ANALISI 1 - LEZIONE 37

Note Title 16/11/2024

Operazioni con i polinomi di Taylor (centro in $x_0 = 0$)

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad\qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$

$$a f(x) = a P_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{P_n(x) \cdot Q_n(x)}_{} + o(x^n)$$

↑ basta calcolare i termini fino al grado n

Composizioni

Casi facili

$$f(ax) = P_n(ax) + o(x^n) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$f(x^a) = P_n(x^a) + o(x^{an}) \qquad a > 0$$

Verifica della seconda Per ipotesi

$$f(x) = P_n(x) + x^n \omega(x) \qquad \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$$

Quindi

$$f(x^a) = P_n(x^a) + (x^a)^n \omega(x^a)$$

$$= P_n(x^a) + \boxed{x^{an} \underbrace{\omega(x^a)}_{\omega_1(x)}} \rightsquigarrow o(x^{an})$$

$$\lim_{x \to 0} \omega_1(x) = \lim_{x \to 0} \omega(x^a) = \lim_{y \to 0} \omega(y) = 0$$

↑ uso che $a > 0$

Caso generale

$$\boxed{f(g(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)}$$

ok, purché $g(0) = 0$ e quindi anche $Q_n(0) = 0$

Nel calcolo di $P_n(Q_n(x))$ basta considerare i termini di grado $\leq n$

Verifica   Ipotesi: $f(x) = P_m(x) + x^m \omega(x)$

Quindi

$$f(g(x)) = P_m(g(x)) + [g(x)]^m \omega(g(x))$$

L'ultimo termine lo scrivo come

$$[g(x)]^m \omega(g(x)) = \left[\frac{g(x)}{x}\right]^m x^m \boxed{\omega(g(x))}$$

$$\boxed{\omega(g(x))} \downarrow 0$$

pongo $y = g(x)$ e so che $g(0) = 0$

$$\left[\frac{g(x)}{x}\right] = \left[\frac{Q_n(x) + o(x^n)}{x}\right]$$

$\downarrow$ numero perché $Q_n(x)$ non ha il termine noto, quindi x si semplifica

Quindi l'ultimo termine è $x^n \cdot$ roba che tende a 0, quindi a sua volta $o(x^n)$.

Vediamo il primo termine: $P_m(g(x)) = P_m(Q_n(x) + o(x^n))$

$$= P_m(Q_n(x)) + o(x^n)$$

$\uparrow$ secondo punto importante

Il secondo punto è vero "termine a termine"

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} P_m(Q_n(x) + o(x^n)) = & \; a_0 \\ & + a_1 (Q_n(x) + o(x^n)) && \rightsquigarrow a_1 Q_n(x) + o(x^n) \\ & + a_2 (Q_n(x) + o(x)^n)^2 && \rightsquigarrow a_2 Q_n(x)^2 + o(x^n) \\ & + a_3 (\qquad\qquad)^3 && \rightsquigarrow a_3 Q_m(x)^3 + o(x^n) \\ & + \dots && \rightsquigarrow \dots \end{aligned}$$

— o — o —

Esempio 1 $e^{\sin x}$ $n = 4$

Parto da $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^{\sin x} \underset{\substack{\uparrow \\ t=\sin x}}{=} 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o(\sin^4 x)$$

Al posto di ogni $\sin x$ sostituisco lo sviluppo di $\sin x$:

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}(\quad)^2 + \frac{1}{6}(\quad)^3 + \frac{1}{24}(\quad)^4 + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{6}(x^3) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$o(\sin^4 x) = \sin^4 x \cdot \omega(x) = x^4 \underbrace{\boxed{\frac{\sin^4 x}{x^4}\,\omega(x)}}_{1 \cdot 0} = o(x^4)$$

Esempio 2 $\quad \cos(\sin x) \qquad n = 4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underbrace{o(x^5)}$$

la funzione è pari, quindi le restanti potenze saranno dal 6 in poi

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^{5,99})$$

Esempio 3 $\quad \sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}(\cos x)^3 + \boxed{o(\cos^3 x)}$

$= o(1)$ e si mangia TUTTO

Non posso farlo come sopra perché la funzione dentro non fa 0 in 0.

Sviluppi di Taylor con centro in x_0 generico

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: D \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in D$, sia $n \in \mathbb{N}$.
Allora sotto opportune ipotesi vale lo sviluppo

$$\boxed{f(x_0+h) = P_n(h) + o(h^n) \qquad \text{per } h \to 0}$$

dove

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^n$$

Altro modo di scriverlo: pongo $x = x_0+h$, cioè $h = x-x_0$
e diventa

$$\boxed{f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0}$$

Da dove arriva tutto questo?
Considero la funzione $g(h) = f(x_0+h)$
Scrivo Taylor per $g(h)$:

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

e ora calcolo le derivate di g in $h=0$:

$$g(0) = f(x_0)$$
$$g'(h) = f'(x_0+h) \rightsquigarrow g'(0) = f'(x_0)$$
$$g''(h) = f''(x_0+h) \rightsquigarrow g''(0) = f''(x_0)$$

e così via.

Esempio 4 Sviluppare $\sin x$ con centro in $x_0 = \frac{\pi}{6}$ e $n = 3$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Uso la formula e ottengo

$$f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)h+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)h^2+\frac{1}{3!}f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)h^3+o(h^3)$$

Calcolo le derivate: $f(x)=\sin x$ $\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\cos x$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f''(x)=-\sin x$ $\quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$f'''(x)=-\cos x$ $\quad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Quindi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{1}{4}h^2-\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+o(h^3) \quad \text{per } h\to 0$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso formula di addizione per $\sin x$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos h+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin h$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}h^2+o(h^3)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(h-\frac{1}{6}h^3+o(h^3)\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}h^2+\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+o(h^3)$$

<u>Esempio 5</u> Sviluppare $\log x$ con centro in $x_0=5$ e $n=4$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Faccio tutte le derivate e le calcolo in $x_0=5$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\log(5+h)=\log\left[5\cdot\left(1+\frac{h}{5}\right)\right]$

$$=\log 5+\log\left(1+\frac{h}{5}\right)=\log 5+\frac{h}{5}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{25}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{125}-\frac{1}{4}\frac{h^4}{625}+o(h^4)$$

$$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+o(t^4)$$

— o — o —