ANALISI 1 — LEZIONE 117

Note Title 17/05/2025

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ $\quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \qquad a_1 = \frac{1}{1000}$

① Determinare il limite della successione

$\boxed{\text{LIMITATEZZA + CARABINIERI}}$ $\quad$ (i) $\frac{1}{1000} \le a_n \le 1000 \quad \forall n \ge 1$

(ii) $a_n \to 1$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $\quad a_n \ge \frac{1}{1000}$ per induzione

$\boxed{\text{Passo base}}$ $n=1$ ovvio $\qquad \boxed{\text{Passo induttivo}}$ Ipotesi $a_n \ge \frac{1}{1000}$

Tesi $a_{n+1} \ge \frac{1}{1000}$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \ \underset{\substack{\uparrow\\ \sqrt[n]{\ } \text{ è} \\ \text{crescente + ipotesi}}}{\ge} \ \sqrt[n]{\frac{1}{1000}} + \frac{1}{n} \ \underset{\substack{\uparrow\\ \sqrt[n]{x} \ge x \text{ per } x \in [0,1]}}{\ge} \ \frac{1}{1000} + \frac{1}{n} \ge \frac{1}{1000}$$

$a_n \le 1000 \quad \forall n \ge 1 \qquad$ Passo base $n=1 \rightsquigarrow$ ovvio

Passo induttivo

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \le \sqrt[n]{1000} + \frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vale solo} \\ \text{se } n \ge 2}}{\le} \sqrt{1000} + \frac{1}{n} \le 50 + 1 \le 1000$$

Quindi come passo base devo fare $n=1$ e ANCHE $n=2$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\quad$ Dal p.to (i) e dalla monotonia di $\sqrt[\ ]{\ }$ segue che

$$\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{1000}} + \frac{1}{n}}}_{\downarrow \ 1} \le \underbrace{a_{n+1}}_{\downarrow \ 1} \le \underbrace{\boxed{\sqrt[n]{1000} + \frac{1}{n}}}_{\downarrow \ 1}$$

$\boxed{\text{Esercizio 1 bis}}$ $\quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \qquad a_{1000} = \frac{1}{1000}$

Come prima si dimostra che $a_n \to 1$.

Voglio dimostrare che $a_n \to 1^+$ e che a_n è definitiv. decresc.

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Prima o poi a_n supera 1, cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_{n_0} > 1$$

Se così non fosse, sarebbe che $a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1000$. Ma allora

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \geq a_n + \frac{1}{n}$$

$\sqrt[n]{x} \geq x$ se $x \in [0,1]$

Quindi $a_{1001} \geq a_{1000} + \frac{1}{1000}$

$$a_{1002} \geq a_{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001}$$

$$a_{1003} \geq a_{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002}$$

... quindi per induzione potrei dimostrare che

$$a_{1000+k} \geq a_{1000} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1000+i}}_{\text{diverge quando } k \to +\infty}$$

e quindi vorrebbe dire che $a_n \to +\infty$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Esiste $n_0 \geq 1000$ t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$

Infatti sappiamo che a_n supera 1, e se continuasse a crescere, il limite sarebbe > 1.

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Se $a_{n_0} \geq 1$, allora per sempre $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq n_0$

... induzione ... $a_{n+1} = \underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{\substack{\geq 1 \text{ se} \\ a_n \geq 1}} + \frac{1}{n} \geq 1$

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Se $1 \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$, allora $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0$

(se decresce una volta sopra 1, allora decresce per sempre)

Anche qui induzione

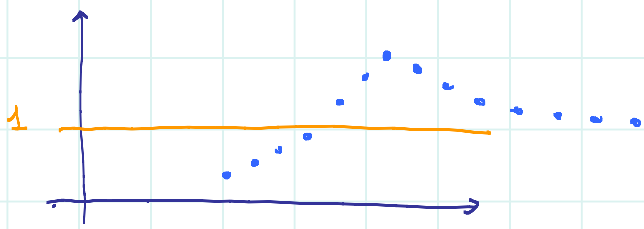
$\boxed{\text{Passo base}}$ $n = n_0$ $\rightsquigarrow$ esattamente l'ipotesi

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ Ipotesi : $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$

Tesi : $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$a_{n+2} = \sqrt[n+1]{a_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \underset{\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}}{\leq} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} + \frac{1}{n} \underset{\substack{a_{n+1} \leq a_n \\ + \text{monotonia di } \sqrt[n]{}}}{\leq} \sqrt[n+1]{a_n} + \frac{1}{n}$$

$$\underset{\substack{\text{vero se} \\ a_n \geq 1}}{\leq} \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$



$\boxed{\text{Esempio 2}}$

3. Consideriamo la successione per ricorrenza definita da (occhio alla differenza tra x_{n+1} e $x_n + 1$)

$$x_{n+1} = \int_{x_n}^{x_n+1} e^{-t^2}\, dt, \qquad x_0 = \alpha.$$

Dimostrare che la successione tende ad un limite reale indipendente da α.

Iniziamo con $\alpha = 2025$

Prima cosa: studiamo la funzione

$$f(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2}\,dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

Definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, senza particolari simmetrie, sempre positiva perché stiamo integrando su un intervallo con gli estremi nell'ordine corretto una funzione > 0.

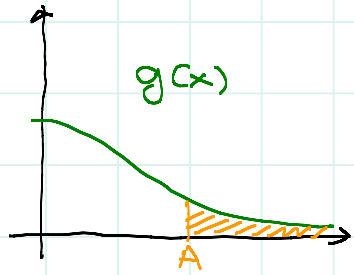
Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Questa è una conseguenza della convergenza dell'integrale improprio gaussiano.

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ Se $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora

[la coda tende a 0, cioè] $\lim_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} g(x)\,dx = 0$



Nel nostro caso vale

$$f(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2}\,dt \le \underbrace{\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt}_{\text{coda di integrale convergente}}$$

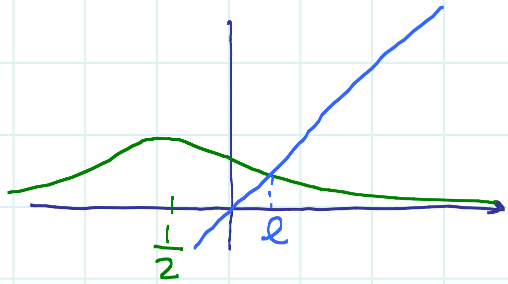
$\boxed{\text{Monotonia di } f(x)}$ $f'(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) \ge 0 \iff e^{-(x+1)^2} \ge e^{-x^2} \iff -(x+1)^2 \ge -x^2$$

$$\iff (x+1)^2 \le x^2 \iff x^2+2x+1 \le x^2 \iff 2x+1 \le 0$$

$$\iff x \le -\frac{1}{2}$$

Quindi l'idea è che l'equazione $f(x) = x$ abbia una sola soluzione reale ℓ e $x_n \to \ell$ spiraleggiando



Si può dimostrare $\to$ con le due sottosuccessioni
$\to$ con la distanza

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

Poi spero che $\sup\{|f'(x)| : x \geq 0\}$ = costante di Lip < 1

Per questo basta studiare $|f'(x)| = \underbrace{e^{-x^2}}_{\leq 1} - e^{-(x+1)^2}$
e vedere che ha max < 1

(non è difficile, ma non ovvio)

— o — o —