ANALISI 1 — LEZIONE 74

Note Title 07/03/2025

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x-5}\,dx$

Sopra vorrei $2x-10$ e quindi me lo procuro

$$\int \frac{2x+3}{x-5}\,dx = \int \frac{2x-10+13}{x-5}\,dx = \int 2+\frac{13}{x-5}\,dx$$

$$= 2x + 13\log|x-5|$$

Se volevo usare l'algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x-5 \\ \hline -2x+10 & 2 \\ \hline 13 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow (2x+3) = 2(x-5)+13$$

$$\rightsquigarrow \frac{2x+3}{x-5} = 2 + \frac{13}{x-5}$$

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$

$\boxed{\text{1: Divisione}}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline x & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow x^3 = (x^2-1)x + x$$

[verifica]

Quindi $\displaystyle\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2-1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \log|x^2-1|$$

Esempio 3 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$

$\boxed{\text{1: Divisione}}$ Non serve

$\boxed{\text{2: Fattorizzazione}}$ $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

$\boxed{3: \text{Sistema lineare}}$ $\quad \dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} = \dfrac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}$

Guardo il numeratore: $x=1 \rightsquigarrow 4 = 2B \rightsquigarrow B=2$

$x=-1 \rightsquigarrow 2 = -2A \rightsquigarrow A=-1$

Quindi la decomposizione in fratti semplici è

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$ [Verifica!]

$\boxed{4: \text{Integrare}}$ $\quad \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-1} = -\log|x+1| + 2\log|x-1| = \log\frac{(x-1)^2}{|x+1|}$

Esempio 4 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

$\boxed{3}$ Decomposizione Se uso i fratti semplici è già decomposto e ne lo devo integrare

Hermite: $\displaystyle\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{Cx+D}{x^2+1}$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx^2+C-2Cx^2-2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^2+C-2Cx^2-2Dx}{(x^2+1)^2}$$

Sistema lineare:

$A = 0$	coeff. x^3	$A=0$
$B-C=0$	coeff. x^2	$B=\frac{1}{2}$
$A-2D=0$	coeff x	$D=0$
$B+C=1$	termine noto	$C=\frac{1}{2}$

Quindi

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}$$ [Verifica!]

$\boxed{\text{Alternativa!}}$ trucco e poi per parti

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \underset{f}{\frac{x}{(x^2+1)^2}} \cdot \underset{G}{x}\,dx$$

$$= \arctan x + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{2}}_{F} \cdot \underbrace{x}_{G} - \int \underset{F}{\frac{1}{2}}\ \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \arctan x - \frac{1}{2}\arctan x$$

Allo stesso modo si possono fare tutte le potenze

Esempio 5 $\int \frac{1}{(x^2+1)^{20}}\,dx$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{20}}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{20}}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{19}}\,dx - \int \underset{f}{\frac{x}{(1+x^2)^{20}}} \cdot \underset{G}{x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(1+x^2)^{19}}\,dx + \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^{19}}\,\frac{1}{19}}_{F}\,\underbrace{\frac{1}{2}x}_{G} - \frac{1}{38}\int \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^{19}}}_{F}\,\underset{g}{dx}$$

Quindi mi sono ridotto alla potenza 19 e si procede

Esempio 6 $\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx$

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$x=-2 \rightsquigarrow A=-2$

$x=-3 \rightsquigarrow B=3$

Quindi $\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx = -2\int \frac{1}{x+2}\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}$

$$= -2\log|x+2| + 3\log|x+3|$$

$$= \log \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$$

<u>Esempio 7</u> $\int \frac{x^3+2}{x^4-1}\,dx$

$\boxed{\text{2: Fattorizzazione}}$ $x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

$\boxed{\text{3: Decomposizione}}$ $\frac{x^3+2}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

Potrei svolgere bovinamente e impostare il sistema, oppure

$x = -1 \rightsquigarrow 1 = -4A \rightsquigarrow A = -\frac{1}{4}$

$x = 1 \rightsquigarrow 3 = 4B \rightsquigarrow B = \frac{3}{4}$

$x = i \rightsquigarrow \underset{\uparrow\, i^3}{-i} + 2 = (Ci+D)(-2) = -2Ci - 2D \rightsquigarrow C = \frac{1}{2} \quad D = -1$

$\boxed{4}$ Resta da integrare $-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}x-1}{x^2+1}$

e si fanno tutti abbastanza bene

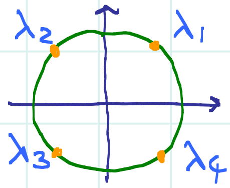
<u>Esempio 8</u> $\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

$\boxed{\text{2 - Fattorizzare}}$ Come scomporre x^4+1 ?

<u>1° modo</u>: uso le radici complesse e le accoppio a 2 a 2

$x^4 = -1$

$$x = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$$



Quindi sui complessi so fattorizzare, poi accoppio i fattori λ_2 e λ_3 e λ_1 e λ_4

2° modo : senza numeri complessi

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\ &= (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 \qquad A^2-B^2 \\ &= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \qquad (A+B)(A-B) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{3 - Decomposizione}}$

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Risolvo e poi integro con log + arctan.

— o — o —