ANALISI 1 — LEZIONE 077

Note Title 01/03/2017

Esempio 1 $\begin{cases} \dot{u} = u^2 t^3 \\ u(0) = 7 \end{cases}$

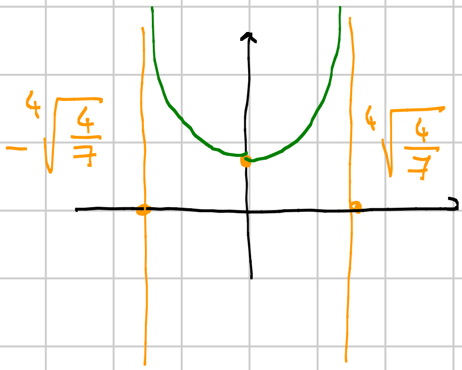
① $\frac{du}{dt} = u^2 t^3 \rightsquigarrow \frac{du}{u^2} = t^3 dt$

② $\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt \rightsquigarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{4}t^4 + c$

③ $\rightsquigarrow \frac{1}{u} = -\frac{1}{4}t^4 + c \rightsquigarrow \boxed{u = \frac{1}{c - \frac{1}{4}t^4}}$ Sol. gen. eq. diff.

④ $u(0) = \frac{1}{c} = 7 \rightsquigarrow c = \frac{1}{7}$ $\boxed{u(t) = \frac{28}{4 - 7t^4}}$ Sol. pbm. di Cauchy

⑤ Fare verifica!



⑥ Nel futuro blow up in $T = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$

Nel passato blow up in $T = -$ "

Esempio 2 $\begin{cases} \dot{u} = u^2 t^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ $1+2+3 \rightsquigarrow u(t) = \frac{1}{c - \frac{1}{4}t^4}$

④ $u(0) = \frac{1}{c} = 0$ ☹ La soluzione ci DEVE essere per il teo. di esistenza e unicità

In questo caso la sol. è banalmente $u(t) \equiv 0$ (verifica ovvia)

Oss. Se il pbm. è $\begin{cases} \dot{u} = f(t)\, g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

SE $g(u_0) = 0$, allora la sol. è $u(t) \equiv u_0$ (verifica ovvia)

$\boxed{\text{Teorema}}$ Consideriamo il pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t)\, g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo che

(i) f e g sono continue in un intervallo che contiene le cond. iniziali. Detto meglio, esistono $\delta > 0$ ed $r > 0$ t.c.

$$\left.\begin{aligned} f &: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R} \\ g &: [u_0 - r, u_0 + r] \to \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{continue}$$

(ii) $g(u_0) \neq 0$.

Allora il pbm. ha soluz. unica $u : [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \to [u_0 - r, u_0 + r]$ con eventualmente $\delta_1 \leq \delta$, ed è data dalla procedura descritta precedentemente.

Oss. Basta la continuità rispetto ad u (senza Lip.), ma serve $g(u_0) \neq 0$ per avere l'unicità.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Unicità. Sia $u : [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ una soluzione. Dico che è quella data dalla procedura, almeno fino a quando $g(u(t)) \neq 0$.

Poiché $u(t_0) = u_0$, allora $g(u(t_0)) \neq 0$ per la (ii), ma allora per continuità esiste $\delta_2 > 0$ t.c.

$$g(u(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$$

Allora posso dividere $\dot{u}(t) = f(t)\, g(u(t))$ $\rightsquigarrow$

$$\frac{\dot{u}(t)}{g(u(t))} = f(t) \qquad \forall t \in [t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$$

Posso integrare a dx e sx tra t_0 ed un qualunque t nell'int.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}(s)}{g(u(s))}\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

Indico con F una primitiva di f e con Γ una prim. di $\frac{1}{g}$

Il RHS è $\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds = F(t) - F(t_0)$

Il LHS è $\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}(s)}{g(u(s))}\,ds$

Pongo $y = u(s)$, quindi $dy = \dot{u}(s)\,ds$

$s = t_0 \rightsquigarrow y = u(t_0) = u_0$

$s = t \rightsquigarrow y = u(t)$

$$= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dy}{g(y)} = \Gamma(u(t)) - \Gamma(u_0)$$

Conclusione: se $u(t)$ è soluzione, allora

$$\Gamma(u(t)) - \Gamma(u_0) = F(t) - F(t_0), \quad \text{cioè}$$

$$\underbrace{\Gamma(u(t))}_{\text{primitiva di } \frac{1}{g}} = \underbrace{F(t)}_{\text{Prim. di } f} + \underbrace{\Gamma(u_0) - F(t_0)}_{\text{costante dipendente dalla cond. iniz.}} \qquad \forall t \in [t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$$

Questo caratterizza univocamente la u fino a quando non va ad annullare g.

<u>Esistenza</u> Definisco Γ e F come sopra. Osservo che Γ è invertibile almeno vicino ad u_0 perché è strett. monotona.
Posso quindi considerare la funzione inversa Γ^{-1} e porre

$$u(t) = \Gamma^{-1}\left(F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0)\right)$$

Dico che u risolve il pbm. di Cauchy. Basta fare la verifica.

→ Cond. iniz.: $u(t_0) = \Gamma^{-1}(\cancel{F(t_0)} + \Gamma(u_0) - \cancel{F(t_0)}) = u_0$

→ Equazione:

$$\dot{u}(t) = (\Gamma^{-1})'\left(F(t)+\Gamma(u_0)-F(t_0)\right)\overbrace{F'(t)}^{f(t)}$$

Deriv. funz. inversa $\quad (\Gamma^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\Gamma'(\Gamma^{-1}(y))}$ (vedi Let....)

$$= g(\Gamma^{-1}(y))$$

$$= g\left(\Gamma^{-1}\left(F(t)+\Gamma(u_0)-F(t_0)\right)\right) f(t)$$

$$= g(u(t))\cdot f(t). \qquad \square$$

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} \dot{u} = u \sin t \\ u(0) = 6 \end{cases}$

① $\dfrac{du}{u} = \sin t\, dt$ ② $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int \sin t\, dt \leadsto \overbrace{\log|u|}^{\Gamma(u(t))} = \overbrace{-\cos t}^{F(t)} + c$

③ $|u| = e^{-\cos t + c} \leadsto u(t) = \pm e^{-\cos t + c} = \pm e^{c}\cdot e^{-\cos t}$

$= k e^{-\cos t}$

Morale: la soluzione $\boxed{u(t) = k e^{-\cos t}}$ va bene per ogni $k \in \mathbb{R}$ e contiene tutti i casi senza mettere $\pm$, e ho anche compreso il caso $k=0$

Oss. In questo caso l'eq. era lineare.

Esempio 4 (Effetto soglia) $\begin{cases} \dot{u} = u^2 e^{-t} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$ (variabile)

① $\dfrac{du}{u^2} = e^{-t} dt$ ② $-\dfrac{1}{u} = -e^{-t} + c$ ③ $\dfrac{1}{u} = e^{-t} + c$

$\leadsto \boxed{u(t) = \dfrac{1}{c + e^{-t}}}$ Sol. gen. eq. diff.

④ Trovo c in funzione di α:

$$u(0) = \frac{1}{c+1} = \alpha \rightsquigarrow c+1 = \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{\alpha} + e^{-t}} = \boxed{\frac{\alpha}{1-\alpha+\alpha e^{-t}}}$$ sol. pbm. di Cauchy

⑤ Verifica a mente (ma è meglio scriverla!)

⑥ Studio: problemi quando $1-\alpha+\alpha e^{-t} = 0$, cioè $\alpha e^{-t} = \alpha - 1$

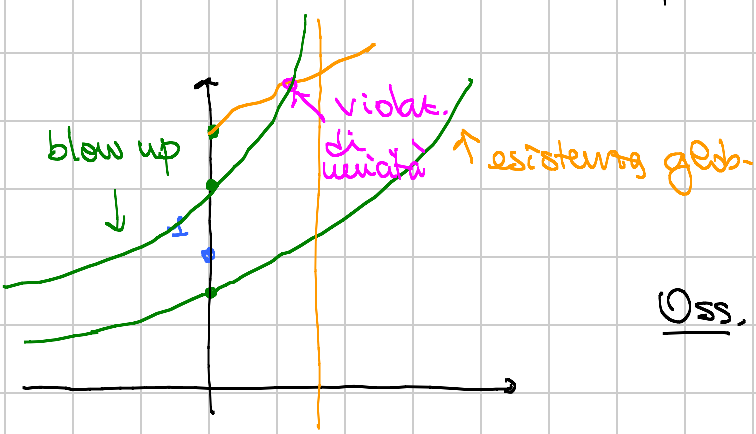
$$e^{-t} = \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow -t = \log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\rightsquigarrow t = -\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

Si vede meglio da $\alpha e^{-t} = \alpha - 1$

→ se $\alpha \in (0,1]$, allora l'eq. è impossibile ⇒ c'è esistenza glob. nel passato e nel futuro

→ se $\alpha > 1$, allora ci sono pbm. per $T = -\log\underbrace{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}_{\in (0,1)} > 0$



Oss. Più parto in alto, più il tempo di vita si accorcia