ANALISI 1 — LEZIONE 017

Note Title 12/10/2016

LIMITI DI FUNZIONE $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

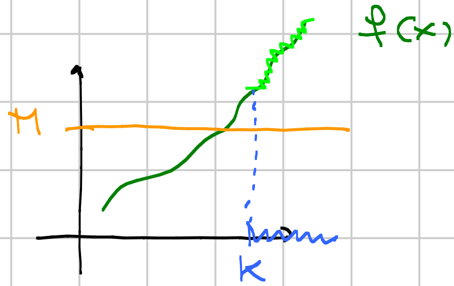
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ \uparrow \text{dato}}} f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Ciascuno di questi ha i soliti 4 possibili comportamenti

1. $l \in \mathbb{R}$
2. $+\infty$
3. $-\infty$
4. Non esiste ← Nessuno dei precedenti

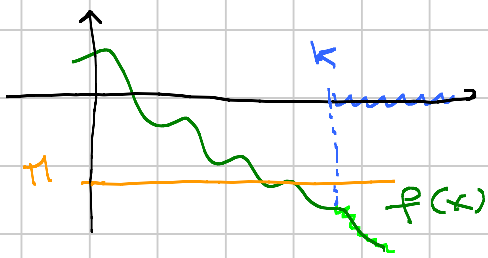
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$$



② $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$

↑ anche molto grande

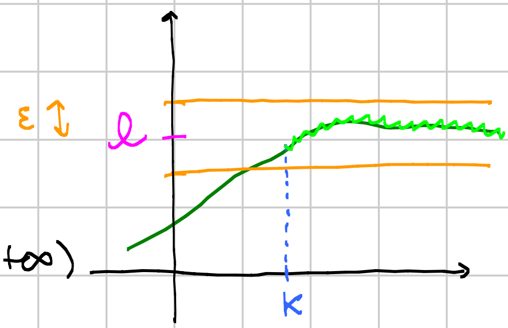


③ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$

↑ anche molto negativo

① $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

↑ anche molto vicino a 0

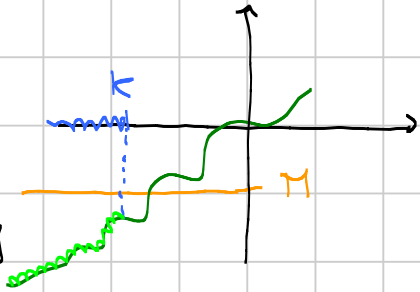
$l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$

$|f(x) - l| \leq \varepsilon$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x)}$$

② $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

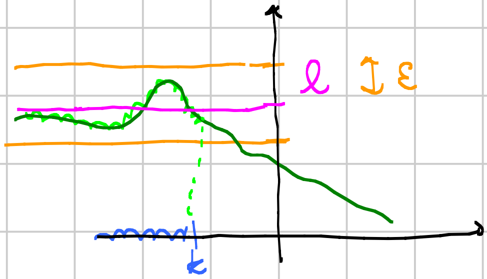
$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$



③ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$

Commento non richiesto: + prendo M piccolo (grande negativo)
+ k dovrà essere grande negativo



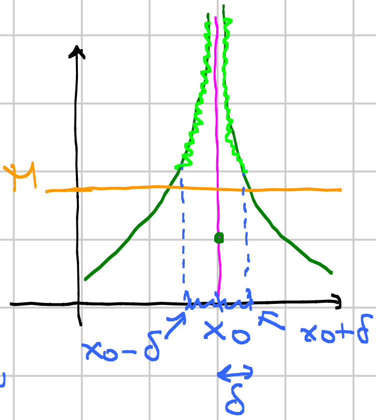
① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x) - l| \leq \varepsilon$
$\forall x \in D \cap (-\infty, k]$.

— o — o —

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

Si intende che x_0 è dato e che $f(x)$ è definita "dalle parti di x_0".



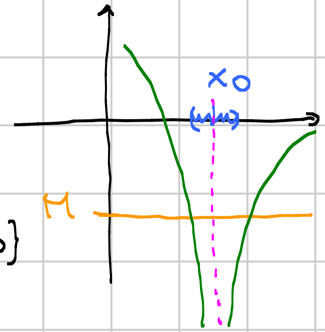
② $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$
$\forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \underbrace{\setminus \{x_0\}}_{\text{TOLTO}}$

La definizione di limite SE NE FREGA del valore di $f(x)$ nel p.to x_0. Di più: $f(x)$ potrebbe anche non essere definita per $x = x_0$.

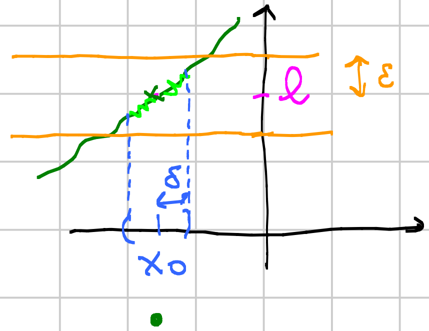
Commento: più M è grande, più delta sarà piccolino

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$
$\forall x \in ([x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$



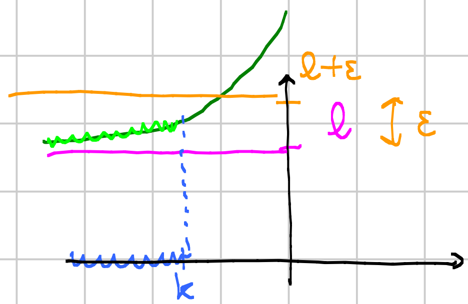
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$
$\forall x \in ([x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$

Commento: + ε è piccolo (vicino a 0)
+ δ deve essere piccolo.

—o—o—

Varianti possibili

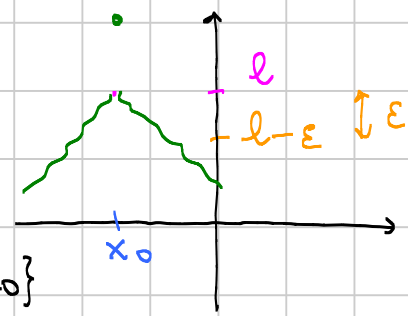
1- Limiti ℓ^+ ed ℓ^-



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell^+$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$

essenziale   può essere o no stretta



$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.
$\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell \quad \forall x \in ([x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$

2- Limiti per $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

ESCLUSO

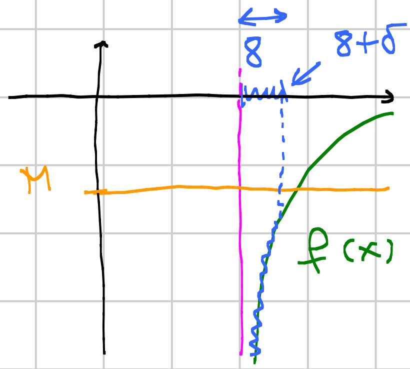
$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta] \cap D$

Esercizio Scrivere le definizioni di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 8^+$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists K\in\mathbb{R}$ t.c. $8 < f(x) \le 8+\varepsilon$
$\forall x\in(-\infty,K]\cap D$

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = -\infty$$



$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists \delta>0$ t.c.
$f(x)\le M \quad \forall x\in(8,8+\delta]\cap D$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x) = 6^-$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c. $6-\varepsilon \le f(x) < 6$
$\forall x\in(7,7+\delta]\cap D$

— o — o —

Definizione "barocca di limite"

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$\exists g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c.
$f(x)\le M \quad \forall x\in[g(M),+\infty)\cap D$

Moralmente: g è una funzione che ad M associa il K.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$\exists g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ t.c.

$|f(x)-\ell|\le\varepsilon$
$\forall x\in([x_0-g(\varepsilon),x_0+g(\varepsilon)]\cap D)\setminus\{x_0\}$

Moralmente: g è una funzione che ad ε associa un possibile δ

Tale funzione g si dice MODULO DI CONTINUITÀ di f in x_0.

— o — o —