ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 21

Note Title 24/10/2023

DETERMINANTE Due modi di vederlo

① INPUT: matrice $n \times n$ (quadrata) OUTPUT: numero

Il numero è $\neq 0$ se e solo se la matrice è invertibile

② INPUT: n vettori di $\mathbb{R}^n$ OUTPUT: numero

Il numero è $\neq 0$ se e solo se gli n vettori sono lin. indip.

(e quindi, essendo in numero giusto, sono una base)

Collegamento fra ① e ②: prendo gli n vettori e li uso come righe della matrice.

Come lo calcolo?

$\boxed{n=2}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\det(A) = ad - bc}$

$\boxed{n=3}$ Formula di SARRUS

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$\mathrm{Det} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Det} = {} & aei + bfg + cdh \\ & - ceg - bdi - afh \end{aligned}}$$

ACHTUNG! Le formule alla SARRUS valgono solo con $n=2$ e $n=3$. POI NO!!

Esempio Stabilire se

$$v_1 = (1,0,2) \qquad v_2 = (1,3,1) \qquad v_3 = (2,0,-1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Superbovino}}$ Verifico che sono lin. indip. + generatori

$\boxed{\text{Bovino e basta}}$ Essendo in numero giusto, verifico solo la lin. indip.

$$a(1,0,2) + b(1,3,1) + c(2,0,-1) = (0,0,0)$$

Risolvo il sistema e spero che la soluz. unica sia $a=b=c=0$.

$\boxed{\text{Moderno}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -3+0+0-12-0-0 = -15 \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ sono base ☺

Esempio 2 Stabilire se

$$x+5 \qquad x^2-1 \qquad x^2+x+3$$

sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$\boxed{\text{Moderno}}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x+5 \\ x^2-1 \\ x^2+x+3 \end{array}$$

$$\text{Det} = 5\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 3 - 1(-1)\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 1$$
$$= 0+3+0-0+1-5 = -1 \neq 0$$

Quindi sono lin. indip., e dunque una base

— o — o —

Caso $n \geq 4$ Ci sono due metodi per calcolare il Det

1. Algoritmo di GAUSS
2. Sviluppi di LAPLACE
3. Sviluppi di LEIBNIZ (scomodo in pratica)

Det via GAUSS

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Facciamo solo due tipi di operazioni

- scambi di riga
- operazioni ultra-ortodosse $\quad R_i \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. } 1}}{R_i} + bR_j$

fino ad arrivare alla forma a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_2 \\ R_4 + 4R_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - \frac{3}{5} R_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{38}{5} \end{pmatrix}$$

Arrivati nella forma a scala, moltiplico i tizi sulla diagonale

$$1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot \frac{38}{5} = -38$$

$$\text{Det} = -38 \cdot (-1)^{\text{numero scambi riga}} = 38$$

$\boxed{\text{Det via LAPLACE}}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

→ Scelgo una riga o una colonna che mi stanno simpatiche
in questo caso la prima riga

$$\text{Det} = \boxed{0} \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \boxed{1}\ \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$- \boxed{2} \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo i 3×3 con SARRUS

$$-1(3-1-18) - 2(2-12-3+2) = -1 \cdot (-16) - 2 \cdot (-11)$$
$$= 16 + 22 = 38 \quad :)$$

Formula ricorsiva: so calcolare i Det $n \times n$ riducendomi a Det $(n-1) \times (n-1)$.

Il pattern dei segni è quello a scacchiera

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Cosa carina: viene lo stesso risultato indipendentemente dalla riga o colonna prescelta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo rispetto alla terza colonna

$$\text{Det} = 0 \cdot \ldots - 3 \, \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - 0 \cdot \ldots$$

$$= -3(-8-2-6) + 1(1-4-4-3)$$

$$= -3(-16) - 10 = 48 - 10 = 38$$ ☺

Sviluppi di Leibniz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Tutti gli addendi che compaiono nella formula sono prodotto di n termini presi da righe e colonne diverse

Nello sviluppo ci sarà un bdi.
Con che segno ?
Scriviamo le colonne di prelievo

$C_2 - C_1 - C_3$ $\qquad$ $C_1 - C_2 - C_3$

Uno scambio ⟿ segno $-$

— o — o —