ANALISI 1 — LEZIONE 40

SERIE Sia a_n una successione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad = \text{somma degli infiniti termini della successione}$$

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Poniamo

$S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ... e più in generale

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

SOMMA PARZIALE

sommatoria = somma di un numero finito di termini (sono $n+1$ termini)

Si pone quindi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n}$$

Da buon limite, ci sono 4 possibilità:

1. $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$: si dice che la serie converge a ℓ
2. -3. $S_n \to +\infty$ opp. $S_n \to -\infty$: si dice che la serie diverge a $\pm\infty$
4. S_n non ha limite: si dice che la serie è indeterminata.

Esempi banali

1. $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo caso $S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $S_n \to 0$, quindi la serie converge a 0.

2. $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Adesso $S_n = (n+1)$, quindi $S_n \to +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

3. $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(+1-1+1-1+\dots)$. Allora $S_n = 1$ per n pari e $S_n = 0$ per n dispari, quindi S_n non ha limite, quindi la serie è indeterminata.

Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \text{indeterminata}$$

$\boxed{\text{Variante}}$ $\sum_{n=42}^{\infty} a_n$. In questo caso poniamo

$$S_{42} = a_{42}, \qquad S_{43} = a_{42} + a_{43} \qquad S_{44} = a_{42} + a_{43} + a_{44}, \dots$$

e ancora una volta poniamo $\displaystyle\sum_{n=42}^{\infty} a_n = \lim_{m\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=42}^{m} a_k}_{\text{nuovo } S_m \text{, definito per } m \geq 42.}$

Semplici proprietà algebriche

$\boxed{1}$ Somma Se a_n e b_n sono due successioni, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \text{(mega proprietà associativa)}$$

con tutte le cautele tipiche del limite della somma (in particolare il caso $+\infty - \infty$)

$\boxed{2}$ Prodotto per una costante Se a_n è una successione e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{(mega proprietà distributiva)}$$

(con tutte le cautele dei prodotti in $\overline{\mathbb{R}}$)

Achtung! Non è vero che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \overset{\text{NO}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Non vale nemmeno che $a_0 b_0 + a_1 b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$

Due tipi speciali di serie : → serie telescopiche

→ serie geometriche

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$

↑ per $n=0$ e $n=1$ il denominatore si annulla

Esperimento : $S_2 = a_2 = \frac{1}{2}$, $S_3 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$$S_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Sembra ragionevole che $S_n = \frac{n-1}{n}$

Provo per induzione : passo base $n=2$ già fatto.

Passo induttivo :

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ipotesi}}}{=} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n^2+n}$$

$$= \frac{n^2 \cancel{-1} \cancel{+1}}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Conclusione : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

Spiegazione alternativa : osservo che $a_n = \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)}$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Quindi

$$S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{5}\right) + \dots$$

Ognuno si semplifica con il successivo, tranne l'1 iniziale.

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

Osservo che $a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$

Quindi $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$

$= (\cancel{\log 2} - \underbrace{\log 1}_{=0}) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\log 4 - \cancel{\log 3}) + \ldots + (\log(n+1) - \log n)$

$= \log(n+1)$ (formalmente si dimostra per induzione)

Conclusione: $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\log(n+1)}_{S_n} = +\infty$

Serie telescopica: quando accade questo "effetto cancellazione".

$\boxed{\text{SERIE GEOMETRICHE}}$ Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \text{somma di tutte le potenze di } a$$
$$= 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$$

In questo caso $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \underbrace{\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}_{\text{almeno nel caso in cui } a \neq 1}$ (dimostrato a suo tempo per induzione)

Adesso basta fare il limite di S_n, il quale dipende da a

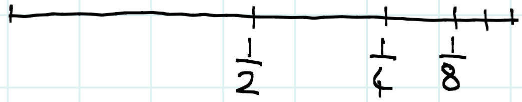
- Se $a > 1 \rightsquigarrow S_n \to +\infty$
- Se $a \in (-1, 1) \rightsquigarrow S_n \to \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$
- Se $a < -1 \rightsquigarrow S_n$ non ha limite ($\pm\infty$ a seconda che n pari o dispari)
- Se $a = -1 \rightsquigarrow S_n$ non ha limite ugualmente (è il caso $(-1)^n$)

- Se $a = 1 \rightsquigarrow S_n = n+1 \to +\infty$ (è il caso $a_n = 1$ trattato all'inizio).

Conclusione

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1,1) \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Discorso di ZENONE}}$



La freccia deve fare ∞ cose, quindi NON arriva mai

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)}_{\substack{\text{serie geometrica} \\ \text{con } a = \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

— o — o —