ANALISI 1 – LEZIONE 86

Note Title 28/03/2025

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Setting: problema di Cauchy

$$\begin{cases} \overbrace{u' = f(t)\,g(u)}^{\text{eq. var. separabili}} \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Numeri dati

Un' eq. di questo tipo si "riesce" a risolvere con la seguente procedura

1. Separare
2. Integrare
3. Ricavare

} soluzione generale che dipende da un parametro c

4. Determino c (usando la cond. iniziale)
5. Verifica! (sia dell' eq. sia della cond. iniz.)
6. Studiare la soluzione

Esempio 1

$$\begin{cases} u' = t u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

1. Separare: tutte le u a sx, tutte le t a dx

$$\frac{du}{dt} = t u^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{du}{u^2} = t\,dt$$

2. Integrare: a sx rispetto a u, a dx rispetto a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t\,dt \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{2}t^2 + c$$

famoso + c dell' integrale

3. Ricavare: u in funzione di t

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}t^2 + c \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{u} = -\frac{1}{2}t^2 - c = -\frac{t^2+2c}{2} \quad \rightsquigarrow \quad u(t) = \frac{-2}{t^2+2c}$$

Conclusione: la soluzione generale è

$$u(t) = \frac{-2}{t^2+c}$$

↑ essendo c un parametro libero c o 2c è lo stesso

Oss. La procedura funziona pur di sapere

→ fare le primitive

→ ricavare u alla fine

(4) Determino c $\quad u(0)=7 \rightsquigarrow -\frac{2}{c} = 7 \rightsquigarrow c = -\frac{2}{7}$

Quindi la soluzione è $\quad u(t) = \frac{-2}{t^2-\frac{2}{7}} = \frac{-2}{\frac{7t^2-2}{7}} = \frac{-14}{7t^2-2}$

$$\boxed{u(t) = \frac{14}{2-7t^2}}$$

(5) Verifica! $\quad$ Cond. iniz. $\quad u(0) = \frac{14}{2} = 7$ ☺

Equazione: $\quad u'(t) = -\frac{14}{(2-7t^2)^2}(-14t) = t\underbrace{\left(\frac{14}{2-7t^2}\right)^2}_{u(t)^2}$ ☺

(6) Studio la soluzione $\quad$ Cosa mi interessa?

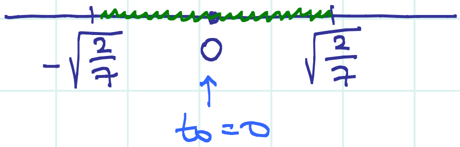
→ intervallo massimale di esistenza

→ LIFE SPAN (tempo di vita)

→ tipo di morte (se c'è)

Nel nostro caso $u(t)$ è definita per $2-7t^2 \neq 0$, quindi $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$

Intervallo massimale di esistenza = più grande pezzo dell'insieme di definizione che contiene il tempo iniziale t_0.

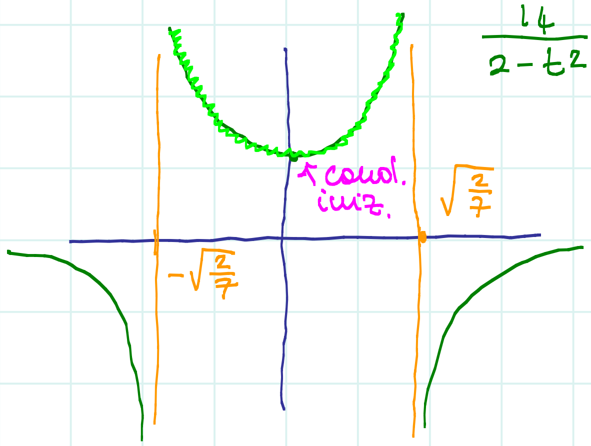


Int. max. di esistenza $= \left(-\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$

Tempo di vita (nel futuro) $=$ sup. int. max di esistenza $\rightsquigarrow \sqrt{\frac{2}{7}}$

" passato $=$ inf " " " $\rightsquigarrow -\sqrt{\frac{2}{7}}$

Come è fatta la soluzione?



Quali sono gli scenari? A meno di situazioni patologiche, possono succedere 3 cose (nel futuro)

→ il tempo di vita è $+\infty$ (esistenza globale nel futuro)

→ BLOW UP : life span $= T \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$$

→ BREAK DOWN : life span $= T \in \mathbb{R}$ ma non c'è blow-up. Di solito allora succede che

$$\lim_{t \to T^-} u'(t) = \pm\infty \qquad \text{(Blow-up della derivata)}$$

Nel nostro caso, nel futuro, la soluzione ha blow-up per $T = \sqrt{\frac{2}{7}}$

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 1 bis}}$
$$\begin{cases} u' = t u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Come prima ① + ② + ③ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \dfrac{-2}{t^2 + c}$

④ Ricavo c: $u(0) = -\frac{2}{c} = 0 \rightsquigarrow$ niente c ☹

In questo caso la soluzione è $u(t) \equiv 0$ (si vedeva a occhio)

Oss 1 In questo caso il passaggio di divisione era ancora più abusivo.

Oss 2 $\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Se } g(u_0) = 0, \text{ allora la soluzione è sempre } u(t) \equiv u_0}$

Esempio 2 $\begin{cases} u' = -\frac{t^3}{u^2} \\ u(1) = 2 \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{t^3}{u^2} \rightsquigarrow u^2 du = -t^3 dt$

② $\frac{1}{3}u^3 = -\frac{1}{4}t^4 + c$

③ $u^3 = -\frac{3}{4}t^4 + c \rightsquigarrow u(t) = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + c}$

c e 3c è uguale

c e −c è uguale

④ $u(1) = -\sqrt[3]{\frac{3}{4} + c} = 2 \rightsquigarrow -\frac{3}{4} + c = 8 \rightsquigarrow c = 8 + \frac{3}{4} = \frac{35}{4}$

$\rightsquigarrow u(t) = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + \frac{35}{4}}$

⑤ Verifica... ⑥ Esistenza globale nel passato e nel futuro

Esempio 3

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(1) = 5 \end{cases}$$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u} \rightsquigarrow u\,du = -dt$

② $\frac{1}{2}u^2 = -t + c$

anche quelle con $-\sqrt{}$ sono soluzioni

③ $u^2 = -2t + c \rightsquigarrow u(t) = \sqrt{c - 2t}$

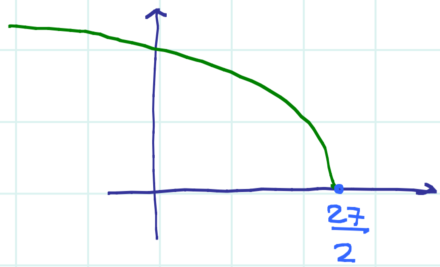
scelgo il segno + perché $u(1) = 5 > 0$

④ $u(1) = 5 \rightsquigarrow 5 = \sqrt{c-2} \rightsquigarrow c - 2 = 25 \rightsquigarrow c = 27$

$$u(t) = \sqrt{27 - 2t}$$

⑤ Verifica... a mente

⑥ Int. max. di esistenza : $\left(-\infty, \frac{27}{2}\right)$



La sol. ha esistenza globale nel passato e nel futuro ha break-down per $T = \frac{27}{2}$.

— o — o —