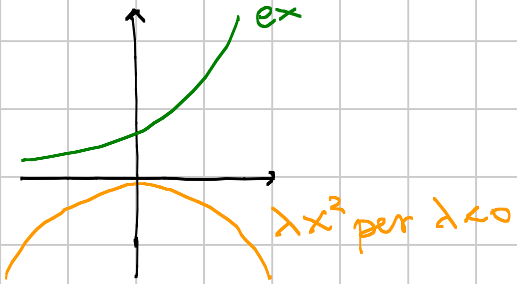
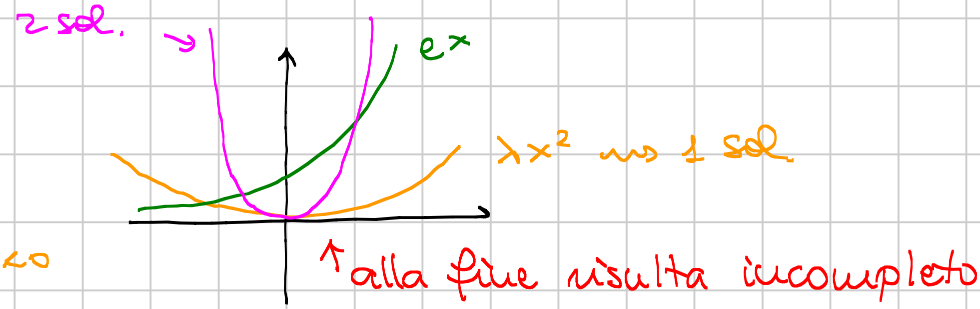
Esempio 1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluz. dell'eq.

$$\boxed{e^x = \lambda x^2}$$

Consideraz. gen.: se l'eq. è $f(x) = \lambda$, allora studio $f(x)$ e interseco con // asse x.
Se l'eq. è in altra forma, sembra di dover confrontare 2 grafici, COSA DA NON FARE MAI

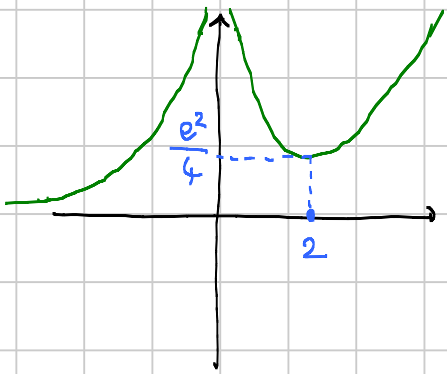




Oss. Una buona strategia, quando possibile, è $\boxed{\text{isolare } \lambda}$

Nell'esempio, osservo che $x = 0$ non è mai sol., quindi riscrivo

$$\underbrace{\boxed{\frac{e^x}{x^2}}}_{f(x)} = \lambda \qquad \rightsquigarrow \text{ studio } f(x)$$



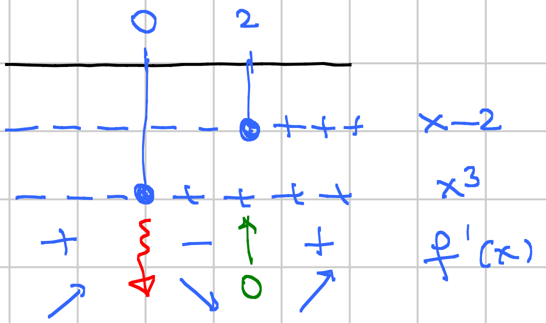
- Definita e continua (pure C^∞) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Limiti agli estremi

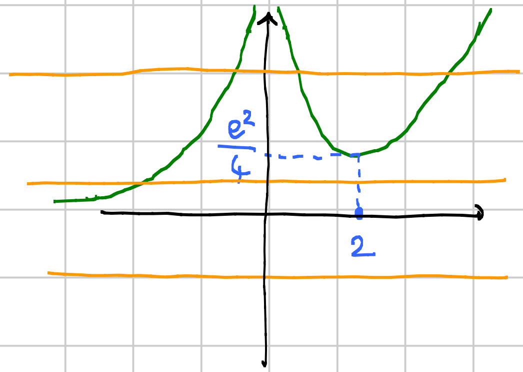
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

- $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$

- Studio segno $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = e^x \, \dfrac{x-2}{x^3}$





Conclusioni

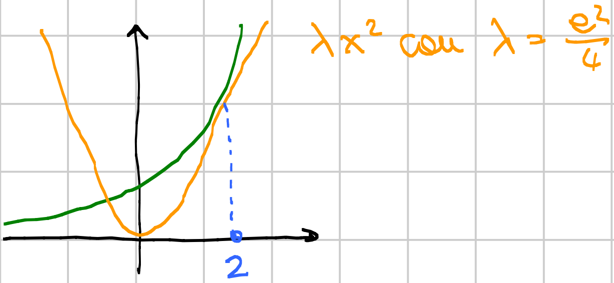
→ per $\lambda \leq 0$ non ci sono soluzioni

→ per $\lambda \in \left(0, \frac{e^2}{4}\right)$ ⇝ 1 sol.

→ per $\lambda = \frac{e^2}{4}$ ⇝ 2 sol.

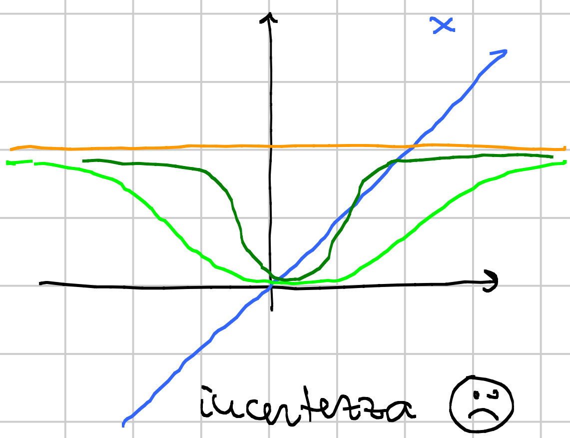
→ per $\lambda > \frac{e^2}{4}$ ⇝ 3 sol.

Il disegno di prima era incompleto



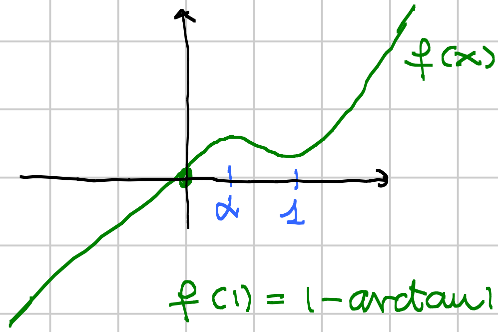
<u>Esempio 2</u> Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$

Se provo a sorrapporre i grafici...



$f(x) = x - \arctan(x^2)$

- Definita e C^∞ su tutto $\mathbb{R}$



- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

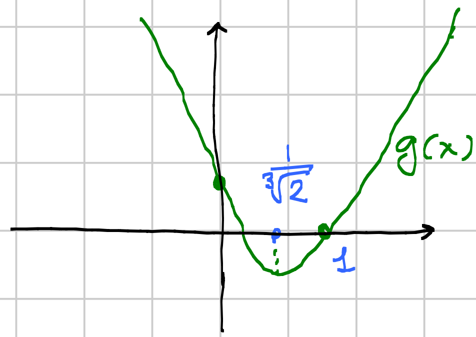
$f(1) = 1 - \arctan 1$
$= 1 - \frac{\pi}{4} > 0$

$f(0) = 0$ se fosse monotona, avrei finito

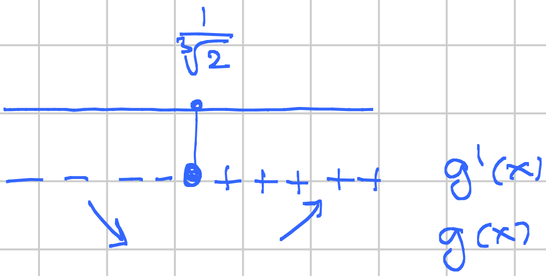
- $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^4} = \dfrac{1+x^4-2x}{1+x^4}$

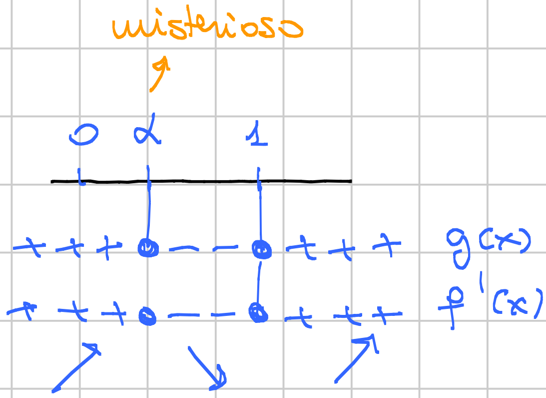
Il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $\boxed{x^4 - 2x + 1}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad g(x)$

Apro una parentesi e studio $g(x)$:



... convenevoli ... $g'(x) = 4x^3 - 2$
$= 2(2x^3 - 1)$



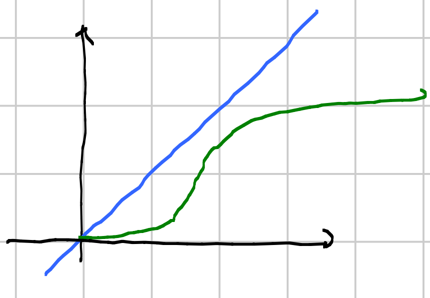


Quindi $g(x)$ si annulla in 2 p.ti

Conclusione: visto il valore di $f(1)$, possiamo concludere che
$f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$
con uguaglianza solo per $x = 0$.

— o — o —

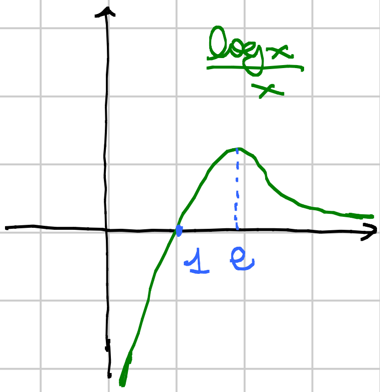
vero grafico. →



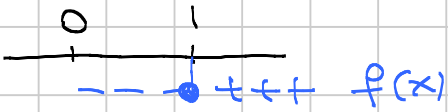
Esempio 3 Studiare la monotonia della succ. $\sqrt[n]{n}$ per $n \geq 1$. Qual è il valore max che raggiunge?

Dovrei risolvere $\sqrt[n+1]{n+1} \geq \sqrt[n]{n}$ ...

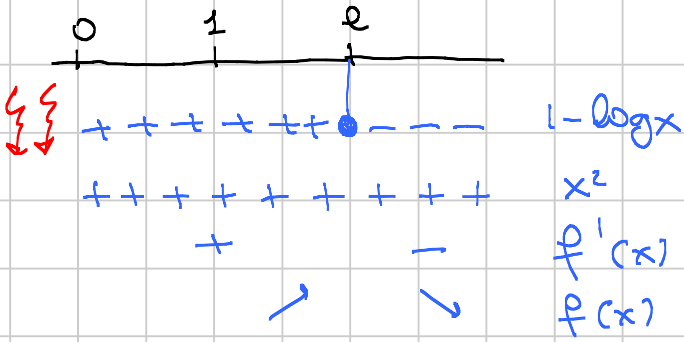
Scrivo $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n}$ e studio la funzione $\boxed{\dfrac{\log x}{x}}$ "$f(x)$"

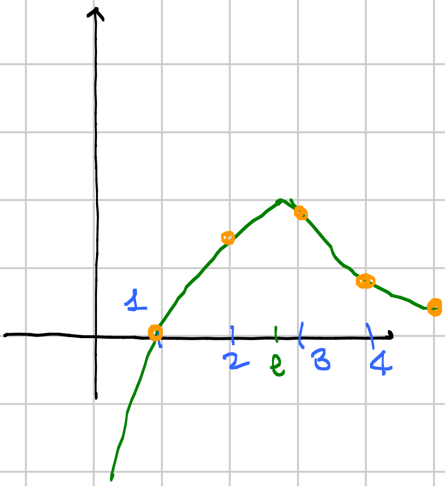


- Definita e C^∞ in $(0, +\infty)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- zeri e segno dipendono da $\log x$



- Segno di $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

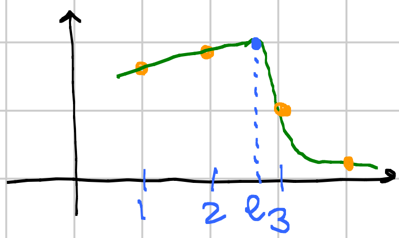




Dallo studio su x deduco che
→ la succ. è decrescente da $n=3$ in poi
→ crescente fino ad $n=2$

Errore classico: il max su $\mathbb{N}$ si realizza in $n=3$ perché 3 è l'intero più vicino al p.to di max in $\mathbb{R}$ (e)

In generale per il max occorre confrontare il valore prima e quello dopo (in questo caso $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$)



—o—o—