ANALISI 1 - LEZIONE 069

Note Title 19/12/2016

INTEGRALI OSCILLANTI

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

DIRICHLET FRESNEL

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$$

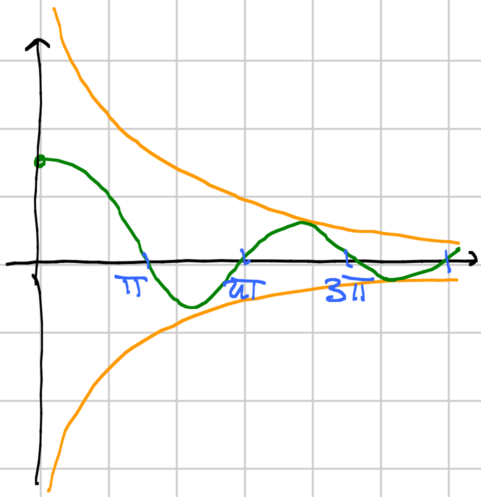
Strategie:

→ criterio di Dirichlet per gli integrali (trucco integ. per parti)

→ metodo dei triangolini (rettangolini)

Esempio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$

int. proprio



$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{G}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\underbrace{-\cos x}_{F}\,\underbrace{\frac{1}{x}}_{G} \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{(-\cos x)}_{F} \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{g} dx \right\}$$

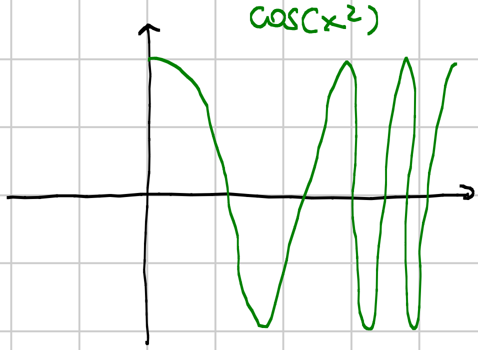
$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ -\underbrace{\frac{\cos A}{A}}_{\to\, 0} + \underbrace{\frac{\cos 1}{1}}_{\text{numero}} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right\} = \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{int. impr. che conv. assol.}}$$

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ conv.}}_{\text{Tabellina}} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ conv.}$$

$\dfrac{|\cos x|}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ + confronto

Assol. integrabilità

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{numero}} + \int_1^{+\infty}\dots$



$$\int_1^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \cos(x^2)\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \underbrace{2x\cos(x^2)}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{2x}}_{G}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left\{\left[\underbrace{\frac{\sin(x^2)}{2x}}_{F\quad G}\right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\sin(x^2)}_{F}\underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2}\right)}_{g}dx\right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left\{\underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_{\to 0} - \frac{\sin 1}{2} + \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{2x^2}\,dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx}_{\text{assolutamente integrabile come prima}}$$

In modo del tutto analogo si tratta

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$$

e anche gli integrali del tipo

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx \quad (a>0) \qquad\qquad \int_0^{+\infty}\cos(x^a)\,dx \qquad \int_0^{+\infty}\sin(x^a)\,dx$$

$(a>1)$

Oss. Non c'è l'analogo della cond. nec. per la conv. degli int. impropri, cioè l'integrale può convergere anche se $f(x)$ non tende a 0 per $x\to+\infty$.

Criterio di Dirichlet per gli int. impropri

Teorema Sia $a \in \mathbb{R}$, siano $f : [a,+\infty)$ e $g : [a,+\infty)$ due funz. Supponiamo che

(i) $g \in C^1$ e debolmente decrescente (quindi $g'(x) \le 0$),

(ii) $g(x) \to 0$ per $x \to +\infty$,

(iii) $f \in C^0$ (basta integrabile) e la sua primitiva è limitata cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |F(x)| \le M \quad \forall x \ge a.$$

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \quad \text{converge}$$

Dim. Integro per parti come negli esempi

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)g(x)\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[F(x)g(x)\right]_a^A - \int_a^A F(x)g'(x)\,dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \Big\{ \underbrace{F(A)g(A)}_{\substack{\downarrow\,(ii)+(iii)\\ 0}} - \underbrace{F(a)g(a)}_{\substack{\downarrow\\ \text{numero}}} - \int_a^A F(x)g'(x)\,dx \Big\}$$

$$= -F(a)g(a) - \underbrace{\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx}_{\text{assol. integr.}}$$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A |F(x)|\cdot|g'(x)|\,dx \le M \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \underbrace{|g'(x)|}_{\substack{\parallel\\ -g'(x) \text{ per la (i)}}}\,dx$$

$$= M \lim_{A\to+\infty} -\int_a^A g'(x)\,dx$$

$$= M \lim_{A\to+\infty} \big(g(a) - \underbrace{g(A)}_{\substack{\downarrow\\ 0}}\big)$$

$$= M\,g(a)$$

— o — o —

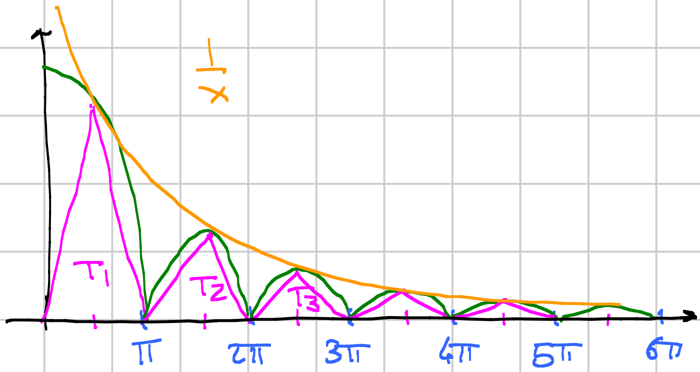
Negli esempi prec. abbiamo usato

$f(x) = \sin x \qquad g(x) = \frac{1}{x}$ Dirichlet

$f(x) = 2x\cos(x^2) \qquad g(x) = \frac{1}{2x}$ Fresnel.

— o — o —

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$



Geometricamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

Il triangolo T_n ha base di lungh. π e altezza $\boxed{\dfrac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2}}}$

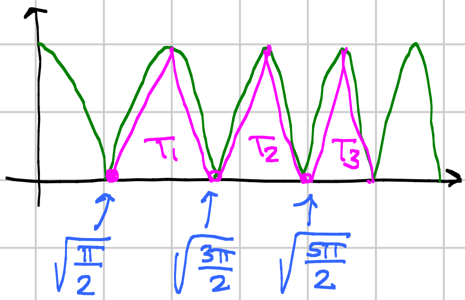
$\frac{1}{x}$ nel p.to di mezzo della base

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2}} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \frac{1}{2}} = +\infty$$

Quindi anche l'integrale diverge.

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx$



Il triangolo T_n ha altezza 1 e come base l'intervallo

$$\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}(2n-1)}, \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)} - \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)$$

Per studiare la serie ci sono almeno 2 modi:

→ razionalizzare $\quad \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} = \dfrac{2}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} \rightsquigarrow$ diverge per C.A. con $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

→ osservare che è telescopica e $S_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{1} \to +\infty$

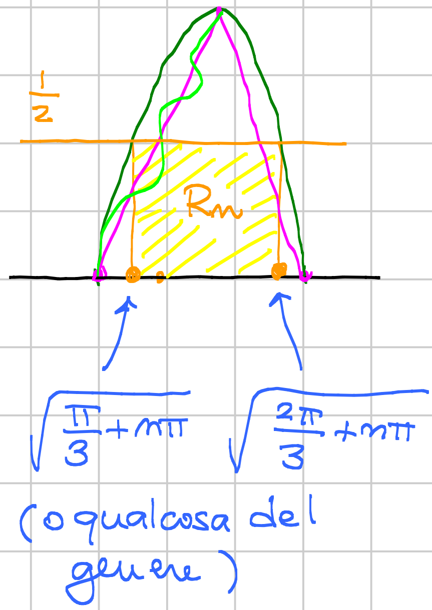
↑ Corretto dopo video

Quindi anche in questo caso

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx = \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx = +\infty$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Il metodo dei triangolini è scorretto



Il triangolo non è isoscele, ma questo non è importantissimo.
Ma... è così chiaro che il triang. sta sotto? Servirebbe uno studio di funzioni?

Più sicuro è il metodo dei rettangolini

La conclusione è la stessa di prima.

— o — o —