ANALISI 1 — LEZIONE 108

Note Title 11/04/2017

SUCCESSIONI DI CAUCHY E COMPLETEZZA

<u>Def.</u> Sia x_n una succ. di numeri reali. Si dice che x_n è una succ. di Cauchy se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall m \geq n_0 \qquad |x_n - x_m| \leq \varepsilon}$$

Brutalmente: gli x_n stanno definitivamente vicini - vicini

Prop. 1 Sia x_n una succ. di Cauchy. Allora x_n è limitata

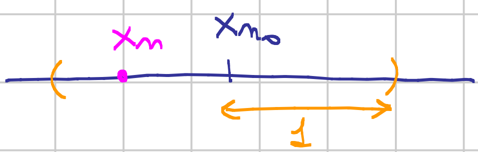
Brutalmente: da un certo p.to in poi gli x_n stanno tutti vicini tra di loro, quelli prima sono un numero finito.

Dim. Uso la definizione con $\varepsilon = 1$ (o anche con $\varepsilon = 2017 \ldots$)
Trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_n - x_m| \leq 1 \qquad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

La applico con $m = n_0$ e ho ottenuto che

$$|x_n - x_{n_0}| \leq 1 \qquad \forall n \geq n_0$$



cioè

$$x_{n_0} - 1 \leq x_n \leq x_{n_0} + 1 \qquad \forall n \geq n_0$$

In definitiva
$$x_n \leq \max\{x_{n_0}+1, x_0, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$$
$$x_n \geq \min\{x_{n_0}-1, x_0, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$$

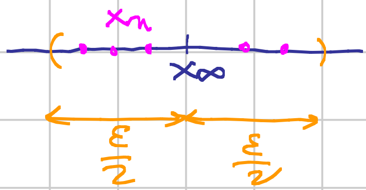
Questo mostra che x_n è limitata. $\square$

Prop. 2 Sia x_n una succ. che ha limite reale, cioè $x_n \to x_\infty \in \mathbb{R}$.
Allora x_n è una succ. di Cauchy.

Brutale: definitivamente gli x_n stanno vicini ad x_∞, quindi stanno vicini tra di loro.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $\varepsilon > 0$ e applico la def. di limite con $\frac{\varepsilon}{2}$.
Ottengo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|x_n - x_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \ge n_0$$



Ma allora per ogni $n \ge n_0$ e ogni $m \ge n_0$ vale

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\le |x_n - x_\infty| + |x_\infty - x_m| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

che è quello che volevo. $\square$

Prop. 3 Sia x_n una succ. di Cauchy.
Supponiamo che esista una s.succ. conv. $x_{n_k} \to x_\infty$
Allora

$$x_n \to x_\infty$$ (tutta la succ. ha stesso limite)

Brutale: se alcune pecore stanno dalle parti di x_∞, allora ci stanno tutte.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fissiamo $\varepsilon > 0$. Voglio dimostrare che $|x_n - x_\infty| \le \varepsilon$ definitivamente in n.
Per la convergenza della s.succ. sappiamo che

$$|x_{n_k} - x_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{definitivamente in } k$$

quindi per ∞ indici.

Essendo la succ. di Cauchy, sappiamo pure che

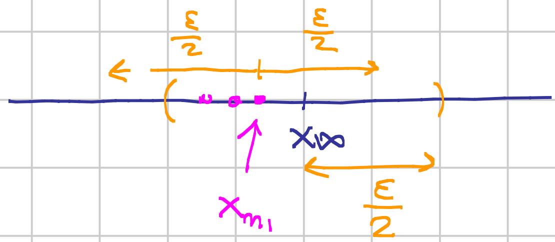
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\quad |x_n - x_m| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \ge n_0 \quad \forall m \ge n_0$

Sappiamo che $|x_m - x_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2}$ per ∞ indici (gli n_k con k grande) quindi questo succede per almeno un indice $n_1 \ge n_0$.

A questo punto $\forall n \ge n_0$ vale (uso $m := n_1$)

$$|x_n - x_{n_1}| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e quindi}$$

$$|x_n - x_\infty| \le |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$



Teorema (Altra freccia della Prop. 2)

Sia x_n una succ. di Cauchy.

Allora x_n ha limite reale, cioè esiste $x_\infty \in \mathbb{R}$ t.c. $x_n \to x_\infty$.

Dim 1 (via B-W e quindi compattezza)

1. Per la Prop 1 la succ. è limitata

2. Essendo limitata, per B.W. ammette una s.succ. conv. cioè $x_{n_k} \to x_\infty$

3. Per la Prop 3, tutta la succ. tende a x_∞.

$\boxed{\text{Dim } 2}$ Via liminf e limsup

① Per la prop. 1 la succ. è limitata, quindi

$$\ell := \liminf x_n \in \mathbb{R} \qquad\qquad L := \limsup x_n \in \mathbb{R}$$

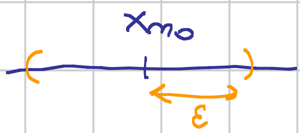
② Voglio dimostrare che $\ell = L$. Dimostro che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$L - \ell \leq 2\varepsilon \qquad \text{(e questo basta).}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e per definizione trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

La uso con $m := n_0$ e deduco che



$$x_{n_0} - \varepsilon \leq x_n \leq x_{n_0} + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq \ell \leq L \leq x_{n_0} + \varepsilon$$

da cui $L - \ell \leq 2\varepsilon$. $\square$

— o — o —

<u>Assoluta convergenza delle serie</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ conv.} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$

$\boxed{\text{Dim } 1}$ (via ordinamento) (vedi Book 1)

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \qquad + \text{ lemma carab. per serie.}$$

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (via completezza) Pongo

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad \hat{S}_n := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

Prendiamo $m > n$. Vale

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m$$

da cui

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_m|$$
$$\leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| = \hat{S}_m - \hat{S}_n = |\hat{S}_m - \hat{S}_n|$$

Catena logica:

se $\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow$ $\hat{S}_n$ ha limite reale $\Rightarrow$

$\hat{S}_n$ è una succ. di Cauchy $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ S_n è una succ. di Cauchy

$\Rightarrow$ S_n ha limite reale $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$*$ $\hat{S}_n$ di Cauchy vuol dire $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall m \geq n_0$ vale $|\hat{S}_m - \hat{S}_n| \leq \varepsilon$,

ma allora a maggior ragione vale con $|S_m - S_n| \leq \varepsilon$

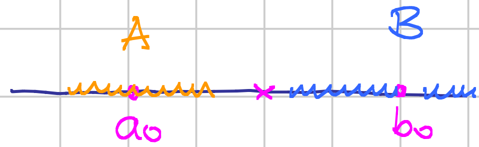
— o — o —

Abbiamo visto che dall'assioma di continuità segue la completezza dei numeri reali (conv. succ. di Cauchy).

Vale anche il viceversa, cioè se valgono gli assiomi algebrici, quelli di ordinamento, la conv. delle succ. di Cauchy e la proprietà archimedea, allora vale l'assioma di continuità.

Due parole della dim. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi con A a sx di B ($a \le b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$)

Voglio trovare un separatore.
Costruisco 2 succ. a_n e b_n in questo modo



- Scelgo $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ a caso

- Considero il p.to medio. Ci sono solo due casi:
  se non è un separatore
  → o lascia A a sx
  → o lascia B a dx

  almeno una delle 2 la fa

Nel primo caso pongo $a_1 =$ p.to medio $b_1 = b_0$
" secondo " " $a_1 = a_0$ $b_1 =$ p.to medio

- Procedo allo stesso modo: ad ogni passaggio divido in 2 e ottengo succ. a_k e b_k tali che

  A sta sempre a sx di b_k
  B sta sempre a dx di a_k.

Si verifica che a_k e b_k sono succ. di Cauchy, quindi tendono ad un certo c (che è lo stesso perché

$$b_k - a_k \le \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Si verifica che c è il separatore richiesto.

<u>Domande</u> ① Dove ho usato la proprietà archimedea
② (Molto hard) Dimostrare che esistono strutture in cui valgono assiomi alg. + ord. + conv. succ. di Cauchy, ma non l'archimedea.