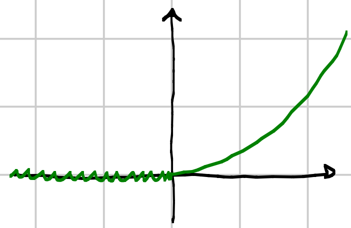
ANALISI 1 — LEZIONE 131

Note Title 16/05/2017

$\boxed{\text{EPPUR SI MUOVE}}$ Esiste una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$

$f(x) > 0$ per ogni $x > 0$



In particolare $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$
e quindi f ha nell'origine polinomi di Taylor di ogni ordine (e tali polinomi sono nulli), quindi

$$f(x) = o(x^n) \quad \text{per } x \to 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

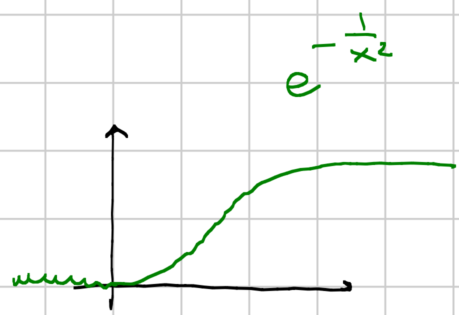
(quindi $f(x)$ sta sotto x^n in un opportuno intorno dell'origine per ogni $n \in \mathbb{N}$)

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in [0, \delta] \quad f(x) \leq x^n$ VERA

$\exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [0, \delta] \quad f(x) \leq x^n$ FALSA

(implicherebbe $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, \delta]$)

<u>Esempio classico</u>
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{per } x > 0$$
$$= 0 \quad \text{per } x \leq 0$$



Perché ha tutte le derivate nulle in $x = 0$?

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \quad \text{per } x > 0$$

Osservo che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ (esponenziale batte polinomio)

È ovvio che $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$

Dal momento che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, allora per un criterio dim. a suo tempo anche $f'(0)$ esiste e fa 0.

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,\frac{4}{x^6} + e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{-6}{x^4}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,\frac{4-6x^2}{x^6}$$

Ancora una volta $\lim_{x\to 0} f''(x) = 0$ e quindi $f''(0) = 0$

Per induzione si dimostra che

$$\boxed{f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,\frac{P_k(x)}{x^{3k}}}$$

con $P_k(x)$ polinomio opportuno (per $x > 0$)

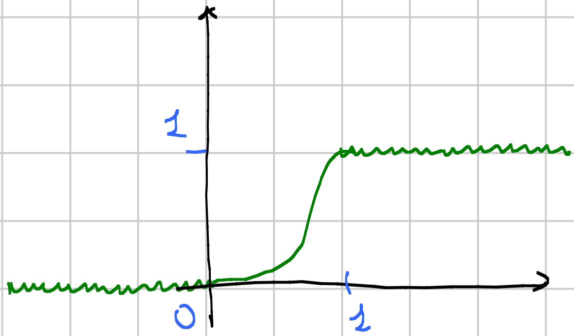
Da questa segue che $\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0$ e quindi anche $f^{(k)}(0) = 0$

<u>Oss.</u> In questo esempio NON è vero che $f(x)$ è somma della sua serie di Taylor (la somma è sempre nulla)

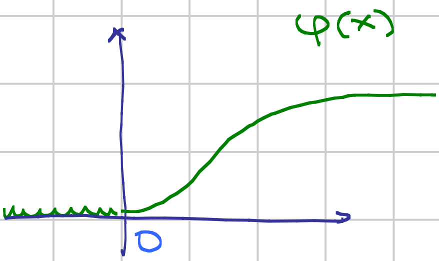
— o — o —

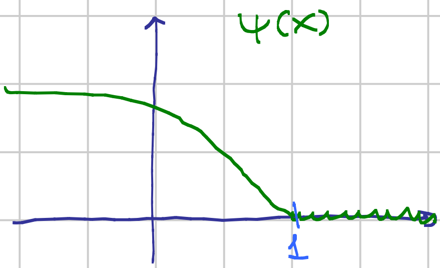
RACCORDO C^∞ Esiste $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ fatta così

(i) $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$
(ii) $f(x) = 1$ " " $x \geq 1$
(iii) $0 < f(x) < 1$ " " $x \in (0,1)$
(iv) $f(x)$ strett. ↗ in $(0,1)$



L'idea è usare 2 "eppur si muove"





Ad esempio $\psi(x) := \varphi(1-x)$

Ora pongo

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\underbrace{\varphi(x)+\psi(x)}_{\text{sempre } \neq 0}}$$

(i) Ok

(ii) Ok perché per $x \geq 1$ diventa $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(iii) per $x \in (0,1)$ vale $\quad 0 < \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\psi(x)} < \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{\varphi(x)+\psi(x)} = 1$

(iv) Facciamo $\quad f'(x) = \frac{\varphi'(\varphi+\psi) - (\varphi'+\psi')\varphi}{(\varphi+\psi)^2} = \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{(\varphi+\psi)^2} \overset{?}{>} 0$

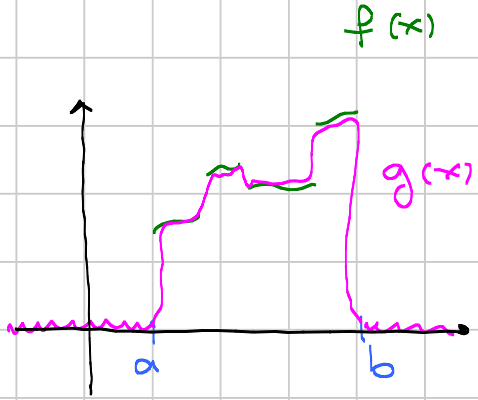
Basta vedere se $\quad \underset{+\ +}{\varphi'\psi} > \underset{-\ +}{\psi'\varphi}$ (ovvio ☺)

$\_\_\_\ 0\ \_\_\_\ 0\ \_\_\_$

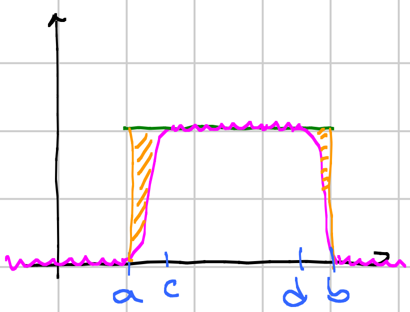
Esercizio di Analisi 3

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Sia $\varepsilon > 0$.
Allora esiste $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $g(x) = 0$ fuori da $[a,b]$ e

$$\boxed{\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq \varepsilon}$$



Sol. Caso banale : f è costante in $[a,b]$



Basta fare due raccordi C^∞ con un intervallo $[c,d] \subseteq (a,b)$
Se $c-a$ e $b-d$ sono piccoli, l'integrale è piccolo

Caso semibanale f è una step function, cioè comb. lineare di caratteristiche di intervallini.

Basta approx. le singole come nel caso banale e poi fare la comb. lin. delle approssimanti.

Caso generale Per definizione di integrale, dato $\varepsilon>0$ trovo una step function ψ, volendo $\geq f$, tale che

$$\int_a^b (\psi(x)-f(x))\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{uso}\\ \psi\geq f}}{=} \int_a^b |\psi(x)-f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Per il punto precedente approssimo $\psi(x)$ con una $g(x)$ tale che

$$\int_a^b |g(x)-\psi(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

A questo p.to osservo che

$$\int_a^b |f-g|\,dx \leq \int_a^b |f-\psi|\,dx + \int_a^b |\psi-g|\,dx$$

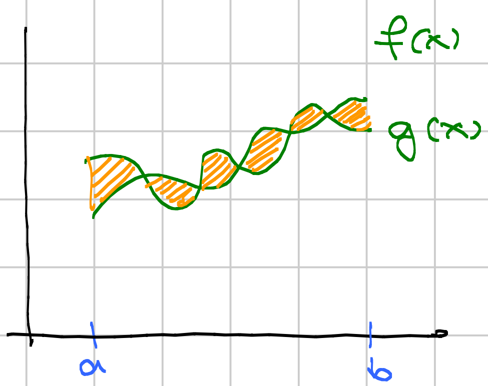
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

— o — o —

Il termine $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ rappresenta una "distanza integrale"

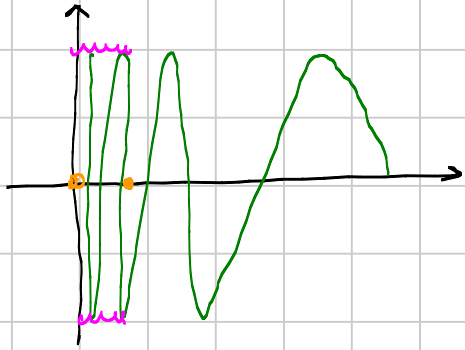
tra le funzioni $f(x)$ e $g(x)$

= area tra i due grafici.



— o — o —

Esercizio Dimostrare che $\sin\frac{1}{x}$ è integrabile in $[0,2]$



Detto altrimenti: devo, per ogni $\varepsilon > 0$, mostrare che esistono step function

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$$

tali che

$$\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \le \varepsilon.$$

Idea Appena mi sposto a dx di 0 la funzione è continua.

Prendo $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{1}{4}\varepsilon$. In questo primo intervallino pongo

$$\varphi(x) = -1 \quad e \quad \psi(x) = 1$$

Con gli integrali ho pagato $\int_0^{x_1} (\psi(x) - \varphi(x))\,dx = \frac{1}{4}\varepsilon \cdot 2 = \frac{1}{2}\varepsilon$

(è continua)

Ora tra x_1 e 2 la funzione è integrabile, quindi posso definire in $[x_1, 2]$ le φ e ψ in maniera tale che

$$\int_{x_1}^2 (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Allo stesso modo si dimostra l'integrabilità delle funzioni che sono

→ limitate

→ continue tranne in un numero finito di punti.

Variante: stessa cosa se i p.ti di discontinuità sono una succ. infinita ma convergente.
(dim. a voce nel video).

— o — o —