FORME CANONICHE Introduzione motivazionale

Esempio $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ → Calcolare A^{2023}

→ Trovare matrice B t.c. $B^{100} = A$.

Serve un'idea. Supponiamo che esista una matrice 2×2 M tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Facendo le successive potenze

$$M^{-1}A\underbrace{M \cdot M^{-1}}_{Id}AM = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= M^{-1}A^2M$$

Moltiplico nuovamente

$$M^{-1}A\underbrace{M \cdot M^{-1}}A\underbrace{M \cdot M^{-1}}AM = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}A^3M$$

Allo stesso modo $M^{-1}A^{2023}M = \begin{pmatrix} 5^{2023} & 0 \\ 0 & 2^{2023} \end{pmatrix}$

e da qui è immediato calcolare A^{2023} se conosco M.

Oss. Il passaggio da A a $M^{-1}AM$ è un cambio di base in partenza ed arrivo (stessa base in partenza ed arrivo).

<u>Domanda</u>: data $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ esiste una base in cui la relativa applicazione lineare ha come matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Indichiamo con $\{v_1, v_2\}$ questa base. Deve succedere che

$f(v_1) = 5v_1$

$f(v_2) = 2v_2$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} & \end{array}$$

Cerco v_1 e v_2 bovinamente.

$v_1 = (a,b)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 5b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4a+2b = 5a \\ a+3b = 5b \end{cases} \qquad \begin{cases} -a+2b=0 \\ a-2b=0 \end{cases}$$

$\underset{\substack{\uparrow \\ v_1}}{(a,b)} = (2,1)$ e multipli

$v_2 = (c,d)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2d \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4c+2d = 2c \\ c+3d = 2d \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

$\underset{\substack{\uparrow \\ v_2}}{(c,d)} = (1,-1)$ e multipli

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ← Dalla strana alla canonica

$M^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ora sappiamo rispondere alle domande $M^{-1}AM = \underset{\text{diagonale}}{D}$

Quindi $M^{-1}A^{2023}M = D^{2023} \rightsquigarrow A^{2023} = MD^{2023}M^{-1}$

Cercavo anche B t.c. $B^{100} = A$ [Brutalmente $B = \sqrt[100]{A}$]

Succederà che $M^{-1} B M = \sqrt[100]{D} = \begin{pmatrix} \sqrt[100]{5} & 0 \\ 0 & \sqrt[100]{2} \end{pmatrix}$

e quindi $B = M \begin{pmatrix} \sqrt[100]{5} & 0 \\ 0 & \sqrt[100]{2} \end{pmatrix} M^{-1}$

A questo punto basta verificare che $B^{100} = A$

— o — o —

Slogan: le matrici diagonali, o in generale quelle piene di zeri, sono comode. Quindi è importante trovare un cambio di base in cui diventano così.

Il cambio di base deve essere lo stesso in partenza ed arrivo

— o — o —

<u>Def</u>. Sia A una matrice $n \times n$.

- Un numero λ si dice AUTOVALORE di A se esiste un vettore $\boxed{v \neq 0}$ t.c. $\boxed{Av = \lambda v}$
- Un vettore $v \neq 0$ si dice AUTOVETTORE di A se esiste λ numero t.c. $Av = \lambda v$
- Dato un autovalore λ, si dice AUTOSPAZIO di λ l'insieme di tutti i vettori v, compreso lo 0, t.c. $Av = \lambda v$

<u>Oss</u>. Le stesse definizioni le posso dare per una applicazione lineare $f : V \to V$ (stesso spazio in partenza ed arrivo)

Nell'esempio precedente:

→ 5 era autovalore, $v_1 = (2,1)$ era un autovettore relativo a $\lambda = 5$, e l'autospazio di 5 era Span (v_1)

→ 2 era autovalore, con autovettore $v_2 = (1,-1)$ e autospazio Span (v_2).

Morale: → gli autovalori sono quelli che finiscono sulla diagonale

→ gli autovettori li uso come colonne della M.

<u>Come trovo gli autovalori</u> ?

Deve succedere che $Av = \lambda v$ ha una soluzione $v \neq 0$, cioè $Av - \lambda v = 0$, cioè $(A - \lambda Id)v = 0$ ha una sol. $v \neq 0$, cioè $v \in \ker(A - \lambda Id)$ il che è possibile se e solo se

$$\boxed{\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0}$$

Tornando all'esempio $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

cioè

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0 \qquad \lambda = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$:)

<u>Oss.</u> Le radici non sono necessariamente numeri reali. Possono essere numeri complessi e possono avere molteplicità (radici doppie, triple, ...)

<u>Def.</u> Il $\operatorname{Det}(A - \lambda Id)$ è un polinomio in λ di grado n se A è una matrice $n \times n$.

Si chiama $\boxed{\text{polinomio caratteristico}}$

<u>Def.</u> Due matrici $n \times n$, chiamiamole A e B, sono $\boxed{\text{SIMILI}}$ se esiste M invertibile t.c. $B = M^{-1}AM$.

[Moralmente : stessa applicazione in basi diverse]

Teoria delle forme canoniche:

Data una matrice A, trovare una matrice B che sia simile ad A e il più semplice possibile

Le possibilità sono

→ diagonalizzare sui reali o sui complessi
→ diagonalizzazione di LUSSO: diagonalizzare con matrice M ortogonale (quindi inversa comodissima)
→ JORDAN reale o complesso (solo roba sulla diagonale e qualche 1 immediatamente sopra o sotto)

Teorema misterioso Sia $p(x)$ un polinomio di grado n a coeff. complessi (se sono reali ancora meglio) MONICO (il coeff. di x^n è 1)

Allora $p(x)$ si scrive come

$$p(x) = (x-\lambda_1)\cdot(x-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le radici di $p(x)$ (eventualmente complesse ed eventualmente ripetute).

— o — o —