ANALISI 1 — LEZIONE 44

Note Title 23/11/2024

Serie con termini di segno variabile

→ CRITERIO DI LEIBNITZ (serie a segno alterno)

→ CRITERIO ASSOLUTA CONVERGENZA

(→ DIRICHLET)

Criterio di Leibnitz Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$$

Supponiamo che

(i) $\alpha_n \geq 0$ almeno definitiv. (questo dice che $(-1)^n \alpha_n$ è a segno alterno)

(ii) $\alpha_n \to 0$ (sostanzialmente è la cond. necessaria)

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ almeno definitiv. (debole decrescenza di α_n)

Allora la serie converge.

Criterio dell'assoluta convergenza

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Oss. Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge, allora BOH.

Oss. Quando studiamo $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, abbiamo a disposizione tutti gli strumenti per le serie a termini ≥ 0.

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$

$\uparrow$ armonica a segni alterni

Applico Leibnitz con $\alpha_n = \frac{1}{n}$.

(i) $\alpha_n \geq 0$ ☺

(ii) $\alpha_n \to 0$ ☺

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ se e solo se $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ vero $\forall n \geq 1$ ☺

$\rightsquigarrow$ la serie converge

Potevo usare l'assoluta convergenza?

NO! Infatti $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ $\rightsquigarrow$ BOH

<u>Oss.</u> Allo stesso modo si trattano le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$$

Queste: $\rightarrow$ convergono assolutamente per $a>1$

$\rightarrow$ convergono comunque per $a>0$ per Leibnitz

$\rightarrow$ non verificano nemmeno la cond. nec. se $a \leq 0$

<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

Non converge assolutamente poiché $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} = +\infty$, volendo per confronto con $b_n = \frac{1}{n}$

Posso applicare Leibnitz con $\alpha_n = \frac{1}{\log n}$

(i) $\alpha_n \geq 0$ ☺ (ii) $\alpha_n \to 0$ ☺

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ se e solo se $\frac{1}{\log(n+1)} \leq \frac{1}{\log n}$ ☺

perché $\log x$ è crescente

Esempio 3
$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\cos(n!) - \sin(2^n)+5}{n^2-7n+125}}}_{\alpha_n} \cdot (-1)^n$$

Applico Leibnitz

(i) $\alpha_n \geq 0$ definitivamente perché numeratore ≥ 3 e denom $\to +\infty$

(ii) $\alpha_n \to 0$

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ ⤳ auguri ! :(

Proviamo con assoluta convergenza

$$|a_n| = |(-1)^n \alpha_n| = \frac{\cos(n!) - \sin(2^n) + 5}{n^2-7n+125}$$

almeno definitiv., cioè appena il denom diventa > 0

Ora
$\sum |a_n|$ converge perché

$$\frac{\cos(n!) - \sin(2^n)+5}{n^2-7n+125} \leq \underbrace{\frac{14}{n^2-7n+125}}$$

potevo mettere anche 7

La serie con questo termine converge per C.A. con $\frac{1}{n^2}$

Quindi la serie iniziale converge.

Esempio 3 facilitato $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(n!)}{n^3}}_{a_n}$ converge

Osservo che $\quad |a_n| = \frac{|\cos(n!)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$

Ora $\sum \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow \sum \frac{|\cos(n!)|}{n^3} \Rightarrow \sum \frac{\cos(n!)}{n^3}$

criterio del confronto per serie a termini ≥ 0

assoluta convergenza

Achtung! Non basta dire $\frac{\cos(n!)}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ conv. $\Rightarrow \sum \frac{\cos(n!)}{n^3}$ converge per confronto.

Infatti il confronto vale solo per serie a termini ≥ 0, e la prima non lo è.

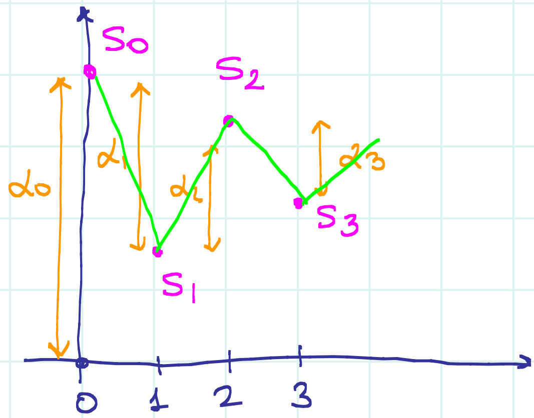
$\boxed{\text{Dim. Leibnitz}}$ Rappresentiamo graficamente le somme parziali

$S_0 = \alpha_0$

$S_1 = \alpha_0 - \alpha_1$

$S_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$

$S_3 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$



Idea : $S_{2n} \searrow$ e $S_{2n+1} \nearrow$

$\boxed{S_{2n} \text{ decresce}}$ $S_{2n+2} = S_{2n} \underbrace{- \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2}}_{\le 0 \text{ per (iii)}} \le S_{2n}$

$\boxed{S_{2n+1} \text{ cresce}}$ $S_{2n+3} = S_{2n+1} + \underbrace{\alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+3}}_{\ge 0 \text{ per (iii)}} \ge S_{2n+1}$

$\boxed{S_{2n+1} \le S_0}$ (tutti i dispari sono più piccoli di S_0)

$$S_{2n+1} = S_{2n} - \alpha_{2n+1} \le S_{2n} \underset{\uparrow}{\le} S_0$$

sui pari decresce

$\boxed{S_{2n} \ge S_1}$ $S_{2n} = S_{2n-1} + \alpha_{2n} \underset{\uparrow}{\ge} S_{2n-1} \ge S_1$

sui dispari decresce

Per il teo. delle successioni monotone

$$S_{2n} \longrightarrow \ell_p \in \mathbb{R} \qquad\qquad S_{2n+1} \longrightarrow \ell_d \in \mathbb{R}$$

Resta da dimostrare che $\ell_p = \ell_d$. Per questo basta osservare che

$$\begin{array}{ccccc} S_{2n+1} & - & S_{2n} & = & -\alpha_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ell_d & - & \ell_p & = & 0 \end{array}$$

— o — o —

Carabinieri per serie Siano a_n, b_n, c_n tre succ. tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \text{definitiv.}$$

(nessuna ipotesi di segno)

Supponiamo che $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano.
Allora anche $\sum b_n$ converge

Dim 1° passo $\sum (c_n - a_n)$ converge (diff. di due serie che convergono)

2° passo Osserviamo che

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ a_n \leq b_n}}{\leq} b_n - a_n \underset{\substack{\uparrow \\ b_n \leq c_n}}{\leq} c_n - a_n$$

Ora $\sum (c_n - a_n)$ converge, quindi anche $\sum (b_n - a_n)$ converge
(confronto tra serie a termini positivi)

3° passo $$\sum b_n = \underbrace{\sum a_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{converge} \\ \text{per ipotesi}}} + \underbrace{\sum (b_n - a_n)}_{\substack{\uparrow \\ \text{converge per} \\ \text{il 2° passo}}}$$

— o — o —

Dim. assoluta conv. $$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Per ipotesi le due laterali convergono, quindi converge la centrale.

— o — o —