ANALISI 1 — LEZIONE 002

Note Title 23/09/2016

Operazioni tra proposizioni : IMPLICAZIONE

$\boxed{P \Rightarrow Q}$

se P è vera, allora Q è vera
se P è falsa, allora Q può fare quello che vuole

Q \ P	V	F
V	V	V
F	F	V

$\boxed{P \Leftrightarrow Q}$

P è V/F se e solo se Q è V/F

Q \ P	V	F
V	V	F
F	F	V

Esercizio Scrivere $P \Rightarrow Q$ usando solo $\wedge, \vee$, NOT

$P \Rightarrow Q$ $\boxed{\text{è sinonimo di}}$ $(\text{NOT}\,P) \vee Q$

↓ stessa tabella di verità

Negare $P \Rightarrow Q$

$$\text{NOT}\,(P \Rightarrow Q) = \text{NOT}\,[(\text{NOT}\,P) \vee Q]$$
$$= \text{NOT}\,(\text{NOT}\,P) \wedge \text{NOT}\,Q$$
$$= P \wedge \text{NOT}\,Q$$

L'implicazione $P \Rightarrow Q$ è falsa quando P è vera e Q è falsa

Esempi Tutte le x sono in $\mathbb{Z}$ $\quad [3>7 \Rightarrow 7>3 \quad V]$

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9 \quad$ V

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 4 \quad$ V

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 2 \Rightarrow x^3 \geq 6 \quad$ V

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 2 \iff x^3 \geq 6$ V

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 2 \iff x^3 \geq 6$ F Basta prendere $x = \sqrt[3]{7}$

Cosa da ricordare

- Se voglio dimostrare che $\forall x \in \ldots \; P(x) \Rightarrow Q(x)$ è VERA devo "fare una dimostrazione", non basta provare un po' di valori di x
- Se voglio dim. che $\forall x \in \ldots \; P(x) \Rightarrow Q(x)$ è FALSA basta che io trovi un $x \in \ldots$ tale che $P(x)$ è V e $Q(x)$ è F.

$$\text{NOT}\,(\forall x \in \ldots \; P(x) \Rightarrow Q(x)) = \exists\, x \in \ldots \text{ t.c. NOT } (P(x) \Rightarrow Q(x))$$
$$= \exists\, x \in \ldots \text{ t.c. } P(x) \wedge \text{NOT } Q(x).$$

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^2 \geq 9 \Rightarrow x \geq 3$ F prendo $x = -25$

— o — o —

$\boxed{\text{INSIEMI}}$ Def. di insieme: non la daremo... solo a livello intuitivo

Due modi di presentare un insieme

① per elenco $A = \{ 7, 5, a, □, ✿ \}$

nome insieme

Convenzioni: l'ordine non conta

elementi ripetuti contano 1 sola volta

$A = \{ a, □, 7, 5, □, 5, ✿ \}$

② per proprietà $B = \{ x \in \text{q.c.} : P(x) \}$

tale predicato

$= \{ x \in \text{esseri umani} : x \text{ è in questa stanza} \}$

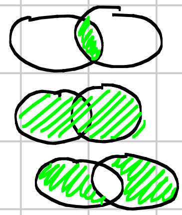
Oss. $A = \{ x \in \dots : P(x) \}$

$B = \{ x \in \dots : Q(x) \}$

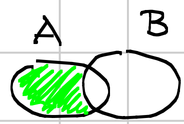
$\{ x \in \dots : P(x) \wedge Q(x) \} = A \cap B$

$\{ x \in \dots : P(x) \vee Q(x) \} = A \cup B$

$\{ x \in \dots : P(x) \text{ AUT } Q(x) \} = \underbrace{A \Delta B}_{\text{Diff. simm.}}$



$\{ x \in \dots : P(x) \wedge \text{NOT } Q(x) \} = A \setminus B$



$= \{ x \in \dots : \text{NOT } (P(x) \Rightarrow Q(x)) \}$

$\text{NOT } (\text{NOT } P(x) \vee Q(x))$

Esempio $C = \{ n^2 : n \in \mathbb{N} \}$ elenco

→ scrivi tutti i numeri naturali

→ fanne il $\square$

→ otterrai l'elenco di C

$C = \{ n^2 : n \in \mathbb{Z} \}$ sta sotto che i ripetuti contano 1 sola volta

$C = \{ n \in \mathbb{N} : \exists a \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = a^2 \}$ per proprietà

$\boxed{\{ n \in \mathbb{N} : \forall n = a^2 \}}$ Non vuol dire nulla.

— o — o —

INSIEME DELLE PARTI

Dato A insieme, si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

$$\mathcal{P}(A) = \{ B : B \subseteq A \}$$

$A = \{ 1, 7, \square, z \}$ $\quad 1 \in \mathcal{P}(A)$ F $\quad \{1\} \in \mathcal{P}(A)$ V

$1 \in A$ V $\quad 1 \notin \mathcal{P}(A)$

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, si definisce $A \times B$ l' insieme delle coppie ORDINATE (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$