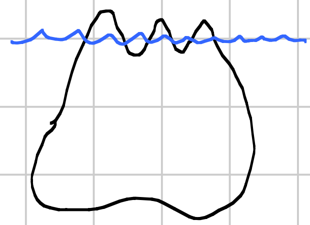
ANALISI 1 - LEZIONE 074

Note Title 28/02/2017

EQUAZIONI DIFF. (Nomenclatura)



Come si presenta ?

Incognita : una funzione che si può chiamare

$y(x) \qquad f(x) \qquad y(t) \qquad u(x) \qquad \boxed{u(t)}$

Tra le incognite c'è anche l'insieme di definizione

$$u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Equazione : relazione che lega $u(t)$ e un po' di sue derivate.

Esempi

$$u'(t) = u(t) + t^2$$
$$u''(t) - 7[u'(t)]^2 = \sin u(t)$$
$$u''(t) = 5u(t) + \sin t$$

$$\boxed{\begin{aligned} u' &= u + t^2 \\ u'' - 7(u')^2 &= \sin u \\ u'' &= 5u + \sin t \end{aligned}}$$

non si scrivono le t che sono argomento della u

$\dot u = u + t^2$ ⇝ ordine 1

$\left.\begin{aligned} \ddot u - 7\dot u^2 &= \sin u \\ \ddot u &= 5u + \sin t \end{aligned}\right\}$ ⇝ ordine 2

Risolvere un'eq. diff. vuol dire trovare $[a,b]$ e $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ che rende l'uguagl. vera per ogni $t \in [a,b]$.

Def. Si dice ordine di un'eq. diff. il + grande ordine di derivazione che vi compare

Def. Un'eq. diff. si dice in forma normale se la derivata di ordine max è "ricavata" rispetto al resto

Esempi
$\ddot{u} = 3\dot{u} + u^2$ SI

$\ddot{u} + 3\dot{u} = 7(u+t)^2 \rightsquigarrow \ddot{u} = -3\dot{u} + 7(u+t)^2$

$\dot{u}^3 = 7u$ NI $\rightsquigarrow$ $\dot{u} = \sqrt[3]{7u}$

$\dot{u}^4 = 7u$ NO $\rightsquigarrow$ non posso ricavare $\dot{u}$ in modo univoco

Più formalmente:

→ un' eq. diff. generale di ordine k si presenta come

$$\boxed{\Phi(u^{(k)}, \dots, \dot{u}, u, t) = 0}$$

→ in forma normale diventa

$$\boxed{u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, \dot{u}, u, t)}$$

Def. Un'eq. diff. si dice autonoma se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate

Esempi
$u'(t) = 3u(t)^2$ SI $\dot{u} = 3u^2$

$u'(t) = 3u(t) + t^2$ NO $\dot{u} = 3u + t^2$

$u'(t) = t\,u(t)$ NO $\dot{u} = tu$

Nelle notazioni di sopra

$$\Phi(u^{(k)}, \dots, \dot{u}, u) = 0$$

$$u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, \dot{u}, u)$$

Equazioni a variabili separabili (1ª isda)

Un'eq. diff. si dice a var. sep. se è di $\boxed{\text{ordine } 1}$ e si presenta nella forma

$$\boxed{\dot{u} = f(t)\,g(u)}$$

è in forma normale e il RHS è prodotto di una funzione della sola t per una della sola u

Esempi

$$\dot{u} = (u+3)(\sin t + 1)$$

$$\dot{u} + tu = t \rightsquigarrow \dot{u} = -tu + t = \underbrace{t}_{f(t)}\underbrace{(-u+1)}_{g(u)}$$

$$\dot{u} = u^2 \qquad \dot{u} = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot \underbrace{u^2}_{g(u)}$$

Oss. Un'eq. diff. del 1º ordine in forma normale autonoma è a variabili separabili

$$\dot{u} = F(t,u)$$

1º ordine forma norm.

$$\dot{u} = \underbrace{F(u)}_{g(u)}\ \underbrace{1}_{f(t)}$$

autonoma $\rightsquigarrow$ non c'è la t

Equazioni diff. lineari Un'eq. diff. di ordine k lineare si presenta nella forma

$$\boxed{a_k(t)\,u^{(k)}(t) + \dots + a_1(t)\,\dot{u}(t) + a_0(t)\,u(t) = f(t)}$$

$$a_k(t)\,u^{(k)} + a_{k-1}(t)\,u^{(k-1)} + \dots + a_1(t)\,\dot{u} + a_0(t)\,u = f(t)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} \underbrace{\boxed{a_i(t)}}_{\text{coeffic.}}\, u^{(i)} = f(t)}$$

Il LHS è comb. lineare di $u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}$ con coeff. che sono funzioni di t.

Brutalmente: u e le sue derivate compaiono di 1° grado e non all'interno di funzioni strane. La dipendenza da t può essere qualunque.

Esempi
$\dot{u} = t^7 u$ SI
$\dot{u} = t u^7$ NO
$\dot{u} = \cos(tu)$ NO
$\ddot{u} = \dot{u} u$ NO

Oss. Un'eq. lineare si può portare in forma normale se posso dividere per $a_k(t)$, cioè se $a_k(t) \neq 0$.

Def. Un'eq. diff. lineare si dice
→ omogenea se $f(t) \equiv 0$ (per ogni t)
→ non omogenea se $f(t) \neq 0$ almeno per un valore di t.

2ª Isola: eq. diff. lineari di ordine 1 a coeff. qualunque

$$\boxed{\dot{u} + a(t) u = b(t)}$$

Oss. Se fosse omogenea avrei $b(t) \equiv 0$ e quindi sarebbe pure a variabili separabili.

3ª Isola: ed. diff. lineari di ordine qualunque a coeff. costanti

(cioè gli $a_i(t)$ non dipendono da t)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \boxed{a_i} u^{(i)} = f(t)}$$

i coeff. sono numeri

Domande:

① lineare a coeff. costanti e omogenea $\Rightarrow$ autonoma SI

② lineare e autonoma $\Rightarrow$ a coeff. costanti SI

③ lineare e autonoma $\Rightarrow$ omogenea NO! NO! NO!

$$\ddot{u} + 3\dot{u} = 2017$$

<u>Oss.</u> Il LHS di un' eq. lineare lo possiamo pensare come un' applicazione lineare che prende in input funzioni u di classe C^k e restituisce in output delle funzioni continue (assumendo che i coeff. siano almeno continui)

$$Lu := \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)} \qquad L : C^k([a,b]) \to C^0([a,b])$$

$$Lu = f(t)$$

<u>Proposizione</u> Se $u(t)$ è soluzione di un' eq. autonoma, allora tutte le traslate temporali $u(t+c)$ sono soluzioni della stessa equazione diff.

<u>Esempio</u> $\dot{u} = f(u)$ $\qquad \dot{u}(t) = f(u(t))$

Se pongo $v(t) = u(t+c)$ ottengo

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t+c) = f(u(t+c)) = f(v(t)) \rightsquigarrow \dot{v} = f(v)$$