ANALISI 1 - LEZIONE 43

Note Title 23/11/2024

Criterio confronto asintotico

Siano a_n e b_n due successioni con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

<u>Caso standard</u> Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \to \ell \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso tipo di comportamento.

<u>Casi limite</u> Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0$$

Allora [$\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ definitiv., quindi $a_n \leq b_n$ definitiv]

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$\sum b_n = +\infty$ $\Rightarrow$ BOH

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. Allora [$\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ definitiv, quindi $a_n \geq b_n$ definitiv.]

$\sum b_n = +\infty$ $\Rightarrow$ $\sum a_n = +\infty$

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ BOH

<u>Esempio 1</u> (Facile) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{a_n}$

Provo confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$. Osservo che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n} \cdot n = \log n \to +\infty \quad \text{(caso limite)} \qquad [a_n \geq b_n \text{ defin.}]$$

Ora $\sum \frac{1}{n}$ diverge (armonica con $a=1$) $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Esempio 2 (Facile) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$

Provo C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$. Osservo che

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2 \log n} \cdot n^2 = \frac{1}{\log n} \to 0 \quad (\text{caso limite})$$

[$\frac{a_n}{b_n} \to 0$ quindi $a_n \leq b_n$ definitiv.]

Ora $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge (armonica con esponente $\alpha = 2$)

Quindi $\sum a_n$ converge.

Esempio 3 (Più delicato) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\log n}{n^2}}}_{a_n}$

$\boxed{\text{Tentativo 1}}$ C.A. con $\frac{1}{n^2} = b_n$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n^2 = \log n \to +\infty$$

[$\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ ... $a_n \geq b_n$ defin.]

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ BOH ☹

$\boxed{\text{Tentativo 2}}$ C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n = \frac{\log n}{n} \to 0 \quad (\text{potenza batte log})$$

[$\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ ... $a_n \leq b_n$ defin.] $\quad \sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

$\Rightarrow \sum a_n$ BOH ☹

$\boxed{\text{Tentativo 3}}$ C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{4/3}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n^{4/3} = \frac{\log n}{n^{2/3}} \to 0 \quad (\text{potenza batte log})$$

Come prima $a_n \leq b_n$ definitiv.

Ora però

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{4/3}} \text{ converge perché } \frac{4}{3} > 1$$

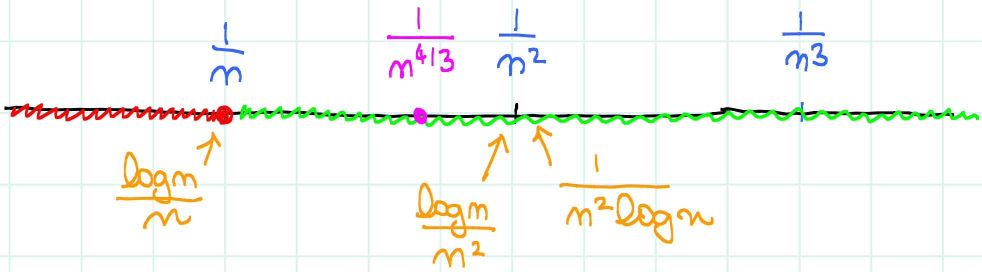
Quindi $\sum a_n$ converge

Interpretazione brutale dei 3 esempi

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\quad \sum \frac{\log n}{n}$ diverge ancora di più, perché $\log n$ rende i termini più grandi

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\quad \sum \frac{1}{n^2 \log n}$ converge ancora di più, perché $\log n$ "collabora" a rendere i termini più piccoli

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\quad \sum \frac{\log n}{n^2}$ Ora $\log n$ "rema contro la convergenza" perché rende i termini più grandi. Tuttavia $\log n$ è debole, quindi sposta poco rispetto a $\frac{1}{n^2}$



Quello che abbiamo dimostrato nell'esempio 3 è che $\frac{\log n}{n^2}$ sta a destra di $\frac{1}{n^{4/3}}$.

Oss. Invece di $\frac{4}{3}$ potevo usare un qualunque esponente in $(1,2)$

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Tentativo 1 Criterio della radice $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \to 1 \Rightarrow$ BOH ☹

Tentativo 2 C.A. con $b_n = \dfrac{1}{n^{2024}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2024}}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{e^{2024 \log n}}{e^{\sqrt{n}\log 2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}\log 2 - 2024 \log n}} \to 0$$

$\sqrt{n}$ batte $\log n$

Quindi $a_n \leq b_n$ definitiv. Poiché $\sum b_n$ converge (armonica con $a = 2024$) anche $\sum a_n$ converge

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

Osserviamo che $\log n \geq 5$ definitivamente (potevo mettere 2 o 2024)

Quindi

$$n^{\log n} \geq n^5 \text{ defin.}$$

e quindi

$$\frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^5} \quad \text{definitiv.}$$

Ora $\sum \frac{1}{n^5}$ converge, quindi anche $\sum \frac{1}{n^{\log n}}$ converge

Esempio 6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

$$(\log n)^{\log n} = e^{\log n \cdot \log(\log n)}$$

$A^B = e^{B \log A}$

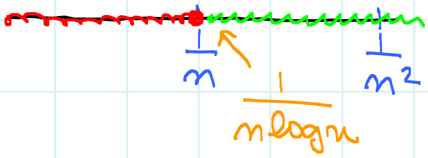
$$= \left(e^{\log n}\right)^{\log(\log n)} = n^{\log(\log n)}$$

Quindi

$$\sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}} = \sum \frac{1}{n^{\log(\log n)}}$$

e si conclude come nell'esempio prec.

Oss. Se prendiamo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$



Lo spostamento è verso destra, ma basta per convergere?

No! Però i C.A. attuali non bastano per trattare questo caso, che è in tabellina per conto suo.

Ricordo che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$$

converge se e solo se $a > 1$