$ si comporta come

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ con pbm. in $x=1$ $\Rightarrow$ converge perché $\frac{1}{2}<1$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

$\boxed{[0,1]}$ Stessa cosa solo che ora serve il val. assol.

C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}} \rightsquigarrow \displaystyle\lim_{x\to 1^-} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow$ stesso comp.

$\rightsquigarrow$ converge

— o — o —

Oss. $$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^b x}\,dx = \begin{cases} \text{conv. se } b>1 \\ \text{div. a } +\infty \text{ se } b\le 1\end{cases}}$$

Si dim. facendo la primitiva con il cambio $y=\log x$; $dy = \dfrac{dx}{x}$

Esempio 6 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^a)}{x^{2016}}\,dx$ Per quali valori di $a>0$ converge?

Spezziamo: $\displaystyle\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

$\boxed{[1,+\infty)}$ In questa zona $f(x)$ ha segno variabile, quindi spero nell'assol. integr.

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x^a)|}{x^{2016}} \leq \frac{1}{x^{2016}}$$ ☺

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2016}}\,dx < +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

$2016>1$ — confronto normale tra integrande ≥ 0 — assol. integr.

$\boxed{[0,1]}$ Qui non ci sono pbm. di segno

Brutale: $f(x) \sim \dfrac{x^a}{x^{2016}} = \dfrac{1}{x^{2016-a}}$, quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$

converge $\Leftrightarrow$ $2016-a<1$ $\Leftrightarrow$ $a>2015$

Esempio 7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{77}+5x^7+\arctan x-1}\,dx$

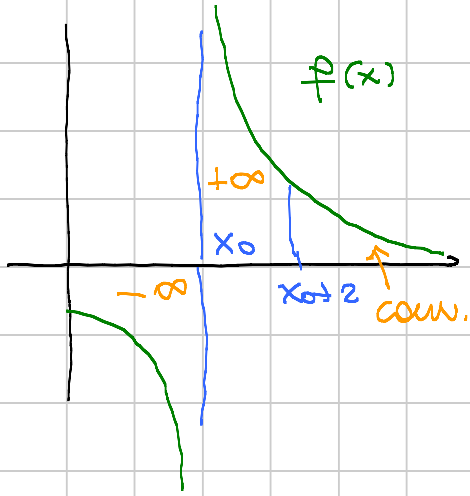
C'è un pbm. a $+\infty$

Ma ce ne è almeno un altro. Perché? Il denom è <0 per $x=0$ e tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$, quindi essendo continuo si annulla almeno una volta in mezzo

Osservo che il denom. si annulla esattamente una volta perché è somma di funz. strett. crescenti.

Sia x_0 il p.to in cui si annulla

Spezzo in 3 : $\int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+2} + \int_{x_0+2}^{+\infty}$



$\boxed{[x_0+2, +\infty]}$ $f(x) \sim \frac{1}{x^{77}}$, quindi

l'integrale converge $(77 > 1)$

$\boxed{[x_0, x_0+2]}$ Voglio sapere come si annulla in x_0 il denom.

$$d(x) = x^{77} + 5x^7 + \arctan x - 1 \underset{\text{Taylor}}{=} \underbrace{d(x_0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + d'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0))$$

Idea: $d(x) \sim x - x_0$, quindi $f(x) \sim \frac{1}{x - x_0}$, quindi l'integrale diverge (espon $= 1$).

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x - x_0}$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{x - x_0}{x^{77} + 5x^7 + \arctan x - 1}$$

$$\underset{[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{\text{derivata...}} = \frac{1}{\text{roba} > 0} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{d'(x_0)}$$

$\boxed{[0, x_0]}$ Diverge a $-\infty$ per stesso motivo

Conclusione: quello globale è INDETERMINATO.

—o—o—