ANALISI 1 — LEZIONE 21

Note Title 19/10/2024

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} = +\infty$

[Occhio: le torri di esponenziali si interpretano da in alto a dx, cioè

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} \quad]$$

Achtung! Esponenziale perde da fattoriale se ha come esponente n.

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{n^2}} = \frac{3^{\cancel{n^2}+2n+1} \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!} \cdot 3^{\cancel{n^2}}}$

$= \frac{3^{2n+1}}{n+1} \to +\infty > 1$, quindi $a_n \to +\infty$

Esempio 2 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$ ⇝ Tabellina

Uso rapporto → radice con $a_n = n!$

se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to L$ (stesso L)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \to +\infty \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Esempio 3 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}}$ Tabellina

Osservo che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$, quindi provo rapporto → radice con $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{(n+1)^n\,\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$

Esempio 4 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{2n}} = \frac{27}{4}$

Rapporto → Radice con $a_n = \binom{3n}{2n} = \frac{(3n)!}{(2n)!\, n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{(2n+2)!\,(n+1)!} \cdot \frac{(2n)!\, n!}{(3n)!}$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(3n)!}}$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \to \frac{27}{4}$$

(Basta raccogliere n in ogni parentesi)

Esempio 5 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \frac{4}{e^2}$

Lo scrivo come $\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$

Ora uso il rapporto → radice con $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2\,(n+1)^{2n}} \cdot \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}}}_{\to\, 4} \; \underbrace{\boxed{\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}}}}_{\to\, \frac{1}{e^2}}$$

Ho usato che $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 \to e^2$

Esempio 6 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = 0$

Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{e}{3} < 1 \rightsquigarrow a_n \to 0$$

Esempio 7 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$$

$a_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$ $\qquad a_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$ $\qquad a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \quad \dots$

Esempio 7bis $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = +\infty$

$\boxed{\text{Dim. del 7}}$ $\quad 0 \le \text{somma} \le \boxed{\frac{1}{n^2}} \cdot \boxed{(n+1)}$

numero dei termini

termine più grande

A questo punto è fatta per i carabinieri $\quad \frac{n+1}{n^2} \to 0$

$\boxed{\text{Dim del 7-bis}}$ $\quad \text{somma} \ge \boxed{(n+1)} \frac{1}{\sqrt{2n}}$

numero di termini

termine più piccolo

Ora basta osservare che $\quad \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \to +\infty$

Esempio 8 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7^n - n^{2000} \cdot 5^n + n} = 7$

Brutal mode: $\sqrt[n]{\dots} \sim \sqrt[n]{7^n} = 7$

Raccolgo 7^n : $\sqrt[n]{\dots} = \underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_{= 7} \cdot \sqrt[n]{1 - \boxed{n^{2000} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n} + \boxed{\frac{n}{7^n}}}$

$n^{2000} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n \to 0 \qquad \frac{n}{7^n} \to 0$

$$\frac{n^{2000}}{\left(\frac{7}{5}\right)^n}$$

e da qui si chiude.