ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 11

Spazi vettoriali (Per la teoria completa, vedi lezioni 2021/22)

Uno spazio vettoriale è un insieme di oggetti (detti vettori) sui quali so fare 2 operazioni

- somma VETTORE + VETTORE ⇝ VETTORE
  (solite proprietà: commutativa, associativa, $\exists\, 0$, $\exists -v$)
- prodotto per un numero NUMERO · VETTORE ⇝ VETTORE
  (solite proprietà: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, solite associative e distributive)

Da queste proprietà ne seguono altre, alle quali siamo "abituati"

__Esempio 1__ Se $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$, allora $\vec{u} = \vec{v}$

Basta aggiungere a dx e sx $-\vec{w}$. Infatti

$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$ aggiungo $-\vec{w}$

$(\vec{u} + \vec{w}) - \vec{w} = (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w}$ uso associativa

$\vec{u} + (\vec{w} - \vec{w}) = \vec{v} + (\vec{w} - \vec{w})$ uso la def. di $-\vec{w}$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{v} + \vec{0}$ uso la def. di $\vec{0}$

$\vec{u} = \vec{v}$ ☺

__Esempio 2__ Lo $\vec{0}$ è unico

Supponiamo che ci siano $\vec{0}_1$ e $\vec{0}_2$. Allora

$$\vec{0}_1 \underset{\substack{\text{uso la def.}\\ \text{di } \vec{0}_2}}{=} \vec{0}_1 + \vec{0}_2 \underset{\text{commutativa}}{=} \vec{0}_2 + \vec{0}_1 \underset{\substack{\text{uso la}\\ \text{def. di } \vec{0}_1}}{=} \vec{0}_2$$

— o — o —

Esempi di spazi vettoriali

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ o più in generale $\mathbb{R}^d$ con le operazioni che abbiamo visto precedentemente

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale rispetto alla solita somma e al solito prodotto
(potrei anche fare la divisione tra numeri, ma non la considero)

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi nella variabile x a coeff. reali

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

coeff. del polinomio

Operazioni : → somma di polinomi
→ prodotto di un polinomio per un numero
(ai fini dello spazio vettoriale non considero il prodotto tra polinomi)

$\boxed{4}$ $M_{m \times n}$ = insieme delle matrici $m \times n$, con m ed n fissati
Operazioni : → somma di matrici
→ prodotto matrice · numero
[Se $m = n$ potrei anche moltiplicare le matrici, ma non lo considero]

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi di grado ≤ 3 con le solite operazioni

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$ = pol. di grado ≥ 3 Non è uno spazio vettoriale rispetto alle solite operazioni

$p_1(x) = x^3 - x^2$ $\qquad p_2(x) = -x^3 + 3x$ $\qquad \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$

La somma $p_1(x) + p_2(x) = -x^2 + 3x \notin \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$

Parentesi di confronto

Consideriamo $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $M_{2\times 2}$

(a_1, a_2, a_3, a_4) $\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ $\quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

Questi oggetti "sono la stessa cosa", sono comunque 4 numeri con le operazioni che si comportano allo stesso modo.

Esempio analogo: $M_{3\times 5}$ "sono la stessa cosa" di $\mathbb{R}^{15}$ o di $\mathbb{R}_{\leq 14}[x]$

— o — o —

$\boxed{7}$ Funzioni $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ sono uno sp. vettoriale rispetto alla somma di due funzioni e al prodotto funzione per numero.

Chi è lo $\vec{0}$?

È una funzione $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $f+g = f$ per ogni f.

Quindi $g(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$

0 dei reali

$\boxed{8}$ Funzioni $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sono uno sp. vettoriale

[Serve che la somma di funz. cont. è ancora continua ed il prodotto per un numero idem]

Oss. Posso sostituire $[0,1]$ con un sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}$

$\boxed{9}$ $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(2023) = 0 \}$ è uno sp. vettoriale rispetto alle operazioni che eredita da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

[Servono due osservazioni: La somma di 2 polinomi che si annullano in 2023 continua ad annullarsi in 2023. Idem per il prodotto per un numero]

$\boxed{10}$ $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(2023) = 1 \}$

Non è uno spazio vettoriale (sia la somma, sia il prodotto vanno male)

Esempio $\boxed{9}$ rivisto Sia $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ con $p(2023) = 0$.
Per il teorema di RUFFINI sappiamo che

$$p(x) = (x - 2023)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$$

In questo modo posso identificare ogni $p(x) \in V$ con l'elemento $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

[Basta osservare che le operazioni in V diventano le solite in $\mathbb{R}^3$]

— o — o —