ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 28

Note Title 31/10/2023

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3 \to 3x^2$ $x^2 \to 2x$ $x \to 1$ $1 \to 0$	$v_1 = x^3$ $v_2 = x^2$ $v_3 = x$ $v_4 = x^3 + 1$				

Esercizio Dimostrare che esiste unica $f: \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lineare che verifica le condizioni della prima casella

Risposta: basta oss. che $1, x, x^2, x^3$ sono una base e posso mandarli dove voglio.

Determinare ker e Im.

$$\text{Im} = \text{Span}(3x^2, 2x, 1, 0) = \overbrace{\text{Span}(3x^2, 2x, 1)}^{\text{Polinomi di grado} \leq 2} = \text{Span}(1, x, x^2)$$

Sono indip., quindi $\dim(\text{Im}) = 3$

R.N. $\Rightarrow \dim(\ker) = 1$ e in questo caso $\ker = \text{Span}(1) \subset \text{Im}(f)$

$\text{Span}(1)$ = polinomi costanti

Oss. La f è l'applicazione $p(x) \to p'(x)$, quindi il ker sono le costanti e l'immagine i pol. di grado ≤ 2.

Determinare la matrice di f usando in partenza ed arrivo la base $v_1 = x^3$, $v_2 = x^2$, $v_3 = x$, $v_4 = x^3 + 1$

$f(v_1) = f(x^3) = 3x^2 = 3v_2$

$f(v_2) = f(x^2) = 2x = 2v_3$

$f(v_3) = f(x) = 1 = v_4 - v_1$

$f(v_4) = f(x^3+1) = 3x^2 = 3v_2$

$$\begin{array}{c} v_1 \to \\ v_2 \to \\ v_3 \to \\ v_4 \to \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array}$$

Osserviamo che il rango della matrice è 3

($C_4 = C_1$ ed esiste minore 3×3 diverso da 0).

$\mathbb{R}_{\le 3}[x]$	$x^3+1 \to x^2+1$ $x^3+2 \to x^2+2$ $x^2 \to x^2+3$ $x \to x^2+4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$				

Esiste ed è unica

Basta osservare che x^3+1, x^3+2, x^2, x sono una base di $\mathbb{R}_{\le 3}[x]$
(si può vedere in tanti modi enunciati nel video)

$\boxed{\text{Ker e Im}}$ $\quad \mathrm{Im} = \mathrm{Span}(x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2+4) = \mathrm{Span}(1, x^2)$

Se fossero vettori sarebbero $(1,0,1,0)$, $(2,0,1,0)$
$(3,0,1,0)$, $(4,0,1,0)$

$\mathrm{Span}(x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2+4) \ni 1 \qquad 1 = (x^2+2) - (x^2+1)$
$\ni x^2 \qquad x^2 = 2(x^2+1) - (x^2+2)$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}) = 2 \rightsquigarrow \mathrm{Dim}(\ker) = 2$

Osservo che $f(x^3+1) + f(x) = f(x^3+2) + f(x^2)$
quindi di sicuro $x^3+1+x-(x^3+2)-x^2 = -1+x-x^2 \in \ker$

$$a(x^2+1)+b(x^2+2)+c(x^2+3)+d(x^2+4)=0$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+2b+3c+4d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+2c+3d=0 \end{cases}$$

$d=t \quad c=s \quad b=-2s-3t \quad a=-b-c-d = 2s+3t-s-t = s+2t$

$$(a,b,c,d) = (s+2t, -2s-3t, s, t) = t(2,-3,0,1) + s(1,-2,1,0)$$

Una relazione non vista era $(x^2+1)+(x^2+3) = 2(x^2+2)$
$f(x^3+1) + f(x^2) = 2f(x^3+2)$

Quindi $x^3+1+x^2-2x^3-4 \in \ker \qquad -x^3+x^2-3$

Conclusione $\ker(f) = \mathrm{Span}(x^2-x+1,\ x^3-x^2+3)$

$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(x^2-x+1,\ x^3-x^2+3) \cap \mathrm{Span}(1, x^2) = \{0\}$

pol. nullo

$a(x^2-x+1)+b(x^3-x^2+3)$ se deve avere solo x^2 e termine noto, allora $a=b=0$.

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3+1 \to x^2+1$ $x^3+2 \to x^2+2$ $x^2 \to x^2+3$ $x \to x^2+4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$				

Scrivere la matrice rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4

$f(v_1) = f(1) = f(x^3+2) - f(x^3+1) = (x^2+2) - (x^2+1) = 1$

$f(v_2) = f(x) = x^2+4 = 4v_1 + v_3$

$f(v_3) = f(x^2) = x^2+3 = 3v_1 + v_3$

$$
\begin{array}{c}
1 \to \\
x \to \\
x^2 \to \\
x^3 \to
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 4 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$f(1)$

$$
\begin{aligned}
f(v_4) = f(x^3) &= f(2(x^3+1) - (x^3+2)) \\
&= 2f(x^3+1) - f(x^3+2) \\
&= 2(x^2+1) - (x^2+2) \\
&= x^2 = v_3
\end{aligned}
$$

Il rango della matrice è 2 perché R_2 e R_4 sono nulle e le restanti 2 sono lin. indip.

A posteriori, come potrei trovare $\ker(f)$?

Bovinamente
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 4b + 3c = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \qquad d = t \qquad c = s \qquad b = -t-s$$

$$a = -3c - 4b = -3s + 4t + 4s = s + 4t$$

$$(a,b,c,d) = (s+4t, -t-s, s, t) = t\,(4,-1,0,1) + s\,(1,-1,1,0)$$

Tornando in polinomi

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Span}\left(x^3 - x + 4,\ x^2 - x + 1\right)$$

Domanda: è lo stesso di prima?

— o — o —