ANALISI 1 - LEZIONE 021

Note Title 17/10/2016

Sottosuccessioni Sia a_n una succ. di numeri reali

Def. Si dice che b_k è una s.succ. di a_n se esiste una successione $\{n_k\}$ di interi ≥ 0, $\boxed{\text{strettamente crescente}}$, tale che
$$b_k = a_{n_k}$$

Def. (più generale, che non useremo mai) Come sopra, ma si chiede solo che $\boxed{n_k \to +\infty}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ b_0 & b_1 & & b_2 & & b_3 & b_4 & & & b_5 & \\ n_0=0 & n_1=1 & & n_2=3 & & n_3=5 & & & & n_5=9 & \end{array}$$

Esempi classici

a_{2k} = soli indici pari = $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$

a_{2k+1} = " " dispari = a_1, a_3, a_5, a_7

a_{k^2} = soli indici $\square$ = $a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$

Teorema Sia a_n una succ., e sia b_k una sua sottosuccessione.
Supponiamo che $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
Allora $b_k \to \ell$ (stesso ℓ)

Dim. Quello che a_n verifica $\forall n \geq n_0$, allora b_k lo verifica per ogni $k \geq n_0$.
Basta osservare che $n_k \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ se facciamo il prelievo in maniera strett. cresc.
Quindi
$$n_k \geq n_0 \qquad \forall n \geq n_0.$$

— o — o —

Achtung! Se a_n non ha limite (tipo ④), allora NON è detto che le s.succ. non abbiano limite.
Esempio classico

$$a_n = (-1)^n \text{ NON ha lim., ma } \quad a_{2n} \equiv 1 \to 1, \quad a_{2n+1} \equiv -1 \to -1.$$

Corollario Sia a_n una succ. Supponiamo che esistano 2 s.succ. b_k e c_k t.c.

$$b_k \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad c_k \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{con } l_1 \neq l_2.$$

Allora a_n non ha limite.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se per assurdo $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, ma allora anche b_k e c_k tenderebbero ad l. □

Come dimostro che una succ. a_n non ha limite?
→ basta trovare due s.succ. con limiti diversi.

Esempio 1 $\quad n^2 + (-1)^n n^3 = a_n$

$$a_{2n} = (2n)^2 + (2n)^3 \to +\infty$$
$$a_{2n+1} = (2n+1)^2 - (2n+1)^3 = \text{conti} = \to -\infty$$

Esempio 2 $\quad n^3 + (-1)^n n^2 = a_n \to +\infty$

1° modo $\quad \underset{\downarrow \atop +\infty}{a_n} \geq \underset{\downarrow \atop +\infty}{n^3 - n^2}$ (vera per ogni $n \in \mathbb{N}$)

2° modo $\quad \underset{\downarrow \atop +\infty}{\boxed{n^3}} \left(1 + \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{(-1)^n}{n}}}\right)$ $\qquad -1 \leq (-1)^n \leq 1$ divido per n

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{-\frac{1}{n}}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{(-1)^n}{n}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{1}{n}}}$$

Esempio 3 $\quad \left(3+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)^n \longrightarrow +\infty$

$$\left(3+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)^n \geq \underbrace{2^n}_{+\infty}$$

Esempio 4 $\quad \left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)^n$ NON ESISTE

Cerco 2 s.succ. con comp. diverso.

$$a_{2n} = \left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right)\right)^{2n} = 2^{2n} \longrightarrow +\infty$$

$$a_{4n+3} = \left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+3)\right)\right)^{4n+3}$$

$$= \left(2+\underbrace{\sin\left(2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1}\right)^{4n+3} = 1 \longrightarrow 1$$

scelto in maniera tale che $\sin = -1$.

Strumento per mostrare che un limite di funzioni non esiste.

Supponiamo di dover calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)$, con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Supponiamo che esistano 2 successioni a_n e b_n tali che

(i) $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$

(ii) $f(a_n) \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(b_n) \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l_1 \neq l_2$.

Allora il limite di funzione non esiste

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se il limite fosse $l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per il criterio funzioni $\to$ succ. dovrebbe essere che $\underbrace{f(a_n)}_{x=a_n} \to l$ e $\underbrace{f(b_n)}_{x=b_n} \to l$.

Esempio 1 $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ NON ESISTE

Devo trovare $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ tali che $\sin(a_n) \to l_1$ e $\sin(b_n) \to l_2$, con $l_1 \neq l_2$

$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ e $\sin a_n \equiv 1 \to 1$

$b_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ e $\sin b_n \to -1$.

Esempio 2 $\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\boxed{\cos \frac{1}{x^2}}}_{f(x)}$ NON ESISTE

Devo trovare $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$ tali che $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno 2 limiti diversi

Cerchiamo di avere $\cos = 1$: $\frac{1}{x^2} = 2n\pi$ $\quad x = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$

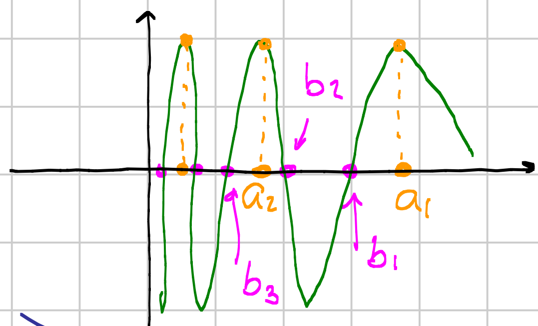
$\cos = 0$: $\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\quad x = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}}$

$a_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$ e abbiamo che $f(a_n) \equiv 1 \to 1$

$b_n = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}}$ " " " $f(b_n) \equiv 0 \to 0$.

Osservo inoltre che $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$

Esempio 3



$\lim_{x \to +\infty} (\sin(\log x) + 1)\, x$ NON esiste

$\sin = 0 \iff \log x = n\pi \quad x = e^{n\pi}$

$a_n = e^{n\pi} \to +\infty$ e $f(a_n) = a_n \to +\infty$

$\sin = -1 \iff \log x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \qquad x = e^{\cdots}$

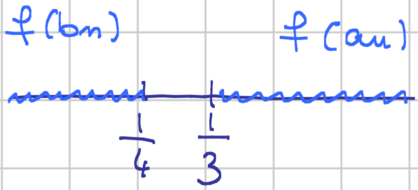
$$b_n = e^{\frac{3\pi}{2}+2n\pi} \longrightarrow +\infty \quad e \quad f(b_n) \equiv 0 \qquad \ell_1 \neq \ell_1$$

Esempio 4

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \sin(\log x)}{5 + \sin x}$$

Prendo a_n e b_n come sopra, così tendono a $+\infty$

$$f(a_n) = \frac{2}{5+\sin a_n} \geq \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



$$f(b_n) = \frac{1}{5+\sin b_n} \leq \frac{1}{4}$$

Quindi il limite non può esistere (dovrebbe essere contemporaneamente $\ell \geq \frac{1}{3}$ e $\ell \leq \frac{1}{4}$, e non è possibile.