Equazioni differenziali alla BERNOULLI

$$\boxed{u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)\,u(t)^{\alpha}}$$

<u>Idea</u>: queste si riducono ad eq. lin. con un cambio di variabili

<u>Esempio 1</u> $\qquad u' = 2u + \dfrac{3t}{u^2}$

Questa rientra nello schema precedente con $a(t) \equiv 2$, $b(t) = 3t$, $\alpha = -2$.

Slogan: liberarsi di u^2 nell'ultimo termine

Moltiplico per u^2:

$$u^2 u' = 2u^3 + 3t$$

$$3u^2 u' = 6u^3 + 9t$$

$$(u^3)' = 6u^3 + 9t$$

Pongo $v = u^3$ e ho l'equazione

$$v' = 6v + 9t$$

e da qui è fatta

$$v(t) = \underbrace{c\,e^{6t}}_{\text{sol. gen. parte omog.}} + \bar{v}(t)$$

$\bar{v}(t) = at + b \rightsquigarrow \quad a = 6at + 6b + 9t$

$$\bar{v}' = 6\bar{v} + 9t$$

$\rightsquigarrow \; 6a + 9 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad a = -\dfrac{3}{2} \qquad b = -\dfrac{1}{4}$

$\qquad a = 6b$

$$\rightsquigarrow \; v(t) = c \cdot e^{6t} - \frac{3}{2}t - \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{u(t) = \sqrt[3]{c \cdot e^{6t} - \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}}}$$

Esempio 2 $\quad u' = 2u - 3u^2$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Trattarla come eq. variabili separabili

$$\frac{du}{2u-3u^2} = dt \quad \rightsquigarrow \text{ integro e ricavo}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Vederla come Bernoulli con $a(t) \equiv 2$, $b(t) \equiv -3$, $\alpha = 2$

Mi libero di u^2 in fondo:

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{2}{u} - 3 \qquad -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2}{u} + 3$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{2}{u} + 3$$

Cambio di variabili $\quad v = \frac{1}{u} \quad \rightsquigarrow \quad v' = -2v + 3$

Risolvo a occhio $\quad v(t) = \underbrace{c \cdot e^{-2t}}_{\text{parte omogenea}} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{sol. speciale}}$

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \frac{1}{\frac{3}{2} + ce^{-2t}}}$$

Supponiamo di avere il dato iniziale $u(0) = \alpha$. Allora trovo c

$\boxed{t=0}$ $\quad \alpha = \frac{1}{\frac{3}{2} + c} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{3}{2} + c = \frac{1}{\alpha} \quad \rightsquigarrow \quad c = \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}$

uhm... e se $\alpha = 0$?

$$u(t) = \frac{1}{\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}\right)e^{-2t}}$$

Cosa succede per $\alpha = 0$? In quel caso $u(t) \equiv 0$ è la soluzione (che è sol. si vede sostituendo, che è unica segue dal teorema di unicità).

Fatto generale Se l'eq. è

$$u' = f(t)\cdot g(u) \qquad u(0) = \alpha$$

allora se $g(u_0) = 0$ la soluzione è sempre $u(t) \equiv \alpha$.

Nell'esempio 2 le soluzioni costanti sono $\underbrace{u(t) \equiv 0}_{\text{qui non trovo } c}$, $\underbrace{u(t) \equiv \frac{2}{3}}_{\text{viene } c=0}$

Esempio 3 $\quad u' = (t^2+u)^3 - 2t$

Faccio il cambio di variabili $v(t) = t^2 + u(t)$. Allora

$$v'(t) = 2t + u'(t) = \cancel{2t} + (t^2+u(t))^3 - \cancel{2t} = v(t)^3$$

Nella variabile v so risolvere $v' = v^3 \rightsquigarrow \frac{dv}{v^3} = dt$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{v^2} = t + c \rightsquigarrow \frac{1}{v^2} = -2t + c \rightsquigarrow v(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{c-2t}}$$

$$\boxed{u(t) = v(t) - t^2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{c-2t}} - t^2}$$

(il segno $\pm$ dipende dal dato iniziale)

Esempio 4 $\quad u' = 1 + t^2 e^{-u}$

Proviamo ad eliminare e^{-u} in fondo: $e^u \cdot u' = e^u + t^2$

$(e^u)' = e^u + t^2$

Pongo $v = e^u$ e mi ritrovo $v' = v + t^2$

$\rightsquigarrow$ risolvo con i soliti metodi $\rightsquigarrow u(t) = \log(v(t))$ 🙂

Esempio 5 $\begin{cases} u'(t) = 3u(t) - v(t) \\ v'(t) = -4u(t) + 6v(t) \end{cases}$

Sistema: devo trovare $u(t)$ e $v(t)$

Idea: si può trasformare in una equazione unica di ordine 2

$$\underbrace{u''(t) = 3u'(t) - v'(t)}_{\text{prima eq. derivata}} = 3u'(t) + 4u(t) - 6v(t)$$

prendo $v'(t)$ dalla 2^a

me la procuro dalla 1^a equazione

$$= 3u'(t) + 4u(t) + 6u'(t) - 18u(t)$$

$$= 9u'(t) - 14u(t)$$

$\rightsquigarrow \boxed{u''(t) = 9u'(t) - 14u(t)} \rightsquigarrow x^2 = 9x - 14 \rightsquigarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$\rightsquigarrow (x-7)(x-2) = 0$

$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = ae^{7t} + be^{2t}}$

A questo punto mi procuro $v(t)$ dalla prima equazione

$$v(t) = 3u(t) - u'(t) = 3ae^{7t} + 3be^{2t} - 7ae^{7t} - 2be^{2t}$$

$$\boxed{v(t) = -4ae^{7t} + be^{2t}}$$

Oss. Il sistema è descritto dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ che ha $\mathrm{Tr} = 9$ e $\mathrm{Det} = 14$, quindi autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = 7$.

Chi sono gli autovettori?

$\lambda = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 7 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

La soluzione la posso scrivere come

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettore} \\ \text{di } \lambda=2}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} e^{2t} + a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettore} \\ \text{di } \lambda=7}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}} e^{7t}$$

Fatto generale Questa rappresentazione della soluzione vale per sistemi di dimensione qualunque purché

→ la matrice sia diagonalizzabile

→ gli autovalori siano reali (altrimenti gli esponenziali complessi vanno interpretati)

Delirio Il sistema lo posso pensare come

$$W'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}}{A}\, W(t) \qquad \text{con} \quad W(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

e allora la soluzione verrebbe da scriverla come

$$W(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esponenziale} \\ \text{di una matrice}}}{\boxed{e^{At}}}\, W(0)$$

dove $e^{M} = Id + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{6} M^3 + \dots$

— o — o —