ANALISI 1 — LEZIONE 035

Note Title 03/11/2016

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano a_n e b_n due succ. con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitiv.

Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \ell \in (0, +\infty) \qquad (\neq 0, \neq +\infty)$$

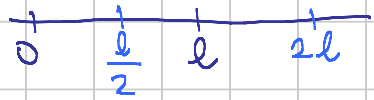
(CASO STANDARD)

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ converge (magari ad un altro valore)

Dim. Se $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, allora definitiv.



$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$$

Posso molt. per b_n: $\qquad \frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2\ell\, b_n$

Conclusione:

- se $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{\ell}{2} b_n = +\infty \underset{\text{disug. sx}}{\Rightarrow} \sum a_n = +\infty$
- se $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum 2\ell\, b_n$ conv. $\underset{\text{disug dx}}{\Rightarrow} \sum a_n$ conv.

— o — o —

Utilizzo operativo: → devo studiare $\sum a_n$

→ cerco tra le serie che conosco una b_n, maggari più semplice, tale che $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0, \neq +\infty$

→ a quel punto ho finito ☺

$\boxed{\text{CASI LIMITE}}$ Stesse ipotesi su $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$.

(1) Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

$\left[\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ definitiv.} \to a_n \leq b_n \text{ defin.} \right]$

Allora $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow$ BOH

(2) Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$

$\left[\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \text{ defin.} \Rightarrow a_n \geq b_n \text{ defin.} \right]$

Allora $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow$ BOH

— o — o —

Serie note: → geometriche

→ telescopiche (poche)

→ armoniche generalizzate

$\boxed{\text{ARMONICHE GENERALIZZATE}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{ diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{ converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

TABELLINA

← la somma non è nota se non in casi MOLTO SPECIALI

Parente stretto

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{ diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{ converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Studio armoniche gen: ① Disuguaglianze ad hoc
② Condensazione di Cauchy
③ Confronto serie - integrali

$\boxed{\text{Caso } a=1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} = +\infty$ per confronto asintotico con $\displaystyle\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{b_n}}_{}$

diverge
telescopica

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \text{solito} = 1 \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ stesso comportamento.

$\boxed{\text{Caso } a<1}$ $\displaystyle\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n^a} = +\infty$$ confronto normale

$\boxed{\text{Caso } a>1}$ Considero le somme parziali $S_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a}$

Devo dim. che sono limitate superiormente. Dico che

$$\boxed{S_n \leq 1 + \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{n^{a-1}}\right)} \underset{\text{uso che } a>1}{\leq} 1 + \frac{1}{a-1}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Induzione ... passo base è banale ...
... passo induttivo

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^a} \underset{\text{Hp ind.}}{\leq} 1 + \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{n^{a-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^a}$$

$$\underset{\text{spero ...}}{\leq} 1 + \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{a-1}}\right)$$

Controllo l'ultima disug.

$$\frac{1}{a-1}\left(\cancel{1} - \frac{1}{n^{a-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^a} \overset{?}{\le} \frac{1}{a-1}\left(\cancel{1} - \frac{1}{(n+1)^{a-1}}\right) \iff$$

$$-\frac{1}{n^{a-1}} + \frac{a-1}{(n+1)^a} \overset{?}{\le} -\frac{1}{(n+1)^{a-1}} \iff \text{Molt. per } (n+1)^{a-1}$$

$$-\frac{(n+1)^{a-1}}{n^{a-1}} + \frac{a-1}{n+1} \overset{?}{\le} -1 \iff 1 + \frac{a-1}{n+1} \overset{?}{\le} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1}$$

L'ultima è vera perché segue da Bernoulli

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1} \geq 1 + \frac{a-1}{n} \geq 1 + \frac{a-1}{n+1}$$

— o — o —

$\boxed{\text{CONDENSAZIONE DI CAUCHY}}$ Sia a_n una succ.

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (debolm. decresc.)

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{si comporta come} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

↑ indice

Applicazione $a_n = \frac{1}{n^a}$. Le ipotesi (i) e (ii) sono verificate (perché $a > 0$, ma altrimenti è banale)

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^a}\right)^n$

L'ultima serie è una geometrica con ragione $\frac{2}{2^a}$. Quindi

- per $\frac{2}{2^a} \geq 1$ diverge (quindi $a \leq 1$)
- per $\frac{2}{2^a} < 1$ converge (quindi $a > 1$)

Esercizio Provare con la potenza dell'armonica.

Dim. condensazione

Brutta copia:

a_1	a_1	$a_2 \ a_2$	$a_4 \ a_4 \ a_4 \ a_4$	$a_8 \ \dots \ a_8$	← più grandi
a_1	a_2	$a_3 \ a_4$	$a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8$	$a_9 \ \dots \ a_{16}$	
a_1	a_2	$a_4 \ a_4$	$a_8 \ a_8 \ a_8 \ a_8$	$a_{16} \ \dots \ a_{16}$	← più piccole

Sembra ragionevole che

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^k} &\leq \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \\ \| \\ a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \end{aligned}}$$

Formalmente dimostro le disug. per induzione (farlo!).

Conclusione

- se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge, allora guardo la disug. di dx e ottengo che S_{2^k} (somme parziali della serie iniziale) sono limitate superiormente se l'indice è una potenza di 2, ma allora essendo crescenti sono limitate sempre $\Rightarrow \sum a_n$ conv.
- se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = +\infty$, allora guardo la disug. di sx e concludo come sopra

—o —o —

<u>Oss</u>. Posso fare la condensazione con le potenze di 7.

<u>Oss</u>. Nel caso $a=2$ abbiamo $\quad 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$

$$\leq 1 + \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}}_{1 - \frac{1}{n} \ \text{(telescopica)}}$$