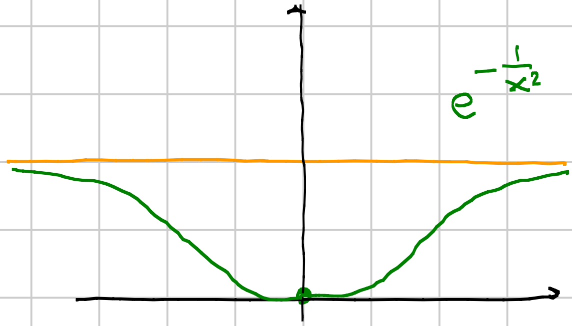
ANALISI 1 - LEZIONE 053

Note Title 24/11/2016

$\boxed{\text{EPPUR SI MUOVE}}$ Consideriamo la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = [e^{-\infty}] = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^0 = 1$$

$f(x)$ è strett. cresc. per $x > 0$ e pari

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \qquad \text{per } x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \underset{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} e^{-y^2} \cdot 2y^3 = \lim_{y \to +\infty} 2 \frac{y^3}{e^{y^2}} = 0$$

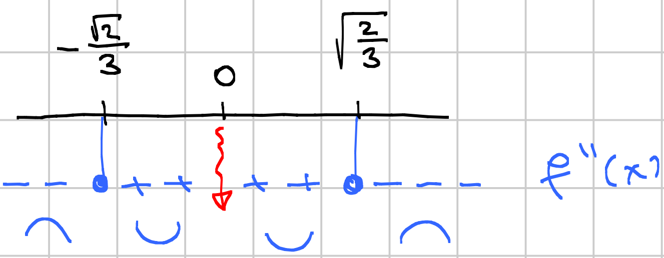
Per vedere se è derivabile in $x = 0$ uso rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} e^{-\frac{1}{h^2}} \cdot \frac{1}{h} = 0$$

Da questi conti segue che $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{+4}{x^6} + e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{-6}{x^4} = -e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^6}(-4 + 6x^2)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^6}(4 - 6x^2)$$



Si può verificare che $f''(x)$ esiste anche per $x=0$ e vale 0 (basta fare il rapporto incrementale in $x=0$ per $f'(x)$), quindi $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Più in generale si verifica che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(k)}(0) = 0$.

L'idea è di dimostrare per induzione che

$$\boxed{f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \qquad x \neq 0 \qquad \text{e} \qquad f^{(k)}(0) = 0}$$

dove $P_k(x)$ è un opportuno polinomio.

In particolare tutti i polinomi di Taylor di $f(x)$ in $x=0$ sono identicamente nulli, cosa che si poteva vedere direttamente osserv. che

$$f(x) = o(x^n) \qquad \text{per} \quad x \to 0$$

<u>Verifica</u>: $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^n}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0$$

In particolare: questa funzione NON è uguale alla somma della sua serie di Taylor.

<u>Notazione</u>: si dicono ANALITICHE le funzioni che sono somma di una serie di Taylor (si indicano con C^ω)

omega

Quindi $e^{-\frac{1}{x^2}}$ non è analitica.

— o — o —

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^8 \sin \frac{1}{x^8} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Dico che $f(x)$ ha i polinomi di Taylor in $x=0$ fino all'ordine 7 e questi polinomi sono tutti nulli.

Basta dim. che

$$f(x) = o(x^7) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^7} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x^8} = 0$$

Come lo giustifico $\quad -x \leq x \sin \frac{1}{x^8} \leq x$, con $-x \to 0$, $x \to 0$, quindi $x \sin \frac{1}{x^8} \to 0$

Uno direbbe... $\quad -1 \leq \sin \frac{1}{x^8} \leq 1$ ... poi moltiplico per x ...

rigorosamente solo per $x > 0$ ...

Molto meglio: trucco del valore assoluto

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x^8} \right| \leq |x|$$

con $0 \to 0$, $|x| \to 0$, quindi $\left| x \sin \frac{1}{x^8} \right| \to 0$

Dico che $f(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Per $x \neq 0$ sono i teo. algebrici sulle derivate:

$$f'(x) = 8x^7 \sin \frac{1}{x^8} - 8x^8 \frac{1}{x^9} \cos \frac{1}{x^8}$$

$$= 8x^7 \sin \frac{1}{x^8} - \frac{8}{x} \cos \frac{1}{x^8}$$

Per $x=0$ faccio il limite del rapporto incrementale

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^7 \sin \frac{1}{h^8} = 0.$$

Posso dire che $f \in C^1(\mathbb{R})$?

No! Perché non esiste $\lim_{x \to 0} f'(x)$ per colpa del termine con $\frac{1}{x}$

In particolare $f''(0)$ non esiste (se esistesse, $f'(x)$ sarebbe continua in 0).

<u>Conclusione</u>: i polinomi di Taylor (che esistono fino al grado 7) non sono dati dalla formula classica.
Quindi il teorema di esistenza dei polinomi di Taylor fornisce una cond. suff. ma non necessaria.

— o — o —

<u>Esempio</u> $f(x) = \arctan(x - x^3)$ sviluppare di ordine 3 in $x=0$

Errore classico: $f(x) = x - x^3 + o(x^3)$

Corretto: $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$

$$\arctan(x-x^3) = (x-x^3) - \frac{1}{3}(x-x^3)^3 + o(x^3)$$

$$= x - x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Errore rivisitato: $\arctan t = t + o(t)$

$$\arctan(x-x^3) = x - x^3 + o(x - x^3)$$

$$= x - x^3 + o(x) + o(x^3)$$

$$= x + o(x)$$

— o — o —

<u>Esempio</u> $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{n} + \frac{3}{n}\right)^n$ $\qquad \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$

limite metà per volta

Criterio radice ~ Boh

e-alla generale : $e^{n\log\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)}$ Guardo l'esponente

$$n\log\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right) = n\log\frac{3}{n}\left(1+\frac{n}{3}\sqrt[n]{n}\right)$$ ☹

Faccio e-alla sulla radice

$$n\log\left(e^{\frac{1}{n}\log n}+\frac{3}{n}\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\log n+\frac{3}{n}+o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)$$

$$= \cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}}\log n + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \to +\infty$$

moltiplicando per n se ne va! aggiunto dopo video

A posteriori: $\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)^n \geq \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n$

$\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)^n \to +\infty$, $n \to +\infty$

Interpreto nuovamente:

$$\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n} = e^{\frac{1}{n}\log n}+\frac{3}{n} \sim 1+\frac{1}{n}\log n+\frac{3}{n} \sim 1+\frac{1}{n}\log n$$

$$\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)^n \sim \left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n \to +\infty$$

Analogo:

$$\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}} \to e$$

BUFFONE !!!

— o — o —