$\boxed{\text{ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT}}$ (GS)

Procedimento di ortogonalizzazione

Prende in input una base qualunque $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ e restituisce una base ortogonale $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(\hat{v}_1)$$
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k)$$

Descrizione algoritmo

$$\hat{v}_1 = v_1$$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1$$

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2$$

e così via

$$\boxed{\hat{v}_k = v_k - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_k, \hat{v}_i \rangle}{\langle \hat{v}_i, \hat{v}_i \rangle} \hat{v}_i}$$

Esempio 1 Ortogonalizzare la base di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1) \qquad v_2 = (2,3,4) \qquad v_3 = (2,-1,1)$$

Sarà una base?
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 3-2-6+4 = -1 \neq 0$$ ☺

Applichiamo GS $\boxed{\hat{v}_1 = (1,0,1)}$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 = (2,3,4) - \frac{6}{2}(1,0,1)$$

$$= (2,3,4) - (3,0,3) = \boxed{(-1,3,1)}$$

Verifico che $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = 0$

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2$$

$$= (2,-1,1) - \frac{\langle (2,-1,1), (1,0,1) \rangle}{2}(1,0,1) - \frac{\langle (2,-1,1), (-1,3,1) \rangle}{11}(-1,3,1)$$

$$= (2,-1,1) - \frac{3}{2}(1,0,1) + \frac{4}{11}(-1,3,1)$$

$$= \left(\frac{3}{22}, \frac{1}{11}, -\frac{3}{22}\right)$$

Se non vogliamo frazioni possiamo prendere $\hat{v}_3 = (3,2,-3)$

Verifica: $\langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle = \langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle = 0$ ☺

Una possibile base ortogonale è $(1,0,1), (-1,3,1), (3,2,-3)$

Oss. Potevo produrre $\hat{v}_3$ anche usando la formula misteriosa a partire da v_1, v_2 oppure $\hat{v}_1, \hat{v}_2$.

Esercizio Sia
$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-3w=0\}$$
Trovare una base ortonormale di W

Intanto dim (W) = 3 e una possibile base è
$$W = \text{Span}(\underset{v_1}{(-2,1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,0,1,0)}, \underset{v_3}{(+3,0,0,1)})$$

$x + \underset{\uparrow}{2y} + \underset{\uparrow}{0 \cdot z} - \underset{\uparrow}{3w} = 0$ $\qquad w=t,\ z=s,\ y=u$

parametri liberi $\qquad x = 3t \quad -2u$

$$(x,y,z,w) = (3t \quad -2u, u, s, t)$$
$$= t(3,0,0,1) + s(0,0,1,0) + u(-2,1,0,0)$$

Ora applico GS a partire dalla base v_1, v_2, v_3
$$\hat{v}_1 = v_1$$
$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 = v_2$$

Potrei produrre $\hat{v}_3$ cercando banalmente un vettore (a,b,c,d) che sia $\perp$ a v_1 e v_2 e appartenga al s.sp. W.
In alternativa usiamo GS

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2$$

$$= (3,0,0,1) - \frac{-6}{5}(-2,1,0,0) - \frac{0}{\dots} v_3$$

$$= (3,0,0,1) + \frac{6}{5}(-2,1,0,0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1\right)$$

Non volendo le frazioni: $\hat{v}_3 = (3,6,0,5)$

Verifica che $\hat{v}_3 \in W$ e che $\langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle = \langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle = 0$:)

Variante: trovare $\hat{v}_4$ tale che $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4\}$ sia base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Bovino: lo cerco del tipo (a,b,c,d) e impongo che il prod. scalare con i 3 precedenti faccia 0.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Usiamo la formula ex-misteriosa in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, 2, 0, -3)$$

Cambio segno

Verifica ok 🙂

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Completo $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo un vettore a caso, ad esempio $(1,0,0,0)$ e controllo che sia davvero una base con il Det 4×4.
(Non può andare male con TUTTI i vettori della base canonica)

A questo punto applico GS a partire dalla nuova base.
I primi 3 già andavano bene, e non resta che fare il quarto

$$\hat{v}_4 = (1,0,0,0) - \frac{-2}{5}(-2,1,0,0) - 0 \cdot \ldots - \frac{3}{70}(3,6,0,5)$$

$$= (1,0,0,0) + \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right) + \left(-\frac{9}{70}, -\frac{18}{70}, 0, -\frac{15}{70}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{14}, \frac{1}{7}, 0, -\frac{3}{14}\right)$$

[Conto finale corretto dopo video]

e senza frazioni $(1, 2, 0, -3)$ 🙂

—o—o—