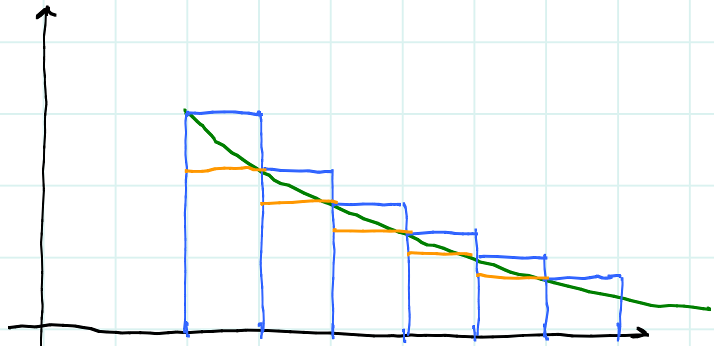
CONFRONTO SERIE-INTEGRALI Gli integrali aiutano le serie.

Setting: sia $M \geq 0$ un intero e sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente decrescente con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



La decrescenza è essenziale nella figura

$$\underbrace{\sum_{n=M+1}^{\infty} f(n)}_{\text{somma aree rettangoli sotto il grafico}} \leq \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \underbrace{\sum_{n=M}^{+\infty} f(n)}_{\text{somma aree rettangoli sopra il grafico}}$$

Sotto queste ipotesi

$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge se e solo se } \sum_{n=M}^{\infty} f(n) \text{ converge}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Se l'integrale diverge, allora diverge la serie per la disuguaglianza di destra.
Se l'integrale converge, allora idem la serie per la disug. di sx.
Le due serie a dx e sx differiscono solo di un termine quindi hanno lo stesso comportamento

— o —

Applicazione classica

$f(x) = \frac{1}{x^a}$ Questa è decrescente in $[1, +\infty)$ se $a > 0$. Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \text{ converge } \iff a > 1$$

si dimostra con la primitiva

Idem per

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \text{ converge } \iff \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx \text{ converge}$$

$$\iff a > 1$$

si fa con la primitiva

<u>Achtung</u>! È fondamentale che f sia decrescente

— o — o —

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Questa diverge, quindi

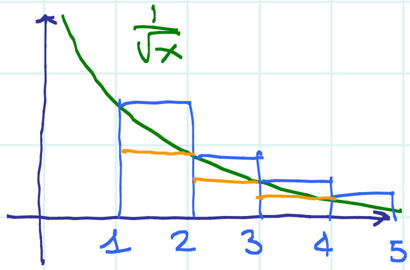
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ tende a } +\infty$$

Ma come tendono a $+\infty$? Quanto velocemente?

Brutal mode: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^n = 2\sqrt{n} - 2 \sim 2\sqrt{n}$

Questo ci fa sospettare che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = 2$

Come lo dimostro? Guardo la figura!



Quindi

$$\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

e quindi

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Così ho ottenuto disuguaglianza dall'alto. Dal basso

$$\int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \ge \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{e quindi}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \underset{\substack{\uparrow \\ 1^\circ \text{ termine}}}{1} + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Conclusione

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

I due termini laterali si calcolano esplicitamente e viene

$$2\sqrt{n+1} - 2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 1 + 2\sqrt{n} - 2$$

Ora basta dividere per $\sqrt{n}$ e passare al limite.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}_{a_n}$ (vedere lezioni di inizio limiti)

A suo tempo avremmo scritto

$$(n+1)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{termine più piccolo}}}{\frac{1}{2n}} \le a_n \le \underset{\substack{\uparrow \\ \#\text{ termini}}}{(n+1)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{più grande}}}{\frac{1}{n}}$$

Questo dice che $\lim a_n$, posto che esista, sta in $[\frac{1}{2}, 1]$, ma non permette di concludere

Brutal mode:
$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \sim \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_n^{2n}$$
$$= \log(2n) - \log n = \log 2$$

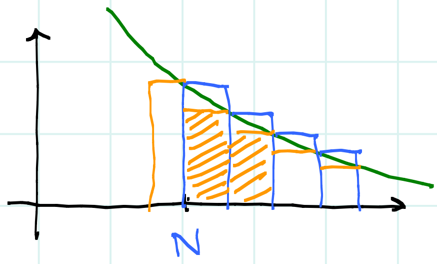
Per fare il rigoroso ottengo le disuguaglianze guardando il disegno.

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^4+2}$ Questa converge

Come posso trovare in modo approssimato il valore?
Sommo un po' di termini da $n=1$ fino ad un certo $n=N$.
Se mi fermo ad un certo N, l'errore commesso è

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+4}{n^4+2}}_{\text{termini trascurati}}$$

e voglio stimarlo dall'alto. Se la funzione è decrescente, posso provare con l'integrale



Guardando i rettangoli sotto
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$$

ovviamente se $f(x)$ è decrescente per $x \geq N$

Nel nostro caso
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n+4}{n^4+2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{x+4}{x^4+2}\,dx$$
$$\sim \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \sim \frac{1}{2N^2}$$

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ Calcolare ordine di infinitesimo e parte principale di

$$a_n = \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k^5}$$

Si vede subito che $a_n \to 0$ perché

$$0 \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^{10}}}_{\text{termine più grande}} \cdot n^3 \qquad 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^7}$$

i termini sono meno di n^3

Brutal mode: $a_n \sim \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{x^5}\,dx = \left[-\frac{1}{4}\frac{1}{x^4}\right]_{n^2}^{n^3}$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{n^{12}} + \frac{1}{4}\frac{1}{n^8} \sim \frac{1}{4}\frac{1}{n^8}$$

Quindi la parte principale è $\frac{1}{4n^8}$ nel senso che

$$\lim_{n\to+\infty} n^8 a_n = \frac{1}{4}$$

... dimostrarlo per bene con le disuguaglianze!

— o — o —