$\boxed{\text{ASINTOTI}}$ → Verticali

→ Orizzontali

→ Obliqui

Def. → La retta $x = x_0$ è asintoto $\boxed{\text{verticale}}$ per $f(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

→ La retta $y = y_0$ è asintoto $\boxed{\text{orizzontale}}$ per $f(x)$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

(asintoto orizz. per $x \to +\infty$) (asintoto orizz. per $x \to -\infty$)

→ La retta $y = mx + n$ è asintoto $\boxed{\text{obliquo}}$ per $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Analogamente, la stessa retta è asintoto obliquo per $x \to -\infty$ se

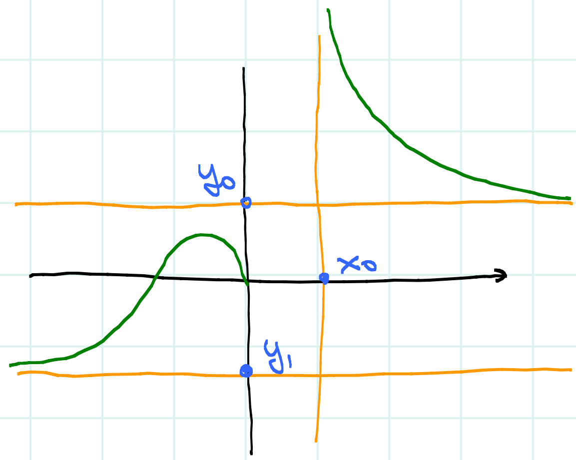
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0.$$

$\boxed{\text{Graficamente}}$ Nel disegno

$x = x_0$ è asintoto verticale

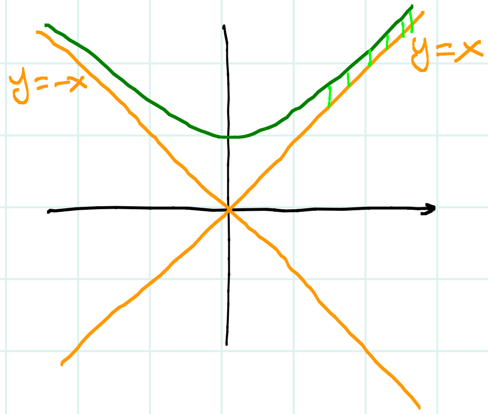
$y = y_0$ è asintoto orizz. per $x \to +\infty$

$y = y_1$ è asintoto orizz. per $x \to -\infty$



Nel nuovo disegno

- $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$
  (la differenza tra $f(x)$ e la retta tende a 0 per $x \to +\infty$)
- $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$



Oss. Gli asintoti orizz. sono il caso speciale $m = 0$ di quelli obliqui.

$\boxed{\text{Come trovo gli asintoti ?}}$

- Quelli verticali si vedono facendo i limiti agli estremi della zona di definizione
- Quelli orizzontali facendo i limiti per $x \to \pm\infty$
- Quelli obliqui sono più delicati.

Proposizione (come trovare gli asintoti obliqui)
La retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se e solo se esistono i seguenti due limiti (e sono reali):

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx}$$

risultato limite prec.

Discorso del tutto analogo per $x \to -\infty$.

Oss. Se esiste $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$, allora questo coincide con m, almeno nei casi in cui $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to +\infty$

Dim Stiamo calcolando $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ usando De L'Hôpital.

Dim. Prop. Bisogna dimostrare due cose

<u>Primo</u>: se $y = mx+n$ è asintoto obliquo, cioè $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx-n)=0$, allora m ed n sono dati dalle formule scritte nell'enunciato. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{f(x)-mx-n}{x}}}_{\downarrow\ \frac{0}{+\infty}=0} + \underbrace{\boxed{\frac{mx+n}{x}}}_{\downarrow\ m} \Bigg) = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{f(x)-mx-n}_{\downarrow\ 0}+n) = n$$

<u>Secondo</u>: se esistono m ed n dati dalle formule dell'enunciato, allora la retta $y=mx+n$ è asintoto obliquo.
Infatti

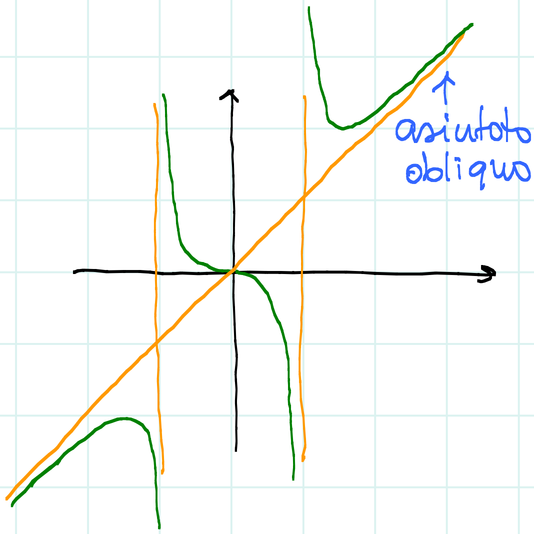
$$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{f(x)-mx}_{n}-n) = n-n=0$$

☺

— o — o —

Back to esempio lez. precedente

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$



Le rette $x=\pm 1$ sono due asintoti verticali.
Non ci sono asintoti orizz.
Obliqui? Vediamo!
Uso le formule della prop.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} = 0$$

$\rightsquigarrow$ La retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

Analogamente: la stessa retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

Sappiamo anche che $f(x)$ sta sopra l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$
Perché?

Dal conto precedente $\quad f(x) - x = \dfrac{x}{x^2-1} > 0 \quad$ per $x > 1$

<u>Esempio 2</u> $\quad f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 25}$

Questa è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

Basta dimostrare che $x^2 + 3x + 25 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
Vero perché $\Delta = 9 - 4 \cdot 25 < 0$.

Non ci sono asintoti verticali
Non ci sono asintoti orizz. perché $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Obliqui? Vediamo ...

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+25}}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+25} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{\dots} + x}{\sqrt{\dots} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x + 25 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x+25} + x} = \frac{3}{2} = n \quad \smile$$

Stesso limite con sviluppini:

$$\sqrt{x^2+3x+25} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{25}{x^2}} - 1\right) \qquad \sqrt{1+t} \sim 1+\frac{1}{2}t$$

$$= x\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + o(1) \to \frac{3}{2}$$

$\rightsquigarrow$ La retta $y = x + \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

Per $x \to -\infty$ il discorso è analogo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+25}}{x} = -1 \qquad \text{(Fare il cambio } y = -x\text{)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+25} + x\right) \cdot \frac{\sqrt{\dots} - x}{\sqrt{\dots} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}+3x+25-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x+25} - x} \to -\frac{3}{2} \qquad \text{(Fare il cambio)}$$

$\rightsquigarrow$ La retta $y = -x - \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$