ANALISI 1 — LEZIONE 02

Note Title 28/09/2024

Esempio 1 Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $2^n \geq n^2$

Esplorazione:

$n=0$	$2^0 \overset{?}{\geq} 0^2$	☺	
$n=1$	$2^1 \geq 1^2$	☺	
$n=2$	$2^2 \geq 2^2$	☺	
$n=3$	$2^3 \geq 3^2$	NO!	
$n=4$	$2^4 \geq 4^2$	$16 \geq 16$	Ok!
$n=5$	$2^5 \geq 5^2$	$32 \geq 25$	ok
$n=6$	$2^6 \geq 6^2$	$64 \geq 36$	ok

Sembra che più si va avanti e più diventa abbondante

Idea: $2^n \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 3$

I casi $n = 0, 1, 2, 3, 4$ si fanno a mano, e da 4 in poi si spera di usare l'induzione

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

Ipotesi: $2^n \geq n^2$ Tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Dimostro la tesi a partire dall'ipotesi

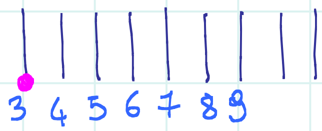
$$2^{n+1} \underset{\text{precorso}}{=} 2 \cdot 2^n \underset{\substack{\text{ipotesi molt.} \\ \text{per } 2}}{\geq} 2 \cdot n^2 \underset{\text{spero}}{\geq} (n+1)^2$$

Controllo la speranza:

$$2n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$
$$2n^2 \overset{?}{\geq} n^2 + 2n + 1$$
$$n^2 - 2n \overset{?}{\geq} 1$$
$$n(n-2) \overset{?}{\geq} 1$$

e questa è vera per lo meno da 3 in poi

Oss. Nell'esempio precedente il meccanismo di caduta vale per lo meno da $n = 3$ in poi



Però il mattone con $n=3$ non casca

Oss. Nell'esempio abbiamo usato una CATENA DI DISUGUAGLIANZE

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \dots \geq A_{2024} \rightsquigarrow A_1 \geq A_{2024}$$

(devono essere tutte dalla stessa parte)

$\boxed{\text{DISUGLIANZA DI BERNOULLI}}$ (Esempio 2)

Sia $\boxed{x > -1}$ un numero reale. Allora

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Esplorazione: $n = 0 \rightsquigarrow 1 \geq 1$ ok

$n = 1 \rightsquigarrow 1+x \geq 1+x$ ok

$n = 2 \rightsquigarrow 1+2x+x^2 \geq 1+2x$ ok

Dimostriamo per induzione

Passo base: $n=0 \rightsquigarrow$ vedi sopra

Passo induttivo Hp: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Th: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Strategia: costruire una catena di disuguaglianze che parte con $(1+x)^{n+1}$ e finisce con $1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} \underset{\text{precorso}}{=} (1+x)\cdot(1+x)^n$$

$$\geq (1+x)\cdot(1+nx)$$

ipotesi molt. per $(1+x)$

$$= 1+nx+x+nx^2$$

precorso

$$= 1+(n+1)x+nx^2$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

si usa che $nx^2 \geq 0$

<u>Oss</u>. Dove ho usato che $x > -1$??

L'ipotesi era $(1+x)^n \geq 1+nx$. Ad un certo punto ho moltiplicato per $(1+x)$ conservando il verso della disuguaglianza. Questo si può fare solo se moltiplico per roba >0, altrimenti il verso gira.

Quindi mi serve $1+x>0$, cioè $x>-1$.

Fatto generale: se $A \geq B$ e $C>0$, allora $AC \geq BC$

se $C<0$, allora $AC \leq BC$

[$3 \geq 2$ se moltiplico per -4 ottengo $-12 \leq -8$]

<u>Esempio 3</u>

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos(x/2) - \cos[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)},$$

$$\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)$$

$\boxed{\text{Passo base}}$ $n=0 \rightsquigarrow \sin(0\cdot x) = \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ ☺

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ Saltati i soliti convenevoli, impostiamo la catena di uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) + \sin((n+1)x)$$

$$\underset{\text{uso ipotesi}}{=} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \sin((n+1)x)$$

$$\underset{\text{speranza}}{=} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Controllo la speranza:

$$\frac{\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n+1)x)}{\cancel{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$\overset{?}{=} \frac{\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right)}{\cancel{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Ora basta osservare che si riduce a

[corretto dopo video]

$$\cos\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n+1)x)$$

e usare le formule di addizione per il coseno...

— o — o —

<u>Esempio 4</u> Dire quando è vero che $n! \geq 2^n$

Nota: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ = FATTORIALE DI n se $n \geq 1$

$0! = 1$ per definizione

Esplorazione

$n=0$	$0! \geq 2^0$	ok	
$n=1$	$1! \geq 2^1$	NO	
$n=2$	$2! \geq 2^2$	NO	
$n=3$	$3! \geq 2^3$	$6 \geq 8$	NO

$n=4 \qquad 4! \geq 2^4 \qquad 24 \geq 16 \quad$ ok

$n=5 \qquad 5! \geq 2^5 \qquad 120 \geq 32 \quad$ ok

e sembra diventare abbondante

Dimostro per induzione per $n \geq 4$

<u>Passo base</u> $\quad n=4$ già fatto

<u>Passo induttivo</u> $\qquad$ Hp $\quad n! \geq 2^n$

Tesi $\quad (n+1)! \geq 2^{n+1}$

Solita catena

$$
\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1)\cdot n! \\
&\geq (n+1)\cdot 2^n \\
&\geq 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

uso ipotesi
molt. per $(n+1)$,
che è di sicuro >0

speranza

Mi resta da controllare che $\quad (n+1)\cdot 2^n \overset{?}{\geq} 2^{n+1}$

cioè $\quad (n+1)\cdot \cancel{2^n} \overset{?}{\geq} 2\cdot\cancel{2^n}$

cioè $\quad n \geq 1$

<u>Oss.</u> Il meccanismo di caduta funziona da 1 in poi, ma la prima che casca è $n=4$