4 Cartesio

Teorema misterioso (di Analisi)

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n.
Supponiamo di sapere che $p(x)$ ha n radici reali, se contate con molteplicità.
Allora

→ il numero di radici nulle è la più piccola potenza di x che compare nel polinomio (sostanzialmente ovvio)

→ il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni di segno tra i coeff. di $p(x)$ (per nulla ovvio)

Esempio $p(x) = x^8 - x^6 + x^5 + 3x^3$

Supponiamo di sapere che ha 8 radici reali (non so se è vero)

Le radici nulle sono 3 perché la potenza + piccola è x^3

$$p(x) = x^3(x^5 - x + x^2 + 3)$$

(se c'è il termine noto la + piccola potenza è x^0 e non ci sono radici nulle)

Coeff. di $p(x)$ = $+ \underset{\vee}{\smile} - \underset{\vee}{\smile} + \; +$

Due variazioni di segno = 2 radici positive !!

Data una forma quadratica:

→ scrivo la matrice

→ scrivo il polinomio caratt. $\det(A - \lambda Id)$ e so dalla teoria che ha tutte radici reali

→ Cartesio mi dice subito n_0 e n_+

→ Trovo n_- per differenza

3 SYLVESTER

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

① Calcolo i Determinanti lungo la diagonale da NW a SE ↘

$Det_{1\times1} = 2$

$Det_{2\times2} = -2$

$Det_{3\times3} = -6+4-2 = -4$

② Scrivo i segni dei determinanti e aggiungo d'ufficio un segno + a sinistra

$$+ \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 1\times1}}{+} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 2\times2}}{-} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 3\times3}}{-}$$

③ Come per miracolo

n_+ = numero di permanenze

n_- = numero di variazioni

$$+ \underbrace{\;\,}_{P} + \underbrace{\;\,}_{V} - \underbrace{\;\,}_{P} -$$

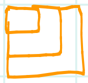
Segnatura: $++-$

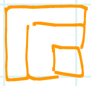
Oss. In questo caso era prevedibile guardando anche solo Tr e Det.

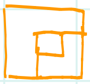
Oss. Come ricordo la regola? Pensiamo al caso in cui A è diagonale. Allora $Det_{i\times i}$ = prodotto primi i autovalori.
Ogni autovalore + produce una permanenza, ogni autovalore − produce una variazione.

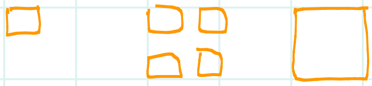
Problema: se on the road mi viene un Det $=0$, allora formalmente il metodo non si applica.

Sylvester procedendo in modo alternativo

Sylvester 1-2-3 

Sylvester 3-2-1 

Sylvester 2-3-1 

Sylvester 1-3-2 

$$\begin{matrix} \boxed{\boxed{2}} & 0 & \boxed{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{3} \end{matrix}$$

1-3 ⇝ la sottomatrice 2×2 ottenuta considerando gli elementi che stanno sulla 1^a e 3^a riga e 1^a e 3^a colonna

Idea: se procedo in maniera diversa ho + speranza di evitare di trovare Det $=0$.

Esempio $q(x,y,z,w) = x^2 + yz - w^2$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \leftarrow y \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & w \end{matrix} & \end{array}$$

Sylvester 1-2-3-4: ☹ al passo 2

Sylvester 4-3-2-1: ☹ al passo 2

Sylvester 2-3-1-4: ☹ al passo 1

Sylvester 1-4-2-3: ☺ al passo 3

$\text{Det}_{1\times1} = 1$ $\quad \text{Det}_{2\times2} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ $\quad \text{Det}_{3\times3} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= $ ☹

Apparentemente Sylvester va sempre male.

Det generale $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{riga 1}}}{=}$ $1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$

Possibilità per gli autovalori:
$$\left.\begin{array}{l} ++++ \\ ---- \end{array}\right\} \text{ No perché } Tr = 0$$
$++--$ ← segnatura

Potevo vederlo completando i quadrati?

$$q(x,y,z,w) = x^2 + yz - w^2$$
$$= x^2 - w^2 + yz$$
$$= x^2 - w^2 + \frac{1}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2$$

Trovare s.sp. di dim $=2$ su cui è def. positiva

[Segui concetti dopo video]

$$\begin{cases} w = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Span}((0,1,1,0),(1,0,0,0))$$

<u>Esempio</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare la segnatura al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sylvester 1-3-2 (così la a me la trovo solo alla fine)

$\text{Det}_{1\times1} = 2$

$\text{Det}_{2\times2} = 1$

$\text{Det}_{3\times3} = 10a - 6 - 6 - 9a - 5 - 8 = a - 25$

- Se $a > 25$, allora $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'ufficio}}}{+} \overset{P}{\frown} + \overset{P}{\frown} + \overset{P}{\frown} +$ $\rightsquigarrow$ segnatura $+++$ $\rightsquigarrow$ def. pos.
- Se $a < 25$, allora $+ \underset{P}{\smile} + \underset{P}{\smile} + \underset{V}{\smile} -$ $\rightsquigarrow$ segnatura $++-$
- Se $a = 25$, allora $\text{Det } A = 0$ $\rightsquigarrow$ almeno un autovalore nullo

D'altra parte traccia $= 32$, quindi c'è almeno un autovalore $+$

Possibilità rimaste
- $+ + 0$
- $+ 0 -$
- $+ 0 0$

Considero la forma ristretta al piano $z=0$. La sua matrice è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$$

Questa ha $\mathrm{Tr}>0$ e $\mathrm{Det}>0$, quindi $++$, quindi def. pos.

Ma allora quella originaria ha un s.sp. di dim 2 su cui è def. positiva. Quindi resta solo $++0$.

[Per esercizio completare i quadrati]

___ o ___ o ___