Giustificazione alcuni sviluppi delle funzioni elementari

Formula generale $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Quindi basta calcolare le derivate successive

$\boxed{\text{Oss.}}$ Il polinomio $P_{n+1}(x)$ si ottiene dal $P_n(x)$ semplicemente aggiungendo il termine con x^{n+1}.

$\boxed{f(x) = e^x}$ $f^{(k)}(x) = e^x \rightsquigarrow f^{(k)}(0) = 1$. Quindi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

$\boxed{f(x) = \sin x}$

$$f(x) = \sin x = f^{(4)}(x) = \dots = f^{(2024)}(x)$$
$$f'(x) = \cos x = f^{(5)}(x)$$
$$f''(x) = -\sin x \quad \vdots$$
$$f'''(x) = -\cos x$$

Quando sostituisco $x=0$ trovo $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

pari

Quindi solo termini dispari, presi a segno alterno, con il fattoriale sotto.

$\boxed{f(x) = \cos x}$ Stessa cosa shiftata di 1, quindi quando sostituisco $x=0$ trovo

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

dispari

$\boxed{f(x) = \log(1+x)}$ Cerchiamo di capire le derivate

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -6 \frac{1}{(1+x)^4} \qquad f^{(5)}(x) = 24 \frac{1}{(1+x)^5}$$

<u>Congettura</u> $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$

Questa si dimostra per induzione

$\boxed{k=1}$ $f'(x) = (-1)^0 \, 0! \frac{1}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x}$:)

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$ Ipotesi: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$

Derivo: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! \, (-k) \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$

$= (-1)^k k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$ che è proprio la tesi

Sostituendo $x=0$ troviamo $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)! \quad \forall k \geq 1$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)=0}}{=} \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(-1)^{k-1}}_{\substack{-1 \text{ sui pari} \\ 1 \text{ sui dispari}}} \frac{1}{k} x^k$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

— o — o —

$\boxed{\text{Operazioni con i polinomi di Taylor}}$

Supponiamo

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

(stesso n, per $x \to 0$)

$\boxed{f(x) \pm g(x)}$ Sommando ottengo

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + \underbrace{o(x^n)}$$

somma o differenza di $o(x^n)$ è sempre $o(x^n)$

$\boxed{a f(x) \text{ con } a \in \mathbb{R}}$ $\quad a f(x) = a P_n(x) + o(x^n)$

$\boxed{f(x) \cdot g(x)}$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (P_n(x) + o(x^n))(Q_n(x) + o(x^n)) \\ &= P_n(x) \cdot Q_n(x) \\ &\quad \left.\begin{aligned} &+ P_n(x) \cdot o(x^n) + Q_n(x) \cdot o(x^n) \\ &+ o(x^n) \cdot o(x^n) \end{aligned}\right] o(x^n) \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{f(x) \cdot g(x) = P_n(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)}$$

nel calcolare il prodotto mi posso limitare ai termini di grado $\leq n$

<u>Esempio 1</u> $\quad e^x \cdot \arctan x \qquad$ Taylor con $n = 4$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Calcolo le derivate fino alla 4^a e uso la formula (auguri!) :)

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso sviluppi elementari

potevo anche non metterlo

$$e^x \cdot \arctan x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Esempio 2 $\log(1+x)\cdot \sin^2 x$ $\qquad n=5$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ 2\cdot x\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right)}}{\frac{x^4}{3}} + o(x^4)$$

$2\cdot x\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right) \rightsquigarrow$ doppio prodotto

$$\log(1+x)\cdot\sin^2 x = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)$$

$$= x^3 - \cancel{\frac{x^5}{3}} - \frac{x^4}{2} + \cancel{\frac{x^5}{3}} + o(x^5)$$

(tutti gli altri termini hanno grado ≥ 6)

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

Nel fare il prodotto considero solo i termini di grado ≤ 5 !!!

Domanda : se $f(x) = \log(1+x)\cdot\sin^2 x$
Quanto valgono

$$f'''(0),\ f^{(4)}(0),\ f^{(5)}(0) \quad ?$$

Risposta : $6, -12, 0$
Perché ?

$$f(x) = f(0) + \dots + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$x^3 \quad - \quad \frac{x^4}{2} \quad + \quad 0\cdot x^5$$

Quindi per forza $\dfrac{f'''(0)}{6} = 1 \rightsquigarrow f'''(0) = 6$

$$\frac{f^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow f^{(4)}(0) = -12$$

$$\frac{f^{(5)}(0)}{120} = 0 \rightsquigarrow f^{(5)}(0) = 0$$

Quali sono corretti ?

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ — OK (Taylor con $n=3$)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ — OK (Taylor con $n=4$)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$ — NO: manca $\frac{x^5}{120}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$ — OK, ma buffo

$\sin x = x - 6x^3 + o(x^2)$ — OK, ma buffo

$o(x^2)$ si mangia x^3 e resta Taylor con $n=2$

— o — o —