ANALISI 1 - LEZIONE 75

Note Title 08/03/2025

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI Come trasformare integrali "strani" in integrali di funzioni razionali.

1. Funzioni razionali di e^x $(\text{Raz}(e^x))$
2. Funzioni razionali di x e radici di roba di primo grado
   $(\text{Raz}(x, \sqrt[m]{x}))$ o più in generali $\sqrt[m]{\text{roba di } 1^\circ \text{ grado}}$)
3. Radici quadrate di roba di 2° grado $\sqrt{ax^2+bx+c}$
4. Funzioni razionali di sin e cos $\text{Raz}(\sin x, \cos x)$

$\boxed{1}$ $\text{Raz}(e^x)$ Si pone $e^x = y$ e si vede che succede

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}\,dx$

Pongo $y = e^x \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = e^x \rightsquigarrow dy = e^x dx$

$$\int \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}\,dx = \int \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}\,\frac{1}{e^x}\cdot \underbrace{e^x dx}_{dy} = \int \frac{y^2+1}{(y-3)y}\,dy$$

L'ultimo lo so fare come funzione razionale (divisione, ...)

Piccola alternativa: $y = e^x \rightsquigarrow x = \log y \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \rightsquigarrow dx = \frac{1}{y}\,dy$

e si arriva allo stesso punto.

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{8^x+1}{4^x+3}\,dx$

Pongo $y = 2^x \rightsquigarrow dy = 2^x \cdot \log 2\, dx$

$$\int \frac{8^x+1}{4^x+3}\,dx = \frac{1}{\log 2}\int \frac{8^x+1}{4^x+3}\,\frac{1}{2^x}\cdot \underbrace{2^x \cdot \log 2\, dx}_{dy} = \frac{1}{\log 2}\int \frac{y^3+1}{(y^2+3)y}\,dy$$

$= \dots$

$\boxed{2}$ Funzioni razionali di x e radici di roba di 1° grado

Esempio 3 $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+3}\,dx$

Pongo $y=\sqrt{x+1}$ ⇝ (punto a ricavare) $y^2=x+1$ ⇝ $x=y^2-1$
(sto ricavando x senza usare radici) ⇝ $\frac{dx}{dy}=2y$ ⇝ $dx=2y\,dy$
Siamo pronti a sostituire

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+3}\,dx=\int \frac{\overbrace{y^2-1}^{x}+2}{\underbrace{y}_{\sqrt{x+1}}+3}\,\underbrace{2y\,dy}_{dx}=2\int\frac{(y^2+1)\,y}{y+3}\,dy$$

Facciamolo per esercizio $\int \frac{y^3+y}{y+3}\,dy$

1 - Divisione

$$\begin{array}{l|l} y^3+y & y+3 \\ \hline -y^3-3y^2 & y^2-3y+10 \\ \hline -3y^2+y & \\ 3y^2+9y & \\ \hline 10y & \\ -10y-30 & \\ \hline -30 & \end{array}$$

$$\int \frac{y^3+y}{y+3}\,dy=\int\left(y^2-3y+10-\frac{30}{y+3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+10y\underbrace{-30\log|y+3|}_{+\log\frac{1}{(y+3)^{30}}}$$

Non resta che tornare in x

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+3}\,dx=\frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}(x+1)+10\sqrt{x+1}+\log\frac{1}{(\sqrt{x+1}+3)^{30}}$$

[Derivare per verifica!]

Esempio 4 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\, dx$

Pongo $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (quando ricavo x, ottengo equazioni di 1° grado)

$\rightsquigarrow\ y^2 = \frac{x+1}{x+2} \rightsquigarrow\ xy^2+2y^2 = x+1 \rightsquigarrow\ x(y^2-1) = 1-2y^2$

$\rightsquigarrow\ x = \frac{1-2y^2}{y^2-1} \rightsquigarrow\ dx = \underbrace{\left(\frac{1-2y^2}{y^2-1}\right)'}_{\text{volendo potrei calcolarla}} dy$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\, dx = \int \underset{G}{y} \underset{f}{\left(\frac{1-2y^2}{y^2-1}\right)'} dy$$

$$= \underset{G}{y} \underset{F}{\frac{1-2y^2}{y^2-1}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{1-2y^2}{y^2-1}}\, dy$$

Da qui si chiude facilmente

$$\int \frac{1-2y^2}{y^2-1}\, dy = \int \frac{2-2y^2-1}{y^2-1}\, dy = \int \left(-2-\frac{1}{y^2-1}\right) dy$$

$$= -2y - \int \frac{1}{y^2-1}\, dy \quad \ldots \quad \frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$$

... trovo A e B e concludo.

Alla fine al posto di y devo mettere tutta la radice

Esempio 5 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+5}+x}{\sqrt[3]{x+5}+3}\, dx$ Tante radici con indici diversi, ma della STESSA ROBA

Pongo $y = \sqrt[6]{x+5} \rightsquigarrow$ a questo punto $\sqrt{x+5} = y^3$ e $\sqrt[3]{x+5} = y^2$

$\rightsquigarrow\ y^6 = x+5 \rightsquigarrow\ x = y^6-5 \rightsquigarrow\ dx = 6y^5 dy$

Basta sostituire

$$\text{integrale dato} = \int \frac{\overset{\sqrt{x+5}}{y^3} + \overbrace{y^6}^{x} - 5}{\underset{\sqrt[3]{x+5}}{y^2+3}} \underbrace{6y^5\,dy}_{dx} = \text{si fa e poi si sostituisce}$$

Regola generale : se ho tante radici della stessa espressione $\frac{ax+b}{cx+d}$ con indici $m_1, \dots, m_k$, allora la sostituzione vincente è

$$y = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{con } m = \text{min. com. multiplo } (m_1, \dots, m_k)$$

$\boxed{3}$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ Tre metodi a disposizione

$\boxed{\text{1° metodo}}$ Sostituzioni trigonometriche

Esempio 6 (Caso base) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Pongo $x = \sin y \rightsquigarrow dx = \cos y\,dy$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y}\,\cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy = (\ast)$$

$$\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1 \rightsquigarrow \cos^2 y = \frac{1+\cos(2y)}{2}$$

$$(\ast) = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2y)\right) dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\underset{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\cos y}\,\sin y$$

Quando torno in x trovo $x = \sin y \rightsquigarrow y = \arcsin x$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\underset{\sin y}{x}\,\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\cos y}$$

[Derivando abbiamo una certezza che è davvero la primitiva]

Esempio 7 $\int \sqrt{3-5x^2}\,dx$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}\,dx = (*)$$

Pongo $z = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x \rightsquigarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}z \rightsquigarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dz$

$$(*) = \sqrt{3}\int \sqrt{1-z^2}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,dz = \frac{3}{\sqrt{5}}\int \sqrt{1-z^2}\,dz$$

$= \frac{3}{2\sqrt{5}}\left(\arcsin z + z\sqrt{1-z^2}\right) \rightsquigarrow$ sostituisco di nuovo z.

Alternativa: da subito $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sin y$

$\rightsquigarrow \sqrt{3-5x^2} = \sqrt{3-3\sin^2 y} = \sqrt{3}\cos y$ e non resta che calcolare dx

— o — o —