## Studio della convergenza delle serie

**Obiettivo**: data una succ. $a_n$, stabilire se la relativa serie è di tipo ①, ②, ③, ④ senza avere un'espressione esplicita per $S_n$. Non ci interessa nel caso ① il valore esplicito della somma.

## Strumenti

- Condizione necessaria
- Criteri di convergenza:

$\boxed{a_n \geq 0 \text{ sempre}}$

→ crit. radice
→ crit. rapporto
→ crit. confronto
→ crit. confr. asintotico
  * caso standard
  * casi limite

→ confronto serie - integrali
→ crit. di condensazione di CAUCHY

$\boxed{a_n \text{ a segno variabile}}$

→ crit. LEIBNITZ
→ crit. assoluta convergenza

→ crit. DIRICHLET

— o — o —

## CONDIZIONE NECESSARIA

> Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (tipo ①), allora $a_n \to 0$

Achtung! Non vale il viceversa, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n} = +\infty \quad , \text{ma} \quad \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$$

Utilizzo operativo della cond. nec.: devo studiare $\sum a_n$, provo a fare il lim. di $a_n$.

→ Se $a_n \to 0$, allora la serie può convergere, ma non è detta, quindi BOH

→ Se $a_n \not\to 0$ (cioè tende ad altro o non ha limite), allora posso escludere il comp. ①, ma restano gli altri tre.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Osservo che $\quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad$ (fondamentale)

Se la serie converge, allora $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$, quindi

$$a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow \ell - \ell = 0.$$

— o — o —

$\boxed{\text{Serie a termini } a_n \geq 0}$

↑almeno definitivamente

Oss. Se sono $a_n \leq 0$, basta mettere il $-$ davanti alla serie.

Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $S_n$ è debolm. crescente, quindi i comportamenti possibili sono solo 2

→ convergere

→ divergere a $+\infty$.

Esempio $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3n+5}{6n^2+7}}_{a_n}$

Trovare una formula esplicita per $S_n$ è impraticabile. Tuttavia osservo che $a_n \geq 0$ sempre e $a_n \to \frac{1}{6}$, quindi no cond. nec., quindi non può convergere, quindi può solo divergere a $+\infty$.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio del confronto}}$ Siano $a_n$ e $b_n$ due succ. tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{almeno definitiv.}$$

Allora valgono le seguenti implicazioni:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

Ogni altra implicazione è abusiva.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Siano $S_n^a$ e $S_n^b$ le due somme parziali

$$S_n^a := a_0 + a_1 + \ldots + a_n \qquad\qquad S_n^b := b_0 + b_1 + \ldots + b_n.$$

Possiamo anche supporre che la relazione dell'ipotesi valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora con una facile induzione segue che

$$S_n^a \leq S_n^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $\sum a_n = +\infty \underset{\text{def}}{\implies} S_n^a \to +\infty \underset{\text{confronto fra limiti}}{\implies} S_n^b \to +\infty \underset{\text{def.}}{\implies} \sum b_n = +\infty$

- $\sum b_n$ conv. $\implies S_n^b \to \ell \in \mathbb{R} \implies S_n^a$ non può tendere a $+\infty$, ma noi già sappiamo che $S_n^a$ ha limite in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, quindi l'unica possibilità è che $S_n^a \to l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_2 \leq l$, quindi $\sum a_n$ converge.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio della radice}}$ Sia $a_n \geq 0$ definitiv.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora

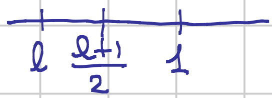
- $l > 1$, allora $\sum a_n = +\infty$ e anzi non verifica la cond. nec.
- $l < 1$, allora $\sum a_n$ converge
- $l = 1$, allora BOH.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\boxed{l > 1}$ In questo caso $a_n \to +\infty$, quindi niente cond. nec., quindi addio convergenza

$\boxed{l < 1}$ Ora $a_n \to 0$, quindi ok cond. nec., ma questo NON BASTA!!!

Supponiamo $l < 1$. Allora

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \quad \text{definitiv.}$$




quindi $$a_n \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

Ora $\sum b_n$ è una serie geometrica con $a = \frac{l+1}{2} \in (0,1)$, quindi $\sum b_n$ converge, quindi per confronto anche $\sum a_n$ converge

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio del rapporto}}$ Supponiamo $a_n > 0$ definitiv.

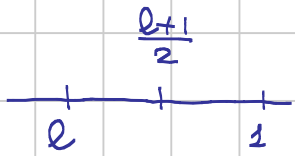
Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora... come nel criterio della radice.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty \Rightarrow$ no cond. nec.

Se $\ell < 1$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.




$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora... [ vedi dim. crit. rapp. per succ.]

$$a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \qquad \text{(facile induzione)}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n}}_{b_n} \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}}_{\lambda \text{ fisso}}$$

Come prima $\sum b_n$ converge perché geometrica con $a \in (0,1)$

$\Rightarrow \sum \lambda b_n$ converge (prod. per una costante)

$\Rightarrow \sum a_n$ converge (confronto a 2)

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n}}_{a_n}$ $\quad a_n \geq 0$ sempre

Criterio della radice : $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{2^n+4^n}{3^n+5^n}} = \dots = \dfrac{4}{5}$

$\frac{4}{5} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 2 $\sum_{n\geq1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}$ $a_n \geq 0$

Criterio radice: $\sqrt[n]{a_n} = 1-\frac{1}{n} \to 1$ ... BOH ☹

Però $a_n \to \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow$ no cond. nec. $\Rightarrow$ no conv. $\Rightarrow$ div. a $+\infty$

Esempio 3 $\sum_{n\geq1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ $a_n \geq 0$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \to 0$

rapporto $\to 0 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 4 $\sum_{n\geq0}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{3^n}\right)$

Oss. È a termini definitivamente positivi perché $\frac{n^2}{3^n} \to 0^+$ quindi defin. sta in $(0,\pi)$ dove $\sin > 0$.

$$0 \leq \underbrace{\sin\left(\frac{n^2}{3^n}\right)}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{b_n}$$

Ora $\sum b_n$ converge (radice o rapporto tendono ad $\frac{1}{3}$)

quindi $\sum a_n$ converge per confronto.