ANALISI 1 — LEZIONE 62

Note Title 14/12/2024

<u>Esercizio 1</u> Calcolare $\max\left\{ \frac{n^3}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

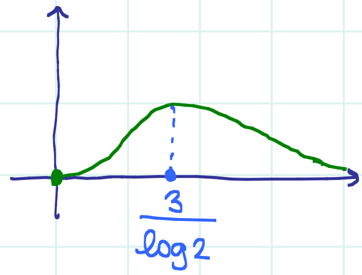
$n=0 \rightsquigarrow 0 \quad n=1 \rightsquigarrow \frac{1}{2} \quad n=2 \rightsquigarrow \frac{8}{4} = 2 \quad \dots$

$\boxed{\text{1ª osservazione}}$ Il massimo esiste. Poniamo $a_n = \frac{n^3}{2^n}$
e osserviamo che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
Di conseguenza $a_n \leq \frac{1}{4}$ definitivamente, diciamo per $n \geq n_0$.
Quindi, poiché già sappiamo che $a_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, per il massimo se la giocano solo i termini

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$$

che sono un numero finito.

$\boxed{\text{2ª osservazione}}$ Considero la funzione $f(x) = \frac{x^3}{2^x} = x^3 \cdot 2^{-x}$

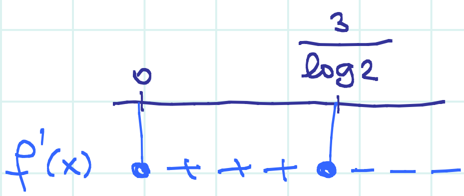


Come ci aspettiamo sia fatta per $x \geq 0$?
Studio

$$f'(x) = 3x^2\, 2^{-x} - x^3 \cdot 2^{-x} \log 2$$

$$= x^2 2^{-x} (3 - x \log 2)$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo $3 - x\log 2$

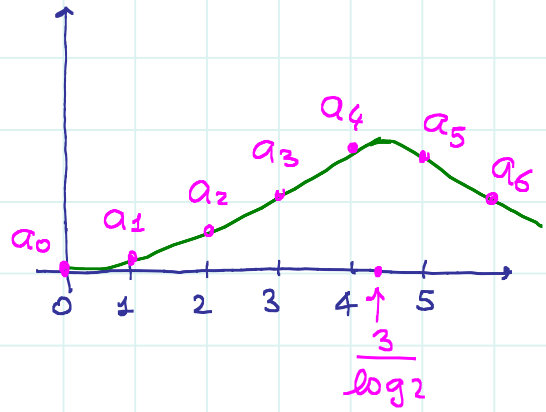


La successione a_n sono i p.ti del grafico con x intero, quindi a_n all'inizio cresce, poi inizia a decrescere e da lì in poi andrà sempre più giù verso 0.

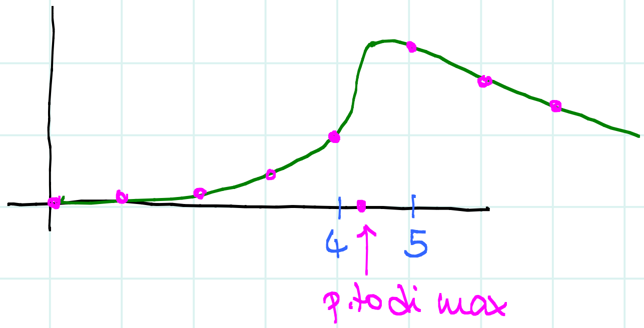
MAX

$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = 2 \quad a_3 = \frac{3^3}{8} = \frac{27}{8} \quad a_4 = \frac{64}{16} = \boxed{4} \quad a_5 = \frac{125}{32} < 4$

Un disegno più accurato



Achtung! Non è sempre vero che il massimo in n si ottiene per il valore di n più vicino al p.to di max per $x \geq 0$.



← Se la giocano sempre il p.to prima e il p.to dopo.

Esempio 2 Calcolare il max della successione

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{4}, \quad \sqrt[5]{5}, \quad \dots \qquad \sqrt[n]{n} \quad \text{con } n \geq 1$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Il max esiste! $\quad a_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

Quindi definitivamente, diciamo per $n \geq n_0$, avremo che

$$a_n < \sqrt{2}$$

Quindi per il max se la giocano solo i termini

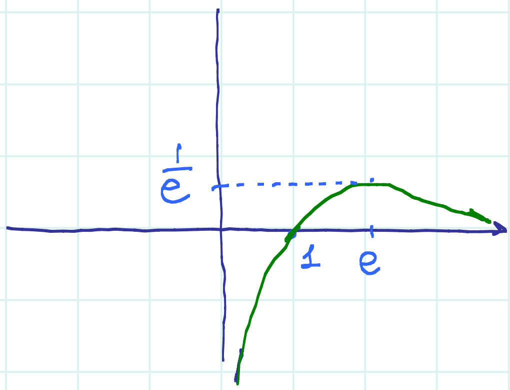
$$a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$$

che sono un numero finito

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n}$, il che ci spinge a studiare $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

Studio rapido

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$



Per $x \leq 0$ non ha senso

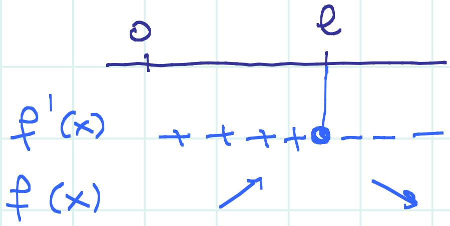
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left[\frac{-\infty}{0^+}\right] = -\infty$$

$f(x) < 0$ per $x \in (0,1)$

$f(x) > 0$ per $x > 1$

Chi è il pto di max per $x>0$?

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$



Come nell'esempio precedente, la succ. a_n prima cresce per un po', poi da 3 in poi decresce.
Quindi per il max se la giocano $n=2$ e $n=3$. Vince $\sqrt[3]{3}$ perché

$$\sqrt[3]{3} \overset{?}{>} \sqrt{2} \quad \ldots \text{ elevo alla sesta } \ldots \quad 3^2 \overset{?}{>} 2^3$$ ☺

<u>Esempio 3</u> Dimostrare che esiste una costante c tale che

$$(x^3+7) \leq c\,(x^4+1) \qquad \forall x \geq 0$$

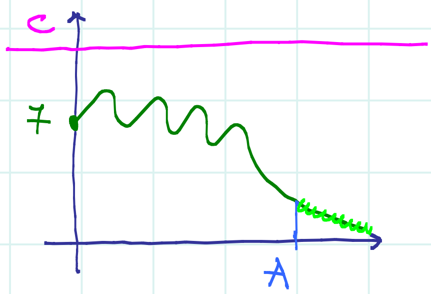
Osservo che $x^4+1 \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi posso dividere ottenendo un'espressione equivalente:

$$\underbrace{\boxed{\frac{x^3+7}{x^4+1}}}_{f(x)} \leq c \qquad \forall x \geq 0$$

↑ vanno bene tutti i c più grandi del max

Quindi devo dimostrare che il grafico di $f(x)$ sta sotto una retta.
Studio in maniera minimalista $f(x)$.
In questo caso esiste

$$\max\{f(x) : x \geq 0\}$$



per il "solito" Weierstrass generalizzato... esiste $A>0$ t.c.

$$f(x) \leq 1 \qquad \forall x \geq A$$

Quindi per il max se la giocano solo gli $x \in [0, A]$

Esempio 4 Esiste una costante c tale che

$$x^3+7 \le c\,(x^2+1) \qquad \forall x \ge 0 \quad ?$$

No! Dovrebbe essere $\boxed{\dfrac{x^3+7}{x^2+1}} \le c \quad \forall x \ge 0$

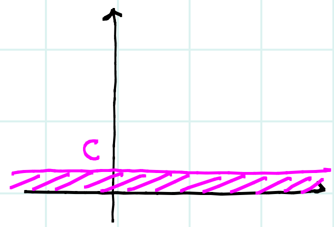
però questa funzione $\to +\infty$ per $x \to +\infty$

Esempio 4 bis Esiste $c \dots$ $\quad x^3+7 \le c\,(x^2+1) \quad \forall x \in [20, 137]$?

Sì, basta prendere $c = \max\left\{ \dfrac{x^3+7}{x^2+1} : x \in [20, 137] \right\}$
che esiste ed è finito per W.

Esempio 5 Dimostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\cos^2 x + \sin^{42} x \ge c \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ $f(x) = \text{LHS}$ è periodica di periodo π

Quindi per W. generalizzato ammette minimo
(il min su $[0,\pi]$ è anche minimo su tutto $\mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Il minimo m è il valore per un qualche $x_0 \in [0,\pi]$.
Può essere $m < 0$? No perché $f(x) \ge 0$ sempre.
Può essere $m = 0$? No perché dovrebbe essere $\cos^2 x_0 = 0$ e
$\sin^{42} x_0 = 0$, cioè $\sin x_0 = \cos x_0 = 0$
Quindi $m > 0$ e questo è un buon c.

Achtung! Non basta dire $f(x) > 0$ sempre, quindi $\min > 0$
(pensare a $\frac{1}{x}$ per $x \ge 1$) $\leftarrow$ non esiste una costante $c > 0$ che sta sotto il grafico