ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 10

Note Title 06/10/2023

Esercizio 1 Consideriamo i 3 p.ti

$A = (1,0,1)$ $B = (0,1,2)$ $C = (1,2,3)$

① Calcolare il p.to della retta AB più vicino a C

Strategia: scrivo il piano per C che è $\perp$ alla retta AB e interseco

retta AB : $A + t(B-A) = (1,0,1) + t(-1,1,1) = (1-t, t, 1+t)$

piano per C $\perp$ ad AB

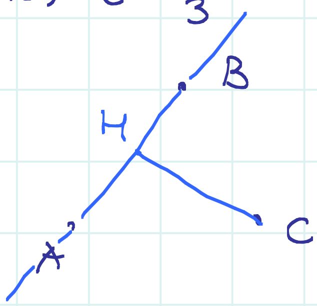
$$-x + y + z = 4$$

$\uparrow$ impongo passaggio per C.

Interseco retta e piano

$$-(1-t) + t + (1+t) = 4 \rightsquigarrow \cancel{-1} + t + t + \cancel{1} + t = 4$$

$$-x \quad +y \quad + \quad z \quad = 4 \qquad \rightsquigarrow 3t = 4 \rightsquigarrow t = \frac{4}{3}$$



Il p.to richiesto è $\boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)} = H$

Ci aspettiamo che $CH \perp AB$

$$CH = C - H = (1,2,3) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

e questo è $\perp$ a $(-1,1,1)$:)

② Trovare l'area del triangolo ABC

$\boxed{\text{1° modo}}$ $\quad$ Area $= \frac{1}{2}$ base $\cdot$ altezza $= \frac{1}{2} \|\underset{\substack{\uparrow \\ (-1,1,1)}}{AB}\| \cdot \|CH\|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{1}{3}\sqrt{24}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\text{Area} = \frac{1}{2} \underset{\sqrt{3}}{\underset{\|}{\|AB\|}} \cdot \|AC\| \cdot \sin(\text{angolo compreso})$

$$\|AC\| = \|C-A\| = \|(0,2,2)\| = 2\sqrt{2}$$

Detto α l'angolo compreso, sappiamo che

$$\cos\alpha = \frac{\langle (B-A),(C-A)\rangle}{\|B-A\|\cdot\|C-A\|} = \frac{\langle(-1,1,1),(0,2,2)\rangle}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Quindi $\sin\alpha \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per forza}\\ \text{positivo}}}{=} \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Conclusione: $\text{Area} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Misterioso. Calcolo $B-A = (-1,1,1)$ $C-A = (0,2,2)$

Faccio la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,2,-2)$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|\text{vettore ottenuto}\| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad ☺$$

— o — o —

Il modo rapido segue dalla formula trigonometrica dell'area

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|AB\|\cdot\|AC\|\cdot\sin(\text{angolo})$$

$B-A = v$ $\qquad C-A = w$

$$\cos(\text{angolo}) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \qquad \sin(\text{angolo}) = \sqrt{1-\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2\cdot\|w\|^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\|v\|^2\cdot\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2}} = \frac{1}{\|v\|\cdot\|w\|}\sqrt{\|v\|^2\cdot\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2}$$

Sostituendo nella formula:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cancel{\|v\|} \cdot \cancel{\|w\|} \frac{1}{\cancel{\|v\|} \cdot \cancel{\|w\|}} \underbrace{\sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}}_{\text{si verifica che questa è la norma del vettore misterioso}}$$

$v = (a_1, b_1, c_1)$ $w = (a_2, b_2, c_2)$ e si fanno i conti...

— o — o —

<u>Esercizio 2</u> Scrivere l'eq. della sfera che ha centro in $\underbrace{(1,2,3)}_{C}$ e passa per $\underbrace{(0,1,0)}_{A}$

Sono tutti i p.ti (x,y,z) tali che la loro distanza da C è la stessa di A

$$\text{dist}(C, A) = \|A - C\| = \|(-1,-1,-3)\| = \sqrt{11}$$

Devo imporre

$$\text{dist}(P, C)^2 = \text{dist}(A, C)^2$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 11}$$

<u>Oss.</u> Nel piano la circ. con centro in $C = (x_0, y_0)$ e raggio r ha equ.

$$\underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}_{\text{dist}((x,y),(x_0,y_0))^2} \overset{\leq}{=} r^2$$

$\leq$ → tutto l'interno

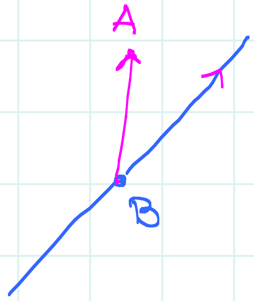
$=$ → solo bordo

La sfera è la stessa cosa in 3 variabili

— o — o —

<u>Esercizio 3</u> Scrivere il piano che passa per $\overbrace{(1,1,1)}^{A}$ e contiene la retta $\underbrace{(1,0,1)}_{B} + t \underbrace{(-2,3,4)}_{C}$

Metodo bovino: diamo due valori a t e troviamo 2 p.ti P e Q della retta. Poi facciamo piano per A, P, Q



Più rapido: $B + tC + s\underbrace{(A-B)}_{\text{posso mettere } B-A \text{ o } 7(B-A)}$

$= (1,0,1) + t(-2,3,4) + s(0,1,0)$

Se voglio passo in cartesiana

Esercizio 4 Scrivere il piano che

- contiene la retta $(1,0,1) + t(-2,3,4)$
- non interseca la retta $(1,1,2) + t(0,1,1)$

(quindi il piano contiene la prima retta ed è parallelo alla 2ª)

Risposta: $\underbrace{(1,0,1) + t(-2,3,4)}_{\text{prima retta}} + s\underbrace{(0,1,1)}_{\text{direzione seconda retta}}$

Passiamo in cartesiana

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto (-1,2,-2) \leadsto -x+2y-2z = -3$$

$$\leadsto x-2y+2z = 3$$

Interseco il piano con la 2ª retta $(1, 1+t, 2+t)$

$\leadsto 1-2(1+t)+2(2+t) = 3$

$1-2-\cancel{2t}+4+\cancel{2t} = 3 \qquad 3=3$

Questo ci dice che anche la seconda retta è contenuta nel piano, quindi le due rette sono incidenti.

Dove si intersecano?

Retta 1: $(1-2t, 3t, 1+4t)$ Retta 2: $(1, 1+t, 2+t)$

$$\begin{cases} 1-2t = 1 & \leadsto t=0 \\ 3t = 1+s & \leadsto s=-1 \\ 1+4t = 2+s & \leadsto \text{Diventa } 1=1 \text{ ed è sempre verificata.} \end{cases}$$

— o — o —