Esercizio 1 Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa, sia $x_0 \in \operatorname{Int}(C)$ un p.to stazionario. Allora x_0 è un p.to di min. globale

$\boxed{\text{Dim.}}$ Le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti, quindi

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{=0} \qquad \forall x \in C$$

Oss. Si può indebolire l'ipotesi richiedendo solo che

$$f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$$

vale $f(x) \geq$ retta con coeff. compreso fra $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$

Esercizio 2 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa e continua. Allora

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\} = \max\{f(x) : x \in \{a,b\}\}$$

(cioè il max viene assunto anche agli estremi)

L'unico caso in cui c'è un p.to di max in (a,b) è il caso delle costanti.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono due casi

→ se $f(a) \neq f(b)$, allora c'è un unico p.to di max

→ se $f(a) = f(b) = c$, allora comunque $f(x) \leq c$ per ogni $x \in [a,b]$.

Esercizio 3 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa ma non nec. cont. Allora f è almeno semicontinua sup., cioè

$$f(a) \geq \limsup_{x \to a^+} f(x), \qquad f(b) \geq \limsup_{x \to b^-} f(x)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Mettiamoci in a. Per convessità vale (vedi figura prec.)

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Ora faccio limsup per $x \to a^+$ (idem in b)

Esercizio 4 Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso aperto
Sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa e derivabile.
Allora $f'(x)$ è continua in C, cioè $f \in C^1$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dato $x_0 \in \operatorname{Int}(C) = C$ devo dim. che $\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$

Sappiamo che vale sempre che f'_+ è continua a dx e
f'_- è continua a sx

Ma allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Esercizio 5 Prodotto di 2 funzioni convesse è convessa?

In generale NO : $f(x) = x$ è convessa
$g(x) = x^2$ è convessa
$f(x) \cdot g(x) = x^3$ NO, almeno per $x < 0$.

Esperimento: facciamo finta che esistano le f'' e g''.
Allora

$$[f(x)g(x)]'' = [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]'$$

$$= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

[Oss. generale: la derivata k-esima di un prodotto è una specie di binomio di Newton]

Congettura: se $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ e $f(x)$ e $g(x)$ sono monotone nello stesso verso, e $f(x)$ e $g(x)$ convesse, allora $f(x) \cdot g(x)$ è convessa.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dobbiamo dim. che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y)\, g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda) f(y)g(y)$$

Partiamo da LHS e usiamo convessità di f e g

$$\text{LHS} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } f \text{ e } g \\ \text{convesse } + \geq 0}}{\leq} (\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))$$

$$= \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1-\lambda)(f(x)g(y) + f(y)g(x)) + (1-\lambda)^2 f(y)g(y)$$

$$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{spero}}}{\leq} \lambda f(x)g(x) + (1-\lambda) f(y)g(y)$$

Controllo la speranza portando tutto a sx:

$$\lambda(\lambda-1) f(x)g(x) - \lambda(\lambda-1)(f(x)g(y) + f(y)g(x)) + \lambda(\lambda-1) f(y)g(y) \leq 0$$

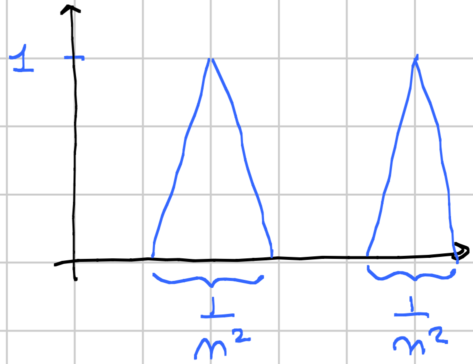
$$\underbrace{\lambda}_{\geq 0}\underbrace{(\lambda-1)}_{\leq 0}\underbrace{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}_{\geq 0 \text{ se } f \text{ e } g \text{ sono monotone dalla stessa parte}} \leq 0$$

Esercizio 6 Sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua e tale che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge}$$

Sappiamo da esempi precedenti che non possiamo concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$



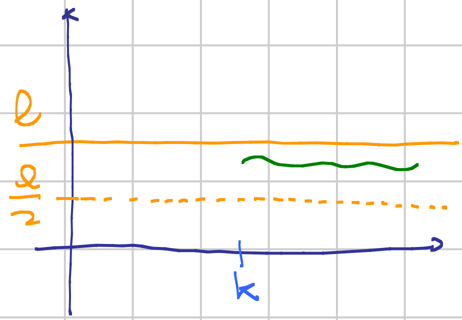
È vero però che

$$\boxed{\liminf_{x\to+\infty} f(x) \le 0 \le \limsup_{x\to+\infty} f(x)}$$

(quindi se esiste il limite, è per forza 0)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per assurdo supponiamo che $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell>0$

Allora per la caratterizz. esiste $k\in\mathbb{R}$ tale che



$$f(x)\ge\frac{\ell}{2} \qquad \forall x\ge k$$

Ora per ogni $A\ge k$ vale

$$\int_a^A f(x)\,dx=\int_a^k f(x)\,dx+\int_k^A f(x)\,dx$$

$$\ge \underbrace{\int_a^k f(x)\,dx}_{\parallel}+\int_k^A \frac{\ell}{2}\,dx$$

$$= \text{numero}+\underbrace{\frac{\ell}{2}(A-k)}_{\substack{\downarrow\\ +\infty \text{ per } A\to+\infty}}$$

Quando $A\to+\infty$ a sx tende all'int. improprio, a dx a $+\infty$.

Stessa cosa per il limsup (farlo!).

Esercizio 7 Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{unif. continua}}$ e tale che

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

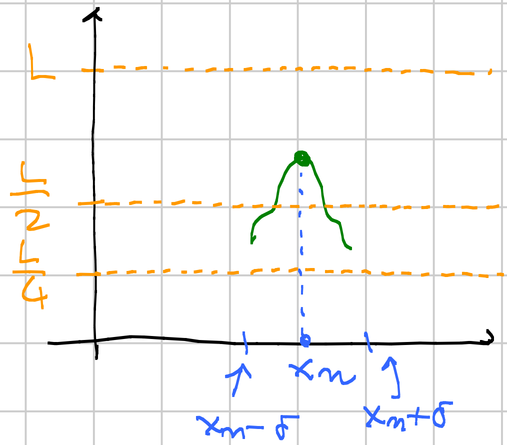
Allora $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ (Idea: se diventa grande ed è unif. cont., ci vuole del tempo a scendere!!)

Supponiamo per assurdo che $\displaystyle\limsup_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$

Per la caratterizzazione esiste una succ. $x_n \to +\infty$ t.c.

$$f(x_n) \geq \frac{L}{2}$$



Considero il δ dell'unif. continuità corrispondente a $\varepsilon = \frac{L}{4}$. Allora sono sicuro che

$$f(x) \geq \frac{L}{4} \qquad \forall x \in [x_n - \delta, x_n + \delta] \text{ perché}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_n) + f(x_n) \\ &\geq \underbrace{f(x_n)}_{\geq \frac{L}{2}} - \underbrace{|f(x) - f(x_n)|}_{\frac{L}{4}} \geq \frac{L}{4} \end{aligned}$$

Ma allora $$\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \frac{L}{4}\,dx = \frac{L}{4} \cdot 2\delta$$

ma d'altra parte

$$\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{x_n+\delta} f(x)\,dx}_{\downarrow \atop I} - \underbrace{\int_a^{x_n-\delta} f(x)\,dx}_{\downarrow \atop I} \to 0$$

contraddice