ANALISI 1 — LEZIONE 079

Note Title 03/03/2017

Equazioni lineari a coeff. costanti omogenee

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i u^{(i)} = 0}$$

numeri

Algoritmo per trovare UNA base dello sp. delle soluz:

Equazione ⇝ pol. caratteristico ⇝ radici ⇝ base

pol. caratteristico ⇝ $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$

$\boxed{\text{Caso con } k=2}$ $a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = 0$

$ax^2 + bx + c$

Per le radici ci sono 3 casi

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Due radici reali distinte: λ, μ. Allora una base è

$$e^{\lambda t} \qquad e^{\mu t}$$

dunque la soluz. generale è $u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$

Verifica: $u(t) = e^{\lambda t}$, $\dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{u} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sostituisco nell'eq.

$$a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t} \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{\text{pol. caratt. calcolato in } \lambda} = 0$$

Se le radici sono distinte ho finito ☺

$\boxed{\text{Caso 2}}$ "Due radici reali coincidenti", cioè una radice reale λ di molt. 2.

Una base è

$$e^{\lambda t} \qquad\qquad t e^{\lambda t}$$

quindi la sol. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Verifica: per $e^{\lambda t}$ è la stessa di sopra, quindi la faccio solo per l'altra

$$u(t) = t e^{\lambda t}, \quad \dot{u}(t) = e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}, \quad \ddot{u}(t) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t}$$

Sostituisco nelle eq. ed ottengo

$$a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = 2a\lambda e^{\lambda t} + a\lambda^2 t e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} + b\lambda t e^{\lambda t} + c t e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t} \underbrace{(2a\lambda + b)} + t e^{\lambda t} \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{\lambda \text{ è radice del pol. caratteristico}}$$

derivata del pol. caratt. calcolata in λ, quindi si annulla.

Oss. $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ sono lin. indip. (non sono multipli per una costante)

$\boxed{\text{Caso 3}}$ Due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$

Una base è $\qquad e^{\alpha t} \cos(\beta t) \qquad\qquad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

quindi sol. gen.: $\qquad u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

Verifica: derivare e sostituire (è un conto)

Interpretazione brutale: forzando le regole una base potrebbe essere

$$e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = \dots = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$$

quindi pure anche $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sono è una base.

— o — o —

Nel caso di equazioni di ordine k l'algoritmo è analogo.
Il pol. caratteristico avrà grado k, quindi k radici complesse contate con molteplicità. Ora

- una radice λ di molt. 1 produce $e^{\lambda t}$ (stessa verifica di sopra)
- " " " " " m produce m elem. della base:

$$e^{\lambda t} \qquad t e^{\lambda t} \qquad \dots \qquad t^{m-1} e^{\lambda t}$$

(verifica analoga a prima)

- due radici compl. coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 producono 2 elementi

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

- due radici compl. coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. m producono 2m elementi

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ t\, e^{\alpha t}\cos(\beta t) & t\, e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ \vdots & \vdots \\ t^{m-1} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & t^{m-1} e^{\alpha t}\sin(\beta t). \end{array}$$

(la verifica più comoda passa da $\mathbb{C}$).

Esempio 1 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$u(t) = a e^{-4t} + b e^{t}$$

Esempio 2 $\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$u(t) = a e^{-2t} + b t e^{-2t}$$

Esempio 3 $\ddot{u} + 4\dot{u} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + 4x = 0$

$$x(x+4) = 0$$

$$u(t) = a e^{-4t} + b$$

e^{0t}

Esempio 4 $\ddot{u} - 4u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = \pm 2$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$$

Esempio 5 $\ddot{u} + 4u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + 4 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x = \pm 2i$

$(\alpha = 0,\ \beta = 2)$

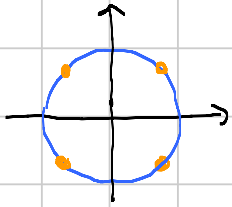
$$u(t) = a e^{0t} \cos(2t) + b e^{0t} \sin(2t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

Oss. Nell'esempio 4 un'altra base è $\cosh(2t)$, $\sinh(t)$,
quindi la sol. gen. si può scrivere come

2t: corretto dopo video

$$u(t) = a \cosh(2t) + b \sinh(2t).$$

Esempio 6 $\quad u^{(4)} + u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^4 + 1 = 0$



Le radici sono le radici quarte di -1

$$\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

La soluzione generale è

$$u(t) = \underbrace{a e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + b e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{ho usato la coppia } \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i} + c e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + d e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Esempio 7 $\quad u^{(5)} + u^{(3)} = 0 \qquad x^5 + x^3 = 0$

$$x^3 (x^2 + 1) = 0$$

radici: $x = \pm i$ e $x = 0$ con molt. 3

$x = \pm i \quad \rightsquigarrow \quad \sin t \qquad \cos t$

$x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e^{0t},\ t e^{0t},\ t^2 e^{0t} \qquad 1,\ t,\ t^2$

Sol. generale: $u(t) = a \sin t + b \cos t + c + dt + e t^2$

Esempio 8 Per quale valore del parametro α si ha che le soluzioni dell'equazione

$$\ddot{u} + \alpha \dot{u} + 5u = 0$$

tendono a 0 per $t \to +\infty$.

Provo a vedere il polinomio caratteristico $\quad x^2 + \alpha x + 5 = 0$

- Se le soluzioni sono reali (λ e μ), allora

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

Tendere a 0 per $t \to +\infty$ dipende dal segno di λ e μ, il quale è opposto a quello di α.
Quindi $\to 0 \iff \alpha > 0$

- Se le sol. sono reali di molt 2, discorso analogo

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

e ora $\alpha = -2\lambda$, quindi $\to 0 \iff \alpha > 0$

- se le radici sono complesse coniugate, $\to 0$ dipende dalla parte reale della radice, ma ancora una volta la parte reale delle radici ha segno opposto risp. ad α.
Quindi $u(t) \to 0 \iff \alpha > 0$

In tutti i casi le soluz. $\to 0$ per $t \to +\infty \iff \alpha > 0$.