ISOMETRIE DELLO SPAZIO

$f(x) = Ax + b$

A: matrice 3x3 ortogonale

Problemi:

1. Data una descrizione geom., trovare l'espressione di f
2. Data un'espressione, capire se è un'isometria e se sì di cosa si tratta
3. Determinare immagine e controimmagine di p.ti, rette, piani.

Come sono fatte le matrici 3x3 ortogonali

(Caso con $b=0$)

Sono di 3 famiglie

1 Simmetrie rispetto a piani

La forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $+1, +1, -1$

$\text{Det} = -1$

(un piano va in se stesso, l'ortogonale in meno se stesso)

2 Rotazioni rispetto a rette

La forma canonica è

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

rotazione nel piano $\perp$ alla direzione fissa

Direzione che va in se stessa

$\text{Det} = 1$

Autovalori: $+1$, $\cos\theta \pm i \sin\theta$

3 Rotazione seguita da simmetria

La forma canonica è

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

rotazione

Direzione che va in − se stessa

$\text{Det} = -1$

Autovalori: -1, $\cos\theta \pm i\sin\theta$

Oss. La matrice identica rientra nel $\boxed{2}$ quando $\theta = 0°$
La matrice $-Id$ rientra nel $\boxed{3}$ quando $\theta = 180°$

CLASSIFICAZIONE COMPLETA DELLE ISOMETRIE

Si guarda l'insieme dei p.ti fissi, cioè si risolve il sistema lin.

$$f(x) = x$$

$\boxed{1}$ Fix = tutto $\mathbb{R}^3$ $\leadsto$ $f(x)$ = Identità ($A = Id$, $b = 0$) Det = 1

$\boxed{2}$ Fix = piano $\leadsto$ $f(x)$ = simmetria risp. a quel piano
(A = matrice di simmetria) Det = -1

$\boxed{3}$ Fix = retta $\leadsto$ $f(x)$ = rotazione di angolo θ intorno alla retta
(A = matrice di rotazione) Det = 1

$\boxed{4}$ Fix = singolo p.to $\leadsto$ $f(x)$ = rotazione risp. retta passante per il p.to seguita da simmetria rispetto al piano per il p.to $\perp$ alla retta stessa
(A = matrice ortogonale di tipo 3)

$\boxed{5}$ Fix = $\emptyset$ Allora si aprono 3 sottocasi

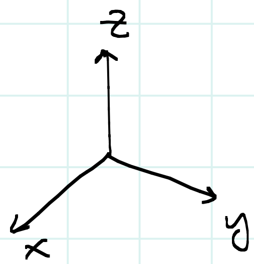
$\boxed{5.1}$ $f(x)$ = traslazione ($A = Id$)

$\boxed{5.2}$ $f(x)$ = simmetria risp. ad un piano seguita da traslazione di un vettore parallelo al piano
(A = matrice di simmetria)

$\boxed{5.3}$ $f(x)$ = rotazione intorno ad una retta seguita da traslazione nella direzione della retta.
(A = matrice di rotazione)

— o — o —

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano xy
$= \text{Span}((1,0,0),(0,1,0))$ $[z=0]$



Si tratta dell'applicazione lineare t.c.

$$\begin{aligned}(1,0,0) &\to (1,0,0)\\ (0,1,0) &\to (0,1,0)\\ (0,0,1) &\to (0,0,-1)\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Esempio 2 Simmetria rispetto al piano yz $[x=0]$
$= \text{Span}((0,1,0),(0,0,1))$

$$\begin{aligned}(1,0,0) &\to (-1,0,0)\\ (0,1,0) &\to (0,1,0)\\ (0,0,1) &\to (0,0,1)\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Esempio 3 Simmetria rispetto al piano $x=5$
(occhio: il piano non passa per l'origine)

$$P \to P-P_0 \to \text{Simm}(P-P_0) \to \text{Simm}(P-P_0)+P_0$$

P_0 = p.to qualunque del piano $=(5,0,0)$

$$(x,y,z) \to (x-5,y,z) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-5\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow (10-x,y,z)$

L'espressione finale è $\boxed{(x,y,z) \to (10-x,y,z)}$

Potevo scegliere $P_0=(5,1,-3)$:)

$$\underset{P}{(x,y,z)} \rightsquigarrow \underset{P-P_0}{(x-5,y-1,z+3)} \rightsquigarrow \underset{\text{Simm}(P-P_0)}{(5-x,y-1,z+3)} \rightsquigarrow \underset{\text{aggiungo } P_0}{(10-x,y,z)}$$

Esempio 4 Simmetria rispetto al piano

$$x - 2y + 5z = 0 \leftarrow \text{passa per l'origine}$$

Slogan: il piano resta fisso, la retta $\perp$ va in − se stessa

Scrivo il piano come

$$\mathrm{Span}\,(\underbrace{(2,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(5,0,-1)}_{v_2})$$

La retta perpendicolare è $\mathrm{Span}\,(\underbrace{(1,-2,5)}_{v_3})$

Stiamo cercando l'appl. lin. t.c.

$$v_1 \to v_1 \qquad v_2 \to v_2 \qquad v_3 \to -v_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C \longleftarrow \underset{\{v_1, v_2, v_3\}}{B \shortparallel} \longleftarrow B \longleftarrow C$$

Per semplificare il calcolo dell'inversa potevamo usare una base ortonormale $\{w_1, w_2, w_3\}$ con $\mathrm{Span}\,(w_1, w_2) =$ piano dato

Come la posso costruire?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ GS a partire da v_1, v_2, v_3

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Costruisco un nuovo v_2 a partire da v_1 e v_3 mediante la formula misteriosa (oppure un nuovo v_1 a partire da v_2 e v_3)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5, -10, -5) \rightsquigarrow (1, -2, -1) \quad ☺$$

Basta dividere per le radici delle norme e abbiamo base ortonormale.

<u>Esempio 4 bis</u> Scrivere la simmetria rispetto al piano

$$x - 2y + 5z = 7$$ ← non passa per l'origine

Prendo P_0 nel piano, ad esempio $P_0 = (7,0,0)$
e procedo al solito modo

$(x,y,z) \rightsquigarrow (x-7, y, z) \rightsquigarrow A(x-7,y,z)$

↑ matrice dell'esempio 4

$\rightsquigarrow A(x-7,y,z) + (7,0,0)$

— o — o —