Esercizio $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n!}{n\log n}$

Preliminare: se fosse $\frac{1}{n}\log(n!) = \log\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Limite da tabellina: $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{1}{e}$ (rapporto radice)

$$\frac{\log(n!)}{n\log n} \underset{\uparrow\ \text{precorso}}{=} \frac{\log\sqrt[n]{n!}}{\log n} = \frac{\log\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n\right)}{\log n} = \underbrace{\boxed{\frac{\log\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}{\log n}}}_{\downarrow\ \frac{-1}{+\infty}=0} + \underbrace{\frac{\cancel{\log n}}{\cancel{\log n}}}_{\downarrow\ 1} \to 1.$$

Esercizio $f(x) = e^x - \lambda\arctan x \qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Studiare iniettività, surgettività, limitatezza al variare di λ.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow$ addio lim. superiore

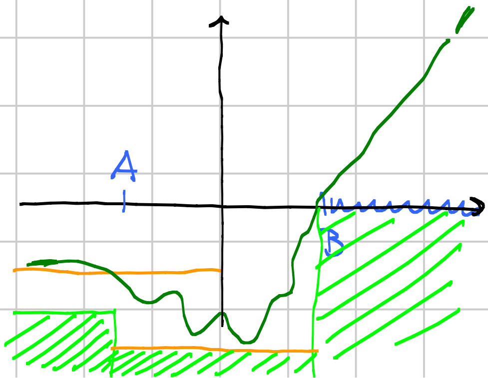
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda\frac{\pi}{2} \Rightarrow$
- è limitata inferiormente
- NON è surgettiva.

Dimostro che è lim. inferiormente

Poiché $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$,

esiste $B>0$ t.c.

$f(x)\geq 0 \quad \forall x\geq B$



Poiché $f(x) \to \frac{\pi}{2}\lambda$ per $x \to -\infty$, esiste $A<0$ t.c.

$$f(x) \geq \frac{\pi}{2}\lambda - 12 \qquad \forall x \leq A$$

Per Weierstrass vero esiste $m := \min\{f(x) : x \in [A,B]\}$.
Ora posso dire che

$$f(x) \geq \min\{m, \tfrac{\pi}{2}\lambda - 12, 0\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Resta da esaminare l'iniettività. Essendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua vale l'implicazione

iniettiva $\iff$ strett. monotona (crescente)

Guardo $f'(x)$

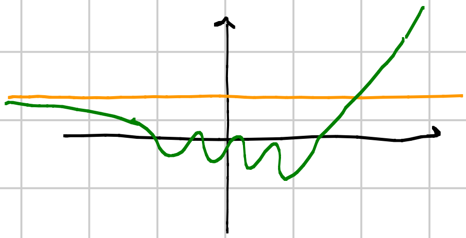
$$f'(x) = e^x - \lambda \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)e^x - \lambda}{(1+x^2)}$$

Il segno dipende dal solo numeratore. Distinguo 2 casi:

- se $\lambda \leq 0$, allora $f'(x) > 0 \Rightarrow$ (monotonia 2) è strett. cresc. e quindi iniettiva (in questo caso non esiste il min)
- se $\lambda > 0$, allora $f'(x) > 0$ per x grandi ($f'(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$)

  mentre $(1+x^2)e^x - \lambda \to -\lambda < 0$ per $x \to -\infty$, quindi il num. è negativo per x molto negativi.
  Questo dice che ci sono intervalli (anzi una semiretta) in cui $f(x)$ è decrescente. $\Rightarrow$ addio iniettività

<u>Osservazione</u> Ora possiamo dire che $f(x)$ ammette minimo in $\mathbb{R}$ se e solo se $\lambda > 0$.



Fatto generale: sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supp. che

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (basterebbe un $m > \ell$) (o un qualunque m^-)

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell^-$

Allora esiste $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Partenza Dalla seconda ipotesi so che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < \ell$. Da qui è in discesa, cioè prendo

$A < 0$ t.c. $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \leq A$

$B > 0$ t.c. $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \geq B$

A questo punto $x_0 \in [A, B]$ e

$$\underbrace{\min\{f(x) : x \in [A, B]\}}_{\leq f(x_0)} = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

— o — o —

Esercizio $a_n = \dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{n^2 + \qquad + 7}$ $a_n \to +\infty$

Dimostrare che è definitivamente monotona

Moralmente è n, ma anche $x + 10 \sin x$ è moralmente x ma non è crescente.

Impongo $a_{n+1} > a_n$: $\dfrac{(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 + \qquad + 7} \overset{?}{>} \dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{n^2 \qquad + 7}$

Svolgo alcuni conti e spero di ridurmi a qualcosa del tipo

$f(n) \overset{?}{>} 0$ se per caso $f(n) \to +\infty$, allora ho gratis che è vera definitivamente.

$$\left[(n+1)^3+3(n+1)^2+1\right](n^2+7) \overset{?}{>} (n^3+3n^2+1)(n^2+2n+8)$$

Guardo le potenze + grandi

$$(n^3+3n^2+3n^2+\ldots)(n^2+7) \overset{?}{>} (n^3+3n^2+\ldots)(n^2+2n+8)$$

$$\cancel{n^5}+6n^4+\ldots \overset{?}{>} \cancel{n^5}+2n^4+3n^4+\ldots$$

$$n^4+\ldots \overset{?}{>} 0$$

<u>Oss</u> 1 - Se c'era pure il $\cos n!$ non cambiava nulla perché andava a moltiplicare i termini tipo n^3 o meno

2 - Volendo essere rigoroso, al posto dei puntini devo scrivere $o(n^4)$

N.B. $n^3 = o(n^4)$ per $n \to +\infty$

$n^2 = o(n^4)$ per $n \to +\infty$

— o — o —