$\boxed{\text{INTEGRALI OSCILLANTI}}$ (Trucco dell'integrazione per parti)

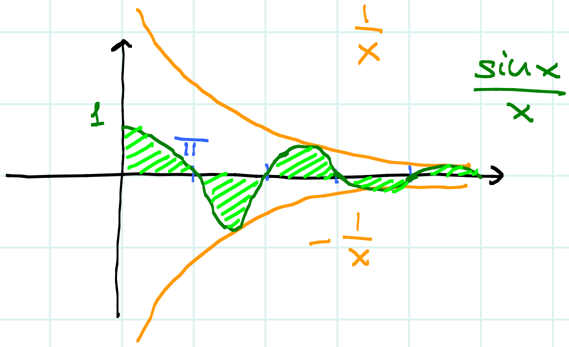
Esempi classici:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx$$

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



Osservo che l'unico problema è in $x = +\infty$ (in 0 il limite esiste ed è finito). Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^{3} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{integrale proprio, quindi un numero}} + \int_3^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

↖ la convergenza dipende da questo

Oss. Se metto i valori assoluti $\dfrac{|\sin x|}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Ora

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$, quindi NON posso dire nulla di $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

Tornando al problema

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_3^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_3^{A} \underbrace{\frac{1}{x}}_{G} \cdot \underbrace{\sin x}_{f}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_3^A}_{F\,G} - \int_3^A \underbrace{\frac{\cos x}{x^2}}_{F\quad g}\,dx$$

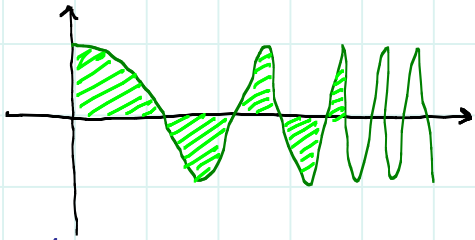
$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\underbrace{\frac{\cos A}{A}}_{\downarrow\, 0} + \frac{\cos 3}{3} - \int_3^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right) = \frac{\cos 3}{3} - \int_3^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Ora osservo che $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ e quindi

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \underset{\substack{\text{confronto per}\\ \text{integrande } \ge 0}}{\Longrightarrow} \int_3^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \text{ converge} \underset{\substack{\text{Assoluta}\\ \text{integrabilità}}}{\Longrightarrow} \int_3^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ converge}$$

Quindi anche $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$



Intanto $$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^3\cos(x^2)\,dx}_{\text{integrale proprio}} + \int_3^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$$

$$\int_3^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A\cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A \underbrace{2x\cos(x^2)}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{2x}}_{G}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left\{\underbrace{\left[\frac{\sin(x^2)}{2x}\right]_3^A}_{F\,G} - \int_3^A \sin(x^2)\left(-\frac{1}{2x^2}\right)dx\right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left\{\underbrace{\frac{\sin(A^2)}{2A}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{\sin 9}{6}}_{\downarrow\,\text{numero}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_3^A\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx}_{\downarrow\,\int_3^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}dx}\right\}$$

che converge assolutamente :)

<u>Oss.</u> Per gli integrali impropri con problema all'infinito non è detto che valga la cond. necessaria come per le serie, cioè l'integrale può convergere anche se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste, come nell'esempio precedente.
Quello che non può succedere è che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$.

$\boxed{\text{CRITERIO DI DIRICHLET}}$ Consideriamo un integrale improprio del tipo

$$\int_M^{+\infty} a(x)\, b(x)\, dx$$

Supponiamo che

(i) la primitiva $A(x)$ di $a(x)$ è una funzione $\boxed{\text{limitata}}$

(ii) la funzione $b(x)$ è di classe C^1, $\boxed{\text{decrescente}}$ e tende a 0 per $x \to +\infty$.

Allora l'integrale improprio converge.

$\boxed{\text{Dim}}$ Come nei due esempi precedenti

$$\lim_{R\to+\infty} \int_M^R \underset{f}{a(x)}\, \underset{G}{b(x)}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \left\{ \Big[\underset{F}{A(x)}\, \underset{G}{b(x)}\Big]_M^R - \int_M^R \underset{F}{A(x)}\, \underset{g}{b'(x)}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \Big\{ \underbrace{A(R)\, b(R)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{A(M)\, b(M)}_{\text{Numero}} - \int_M^R A(x)\, b'(x)\, dx \Big\}$$

perché A è limitato e $b(R) \to 0$

$$= -A(M)\, b(M) - \underbrace{\int_M^{+\infty} A(x)\, b'(x)\, dx}_{\text{Spero che converga assolutamente}}$$

Metto i valori assoluti

$$\int_M^{+\infty} \underbrace{|A(x)|}_{\leq \text{costante}} \cdot |b'(x)|\, dx \leq \text{costante} \cdot \int_M^{+\infty} |b'(x)|\, dx$$

Ora b è decrescente, quindi $b'(x) \leq 0$, quindi $|b'(x)| = -b'(x)$ e quindi

$$\int_M^R |b'(x)|\, dx = -\int_M^R b'(x)\, dx = -[b(x)]_M^R$$

$$= -\underset{\downarrow\atop 0}{b(R)} + b(M)$$

e quindi l'integrale converge.