ANALISI 1 - LEZIONE 036

Note Title 03/11/2016

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+7n+5}{n^3+n^2+10}}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ definitivamente e $a_n \to 0$, quindi può convergere

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ armonica con $a=1 \rightsquigarrow$ diverge

Rigoroso: confronto asint. con $b_n = \frac{1}{n}$.

$\frac{a_n}{b_n} = \ldots \to 1 \quad \neq 0, \neq +\infty \Rightarrow \sum a_n$ si comp. come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge

Oss. Un confronto secco del tipo $a_n \geq \frac{1}{n}$ non è evidente

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+7n+5}{n^a+n^2+10}$

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$ e quindi converge $\Leftrightarrow a-2>1$

per $a \geq 2$

$\Leftrightarrow a>3$

Rigoroso: per $a \geq 2$ faccio il C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{a-2}}$

per $a<2$ ho che $a_n \to 1$, quindi

manca la cond. nec. $\Rightarrow$ diverge

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^a+7n+5}{n^7+n^2+10}$ converge $\Leftrightarrow a<6$

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^a}{n^7} = \frac{1}{n^{7-a}}$ che converge per $7-a>1$

quindi $a<6$

Rigoroso: solito confronto asintotico

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n+8^n}{2^n+a^n}$ converge $\iff a>8$ (limitandosi agli $a>0$)

Rigoroso:

- per $a<8$ si ha $a_n \to +\infty \Rightarrow$ no cond. nec. $\Rightarrow$ diverge
- per $a=8$ " " $a_n \to 1 \Rightarrow$ come sopra
- per $a>8$ uso criterio radice

$$\sqrt[n]{\frac{5^n+8^n}{2^n+a^n}} = \frac{8}{a}\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{a}\right)^n+1}}}}_{\to 1} \to \frac{8}{a}<1 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^4\log n+n^3+1}$

Brutal mode: $a_n \sim \dfrac{n^2}{n^4\log n} = \dfrac{1}{n^2\log n}$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \dfrac{1}{n^2\log n}$

Facile: $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$ quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \dfrac{1}{n^2\log n}$ che resta da studiare

Provo un confronto asintotico con $c_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{\cancel{n^2}\log n}\cdot \cancel{n^2} \to 0 \quad (\text{caso limite})$$

$$\frac{b_n}{c_n} \le 1 \text{ definitiv.} \Rightarrow b_n \le c_n \text{ definit.}$$

$$\sum c_n < +\infty \Rightarrow \sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

— o — o —

In alternativa si poteva osservare che da subito

$$\frac{1}{n^2\log n} \le \frac{1}{n^2} \text{ definitiv. (appena } \log n \ge 1)$$

e usare confronto secco.

Esempio 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

Tentativo 1: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$ ... $\frac{a_n}{b_n} = \log n \to +\infty$

⇝ $a_n \geq b_n$ definitiv. ⇒ BOH ☹

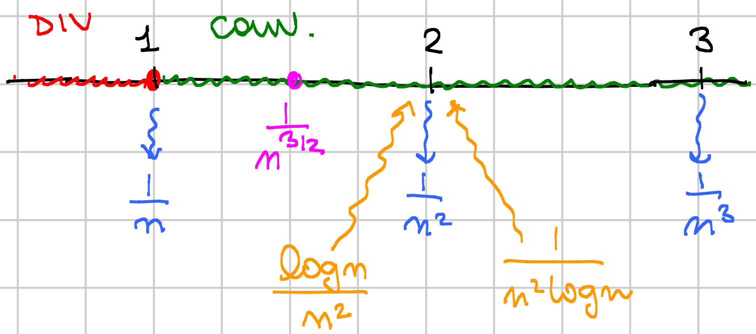
Tentativo 2: C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$ ... $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n} \to 0$

⇝ $a_n \leq b_n$ definit. ⇒ BOH ☹

Tentativo buono: C.A. con $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ... $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$

⇝ $a_n \leq b_n$ definit. Poiché $\sum b_n < +\infty$ (armonica con $a = \frac{3}{2} > 1$)
anche $\sum a_n < +\infty$.

Interpretazione brutale



Oss. Potevo confrontare con $\frac{1}{n^a}$ con ogni $a \in (1,2)$

Esempio 7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ $\qquad a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$

Punto sulla convergenza. Tentativo 1: $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{3^n}$ MAGARI!
è vero il contrario

Tentativo 2: $b_n = \frac{1}{n^{2016}}$ e faccio C.A.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \cdot n^{2016} = e^{2016 \log n - \sqrt{n} \log 3} \to e^{-\infty} = 0$$

⇝ $a_n \leq b_n$ definitiv. ⇒ OK

Tentativo 3 Criterio radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \to 1 \Rightarrow \text{BOH}$$ ☹

Esempio 8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^a \sin\left(\frac{n+33}{n^5+4}\right)$

Intanto $a_n > 0$ definitivamente perché argom. di $\sin \to 0^+$

Brutal mode: $a_n \sim n^a \sin\frac{1}{n^4} \sim n^a \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^{4-a}}$

quindi conv. $\Leftrightarrow 4-a>1$
$\Leftrightarrow a<3$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{4-a}}$

Esempio 9 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \sinh\frac{1}{n}\right)$ $\qquad a_n \to 0$

Il segno sembra un problema

Brutal mode: $a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}}$ TROPPO BRUTALE

$$a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}$$

Suggerisce anche che $a_n < 0$ definitiv.

Rigoroso C.A. con $b_n = \frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \sinh\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sinh x}{x^3} \underset{\text{Taylor}}{=} -\frac{1}{3}$$

Quindi $\frac{a_n}{b_n} < 0$ definitiv. $\Rightarrow a_n < 0$ definitiv.

$\Rightarrow$ segni costanti definitiv. $\Rightarrow$ per C.A. la serie converge.

Esempio 10

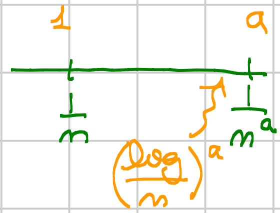
$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^a$$

$a>0$ reale

$a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$

Brutal mode: $a_n = \left(e^{\frac{1}{n}\log n} - 1\right)^a$

$$\sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^a = \frac{\log^a n}{n^a}$$



Quindi $a>1$ converge

$a \leq 1$ diverge

Rigoroso: $a>1 \rightsquigarrow$ C.A. con $\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$

$a \leq 1 \rightsquigarrow$ C.A. con $\frac{1}{n}$ (il log sopra aiuta a divergere)

— o — o —