Esempio 1 Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

La serie sappiamo che converge per Leibnitz. A cosa converge? Cosa ci ricorda? Sembra

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad \text{con } x = 1$$

Ma questa è la serie di Taylor di $\log(1+x)$, che quindi è la somma della serie nella zona di convergenza.
Qual è la zona di convergenza? Calcolo R. In questo caso

$$c_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \rightsquigarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 = L \rightsquigarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie converge di sicuro per $x \in (-1, 1)$.
Vediamo gli estremi
→ per $x = 1$ converge per Leibnitz
→ per $x = -1$ diventa $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$ che diverge a $-\infty$.
Quindi la zona di convergenza è $(-1, 1]$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x) \qquad \boxed{\forall x \in (-1, 1]}$$

zona di convergenza

In particolare $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$

Oss. Se metto $x = 2$ la serie non converge, e in particolare la sua somma non fa $\log 3$

Oss. In questo caso il raggio di convergenza non poteva essere più di 1 perché $\log(1+x)$ ha problemi per $x < -1$.

Esempio 2 Calcolare $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$

Questa ci ricorda $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots = \arctan x$

e quindi $\boxed{\text{se tutto va bene}}$ la somma richiesta è $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

se $x=1$ è all'interno della zona di conv. della serie di potenze

Scriviamo per bene la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

Per quali x converge? In questo caso

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pm\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

quindi $\sqrt[n]{|c_n|}$ non ha limite perché sui pari tende a 0, e sui dispari tende a 1.

Quindi il teorema 2 nell'immediato non si applica.

Osservo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \underset{x^2=y}{=} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^n$$

L'ultima si vede che converge per $y \in (-1,1)$ più eventualmente agli estremi, quindi quella iniziale converge per $x \in (-1,1)$ più eventualmente agli estremi.

→ per $x=1$ e per $x=-1$ converge per Leibnitz.

Conclusione

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \qquad \boxed{\forall x \in [-1,1]}$$

zona di convergenza

Delirio Nell'esempio 2 la funzione $\arctan x$ non ha mai problemi di definizione, quindi perché la sua serie di Taylor si rifiuta di convergere per $|x| > 1$.

Chi è la derivata di $\arctan x$? $\frac{1}{1+x^2}$

Ora $\frac{1}{1+x^2}$ ha problemi in $x = \pm i$, e i dista 1 dall'origine.

Moralmente: $\arctan x$ ha problemi in $\pm i$, perché ce li ha la sua derivata, quindi il raggio di convergenza non può essere più di 1.

Oss. Abbiamo detto che $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

Derivando trovo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

già lo sapevamo per la geometrica

e questo è un esempio del Teorema 3.

Esempio 3 Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

Intanto $c_n = n$, quindi $\sqrt[n]{|c_n|} \to 1 = L$, quindi $R = \frac{1}{L} = 1$

Negli estremi $x = \pm 1$ non converge, perché manca cond. nec.

Quindi la serie data converge $\iff x \in (-1, 1)$

La serie è

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = x\,(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)$$
$$= x\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)' = (\star)$$

Ora

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = x\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = x \cdot \frac{1}{1-x}$$

geometrica

Quindi $(\star) = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x\,\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ Quanto fa la somma

Oppure calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$

Pongo $y = \frac{x}{3}$ e diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \dots$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots$$

Quindi quella originaria è $-\log(1-y)$, quindi tornando in x diventa

$$-\log\left(1-\frac{x}{3}\right) = -\log\frac{3-x}{3} = \log\frac{3}{3-x}$$

Tutto questo vale all'interno della zona di convergenza.
Al solito $c_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$, quindi

$\sqrt[n]{|c_n|} \to \frac{1}{3} = L$ e quindi $R = 3$. Guardo gli estremi:

→ per $x = 3$ diventa $\sum \frac{1}{n}$ e diverge

→ per $x = -3$ diventa $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ e converge per Leibnitz.

Conclusione: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n} = \log\left(\frac{3}{3-x}\right) \quad \forall x \in [-3, 3)$

In particolare per $x = 1$ converge a $\log \frac{3}{2}$.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$ ⇝ $R = +\infty$

$$x + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^9}{4!} + \frac{x^{13}}{6!} = x\left(1 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{12}}{6!} + \dots\right)$$

$$= x \cdot \cosh(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

— o — o —