ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 35

Note Title 10/11/2023

FORME CANONICHE

Domanda: data $f: V \to W$ lineare, voglio scegliere basi di V e W in modo tale che la matrice associata ad f sia "bella"

Risposta: posso sempre fare in modo che la matrice sia fatta così

$$\begin{array}{c|cc} & r & k \\ \hline r & I_r & 0 \\ & 0 & 0 \end{array}$$

con r = rango = dim (Im)

k = dim (Ker)

Esempio $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z,w) = (x+y+z,\ z+w,\ x+y-w)$$

→ Scriviamo la matrice di f dalla canonica alla canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

→ Qual è il rango? [Non basta un 3×3 con Det = 0 per avere rango ≤ 2]

Osservo che $R_1 - R_2 = R_3$ ⇝ rango ≤ 2 ⇝ rango = 2

→ Trovare il ker

Risolvo il sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$w = t,\ z = -t,\ y = s,\ x = t - s$

$$(x,y,z,w) = t(1,0,-1,1) + s(-1,1,0,0)$$

⇝ $\ker = \text{Span}((1,0,-1,1), (-1,1,0,0))$

→ Forma canonica: scegliendo bene le basi, la matrice diventa

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} w_1 \rightarrow \\ w_2 \rightarrow \\ w_3 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array} \end{array}$$

Come scelgo le basi?

$\boxed{1^\circ \text{ passo}}$ Scelgo come v_3 e v_4 una base del ker

$v_3 = (1,0,-1,1) \qquad v_4 = (-1,1,0,0)$

$\boxed{2^\circ \text{ passo}}$ Scelgo v_1 e v_2 qualunque in modo che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ siano una base di $\mathbb{R}^4$

Proviamo con $v_1 = (1,0,0,0)$ e $v_2 = (0,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det $= 1 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0$:)

$\boxed{3^\circ \text{ passo}}$ Scelgo $w_1 = f(v_1) = (1,0,1)$

$w_2 = f(v_2) = (0,1,-1)$

Questo è obbligato da come è fatta la matrice

$\boxed{4^\circ \text{ passo}}$ Come w_3 scelgo un vettore qualunque che completi w_1, w_2 ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Proviamo con $(0,1,0) = w_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det $\neq 0$ quindi Ok :)

La verifica da fare sarebbe che

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{(N_A)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Forma canonica}} = C$$

Dalla canonica alla $\{w_1, w_2, w_3\}$

f dalla canonica alla canonica

Dalla $\{v_1, v_2 \dots\}$ alla canonica

f dalla $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ alla $\{w_1, w_2, w_3\}$

Domanda: scegliendo diversamente le basi, la matrice può diventare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad ?$$

Risposta: la matrice può diventare ogni matrice di rango 2 !!

[NB: la matrice scritta ha Rango = 2 perché $R_1 + R_3 = 2R_2$]

Proviamo con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 2$$

Per la teoria delle forme canoniche noi sappiamo che

$$N_A^{-1} A M_A = C$$

Analogamente sappiamo che

$$N_B^{-1} B M_B = C$$

Ma allora

$$B = N_B C M_B^{-1} = N_B (N_A)^{-1} A M_A M_B^{-1} = \underbrace{(N_A N_B^{-1})^{-1}}_{\text{cambio in } \mathbb{R}^3} A \underbrace{(M_A M_B^{-1})}_{\text{cambio di variabili in } \mathbb{R}^4}$$

Lavoriamo su B.

$\boxed{1^{o}\ \text{passo}}$ v_3, v_4 = base di ker $= \{\underbrace{(1,0,-1,0)}_{v_3}, \underbrace{(0,1,0,-1)}_{v_4}\}$

$\boxed{2^{o}\ \text{passo}}$ Completo con $v_1 = (1,0,0,0)$ $v_2 = (0,1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 1 \neq 0 \quad \ddot\smile$$

$\boxed{3^{o}\ \text{passo}}$ $w_1 = f(v_1) = (1,0,1)$

$w_2 = f(v_2) = (0,1,0)$

$\boxed{4^{o}\ \text{passo}}$ Scelgo $w_3 = (1,0,0)$

La verifica sarebbe che

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{N_B^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{M_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

Verificare che se uso $M = M_A \cdot M_B^{-1}$

$N = N_A \cdot N_B^{-1}$,

allora

$$\boxed{N^{-1} A M = B}$$

A quel p.to le colonne di M ed N sono basi di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$ in cui l'applicazione f ha come matrice associata B.

Concludere con verifica bonina

— o — o —