ANALISI 1 — LEZIONE 040

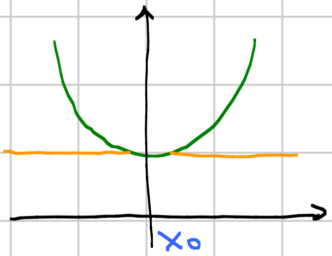
Note Title 09/11/2016

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

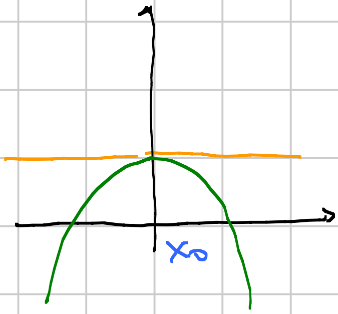
<u>Obiettivo</u>: descrivere il comportamento di una funzione in un intorno di un p.to stazionario.

<u>Def</u>. Un p.to x_0 si dice stazionario per f se $f'(x_0) = 0$.
(si intende che ha senso calcolare $f'(x_0)$, quindi f è definita almeno in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ per un qualche $\delta > 0$).

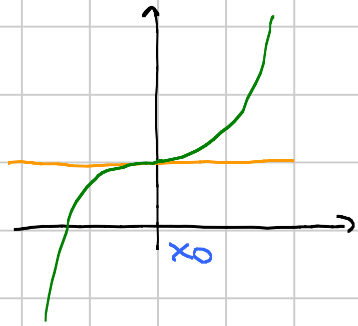
Ci sono 5 tipi possibili di comportamento



min. loc.



max. loc.



flesso a tang. orizz. ascendente

flesso a tang. orizz. disc.

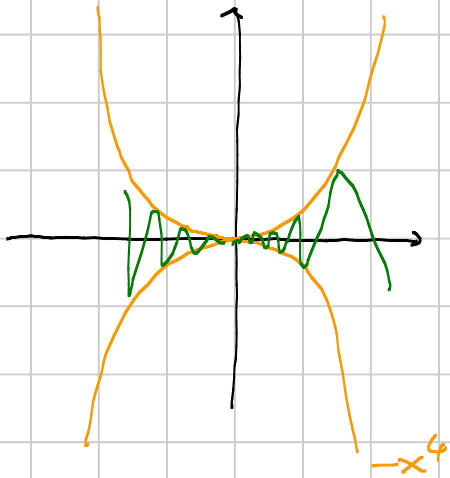
Il quinto comportamento è patologico...
Detto meglio

- MIN. LOC. : $f(x) \geq f(x_0)$ $\quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
- MAX. LOC. : $f(x) \leq f(x_0)$ $\quad$ "
- FL. TG. ORIZZ. ASC : $f(x) \leq f(x_0)$ $\quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$
  $f(x) \geq f(x_0)$ $\quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$
- FL. TG. ORIZZ. DISC : contrario di sopra.

Il quinto caso è nessuno dei precedenti.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x^{20}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Si verifica che
- in ogni intervallo $(0,\delta)$ o $(-\delta,0)$ ci sono sia p.ti in cui $f(x)>0$ sia p.ti in cui $f(x)<0$
- $f(0) = f'(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{h} = \lim_{h \to 0} h^3 \sin \frac{1}{h^{20}} = 0 \quad \text{per carab.}$$

Oss. Potremmo definire i 4 comp. standard in maniera più stretta, cioè per esempio

min loc. se $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$

$\boxed{\text{Criterio delle derivate successive}}$ Sia x_0 un p.to staz. per $f(x)$. Supponiamo che esista $k \geq 1$ tale che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

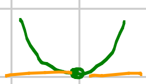
$$f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

Allora vale il seguente schema

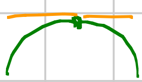
k pari → $f^{(k)}(x_0) > 0$; $f^{(k)}(x_0) < 0$

k dispari → $f^{(k)}(x_0) > 0$; $f^{(k)}(x_0) < 0$

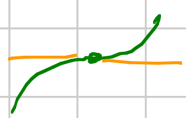
$f^{(k)}(x_0) > 0$



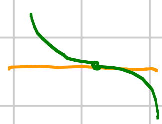
$f^{(k)}(x_0) < 0$



$f^{(k)}(x_0) > 0$



$f^{(k)}(x_0) < 0$



Il quinto comportamento è possibile solo quando o tutte le derivate sono nulle, o smettono di esistere prima di essere $\neq 0$ in x_0.

Dim. Ci sono 4 casi. Facciamone qualcuno

$\boxed{k \text{ pari e } f^{(k)}(x_0) > 0}$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$$

Questo è lo sviluppo di Taylor di ordine k con centro in x_0.
Riscritto diventa

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^k) \qquad \text{per } h \to 0$$

Da questo si ottiene che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} > 0$$

Essendo il limite >0, per permanenza del segno avremo che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} > 0 \qquad \text{per } h \in (-\delta,\delta) \setminus \{0\}$$

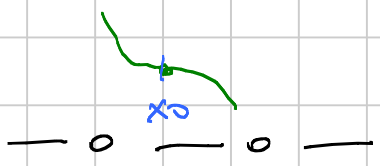
Poiché k è pari, il denom è >0, quindi num. >0, quindi $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ per h vicini a 0, quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ per $h \in (-\delta,\delta) \setminus \{0\}$. $\rightsquigarrow$ min. loc.

$\boxed{k \text{ dispari e } f^{(k)}(x_0) < 0}$ Come prima da Taylor arriviamo a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} < 0 \qquad \text{per } h \in (-\delta,\delta) \setminus \{0\}$$

per un opportuno $\delta > 0$. Ora essendo k dispari

- in $(0,\delta)$ denom >0, quindi num. <0 $\rightsquigarrow$ $f(x_0+h) < f(x_0)$
- in $(-\delta,0)$ denom <0, quindi num >0 $\rightsquigarrow$ $f(x_0+h) > f(x_0)$



Stesso criterio, detto diversamente: in un opportuno intorno di un p.to stazionario una funzione si comporta come il primo termine non nullo e non costante del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $\quad f(x) = e^{x^2} + \cosh x^4 \qquad x_0 = 0$

Si vede in vario modo che $f'(0) = 0$

1° modo: calcolo la derivata

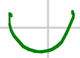
2° modo: è una funzione pari, quindi $f'(x)$ è dispari, quindi $f'(0) = 0$.

3° modo: Taylor

$$f(x) = \boxed{2 + x^2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Visto che "non c'è" x, per forza $f'(0) = 0$

Che tipo di punto stazionario è? È un p.to di min. loc.



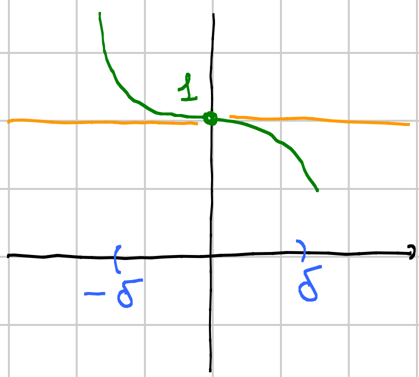
Si comporta come $\quad 2 + x^2$

Esempio 2 $\quad f(x) = \sqrt{1+x^4} + \sin x^5 - \sinh x^3 \qquad x_0 = 0$

L'origine è un p.to di flesso a tang. orizz. discendente

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + x^5 + o(x^5) - x^3 - o(x^3)$$

$$= 1 - x^3 + o(x^3)$$



Se usassi le derivate successive la prima non nulla sarebbe la 3ª e sarebbe < 0 (verrebbe -6)

Esempio 3 Studiare iniettività e surg. di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x^5 + x^3$ $\qquad$ I + S

$x^5 - x^3$ $\qquad$ ~~I~~ S

$x^7 + \log(1+x^2)$ $\qquad$ ~~I~~ S

Sono tutte surgettive perché continue ovunque e

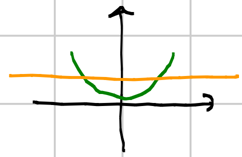
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

La prima è iniettiva perché somma di due funz. strett. cresc.

La seconda non è iniettiva perché $f(0) = f(1) = 0$.

La terza non è iniettiva perché ha un min. locale per $x = 0$

$$x^7 + \log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$$



Esempio 4 Dimostrare che l'equazione

$$1000\, x^5 - \sin(x^3) + 777 \arctan x^4 = 0$$

ha almeno 3 soluzioni reali

Osservazioni fondamentali

(0) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua

(1) limiti a $\pm\infty$

(2) $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ in $x = 0$

Per ottenere una sol. $x > 0$ e una sol $x < 0$ devo usare l'esistenza degli zeri.