ANALISI 1 — LEZIONE 064

Note Title 12/12/2016

Tabellina $\boxed{\int \mathrm{Raz}(\sin x, \cos x)\, dx}$

Si possono usare le formule parametriche

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

dove $\boxed{t = \tan \frac{x}{2}} \rightsquigarrow \frac{x}{2} = \arctan t \rightsquigarrow \boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt}$

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \underbrace{\frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}}_{\frac{1}{\sin x}} \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\, dt}_{dx} = \int \frac{1}{t}\, dt$

$= \log|t| = \log\left|\tan \frac{x}{2}\right|$ VERIFICA!!

Alternativa: $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx$

Pongo $y = \cos x \rightsquigarrow dy = -\sin x\, dx$

$$= -\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\log|1+y| - \frac{1}{2}\log|1-y| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|$$

(verificare che sia quello di prima)

Oss. Le formule parametriche sono l'ultima spiaggia!

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^3} \frac{2}{1+t^2}\, dt$ = si fa...

e poi alla fine sostituisco $t = \tan \frac{x}{2}$

Alternativa: vale con tutte le potenze dispari di $\sin x$ e $\cos x$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,dx \qquad y = \sin x$$

$$= \int \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \text{si fa davvero !!}$$

$$\frac{1}{(1-y^2)^2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{d}{dx}\,\frac{Cx+D}{1-y^2}$$

$\rightsquigarrow$ trovo A, B, C, D e ho finito.

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x}\,dx$ (vedi lezioni 2011–12)

<u>Possibilità</u>:
- parametriche ☹
- percorso $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ e ci si riduce all'integrale di $\frac{1}{\sin^3(\ )}$

Alternativa: $$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x}\,dx = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx + 2\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 x} + 2\int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 x} + 2\int \frac{\cos x}{\sin x} + 2\int \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2\log|\sin x| - 2\log|\cos x|$$

$$= 2\log|\tan x|$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx \qquad y = \sin x \rightsquigarrow dy = \cos x\,dx$$

$$= \int \frac{dy}{y^3} = \int y^{-3}\,dy = -\frac{1}{2}y^{-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin^2 x}$$

Esempio 4 $\int \arcsin x \, dx =$

$$= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arcsin x} \, dx = \underset{F}{x} \, \underset{G}{\arcsin x} - \int \underset{F}{x} \, \underset{g}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \, dx$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

volendo e $\sqrt{\text{pol. 2° grado}}$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ Pongo $y = \sqrt{1-x^2} \rightsquigarrow dy = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \, dx$

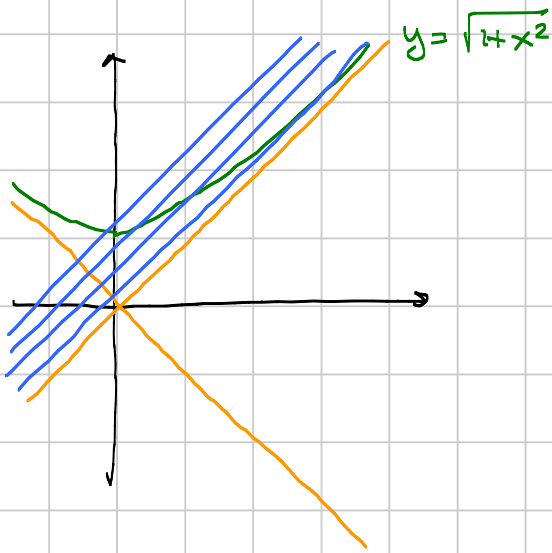
$= \int - dy = -y = -\sqrt{1-x^2}$

Pongo $y = 1-x^2 \rightsquigarrow dy = -2x \, dx$

$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} = -\sqrt{1-x^2}$

— o — o —

$\boxed{\text{DELIRIO}}$ $\int \sqrt{1+x^2} \, dx$ $\sqrt{x^2+1} = x+t$

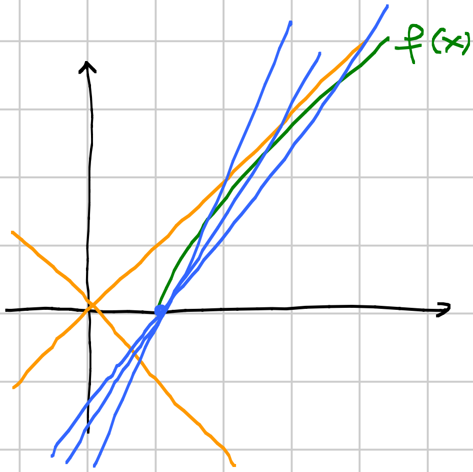


Famiglia di rette
ciascuna delle quali
incontra l'iperbole in
un solo punto

In effetti anche la sostituzione

$\sqrt{x^2+1} = -x+t$ funziona

$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ $\qquad$ $\sqrt{x^2-1} = \underbrace{t(x-1)}$



fascio di rette
per il punto $(1,0)$

Ogni retta incontra l'iperbole in 2 punti, uno sempre lo stesso $(1,0)$ e l'altro variabile.

Oss. Il primo esempio è un caso particolare del 2°, visto che sono tutte le rette che passano per un "punto all'infinito" dell'iperbole.

Posso fare con la stessa idea sostituzioni creative!

$\int \sqrt{8+x^2}\,dx$ $\qquad$ Osservo che $f(x) = \sqrt{8+x^2}$ passa per $(1,3)$

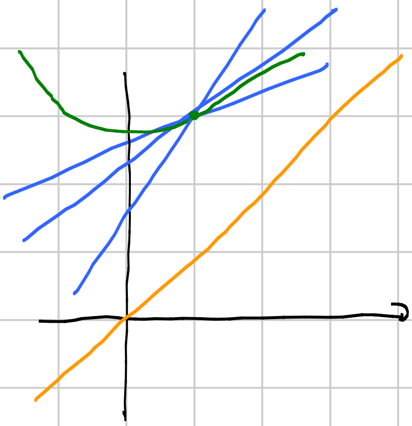
Considero le rette per $(1,3)$: $\quad 3+t(x-1)$

$\sqrt{8+x^2} = 3+t(x-1)$ $\qquad$ Ricavo x:

$$8+x^2 = 9+t^2(x-1)^2+6t(x-1)$$

$$(x^2-1) = t^2(x-1)^2+6t(x-1) \qquad x+1 = t^2(x-1)+6t$$

1° grado in x ☺



Più in generale, data $\int f(x)\,dx$ considero il grafico $y = f(x)$

e spero che esistano due funzioni razionali $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ tali che

$$x = \varphi_1(t)$$
$$y = \varphi_2(t)$$

sia una parametrizzazione del grafico. A quel punto pongo $x = \varphi_1(t)$ e ottengo

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi_1(t))\,\varphi_1'(t)\,dt = \int \varphi_2(t)\,\varphi_1'(t)\,dt$$

e questo è razionale.

Domanda: quando esistono φ_1 e φ_2 ?

Sempre quando il grafico è una conica (iperbole, ellisse, parabola) ma più in generale quando il grafico è una curva razionale