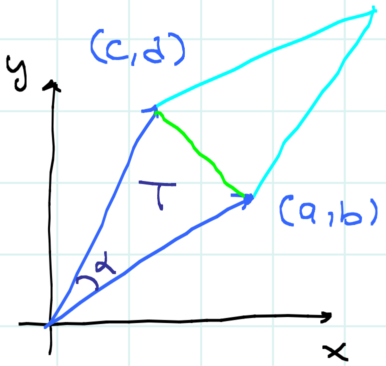
ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 23

Note Title 24/10/2023

Interpretazione geometrica del Det

Caso 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$



$|\mathrm{Det}|$ = Area parallelogrammo generato dai 2 vettori

Dim. Chiamiamo T il mezzo parallelogrammo

Poniamo $v = (a,b)$ $w = (c,d)$

$$\text{Area parallelogrammo} = 2\, \text{Area}(T)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \|v\| \cdot \|w\| \sin\alpha$$

$$= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle w, v\rangle^2}{\|w\|\cdot\|v\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle \quad , v\rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}$$

$$= \sqrt{\cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{b^2d^2} - \cancel{a^2c^2} - \cancel{b^2d^2} - 2abcd}$$

$$= \sqrt{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd} = |ad - bc|$$

Oss. Geometricamente è evidente che $\mathrm{Det} = 0 \iff$ vettori v e w sono uno multiplo dell'altro.

$\boxed{\text{Caso } 3\times 3}$ $|\mathrm{Det}| = \frac{1}{6}$ Volume (Tetraedro che ha come vertici l'origine e i vettori delle 3 righe della matrice)

[Conto che volendo si potrebbe fare partendo da

$$\mathrm{Vol} = \frac{1}{3} \underbrace{\text{Area Base}}_{\substack{\text{triangolo} \\ \text{nello spazio}}} \cdot \underbrace{\text{Altezza}}_{\substack{\text{distanza del vertice} \\ \text{dal piano base}}}$$

]

— o — o —

Esercizio 1

(c) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y,\ z = w\}$,
$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0,\ x - y + z - w = 0\}$.

Domande: dimensione e base di V, W, $V+W$, $V\cap W$

V è l'insieme dei vettori che soddisfano entrambe le condizioni cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}$$

$w = t$, $z = t$, $y = s$, $x = +s$

Soluzioni:

$$(s,s,t,t) = s\underbrace{(1,1,0,0)}_{v_1} + t\underbrace{(0,0,1,1)}_{v_2}$$

UNA base di V è $\{v_1, v_2\}$

Ci sono tante altre basi di V, ad esempio

$$\{(2,2,3,3),\ (5,5,7,7)\}$$

(basta osservare che stanno in V, sono 2, e sono lin. indip. in quanto non multipli)

Passiamo a W: $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ +2y + 2w = 0 \end{cases}$

$w = t$, $z = s$, $y = -t$, $x = -s$ $\rightsquigarrow$ $(-s,-t,s,t)$

$$= s\underbrace{(-1,0,1,0)}_{w_1} + t\underbrace{(0,-1,0,1)}_{w_2}$$

Una base di W è $\{w_1, w_2\}$

Ora osservo che $V + W = \text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$

Li metto in una matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{riga } 1}}{\text{Det} =} \quad \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

potrei farli con Sarrus, ma li faccio con Laplace

$$= -1(-1) - 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 0$$

Quindi v_1, v_2, w_1, w_2 non sono lin. indip. e il rango della matrice NON è 4.

Quindi il rango della matrice è 3 perché ho trovato ben due sottomatrici 3×3 con $\text{Det} \neq 0$.

Concludo che

$$\dim(V+W) = 3$$

Volendo so anche che

$$V + W = \text{Span}(v_2, w_1, w_2)$$

Infatti so che v_2, w_1, w_2 sono lin. indip. perché la matrice che li ha come righe ha rango 3, avendo minori di ordine 3 diversi da 0.

GRASSMANN $\rightsquigarrow$ $\dim(V \cap W) = 1$, cioè $V \cap W$ sono una retta in $\mathbb{R}^4$, cioè tutti i multipli di un vettore dato.

Come trovo una base di $V \cap W$?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Risolvo il sistema con 4 eq.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ci sarà un param. libero

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Risolvo

$$\underbrace{a v_1 + b v_2}_{\text{generico el. di } V} = \underbrace{c w_1 + d w_2}_{\text{generico el. di } W}$$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Spero di vederlo a occhio ...

$\boxed{(1, 1, -1, -1)}$ UNA BASE di $V \cap W$

— o —

$\boxed{\text{BACK TO FORMULA MISTERIOSA}}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\underbrace{b_1 c_2 - c_1 b_2}_{= M_1}, \underbrace{-a_1 c_2 + c_1 a_2}_{= M_2}, \underbrace{a_1 b_2 - b_1 a_2}_{= M_3})$$

Proprietà di (M_1, M_2, M_3)? È $\perp$ a (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2)

Consideriamo
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Det $= 0$ perché ci sono 2 righe lin. indip.

$= a_1 \cdot M_1 + b_1 \cdot M_2 + c_1 \cdot M_3$

Laplace riga 1

il segno – è già in M_2

Stessa cosa se metto a_2, b_2, c_2 al posto di $*$.

Lo stesso trucco funziona con 3 vettori in $\mathbb{R}^4$, o 4 in $\mathbb{R}^5$, ...

— o — o —