ANALISI 1 — LEZIONE 114

Note Title 26/04/2017

FUNZIONI CONVESSE

__Def.__ Siano x e y in $\mathbb{R}$. Si dice __combinazione convessa__ di x e y ogni numero che si scrive nella forma

$$\boxed{\lambda x + (1-\lambda) y} \qquad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

comb. lin. con coeff. ≥ 0 a somma 1

__Oss.__ ① È un concetto che vale in ogni spazio vettoriale

② L'insieme delle comb. conv. di x e y è tutto il segmento di estremi x e y.

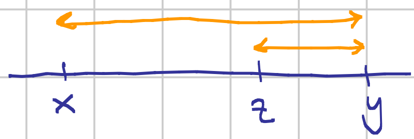
__Dim.__ Supponiamo wlog che $x < y$. Allora per ogni $\lambda \in [0,1]$ vale

$$\lambda x + (1-\lambda) y \geq x, \quad (1-\lambda) y \geq (1-\lambda) x, \quad \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\lambda x + (1-\lambda) y \leq y \ \dots \ \text{stessa dim.}$$

Viceversa, dato un qualunque $z \in [x,y]$ esiste $\lambda \in [0,1]$ t.c.

$$\lambda x + (1-\lambda) y = z \ \dots \ \text{basta risolvere} \dots \quad \lambda = \frac{z-y}{x-y} = \frac{y-z}{y-x} \in [0,1]$$



Brutalmente: per $\lambda = 0$ sono in y

per $\lambda = 1$ sono in x

quando λ va da 0 a 1 percorro al contrario il segmento

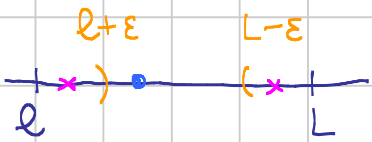
__Oss.__ Anche in $\mathbb{R}^n$ le comb. conv. descrivono il segmento di estremi x e y (in $\mathbb{R}^n$).

Def. Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}$ si dice <u>CONVESSO</u> se per ogni x e y in C vale che tutto il segmento di estremi x e y sta in C.

Prop. I sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$ ricadono in queste tipologie:

- tutto $\mathbb{R}$
- semirette $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$
- intervalli $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$
- p.ti singoli $\{a\}$
- $\varnothing$

$\boxed{\text{Idea}}$ Pongo $\ell = \inf$, $L = \sup$ e mostro che tutti gli $\ell < x < L$ stanno per forza nell'insieme.
Poi ℓ ed L possono starci oppure no.



Def. Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme <u>convesso</u> non vuoto, sia $f: C \to \mathbb{R}$
Si dice che f è convessa in C se

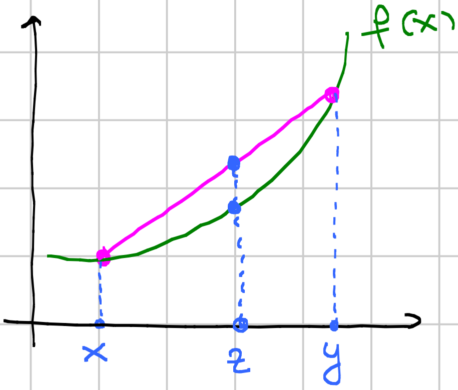
$$\boxed{f(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda)y}_{\text{comb. convessa di } x \text{ e } y}) \leq \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{\text{comb. conv. di } f(x) \text{ e } f(y)} \qquad \forall x \in C \ \ \forall y \in C \ \ \forall \lambda \in [0,1]}$$

(essendo C convesso, questa sta a sua volta in C)

La funzione si dice <u>strettamente convessa</u> se vale il $<$ stretto quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$ aperto.

Def. (geometrica) f è convessa se ogni segmento che congiunge due p.ti del grafico sta "sopra al grafico".

Vorrei avere che per ogni $z \in [x, y]$ vale



$$f(z) \leq r(z)$$

equazione retta

Ora sappiamo che z si può scrivere come comb. convessa di x e y, cioè

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \qquad \text{con} \qquad \lambda = \frac{y-z}{y-x}$$

L'eq. della retta è $\qquad r(z) = f(x) + \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)$

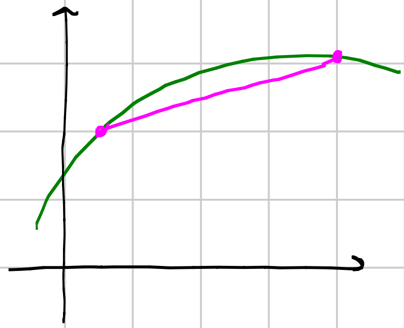
sostituendo a z il valore trovato sopra si ottiene che $f(z) \leq r(z)$ è equivalente alla definizione algebrica.

— o — o —

Def. Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso non vuoto, sia $f : C \to \mathbb{R}$.
La funzione f si dice <u>concava</u> in C se vale

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Strettamente concava ... stessa cosa con $>$



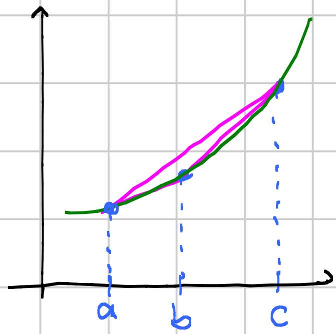
Oss. f è concava $\Leftrightarrow$ $-f$ è convessa.

Oss. Una funzione è convessa se e solo se il suo sopragrafico è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$

$$\operatorname{epi}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$$

epigrafico

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ (Lemma dei 3 rapporti incrementali)



Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f : C \to \mathbb{R}$.
Allora f è convessa in C (se e) solo se

$$a < b < c \implies$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dimostro solo l'implicazione convessa $\Rightarrow$ disuguaglianza

Per ipotesi $\quad f(\lambda a + (1-\lambda)c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$

- l'idea è usare $\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}$ da cui $1-\lambda = \dfrac{b-a}{c-a}$

$$f(\lambda a + (1-\lambda)c) \leq \lambda(f(a)-f(c)) + f(c)$$

$$f(\lambda a + (1-\lambda)c) - f(c) \leq \lambda(f(a)-f(c))$$ ricordo chi è λ:

$$f(b) - f(c) \leq \frac{c-b}{c-a}(f(a)-f(c))$$

Divido per $c-b$ e poi aggiusto i segni e ottengo la disug. dx.

- Per la disug. sx scrivo

$$f(\lambda a + (1-\lambda)c) - f(a) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c) - f(a)$$
$$= (1-\lambda)(f(c)-f(a))$$

Ricordo chi è $(1-\lambda)$...

$$f(b) - f(a) \leq \frac{b-a}{c-a}(f(c)-f(a)).$$ Divido per $b-a$ e ho finito.

<u>Lemma 2</u> (lemma dei 2 rapporti) Stesse ipotesi del lemma 1.

Allora f è convessa se e solo se

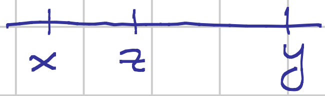
$$a < b < c \implies \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}_{\text{i due estremi del lemma prec.}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ f convessa $\Rightarrow$ disuguaglianza è il lemma precedente.

Resta da dim. che disug. $\Rightarrow$ f convessa.

Prendo x e y, con wlog $x<y$, prendo $\lambda \in [0,1]$ e voglio che

$$f(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{z}) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



Uso la disug. con $x < z < y$

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \; ; \quad f(z)-f(x) \le \frac{z-x}{y-z}\left(f(y)-f(z)\right)$$

$$f(z)\underbrace{\left(1+\frac{z-x}{y-z}\right)}_{\frac{y-x}{y-z}} \le f(x) + \frac{z-x}{y-z} f(y)$$

moltiplico per $y-z$

$$f(z)(y-x) \le (y-z) f(x) + (z-x) f(y)$$ divido

$$\underset{\lambda x + (1-\lambda) y}{f(z)} \le \underbrace{\frac{y-z}{y-x}}_{\lambda} f(x) + \underbrace{\frac{z-x}{y-x}}_{1-\lambda} f(y)$$

come volevo.

<u>Oss.</u> Stretta conv. $\Leftrightarrow$ disug. strette nei 2 lemmi.