ANALISI 1 — LEZIONE 082

Note Title 08/03/2017

Esempio 1 $\dot{u} = 7u + \frac{t^3}{t^2+3}$ $u(0) = \alpha$

Domanda: studiare al variare di α il comportamento della soluz. per $t \to +\infty$.

$\dot{u} - 7u = \frac{t^2}{t^2+3}$ $a(t) = -7$ $b(t) = \frac{t^3}{t^2+3}$ $A(t) = -7t$

Formula per la soluzione

$$u(t) = \underset{\uparrow \atop e^{-A(t)}}{e^{7t}} \left\{ c + \int_0^t \underset{e^{A(s)}\, b(s)\, ds}{e^{-7s} \frac{s^2}{s^2+3} ds} \right\}$$

Calcolo c: $\alpha = u(0) = c$

Come si comporta $u(t)$ per $t \to +\infty$

$$\int_0^t e^{-7s} \frac{s^2}{s^2+3} ds \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-7s} \underbrace{\frac{s^2}{s^2+3}}_{\le e^{-7s}} ds$$

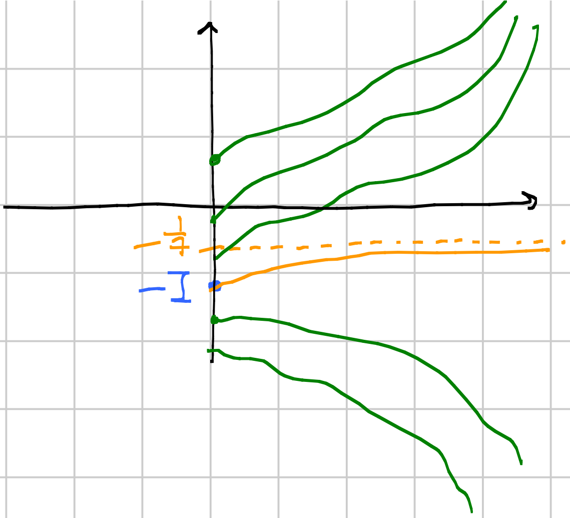
(integrale impr. convergente)

Il limite dipende da c, quindi da α: detto I il valore dell'int. improprio:

→ se $\alpha + I > 0$, cioè se $\alpha > -I$, allora $u(t) \to +\infty$
→ se $\alpha + I < 0$, " " $\alpha < -I$, allora $u(t) \to -\infty$
→ se $\alpha = -I$, allora abbiamo una forma indet.

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{c + \int_0^t \ldots}{e^{-7t}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\cancel{e^{-7t}} \frac{t^2}{t^2+3}}{-7\cancel{e^{-7t}}} = -\frac{1}{7}$$

Fatto generale : $\dot{u} = 7u + f(t)$



Se $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$, allora

c'è un effetto soglia simile, cioè

- $\alpha > -I$, $u(t) \to +\infty$
- $\alpha < -I$, $u(t) \to -\infty$
- $\alpha = -I$, $u(t) \to \frac{\ell}{7}$ dove $I = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-7s} f(s)\, ds}_{}$

converge per confr. asintotico con e^{-7s}

Esercizio 2 $\dot{u} = 7u + f(t)$ Supponiamo $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione **limitata**.

Allora l'eq. ammette un' unica soluzione limitata in $[0, +\infty)$

$$u(t) = \underbrace{e^{7t}}_{\downarrow \atop +\infty} \left\{ c + \int_0^t e^{-7s} f(s)\, ds \right\}$$

L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-7s} f(s)\, ds$ converge assolutamente

$$|e^{-7s} f(s)| = e^{-7s} \underbrace{|f(s)|}_{\leq M}$$

Detto I il valore dell'integrale improprio avremo che

- per $c + I > 0$ $u(t) \to +\infty$
- per $c + I < 0$ $u(t) \to -\infty$
- per $c + I = 0$, la cosa è delicata e possiamo riscrivere la formula come

$$u(t) = e^{7t} \left\{ -\int_0^{+\infty} e^{-7s} f(s)\, ds + \int_0^t e^{-7s} f(s)\, ds \right\}$$

$$= -e^{7t} \underbrace{\int_t^{+\infty} e^{-7s} f(s)\, ds}_{}$$ ↗ primitiva che si annulla all' infinito

Da qui concludo

$$|u(t)| = e^{+7t} \left| \int_t^{+\infty} e^{-7s} f(s)\, ds \right|$$

$$\leq e^{+7t} \int_t^{+\infty} e^{-7s} \underset{\leq M}{|f(s)|}\, ds$$

$$\leq M e^{+7t} \int_t^{+\infty} e^{-7s}\, ds$$

$$= M e^{+7t} \left[-\frac{1}{7} e^{-7s} \right]_t^{+\infty} = M e^{+7t} \cdot \frac{1}{7} e^{-7t} = \frac{M}{7}$$

un po' rapido

Esercizio 3 $\dot{u} = -7u + f(t)$ Se $f(t)$ è limitata come prima, allora tutte le soluz. sono limitate in $[0, +\infty)$

$$u(t) = e^{-7t} \left\{ c + \int_0^t e^{7s} f(s)\, ds \right\}$$

$$= \underbrace{c e^{-7t}}_{\text{limitato facile}} + e^{-7t} \int_0^t e^{7s} f(s)\, ds$$

$$\left| e^{-7t} \int_0^t e^{7s} f(s)\, ds \right| \leq e^{-7t} \int_0^t e^{7s} \underbrace{|f(s)|}_{\leq M} ds$$

$$\leq e^{-7t} \cdot M \int_0^t e^{7s}\, ds$$

$$= M e^{-7t} \left[\frac{1}{7} e^{7s} \right]_0^t$$

$$= \frac{M}{7} e^{-7t} \left(e^{7t} - 1 \right)$$

$$= \frac{M}{7} - \frac{M}{7} e^{-7t} \rightsquigarrow \text{limitato.}$$

Esercizio 4 $\quad \ddot{u} + 8u = \sin(\alpha t)$

Domanda: è vero che tutte le soluz. sono limitate?

Allenamento: caso senza termine forzante $\quad \ddot{u} + 8u = 0$

$x^2+8=0$, $\quad x = \pm\sqrt{8}\,i = \pm 2\sqrt{2}\,i$

$$u(t) = a\cos(2\sqrt{2}t) + b\sin(2\sqrt{2}t)$$

⤳ $u(t)$ è limitata e oscilla periodicamente

Oss. La soluz. si può riscrivere come $\boxed{u(t) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ampiezza}}}{A}\sin(2\sqrt{2}t + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fase}}}{\varphi})}$

$$u(t) = \sqrt{a^2+b^2}\underbrace{\left(\underset{\substack{\shortparallel\\ \sin\varphi}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos(2\sqrt{2}t) + \underset{\substack{\shortparallel\\ \cos\varphi}}{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sin(2\sqrt{2}t)\right)}_{\sin(2\sqrt{2}t+\varphi)}$$

Se l'eq. è non omogenea, le soluz. saranno del tipo

$$u(t) = \underset{\uparrow}{a}\cos(2\sqrt{2}t) + \underset{\uparrow}{b}\sin(2\sqrt{2}t) + \underset{\uparrow}{\lambda}\cos(\alpha t) + \underset{\uparrow}{\mu}\sin(\alpha t)$$

liberi $\qquad$ si determinano esplicitamente

$\Rightarrow$ la soluz. rimane limitata TRANNE nel caso in cui $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$.

In questo caso la formula è diversa perché c'è il t, quindi

$$u(t) = a\cos(2\sqrt{2}t) + b\sin(2\sqrt{2}t) + \underbrace{\lambda t\cos(2\sqrt{2}t) + \mu t\sin(2\sqrt{2}t)}_{\substack{\text{almeno uno dei 2 ha coeff.}\\ \neq 0\text{, quindi la sol. è}\\ \text{NON limitata}}}$$

EFFETTO RISONANZA Quando il termine non omogeneo oscilla con la stessa frequenza delle soluzioni dell'eq. omogenea.
Questo produce soluzioni non limitate anche con termini limitati.

(vedi TAKOMA BRIDGE).