allora $\exists\, R > 0$ tale che $f(x) \geq f(0) + 1 \forall\, x \in (B_R(0))^c$.
Considero $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}$ (la linea sopra indica la palla chiusa) con $f : \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq R\}$ ora questo insieme che è $\overline{B_R(0)}$ è compatto, allora so per Werstrass classico che $\exists \min\limits_{x \in \overline{R_R(0)}} f(x) = m$, ora vogliamo dimostra che m è minimo su tutto R^n e non solo su $\overline{B_R(0)}$. Ci sono due casi.

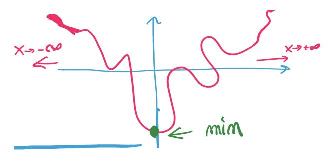
1. Se $|x| \leq R$ (dentro la palla), allora $f(x) \geq m$ per definizione di $m = \min\limits_{B_R(0)} f$.

2. Se $|x| \geq R$ (fuori la palla), allora $f(x) \geq M = f(0) + 1$ (questo per come ho scelto R) $\geq f(0) \geq m$ e questo perché 0 sta nella palla $|x| \leq R$, quindi anche in questo caso $f(x) \geq m$.

   Quindi ho dimostrato che $f(x) \geq m \forall x \in \mathbb{R}^n$ e per il Teorema di Weristrass classico sappiamo che $\exists\, x_0 \in B_R(0)$ tale che $f(x_0) = m$ quindi ho trovato il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$. ■

Tutto questo può essere enunciato in maniera analoga per il massimo di una funzioni in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 19.4.2 (Weristrass generalizzato massimo)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e supponiamo che $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = -\infty$ allora, esiste $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.*



20 Derivate parziali seconde

Nell'analisi in una variabile per studiare localmente una funzione nell'intorno di un punto stazionario, quindi si faceva $f'(x_0) = 0$ e poi su studiava il segno della derivata seconda $f''(x)$ e concludevamo che se $f''(x_0) > 0$ c'era un minimo locale. Nell'analisi in più variabili non possiamo derivare più volte perché non abbiamo una sola variabile, quindi dobbiamo introdurre le derivate successive per funzioni di più variabili.

La prima cosa che ci verrebbe in mento è quello di derivare parzialmente più volte, quindi avere $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che sono le derivate parziali prime e, per iniziare, come fare le derivate parziali seconde.

Esempio 20.0.1. $f(x, y) = x^2 + y^3 + x^4 \cdot y^5$, $\frac{\partial f}{\partial} = 2x + 4x^3 y^5 = g(x, y)$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 5x^4 y^4 = h(x, y)$ da qui dobbiamo partire da $g(x, y)$, $h(x, y)$ e ricalcolare le derivate, quindi avrei per esempio per $g(x, y)$ le derivate $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ che però a loro volta si potrebbero scrivere come $\frac{\partial \partial f}{\partial \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$ e $\frac{\partial \partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$. Nel caso di $h(x, y)$ invece ho $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$ e $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$.
Per questo esempio, ho quindi nel caso di une derivata parziali seconde 4 derivate prime. In maniera più generale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Longrightarrow n \cdot n = n^2$ derivate parziali seconde.

Osservazione 20.0.1. In generale per una funzioni di n variabili ci sono n derivate parziali prime e n^2 derivate parziali seconde. Il metodo di calcolo è sempre lo stesso.

Esempio 20.0.2. Tornando all'esempio scritto sopra ho che $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x + 4x^3 y^5$ che poi va $f_{xx} = 2 + 12x^2 y^5$ e $f_{xy} = 20x^3 \cdot y^4$, mentre $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3y^2 + 5^4 y^4$ mentre le derivate seconde sono $f_{yy} = 6y + 20x^4 y^3$ e $f_{yx} = 20x^3 y^4$.

Vediamo dall'esempio sopra che se derivo f_{yx} e f_{xy} abbiamo due risultati uguali, posso quindi dire che in generale questi valori sono sempre uguali. Da qui possiamo enunciare un teorema che parla dell'ordine di derivazione, enunciamo questo teorema per il caso di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorema 20.0.1 (Inversione dell'ordine di derivazione)**.** Se f_{xy} e f_{yx} esistono in un intorno del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$ e sono continue nel punto (x_0, y_0) allora coincidono ovvero $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Con questo teorema possiamo dire che non conta l'ordine con cui derivo nel calcolare le derivate parziali successive. Questo vale anche per le derivate parziali non solo seconde, ma anche le terze, per esempio $f_{xyx} = f_{yxx}$ e $f_{xyy} = f_{xyy}$.

20.1 Matrice Hessiana

Sappiamo che le derivate parziali prime le possiamo derivare in $\nabla f = (f_x, f_y)$, il vettore gradiente e quello che ci da la condizione di stazionarietà di un punto perché corrisponde a $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ di (x_0, y_0), le derivate seconde allora le organizzo in una matrice che viene detta **matrice Hessiana**.

Definizione 20.1.1 (Matrice Hessiana)**.** *Si dice **matrice Hessiana** la matrice formata dalle derivate seconde. Quindi nel caso di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e nel caso di $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ho:*

$$HF = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad e \quad HF = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

Osservazione 20.1.1. Se le derivate parziali seconde esistono e sono continue allora l'ordine di derivazione non importa e HF è simmetrica.

L'idea è che tutte le condizioni che in analisi in 1 dimensione coinvolgono il segno della derivata seconda, nell'analisi in pi§ variabili coinvolgono la segnatura della matrice hessiana.

20.2 Studio di un punto stazionario

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ ($\iff$ (x_0, y_0) punto stazionario), abbiamo i seguenti criteri per decidere se questo punto è minimo o massimo locale.

1. Se $Hf = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ (ricordiamo che mettiamo le derivate parziali seconde e che Hf è simmetrica se f è abbastanza regolare, ai sensi del Teorema di inversione di derivazione) è definita positiva allora (x_0, y_0) è punto di minimo locale (una matrice è definita positiva $\iff$ tutti i suoi autovalori sono positivi $(++)$)
2. Se Hf è definita negativa (e cioè entrambi gli autovalori sono strettamente negativi $\iff (--)$) allora (x_0, y_0) è un punto di max locale.
3. Se Hf è indefinita (quindi se esistono due autovalori discordi $(+-)$) allora (x_0, y_0) è un punto di sella, questo vuol dire che rispetto a questo punto esistono alcune direzione dove la funzione cresce ed altri dove decresce.
4. Se Hf è degenere (ovvero $det\, Hf = 0$, quindi 0 è tra gli autovalori) non posso concludere niente.

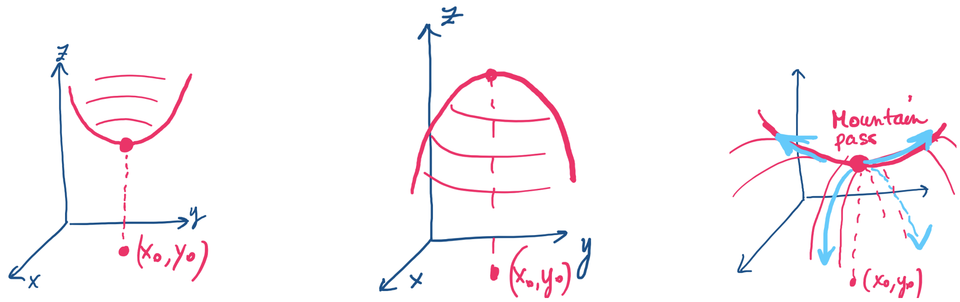
Osservazione 20.2.1. La matrice Hessiano fornisce informazioni locali, cioè di permette di concludere l'esistenza di massimo o minimi locali (vicino al punto (x_0, y_0)) ma non ci da informazioni globali.

Ricordiamo che nell'analisi in 1 dimensione i minimi ed i massimi li avevamo

- Se in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 è un punto di minimo locale, allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$ (supponendo che in $x_0 \exists\, f', f''$)
- Se x_0 è un punto di massimo locale allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$.

Nell'analisi in più variabili abbiamo un concetto analogo. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di minimo locale, allora $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ e $Hf(x_0, y_0) \geq 0$ (matrice semi definita positiva, gli autovalori sono non negativi). Nel caso di massimo locale la condizione $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ rimane e abbiamo $Hf(x_0, y_0) \leq 0$.

Riassumendo, condizione sufficiente per un minimo locale è che $\nabla f = 0$ e $Hf > 0$, mentre avere un minimo locale implica che $\nabla f = 0$ e $Hf \geq 0$ (che è condizione necessaria). Analogamente si può dire per il massimo locale.
Ad esempio se la matrice hessiana ha autovalori 0,3 ($Hf \leq 0$), posso dire solamente che non è di massimo (perché $Hf \leq 0$).



(a) Minimo (b) Massimo (c) Punto di sella

Esempio 20.2.1. Data $f(x, y) = x^2 + y^4$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) = (2x, 4y^3)$.
$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0) \implies (0, 0)$ e punto stazionario, per studiare localmente (vicino a (0,0)) la funzione f si calcoliamo la matrice hessiana. $Hf = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$, $Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ha un autovalore positivo $\lambda_1 = 2$ ed un autovalore nullo $\lambda_2 = 0$, quindi Hf è semi definita positiva $Hf \geq 0$, l'unica cosa che posso dire è che $(0, 0)$ non è un punto di massimo locale, se $(0, 0)$ fosse punto di massimo locale infatti avremmo $hf(0, 0) \leq 0$. Non possiamo concludere nemmeno se è un minimo perché ci dovrebbe essere un $>$ e non un $\geq$, se però andiamo ad analizzare la funzione vediamo che $f(x) = x^2 + y^4 \geq 0$ e $f(0, 0) = 0$ si vede a mano che $(0, 0)$ è un punto di minimo globale quindi $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esempio 20.2.2. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 - y^4$, anche in questo caso abbiamo che $\nabla f(x, y) = (2x, -4y^3)$, $(0, 0)$ è un punto stazionario quindi $\nabla f(0, 0) = 0$.
$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$, gli autovalori sono $\lambda_2 = 2$ $\lambda_2 = 0$ quindi Hf è semi definita positiva in $(0, 0)$, quindi il punto $(0, 0)$ on è massimo locale. In questo caso l'origine $(0, 0)$ non è ne un massimo ne un minimo, questo perché se $y = 0 \to f(x, 0) = x^2 \geq 0$ e $x = 0 \to f(0, y) = -y^4 \leq 0$ quindi se mi muovo su l'asse y la funzione cresce mentre su l'asse y la funzione decresce. Vicino a $(0, 0)$ esiste punti in cui $f(x, y) > 0$ a punti in cui $f(x, y) < 0$ quindi $(0, 0)$ non è ne massimo ne minimo.

Esempio 20.2.3. Dato $f(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^4$, $f_x = 3x^2 + 2y^2$, $f_y = 2x^2y + 4y^3$, e $\nabla f = (f_x, f_y)$, quindi $\nabla f(0, 0) = 0$ quindi $(0, 0)$ è punto stazionario.
$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 6x + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 12y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.