ANALISI 1 — LEZIONE 025

Note Title 20/10/2016

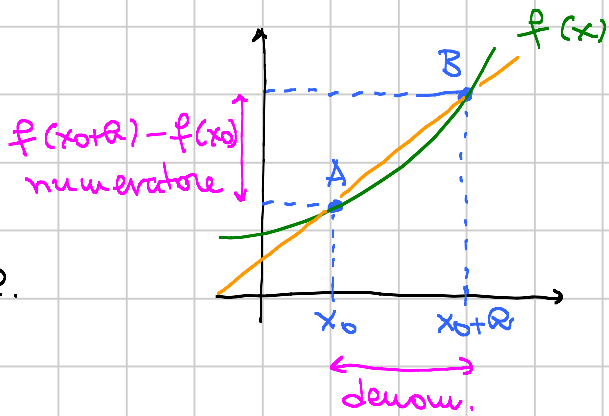
DERIVATE IN UNA VARIABILE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f : A \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$ [x_0 interno ad A, cioè esiste $\delta > 0$ t.c. $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq A$]

RAPPORTO INCREMENTALE (Difference quotient)

È la funzione $\boxed{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ definito almeno per $h \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\}$.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{\text{incremento di } y}{\text{incremento di } x}$$



Geometricamente rappresenta il coeff. angolare della retta AB

<u>Def. di derivata</u> Si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{esiste ed è reale.}$$

Tale limite si indica con $f'(x_0)$ (derivata prima di f in x_0)

Altre notazioni: $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $Df(x_0)$

Geometricamente: fare tendere $h \to 0$ equivale a $B \to A$, quindi la retta $AB \to$ retta tangente al grafico in A

$\boxed{f'(x_0) = \text{coeff. angolare retta tang. al grafico in } A}$

Eq. retta tangente $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

Def. di differenziale Siano A, f, x_0 come sopra.
Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)} \quad \text{per } h \to 0$$

Teorema La funzione f è diff. in x_0 se e solo se f è derivabile in x_0. Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

Dim. Hp: f derivabile
Tesi: f diff. e $\alpha = f'(x_0)$

Devo dim. che $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$, cioè
$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h)$ per $h \to 0$

cioè

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} - f'(x_0) = 0$$

Hp: f diff. Tesi: f derivabile e $f'(x_0) = \alpha$

Faccio il limite del rapp. incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

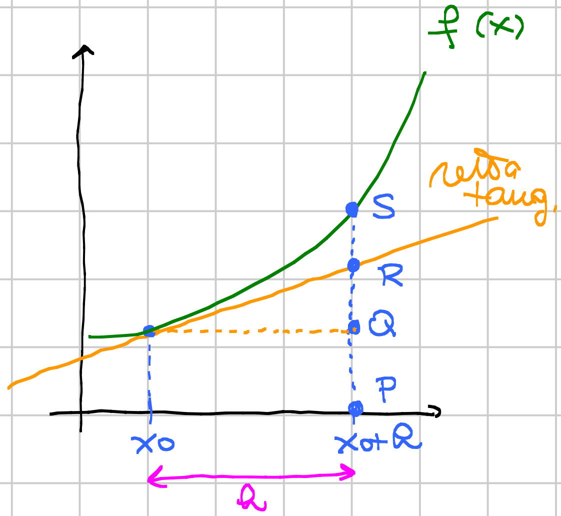
$$= \lim_{h\to 0} \alpha + \frac{o(h)}{h} = \alpha = f'(x_0).$$

— o — o —

Oss. Ad analisi 2 non c'è più l'equivalenza fra le 2 definizioni.

Interpretazione geometrica del differenziale

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$
$$SP = PQ + QR + SR$$



Il termine αh è proporzionale ad h come la lungh. di QR
Quando $h \to 0$, anche $SR \to 0$, ma lo fa più velocemente di h, e questo vuol dire $o(h)$

Operativamente: se riesco a scrivere $f(x_0+h)$ come somma di 3 termini (costante + costante $\cdot h$ + $o(h)$), la seconda costante è la derivata.

— o — o —

Derivata delle funzioni elementari

Esempio 1 $\quad f(x) = x^2$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$
$$f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = x_0^2 + 2x_0 h + h^2$$
$$f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Esempio 2 $\quad f(x) = x^3$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$
$$f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 h + \underbrace{3x_0 h^2 + h^3}_{+o(h)}$$
$$f(x_0) + \alpha h$$

$$f'(x_0) = 3x_0^2$$

__Esempio 3__ $f(x) = e^x$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\overset{\overset{e^{x_0}\cdot e^h}{\shortparallel}}{e^{x_0+h}} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \underbrace{\boxed{\dfrac{e^h - 1}{h}}}_{\downarrow \, 1} = e^{x_0}$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^h \underset{\text{sviluppino}}{\overset{}{=}} e^{x_0}(1+h+o(h))$

$= \underset{f(x_0)}{e^{x_0}} + \underset{\alpha}{e^{x_0}} \, h + o(h)$

$f(x_0) + \alpha h + o(h)$

__Esempio 4__ $f(x) = \sin x$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$

$\sin\alpha - \sin\beta = \dots$

$\sin(x_0+h) = \dots$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left[\cos x_0 \cdot \underbrace{\boxed{\dfrac{\sin h}{h}}}_{\downarrow\, 1} + \sin x_0 \underbrace{\boxed{\dfrac{\cos h - 1}{h\cdot h}}}_{\downarrow\, -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{h}}_{\downarrow\, 0}\right] = \cos x_0$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$

$= \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h$

(sviluppini) $= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$

$= \underset{f(x_0)}{\sin x_0} + \underset{\alpha}{\cos x_0} \cdot \underset{h}{h} + \underset{o(h)}{o(h)}$

__Esempio 5__ $f(x) = \log x$ $\qquad x_0 > 0$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right]$

$= \log x_0 + \log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)$

Uso sviluppino $\log(1+t) = t + o(t)$

$$= \underbrace{\log x_0}_{f(x_0)} + \frac{1}{x_0} \cdot h + o(h)$$

$$f(x_0) + \alpha \cdot h + o(h)$$

Quindi $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

Esempio 6 $\quad f(x) = 7^x$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $\quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{7^{x_0+h} - 7^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} 7^{x_0} \boxed{\frac{7^h - 1}{h}}$

$\downarrow \log 7$

$$= \log 7 \cdot 7^{x_0}$$

Conclusione In poche parole

- limiti notevoli
- sviluppini
- derivate delle funzioni elementari

sono 3 facce della stessa medaglia.

— o — o —