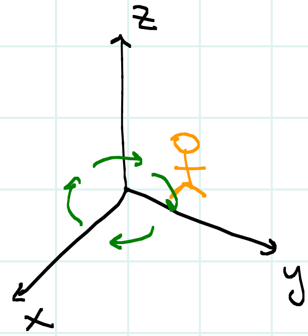
Esempio 1 Rotazione di 90° intorno all'asse z in verso giudicato ORARIO da un omino in piedi lungo il semiasse delle z positive

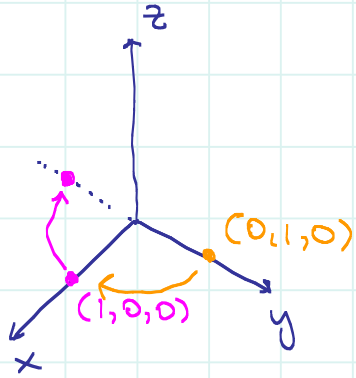


$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione di θ antioraria di angolo θ

Nel nostro caso dobbiamo prendere $\theta = -90°$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rotazione richiesta}$$



Verifica: $(1,0,0) \to (0,-1,0)$:)

$(0,1,0) \to (1,0,0)$:)

Determinare l'immagine del piano $x - 2y + 5z = 7$

Slogan: le parametriche vanno bene avanti!

Parametrica del piano

$$(7,0,0) + t\,(2,1,0) + s\,(5,0,-1) = (7+2t+5s,\ t,\ -s)$$

La trasformazione era

$$(x,y,z) \to (y,-x,z) \qquad \left(\text{matrice} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$(7+2t+5s,\ t,\ -s) \to (t,\ -7-2t-5s,\ -s)$$

$$= (0,-7,0) + t\,(1,-2,0) + s\,\overline{(0,-5,-1)}$$

volendo posso cambiare segno.

Nuovo piano, che se serve passo in cartesiana

Determinare l'immagine della retta
$$(1,2,3)+t\,(1,-1,1)$$

Stessa cosa $(1+t,\,2-t,\,3+t) \longrightarrow (2-t,\,-1-t,\,3+t)$
$$= (2,-1,3)+t\,(-1,-1,1)$$

Determinare la controimmagine del piano
$$2x+3y+5z=8$$

Slogan: le cartesiane vanno bene indietro

Al posto di (x,y,z) metto $(y,-x,z)$ e trovo
$$\boxed{2y-3x+5z=8}$$

Determinare la controimmagine della retta
$$(1,0,1)+t\,(2,1,6)$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Mi scrivo la retta data in cartesiana, cioè come intersezione di due piani, e poi porto indietro le cartesiane dei due piani

$$\begin{cases} x-2y = 1 \\ 3x - z = 2 \end{cases}$$

i due piani passano per $(1,0,1)$
gli (a,b,c) dei due piani sono $\perp$ alla direzione della retta

Tiro indietro i due piani (metto $(y,-x,z)$ al posto di (x,y,z))
$$\begin{cases} y+2x = 1 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

Risolvo e trovo la parametrica della retta richiesta

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ BOVINO

Prendo P e Q sulla retta, ad esempio

$P = (1,0,1)$ $\qquad$ $Q = (3,1,7) \leftarrow t=1$

Calcolo che controimmagini

$(y,-x,z) = (1,0,1)$ $\qquad$ $(y,-x,z) = (3,1,7)$

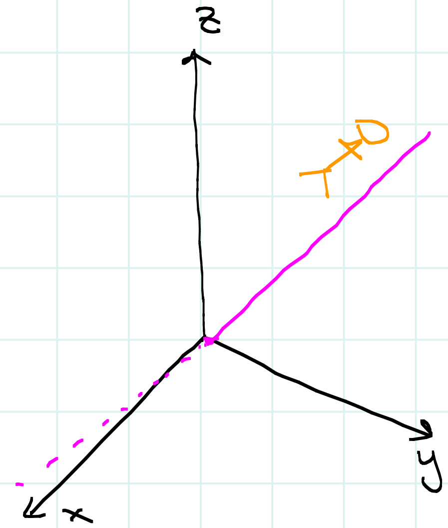
$f^{-1}(P) = (0,1,1)$ $\qquad$ $f^{-1}(Q) = (-1,3,7)$

Faccio la retta per i due nuovi p.ti

$$(0,1,1) + t(-1,2,6)$$

[Verificare che venga lo stesso nei 2 modi]

<u>Esempio 2</u> Rotazione di 90° in verso antiorario rispetto alla retta $t(1,2,3)$ (retta che passa per l'origine) per un omino in piedi nella direzione $(1,2,3)$



Ci procuriamo una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^3$ che contiene (un multiplo) del vettore $(1,2,3)$

$v_1 = (1,2,3)$

$v_2 = (2,-1,0)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leadsto (+3,6,-5) = v_3$$

Li normalizzo

$$\hat{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \quad \hat{v}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \hat{v}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{-5}{\sqrt{70}}\right)$$

↑ faccio in maniera che l'asse di rotazione sia su $\hat{v}_3$

In questa base la rotazione sarebbe

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ $\hat{v}_3$ resta fisso e il $\perp$ ruota

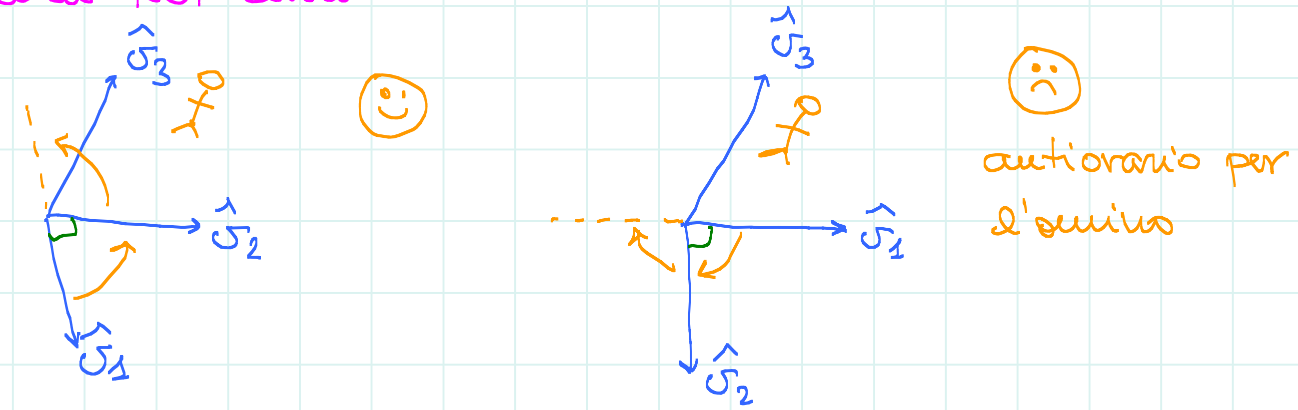
Mettendo $\theta = 90°$ troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

Ora basta prendere $M = (\hat{v}_1 | \hat{v}_2 | \hat{v}_3)$ e calcolare

MRM^{-1} che coincide con MRM^t.

In realtà NON basta



$\boxed{\text{ORIENTAZIONE}}$

Una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ è GIUSTA se un omino in piedi lungo v_3 vede che v_1 diventa v_2 con una rotazione di 90° ANTIORARIA

La base è sbagliata se la rotazione serve ORARIA

$\boxed{\text{Come lo riconosco?}}$ Guardo il Det della matrice cambio base

Det = 1 ⇝ giusta   Det = −1 ⇝ sbagliata

Conclusione :

→ il procedimento MRM^t funziona se M è giusta

→ se la base è sbagliata, basta scambiare v_1 e v_2 e diventa giusta.

(In alternativa uso la base "sbagliata" e metto un segno − rispetto all'angolo di rotazione)

— o — o —

Oss. Se uso la formula misteriosa per produrre v_3 a partire da v_1 e v_2 (v_1 sopra e v_2 sotto), allora la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ che ottengo è giusta.

— o — o —