A.A. 2016/2017
Corso di Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 — LEZIONE 055

Note Title 28/11/2016

INTEGRALI
→ PROPRI
→ IMPROPRI

Road map
→ come si indicano
→ significato geometrico
→ come si definiscono
→ come si calcolano

1 Notazioni

$$\int_a^b \boxed{f(x)}\, dx$$

zona di integrazione $[a,b]$

variabile di integrazione

simbolo di integrale (S modificata)

funzione integranda

Ingredienti fond: ① $[a,b]$ è zona di integrazione limitata
② integranda $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

L'integrale è proprio se ci sono le 2 limitatezze

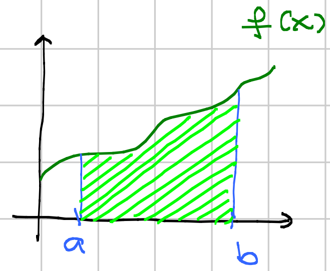
Notazione più estesa $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (estremi coincidenti)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$ (si intende $a<b$: estremi invertiti)

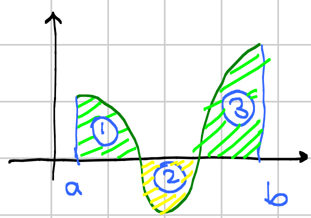
Le due sopra sono definizioni

— o — o —

② <u>Significato geometrico</u>



Se $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del sottografico



Se $f(x)$ ha segno variabile, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area con segno, cioè le aree sotto asse x contano con segno −

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area } ① + \text{Area } ③ - \text{Area } ②$$

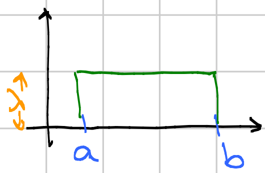
③ <u>Definizione</u> Si chiama integrale di Riemann, ma ci sono...

Tre possibilità → DARBOUX estesa (integrale ananchico)
↑ equivalenti → DARBOUX ortodossa
→ RIEMANN

La definizione alla Darboux prevede 3 tappe

$\boxed{1^a \text{ tappa}}$ <u>Caso banale</u> : $f(x)$ costante su $[a,b]$, cioè

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a,b]$$



$$\int_a^b f(x)\,dx := \lambda \cdot (b-a)$$ = area con segno del rettangolo

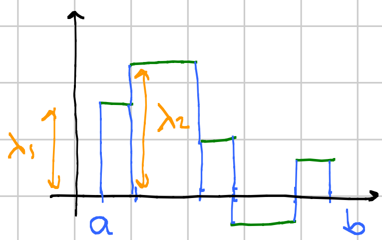
↑ altezza con segno ↑ base

$\boxed{2^a \text{ tappa}}$ <u>Caso semibanale</u> : $f(x)$ costante su sottointervalli, cioè esiste intero $n \geq 1$ e punti

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

ed esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reali t.c.

$$f(x) = \lambda_i \quad \text{in } (x_{i-1}, x_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$



Come definisco f agli estremi dei sottointervalli non importa (volendo si può definire come a dx o come a sx)

<u>Oss.</u> Una funzione di questo tipo è combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli

vale 1 nell'intervallo e 0 altrove

Terminologia: queste funzioni si chiamano
→ funzioni semplici
→ funzioni a gradini
→ step functions

Per definizione l'integrale di una step function è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{somma algebrica aree dei rettangoli}$$

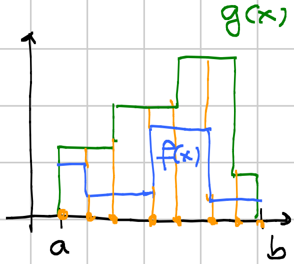
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base i-esima}}$$

altezza i-esima con segno

<u>Seccatura</u> ① Una stessa funzione a gradino si può scrivere in tanti modi come comb. lin. di caratteristiche. L'integrale definito sopra non dipende dalla scrittura (andrebbe dimostrato!)

② Se f e g sono 2 step functions e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

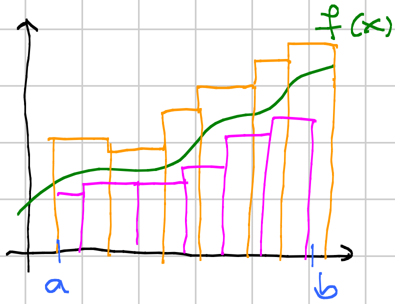
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$



<u>Lemma utile</u> Due funzioni a gradino si possono pensare definite sulla stessa suddivisione di $[a,b]$.

$\boxed{3^a \text{ tappa}}$ Caso generale: f è una qualunque funzione limitata in $[a,b]$

Considero tutte le step functions $\geq f(x)$ e tutte quelle $\leq f(x)$ e pongo:



$$I^+(f,[a,b]) := \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \text{ è una step } f \text{ e } \psi(x) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

int. superiore

= inf aree arancioni

$$I^-(f,[a,b]) := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \text{ è una step. f. e } \varphi(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

int. inferiore

= sup aree magenta

Prop. Per ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata vale

$$I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b])$$

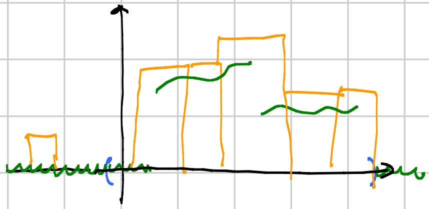
Dim: segue dalla seccatura ② precedente (l'insieme delle aree magenta sta a sx dell'insieme delle aree arancioni).

Def. Se succede che $I^-(f,[a,b]) = I^+(f,[a,b])$, allora si dice che f è integrabile (secondo Riemann, o secondo Darboux esteso) in $[a,b]$, e il valore comune si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Oss. ① Dove ho usato che f è limitata? Per essere sicuro che esistono step f. sopra e sotto, quindi I^+ e I^- sono inf/sup di insiemi non vuoti

② Potevo ignorare l'intervallo $[a,b]$ e definire l'integrale su $\mathbb{R}$ per funzioni f che sono limitate e nulle fuori da un limitato.
La procedura è la stessa usando s.f. che sono anche loro nulle fuori da un intervallo



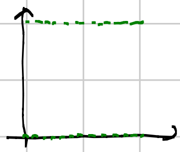
③ Darboux ortodossa è più risparmiosa: si suddivide $[a,b]$ in n parti, non nec. uguali

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

e poi in ogni $[x_{i-1}, x_i]$ si definiscono φ e ψ usando come altezze inf e sup di $f(x)$ nell'intervallo

④ Ci sono esempi in cui $I^- < I^+$. Basta pensare alla FUNZIONE DI DIRICHLET $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



È chiaro che le step f. $\psi \geq f$ sono in realtà ≥ 1, mentre le " " $\varphi \leq f$ sono in realtà ≤ 0, quindi

$$I^+(f, [0,1]) = 1 \qquad\qquad I^-(f, [0,1]) = 0$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 056

Note Title 28/11/2016

Domanda: esistono funzioni integrabili?

Teorema misterioso Le seguenti classi di funzioni sono integrabili su un intervallo

1. funzioni continue,
2. funzioni monotone,
3. funzioni con un numero finito di punti di discontinuità.

Ce ne sono anche altre.

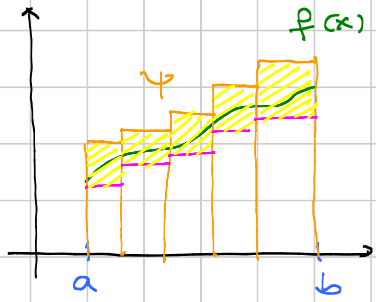
Oss. Anche solo per dimostrare che le costanti sono integrabili si passa per le seccature descritte alla lez. precedente.

Criterio di integrabilità Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono 2 step functions $\varphi_\varepsilon(x)$ e $\psi_\varepsilon(x)$, definite a partire dalla stessa suddiv. di $[a,b]$, tali che

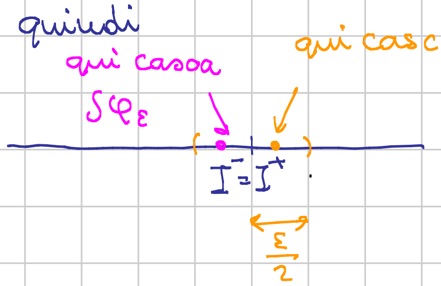
$$\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e

$$\underbrace{\int_a^b \left(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)\right) dx}_{\substack{\text{somma aree degli} \\ \text{"avanzi"}}} \leq \varepsilon$$



Dim. Basta osservare che $I^+ = I^-$, quindi



PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTEGRABILI

① Se f e g sono integrabili in $[a,b]$, allora $f+g$ lo è e

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Dim. Uso il criterio di integrabilità. Fisso $\varepsilon>0$.
Poiché f è integrabile, esistono φ_ε^1 e ψ_ε^1 s.f. tali che

$$\varphi_\varepsilon^1(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon^1(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon^1(x) - \varphi_\varepsilon^1(x))\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente per g ...

$$\varphi_\varepsilon^2(x) \le g(x) \le \psi_\varepsilon^2(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon^2(x) - \varphi_\varepsilon^2(x))\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora sommando $\underbrace{\varphi_\varepsilon^2(x)+\varphi_\varepsilon^1(x)}_{\varphi_\varepsilon(x)} \le f(x)+g(x) \le \underbrace{\psi_\varepsilon^2(x)+\psi_\varepsilon^1(x)}_{\psi_\varepsilon(x)}$
e

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(x)-\varphi_\varepsilon(x))\,dx = \int_a^b \psi_\varepsilon^2-\varphi_\varepsilon^2 + \int_a^b \psi_\varepsilon^1-\varphi_\varepsilon^1 \le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\varepsilon=\varepsilon$$

sto usando che l'integrale della somma è la somma degli int., ma solo a livello di s.f.

—o—o—

② Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, allora $\lambda f(x)$ è integrabile e

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

Dim. Analoga a prima, ma occhio al caso $\lambda < 0$ (le step sopra / sotto si invertono)

Riassunto di ① e ② L'insieme delle funzioni integrabili è uno sp. vett. e l'integrale è un'appl. lineare.

Achtung! Non è vero in generale che

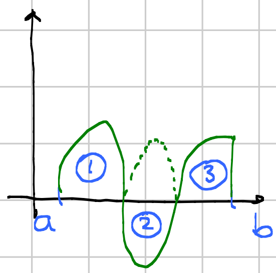
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_a^b f(x) \cdot dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

Domanda: quando è vero?

③ Se $f(x)$ è integrabile, allora $|f(x)|$ è integrabile e vale

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx}$$

Interpretazione geometrica



$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = |\text{Area } ① - \text{Area } ② + \text{Area } ③|$$

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \text{Area } ① + \text{Area } ② + \text{Area } ③$$

Ci si riduce alla disug. da precorso $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$

④ Se $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$ e $f(x)$ è integrabile, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

Più in generale, se $f(x) \geq g(x)$ in $[a,b]$ e sono integrabili, allora

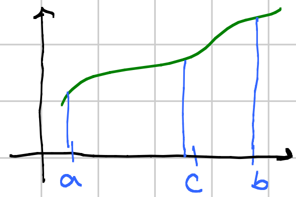
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx \qquad \text{(MONOTONIA dell'integrale)}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Basta dim. la prima e poi usare la linearità $(f-g)$
Per la prima, basta osservare che $\varphi(x) \equiv 0$ è una step. function che contribuisce a def. $I^-(f,[a,b])$

⑤ Additività rispetto zona di integrazione

Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e $c \in (a,b)$, allora f è integr. in $[a,c]$ e $[c,b]$ e vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



$\boxed{\text{Dim}}$ Basta aggiungere sempre c tra i punti della suddl. quando si fanno le sf sopra/sotto.

In alternativa: se ho definito l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ ponendo la funzione $=0$ fuori dall'intervallo, allora diventa un caso particolare di integrale della somma.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_{ab}(x)\,dx \qquad f_{ab}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

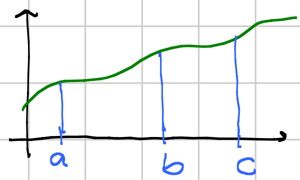
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_{ac}(x)\,dx \qquad f_{ac}(x) = \ldots$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_{cb}(x)\,dx \qquad f_{cb}(x) = \ldots$$

Allora $f_{ab}(x) = f_{ac}(x) + f_{cb}(x)$.

Oss. Un enunciato analogo vale anche se $c \notin [a,b]$, ricordando la def. iniziale ad estremi invertiti

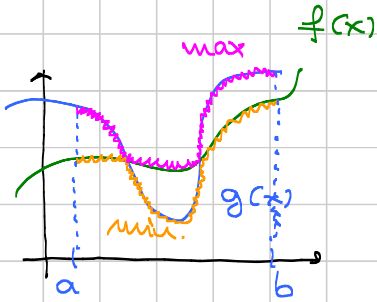
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{= -\int_b^c f(x)\,dx}$$



(6) Proprietà di reticolo Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili, allora

$$\max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad \min\{f(x), g(x)\}$$

sono integrabili (nello stesso intervallo)



Dim. Posso usare le step. f, ma va lunga.
Trucco algebrico: per ogni a e b in $\mathbb{R}$

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Quindi segue dalla linearità e dal valore assoluto.

(7) Prodotto Il prodotto di funzioni integrabili è integrabile
(anche se non c'è la formula per l'integrale del prodotto)

Cose non dimostrate: → valore assoluto,
→ prodotto.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 057

Note Title 30/11/2016

Come calcolo $\int_a^b f(x)\,dx$?

Procedura operativa: supponiamo $f \in C^0([a,b])$. Cerco una funzione $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile almeno in (a,b) t.c.

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

A questo punto $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Notazione Si pone

$$\boxed{[F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)}$$

Def 1 (Primitiva – ANTIDERIVATIVE) Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, si dice primitiva di f $\boxed{\text{UNA}}$ qualunque $F \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$ tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Oss. La primitiva, posto che esista, non è mai unica. Se $F(x)$ è una primitiva, anche $F(x) + 2016$ lo è

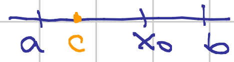
Prop. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, e siano F_1 ed F_2 due primitive. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_2(x) = F_1(x) + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Poniamo $G(x) := F_2(x) - F_1(x)$. Allora $G \in C^0([a,b])$ e $G \in C^1((a,b))$ e

$$G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

Ora uso Lagrange in ogni sottointervallo $[a, x_0]$



$$G(x_0) - G(a) = (x_0 - a)\, \underset{\substack{\| \\ 0}}{G'(c)} = 0$$

Questo mostra che $\quad G(x_0) = \underset{\substack{\| \\ c}}{G(a)} \qquad \forall x \in [a,b]$

$$G(x) \equiv c \quad \Rightarrow \quad F_2(x) = F_1(x) + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

— o — o —

<u>Corollario</u> La procedura operativa <u>non</u> dipende dalla scelta della primitiva

$\boxed{\text{Dim.}}$ Siano F_1 ed F_2 due primitive. Per la prop. sappiamo che
$$F_2(x) = F_1(x) + c \qquad \forall \ldots$$
e quindi

$$[F_2(x)]_a^b = F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + \cancel{c}) - (F_1(a) + \cancel{c})$$
$$= F_1(b) - F_1(a) = [F_1(x)]_a^b$$

— o — o —

<u>Def. 2</u> (Funzione integrale) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (per ora non assumo continuità). Questo implica l'integrabilità nei sottointervalli.
Si dice <u>funzione integrale</u> la funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

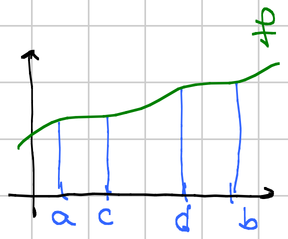
$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

nome a caso ($\neq x$) per la variabile di integrazione (poteva essere y o z)

<u>Proprietà semplice</u> Per ogni sottointervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ vale

$$\int_c^d f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_c^d = F(d) - F(c)$$

$$= \int_a^d f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$



<u>Dim.</u>: additività dell'integrale rispetto alla zona di integrazione.

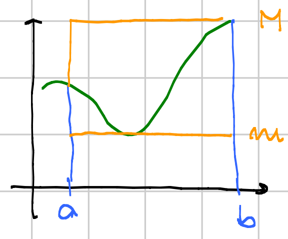
Questo dimostra la procedura con la funzione integrale F al posto della primitiva.
Non resta che dimostrare che la funzione integrale è una primitiva.

<u>Teorema</u> (della media integrale) Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)}$$

<u>Dim</u> Siano m ed M il min / max di f in $[a,b]$ (esistono per W.)
Si vede che

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$



(basta osservare che $\varphi(x) \equiv m$ è una step. f sotto e $\psi(x) \equiv M$ è una step function sopra).
Dividendo ottengo

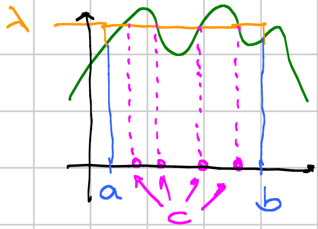
$$m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{=\lambda} \le M$$

C'è un p.to in cui f vale m. C'è un p.to in cui vale M.
Per il teo. valori intermedi esiste almeno un punto in cui f vale λ

— o — o —

<u>Interpretazione geometrica</u> Il λ, e quindi $f(c)$, è l'altezza che deve avere un rettangolo di base $[a,b]$ affinché la sua area coincida con l'integrale

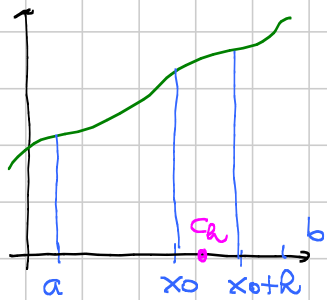
Area rettangolo = area sotto grafico



<u>Teorema</u> (Teorema fondamentale del calcolo integrale)
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\boxed{\text{continua}}$. Sia $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ la funzione integrale.
Allora F è una primitiva di f, cioè

$$F'(x)=f(x) \qquad \forall x\in(a,b).$$

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Sia $x_0\in(a,b)$. Per $h>0$ tale che $x_0+h\le b$ vale che



$$F(x_0+h)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt$$

$$=\int_a^{x_0} f(t)\,dt+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

$$=F(x_0)+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\ ,\quad \text{quindi}$$

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

Per il teo. della media integrale

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = h\cdot f(c_h)$$

lungh. zona integrazione

p.to misterioso in (x_0,x_0+h)

Quindi

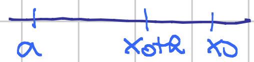
$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(c_h) \qquad \text{con} \quad x_0 < c_h < x_0+h$$

Quando $h \to 0^+$ si ha che $c_h \to x_0$ per i carabinieri, quindi $f(c_h) \to f(x_0)$, quindi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Dovrei fare la stessa cosa per $h \to 0^-$. Basta osservare che valgono le stesse formule per la convenzione sugli integrali ad estremi invertiti

$$\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$



$$'' \quad - \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt$$

Questo completa la dim. che $F'(x_0) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in (a,b)$

— o — o —

Cosa posso dire della funzione integrale $F(x)$ se $f(x)$ è solo integrabile (ma non nec. continua ?)

È lipschitziana! E la sua costante di lip. è una qualunque limitazione per $|f(x)|$

<u>Dim.</u> Supponiamo $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in [a,b]$.
Allora per ogni x e y in $[a,b]$ vale (suppongo $y \ge x$)

$$|F(y)-F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \qquad \text{(proprietà int. e val. assoluto)}$$

$$\le \int_x^y |f(t)|\,dt$$

$$\le \int_x^y M\,dt = M(y-x) = M|y-x|$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 058

Note Title 30/11/2016

Teorema (Integrabilità delle funzioni monotone)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona (debolmente).
Allora f è integrabile.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per la caratterizzazione devo per ogni $\varepsilon > 0$, trovare step f

$$\varphi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x)$$

t.c.

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x))\,dx \le \varepsilon$$

(Posso supporre WLOG che f è crescente)
Suddivido la base $[a,b]$ in n parti uguali di lungh. $\frac{b-a}{n}$.
Detti

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

gli estremi della suddivisione, poniamo

$$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$
$$\psi(x) = f(x_i) \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

Ora

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x))\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\substack{\text{base} \\ \text{(tutte uguali)}}} \underbrace{[f(x_i) - f(x_{i-1})]}_{\text{altezza}}$$

$$= \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]}_{\text{Telescopica}}$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)]}$$

pur di prendere n grande, questo va sotto ε.

Oss (futurista) Una funzione può essere monotona ma essere discontinua su tutto $\mathbb{Q}$.

— o — o —

$\boxed{\text{Tecniche di integrazione}}$ Data $f(x)$, come trovo una primitiva $F(x)$?

→ Primitive elementari
→ Integrazione per parti
→ " " sostituzione
→ " funzioni razionali
→ Sostituzioni razionalizzanti

Primitive elementari : leggo al contrario la tabellina delle derivate

f	F		f	F
c	cx		e^x	e^x
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$	$\cos x$	$\sin x$
			$\sin x$	$-\cos x$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	$\cosh x$	$\sinh x$
			$\sinh x$	$\cosh x$
$\frac{1}{x}$	$\log x$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$		a^x	$\frac{1}{\log a}a^x$

Notazione $\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{integrale senza estremi}}$ = una qualunque primitiva di $f(x)$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$\boxed{\text{Il famigerato } +c}$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

- Se devo calcolare l'integrale con estremi, il "$+c$" si semplifica, dunque è inutile

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \Big[-\cos x + c\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \cancel{c} - (\underbrace{-\cos 0}_{=1} + \cancel{c}) = 1$$

- Posso mettere $+c$ per descrivere l'insieme di TUTTE le primitive di $f(x)$.

Esempio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definita per $x \neq 0$.

Come sono fatte tutte le $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tali che

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \neq 0 \qquad ?$$

Risposta: $F(x) = -\frac{1}{x} + c$ NO!!!!

Risposta corretta: posso usare 2 c diversi per $x>0$ e $x<0$, quindi

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + c_1 & \text{per } x<0 \\ -\frac{1}{x} + c_2 & \text{per } x>0 \end{cases}$$

Detto brutalmente: tutte le volte che l'insieme di def. di $f(x)$ è fatto da più pezzi, posso usare c diversi su pezzi diversi.

Quindi mettere $+c$ "meccanico" non assicura di descrivere tutte le primitive

Esempio 1 $\int (x^2+2x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$

Esempio 2 $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x}$ $\qquad \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

Esempio 3 $\int \sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)$

Esempio 4 $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$ per $x>0$

Ha senso cercare $F: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ t.c.

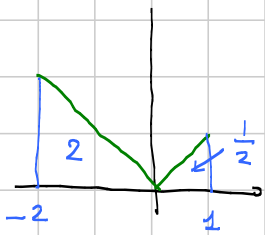
$$F'(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

$F(x) = \log|x|$. Sui $x>0$ è banale

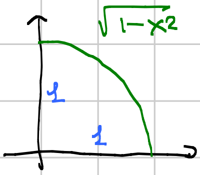
Per $x<0$ si ha $F(x) = \log(-x)$

$$F'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$ ☺

Esempio 5 $\int_{-2}^{1} |x|\,dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

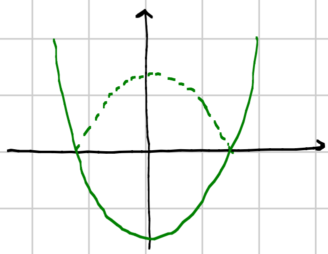


$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$



Esempio 6 $\int_0^2 |x^2-2|\,dx$

SO CHE DEVE VENIRE >0

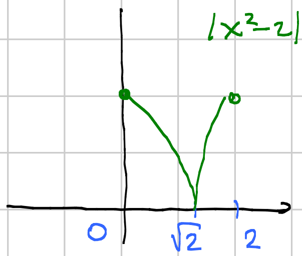


$$= \int_0^{\sqrt{2}} |x^2-2|\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} |x^2-2|\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^2-2)\,dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3} - 4 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = \dots$$



— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 059

Note Title 01/12/2016

INTEGRAZIONE PER PARTI

Partenza: teo. fond. calcolo integrale

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva.

Allora

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

Caso speciale: $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$. Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = F'(x)\,G(x) + F(x)\,G'(x)$$
$$= f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x)$$

Sostituendo

$$\int_a^b \underbrace{(f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x))}_{\varphi(x)}\,dx = \underbrace{F(b)\,G(b)}_{\Phi(b)} - \underbrace{F(a)\,G(a)}_{\Phi(a)}$$
$$= \Big[F(x)\,G(x)\Big]_a^b$$

Riorganizzando

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = \Big[F(x)\,G(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\boxed{\int fG = FG - \int Fg}$$ Formula "abusiva"

Operativamente:
- → cerco di vedere l'integranda come prodotto fG
- → G spero che derivando "migliori"
- → f spero di saper fare la primitiva (↑ una)

Esempio 1 $\int \underset{G}{x} \underset{f}{e^{7x}}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\frac{1}{7}e^{7x}} - \int \underset{F}{\frac{1}{7}e^{7x}} \cdot \underset{g}{1}\,dx$

$$= \frac{1}{7}xe^{7x} - \frac{1}{7}\int e^{7x}dx$$

$$= \frac{1}{7}xe^{7x} - \frac{1}{49}e^{7x}$$

Oss. Calcolata una primitiva, conviene fare la verifica, cioè derivare e vedere se viene xe^{7x}.

Esempio 2 $\int \underset{G}{x^2} \underset{f}{\cos(3x)}\,dx = \underset{G}{x^2}\,\underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)} - \int \underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)} \cdot \underset{g}{2x}\,dx$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) - \frac{2}{3}\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\sin(3x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) - \frac{2}{3}\left[\underset{G}{x}\underset{F}{\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)} - \int \underset{F}{\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)} \cdot \underset{g}{1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{9}\int \cos(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\sin(3x)$$ VERIFICA !!

— o — o —

Fatto generale Con lo stesso metodo si calcolano le primitive

$$\boxed{\int p(x)\,e^{ax}\,dx} \qquad \boxed{\int p(x)\sin(ax)\,dx} \qquad \boxed{\int p(x)\cos(ax)\,dx}$$

dove $p(x)$ è un qualunque polinomio.

Idea: i polinomi a forza di derivarli migliorano.

Utilizzi SMART dell'integrazione per parti:
→ grande ritorno
→ trucco dell'1 nascosto

Esempio 3 $\int \underset{F}{e^{2x}} \underset{g}{\cos x}\, dx = \underset{F}{e^{2x}} \underset{G}{\sin x} - \int \underset{f}{2e^{2x}} \underset{G}{\sin x}\, dx$

$= e^{2x} \sin x - 2\int e^{2x} \sin x\, dx$

F g ⇝ sembra meglio

g F ⇝ si torna da capo

$= e^{2x} \sin x - 2\left[\underset{F}{e^{2x}} \underset{G}{(-\cos x)} - \int \underset{f}{2e^{2x}} \underset{G}{(-\cos x)}\, dx\right]$

$= e^{2x} \sin x + 2\cos x\, e^{2x} \underbrace{- 4\int e^{2x} \cos x\, dx}_{\text{GRANDE RITORNO}}$

Portandola a sx:

$$5\int e^{2x} \cos x\, dx = e^{2x} \sin x + 2\cos x\, e^{2x}$$

Divido per 5 e ho la primitiva.

—o —o —

Allo stesso modo faccio tutte le primitive del tipo

$\boxed{\int e^{ax} \sin(bx)\, dx}$ $\boxed{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx}$

Nota bene: $4^x = e^{x \log 4}$, quindi ricade nei casi precedenti.

Nota bene: il prodotto di 2 o più funzioni trigonometriche si può sempre trasformare in somma o differenza mediante formule precorsistiche
product to sum

<u>Esempio 4</u> $\displaystyle \int \log x\,dx = \int \underset{g}{1}\cdot \underset{F}{\log x}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\log x} - \int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\frac{1}{x}}\,dx$

$$= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x$$ Verifica!

<u>Esempio 5</u> $\displaystyle \int \arctan x\,dx =$

$$= \int \underset{g}{1}\cdot\underset{F}{\arctan x}\,dx = \underset{G}{x}\,\underset{F}{\arctan x} - \int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\frac{1}{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

<u>Esempio 6</u> $\displaystyle \int \cos^2 x\,dx =$

$$= \int \underset{F}{\cos x}\cdot\underset{g}{\cos x}\,dx = \underset{F}{\cos x}\cdot\underset{G}{\sin x} - \int \underset{f}{(-\sin x)}\,\underset{G}{\sin x}\,dx$$

$$= \cos x\cdot\sin x + \int \sin^2 x\,dx$$ (se continuo per parti torno indietro)

$$\underset{\text{Ricorso}}{=} \cos x\cdot\sin x + \int (1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \cos x\cdot\sin x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx$$ Grande ritorno

$$\Rightarrow\ 2\int \cos^2 x\,dx = \cos x\cdot\sin x + x$$

$$\Rightarrow\ \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x$$

Allo stesso modo calcolo

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x$$ (la somma delle primitive di $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$ deve fare la prim. di 1, cioè x)

Alternativa: percorso da subito!

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx \qquad \int \sin^2 x = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2x)}_{2\sin x \cdot \cos x} \qquad = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

—o —o —

Esempio finale $\int \tan x \, dx =$

$$= \int \underset{g}{\sin x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{\cos x}}\, dx = \underset{G}{(-\cos x)}\, \underset{F}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{G}{(-\cancel{\cos x})} \underset{f}{\left(-\frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x}\right)} (-\sin x)\, dx$$

$$= -1 + \int \tan x \, dx$$

Pessimo ritorno: semplificando ottengo $0 = -1$

Oss. Con gli estremi la formula sarebbe corretta, anche se inutile.
Per questo la formula senza estremi è abusiva.
Un modo di aggiustare la formula è di pensarla come uguaglianza fra insiemi, definendo

$$\int \varphi \, dx = \{\text{tutte le primitive di } \varphi\}.$$

Oss. Provare $\int 1 \, dx = \int \underset{F}{e^{2x}} \cdot \underset{g}{e^{-2x}}\, dx = \ldots$

ANALISI 1 – LEZIONE 060

Note Title 01/12/2016

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = [\Phi(b) - \Phi(a)]$$

Questa volta $\Phi(x) = G(F(x))$, quindi

$$\varphi(x) = G'(F(x))F'(x)$$

Sostituendo ottengo

$$\int_a^b \underbrace{G'(F(x))F'(x)}_{\varphi(x)}dx = \underbrace{G(F(b))}_{\Phi(b)} - \underbrace{G(F(a))}_{\Phi(a)}$$

$$= [G(x)]_{F(a)}^{F(b)}$$

$$= \int_{F(a)}^{F(b)} g(x)\,dx$$

Riorganizzando

$$\boxed{\int_a^b g(F(x))f(x)\,dx = \int_{F(a)}^{F(b)} g(x)\,dx}$$

FORMULA DI INT. PER SOSTITUZIONE UFFICIALE

Brutal mode: $\int_a^b g(F(x))f(x)\,dx$ Pongo $y = F(x)$

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x) \qquad dy = f(x)\,dx.$$

Quando $x = a$ ho che $y = F(a)$ e idem quando $x = b$ ... $y = F(b)$

In conclusione

$$\int_a^b \underbrace{g(F(x))}_{g(y)}\underbrace{f(x)\,dx}_{dy} = \int_{F(a)}^{F(b)} g(y)\,dy$$

Esempio 1 $\displaystyle\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

Pongo $y = \cos x$ quindi $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ e quindi $dy = -\sin x \, dx$

$$= -\int \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\frac{1}{y}} \underbrace{\boxed{(-\sin x)\, dx}}_{dy} = -\int \frac{1}{y} \, dy = -\log|y|$$

$$= -\log|\cos x| = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$ Pongo $y = 1+x^2 \rightsquigarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x$
$\rightsquigarrow dy = 2x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} \, dy = \frac{1}{2} \log|y| = \frac{1}{2} \log|1+x^2|$$

$$= \frac{1}{2} \log(1+x^2) = \log \sqrt{1+x^2}$$

Esempio 3 $\displaystyle\int \frac{\log^7 x}{x} \, dx$ Pongo $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} \, dx$

$$= \int \underbrace{\log^7 x}_{y^7} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \, dx}_{dy} = \int y^7 \, dy = \frac{1}{8} y^8 = \frac{1}{8} \log^8 x$$

Esempio 4 $\displaystyle\int \frac{1}{\log^7 x \cdot x} \, dx$ $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} \, dx$

$$= \int \frac{1}{y^7} \, dy = -\frac{1}{6} \frac{1}{y^6} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\log^6 x}$$

Esempio 5 $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x} \, dx$ Come sopra

$$= \int \frac{1}{y} \, dy = \log|y| = \log|\log x|$$

Esempio 6 $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

Pongo $x = \sin y$

$\frac{dx}{dy} = \cos y \leadsto dx = \cos y\, dy$

$= \int \sqrt{1-\sin^2 y}\, \cos y\, dy = \int \cos^2 y\, dy =$ (es. prec.)

$= \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \sin y \cos y$ $\quad (y = \arcsin x)$

$y \downarrow \arcsin x$, $\quad \sin y \downarrow x$, $\quad \cos y \downarrow \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$

Ci sono passaggi sporchi ovunque: verifico per $x \in (-1,1)$ e sono sicuro di aver fatto bene.

— o — o —

Esempio 7 $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Pongo $x = \sinh y$

$dx = \cosh y\, dy$

$= \int \sqrt{1+\sinh^2 y}\, \cosh y\, dy = \int \cosh^2 y\, dy =$ si fa...

(provare per esercizio)

Esempio 8 $\boxed{\text{Come integrare potenze di } \sin x \text{ e } \cos x}$

$\int \cos^4 x\, dx$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Parti + precorso + grande ritorno

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \underset{g}{\cos x} \cdot \underset{F}{\cos^3 x}\, dx = \underset{G}{\sin x} \cdot \underset{F}{\cos^3 x} - \int \underset{G}{\sin x} \cdot \underset{f}{3\cos^2 x\, (-\sin x)}$$

$$= \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso} \\ (1-\cos^2 x)}}{\sin^2 x} \cos^2 x\, dx = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lo so}}}{\int \cos^2 x\, dx} - 3 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{grande ritorno}}}{\int \cos^4 x\, dx}$$

In generale con questa tecnica faccio scendere l'esponente di 2.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Trasformare il prodotto in somma (questo è il modo migliore quando l'esponente è 2)

$$\cos^4 x = \cos^2 x \cdot \cos^2 x = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

$=$ moltiplico e poi analogo per $\cos^2(2x)$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Se l'esponente è dispari, posso fare per sostituzione

$$\int \cos^7 x\, dx = \int \cos^6 x \cdot \cos x\, dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^3 \cdot \cos x\, dx$$

Pongo $y = \sin x$ $\rightsquigarrow$ $dy = \cos x\, dx$

$$= \int (1-y^2)^3\, dy$$

$$= \int (1-3y^2+3y^4-y^6)\, dy = y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7$$

$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x$$

— o — o —

Esempio 9

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx \qquad \int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \qquad \int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$$

MEDIO DIFFICILE FACILE

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\log(1+x^4)$$ (Volendo: $y = 1+x^4$)

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$$ Pongo $y = x^2$ $\rightsquigarrow$ $dy = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\arctan y = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$

Esempio 10 $\int x^2 e^{5x^3}\,dx = \frac{1}{15} e^{5x^3}$ (volendo: $y = 5x^3$)

Esempio 11 $\int \sin(\log x)\,dx$ Pongo $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x}dx$ $\rightsquigarrow x = e^y$

$= \int \underset{e^y}{x}\, \underbrace{\sin(\log x)}_{\sin y} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{dy}$

$= \int e^y \sin y\, dy =$ si fa per parti con grande ritorno

Esempio 12 $\int x\sqrt{3-x^2}\,dx$

1° modo: trigonometrico $x = \sqrt{3}\sin y \rightsquigarrow$ diventa tutta trigonometria

2° modo: Pongo $y = 3 - x^2 \rightsquigarrow dy = -2x\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{3-x^2}\,(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,dy \qquad \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,y^{3/2} = -\frac{1}{3}\,y\sqrt{y}$$

$$= -\frac{1}{3}(3-x^2)\sqrt{3-x^2}.$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 061

Note Title 07/12/2016

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

Def. Una funzione razionale è il rapporto di due polinomi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad P(x) \in \mathbb{R}[x], \quad Q(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Per le funzioni razionali "si può" determinare una primitiva in 4 fasi:

① DIVISIONE

② FATTORIZZAZIONE

③ SISTEMA LINEARE

④ INTEGRAZIONE

1 – Divisione Se $\deg P(x) < \deg Q(x)$ non c'è nulla da fare.
Altrimenti faccio la div. di polinomi, cioè scrivo

$$P(x) = A(x)\, Q(x) + R(x)$$

con $\deg R(x) < \deg Q(x)$

A questo punto

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio, quindi primitiva banale

nuova funz. raz. con deg num < deg. denom.

Conclusione: basta saper fare la primitiva quando grado sopra < grado sotto.

2 – Fattorizzazione = scomporre $Q(x)$

Teorema (misterioso) Ogni polinomio $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ si può scrivere come prodotto di polinomi di primo o secondo grado (questi ultimi non ulteriormente scomponibili), eventualmente ripetuti

Def. La molteplicità di un fattore indica quante volte è ripetuto.

Alla fine della fase 2 mi ritrovo

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (a_i x + b_i)^{\overset{m_i}{\uparrow \text{ molt.}}} \cdot \prod_{j=1}^{l} \underbrace{(\alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j)}_{\beta_j^2 - 4\alpha_j\gamma_j < 0}^{\overset{\mu_j}{\uparrow \text{ molt.}}}$$

3 – Sistema lineare → caso semplice: tutte molteplicità = 1
→ caso generale.

Caso semplice Se $\deg P(x) < \deg Q(x)$, allora posso scrivere la funzione razionale nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \dots + \frac{A_k}{a_k x + b_k} + \frac{B_1 x + C_1}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \dots + \frac{B_l x + C_l}{\alpha_l x^2 + \beta_l x + \gamma_l}$$

dove

- come denominatori ho usato i singoli fattori di $Q(x)$
- come numeratori ho usato numeri incogniti $A_1, \dots, A_k$ sui fattori di grado 1, e polinomi incogniti di 1° grado sui fattori di grado 2.

Oss.
- $\deg Q(x) = k + 2l$
- Incognite: $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_l$, quindi $k + 2l$
- I coeff. di $P(x)$ sono $k + 2l$, perché sappiamo che $\deg P(x) \le k + 2l - 1$, e un pol. di quel grado ha $k + 2l$ coeff.

Esempio $$\frac{x}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$= \frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx-3Bx-3C}{(x-3)(x^2+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{coeff. di } x^2 \\ C-3B=1 & \text{coeff. di } x \\ 2A-3C=0 & \text{termine noto} \end{cases}$$

Sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite

Teorema misterioso Il sistema lineare che si ottiene ha sempre soluzione (unica).

Alla fine della fase 3, nel caso semplice, basta saper fare primitive di funzioni del tipo

$$\frac{A}{ax+b} \qquad \frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

non scomponibile

Caso generale (in cui ci sono le molteplicità).
Ci sono due possibili strade
1. Decomposizione in fratti semplici generale
2. Decomposizione di HERMITE (più semplice operativamente)

Esempio alla Hermite

$$\frac{x^2+5}{(x+1)^3(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

fin qui come se non ci fossero le molteplicità

$$+ \frac{d}{dx}\,\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

polinomio incognito di grado = grado denom − 1.

stessi fattori di $Q(x)$, ma con molteplicità scesa di 1

Teorema misterioso Il sistema lineare ha soluzione unica!

Conseguenza Alla fine basta saper fare le primitive di prima e poi la primitiva della derivata è banale !!

Esempio $\frac{x^2}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{d}{dx}\frac{C}{x+1}$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} - \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)(x+2) + B(x+1)^2 - C(x+2)}{(x+1)^2(x+2)}$$

$= \ldots$ sistema lineare

4 - Integrazione. Devo fare le primitive finali

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\log|ax+b|$$

Restano da fare quelle del tipo $\frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

C'è una formula, ma non vale la pena ricordarla.
Strategia: → un po' di logaritmo per mandare via Bx
→ arctan per il resto.

Esempio 1 $\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\log(x^2+1) + 2\arctan x$$

Esempio 2 $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

↑ sopra vorrei $2x+2$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1).$$

Esempio 3
$$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Fatto generale
$$\boxed{\int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}}$$
Per ogni $a>0$

Precorso I polinomi di 2° grado non ulteriormente scomponibili si possono sempre scrivere come

$$\boxed{\text{numero positivo} + \text{quadrato}}$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha x^2+\beta x+\frac{\beta^2}{4\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma$$
$$= \alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$$
$$= \underbrace{\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}_{\text{quadrato}}+\underbrace{\boxed{\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}}}_{\text{positivo}}$$

Posso supporre $\alpha>0$

ANALISI 1 – LEZIONE 062

Note Title 07/12/2016

Decomposizione in fratti semplici

Teorema misterioso Ogni funzione razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\deg P < \deg Q$ si può scrivere come somma di fratti semplici, cioè come somma di frazioni che

→ hanno come denominatore potenze dei singoli fattori di $Q(x)$, con esponente ≤ molteplicità

→ numeratore del tipo A oppure $Bx+C$, a seconda del tipo di fattore al denominatore.

Esempio
$$\frac{P(x)}{(x+1)^2(x+2)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^3}$$

Conseguenza Data la decomp. in fratti semplici, devo poi saper integrare anche termini del tipo

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \qquad \frac{Bx+C}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

semplice

meno semplice ⇝ meglio Hermite

Esempio $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ si può fare alla Hermite

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2}$$ ⇝ sistema lineare

Alternativa:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$ l'esponente è sceso di uno

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \underset{F}{x}\;\underset{g}{\frac{x}{(x^2+1)^3}} = \underset{F}{x}\left[\underset{G}{-\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\frac{1}{4}}\right]$$

$$-\int \underset{f}{1}\cdot\underset{G}{\left(-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)}\,dx$$

grado sceso di 1.

In caso di problemi

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$$ Pongo $y = x^2+1$, quindi $dy = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

— o — o —

Oss. Si può calcolare la primitiva di una funzione razionale, a patto di saper scomporre il denominatore, cosa possibile solo teoricamente

Esempio $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

Scomposto il denominatore posso usare l'algoritmo.

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \rightsquigarrow \text{trovo } A, B, C, D.$$

Fattorizzazione di polinomi reali Si passa dai complessi

① Ogni pol. a coeff. reali (o complessi) di grado n si può scrivere come prodotto di n fattori di 1° grado a coeff. complessi (teo. fond. dell'algebra)

② Se il polinomio è a coeff. reali, allora le radici complesse non reali appaiono a coppie $\alpha \pm i\beta$, e le 2 della stessa coppia hanno la stessa molteplicità

③ Mettendo insieme i fattori complessi della stessa coppia, ottengo i termini reali di 2° grado non riducibili:

$$\underbrace{(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)}_{\text{coeff. compl.}} = \underbrace{x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)}_{\text{tutto reale}}$$

— o — o —

Decomposizione in fratti semplici

① Sia $Q(x) = Q_1(x)\cdot Q_2(x)$, dove $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono polinomi coprimi. Allora per BEZOUT polinomiale posso trovare polinomi $M(x)$ ed $N(x)$ t.c.

$$1 = M(x)\,Q_1(x) + N(x)\,Q_2(x)$$

Dividendo per $Q(x)$ trovo

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{M(x)}{Q_2(x)} + \frac{N(x)}{Q_1(x)}$$

Se al numeratore ci fosse $P(x)$ basta moltiplicare tutto

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\,M(x)}{Q_2(x)} + \frac{P(x)\,N(x)}{Q_1(x)}$$

② Se il denominatore è prodotto di k fattori coprimi, basta procedere per induzione

③ Sono sicuro che nelle varie frazioni deg num < deg denom ?
A priori no, ma in ogni frazione posso fare la divisione tra numeratore e denominatore e arrivo a

$$\underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)}}_{\to 0} = \underbrace{\frac{A(x)}{Q_1(x)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{B(x)}{Q_2(x)}}_{\to 0} + C(x)$$

per $x \to +\infty$

↑ polinomio che è nullo perché deve tendere a 0 per $x \to +\infty$

④ Devo liberarmi delle potenze al denominatore

$$\frac{P(x)}{(x+1)^3(x+2)^4} = \frac{A(x)}{(x+1)^3} + \frac{B(x)}{(x+2)^4}$$

perché è somma di fratti semplici ?

Osservo che $1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3, \dots$ sono una base dello spazio dei polinomi e quindi

$$\frac{A(x)}{(x+1)^3} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{a_3}{(x+1)^3}$$

e così abbiamo la decomposizione in fratti semplici.

Discorso analogo per i fattori di 2° grado.

— o — o —

<u>Come by-passare il sistema lineare</u>

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}$$

Voglio trovare A, B, C.

Troviamo A: moltiplico per $x+1$

$$\frac{x^2}{(x-3)(x+2)} = A + B\,\frac{x+1}{x-3} + C\,\frac{x+1}{x+2}$$

Sostituisco $x = -1$

$$\frac{1}{-4} = A \quad \leadsto \quad A = -\frac{1}{4}$$

Analogamente: $B = \dfrac{9}{20}$, $C = \dfrac{4}{5}$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)(x-3)(x-2)}\,dx = -\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{9}{20}\log|x-3| + \frac{4}{5}\log|x-2|$$

— o — o —

Se sotto ci sono i fattori di 2° grado, si può provare a sostituire i numeri complessi che lo annullano.

— o — o —

<u>Esempio</u> $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \qquad A = -\frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1| = \log\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}\,.$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 063

Note Title 12/12/2016

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Sostituzioni preconfezionate per trasformare integrali "strani" in integrali di funzioni razionali.

Quattro casi:

1 – integrali con esponenziali
2 – Radici (qualunque) di roba di 1° grado
3 – Radici quadrate di roba di 2° grado
4 – integrali con $\sin x$ e $\cos x$

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ Pongo $e^x = y$, quindi $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{e^x \cdot \underbrace{e^x\,dx}_{dy}}{1+e^x} = \int \frac{y}{1+y}\,dy = \int \frac{y+1-1}{1+y}\,dy$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = y - \log|1+y| = e^x - \log(1+e^x)$$ Verifica!

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{1}{2+e^x}\,dx =$ Pongo $e^x = y$, da cui $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{2+e^x} \cdot \frac{1}{e^x} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dy} = \int \frac{1}{y(y+2)}\,dy = (\star)$$

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} \qquad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$(\star) = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\log|y| - \log|y+2|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log e^x - \frac{1}{2}\log(2+e^x)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(2+e^x)$$

Tabellina Questa tecnica funziona quando abbiamo

$\boxed{\int \text{Raz}(e^x)\,dx}$ dove Raz è una qualunque funzione razionale

Esempio 3 $\int \frac{16^x}{3+8^x}\,dx$ Pongo $y = 2^x$, da cui $dy = 2^x \log 2\, dx$

$$= \int \frac{16^x}{3+8^x}\,\frac{1}{2^x\log 2}\cdot\underbrace{2^x\log 2\,dx}_{dy} = \frac{1}{\log 2}\int\frac{y^4}{(3+y^3)\,y}\,dy$$

$$= \frac{1}{\log 2}\int \frac{y^3}{3+y^3}\,dy = \text{si fa...}$$

— o — o —

Esempio 4 $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-3}}\,dx$ Pongo $y = \sqrt{x-3}$ ⇝ ricavo x in funzione di y: $y^2 = x-3$ ⇝ $x = y^2+3$ ⇝ $dx = 2y\,dy$

$$= \int \frac{y^2+3+2}{\cancel{y}}\cdot 2\cancel{y}\,dy = 2\left(\frac{1}{3}y^3+5y\right) = \frac{2}{3}(x-3)^{3/2}+10\sqrt{x-3}$$

Esempio 5 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x-3}}\,dx$ Come prima $y = \sqrt{x-3}$ ⇝ $x = y^2+3$ ⇝ $dx = 2y\,dy$

$$= \int \frac{1}{y^2+3+y}\,2y\,dy = 2\int\frac{y}{y^2+y+3}\,dy = \text{si fa...}$$

Esempio 6 $\int \frac{\sqrt[3]{x-3}}{x}\,dx$ $y = \sqrt[3]{x-3}$ ⇝ $x = y^3+3$ ⇝ $dx = 3y^2\,dy$

$$= \int \frac{y}{y^3+3}\,3y^2\,dy = \text{si fa ... modulo fattorizzare il denominatore.}$$

Esempio 7 $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx$

Pongo $y=\sqrt[6]{x}$ (minimo com. mult)

$\rightsquigarrow x = y^6$

$\rightsquigarrow dx = 6y^5\,dy$

$$= \int \frac{y^6+y^3}{y^6-y^2}\, 6y^5\,dy = 6\int \frac{y^4+y}{y^4-1}\, y^5\,dy = \text{divisione} \dots \text{fattorizz.} \dots$$

Esempio 8 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\,dx$

Pongo $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ $\rightsquigarrow$ ricavo x

$y^2 = \dfrac{x+2}{x-3}$; $xy^2 - 3y^2 = x+2$

$\rightsquigarrow x(y^2-1) = 3y^2+2 \rightsquigarrow x = \dfrac{3y^2+2}{y^2-1}$

$dx = \left(\dfrac{3y^2+2}{y^2-1}\right)' dy$

$$= \int \underset{F}{y} \underset{g}{\left(\frac{3y^2+2}{y^2-1}\right)'} dy = \underset{F}{y}\, \underset{G}{\frac{3y^2+2}{y^2-1}} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{3y^2+2}{y^2-1}}\,dy$$

$$= y\,\frac{3y^2+2}{y^2-1} - \int \frac{3y^2-3+5}{y^2-1}\,dy = y\,\frac{3y^2+2}{y^2-1} - \int 3 + \frac{5}{y^2-1}\,dy$$

$$= y\,\frac{3y^2+2}{y^2-1} - 3y - \frac{5}{2}\left(\log|y-1| - \log|y+1|\right)$$

Ora basta sostituire $y = \dots$

— o — o —

Tabellina Questa tecnica funziona per integrali del tipo

$$\boxed{\int \text{Raz}\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[3]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right)}$$

Basta porre $y = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

stessa roba sotto tutte le radici

dove m = m.c.m. indici coinvolti

— o — o —

Radici di polinomi di 2° grado

Esempio 9 $\int \sqrt{x^2+3x-4}\,dx$

1ª tecnica $\sqrt{x^2+3x-4} = x+y$ Provo a ricavare x

$$\cancel{x^2}+3x-4 = \cancel{x^2}+2xy+y^2 \ ; \quad x(3-2y) = y^2+4$$

$$x = \frac{y^2+4}{3-2y} \quad \rightsquigarrow \quad dx = \left(\frac{y^2+4}{3-2y}\right)' dy$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2+3x-4}\,dx = \int \Big(\underbrace{\frac{y^2+4}{3-2y}}_{x} \underbrace{+y}_{+y}\Big)\left(\frac{y^2+4}{3-2y}\right)' dy$$

Nella variabile y è razionale, quindi si fa. Alla fine sostituisco

$$y = \sqrt{x^2+3x-4} - x$$

2ª tecnica $\sqrt{x^2+3x-4} = y\,\overbrace{(x+4)}^{\text{uno dei fattori del polinomio sotto radice}} \rightsquigarrow$ ricavo x

$$x^2+3x-4 = y^2(x+4)^2 \ ; \quad \cancel{(x+4)}(x-1) = y^2(x+4)^{\cancel{2}}$$

È di 1° grado in x ☺ $\qquad x-1 = xy^2+4y^2$

$$x = \frac{4y^2+1}{1-y^2} \quad \rightsquigarrow \quad dx = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2+3x-4}\,dx = \int \underbrace{y\left(\frac{4y^2+1}{1-y^2}+4\right)}_{y\,(x+4)}\left(\frac{4y^2+1}{1-y^2}\right)' dy$$

= con pazienza si fa.

Esempio 10 $\int \sqrt{7x^2+2x+1}\,dx$

Cosa diventa la 1a tecnica?

$$\sqrt{7x^2+2x+1} = \sqrt{7}\,x+y \quad ; \quad \cancel{7x^2}+2x+1 = \cancel{7x^2}+2\sqrt{7}\,xy+y^2$$

1° grado in x $\Longrightarrow$ ☺

Riassunto

1a tecnica $\boxed{\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \qquad \text{Pongo } \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x+y}$

2a tecnica $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ Pongo $\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda)$ dove λ è una radice del polinomio

Oss.
- la 1a funziona purché $a>0$
- la 2a funziona se il pol. ha radici reali
- cosa succede se $a<0$ e non ci sono radici reali? Lasciate ogni speranza: la funzione non è mai definita sui reali perché il polinomio dentro è sempre negativo!!

Tecnica 3 A seconda del segno di a il polinomio si può scrivere nella forma

$$\alpha \pm (\beta x+\gamma)^2$$

A quel punto pongo $y=\beta x+\gamma$ e ritrovo integrali del tipo

$$\int \sqrt{\alpha \pm y^2}\,dy$$

e da qui vado con $\cos t$ o $\cosh t$ a seconda dei segni!

ANALISI 1 – LEZIONE 064

Note Title 12/12/2016

Tabellina $\boxed{\int \mathrm{Raz}(\sin x, \cos x)\,dx}$

Si possono usare le formule parametriche

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

dove $\boxed{t = \tan \frac{x}{2}}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{x}{2} = \arctan t$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt}$

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \underbrace{\frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}}_{\frac{1}{\sin x}} \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\,dt}_{dx} = \int \frac{1}{t}\,dt$

$= \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ VERIFICA!!

Alternativa: $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$

Pongo $y = \cos x \rightsquigarrow dy = -\sin x\,dx$

$$= -\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\log|1+y| - \frac{1}{2}\log|1-y| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|$$ (verificare che sia quello di prima)

Oss. Le formule parametriche sono l'ultima spiaggia!

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^3}\frac{2}{1+t^2}\,dt$ = si fa...

e poi alla fine sostituisco $t = \tan\frac{x}{2}$

Alternativa: vale con tutte le potenze dispari di $\sin x$ e $\cos x$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,dx \qquad y = \sin x$$

$$= \int \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \text{si fa davvero!!}$$

$$\frac{1}{(1-y^2)^2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{d}{dx}\,\frac{Cx+D}{1-y^2}$$

$\rightsquigarrow$ trovo A, B, C, D e ho finito.

Esempio 3 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x}\,dx$ (Vedi lezioni 2011–12)

Possibilità:
- parametriche ☹
- percorso $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ e ci si riduce all'integrale di $\frac{1}{\sin^3(\,)}$

Alternativa: $$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x}\,dx = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx + 2\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 x} + 2\int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 x} + 2\int \frac{\cos x}{\sin x} + 2\int \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2\log|\sin x| - 2\log|\cos x|$$

$$= 2\log|\tan x|$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx \qquad y = \sin x \rightsquigarrow dy = \cos x\,dx$$

$$= \int \frac{dy}{y^3} = \int y^{-3}\,dy = -\frac{1}{2}y^{-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin^2 x}$$

Esempio 4 $\int \arcsin x \, dx =$

$$= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arcsin x} \, dx = \underset{F}{x} \, \underset{G}{\arcsin x} - \int \underset{F}{x} \, \underset{g}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \, dx$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

volendo è $\sqrt{\text{pol. } 2^\circ \text{ grado}}$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ Pongo $y = \sqrt{1-x^2}$ $\rightsquigarrow$ $dy = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \, dx$

$= \int - dy = -y = -\sqrt{1-x^2}$

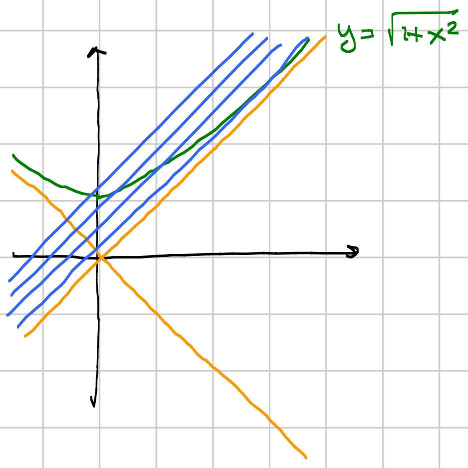
Pongo $y = 1 - x^2$ $\rightsquigarrow$ $dy = -2x \, dx$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} = -\sqrt{1-x^2}$$

— o — o —

$\boxed{\text{DELIRIO}}$ $\int \sqrt{1+x^2} \, dx$ $\sqrt{x^2+1} = x + t$

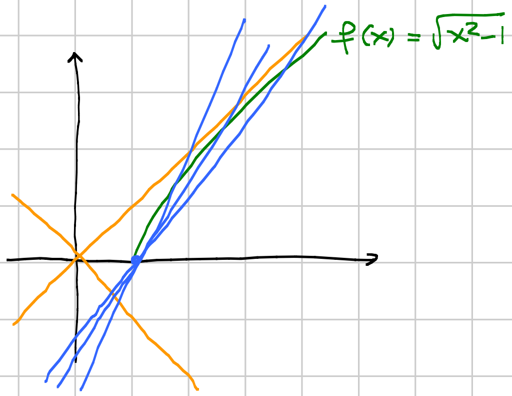
Famiglia di rette ciascuna delle quali incontra l'iperbole in un solo punto



In effetti anche la sostituzione

$\sqrt{x^2+1} = -x + t$ funziona ☺

$\int \sqrt{x^2-1}\, dx$ $\qquad \sqrt{x^2-1} = \underbrace{t(x-1)}$



fascio di rette per il punto $(1,0)$

Ogni retta incontra l'iperbole in 2 punti, uno sempre lo stesso $(1,0)$ e l'altro variabile.

Oss. Il primo esempio è un caso particolare del 2°, visto che sono tutte le rette che passano per un "punto all'infinito" dell'iperbole.

Posso fare con la stessa idea sostituzioni creative!

$\int \sqrt{8+x^2}\, dx$ $\qquad$ Osservo che $f(x) = \sqrt{8+x^2}$ passa per $(1,3)$

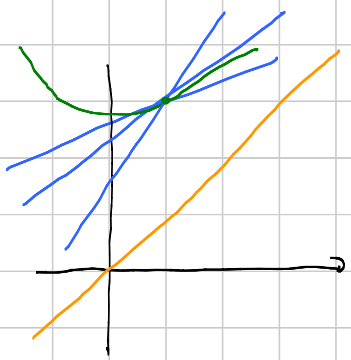
Considero le rette per $(1,3)$: $\quad 3 + t(x-1)$

$\sqrt{8+x^2} = 3 + t(x-1)$ $\qquad$ Ricavo x:

$8 + x^2 = 9 + t^2 (x-1)^2 + 6t(x-1)$

$(x^2-1) = t^2(x-1)^2 + 6t(x-1)$ $\qquad x+1 = t^2(x-1) + 6t$

1° grado in x ☺



Più in generale, data $\int f(x)\,dx$ considero il grafico $y = f(x)$

e spero che esistano due funzioni razionali $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ tali che

$$x = \varphi_1(t)$$
$$y = \varphi_2(t)$$

sia una parametrizzazione del grafico. A quel punto pongo $x = \varphi_1(t)$ e ottengo

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi_1(t))\,\varphi_1'(t)\,dt = \int \varphi_2(t)\,\varphi_1'(t)\,dt$$

e questo è razionale.

Domanda: quando esistono φ_1 e φ_2 ?

Sempre quando il grafico è una conica (iperbole, ellisse, parabola) ma più in generale quando il grafico è una curva razionale

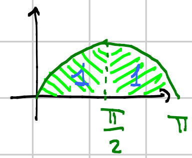
ANALISI 1 – LEZIONE 065

Note Title 14/12/2016

Uso delle simmetrie

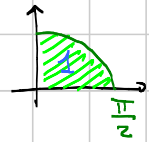
Esempio 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-1) = 1$$



$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(-1)-0 = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-0 = 1$$



$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx = -1$$

Giustificazione di questi passaggi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx =$$

Pongo $x = \pi - y \rightsquigarrow dx = -dy$

Vedo come cambiano gli estremi:

quando $x = \frac{\pi}{2}$ ho che $y = \frac{\pi}{2}$

〃 $x = \pi$ ho che $y = 0$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \underbrace{\sin(\pi-y)}_{\substack{\sin y \\ \text{(precorso)}}}(-dy) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin y \, dy = \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy$$

Oss. $x = \pi - y$ descrive la simmetria intorno alla retta $x = \frac{\pi}{2}$, che è l'asse di simmetria in gioco

Analogamente

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \underset{x=\frac{\pi}{2}-y}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}_{= \sin y}(-dy) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy$$

Funzioni pari / dispari

$f(x)$ pari $\Rightarrow \int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int_0^A f(x)\,dx$

$f(x)$ dispari $\Rightarrow \int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 0$

$f(x)$ pari $\Rightarrow \int_{-A}^{0} f(x)\,dx = \int_0^A f(x)\,dx$

$f(x)$ dispari $\Rightarrow \int_{-A}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^A f(x)\,dx$

Dimostro la prima: pongo $x=-y$, da cui $dx=-dy$

$$\int_{-A}^{0} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{A}^{0}}_{\text{nuovi estremi in } y} f(-y)\,(-dy) = -\int_A^0 \underbrace{f(-y)}_{f(y) \text{ se } f \text{ è pari}}\,dy$$

$$= -\int_A^0 f(y)\,dy = \int_0^A f(y)\,dy.$$

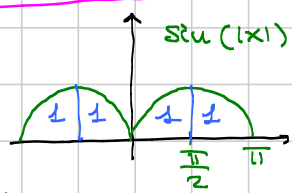
La dim. della seconda è analoga.

— o — o —

Fatto generale

$$\boxed{\begin{array}{lll} \displaystyle\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \underbrace{\pm 1}_{\text{a seconda di } k} & & k \in \mathbb{Z} \\ \displaystyle\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \pm 1 & & k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

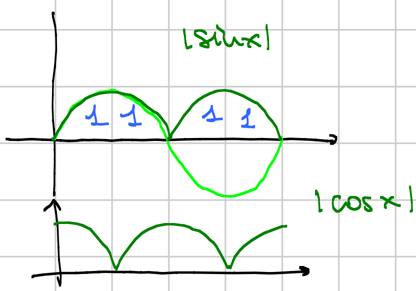
Esempio 2 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(|x|)\,dx = 4$



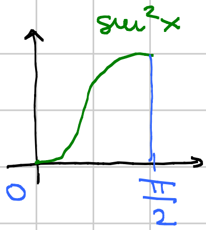
$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 4$

$\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx = 4$

$\int_0^{2\pi} \cos|x|\,dx = 0$



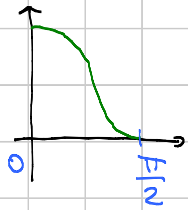
Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$



1° modo: uso la primitiva

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(il resto sono 0)



2° modo: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = S \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = C$

La simmetria suggerisce che $S = C$.

Il precorso suggerisce che

$$S + C = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Quindi

$$S + C = \frac{\pi}{2}, \quad S = C \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = C = \frac{\pi}{4}}$$

Verifica formale che $S = C$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \underset{x = \frac{\pi}{2} - y}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right)(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy \underset{\text{precorso}}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \, dy$$

— o — o —

La stessa cosa vale su tutti gli intervalli con estremi multipli di $\frac{\pi}{2}$, quindi

$$\boxed{\int_{a\frac{\pi}{2}}^{b\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_{a\frac{\pi}{2}}^{b\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \underbrace{\boxed{(b-a)\frac{\pi}{4}}}_{\text{metà lungh. zona di integrazione}}}$$

se a e b sono in $\mathbb{Z}$

Oss.
$$\int_a^b 1\,dx = b-a = \text{lungh. zona di integrazione}$$
(area di un rettangolo di altezza 1 = lungh. base).

—o—o—

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(6x)\,dx$ Pongo $y=6x \rightsquigarrow dy = 6dx$
Quando $x=0$ ho che $y=0$
" $x=\pi$ " " $y=6\pi$

$$= \underbrace{\int_0^{6\pi}}_{\text{nuovi estremi}} \cos^2 y \cdot \underbrace{\frac{1}{6}dy}_{dx} = \frac{1}{6}\int_0^{6\pi} \cos^2 y\,dy = \frac{1}{6}\cdot \underbrace{3\pi}_{\frac{1}{2}\text{zona integrazione}} = \frac{\pi}{2}$$

Analogamente $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(666x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

—o—o—

Esempio 4 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^7 x}{7^x+1}\,dx = A$ Di primitiva non se ne parla

Pongo $y=-x \rightsquigarrow dy=-dx \rightsquigarrow$ estremi si scambiano

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\cos^7(-y)}{7^{-y}+1}(-dy) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^7 y}{7^{-y}+1}\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^7 x}{7^{-x}+1}\,dx = B$$

Abbiamo dim. che $A=B$. Ora

$$A+B = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^7 x \underbrace{\left[\frac{1}{7^x+1} + \frac{1}{7^{-x}+1}\right]}_{=1} = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^7 x\,dx$$

$$\frac{1}{7^{-x}+1} = \frac{1}{\frac{1}{7^x}+1} = \frac{7^x}{7^x+1}$$

☺

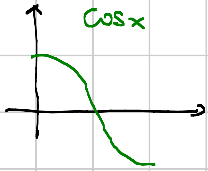
$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^7 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,(1-\sin^2 x)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^0 (1-y^2)^3\,dy = 0$$

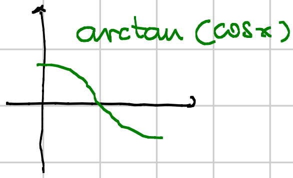
$y=\sin x$
$dy = \cos x\,dx$

Esempio 5

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{F}\, \underbrace{\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}}_{g}\, dx = \Big[\underbrace{x}_{F}\,\underbrace{(-\arctan(\cos x))}_{G}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{1}_{f}\,\underbrace{(-\arctan(\cos x))}_{G}\, dx$$

$$= \underbrace{\pi\,(-\arctan(-1))}_{=\,\pi\cdot\arctan 1\,=\,\frac{\pi^2}{4}} + \underbrace{\int_0^\pi \arctan(\cos x)\, dx}_{=\,0}$$





$$\underbrace{\int_0^\pi \arctan(\cos x)\, dx}_{=\,A} \underset{x=\pi-y}{=} \int_\pi^0 \arctan(\cos(\pi-y))\,(-dy)$$

$$= \int_0^\pi \arctan(\underbrace{\cos(\pi-y)}_{-\cos y})\, dy$$

$$= -\int_0^\pi \arctan(\cos y)\, dy = -A$$

$A = -A \Rightarrow A = 0.$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 066

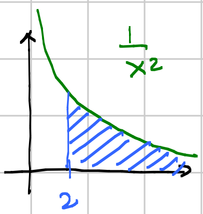
Note Title 14/12/2016

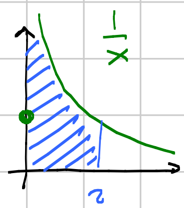
INTEGRALI IMPROPRI

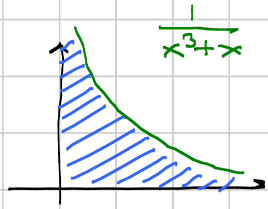
Integrali propri: (1) zona di integrazione limitata
(2) funzione integranda limitata

Se manca (1) e/o (2) l'integrale si dice improprio.

Esempi $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{x}\,dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+x}\,dx$





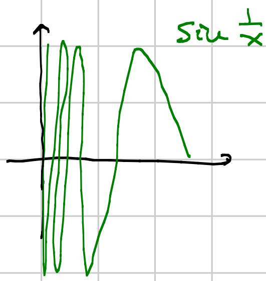


Manca (1)
(2) ok

Manca (2)
(1) ok

Mancano (1) e (2)

Achtung! $\displaystyle\int_0^{2} \sin\frac{1}{x}\,dx$ è un integrale PROPRIO



→ zona integr. limitata

→ funzione limitata in [−1, 1]

(ed è pure integrabile perché continua tranne che in punto)

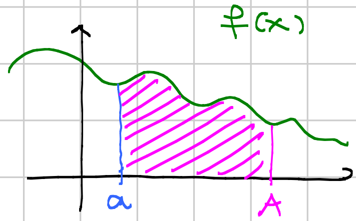
Prima classificazione:

→ integrali monoproblema (manca uno solo tra (1) e (2), e se manca (2) il pbm. è in un estremo)

→ integrali con più problemi.

INTEGRALI MONOPROBLEMA

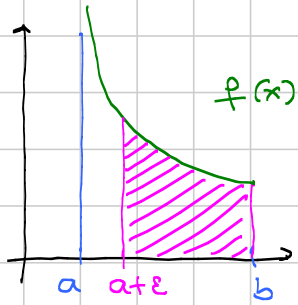
Zona di integrazione non limitata



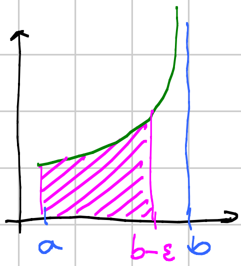
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_a^A f(x)\,dx}_{\text{essendo } f(x) \text{ limitata questo ha senso}}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx$$ = fare disegno!

Zona integr. limitata, pbm. in un estremo



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx}_{\text{ha senso perché il pbm. è solo in } a}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Operativamente: un int. improprio è la composizione di un integrale + un limite, e da buon limite ha 4 comportamenti possibili

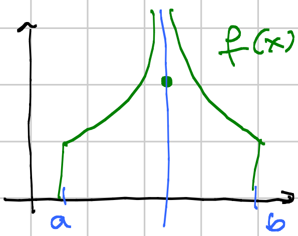
→ convergere ad un certo $\ell \in \mathbb{R}$

→ divergere a $+\infty$

→ divergere a $-\infty$

→ essere indeterminato.

Achtung!



Non è un integrale monoproblema

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-2x}\,dx$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\Big(-\frac{1}{2}\underbrace{e^{-2A}}_{\downarrow\, 0}+\frac{1}{2}e^0\Big) = \frac{1}{2}$$

Molto brutal mode: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}e^{-\infty}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Esempio 2 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\Big[-\underbrace{\frac{1}{A}}_{\downarrow\, 0}+\frac{1}{2}\Big] = \frac{1}{2}$$

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^2\frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\log x\right]_\varepsilon^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}(\log 2-\underbrace{\log\varepsilon}_{\downarrow\, -\infty}) = +\infty$$

Esempio 4 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A\cos x\,dx$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[\sin A-\sin 3\right] = \text{N.E.}$$

Quindi è indeterminato

Esempio 5 $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[x\log x-x\right]_\varepsilon^1$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\underbrace{1\log 1}_{=0}-1-\underbrace{\varepsilon\log\varepsilon}_{\downarrow\, 0}+\underbrace{\varepsilon}_{\downarrow\, 0}\Big] = -1.$$

Casi classici Sia $a > 0$ fissato

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } b > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } b \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{a} \frac{1}{x^b}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } b < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } b \geq 1 \end{cases}$$

Il caso $b = 1$ va sempre male, gli altri si scambiano

Dim di qualcosa Per $b \neq 1$ vale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^{A} \frac{1}{x^b}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{1-b} \frac{1}{x^{b-1}} \right]_a^A$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{1-b} \frac{1}{A^{b-1}} - \underbrace{\boxed{\frac{1}{1-b} \frac{1}{a^{b-1}}}}_{\text{Numero}} \right)$$

per $b > 1$ tende a 0
per $b < 1$ tende a $+\infty$ moltiplicato per $\frac{1}{1-b}$ che è > 0

Per $b = 1$ si ha $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^{A} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{A \to +\infty} (\log A - \log a) = +\infty$$

Per il caso con problema in $x = 0$:

$$\int_\varepsilon^{a} \frac{1}{x^b}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\underbrace{\frac{1}{1-b} \frac{1}{a^{b-1}}}_{\text{numero}} - \frac{1}{1-b} \boxed{\frac{1}{\varepsilon^{b-1}}} \right)$$

$\nearrow +\infty$ se $b > 1$

$\searrow 0$ se $b < 1$

Cosa si fa se l'integrale ha + problemi ?

Si spezza in un numero suff. di integrali con un pbm. solo

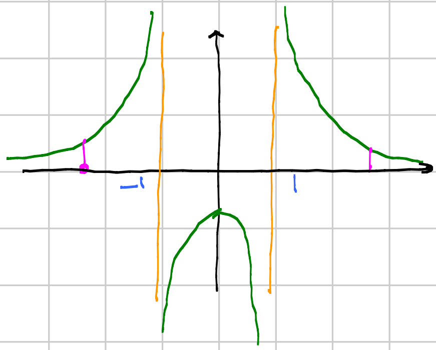
Esempio
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^{3} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

qualunque $a>0$ è ok

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\pi} e^{-x^2}\,dx + \int_{\pi}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-3} + \int_{-3}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{7} + \int_{7}^{+\infty}$$



Dopo aver spezzato, studio i singoli pezzi e traggo le conclusioni con le operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$, con una grossa cautela

Se esiste un pezzo che diverge a $+\infty$ ed esiste un pezzo che diverge a $-\infty$, allora per definizione quello globale si pone indeterminato

Esempio
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \text{diverge sempre}$$

(sono due pezzi e almeno 1 va male sempre).

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 067

Note Title 15/12/2016

Criteri di convergenza per integrali impropri

Come stabilire se un int. impr. converge o no senza calcolare la primitiva

Notazione: $\int_E f(x)\,dx$

E ← zona di integr.: intervallo oppure semiretta

$\boxed{f(x) \text{ segno costante } (\geq 0)}$	$\boxed{f(x) \text{ segno variabile}}$
• Criterio confronto • Criterio confr. asintotico → casi standard → casi limite	• assoluta integrabilità
• metodo dei triangolini (rettangolini)	• trucco integraz. per parti

Oss. fondamentale Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$, allora l'integrale improprio può solo
- convergere
- divergere a $+\infty$

Oss. La condizione $f(x) \geq 0$ basta che sia verificata "vicino al problema", cioè
- per x abbastanza grande se $E = [a, +\infty)$
- in un intorno dx di a se $E = [a, b]$ e il problema unico dell'integrale è in a
- analogo se è in b.

Criterio del confronto Supponiamo che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in E \text{ "vicino al problema"}$$

Allora valgono le implicazioni

$$\int_E g(x)\,dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_E f(x)\,dx < +\infty$$

$$\int_E f(x)\,dx = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_E g(x)\,dx = +\infty$$

Ogni altra implicazione è abusiva.

Criterio confronto asintotico (caso standard). Supponiamo che

$$f(x) \geq 0 \quad e \quad g(x) > 0 \qquad \forall x \in E \text{ "vicino al pbm".}$$

Supponiamo inoltre che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

è il pbm (cioè $+\infty$ se $E = [a, +\infty)$, e l'estremo a o b se la zona è $[a,b]$ e c'è pbm. in uno degli estremi)

Allora i due integrali si comportano allo stesso modo cioè

$$\int_E f(x)\,dx \underset{=}{<} +\infty \iff \int_E g(x)\,dx \underset{=}{<} +\infty$$

Oss. ① Quanto detto sopra vale per integrali MONOPROBLEMA con unico pbm. in x_0

② Nei casi limite $\ell = 0$ opp $\ell = +\infty$, si ragiona come con le serie, ricadendo nel caso $f(x) \leq g(x)$ opp. $f(x) \geq g(x)$ del criterio del confronto.

<u>Criterio assoluta convergenza</u> (assol. integrabilità)

$$\boxed{\int_E |f(x)|\,dx < +\infty \implies \int_E f(x)\,dx \text{ converge}}$$

$$\boxed{\int_E |f(x)|\,dx = +\infty \implies \text{BOH}}$$

$\boxed{\text{Dim di 1 caso}}$ Confronto normale con $E = [a, +\infty)$.

Supponiamo per ipotesi che

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad \forall x \ge a$$

Allora per ogni $A \ge a$ vale

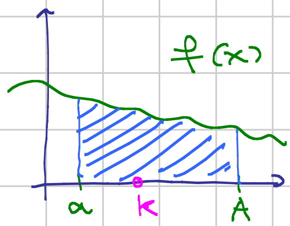
$$\int_a^A f(x)\,dx \le \int_a^A g(x)\,dx \qquad \text{(monotonia int. propri)}$$

Basta ora fare il limite a dx e sx (limite per $A \to +\infty$)

I lim. a dx e sx esistono perché come funzioni di A sono debolmente crescenti (serve che le integrande sono ≥ 0)

<u>Variante</u> Supponiamo ora che

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad \forall x \ge k$$



Allora basta osservare che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^{+\infty} f(x)\,dx$$

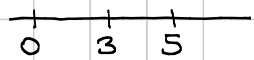
e questa segue da

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_a^A f(x)\,dx & = & \displaystyle\int_a^k f(x)\,dx & + & \displaystyle\int_k^A f(x)\,dx \qquad \forall A \ge k \ge a \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx & & \text{numero fisso} & + & \displaystyle\int_k^{+\infty} f(x)\,dx \end{array}$$

— o — o —

Oss. Quando ho un integrale con 2 pbm., diciamo in 0 e $+\infty$ allora in mezzo posso spezzare dove mi pare

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^{+\infty} f(x)\,dx$$



$$= \int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^{+\infty} f(x)\,dx$$

(è come spezzare in 3 e ricombinare diversamente i vari pezzi).

Esempio 1 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+5x+6}\,dx$

Integrale improprio con unico pbm. a $+\infty$ e integranda $f(x) \geq 0$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, quindi converge

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \uparrow \\ \text{pbm}}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad \Rightarrow \text{ stesso comportamento}$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+5x+6}\,dx$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, quindi diverge

No! Il secondo integrale diverge per colpa del pbm. in $x=0$, mentre il confronto l'abbiamo fatto a $+\infty$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, quindi $\int f(x)\,dx$ con unico pbm. a $+\infty$, si comporta come $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con unico pbm. a $+\infty$, quindi conv.

Volendo potrei spezzare:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\text{Int. proprio, quindi numero}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{confronto con } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}$$

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

Ora ci sono due pbm., quindi spezzo: $\displaystyle\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

Problema a $+\infty$: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, quindi si comporta come l'int. di $\frac{1}{x^2}$ con pbm. a $+\infty$, quindi converge

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}} = 1$$

Problema a 0: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$, quindi si comporta

come l'integr. di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ con pbm. in $x=0$, quindi converge

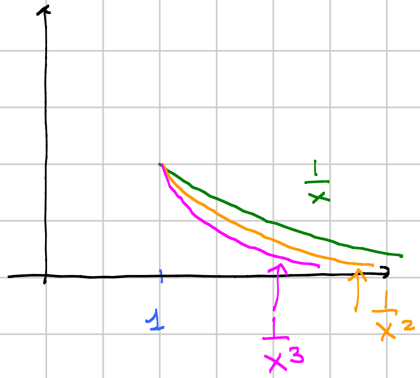
(a 0 gli esponenti "buoni" sono quelli <1)

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ \uparrow \\ \text{pbm}}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = 1$$

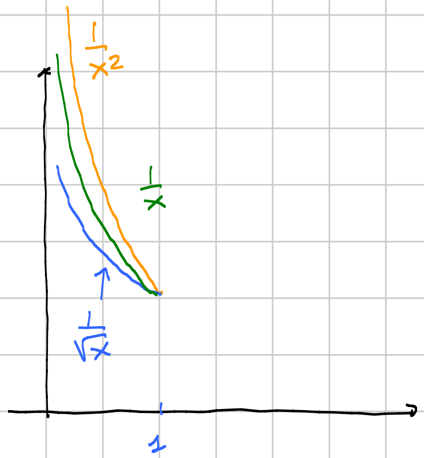
[Se avessi scelto $g(x) = \frac{1}{x^2}$ veniva lim $=0$, quindi

$f(x) \le g(x)$ vicino al pbm., ma $\int g(x) = \int \frac{1}{x^2}$ con pbm. in $x=0$ diverge $\Rightarrow$ BOH]

Oss. (sui pbm. a 0 e $+\infty$)



Per il pbm. a $+\infty$, più l'esponente è grande, più è facile che converga



Per il pbm. in 0, più l'esp. è grande, e più è facile che diverga.

ANALISI 1 — LEZIONE 068

Note Title 15/12/2016

Esempio 1 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$

Int. improprio con unico pbm. a $+\infty$ e $f(x) \geq 0$ vicino al pbm.
($\frac{1}{x} \in (0,1)$ per x grande, quindi $\sin\frac{1}{x} > 0$)

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x}$, quindi $\int f(x)\,dx$ con pbm. a $+\infty$ si comporta come $\int \frac{1}{x}\,dx$ con pbm. a $+\infty$, quindi diverge.

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$ che si riduce a fare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$

$f(x) \geq 0$ con due pbm: 0 e $+\infty$ $\displaystyle\int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$

Problema a $+\infty$: $f(x) \sim \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^{3/2}}$, quindi conv. perché $\frac{3}{2} > 1$

Problema a 0: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, quindi conv. perché $\frac{1}{2} < 1$

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$

$f(x) \geq 0$. Problema a $+\infty$: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge

Problema a 0: NON ESISTE perché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{6}$ (Taylor)

quindi l'integranda è limitata in ogni intervallo $[0, A]$

$\boxed{\text{Problemi in p.ti diversi da 0}}$

Supponiamo che il pbm. sia in un certo $a \in \mathbb{R}$. Allora

può essere un qualunque numero positivo

$$\boxed{\int_a^{a+1} \frac{1}{|x-a|^b}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } b<1 \\ \searrow \text{div. a } +\infty & \text{se } b \geq 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_{a-1}^{a} \frac{1}{|x-a|^b}\,dx = \text{come sopra}}$$

"Dim" vorrei fare la sostituzione

$$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^b}\,dx$$

Pongo $y = x-a \rightsquigarrow dx = dy$

$x = a \rightsquigarrow y = 0$; $x = a+1 \rightsquigarrow y = 1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y^b}\,dy \quad \text{e questo è in tabellina.}$$

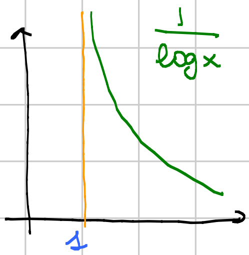
Dovrei dimostrare che si può fare sostituzione in int. impropri

$$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^b}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{a+1} \frac{1}{(x-a)^b}\,dx = \text{(qui posso sostituire)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{y^b}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y^b}\,dy.$$

— o — o —

Esempio 4 $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\log x}\,dx$

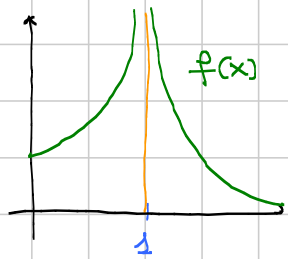


Portiamo pbm in 0 ponendo $y = x-1$

$$\int_1^4 \frac{1}{\log x}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy \quad \left[\sim \int_0^3 \frac{1}{y}\,dy \Rightarrow \text{diverge} \right]$$

<u>Esempio 5</u>

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{|x^4-1|^{1/2}}\,dx$$



Spezzo in 3: $\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^{+\infty}$

$\boxed{[2,+\infty)}$: $f(x) \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ converge perché $2>1$

$\boxed{[1,2]}$: $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}\ \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}}$

colpevole dell'improprietà! tranquillo

Brutal mode: $\int f(x)\,dx$ con probl in $x=1$ si comporta come

$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ con probl. in $x=1 \Rightarrow$ converge perché $\frac{1}{2}<1$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

$\boxed{[0,1]}$ Stessa cosa solo che ora serve il val. assol.

C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \rightsquigarrow \lim_{x\to 1^-} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow$ stesso comp.

$\rightsquigarrow$ converge

— o — o —

<u>Oss.</u>

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^b x}\,dx = \begin{cases}\text{conv. se } b>1\\ \text{div. a } +\infty \text{ se } b\le 1\end{cases}}$$

Si dim. facendo la primitiva con il cambio $y = \log x$; $dy = \frac{dx}{x}$

Esempio 6 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^a)}{x^{2016}}\,dx$ Per quali valori di $a>0$ converge?

Spezziamo: $\displaystyle\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

$\boxed{[1,+\infty)}$ In questa zona $f(x)$ ha segno variabile, quindi spero nell'assol. integr.

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x^a)|}{x^{2016}} \leq \frac{1}{x^{2016}} \quad ☺$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2016}}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2016>1}}{<+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto} \\ \text{normale tra} \\ \text{integrande } \geq 0}}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{assol.} \\ \text{integr.}}}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$

$\boxed{[0,1]}$ Qui non ci sono pbm. di segno

Brutale: $f(x) \sim \dfrac{x^a}{x^{2016}} = \dfrac{1}{x^{2016-a}}$, quindi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

converge $\Longleftrightarrow$ $2016-a<1$ $\Longleftrightarrow$ $a>2015$

Esempio 7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{77}+5x^7+\arctan x - 1}\,dx$

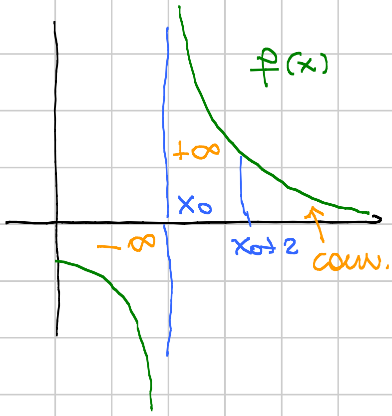
C'è un pbm. a $+\infty$

Ma ce ne è almeno un altro. Perché? Il denom è <0 per $x=0$ e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, quindi essendo continuo si annulla almeno una volta in mezzo

Osservo che il denom. si annulla esattamente una volta perché è somma di funz. strett. crescenti.

Sia x_0 il p.to in cui si annulla

Spezzo in 3: $\displaystyle\int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+2} + \int_{x_0+2}^{+\infty}$



$\boxed{[x_0+2,+\infty]}$ $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{77}}$, quindi

l'integrale converge $(77>1)$

$\boxed{[x_0,x_0+2]}$ Voglio sapere come si annulla in x_0 il denom.

$$d(x) = x^{77}+5x^7+\arctan x - 1 \underset{\text{Taylor}}{=} \underbrace{d(x_0)}_{0} + d'(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0))$$

Idea: $d(x) \sim x-x_0$, quindi $f(x) \sim \dfrac{1}{x-x_0}$, quindi l'integrale diverge (espon $=1$).

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{x-x_0}$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{x-x_0}{x^{77}+5x^7+\arctan x - 1}$$

$$\underset{\left[\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{\text{derivata}\ldots} = \frac{1}{\text{roba}>0} \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{d'(x_0)}$$

$\boxed{[0,x_0]}$ Diverge a $-\infty$ per stesso motivo

Conclusione: quello globale è INDETERMINATO.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 069

Note Title 19/12/2016

INTEGRALI OSCILLANTI

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

DIRICHLET FRESNEL

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$$

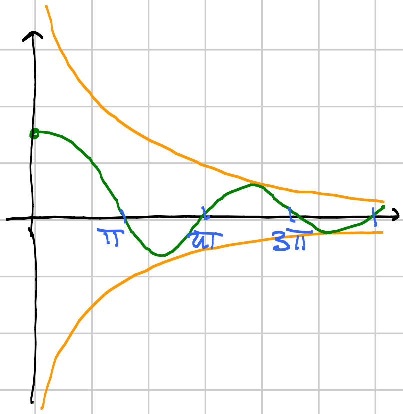
Strategie:

→ criterio di Dirichlet per gli integrali (trucco integ. per parti)

→ metodo dei triangolini (rettangolini)

<u>Esempio</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$

int. proprio



$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{G}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\underbrace{\frac{-\cos x}{x}}_{F\,G} \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{(-\cos x)}_{F} \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{g} dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ -\underbrace{\frac{\cos A}{A}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{\cos 1}{1}}_{\downarrow\,\text{numero}} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right\} = \frac{\cos 1}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

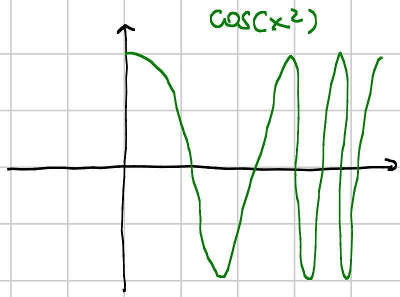
int. impr. che conv. assol.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ conv.}$$

Tabellina

$\dfrac{|\cos x|}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ + confronto

Assol. integrabilità



Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{numero}} + \int_1^{+\infty} \dots$

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \cos(x^2)\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \underbrace{2x\cos(x^2)}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{2x}}_{G}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\frac{\overset{F}{\sin(x^2)}}{\underset{G}{2x}}\right]_1^A - \int_1^A \underset{F}{\sin(x^2)} \underset{g}{\left(-\frac{1}{2x^2}\right)} dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_{\to 0} - \frac{\sin 1}{2} + \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{2x^2}\,dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx}_{\text{assolutamente integrabile come prima}}$$

In modo del tutto analogo si tratta

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

e anche gli integrali del tipo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \quad (a>0) \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^a)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^a)\,dx \quad (a>1)$$

Oss. Non c'è l'analogo della cond. nec. per la conv. degli int. impropri, cioè l'integrale può convergere anche se $f(x)$ non tende a 0 per $x \to +\infty$.

Criterio di Dirichlet per gli int. impropri

<u>Teorema</u> Sia $a \in \mathbb{R}$, siano $f : [a, +\infty)$ e $g : [a, +\infty)$ due funz.
Supponiamo che
(i) $g \in C^1$ e debolmente decrescente (quindi $g'(x) \leq 0$),
(ii) $g(x) \to 0$ per $x \to +\infty$,
(iii) $f \in C^0$ (basta integrabile) e la sua primitiva è limitata cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |F(x)| \leq M \quad \forall x \geq a.$$

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \quad \text{converge}$$

Dim. Integro per parti come negli esempi

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,g(x)\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[F(x)\,g(x)\right]_a^A - \int_a^A F(x)\,g'(x)\,dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \underbrace{F(A)\,g(A)}_{\substack{(ii)+(iii)\\ \downarrow \\ 0}} - \underbrace{F(a)\,g(a)}_{\substack{\downarrow \\ \text{numero}}} - \int_a^A F(x)\,g'(x)\,dx \right\}$$

$$= -F(a)\,g(a) - \underbrace{\int_a^{+\infty} F(x)\,g'(x)\,dx}_{\text{assol. integr.}}$$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A |F(x)|\cdot|g'(x)|\,dx \leq M \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \underbrace{|g'(x)|}_{\substack{\shortparallel \\ -g'(x) \text{ per la (i)}}}\,dx$$

$$= M \lim_{A\to+\infty} -\int_a^A g'(x)\,dx$$

$$= M \lim_{A\to+\infty} \left(g(a) - \underbrace{g(A)}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\right)$$

$$= M\,g(a)$$

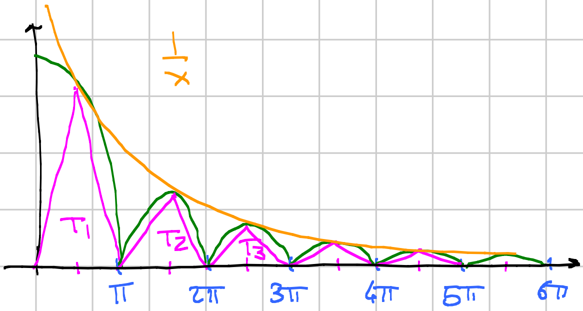
— o — o —

Negli esempi prec. abbiamo usato

$f(x) = \sin x \qquad g(x) = \frac{1}{x}$ Dirichlet

$f(x) = 2x\cos(x^2) \qquad g(x) = \frac{1}{2x}$ Fresnel

— o — o —



Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

Geometricamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Area}(T_n)$$

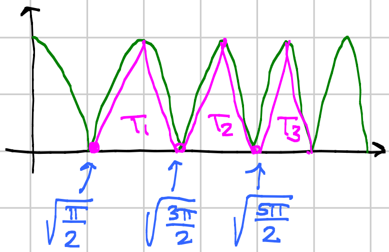
Il triangolo T_n ha base di lungh. π e altezza $\boxed{\dfrac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2}}}$

$\frac{1}{x}$ nel p.to di mezzo della base

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2}} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \frac{1}{2}} = +\infty$$

Quindi anche l'integrale diverge.



Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx$

Il triangolo T_n ha altezza 1 e come base l'intervallo

$$\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}(2n-1)}, \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Area}(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)} - \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)$$

Per studiare la serie ci sono almeno 2 modi:

→ razionalizzare $\sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots} = \dfrac{2}{\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}}$ ⇝ diverge per C.A. con $\frac{1}{\sqrt{n}}$

→ osservare che è telescopica e $S_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{1} \to +\infty$

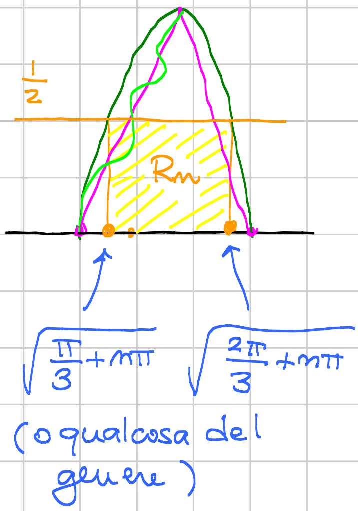
Corretto dopo video

Quindi anche in questo caso

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx = \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx = +\infty$$

— o — o —

Oss. Il metodo dei triangolini è scorretto



Il triangolo non è isoscele, ma questo non è importantissimo.
Ma… è così chiaro che il triang. sta sotto? Servirebbe uno studio di funzioni?

Più sicuro è il metodo dei rettangolini

La conclusione è la stessa di prima.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 070

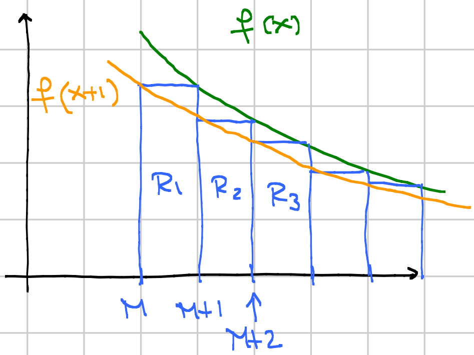
Note Title 19/12/2016

CONFRONTO SERIE – INTEGRALI

(gli integrali aiutano le serie)

Sia $M \in \mathbb{N}$ e sia $f:[M,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolm. decresc.

Allora valgono le disug.



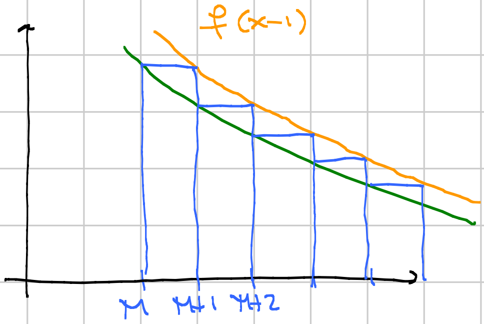
$$\int_M^{+\infty} f(x+1)\,dx \le \underbrace{\sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n)}_{\text{somma aree rettangoli}} \le \underbrace{\int_M^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{area sotto } f(x)}$$

Con un cambio di variabili sul 1° otteniamo

$$\boxed{\int_{M+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \le \int_M^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Analogamente

$$\boxed{\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=M}^{+\infty} f(n) \le \underbrace{f(M)}_{\text{1° rettangolo}} + \underbrace{\int_M^{+\infty} f(x)\,dx}_{\int_{M+1}^{+\infty} f(x-1)\,dx}}$$



Teorema (Confronto serie integrali)
Sia $M \in \mathbb{N}$ e sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f è debolm. decrescente
(ii) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq M$.
Allora

$$\sum_{n \geq M}^{+\infty} f(n) \quad \text{si comporta come} \quad \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$$

Dim Date le relazioni precedenti

- se l'integrale diverge, allora guardo disug. sx
- " " converge, " " " dx.

— o — o —

Oss. Per dimostrare le disug. di confronto in maniera superformale dovrei definire una nuova funzione

$$g(x) = f(\lfloor x \rfloor)$$

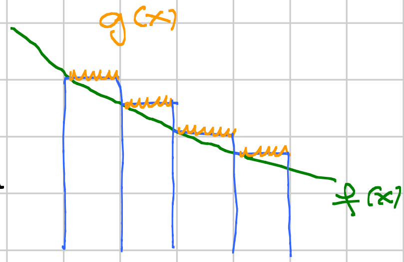
parte intera

e osservare che

$$f(x-1) \leq g(x) \leq f(x)$$

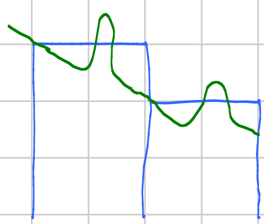
e

$$\int_M^{+\infty} g(x)\,dx = \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$



e quindi concludere con la monotonia dell'integrale.

Oss. Dove ho usato che $f(x)$ è deb. decr. ?
Se non lo fosse, non sarebbe più evidente la disug. di sopra



— o — o —

Utilizzi classici

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^a}}_{f(x)}\, dx < +\infty \quad \text{per } a > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ conv. per } a > 1$$

Questo si può dim. con la primitiva

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx = +\infty \quad \text{per } a \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = +\infty \quad \text{per } a \leq 1$$

Stessa cosa per quelle del tipo

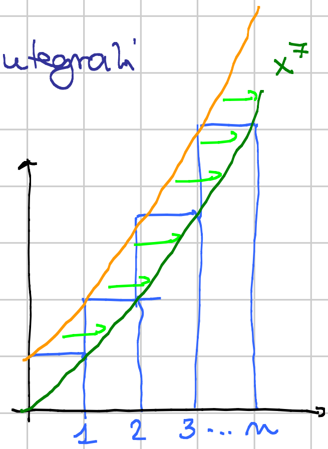
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} \quad \text{che si confrontano con} \quad \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^a x}\, dx}_{\text{primitiva facile}}$$

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^7 = a_n$

È evidente che $a_n \to +\infty$. Ma come? Ordine di ∞ e parte princ.

Risposta: $a_n \sim \frac{1}{8} n^8$ Brutale: $a_n \sim \displaystyle\int_0^n x^7\, dx = \frac{1}{8} n^8$

Rigoroso: cerco un confronto sommatoria / integrali



$$\int_0^n x^7\, dx \leq a_n \leq \int_0^n (x+1)^7\, dx$$
$$= \int_1^{n+1} x^7\, dx$$

$$\frac{1}{8} n^8 \leq a_n \leq \frac{1}{8}(n+1)^8 - \frac{1}{8}$$

Divido per n^8 e faccio il limite.

Esempio 2 Voglio calcolare in modo approx

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} = S$$

Detto altrimenti: se sommo i primi 100 termini, di quanto la somma differisce da S

$$S - S_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \le \int_{100}^{+\infty} \frac{x^3}{3^x}\,dx$$

serie – integrali

Devo verificare che $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$ sia decrescente per $x \geq 100$, ma questo è uno studio di funzioni.
Non resta che calcolare l'integrale (la primitiva si fa per parti) e si ha una stima del resto.

Oss. Possiamo anche sostituire 100 con un valore incognito k e vedere quale k garantisca l'errore voluto.

— o — o —

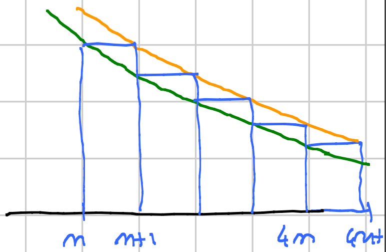
Esempio 3

$$a_n = \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k} \qquad a_n \to \log 4$$

Brutale: $a_n \sim \int_n^{4n} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_n^{4n} = \log 4$

Rigoroso:

$$\int_n^{4n+1} \frac{1}{x}\,dx \le a_n \le \underbrace{\int_{n-1}^{4n} \frac{1}{x}\,dx}_{\int_n^{4n+1} \frac{1}{x-1}\,dx}$$



$$\log \frac{4n+1}{n} \le a_n \le \log \frac{4n}{n-1}$$ e si conclude

Esempio 4
$$\sum_{k=n}^{4n} \sin \frac{1}{k} = a_n$$

Si potrebbe ridurre a $\int \sin \frac{1}{x}\, dx$, ma ☹

Brutal mode: $\displaystyle\sum_{k=n}^{4n} \sin \frac{1}{k} \underset{\text{Taylor}}{\sim} \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}$ = come prima

Facile: $\sin x \geq x \quad \forall x \geq 0$, quindi
$$a_n \geq \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}$$

Difficile Per ogni $\varepsilon > 0$ vale che esiste $\delta > 0$ t.c.
$$\sin x \leq (1+\varepsilon) x \qquad \forall x \in (0, \delta)$$

(segue da $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$, quindi per $x \sim 0$ ...)

Ma allora
$$\sin \frac{1}{k} \leq (1+\varepsilon) \frac{1}{k} \qquad \text{definitiv.}$$

Ma allora, non appena $\frac{1}{n} \leq \delta$, vale
$$\underbrace{\sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}}_{\downarrow\ \log 4} \leq a_n \leq \underbrace{(1+\varepsilon) \sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k}}_{\downarrow\ (1+\varepsilon)\log 4}$$

Da questo segue che defin.
$$\log 4 - \varepsilon \leq a_n \leq (1+\varepsilon) \log 4 + \varepsilon$$

da cui si conclude perché ε è arbitrario.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 071

Note Title 20/12/2016

$\boxed{\text{LEMMA DI ABEL}}$ (Sommazione per parti)

Siano f_k e g_k due successioni. Siano $0 \leq m \leq n$ numeri naturali.

Allora

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} \underbrace{(f_{k+1} - f_k) g_k}_{\int_m^n f' g} = \underbrace{f_{n+1} g_{n+1} - f_m g_m}_{[fg]_m^n} - \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} (g_{k+1} - g_k)}$$

$$- \int_m^n f g'$$

$\boxed{\text{Dim. 1}}$ Shift degli indici sul LHS (left-hand side) [RHS]

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} g_k - \sum_{k=m}^{n} f_k g_k \qquad \text{shift degli indici} \\
&= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} g_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} f_{k+1} g_{k+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} g_k - \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} g_{k+1} + f_{n+1} g_{n+1} - f_m g_m \\
&= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} (g_k - g_{k+1}) + f_{n+1} g_{n+1} - f_m g_m \\
&= \text{RHS}.
\end{aligned}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (Segue la linea della dim. dell'integr. per parti)

$$\begin{aligned}
f_{n+1} g_{n+1} - f_m g_m &= \underbrace{\sum_{k=m}^{n} (f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k)}_{\text{telescopica}} \\
&= \sum_{k=m}^{n} (f_{k+1} g_{k+1} \overbrace{- f_{k+1} g_k + f_{k+1} g_k}^{\text{termine misto}} - f_k g_k) \\
&= \sum_{k=m}^{n} f_{k+1} (g_{k+1} - g_k) + \sum_{k=m}^{n} (f_{k+1} - f_k) g_k .
\end{aligned}$$

— o — o —

$\boxed{\text{CRITERIO DI DIRICHLET}}$ Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

(i) b_n debolmente decrescente

(ii) $b_n \to 0$ (quindi $b_n \geq 0$ sempre)

(iii) esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che ("la primitiva di a_n è limitata")

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \quad \text{converge}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Poniamo $A_n := \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ ($A_0 = 0$). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dal lemma di Abel otteniamo che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(A_{k+1} - A_k)}_{a_k} b_k \qquad (\text{Abel con } f_k = A_k,\ g_k = b_k)$$

$$= A_{n+1} b_{n+1} - \underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{perché } A_0 = 0}}{A_0 b_0} - \sum_{k=0}^{n} A_{k+1}(b_{k+1} - b_k)$$

$A_{n+1} b_{n+1} \to 0$ (perché A_{n+1} è lim. e $b_{n+1} \to 0$)

Dico che l'ultima serie è assolutamente convergente

$$\sum_{k=0}^{n} |A_{k+1}(b_{k+1} - b_k)| = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|A_{k+1}|}_{\leq M} \cdot |b_{k+1} - b_k|$$

$$\leq M \sum_{k=0}^{n} |b_{k+1} - b_k|$$

$$= +M \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) \leftarrow \text{telescopica}$$

$$= +M(b_0 - b_{n+1}) \xrightarrow{\text{per } n \to +\infty} +M b_0 \,. \qquad \square$$

Caso speciale $a_n = (-1)^n$. In questo caso $A_n = 1, 0, 1, 0, \dots$ quindi limitate

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\substack{\text{primit.}\\ \text{limitata}}} \underbrace{b_n}_{\substack{\text{tende a 0}\\ \text{decrescendo}}}$$

Quindi: Leibnitz è un caso particolare di Dirichlet.

$\boxed{\text{Esempio vero}}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

L'assoluta convergenza non sembra funzionare

$$\frac{|\sin n|}{n} \le \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{BOH}$$

Provo con Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\sin n}}_{= a_n} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{= b_n} \quad \text{(ipotesi ok)}$$

"Mi basta" dimostrare che le somme parziali di a_n sono limit., cioè $\exists M$ t.c.

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \sin k \right| \le M$$

Ci sono due modi:

→ esiste una formula esplicita che si dim. per induzione

→ uso i numeri complessi

$$e^{ik} = \cos k + i \sin k \qquad \text{(formula misteriosa)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} \cos k + i \sum_{k=0}^{n} \sin k$$

Posso riscrivere come

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k + i \sum_{k=0}^{n} \sin k = \sum_{k=0}^{n} (e^{i})^k \quad \text{(geometrica)}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^{i} - 1}$$

Passando ai moduli

$$|LHS| \le \frac{|e^{i(n+1)} - 1|}{|e^{i}-1|} \le \frac{|e^{i(n+1)}| + 1}{|e^{i}-1|} \le \frac{2}{|e^{i}-1|} = M$$

$\Rightarrow$ parte reale ed immaginaria di LHS sono limitate.

Oss. Così ottengo la formula esplicita

$$LHS = \frac{e^{i(n+1)} - 1}{e^{i}-1} = \frac{\cos(n+1) + i \sin(n+1) - 1}{\cos 1 + i \sin 1 - 1}$$

Razionalizzando la frazione ottengo formula per parte reale ed immaginaria

— o — o —

Oss. $$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2}(i\theta)^2 + \frac{1}{6}(i\theta)^3 + \frac{1}{24}(i\theta)^4 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$= \boxed{1} + i\boxed{\theta} \boxed{- \frac{1}{2}\theta^2} \boxed{- \frac{1}{6} i\theta^3} \boxed{+ \frac{1}{24}\theta^4}$$

$$= \cos\theta + i \sin\theta$$

— o — o —

Integrali notevoli misteriosi $\rightsquigarrow$ Analisi 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{(integrale di Gauss)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Esercizio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (funzione pari)

Esercizio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$ Pongo $y = \sqrt{a}\,x$

$dy = \sqrt{a}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(Andrebbe giustificato il cambio di variabili usando la def.)

Delirio: pongo $a = -i$

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{-i}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,(1+i)$$

$\downarrow$

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx + i\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 072

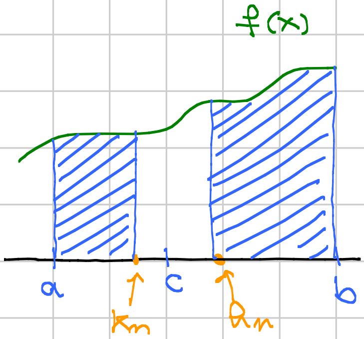
Note Title 20/12/2016

Esercizio 1 (L'integrale con il buco)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (integrale proprio). Sia $c \in (a,b)$ e siano $k_n \to c^-$ e $\ell_n \to c^+$.

Pongo
$$I_n := \int_a^{k_n} f(x)\,dx + \int_{\ell_n}^{b} f(x)\,dx$$

Dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\left| I_n - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - I_n \right|$$

$$= \left| \int_{k_n}^{\ell_n} f(x)\,dx \right| \le \int_{k_n}^{\ell_n} |f(x)|\,dx$$

$$\le M(\ell_n - k_n)$$

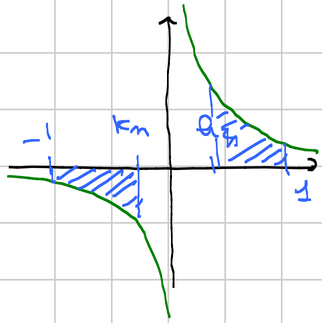
costante tale che $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in [a,b]$

Quando $n \to +\infty$ il RHS $\to M(c-c) = 0$, quindi anche LHS $\to 0$.

Domanda: vale lo stesso se l'integrale è improprio con pbm in c?

Risposta: sì, tranne nel caso in cui gli integrali in $[a,c]$ e $[c,b]$ vengono $+\infty - \infty$ (o viceversa).
In tal caso $(+\infty - \infty)$ il limite dipende dalla forma del buco!!

Esempio $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$



La teoria dice che è indeterminato

Prendiamo $k_n = -\frac{1}{n}$, $\ell_n = \frac{1}{n}$
(buco simmetrico)

Allora

$$I_n \to 0 \qquad (\text{è } = 0 \text{ per ogni } n)$$

Prendiamo $k_n = -\frac{1}{n}$, $\ell_n = \frac{2}{n}$ (buco asimmetrico)

$$I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\frac{2}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\log|x|\right]_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \left[\log x\right]_{\frac{2}{n}}^{1} = \log\frac{1}{n} - \log\frac{2}{n}$$

$$= \log\frac{1}{2} \to -\log 2 \neq 0$$

Variando la forma del buco posso fare in modo che $I_n \to 2016$.

Esercizio 2 Calcolare $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

Perché converge? Provo un confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^7}$.
Devo fare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{\frac{1}{x^7}} = \lim_{x\to+\infty} x^{n+7} e^{-x} = 0$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$

[Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x grandi, quindi $f(x) \leq g(x)$ per x grandi]

e quindi siamo nel caso limite dalla parte giusta.

$$\int g(x)\,dx < +\infty \implies \int f(x)\,dx \text{ conv.}$$

Pongo I_n = integrale richiesto. Allora

$$I_n = \int_0^{+\infty} \underset{F}{x^n} \underset{g}{e^{-x}}\, dx = \Big[\underset{F}{x^n}\,\underset{G}{(-e^{-x})}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underset{f}{n x^{n-1}}\,\underset{G}{(-e^{-x})}\, dx$$

$$= 0 + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\, I_{n-1}$$

Ho dim. che $I_n = n\, I_{n-1}$. Facile esercizio: $I_0 = 1$

Conclusione $I_n = n!$

Per giustificare l'int. per parti impropria basta usare la def

$$\int_0^A x^n e^{-x} dx = \big[x^n(-e^{-x})\big]_0^A - \int_0^A n x^{n-1}(-e^{-x})\,dx$$

e poi passare al lim per $A \to +\infty$

— o — o —

$\boxed{\text{GAMMA DI EULERO}}$

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$ (fatto prima)

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \big[t^x(-e^{-t})\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1}(-e^{-t})\,dt$$

$$= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\,\Gamma(x)$$

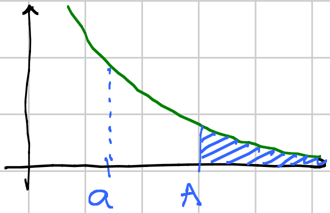
$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \underset{y=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{\cancel{y}} \cdot 2\cancel{y}\, dy = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

<u>Esercizio</u> Supponiamo che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converga.

Allora $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $A \geq a$ e vale

$$\underbrace{\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{coda di un integr. impr.}} = 0$$



Si verifica con la solita def. che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{A} f(x)\,dx + \int_A^{+\infty} f(x)\,dx$$

da cui

$$\int_A^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^{A} f(x)\,dx}_{\substack{\downarrow \\ \int_a^{+\infty} f(x)\,dx}} \longrightarrow 0$$

<u>Esempio</u> $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{\sqrt{n}}^{n} x^{20} e^{-x}\,dx}_{\text{"}a_n\text{"}} = 0$

Idee: $\int_0^{+\infty} x^{20} e^{-x}\,dx$ converge

$$a_n = \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$$

$=$ due code che tendono a 0.

Esercizio $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\int_n^{+\infty} \frac{4x+\sin x}{x^3+\arctan x}\,dx}}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ sempre

Brutal mode: $a_n \sim \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{4}{x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{x}\right]_n^{+\infty} = \frac{4}{n}$

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\, a_n$$

Passo alle funzioni. Pongo $F(x) =$ una primitiva di $f(x)$ dove $f(x)$ è l'integranda.
Ora
$$F(x) := \int_1^x f(t)\,dt$$

Allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

e $a_n = \ell - F(n) = \displaystyle\int_1^{+\infty} - \int_1^{n}$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell - F(x)}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{+f(x)}{+\frac{1}{x^2}} = 4 \quad ☺$$

Esercizio Sia $F(x)$ una primitiva di e^{x^2} (teo. unst.: non si può esprimere usando le funzioni elementari).
Domanda: come cresce $F(x)$ quando $x \to +\infty$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{e^{x^2}} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}:\text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2x\, e^{x^2}} = 0$$

Sorpresa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\frac{e^{x^2}}{x}} \underset{\text{Hop}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{2x e^{x^2}}{x} - \frac{e^{x^2}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$F(x) \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 073

Note Title 20/12/2016

Studio di funzioni integrali

$$\boxed{\varphi(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt}$$

o ancora più in generale

$$\varphi(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,dt \rightsquigarrow \text{Analisi 2}$$

Situazione più semplice: $\to a(x) \equiv a$ (costante)

$\to b(x) = x$

In questo caso viene la funzione integrale classica

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

Formula per la derivata

$$\boxed{\varphi'(x) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $F(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$. Allora

$$\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = [F(t)]_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x))$$

Quindi per la derivata della funzione composta

$$\varphi'(x) = F'(b(x))\,b'(x) - F'(a(x))\,a'(x)$$

$$= f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$$

Esempi $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \arctan(t^2)\,dt$

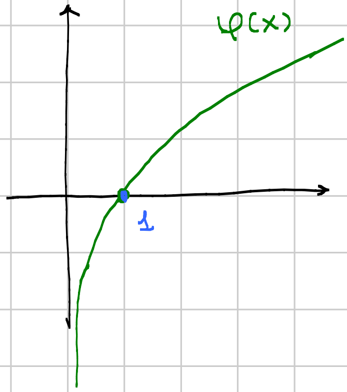
Allora $\varphi'(x) = \arctan(x^4)\cdot 2x - \arctan(x^2)\cdot 1$

$$\varphi(x) = \int_{2x}^{3\sin x} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$\varphi'(x) = \frac{\cos(3\sin x)}{\sqrt{3\sin x}}\,\underbrace{3\cos x}_{b'(x)} - \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2x}}\,\underbrace{\cdot 2}_{a'(x)}$$

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\arctan t}\,dt$$



→ Definita (almeno) per ogni $x > 0$

→ $\varphi(1) = 0$

→ $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\arctan x}$ $\forall x > 0$

$\varphi'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ $\Rightarrow$ strett. crescente

→ $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\arctan t}\,dt \underset{\text{def}}{=} -\int_0^1 \frac{1}{\arctan t}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per confr. asint. con } \frac{1}{t}}}{=} -\infty$$

$\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ sempre, quindi

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\arctan t}\,dt \geq \int_1^x \frac{2}{\pi}\,dt = \frac{2}{\pi}(x-1) \to +\infty \text{ per } x \to +\infty$$

Abbiamo così dim. che $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è bigettiva.

Lo stesso argomento mostra che non è estendibile per $x \leq 0$.

→ Calcolare l'ordine di ∞ di $\varphi(x)$ per $x \to +\infty$. Ci aspettiamo un asintoto obliquo

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\arctan x} = \frac{2}{\pi}$$

Questo da solo dice che $\varphi(x) \sim \frac{2}{\pi}x$ per $x \to +\infty$

Vediamo il limite che darebbe n

$$n := \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) - \frac{2}{\pi}x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\int_1^x \frac{dt}{\arctan t} - \int_0^x \frac{2}{\pi}\,dt \right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{\arctan t} - \frac{2}{\pi} \right) dt - \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{\pi}\,dt}_{\substack{\text{numero} \\ = \frac{2}{\pi}}}$$

$$\frac{1}{\arctan t} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan t}{\arctan t \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\arctan \frac{1}{t}}{\frac{\pi}{2} \cdot \arctan t}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \boxed{\int_1^x \frac{\arctan \frac{1}{t}}{\frac{\pi}{2} \cdot \arctan t}\, dt} - \frac{2}{\pi}$$

diverge per confr. asint. con $\frac{1}{t}$.

$$= \int_1^{+\infty} \dots - \frac{2}{\pi} = +\infty$$

Quindi niente asintoto obliquo ☹.

→ per $x \to 0^+$, $\varphi(x)$ si comporta come $\log x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arctan x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

—o —o —

Esempio $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \arctan t \cdot e^{-t}\, dt$

Domanda: calcolare il pol. di Taylor di ordine 5 con centro in $x=0$.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Calcolo le prime 5 derivate ... auguri!

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Taylor dentro!

$$\arctan t \cdot e^{-t} = \left(t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^4)\right)\left(1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right)$$

$$= t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + o(t^4)$$

$$= t - t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)$$

quindi $\varphi(x) = \int_x^{x^2} t - t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)\, dt$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_x^{x^2} - \left[\frac{1}{3}t^3\right]_x^{x^2} + \left[\frac{1}{24}t^4\right]_x^{x^2} + \left[\frac{1}{30}t^5\right]_x^{x^2} + \left[\text{prim. di } o(t^4)\right]_x^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \underbrace{o(x^5)}_{\text{spero.}}$$

Domandone La primitiva di $o(x^4)$ è $o(x^5)$?

Più in generale: se

$$f(x) = o(x^k) \quad \text{per } x \to 0$$

posso dire che

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = o(x^{k+1}) \quad ?$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Funziona perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^{k+1}} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(k+1)\,x^k} \underset{\text{ipotesi}}{=} 0$$

— o — o —

Oss. Non posso derivare o piccolo !!! Ad esempio

$$f(x) = x^{30} \sin \frac{1}{x^2} = o(x^{29}) \qquad \text{ma}$$

$$f'(x) = 30x^{29} \sin\frac{1}{x^2} - x^{30} \cos\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad$$

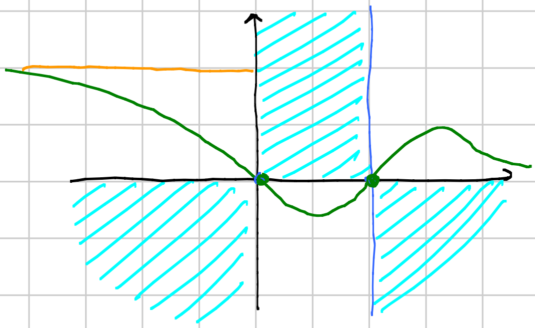
$$2x^{27}\cos\frac{1}{x^2} \text{ e non è } o(x^{28}).$$

— o — o —

Esempio $\qquad \varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \underbrace{\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}}_{f(t)}\,dt$

Studiare la funzione

→ La funzione $f(t)$ non ha problemi in $t=0$, perché è limitata (basta oss. che tende ad 1)
Quindi $\varphi(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ammesso che per $x=0$ fa 0).



→ L'integranda $f(t)$ è sempre ≥ 0, quindi

$$\varphi(x) \geq 0 \iff x^2 \geq x$$
$$\iff x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 1$$

→ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ perché l'integranda è del tipo $\frac{1}{t^2}$, quindi è l'esercizio della doppia di una lez. precedente

$\rightarrow \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\, dt$ = numero reale

per $t \to \pm\infty$ si comporta come $\frac{1}{t^2}$

$\rightarrow$ Conseguenza: $\varphi(x)$ è limitata su tutto $\mathbb{R}$!!

$\rightarrow$ $\varphi(x)$ è Lip. perché la sua derivata è limitata

$$\varphi'(x) = \underbrace{\frac{1-e^{-x^4}}{x^{\cancel{4}3}} \cdot 2\cancel{x}}_{\text{IDEM}} - \underbrace{\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}}_{\text{limitata}}$$

limitata: nessun pbm in $x=0$ e tende a 0 per $x \to \pm\infty$

$\rightarrow$ Per quali $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(n)]^\alpha \quad \text{converge ?}$$

Dico che $\varphi(n) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$ quindi conv. $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(n)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

vedi derivata precedente.

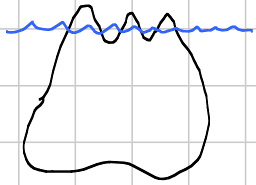
$\rightarrow \int_1^{+\infty} \varphi(x)\, dx = +\infty$ per C.A. con $\frac{1}{x}$ (vedi limite sopra).

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 074

Note Title 28/02/2017

EQUAZIONI DIFF. (Nomenclatura)



Come si presenta ?

Incognita : una funzione che si può chiamare

$y(x)$ $f(x)$ $y(t)$ $u(x)$ $\boxed{u(t)}$

Tra le incognite c'è anche l'insieme di definizione

$u : [a,b] \to \mathbb{R}$

Equazione : relazione che lega $u(t)$ e un po' di sue derivate.

Esempi

$u'(t) = u(t) + t^2$

$u''(t) - 7[u'(t)]^2 = \sin u(t)$

$u''(t) = 5u(t) + \sin t$

$$\boxed{\begin{aligned} u' &= u + t^2 \\ u'' - 7(u')^2 &= \sin u \\ u'' &= 5u + \sin t \end{aligned}}$$

non si scrivono le t che sono argomento della u

$\dot{u} = u + t^2$ ⇝ ordine 1

$\left.\begin{aligned} \ddot{u} - 7\dot{u}^2 &= \sin u \\ \ddot{u} &= 5u + \sin t \end{aligned}\right\}$ ⇝ ordine 2

Risolvere un'eq. diff. vuol dire trovare $[a,b]$ e $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ che rende l'uguagl. vera per ogni $t \in [a,b]$.

Def. Si dice ordine di un'eq. diff. il + grande ordine di derivazione che vi compare

Def. Un'eq. diff. si dice in forma normale se la derivata di ordine max è "ricavata" rispetto al resto

Esempi $\ddot{u} = 3\dot{u} + u^2$ SI
$\ddot{u} + 3\dot{u} = 7(u+t)^2 \rightsquigarrow \ddot{u} = -3\dot{u} + 7(u+t)^2$

$\dot{u}^3 = 7u$ NI $\rightsquigarrow \dot{u} = \sqrt[3]{7u}$
$\dot{u}^4 = 7u$ NO $\rightsquigarrow$ non posso ricavare $\dot{u}$ in modo univoco

Più formalmente:
→ un' eq. diff. generale di ordine k si presenta come

$$\boxed{\Phi(u^{(k)}, \dots, \dot{u}, u, t) = 0}$$

→ in forma normale diventa

$$\boxed{u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, \dot{u}, u, t)}$$

Def. Un'eq. diff. si dice autonoma se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate

Esempi $u'(t) = 3u(t)^2$ SI $\dot{u} = 3u^2$
$u'(t) = 3u(t) + t^2$ NO $\dot{u} = 3u + t^2$
$u'(t) = t\,u(t)$ NO $\dot{u} = tu$

Nelle notazioni di sopra

$$\Phi(u^{(k)}, \dots, \dot{u}, u) = 0$$

$$u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, \dot{u}, u)$$

Equazioni a variabili separabili (1^a isda)

Un'eq. diff. si dice a var. sep. se è di $\boxed{\text{ordine } 1}$ e si presenta nella forma

$$\boxed{\dot{u} = f(t)\,g(u)}$$

è in forma normale e il RHS è prodotto di una funzione della sola t per una della sola u

Esempi

$$\dot{u} = (u+3)(\sin t + 1)$$

$$\dot{u} + tu = t \rightsquigarrow \dot{u} = -tu + t = \underbrace{t}_{f(t)}\underbrace{(-u+1)}_{g(u)}$$

$$\dot{u} = u^2 \qquad \dot{u} = \underbrace{1}_{f(t)} \cdot \underbrace{u^2}_{g(u)}$$

Oss. Un'eq. diff. del 1^o ordine in forma normale autonoma è a variabili separabili

$$\dot{u} = F(t,u) \qquad 1^o \text{ ordine forma norm.}$$

$$\dot{u} = \underbrace{F(u)}_{g(u)}\ \underbrace{1}_{f(t)} \qquad \text{autonoma} \rightsquigarrow \text{non c'è la } t$$

Equazioni diff. lineari Un'eq. diff. di ordine k lineare si presenta nella forma

$$\boxed{a_k(t)\,u^{(k)}(t) + \ldots + a_1(t)\,\dot{u}(t) + a_0(t)\,u(t) = f(t)}$$

$$a_k(t)\,u^{(k)} + a_{k-1}(t)\,u^{(k-1)} + \ldots + a_1(t)\,\dot{u} + a_0(t)\,u = f(t)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} \underbrace{\boxed{a_i(t)}}_{\text{coeffic.}}\, u^{(i)} = f(t)}$$

Il LHS è comb. lineare di $u, \dot{u}, \ldots, u^{(k)}$ con coeff. che sono funzioni di t.

Brutalmente: u e le sue derivate compaiono di 1° grado e non all'interno di funzioni strane. La dipendenza da t può essere qualunque.

<u>Esempi</u>

$\dot{u} = t^7 u$ SI

$\dot{u} = t u^7$ NO

$\dot{u} = \cos(tu)$ NO

$\ddot{u} = \dot{u}\, u$ NO

<u>Oss.</u> Un' eq. lineare si può portare in forma normale se posso dividere per $a_k(t)$, cioè se $a_k(t) \neq 0$.

<u>Def.</u> Un' eq. diff. <u>lineare</u> si dice

→ omogenea se $f(t) \equiv 0$ (per ogni t)

→ non omogenea se $f(t) \neq 0$ almeno per un valore di t.

<u>2ª isola</u>: <u>eq. diff. lineari di ordine 1 a coeff. qualunque</u>

$$\boxed{\dot{u} + a(t)\, u = b(t)}$$

<u>Oss.</u> Se fosse omogenea avrei $b(t) \equiv 0$ e quindi sarebbe pure a variabili separabili.

<u>3ª isola</u>: <u>ed. diff. lineari di ordine qualunque a coeff. costanti</u>

(cioè gli $a_i(t)$ non dipendono da t)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \boxed{a_i}\, u^{(i)} = f(t)}$$

i coeff. sono numeri

Domande:

① lineare a coeff. costanti e omogenea $\Rightarrow$ autonoma SI

② lineare e autonoma $\Rightarrow$ a coeff. costanti SI

③ lineare e autonoma $\Rightarrow$ omogenea NO! NO! NO!

$$\ddot{u} + 3\dot{u} = 2017$$

Oss. Il LHS di un' eq. lineare lo possiamo pensare come un' applicazione lineare che prende in input funzioni u di classe C^k e restituisce in output delle funzioni continue (assumendo che i coeff. siano almeno continui)

$$Lu := \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)} \qquad L : C^k([a,b]) \to C^0([a,b])$$

$$Lu = f(t)$$

Proposizione Se $u(t)$ è soluzione di un' eq. autonoma, allora tutte le traslate temporali $u(t+c)$ sono soluzioni della stessa equazione diff.

Esempio $\dot{u} = f(u)$ $\qquad \dot{u}(t) = f(u(t))$

Se pongo $v(t) = u(t+c)$ ottengo

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t+c) = f(u(t+c)) = f(v(t)) \rightsquigarrow \dot{v} = f(v)$$

ANALISI 1 – LEZIONE 075

Note Title 28/02/2017

Esempi di sol. di eq. diff.

① $\dot{u} = 7u$ $u(t) = e^{7t}$ è UNA soluzione

Verifica: $\dot{u}(t) = 7e^{7t} = 7u(t)$

Altre soluzioni sono quelle del tipo $u(t) = ce^{7t}$

Verifica: $\dot{u}(t) = 7ce^{7t} = 7u(t)$

Morale: l'eq. ha infinite soluzioni $u(t) = ce^{7t}$ e si potrebbe dim. che non ce ne sono altre

② $\ddot{u} = -u$ $u(t) = \sin t$ è UNA soluzione
$u(t) = \cos t$ è un'altra sol.

$u(t) = a \sin t + b \cos t$ è sol. per ogni valore dei parametri a e b
Non ce ne sono altre.

③ $\dot{u} = -u^2$ $u(t) = \frac{1}{t}$ è UNA soluzione

Verifica: $\dot{u}(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$

$u(t) = \frac{3}{t}$ non è una soluzione $\dot{u}(t) = -\frac{3}{t^2} \neq -\frac{9}{t^2} = [u(t)]^2$

$u(t) = \frac{1}{t+c}$ $\dot{u}(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -[u(t)]^2$

Inoltre c'è anche la soluzione banale $u(t) \equiv 0$.

Fatti generali : "di solito" un' eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell' eq.

— o — o —

PROBLEMA DI CAUCHY Fatto da 2 ingredienti

→ eq. diff.

→ condizioni iniziali: se l'eq. è di ordine k si prescrive il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla (k−1)-esima in un certo t_0 comune a tutte.

Esempi

$$\begin{cases} \ddot{u} = -u \\ u(7) = 22 \\ \dot{u}(7) = 34 \end{cases}$$

a scelta

t_0

$$\begin{cases} \ddot{u} = -u \\ u(7) = 22 \\ \dot{u}(8) = 34 \end{cases}$$

NO

Devono essere uguali

$$\begin{aligned} \dddot{u} &= 3\dot{u}^2 + t^5 \\ u(1) &= 5 \\ \dot{u}(1) &= 6 \\ \ddot{u}(1) &= 24 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{u} &= f(t,u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}}$$

Forma generale del pbm. di Cauchy per equ. di ordine 1 in forma normale

Speranza Imponendo le k condizioni iniziali spero di poter determinare univocamente i k parametri liberi che descrivono le infinite soluz. dell'eq. diff.

Fatto generale: "di solito la cosa riesce"

Esempio

$$\begin{cases} \ddot{u} = -u \\ u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 4 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $u(t) = a \sin t + b \cos t$

$a \sin 0 + b \cos 0 = 0$ $\quad u(0) = 0$

$\dot{u}(t) = a \cos t - b \sin t$

$a \cos 0 - b \sin 0 = 4$ $\quad \dot{u}(0) = 4$

$\rightsquigarrow$ $b = 0$ e $a = 4$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = 4 \sin t$ è LA sol. del pbm. di Cauchy

$\boxed{\text{Teorema di esistenza}}$ (misterioso)

Consideriamo il pb. di Cauchy per un' eq. diff. di ordine k in forma normale:

$$\begin{cases} u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, \dot{u}, u, t) \\ + \text{ condizioni iniziali} \end{cases}$$

Supponiamo che F sia continua (dovrei dire cosa vuol dire in più variabili).

Allora il problema ammette ALMENO una soluzione.

$\boxed{\text{Teorema di esistenza e unicità}}$ (misterioso)

Consideriamo il pbm. come sopra.

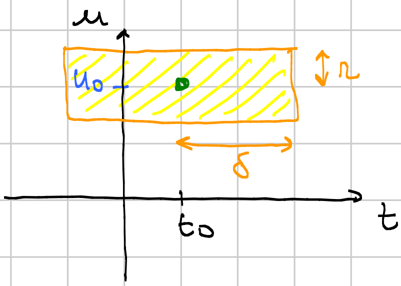
Supponiamo che F sia un po' meglio

Allora la soluzione è pure UNICA.

— o — o —

Qualche dettaglio su "un po' meglio". Consideriamo il caso di ordine 1:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Supponiamo

$$f : [t_0-\delta, t_0+\delta] \times [u_0-r, u_0+r] \to \mathbb{R}$$

Un po' meglio vuol dire che esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(t,u_2) - f(t,u_1)| \leq L\,|u_2-u_1| \qquad \begin{array}{l} \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \\ \forall u_1 \in [u_0-r, u_0+r] \\ \forall u_2 \in \quad '' \end{array}$$

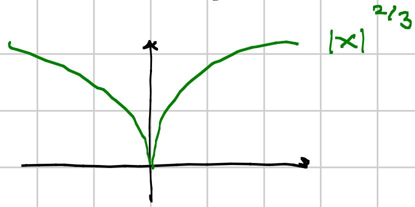
f è Lip. in u unif. risp. a t, cioè la stessa L va bene per tutti i t.

Oss. Basta un po' di derivabilità e questa è verificata.

— o — o —

$\boxed{\text{ESEMPIO DI NON UNICITÀ}}$ (Pennello di PEANO)

$$\begin{cases} \dot{u} = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$



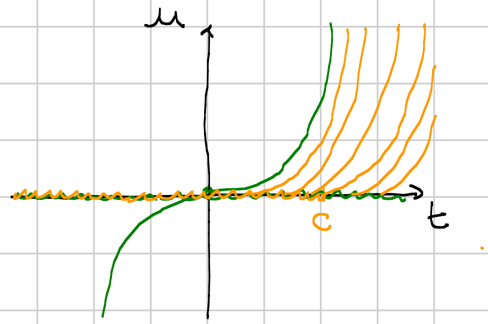
$u(t) \equiv 0$ è UNA soluzione

$u(t) = t^3$ è un'altra soluzione $\quad \dot{u}(t) = 3t^2 = 3\,[u(t)]^{2/3}$

In realtà ha infinite soluzioni

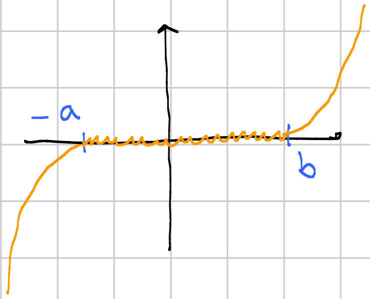
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

(verifica immediata)



Posso estendere il pennello anche su tempi negativi, ottenendo che sono soluzioni tutte le funzioni del tipo ($a \geq 0$, $b \geq 0$)

$$u(t) = \begin{cases} (t+a)^3 & \text{se } t \leq -a \\ 0 & \text{se } t \in [-a, b] \\ (t-b)^3 & \text{se } t \geq b \end{cases}$$



__Oss.__ $\begin{cases} \dot{u} = -u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$ ← funzione bella ⇒ esistenza e unicità

Sol. generale: $u(t) = \dfrac{1}{t+c}$. Impongo cond. iniz.

$u(0) = 7 \iff \dfrac{1}{c} = 7 \iff c = \dfrac{1}{7} \rightsquigarrow u(t) = \dfrac{1}{t + \frac{1}{7}} = \dfrac{7}{7t+1}$

Occhio! Non è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, ma solo per $t \neq -\frac{1}{7}$
L'intervallo di def. della soluzione è tra le incognite e non è prevedibile dall'equazione.

ANALISI 1 — LEZIONE 076

Note Title 01/03/2017

$\boxed{\text{EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI}}$ (e studio della soluzione)

$$\boxed{u' = f(t) \cdot g(u)}$$

$$\boxed{u(t_0) = u_0}$$

Algoritmo:
1. Separare
2. Integrare
3. Ricavare
4. Trovo c
5. Verifica!
6. Studio della soluzione

(1–3) soluzione generale dell'eq. con un parametro libero c

(4) ⇝ usando la cond. iniziale

Esempio
$$\begin{cases} \dot{u} = \cos t \cdot u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

① Separare
$$\frac{du}{dt} = \cos t \cdot u^2$$
Tutte le u a sx, tutte le t a dx
$$\frac{du}{u^2} = \cos t \, dt$$

② Integrare (a sx risp. a u, a dx risp. a t)
$$\int \frac{du}{u^2} = \int \cos t \, dt \; ; \qquad -\frac{1}{u} = \sin t + c$$
(c) viene fuori dall' integr.

③ Ricavare (u in funzione di t)
$$\frac{1}{u} = -\sin t + c$$
c o −c è lo stesso
$$u = \frac{1}{c - \sin t}$$

Posso dire che

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{c - \sin t}}$$

è la sol. gen. dell'eq. diff.

④ <u>Ricavare c</u> (usando che $u(0) = 7$) $\quad u(0) = \frac{1}{c} = 7$

$\leadsto c = \frac{1}{7} \quad \leadsto \quad u(t) = \frac{1}{\frac{1}{7} - \sin t} = \boxed{\frac{7}{1 - 7\sin t}}$

è la soluzione del pbm. di Cauchy

⑤ <u>Verifica</u> (dell'equazione e delle cond. iniziali)

Cond. iniz. : $u(0) = 7$ ☺

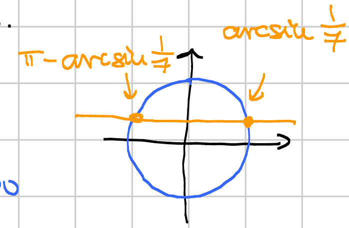
Equazione : $u'(t) = -\frac{7}{(1-7\sin t)^2}(-7\cos t)$

$= \cos t \cdot [u(t)]^2$ ☺

⑥ <u>Studio della soluzione</u> $\leadsto$ studio di funzione

<u>Def</u>. Sia $u(t)$ la sol. di un pbm. di Cauchy

- <u>Intervallo massimale di esistenza</u> : pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale.



Nell'esempio ho la cond. $\sin t \neq \frac{1}{7}$
A me serve l'intervallo che contiene il tempo iniziale $t = 0$, quindi

$$\left(-\pi - \arcsin \frac{1}{7}, \arcsin \frac{1}{7}\right)$$

- tempo di vita (nel futuro): sup interv. massimale di esist.

Nell' esempio: $T = \arcsin \frac{1}{7}$

- "tipo di morte": ci sono due possibilità

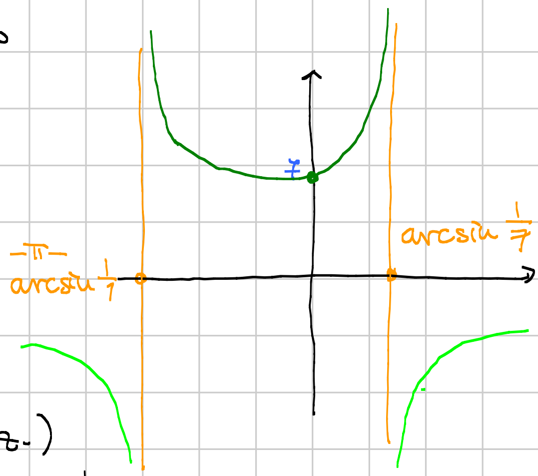
→ $\boxed{\text{BLOW UP}}$ se $\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$

→ $\boxed{\text{BREAK DOWN}}$ se "la soluzione esce dall' insieme di definizione dell' equazione".

Spesso, ma non sempre, questo si traduce in

$$\lim_{t \to T^-} \dot{u}(t) = \pm\infty$$

Nell' esempio: $u(t) = \dfrac{7}{1 - 7\sin t}$



In conclusione, possiamo dire che

→ nel futuro (risp. alla cond. iniz.) la sol. ha blow up per $T = \arcsin \frac{1}{7}$

→ nel passato, la sol. ha blow up per $T = -\pi - \arcsin \frac{1}{7}$.

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} \dot{u} = u^3 \cdot e^t \\ u(0) = -2 \end{cases}$

① $\dfrac{du}{dt} = u^3 \cdot e^t \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{du}{u^3} = e^t\, dt$

② $\displaystyle\int \frac{du}{u^3} = \int e^t\, dt \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = e^t + c \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{u^2} = -2e^t + c$

③ $u^2 = \dfrac{1}{-2e^t + c} \qquad u(t) = -\sqrt{\dfrac{1}{c - 2e^t}}$ (ho scelto segno − guardando $u(0) = -2$)

④ Trovo c: $-2 = -\sqrt{\frac{1}{c-2}}$; $4 = \frac{1}{c-2}$; $4c-8=1$

$c = \frac{9}{4}$ $\qquad u(t) = -\sqrt{\frac{1}{\frac{9}{4}-2e^t}}$

$$\boxed{u(t) = -2\sqrt{\frac{1}{9-8e^t}}}$$

Soluz. pbm. di Cauchy

⑤ Verifica $\quad u(0) = -2$

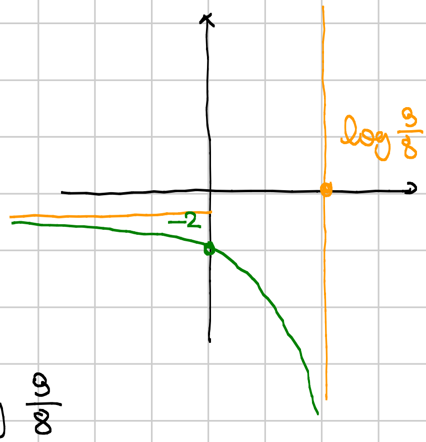
equ.: $\dot{u}(t) = -\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\cdots}}\left(+\frac{1}{(9-8e^t)^2}\right)(+8e^t)$

$$= e^t\cdot\left(-8\,\frac{1}{(9-8e^t)^{3/2}}\right) = e^t\cdot[u(t)]^{-3}$$

⑥ Studio: definita dove $9-8e^t>0$, $8e^t<9$, $e^t<\frac{9}{8}$

$t < \log\frac{9}{8}$

Int. max. di esistenza: $\left(-\infty, \log\frac{9}{8}\right)$



→ nel passato ho esistenza globale con limite $-\frac{2}{3}$

→ nel futuro ho blow up per $T = \log\frac{9}{8}$

Esempio 3 $\begin{cases} \dot{u} = -\frac{t^4}{u} \\ u(1) = 7 \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{t^4}{u} \quad \rightsquigarrow \quad u\,du = -t^4\,dt$

(2) $\int u\,du = \int -t^4 dt \rightsquigarrow \frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{5}t^5 + c$

(3) $u^2 = -\frac{2}{5}t^5 + c \rightsquigarrow u(t) = +\sqrt{c - \frac{2}{5}t^5}$

scelto per cond. iniz.

(4) $u(1) = \sqrt{c - \frac{2}{5}} = 7 \rightsquigarrow c - \frac{2}{5} = 49 \rightsquigarrow c = \frac{247}{5}$

$$\boxed{u(t) = \sqrt{\frac{247 - 2t^5}{5}}}$$

Sol. pbm. di Cauchy

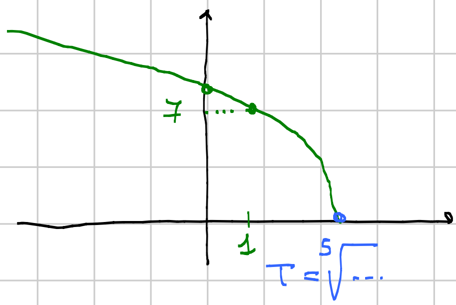
(5) Verifica! Fare ☺

(6) Serve $247 - 2t^5 \geq 0 \rightsquigarrow 2t^5 \leq 247 \rightsquigarrow t \leq \sqrt[5]{\frac{247}{2}}$

Int. max. di esistenza: $\left(-\infty, \sqrt[5]{\frac{247}{2}}\right)$

tempo di vita

La soluzione ha BREAK DOWN per $t = \sqrt[5]{\dots}$



Si vede che $u \to 0$, quindi "esce dalla zona di def. dell'equazione"

Si vede facilmente che

$$\lim_{t \to T^-} \dot{u}(t) = -\infty$$

ANALISI 1 — LEZIONE 077

Note Title 01/03/2017

Esempio 1 $\begin{cases} \dot{u} = u^2 t^3 \\ u(0) = 7 \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = u^2 t^3 \rightsquigarrow \frac{du}{u^2} = t^3 dt$

② $\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt \rightsquigarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{4} t^4 + c$

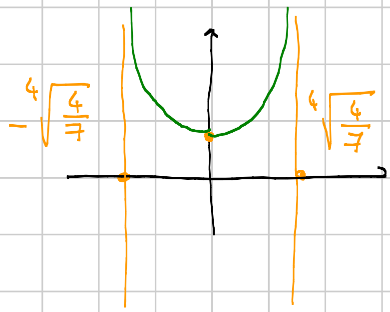
③ $\rightsquigarrow \frac{1}{u} = -\frac{1}{4} t^4 + c \rightsquigarrow \boxed{u = \frac{1}{c - \frac{1}{4} t^4}}$ Sol. gen. eq. diff.

④ $u(0) = \frac{1}{c} = 7 \rightsquigarrow c = \frac{1}{7}$ $\boxed{u(t) = \frac{28}{4 - 7t^4}}$ Sol. probl. di Cauchy

⑤ Fare verifica!

⑥ Nel futuro blow up in $T = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$

Nel passato blow up in $T = -$ "



Esempio 2 $\begin{cases} \dot{u} = u^2 t^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ $1+2+3 \rightsquigarrow u(t) = \frac{1}{c - \frac{1}{4} t^4}$

④ $u(0) = \frac{1}{c} = 0$ ☹ La soluzione ci DEVE essere per il teo. di esistenza e unicità

In questo caso la sol. è banalmente $u(t) \equiv 0$ (verifica ovvia)

Oss. Se il probl. è $\begin{cases} \dot{u} = f(t)\, g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

SE $g(u_0) = 0$, allora la sol. è $u(t) \equiv u_0$ (verifica ovvia)

Teorema Consideriamo il pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t)\, g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo che

(i) f e g sono continue in un intervallo che contiene le cond. iniziali. Detto meglio, esistono $\delta > 0$ ed $r > 0$ t.c.

$$\left.\begin{array}{l} f : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R} \\ g : [u_0-r, u_0+r] \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{continue}$$

(ii) $g(u_0) \neq 0$.

Allora il pbm. ha soluz. unica $u : [t_0-\delta_1, t_0+\delta_1] \to [u_0-r, u_0+r]$ con eventualmente $\delta_1 \leq \delta$, ed è data dalla procedura descritta precedentemente.

Oss. Basta la continuità rispetto ad u (senza Lip.), ma serve $g(u_0) \neq 0$ per avere l'unicità.

Dim. Unicità. Sia $u : [t_0-\delta_1, t_0+\delta_1]$ una soluzione. Dico che è quella data dalla procedura, almeno fino a quando $g(u(t)) \neq 0$.

Poiché $u(t_0) = u_0$, allora $g(u(t_0)) \neq 0$ per la (ii), ma allora per continuità esiste $\delta_2 > 0$ t.c.

$$g(u(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in [t_0-\delta_2, t_0+\delta_2]$$

Allora posso dividere $\quad \dot{u}(t) = f(t)\, g(u(t)) \quad \rightsquigarrow$

$$\frac{\dot{u}(t)}{g(u(t))} = f(t) \qquad \forall t \in [t_0-\delta_2, t_0+\delta_2]$$

Posso integrare a dx e sx tra t_0 ed un qualunque t nell'int.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}(s)}{g(u(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Indico con F una primitiva di f e con Γ una prim. di $\frac{1}{g}$

Il RHS è $\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds = F(t) - F(t_0)$

Il LHS è $\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}(s)}{g(u(s))}\, ds$

Pongo $y = u(s)$, quindi $dy = \dot{u}(s)\, ds$
$s = t_0 \rightsquigarrow y = u(t_0) = u_0$
$s = t \rightsquigarrow y = u(t)$

$$= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dy}{g(y)} = \Gamma(u(t)) - \Gamma(u_0)$$

Conclusione: se $u(t)$ è soluzione, allora

$$\Gamma(u(t)) - \Gamma(u_0) = F(t) - F(t_0), \quad \text{cioè}$$

$$\underbrace{\Gamma(u(t))}_{\text{primitiva di } \frac{1}{g}} = \underbrace{F(t)}_{\text{Prim. di } f} + \underbrace{\Gamma(u_0) - F(t_0)}_{\text{costante dipendente dalla cond. iniz.}} \qquad \forall t \in [t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$$

Questo caratterizza univocamente la u fino a quando non va ad annullare g.

<u>Esistenza</u> Definisco Γ e F come sopra. Osservo che Γ è invertibile almeno vicino ad u_0 perché è strett. monotona.
Posso quindi considerare la funzione inversa Γ^{-1} e pone

$$u(t) = \Gamma^{-1}\left(F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0)\right)$$

Dico che u risolve il pbm. di Cauchy. Basta fare la verifica.

$\to$ Cond. iniz.: $u(t_0) = \Gamma^{-1}(\cancel{F(t_0)} + \Gamma(u_0) - \cancel{F(t_0)}) = u_0$

→ Equazione:

$$\dot{u}(t) = (\Gamma^{-1})'(F(t)+\Gamma(u_0)-F(t_0))\,\overbrace{F'(t)}^{f(t)}$$

Deriv. funz. inversa $\displaystyle (\Gamma^{-1})'(y) = \frac{1}{\Gamma'(\Gamma^{-1}(y))}$ (vedi Ret....)

$$= g(\Gamma^{-1}(y))$$

$$= g(\Gamma^{-1}(F(t)+\Gamma(u_0)-F(t_0))\,f(t)$$

$$= g(u(t))\cdot f(t). \qquad \square.$$

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} \dot{u} = u \sin t \\ u(0) = 6 \end{cases}$

① $\dfrac{du}{u} = \sin t\, dt$ ② $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int \sin t\, dt \rightsquigarrow \overbrace{\log|u|}^{\Gamma(u(t))} = \overbrace{-\cos t}^{F(t)} + c$

③ $|u| = e^{-\cos t + c} \rightsquigarrow u(t) = \pm e^{-\cos t + c} = \pm e^c \cdot e^{-\cos t}$

$= k e^{-\cos t}$

Morale: la soluzione $\boxed{u(t) = k e^{-\cos t}}$ va bene per ogni $k \in \mathbb{R}$ e contiene tutti i casi senza mettere $\pm$, e ho anche compreso il caso $k=0$

Oss. In questo caso l'eq. era lineare.

Esempio 4 (Effetto soglia) $\begin{cases} \dot{u} = u^2 e^{-t} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$ (variabile)

① $\dfrac{du}{u^2} = e^{-t}\, dt$ ② $-\dfrac{1}{u} = -e^{-t} + c$ ③ $\dfrac{1}{u} = e^{-t} + c$

$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \dfrac{1}{c + e^{-t}}}$ sol. gen. eq. diff.

④ Trovo c in funzione di α:

$$u(0) = \frac{1}{c+1} = \alpha \rightsquigarrow c+1 = \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{\alpha} + e^{-t}} = \boxed{\frac{\alpha}{1-\alpha+\alpha e^{-t}}}$$ Sol. pbm. di Cauchy

⑤ Verifica a mente (ma è meglio scriverla!)

⑥ <u>Studio</u>: problemi quando $1-\alpha+\alpha e^{-t} = 0$, cioè $\alpha e^{-t} = \alpha - 1$

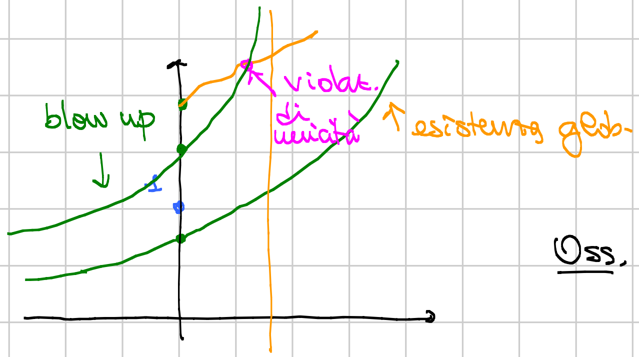
$$e^{-t} = \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow -t = \log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\rightsquigarrow t = -\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

Si vede meglio da $\alpha e^{-t} = \alpha - 1$

→ se $\alpha \in (0,1]$, allora l'eq. è impossibile ⟹ c'è esistenza glob. nel passato e nel futuro

→ se $\alpha > 1$, allora ci sono pbm. per $T = -\log \underbrace{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}_{\in (0,1)} > 0$



<u>Oss.</u> Più parto in alto, più il tempo di vita si accorcia

ANALISI 1 — LEZIONE 078

Note Title 03/03/2017

EQUAZIONI DIFF. LINEARI

Teoria generale caso omogeneo

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)} = 0}$$

Supponiamo per semplicità che $a_k(t) \equiv 1$.

Teorema (misterioso) La sol. di un'eq. diff. lineare esiste più che può se tutti gli $a_i(t)$ sono definiti e continui in un certo interv. (a,b), allora tutte le sol. sono definite in tutto (a,b).
Stessa cosa se invece di (a,b) c'è una semiretta o tutto $\mathbb{R}$.

Teorema Supponiamo $a_i(t) \in C^0((a,b))$ per ogni $i = 0, \ldots, k$.
Allora l'insieme delle soluz. dell'eq. diff. lin. omogenea è uno spazio vettoriale di dim. k.

Conseguenza operativa: se $u_1(t), \ldots, u_k(t)$ è UNA base dello spazio delle sol., allora la sol. generale sarà del tipo

$$\boxed{u(t) = c_1 u_1(t) + \ldots + c_k u_k(t)}$$

$c_1, \ldots, c_k$ sono numeri reali

Interpretazione Se L indica il LHS come operatore lineare

$$L : C^k((a,b)) \to C^0((a,b))$$

allora risolvere l'eq. vuol dire trovare $\operatorname{Ker} L$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dimostrare che l'insieme delle sol. è uno sp. vett. è un conto di algebra lineare

Siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni, cioè per ogni $t \in (a,b)$

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, v^{(i)}(t) = 0$$

Pongo $w(t) := u(t) + v(t)$. Dico che $w(t)$ è ancora sol.
Osservo che

$$w^{(i)}(t) = u^{(i)}(t) + v^{(i)}(t) \qquad \text{(linearità della deriv.)}$$

quindi

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{a_i(t) u^{(i)}(t)}_{\Sigma = 0} + \underbrace{a_i(t) v^{(i)}(t)}_{\Sigma = 0} = 0$$

Dovrei dim. pure che $\lambda u(t)$ è sol., ed è una facile verifica.

Per dim. che ha dim. k posso esibire una base fatta da k elementi.
Scelgo $t_0 \in (a,b)$ e risolvo il pbm. di Cauchy con dati iniziali:

$$u^{(j)}(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{se } j \neq i-1 \end{cases}$$

Sostanzialmente uso dati iniziali del tipo $\begin{array}{c} 0 \;\; 1 \;\; \ldots \;\; k-1 \\ 0 \ldots 0 \;\; \underset{\substack{\uparrow \\ i-1}}{1} \;\; 0 \ldots 0 \end{array}$

Questo definisce $u_i(t)$.
Sono ovviamente k.

<u>Dico che generano</u>: sia u una soluz. qualunque. In t_0 avrà dati

$$\begin{aligned} u(t_0) &= a_1 \\ \dot{u}(t_0) &= a_2 \\ &\vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) &= a_k \end{aligned}$$

Allora dico che $u(t) = a_1 u_1(t) + \dots + a_k u_k(t)$.
Infatti questa risolve l'eq. e soddisfa le cond. iniziali, quindi per unicità è proprio lei.

<u>Dico che sono lin. indip.</u> Supponiamo che

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) = 0 \qquad \text{per ogni } t \in (a,b).$$

Allora in particolare vale per $t = t_0$, dove u e tutte le sue derivate si annullano. Ora basta osservare che

$$u(t_0) = c_1 = 0$$
$$u'(t_0) = c_2 = 0 \quad \Rightarrow \text{ tutti i coeff. sono nulli}$$
$$\vdots$$
$$u^{(k-1)}(t_0) = c_k = 0$$

— o — o —

<u>Teoria generale caso non omogeneo</u>

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = f(t)}$$

<u>Teorema</u> La soluz. gen. di un' eq. diff. lin. non omogenea è del tipo

$$\boxed{u(t) = \bar{u}(t) + c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}$$

dove → $u_1(t), \dots, u_k(t)$ è una base dello spazio delle sol. dell'eq. omogenea associata
→ $\bar{u}(t)$ è una sol. qualunque dell'eq. non omogenea.

Vantaggio operativo: basta che trovo una soluz. qualunque e automaticamente ho tutte le soluzioni, a patto di saper risolvere l'omogenea.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono due verifiche da fare

Fatto 1 Se $u(t)$ e $v(t)$ sono soluz. della non omogenea, allora la differenza $u(t)-v(t)$ è sol. dell'omog. associata

$$Lu = f \qquad L(u-v) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{linearità}}}{=} Lu - Lv = f - f = 0$$
$$Lv = f$$

Fatto 2 Se $u(t)$ risolve la non omog. e $w(t)$ risolve l'omog, allora $v(t) = u(t) + w(t)$ risolve la non omog.

$$Lv = L(u+w) = Lu + Lw = f + 0 = f$$

Conclusione:

→ sia $\bar{u}(t)$ una sol. data e sia $u(t)$ una qualunque altra sol. della non omog. Allora per il fatto 1 $u - \bar{u}$ risolve l'omog., quindi è del tipo $c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$

→ viceversa, ogni roba del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\uparrow\\ \text{risolve non omog.}}} + \underbrace{c_1 u_1(t) + \ldots + c_k u_k(t)}_{\text{risolve omog.}}$$

Per il fatto 2 si ha che $u(t)$ risolve la non omog.

— o — o —

Domande a cui rispondere

① Come trovo una base delle sol. dell'omog. ?
Se i coeff. dell'eq. sono costanti c'è un algoritmo

② Come trovo una sol. qualunque della non omog. ?
Due metodi
→ metodo di variazione delle costanti (funziona sempre, ma richiede parecchi calcoli)
→ provare ad indovinare a occhio (metodo di similitudine, metodo degli annichilatori, ...)

— o — o —

Caso speciale $k=1$ e equazione omogenea

$$\boxed{\dot{u} + a(t)\, u = 0}$$

Questa è pure a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = -a(t)\, u \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)\, dt \rightsquigarrow \log|u| = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva di } a(t)}}{A(t)} + c$$

$$|u(t)| = e^{-A(t)+c} \qquad \boxed{u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante libera}}}{c}\, \underbrace{e^{-A(t)}}_{u_1(t)}}$$

Oss. 1 In questo caso speciale si vede che la soluz. $u(t)$ esiste fino a quando esiste $a(t)$

Oss. 2 Ho usato da qualche parte che $a_k(t) \equiv 1$?
→ per dire che le soluz. sono sp. vettoriale NO
→ per costruire la base e dim. che lo è SI, avendo usato il teo. di esistenza e unicità che vale per eq. in forma normale.

ANALISI 1 — LEZIONE 079

Note Title 03/03/2017

Equazioni lineari a coeff. costanti omogenee

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i u^{(i)} = 0}$$

numeri

Algoritmo per trovare UNA base dello sp. delle soluz:

Equazione $\rightsquigarrow$ pol. caratteristico $\rightsquigarrow$ radici $\rightsquigarrow$ base

pol. caratteristico $\rightsquigarrow \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$

$\boxed{\text{Caso con } k=2}$ $\quad a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = 0$

$a x^2 + bx + c$

Per le radici ci sono 3 casi

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Due radici reali distinte: λ, μ. Allora una base è

$$e^{\lambda t} \qquad e^{\mu t}$$

dunque la soluz. generale è $\quad u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$

Verifica: $u(t) = e^{\lambda t}$, $\dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{u} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sostituisco nell'eq.

$$a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t} \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{\text{pol. caratt. calcolato in } \lambda} = 0$$

Se le radici sono distinte ho finito ☺

Caso 2 "Due radici reali coincidenti", cioè una radice reale λ di molt. 2.
Una base è

$$e^{\lambda t} \qquad t e^{\lambda t}$$

quindi la sol. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Verifica: per $e^{\lambda t}$ è la stessa di sopra, quindi la faccio solo per l'altra

$$u(t) = t e^{\lambda t}, \quad \dot{u}(t) = e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}, \quad \ddot{u}(t) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t}$$

Sostituisco nell'eq. ed ottengo

$$a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = 2a\lambda e^{\lambda t} + a\lambda^2 t e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} + b\lambda t e^{\lambda t} + c t e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t} \underbrace{(2a\lambda + b)}_{\substack{\text{derivata del pol. caratt.} \\ \text{calcolata in } \lambda\text{, quindi} \\ \text{si annulla.}}} + t e^{\lambda t} \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{\substack{\lambda \text{ è radice del pol.} \\ \text{caratteristico}}}$$

Oss. $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ sono lin. indip. (non sono multipli per una costante)

Caso 3 Due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$

Una base è $\qquad e^{\alpha t} \cos(\beta t) \qquad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

quindi sol. gen.: $\qquad u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

Verifica: derivare e sostituire (è un conto)

Interpretazione brutale: forzando le regole una base potrebbe essere

$$e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = \dots = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)\right)$$

quindi pure anche $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sono è una base.

— o — o —

Nel caso di equazioni di ordine k l'algoritmo è analogo.
Il pol. caratteristico avrà grado k, quindi k radici complesse contate con molteplicità. Ora

- una radice λ di molt. 1 produce $e^{\lambda t}$ (stessa verifica di sopra)
- " " " " " m produce m elem. della base:

$$e^{\lambda t} \qquad t e^{\lambda t} \qquad \dots \qquad t^{m-1} e^{\lambda t}$$

(verifica analoga a prima)

- due radici compl. coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 producono 2 elementi

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

- due radici compl. coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. m produco $2m$ elementi

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ t\, e^{\alpha t}\cos(\beta t) & t\, e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ \vdots & \vdots \\ t^{m-1} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & t^{m-1} e^{\alpha t}\sin(\beta t). \end{array}$$

(la verifica più comoda passa da $\mathbb{C}$).

Esempio 1 $\quad \ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = 0 \quad \leadsto \quad x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x+4)(x-1) = 0$

$$u(t) = a e^{-4t} + b e^{t}$$

Esempio 2 $\quad \ddot{u} + 4\dot{u} + 4u = 0 \quad \leadsto \quad x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x+2)^2 = 0$

$$u(t) = a e^{-2t} + b t e^{-2t}$$

Esempio 3 $\quad \ddot{u} + 4\dot{u} = 0 \quad \leadsto \quad x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0$

$$u(t) = a e^{-4t} + b \underset{e^{0t}}{\uparrow}$$

Esempio 4 $\quad \ddot{u} - 4u = 0 \quad \leadsto \quad x^2 - 4 = 0 \quad \leadsto \quad x = \pm 2$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$$

Esempio 5 $\quad \ddot{u} + 4u = 0 \quad \leadsto \quad x^2 + 4 = 0 \quad \leadsto \quad x = \pm 2i$

$(\alpha = 0,\ \beta = 2)$

$$u(t) = a e^{0t} \cos(2t) + b e^{0t} \sin(2t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

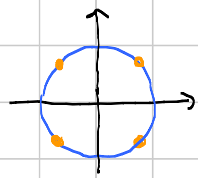
Oss. Nell'esempio 4 un'altra base è $\cosh(2t)$, $\sinh(t)$,
quindi la sol. gen. si può scrivere come

2t: corretto dopo video

$$u(t) = a \cosh(2t) + b \sinh(2t).$$

Esempio 6 $\quad u^{(4)} + u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^4 + 1 = 0$

Le radici sono le radici quarte di -1



$$\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

La soluzione generale è

$$u(t) = \underbrace{a e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + b e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{ho usato la coppia } \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i} + c e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + d e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Esempio 7 $\quad u^{(5)} + u^{(3)} = 0 \qquad x^5 + x^3 = 0$

$$x^3 (x^2+1) = 0$$

radici: $x = \pm i$ e $x = 0$ con molt. 3

$x = \pm i \quad \rightsquigarrow \quad \sin t \qquad \cos t$

$x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e^{0t},\ t e^{0t},\ t^2 e^{0t} \qquad 1,\ t,\ t^2$

Sol. generale: $u(t) = a \sin t + b \cos t + c + dt + e t^2$

Esempio 8 Per quale valore del parametro α si ha che le soluzioni dell'equazione

$$\ddot{u} + \alpha \dot{u} + 5u = 0$$

tendono a 0 per $t \to +\infty$.

Provo a vedere il polinomio caratteristico $\quad x^2 + \alpha x + 5 = 0$

- Se le soluzioni sono reali (λ e μ), allora

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

Tendere a 0 per $t \to +\infty$ dipende dal segno di λ e μ, il quale è opposto a quello di α.
Quindi $\to 0 \iff \alpha > 0$

- Se le sol. sono reali di molt 2, discorso analogo

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

e ora $\alpha = -2\lambda$, quindi $\to 0 \iff \alpha > 0$

- se le radici sono complesse coniugate, $\to 0$ dipende dalla parte reale della radice, ma ancora una volta la parte reale delle radici ha segno opposto risp. ad α.
Quindi $u(t) \to 0 \iff \alpha > 0$

In tutti i casi le soluz. $\to 0$ per $t \to +\infty \iff \alpha > 0$.

ANALISI 1 — LEZIONE 080

Note Title 07/03/2017

EQUAZIONI DIFF. LINEARI NON OMOGENEE

Come trovare UNA soluzione (da cui poi si trovano tutti)

→ indovinare

→ metodo di variazione delle costanti

Ricerca per tentativi

Esempio 1 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = e^{2t}$

Sol. gen. omog. : $x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0 \rightsquigarrow e^{-4t}, e^{t}$

$$u(t) = a e^{t} + b e^{-4t} \quad \leftarrow \text{sol. gen. omog.}$$

Cerco sol. della non omog. del tipo $u(t) = \lambda e^{2t}$.

Calcolo

$$\dot{u} = 2\lambda e^{2t} \qquad \ddot{u} = 4\lambda e^{2t}$$

Sostituisco

$$\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = \cancel{4\lambda e^{2t}} + 6\lambda e^{2t} - \cancel{4\lambda e^{2t}} = e^{2t} \quad \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

Sol. gen. eq. non omog : $\boxed{u(t) = \frac{1}{6} e^{2t} + a e^{t} + b e^{-4t}}$

Esempio 2 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = t^2 - 3$

Provo con $u(t) = at^2 + bt + c$ (a, b, c da trovare)

$$\dot{u} = 2at + b \qquad \ddot{u} = 2a$$

Sostituisco

$$\ddot{u}+3\dot{u}-4u = 2a+6at+3b-4at^2-4bt-4c = t^2-3$$

$-4a = 1$ coeff. t^2 $\quad a = -\frac{1}{4}$

$6a-4b=0$ coeff. t $\quad 4b = 6a \rightsquigarrow b = \frac{3}{2}a = -\frac{3}{8}$

$2a+3b-4c=-3$ term. noto

$4c = 2a+3b+3 = -\frac{1}{2}-\frac{9}{8}+3$

$\rightsquigarrow$ si trova.

Esempio 3 $\quad \ddot{u}+3\dot{u}-4u = \sin(2t)$

Tentativo misto in sin e cos : $u(t) = a\sin(2t)+b\cos(2t)$

$$\dot{u} = 2a\cos(2t)-2b\sin(2t), \qquad \ddot{u} = -4a\sin(2t)-4b\cos(2t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-4a\sin(2t)-4b\cos(2t)}_{\ddot{u}}\underbrace{+6a\cos(2t)-6b\sin(2t)}_{+3\dot{u}}\underbrace{-4a\sin(2t)-4b\cos(2t)}_{-4u}=\sin(2t)$$

$$\begin{cases} -8a-6b=1 & \text{coeff. sin} \\ -8b+6a=0 & \text{coeff. cos} \end{cases}$$

$b = \frac{3}{4}a \rightsquigarrow -8a-\cancel{6}^{3}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_2}a = 1$

$\left(-8-\frac{9}{2}\right)a=1 \rightsquigarrow \frac{25}{2}a=-1 \rightsquigarrow a = -\frac{2}{25} \rightsquigarrow b = -\frac{3}{50}$

Sol. gen. eq. non omog:

$$u(t) = \underbrace{-\frac{2}{25}\sin(2t)-\frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{sol. speciale}} + \underbrace{ae^{t}+be^{-4t}}_{\text{sol. gen. eq. omog.}}$$

Fatti generali: per equazioni di ordine qualunque a coeff. costanti

① RHS $= e^{at}$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \lambda e^{at}$ con λ incognito

② RHS = polinomio $\rightsquigarrow$ $u(t)$ = pol. stesso grado completo a coeff. incogniti

③ RHS $= \sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \overbrace{a\sin(\alpha t) + b\cos(\alpha t)}^{\text{sempre entrambi}}$
con a e b incogniti

④ RHS = somma degli ingredienti precedenti

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ = somma dei tentativi (o anche risolvere un pezzo per volta e poi sommare le soluzioni)

Dim. $Lu = f_1 + f_2$. Se $Lu_1 = f_1$ e $Lu_2 = f_2$, allora
$$L(u_1+u_2) \underset{\text{linearità}}{=} Lu_1 + Lu_2 = f_1 + f_2$$

⑤ RHS $= \sin^k(\alpha t)$ o $\cos^k(\alpha t)$ o $\sin^k(\alpha t)\cos^\ell(\beta t)$

$\rightsquigarrow$ con un po' di precorso i prodotti e le potenze diventano somme e si ricade nel caso ③.

Esempio 4 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = \sin^2 t$

$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$

$$\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$\rightsquigarrow$ $u(t) = a + b\cos(2t) + c\sin(2t)$ con a, b, c incogniti

<u>Esempio 5</u> $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = e^t$

In teoria dovrei provare $u(t) = \lambda e^t$, $\dot{u} = \lambda e^t$, $\ddot{u} = \lambda e^t$

$$\lambda e^t + 3\lambda e^t - 4\lambda e^t = e^t \quad \rightsquigarrow \quad 0 = e^t$$

Era ovvio che succedesse, perché e^t è sol. dell'omog.

Il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t e^t$

$$\dot{u} = \lambda e^t + \lambda t e^t \qquad \ddot{u} = \lambda e^t + \lambda e^t + \lambda t e^t$$

Sostituisco nell'eq. e trovo

$$\underbrace{2\lambda e^t + \cancel{\lambda t e^t}}_{\ddot{u}} + \underbrace{3\lambda e^t + \cancel{3\lambda t e^t}}_{+3\dot{u}} \underbrace{- \cancel{4\lambda t e^t}}_{-4u} = e^t \quad \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

Sol. gen.: $u(t) = \frac{1}{5} t e^t + a e^t + b e^{-4t}$

<u>Oss.</u> Deve succedere che la parte in te^t se ne va

<u>Oss. 2</u> Se te^t era sol. dell'omog. bisognava aggiungere ancora una t.

<u>Oss. 3</u> Lo stesso discorso vale per i tentativi trigonometrici o polinomiali (cioè se $\sin(2t)$ è sol. dell'omog. e $\sin(2t)$ è al RHS, allora il tentativo è

$$u(t) = t\,(a\cos(2t) + b\sin(2t)).$$

Esempio 6 $\quad u^{(5)} + u^{(3)} = t + 2$

Omogenea: $x^5 + x^3 = 0$, $x^3(x^2+1) = 0$ $\quad x = 0$ molt. 3

$x = \pm i$

Sol. gen. omog.: $u(t) = \underbrace{c_1 \cos t + c_2 \sin t}_{\pm i} + \underbrace{c_3 + c_4 t + c_5 t^2}_{x=0 \text{ molt. } 3}$

Tentativo per non omog: $u(t) = (at+b)t^3$

Ho molt. per t^3 perché la molt. di $x=0$ è 3

$u(t) = at^4 + bt^3$

$\dot{u}(t) = 4at^3 + 3bt^2$

$\ddot{u}(t) = 12at^2 + 6bt$

$\dddot{u}(t) = 24at + 6b$ $\qquad u^{(5)} + u^{(3)} = 24at + 6b = t + 2$

$u^{(4)}(t) = 24a$

$u^{(5)}(t) = 0$ $\qquad a = \frac{1}{24} \quad b = \frac{1}{3}$

Sol. finale $\quad u(t) = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \text{sol. gen. omog.}$

Cosa succede se faccio come tentativo il pol. gen. di grado 4:

$u(t) = at^4 + bt^3 + \underbrace{ct^2 + dt + e}$

non riesco a determinarli

Certo! sono la parte libera dell'omog.

Se fosse stato $\quad u^{(5)} + u^{(3)} = \text{cost}$ il tentativo da fare era

$u(t) = t\,(a\cos t + b\sin t)$

perché $\pm i$ sono radici del pol. caratteristico con molt. 1 (quindi $\sin t$ e $\cos t$ sono sol. dell'omog., ma con t davanti no)

⑥ RHS con sol. dell'omog. $\rightsquigarrow$ $u(t)$ = come se non lo fossero
ma con un po' di t davanti

⑦ RHS = polinomio $\cdot\, e^{\alpha t}$ e/o polinomio $\cdot$ roba trigonom.

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ = pol. $\boxed{\text{compl.}}$ $\underbrace{\text{stesso grado}}$ $\cdot\, e^{\alpha t}$ (opp. sin e cos)

o più alto se serve per
colpa dell'omog.

⑧ RHS = $e^{\beta t} \cdot \sin(\alpha t)$ o simili

$\rightsquigarrow$ $u(t) = e^{\beta t}\left(a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)\right)$ con a e b
incogniti

Oss. I tentativi si possono fare anche se i coeff. non sono
costanti, ma spesso non riescono.

ANALISI 1 — LEZIONE 081

Note Title 07/03/2017

$\boxed{\text{METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI}}$

Metodo sistematico per trovare una soluzione di un'eq. diff. lineare NON omogenea (funziona anche se i coeff. sono non costanti, MA a patto di avere una base di soluzioni dell'omogenea).

Esempio 1 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = e^{2t}$

Sol. gen. omogenea: $u(t) = ae^{t} + be^{-4t}$

Cerco una sol. della non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t)e^{t} + b(t)e^{-4t}$$

funzioni della t

Calcolo

$$\dot{u}(t) = \boxed{\dot{a}(t)e^{t}} + a(t)e^{t} + \boxed{\dot{b}(t)e^{-4t}} - 4b(t)e^{-4t}$$

Impongo $\boxed{\dot{a}(t)e^{t} + \dot{b}(t)e^{-4t} = 0}$ 1ª equazione

Calcolo

$$\ddot{u}(t) = \dot{a}(t)e^{t} + a(t)e^{t} - 4\dot{b}(t)e^{-4t} + 16b(t)e^{-4t}$$

(ho ignorato gli altri due termini)

Sostituisco nell' equazione di partenza

$$\dot{a}e^{t} + \cancel{ae^{t}} - 4\dot{b}e^{-4t} + \cancel{16be^{-4t}} \qquad \ddot{u}$$
$$+ \cancel{3ae^{t}} - \cancel{12be^{-4t}} \qquad +3\dot{u}$$
$$- \cancel{4ae^{t}} - \cancel{4be^{-4t}} = e^{2t} \qquad -4u = e^{2t}$$

DEVE succedere che i termini con a e b (senza la derivata) se ne vanno. Ciò che resta è

$$\boxed{\dot{a}(t)e^t - 4\dot{b}(t)e^{-4t} = e^{2t}}$$ 2ª equazione

Le due eq. ottenute le metto insieme e le penso come sistema lineare nelle incognite $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$

$$\begin{cases} \dot{a}(t)e^t + \dot{b}(t)e^{-4t} = 0 \\ \dot{a}(t)e^t - 4\dot{b}(t)e^{-4t} = e^{2t} \end{cases}$$

Risolvo: 1ª−2ª $\rightsquigarrow 5\dot{b}(t)e^{-4t} = -e^{2t} \rightsquigarrow \dot{b}(t) = -\frac{1}{5}e^{6t}$

$$\dot{a}(t) = -\dot{b}(t)e^{-4t}\cdot e^{-t} = \frac{1}{5}e^{6t}\cdot e^{-4t}\cdot e^{-t} = \frac{1}{5}e^{t}$$

Integrando trova $a(t)$ e $b(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{5}e^t \qquad b(t) = -\frac{1}{30}e^{6t}$$

$$\rightsquigarrow \quad u(t) = a(t)e^t + b(t)e^{-4t}$$

$$= \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{30}e^{2t} = \frac{5}{30}e^{2t} = \frac{1}{6}e^{2t}$$

— o — o —

Se l'equazione fosse di ordine 3, avrei 3 costanti arbitrarie $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$, quindi servirebbero 3 equ ottenute annullando i termini con $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ nel calcolo di $\dot{u}$ e $\ddot{u}$.

Si potrebbe dim. che il sistema finale ha sempre sol. unica.

— o — o —

EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE 1

$$\boxed{\dot{u} + a(t)u = b(t)}$$

Formula per la soluzione generale

$$\boxed{u(t) = e^{-A(t)} \left\{ c + \int b(s) e^{A(s)}\, ds \right\}}$$

dove c è il parametro libero, e $A(t)$ è una primitiva qualunque di $a(t)$, e l'integrale è una primitiva qualunque di $b(t)e^{A(t)}$.
La formula fornisce la soluz. sempre. Se in più so calcolare le primitive, la formula è esplicita.

Dim 1 (Verifica)

$$\dot{u}(t) = e^{-A(t)} (-\underbrace{A'(t)}_{a(t)}) \{ c + \int \dots \} + \cancel{e^{-A(t)}} \cdot b(t) \cancel{e^{A(t)}}$$

$$= -a(t)u(t) + b(t)$$

DIM 2 FATTORE INTEGRANTE Sia $A(t)$ una prim. di $a(t)$

Moltiplico l'eq. a dx e sx per $e^{A(t)}$ ← fatt. integrante

$$\underbrace{\dot{u}(t)e^{A(t)} + a(t)u(t)e^{A(t)}}_{} = b(t)e^{A(t)}$$

$$\left[u(t)e^{A(t)} \right]'$$ da cui

$$u(t)e^{A(t)} = \int b(s)e^{A(s)}\, ds + c.$$ Moltiplicando per $e^{-A(t)}$ ho la formula.

$\boxed{\text{DIM 3}}$ (Via teoria delle eq. lineari) $\dot{u} + a(t)\,u = b(t)$

Passo 1 : risolvo l'omogenea associata : $\dot{u} + a(t)\,u = 0$
pensandola a variabili sep.

$$\dot{u} = -a(t)\,u \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = -a(t)\,u \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)\,dt$$

$$\rightsquigarrow \log|u| = -A(t) + c \rightsquigarrow \boxed{u = c\,e^{-A(t)}}$$

primo pezzo della formula

Passo 2 : cerco soluz. speciale dell'eq. non omogenea e la cerco facendo variare la costante

$$u(t) = \underbrace{c(t)}_{\text{incognita}}\,e^{-A(t)} \qquad \dot{u}(t) = \dot{c}(t)\,e^{-A(t)} + c(t)\,e^{-A(t)}\,(-a(t))$$

Sostituisco nell'eq. e trovo

$$\dot{u} + a(t)\,u = \underbrace{\dot{c}(t)\,e^{-A(t)} - \cancel{a(t)\,c(t)\,e^{-A(t)}}}_{\dot{u}} + \underbrace{\cancel{a(t)\,c(t)\,e^{-A(t)}}}_{a(t)\,u} = b(t)$$

$$\rightsquigarrow \dot{c}(t) = e^{A(t)}\,b(t) \rightsquigarrow c(t) = \int e^{A(s)}\,b(s)\,ds$$

Quindi una sol. speciale è

$$\boxed{u(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(s)}\,b(s)\,ds}$$

secondo pezzo della formula

Esempio 1 $\qquad \dot{u} + \underbrace{2t}_{a(t)}\,u = t^3 \qquad A(t) = t^2$

Fattore integrante : $e^{t^2} \rightsquigarrow \underbrace{\dot{u}\,e^{t^2} + 2t\,u\,e^{t^2}}_{} = t^3 e^{t^2}$

$$\left(u\,e^{t^2}\right)' = t^3 e^{t^2}$$

$$u e^{t^2} = \int t^3 e^{t^2}\,dt = \int \underbrace{t^2}_{F} \cdot \underbrace{t e^{t^2}}_{g}\,dt = \underset{F}{t^2} \cdot \underset{G}{\tfrac{1}{2} e^{t^2}} - \int \underset{f}{\cancel{2}t}\, \underset{G}{\tfrac{1}{\cancel{2}} e^{t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + c$$

da cui $\boxed{u(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} + c e^{-t^2}}$

Metodo alternativo: guardo l'omogenea $\dot{u} + 2tu = 0$

$$\dot{u} = -2t\,u \rightsquigarrow \log|u| = -t^2 + c \rightsquigarrow u(t) = c e^{-t^2}$$

Per la parte non omogenea spero in un tentativo polinomiale

$$u(t) = a + bt + ct^2 \qquad \dot{u} = b + 2ct$$

Sostituisco: $\dot{u} + 2tu = b + 2ct + 2at + 2bt^2 + 2ct^3 = t^3$

$2c = 1$	t^3	$c = \frac{1}{2}$	$a = -\frac{1}{2}$ ☺
$b = 0$	t^2	$b = 0.$	
$2c + 2a = 0$	t		
$b = 0$	termine noto		

<u>Esempio 2</u> $\dot{u} + \frac{u}{t} = \sin t$ $\qquad a(t) = \frac{1}{t} \rightsquigarrow A(t) = \log t$

Fatt. integrante $= e^{\log t} = t$

$$t\dot{u} + u = t \sin t$$

$$(tu)' = t \sin t \qquad tu = \int t \sin t = -t \cos t + \int \cos t$$

$$= -t \cos t + \sin t + c$$

$u(t) = -\cos t + \frac{\sin t}{t} + \frac{c}{t}$. Tutte le sol. hanno blow up in $t=0$ tranne quella con $c=0$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 082

Note Title 08/03/2017

Esempio 1 $\dot{u} = 7u + \frac{t^3}{t^2+3}$ $u(0) = \alpha$

Domanda: studiare al variare di α il comportamento della soluz. per $t \to +\infty$.

$\dot{u} - 7u = \frac{t^2}{t^2+3}$ $a(t) = -7$ $b(t) = \frac{t^3}{t^2+3}$ $A(t) = -7t$

Formula per la soluzione

$$u(t) = \underset{\uparrow\ e^{-A(t)}}{e^{7t}} \left\{ c + \int_0^t \underbrace{e^{-7s} \frac{s^2}{s^2+3} ds}_{e^{A(s)}\, b(s)\, ds} \right\}$$

Calcolo c: $\alpha = u(0) = c$

Come si comporta $u(t)$ per $t \to +\infty$

$$\int_0^t e^{-7s} \frac{s^2}{s^2+3} ds \longrightarrow \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-7s} \frac{s^2}{s^2+3}}_{\leq e^{-7s}} ds$$ (integrale impr. convergente)

Il limite dipende da c, quindi da α: detto I il valore dell'int. improprio:

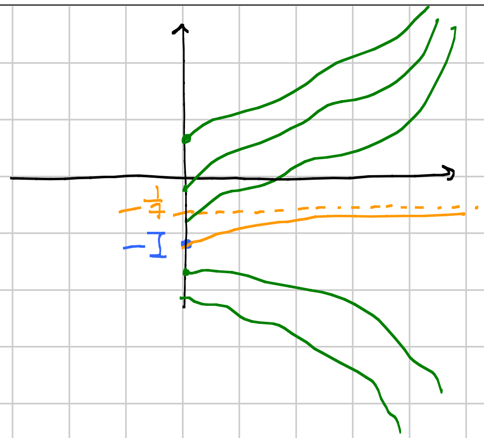
→ se $\alpha + I > 0$, cioè se $\alpha > -I$, allora $u(t) \to +\infty$

→ se $\alpha + I < 0$, " " $\alpha < -I$, allora $u(t) \to -\infty$

→ se $\alpha = -I$, allora abbiamo una forma indet.

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{c + \int_0^t \dots}{e^{-7t}} \underset{\uparrow\ \text{Hôp}\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\cancel{e^{-7t}} \frac{t^2}{t^2+3}}{-7\cancel{e^{-7t}}} = -\frac{1}{7}$$

Fatto generale: $\dot{u} = 7u + f(t)$



Se $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l \in \mathbb{R}$, allora

c'è un effetto soglia simile, cioè

- $\alpha > -I$, $u(t) \to +\infty$
- $\alpha < -I$, $u(t) \to -\infty$
- $\alpha = -I$, $u(t) \to \frac{l}{7}$ dove $I = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-7s} f(s)\,ds}_{\text{converge per confr. asintotico con } e^{-7s}}$

Esercizio 2 $\dot{u} = 7u + f(t)$ Supponiamo $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ funzione limitata.

Allora l'eq. ammette un'unica soluzione limitata in $[0,+\infty)$

$$u(t) = \underbrace{e^{7t}}_{\downarrow +\infty} \left\{ c + \int_0^t e^{-7s} f(s)\,ds \right\}$$

L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-7s} f(s)\,ds$ converge assolutamente

$$|e^{-7s} f(s)| = e^{-7s} \underbrace{|f(s)|}_{\leq M}$$

Detto I il valore dell'integrale improprio avremo che

- per $c + I > 0$ $u(t) \to +\infty$
- per $c + I < 0$ $u(t) \to -\infty$
- per $c + I = 0$, la cosa è delicata e possiamo riscrivere la formula come

$$u(t) = e^{7t} \left\{ -\int_0^{+\infty} e^{-7s} f(s)\,ds + \int_0^t e^{-7s} f(s)\,ds \right\}$$

$$= -e^{7t} \underbrace{\int_t^{+\infty} e^{-7s} f(s)\,ds}$$

primitiva che si annulla all'infinito

Da qui concludo

$$|u(t)| = e^{+7t}\left|\int_t^{+\infty} e^{-7s} f(s)\,ds\right|$$

$$\leq e^{+7t}\int_t^{+\infty} e^{-7s} \underbrace{|f(s)|}_{\leq M} ds$$

$$\leq M e^{+7t}\int_t^{+\infty} e^{-7s} ds$$

$$= M e^{+7t}\left[-\frac{1}{7}e^{-7s}\right]_t^{+\infty} = Me^{+7t}\cdot\frac{1}{7}e^{-7t} = \frac{M}{7}$$

un po' rapido

<u>Esercizio 3</u> $\dot{u} = -7u + f(t)$ Se $f(t)$ è limitata come prima, allora tutte le soluz. sono limitate in $[0,+\infty)$

$$u(t) = e^{-7t}\left\{c + \int_0^t e^{7s} f(s)\,ds\right\}$$

$$= \underbrace{c e^{-7t}}_{\text{limitato facile}} + e^{-7t}\int_0^t e^{7s} f(s)\,ds$$

$$\left|e^{-7t}\int_0^t e^{7s} f(s)\,ds\right| \leq e^{-7t}\int_0^t e^{7s} \underbrace{|f(s)|}_{\leq M} ds$$

$$\leq e^{-7t}\cdot M\int_0^t e^{7s} ds$$

$$= M e^{-7t}\left[\frac{1}{7}e^{7s}\right]_0^t$$

$$= \frac{M}{7}e^{-7t}\left(e^{7t}-1\right)$$

$$= \frac{M}{7} - \frac{M}{7}e^{-7t} \rightsquigarrow \text{limitato.}$$

Esercizio 4 $\quad \ddot{u} + 8u = \sin(\alpha t)$

Domanda: è vero che tutte le soluz. sono limitate?

Allenamento: caso senza termine forzante $\quad \ddot{u} + 8u = 0$

$x^2+8=0$, $\quad x = \pm\sqrt{8}\,i = \pm 2\sqrt{2}\,i$

$$u(t) = a\cos(2\sqrt{2}t) + b\sin(2\sqrt{2}t)$$

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ è limitata e oscilla periodicamente

Oss. La soluz. si può riscrivere come $\boxed{u(t) = A\sin(2\sqrt{2}t+\varphi)}$

A: ampiezza, φ: fase

$$u(t) = \sqrt{a^2+b^2}\underbrace{\Bigg(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{=\sin\varphi}\cos(2\sqrt{2}t) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{=\cos\varphi}\sin(2\sqrt{2}t)\Bigg)}_{\sin(2\sqrt{2}t+\varphi)}$$

Se l'eq. è non omogenea, le soluz. saranno del tipo

$$u(t) = a\cos(2\sqrt{2}t) + b\sin(2\sqrt{2}t) + \lambda\cos(\alpha t) + \mu\sin(\alpha t)$$

a, b: liberi $\qquad$ λ, μ: si determinano esplicitamente

$\Rightarrow$ la soluz. rimane limitata TRANNE nel caso in cui $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$.

In questo caso la formula è diversa perché c'è il t, quindi

$$u(t) = a\cos(2\sqrt{2}t) + b\sin(2\sqrt{2}t) + \underbrace{\lambda t\cos(2\sqrt{2}t) + \mu t\sin(2\sqrt{2}t)}$$

almeno uno dei 2 ha coeff. $\neq 0$, quindi la sol. è NON limitata

EFFETTO RISONANZA Quando il termine non omogeneo oscilla con la stessa frequenza delle soluzioni dell'eq. omogenea.
Questo produce soluzioni non limitate anche con termini limitati.

(vedi TAKOMA BRIDGE).

ANALISI 1 — LEZIONE 083

Note Title 08/03/2017

Esempio 1 $\quad \dot{u} = u^p \qquad u(0) = \alpha > 0$

Se $p = 1$ è un' eq. lineare $\dot{u} = u$

Se $p > 1$, allora tutte le soluzioni con $\alpha > 0$ hanno blow up nel futuro.

La integro come equ. a var. separabili $\frac{du}{dt} = u^p$

$$\frac{du}{u^p} = dt \; ; \quad u^{-p}\,du = dt \; ; \quad \frac{1}{-p+1}\,u^{-p+1} = t + c$$

$$u^{-p+1} = (1-p)t + c \; ; \quad \frac{1}{u^{p-1}} = c - (p-1)t$$

$$u^{p-1} = \frac{1}{c-(p-1)t} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{[c-(p-1)t]^{\frac{1}{p-1}}}$$

Trovo c

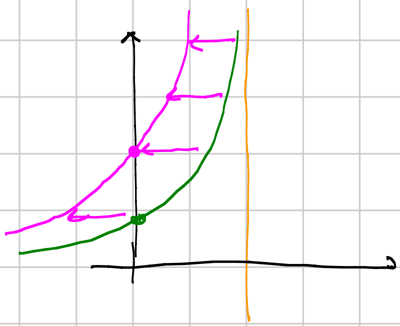
$$\alpha = u(0) = \frac{1}{c^{1/(p-1)}} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\alpha^{p-1}}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha^{p-1}} - (p-1)t\right]^{\frac{1}{p-1}}}}$$

$\Rightarrow$ BLOW UP quando $t = \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{\alpha^{p-1}} > 0$

Oss. Più α è grande e più il tempo di vita è piccolo.

Ricordiamo che, essendo l'eq. autonoma, tutte le soluzioni si ottengono l'una dall'altra per traslazione dx – sx



Per $p < 1$ la formula è la stessa, ma non è più vero che il tempo è positivo.

Esempio 2 $\quad \dot{u} = -u^p \quad u(0) = \alpha > 0$

Ora le soluzioni sono decrescenti. Stesso conto di prima

$$u(t) = \frac{1}{[c + (p-1)t]^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{con } c = \frac{1}{\alpha^{p-1}}$$

Tutte le soluzioni sono definite per ogni $t \geq 0$ e tendono a 0. Inoltre l'ordine di infinitesimo e la parte principale non dipendono da α

$$u(t) \sim \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{p-1}}}$$

Invece se l'eq. fosse lineare $\dot{u} = -u$ le soluzioni sarebbero

$$u(t) = +\alpha e^{-t}$$

e quindi il comportamento all'infinito dipende da α.

—o—o—

Esempio 3 $\quad \dot{u} = \dfrac{\cos t}{u^2} \quad u(0) = \alpha > 0$

Studiare, al variare di α, l'esistenza globale per $t \geq 0$.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\cos t}{u^2} \rightsquigarrow u^2\, du = \cos t\, dt \rightsquigarrow \frac{u^3}{3} = \sin t + c$$

$$u^3 = 3\sin t + c \rightsquigarrow u(t) = \sqrt[3]{3\sin t + c} \rightsquigarrow c = \alpha^3$$

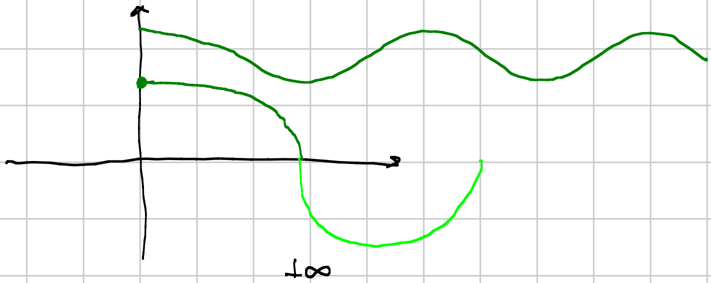
$$\boxed{u(t) = \sqrt[3]{\alpha^3 + 3\sin t}}$$

Per dare senso all'equazione occorre che sia $u(t) > 0$, quindi

$\alpha^3 + 3\sin t > 0$ per ogni $t \geq 0$. Le cose vanno male quando

$\sin t = -\frac{1}{3}\alpha^3$. Quindi

- se $\alpha^3 > 3$, allora esist. gl.
- se $\alpha^3 \leq 3$, allora c'è BD in tempo finito.



Esempio 4 $\quad \ddot{u} - 3\dot{u} - 4u = 0 \qquad \int_0^{+\infty} u(t)\,dt = 2017$

Due parametri liberi, una condizione ...

$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad (x-4)(x+1) = 0 \qquad x = +4 \text{ e } x = -1$

$$\boxed{u(t) = ae^{4t} + be^{-t}}$$ Sol. generale

Se voglio che l'int. impr. converga, allora per forza $a = 0$
A quel punto resta

$$b \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt}_{1} = 2017 \quad \rightsquigarrow \quad b = 2017$$

$\Rightarrow$ L'unica soluzione è $\quad u(t) = 2017\, e^{-t}$.

Esercizio 5 $\quad$ Autovalori della derivata seconda.
Determinare tutti i numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste una funzione u non identicamente nulla tale che

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$ $\leftarrow$ Non sono condizioni tipiche del pbm. di Cauchy.

Se voglio risolvere l'eq. ci sono 3 casi

$x^2 = \lambda$ e le radici dipendono dal segno di λ

Fatto 1 Se riesco a risolvere, allora $\lambda < 0$

$\ddot{u} = \lambda u$. Moltiplico a dx e sx per u

$\lambda u^2 = \ddot{u} u$ Integro in $[0,1]$

$$\lambda \int_0^1 u^2(t)\,dt = \int_0^1 \ddot{u}(t)\,u(t)\,dt = -\int_0^1 \dot{u}^2(t)\,dt + \underbrace{[\dot{u}(t)\,u(t)]_0^1}_{0}$$

Quindi

$$\lambda \int_0^1 u^2(t)\,dt = -\int_0^1 \dot{u}^2(t)\,dt \Rightarrow \lambda < 0$$

(se fosse $\lambda = 0$ dovrebbe essere $\int_0^1 \dot{u}^2(t)\,dt = 0$ ma allora $\dot{u}(t) \equiv 0$, cioè u costante, ma allora $u \equiv 0$ perché è 0 in $t=0$ e $t=1$)

Fatto 2 Sapendo che $\lambda < 0$, $x^2 = \lambda$ ha come radici $x = \pm\sqrt{-\lambda}\, i$ quindi la sol. gen. dell'eq. è

$$u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda}\, t) + b \cos(\sqrt{-\lambda}\, t)$$

Impongo le 2 condizioni $u(0) = 0 \rightsquigarrow b = 0$

$\rightsquigarrow u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda}\, t) \rightsquigarrow$ impongo $u(1) = 0$

$a \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \rightsquigarrow$ ci sono due casi

- se $\sin(\sqrt{-\lambda}) \neq 0$, allora $a = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ e non ui valore
- se $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$, cioè $\sqrt{-\lambda} = k\pi$ (con $k \in \mathbb{N}_+$), cioè $\lambda = -k^2\pi^2$,

allora ogni valore di a va bene, quindi ci sono ∞ soluzioni

Conclusione: i valori di λ per cui esiste sol non nulla sono quelli del tipo $\lambda = -k^2\pi^2$.
Per quei valori di λ ci sono ∞ soluzioni.

— o — o —

Esercizio 6
$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 a(t) \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

È vero che tutte le soluz. hanno blow up per $t \geq 0$?

Formula $\dfrac{du}{u^2} = a(t)\,dt$; $-\dfrac{1}{u} = A(t) + c$

$$\frac{1}{u} = -A(t) + c \qquad \boxed{u(t) = \frac{1}{c - A(t)}}$$

$\alpha = u(0) = \dfrac{1}{c}$ se ho scelto $A(t)$ in modo che $A(0) = 0$

$\leadsto c = \dfrac{1}{\alpha} \leadsto u(t) = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha A(t)}$

c'è blow up se $A(t) = \dfrac{1}{\alpha}$

Se voglio che abbia soluzione per ogni $\alpha > 0$, serve che $A(t)$ assuma tutti i possibili valori positivi. Questo accade, per esempio, se

$$\int_0^{+\infty} a(t)\,dt = +\infty$$
$$\shortparallel$$
$$\lim_{t \to +\infty} A(t)$$

[Oss. Se $A(t)$ fosse limitata sup, allora per α piccolo non ci sarebbe soluzione di $A(t) = \frac{1}{\alpha}$]

ANALISI 1 – LEZIONE 084

Note Title 10/03/2017

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\qquad$ $x_{n+1} = 2x_n + 3$

x_0 dato

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3 \\ x_0 = 5 \end{cases}$ $\qquad$ $x_0 = 5$, $x_1 = 2x_0 + 3 = 13$

$x_2 = 2x_1 + 3 = 29$

$x_3 = 2x_2 + 3 = 61$

$\vdots$

Determina univocamente tutta la successione, MA... se voglio x_{2017} mi devo calcolare tutti i precedenti.

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\rightsquigarrow$ succ. per ricorrenza di ORDINE 1 (dipende dal termine precedente) AUTONOMA (la regola di passaggio è la stessa per ogni n)

$x_{n+1} = f(x_n, n)$ $\rightsquigarrow$ ORDINE 1 NON AUTONOMA

(Esempio : $x_{n+1} = 2x_n + n$)

colpevole del non autonoma

$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n, n)$ $\rightsquigarrow$ ORDINE 2 (dipendenza dai 2 termini precedenti)

L'ordine k si definisce analogamente.

Esempio celeberrimo $\quad$ Fibonacci $\quad$ $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

Oss. Se l'ordine è k, devo dare k valori iniziali.

<u>Domande:</u> → trovare una formula esplicita
→ capire il limite della successione senza avere la formula esplicita.

<u>Caso banale</u> (ordine 1, autonomo, lineare, omogeneo)

$$x_{n+1} = a\, x_n$$

x_0, $x_1 = a x_0$, $x_2 = a^2 x_0$, ... $\qquad x_n = a^n x_0$

(si dimostra per induzione)

<u>Secondo caso</u> (Come sopra, ma non omogeneo)

$$x_{n+1} = a x_n + b$$

x_0, $x_1 = a x_0 + b$, $x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

$x_4 = \ldots = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b$

$= a^4 x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1)$

<u>Congettura</u>: $\boxed{x_n = a^n x_0 + \boxed{\frac{a^n - 1}{a - 1}}\, b}$ se $a \neq 1$

somma parziale della geom. di ragione a

Se invece $a = 1$ $\boxed{x_n = x_0 + nb}$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Bovina verifica per induzione

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Pongo $y_n = x_n - \ell$, dove ℓ è un numero da scegliere
Cosa risolve y_n?

$$y_{n+1} \underset{\text{def.}}{=} x_{n+1} - \ell \underset{\text{ric.}}{=} a x_n + b - \ell \underset{\text{def}}{=} a(y_n + \ell) + b - \ell = a y_n + a\ell + b - \ell$$

Scelgo ℓ in modo da annullare il termine noto

$$a\ell + b - \ell = 0 \; ; \quad \ell(a-1) = -b \, , \quad \ell = \frac{-b}{a-1}$$

Ottengo $y_{n+1} = a y_n \rightsquigarrow y_n = a^n y_0$. Concludo

$$x_n = y_n + \ell = a^n y_0 + \ell = a^n y_0 - \frac{b}{a-1}$$

$$= a^n (x_0 - \ell) - \frac{b}{a-1}$$

$$= a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}$$

$$= a^n x_0 + \frac{b}{a-1}(a^n - 1) \quad ☺.$$

$\boxed{\text{DIM 3}}$ Voglio risolvere $x_{n+1} = a x_n + b$

Siano y_n e z_n due successioni tali che
$$y_{n+1} = a y_n$$
$$z_{n+1} = a z_n + b$$

Allora la somma $x_n := y_n + z_n$ risolve la ricorrenza data. Viceversa, la differenza tra due sol. della ric. data risolve la ricorrenza omogenea associata. Quindi

$$\boxed{\text{sol. ric. data} = \text{sol. gen. ric. omog} + \text{sol. part. ric. data}}$$

Sol. gen. equ. omogenea $\quad c \cdot a^n$

Sol. speciale la cerco del tipo costante, cioè $x_n \equiv \ell$.
Sostituisco

$$x_{n+1} = a x_n + b$$
$$\ell = a\ell + b \rightsquigarrow \ell = \frac{b}{1-a}$$

Quindi

$$\text{sol. gen.} = c \cdot a^n + \frac{b}{1-a} = x_n$$

Per calcolare c impongo $x_0 = c \cdot a^0 + \frac{b}{1-a}$ e trovo

$c = x_0 - \frac{b}{1-a}$ da cui

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} = \text{solita formula.}$$

—o—o—

Ricorrenze lineari omogenee di ordine 2

$$\boxed{x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n}$$

a, b numeri dati
x_0, x_1 " "

Considero il polinomio associato $x^2 = ax + b$

$$x^2 - ax - b = 0$$

Supponiamo che abbia 2 radici λ, μ reali distinte.
Allora la formula esplicita è

$$\boxed{x_n = c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n}$$

dove c_1 e c_2 si determinano sulla base di x_0 e x_1

Se le radici sono complesse coniugate, la formula è la stessa, solo con le potenze dei numeri complessi.
Volendo non usare i complessi scrivo λ e μ come $\alpha \pm i\beta$, anzi come

$$\rho e^{\pm i\theta}$$

$$x_n = c_1 (\rho e^{i\theta})^n + c_2 (\rho e^{-i\theta})^n$$

$$= c_1 \rho^n e^{in\theta} + c_2 \rho^n e^{-in\theta} = c_1 \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + c_2 \rho^n (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))$$

e ottengo, cambiando c_1 e c_2,

$$\boxed{x_n = c_1 \rho^n \cos(n\theta) + c_2 \rho^n \sin(n\theta)}$$

Se l'eq. associata ha 2 radici reali λ coincidenti, allora

$$\boxed{x_n = c_1 \lambda^n + c_2 n \lambda^n}$$

Perché funzionano queste formule?

Oss. 1 $x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$. Cerco una soluz. del tipo
$x_n = R^n$

Sostituisco: $R^{n+2} = a R^{n+1} + b R^n$ semplifico

$$R^2 = aR + b$$

Quindi se R è sol. dell'eq. $x^2 - ax - b = 0$, allora R^n è una soluzione della ricorrenza.

Oss. 2 Se λ e μ sono reali distinti, allora λ^n e μ^n sono 2 soluzioni della ricorrenza. Poiché la ricorr. è lineare e omogenea, ogni loro comb. lin. è ancora soluzione

$$c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n$$

è soluzione

Oss. 3 Per dim. che non ce ne sono altre basta che mostro che posso soddisfare le cond. iniziali:

$$c_1 \lambda^0 + c_2 \mu^0 = x_0 \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$
$$c_1 \lambda^1 + c_2 \mu^1 = x_1$$

Det matrice dei coeff $= \mu - \lambda \neq 0 \rightsquigarrow$ sol. unica

$\boxed{\text{Oss. 4}}$ Nel caso in cui λ ha molt. 2 si verifica come sopra che λ^n è una sol.
Si verifica poi che

$\to$ $n\lambda^n$ è soluz. [$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$

$$(n+2)\lambda^{n+2} = a(n+1)\lambda^{n+1} + b n \cancel{\lambda^n}$$

$$n\lambda^2 + 2\lambda^2 = an\lambda + a\lambda + bn$$

$$n\underbrace{(\lambda^2 - a\lambda - b)}_{\substack{\shortparallel \\ \lambda \text{ è soluz.} \\ \shortparallel \\ 0}} + \lambda\underbrace{(2\lambda - a)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{(derivata)}}} = 0 \quad]$$

$\to$ posso trovare c_1 e c_2 per sistemare le cond. iniz.
(sistema lineare triangolare).

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 085

Note Title 10/03/2017

$$x_{n+2} = a\,x_{n+1} + b\,x_n \quad \rightsquigarrow \quad x^2 = ax+b$$

$$x_n = c_1\lambda^n + c_2\mu^n \qquad \text{se } \lambda \neq \mu$$
$$x_n = c_1\lambda^n + c_2\, n\,\lambda^n \qquad \text{se } \lambda \text{ ha molt. } 2$$

$\boxed{\text{INTERPRETAZIONE 1}}$ Invece di considerare x_n come incognita, considero la coppia (x_n, x_{n+1}) anzi considero il polinomio

$$p_n(x) = b\,x_n + x_{n+1}\,x \qquad \text{(pol. di 1° grado con coeff. } b x_n \text{ e } x_{n+1})$$

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= b\,x_{n+1} + x_{n+2}\,x \\ &= b\,x_{n+1} + a\,x_{n+1}\,x + b\,x_n\,x \\ &\equiv x\,p_n(x) \qquad (\text{mod } x^2-ax-b) \end{aligned}$$

Verifica
$$\begin{aligned} x\,p_n(x) &= b\,x_n\,x + x_{n+1}\,x^2 \qquad \downarrow\ x^2 \equiv ax+b \\ &\equiv b\,x_n\,x + x_{n+1}(ax+b) \\ &= b\,x_n\,x + a\,x_{n+1}\,x + b\,x_{n+1} \end{aligned}$$
che è quello di sopra

Quindi $p_{n+1}(x) = x\,p_n(x)$, da cui

$$\begin{aligned} p_n(x) &= x^n\,p_0(x) \qquad (\text{mod } x^2-ax-b) \\ &= x^n\,(b\,x_0 + x_1\,x) \end{aligned}$$

Come determino la classe di $p_n(x)$ mod x^2-ax+b ?

$$x^n\,(b\,x_0 + x_1\,x) = b\,\underset{\text{da trovare}}{x_{n+1}} + \underset{\text{da trovare}}{x_n}\,x + q_n(x)\,(x^2-ax-b) \qquad (*)$$

Sostituendo $x=\lambda$ e $x=\mu$ trovo x_{n+1} ed x_n

$$\lambda^n (b x_0 + x_1 \lambda) = b\, x_{n+1} + x_n \lambda$$
$$\mu^n (b x_0 + x_1 \mu) = b\, x_{n+1} + x_n \mu$$

$\rightsquigarrow$ risolvendo trovo x_{n+1} e x_n

Se λ ha molt. 2 sostituisco λ nella $(\star)$ e nella sua derivata

— o — o —

$\boxed{\text{INTERPRETAZIONE 2}}$ Considero come incognita il vettore

$V_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$. Allora

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, x_{n+1} + b\, x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A\, V_n$$

da cui

$$V_n = A^n V_0$$

Per calcolare A^n basta diagonalizzare
$$M^{-1} A M = D$$
$$M^{-1} A^n M = D^n$$
$$A^n = M D^n M^{-1}$$

Chi sono i tizi sulla diagonale? Gli autovalori di A

$$\begin{pmatrix} a-x & b \\ 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \text{Det}: (a-x)(-x) - b = 0$$
$$x^2 - ax - b = 0$$

Nel caso in cui le radici sono doppie o davvero complesse
$\rightsquigarrow$ forma canonica di Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

— o — o —

Conclusione L'algoritmo descritto per l'ordine 2 funziona per ricorrenze lineari di ogni ordine.

Esempio (Fibonacci) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $\quad x^2 - x - 1 = 0$

$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad\quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Soluz. generale

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Calcolo c_1 e c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 & c_2 = -c_1 \\ c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 & \rightsquigarrow c_1\sqrt{5} = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Quindi

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}$$

Oss. Anche se ci sono radici, queste poi si "devono" semplificare

Esercizio 2 $\quad x_{n+2} = 7x_{n+1} + 12x_n \quad\quad x_0 = 2016$

$x_1 = 7024$

Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Pol. caratteristico : $x^2 - 7x - 12 = 0 \quad\quad \frac{7 \pm \sqrt{49+48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{97}}{2}$

Sol. generale : $x_n = c_1 \left(\frac{7+\sqrt{97}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{7-\sqrt{97}}{2} \right)^n$

termine che comanda

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{7+\sqrt{97}}{2}$$

(raccolgo sopra e sotto la sua potenza)

Tutto questo funziona se verifico che $c_1 \neq 0$.
Se per assurdo avessi che $c_1 = 0$, allora

$x_n = c_2 \left(\frac{7-\sqrt{97}}{2}\right)^n$, ma allora $\frac{x_1}{x_0} = \frac{7-\sqrt{97}}{2}$ e questo non è vero.

— o — o —

<u>Cosa succede se la ricorrenza non è omogenea</u>

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 2n$$

Considero l'omogenea associata $\quad x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$(x-3)(x-4) = 0$$

$\boxed{c_1 3^n + c_2 4^n}$ sol. gen. omogenea

Cerco una soluzione speciale della non omogenea di tipo polinomio di 1° grado

$x_n = an + b$ con a e b incogniti

$$\underbrace{a(n+2)+b}_{x_{n+2}} = \underbrace{7[a(n+1)+b]}_{7x_{n+1}} \underbrace{-12(an+b)}_{-12x_n} \underbrace{+2n}_{+2n}$$

$$an + 2a + b = 7an + 7a + 7b - 12an - 12b + 2n$$

$6an - 5a + 6b = 2n \qquad 6a = 2 \rightsquigarrow a = \frac{1}{3}$

$$6b = 3a$$
$$b = \frac{6}{5}a = \frac{2}{5}$$

Sol. gen. : $\boxed{x_n = \frac{1}{3}n + \frac{2}{5} + a\,3^n + b\,4^n}$

Conoscendo le cond. iniziali posso trovare a e b.

$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 2^n \rightsquigarrow$ provo con $x_n = a\,2^n$

$$a\,2^{n+2} = 7a\,2^{n+1} - 12a\cdot 2^n + 2^n$$

$$4a = 14a - 12a + 1 \qquad 2a = 1 \qquad a = \frac{1}{2}$$

$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 3^n \rightsquigarrow$ provo con $x_n = a\,n\,3^n$

$$a(n+2)\,3^{\cancel{n}+2} = 7a(n+1)\,3^{\cancel{n}+1} - 12an\,\cancel{3^n} + \cancel{3^n}\,1$$

$$\cancel{9an} + 18a = \cancel{21an} + 21a - \cancel{12an} + 1 \rightsquigarrow a = -\frac{1}{3}$$

<u>Esercizio</u> $\quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad x_0 = 2017$

Domanda: esistono valori x_1 per cui la succ. è limitata?

Formula: $\quad x_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \underbrace{b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\downarrow\, 0 \text{ perché } \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1}$

La succ. è limitata $\iff a = 0$

Deve essere $\quad x_n = b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Imponendo $x_0 = 2017$ trovo $b = 2017$

Quindi l'unico valore x_1 per cui x_n risulta limitata è

$$x_1 = 2017\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

ANALISI 1 — LEZIONE 086

Note Title 14/03/2017

Sistemi di eq. differenziali

Dall'equazione ad un sistema

<u>Esempio</u> $\dddot{u} - 3\ddot{u} + t^2 \dot{u}^2 + \sin u = 0$

Pongo $v = \dot{u}$ $w = \ddot{u} = \dot{v}$

Allora l'equazione diventa il sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = w \\ \dot{w} = 3w - t^2 v^2 - \sin u \end{cases}$$

$\dddot{u} = 3\ddot{u} - t^2 \dot{u}^2 - \sin u$

Un'eq. di ordine 3 è diventa un sistema di 3 equ. di ordine 1 (tutto in forma normale)

Strumento di natura teorica: se so risolvere i sistemi di ordine 1, so risolvere le equ. di ordine qualunque.

<u>Dal sistema ad un'equazione</u>. In alcuni casi particolari è possibile trasformare un sistema in una equazione unica di ordine più alto.

<u>Esempio</u> $\begin{cases} \dot{u} = 3u + v \\ \dot{v} = 11u + 7v \end{cases}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriv.} \\ 1^a \\ \text{equ}}}{\ddot{u} = 3\dot{u} + \dot{v}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{presento} \\ \dot{v} \text{ dalla } 2^a \\ \text{equ.}}}{=} 3\dot{u} + 11u + 7v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dalla } 1^a \\ v = \dot{u} - 3u}}{=} 3\dot{u} + 11u + 7\dot{u} - 21u$$

$$= 10\dot{u} - 10u$$

Ho ottenuto $\ddot{u} - 10\dot{u} + 10u = 0$ e questa la posso risolvere

Esempio 2
$$\dot{u} = 3u + v$$
$$\dot{v} = 2u + 4v$$

$$\ddot{u} \underset{\substack{\uparrow \\ 1^a \text{ deriv.}}}{=} 3\dot{u} + \dot{v} \underset{\substack{\uparrow \\ 2^a}}{=} 3\dot{u} + 2u + 4v \underset{\substack{\uparrow \\ v = \dot{u} - 3u}}{=} 3\dot{u} + 2u + 4\dot{u} - 12u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conto}}}{=} 7\dot{u} - 10u$$

$$\ddot{u} - 7\dot{u} + 10u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) = 0$$

$$\boxed{u(t) = ae^{2t} + be^{5t}}$$

A questo punto dalla 1ª

$$v(t) = \dot{u}(t) - 3u(t) = 2ae^{2t} + 5be^{5t} - 3ae^{2t} - 3be^{5t}$$

$$\boxed{v(t) = -ae^{2t} + 2be^{5t}}$$

La soluzione del sistema dipende da 2 costanti arbitrarie a e b.
Il pbm. di Cauchy prevede di assegnare

$$u(t_0) = u_0 \qquad (\text{stesso } t_0 \text{ sopra e sotto})$$
$$v(t_0) = v_0$$

A quel punto trovo a e b.

— o — o —

Interpretazione di algebra lineare Posso pensare che l'incognita sia un vettore

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$ Allora posso scrivere il sistema nella forma

$$U'(t) = A\,U(t) \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora i numeri 2 e 5 sono gli autovalori della matrice (infatti somma = Tr A = 7, prod = Det = 10)

La soluzione si può scrivere come

autov.

$$U(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t}+be^{5t} \\ -ae^{2t}+2be^{5t} \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\text{autovett. di } 2} e^{2t} + b\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\text{autovett. di } 5} e^{5t}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

<u>Delirio futuro</u> Se l'equazione è $\dot{u} = at \rightsquigarrow u(t) = ce^{at}$

Se il sistema è $\dot{U} = AU$ la sol. è $U(t) = \underset{\text{vettore}}{C}\, e^{\overset{\text{matrice}}{At}}$

Come si definisce e^M con M matrice quadrata?

Taylor $\quad e^M = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$

Come si calcola: diagonalizzo – faccio l'esponenziale degli el. sulla diagonale – torno indietro.

Un sistema in forma diagonale diventa
$$\dot{u} = \lambda_1 u$$
$$\dot{v} = \lambda_2 v$$

Questo sistema è "disaccoppiato", cioè sono equazioni molip.

<u>Interpretazione fisica</u>

Ci sono "modi furbi" di mettere le variabili in cui il sistema diventa "più semplice", ad esempio diagonale.

Sistemi di succ. per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$$ a_0 e b_0 dati in partenza

Voglio la formula esplicita. Idea: 2 ricorrenze di ordine 1
$\rightsquigarrow$ 1 ricorrenza di ordine 2

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} + 2a_n + 4b_n$$

1ª equ. con indici aumentati di 1 — b_{n+1} dalla 2ª — b_n dalla 1ª

$$= 3a_{n+1} + 2a_n + 4a_{n+1} - 12a_n$$

$\rightsquigarrow$ $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$ $\rightsquigarrow$ si chiude.

<u>Esempio 2</u> $\quad a_{n+1} = 3a_n + b_n + n^2$
$\qquad\qquad b_{n+1} = a_n + 3b_n + 3^n$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} + (n+1)^2 = 3a_{n+1} + a_n + 3b_n + 3^n + (n+1)^2$$

$$= 3a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} - 9a_n - 3n^2 + 3^n + (n+1)^2$$

$$= 6a_{n+1} - 8a_n + 3^n - 2n^2 + 2n + 1$$

$\rightsquigarrow$ $x^2 = 6x - 8$ $\rightsquigarrow$ $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$

La sol. gen. parte omogenea è $c_1 2^n + c_2 4^n$.

Ora cerco una sol. speciale del tipo $a_n = a3^n + b + cn + dn^2$
e trovo a, b, c, d.
Una volta trovato a_n ottengo b_n dalla 1ª equ.

Esempio 3 Quando le equ. sono 3

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n - c_n$$
$$b_{n+1} = -a_n + 7c_n$$
$$c_{n+1} = a_n + b_n - 3c_n$$

Voglio ottenere una ric. di ordine 3 per a_n

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 2b_{n+2} - c_{n+2} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 14c_{n+1} - a_{n+1} - b_{n+1} + 3c_{n+1}$$

shift di 2 sulla 1ª

shift di 1 su 2ª e 3ª

$$= a_{n+2} - 3a_{n+1} - b_{n+1} + 17c_{n+1}$$
$$= a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n - 7c_n + 17(a_n + b_n - 3c_n)$$

Ad un certo punto bisogna eliminare completamente una variabile.
Nella 1ª e nella 2ª posso eliminare c_n e cercare di ottenere un sistema nelle altre 2 variabili.

Soluzione (dopo video)

$$\boxed{\begin{aligned} b_{n+1} &= -a_n + 7c_n \\ c_{n+1} &= a_n + b_n - 3c_n \end{aligned}}$$

⇝ da queste ricavo c_n in funzione di $a_n, a_{n+1}, b_n, b_{n+1}$

⇝ poi sostituisco nelle prime 2 che diventano 2 equazioni per 2 successioni.

Alternativa standard: triangolarizzo la matrice ☺

ANALISI 1 – LEZIONE 087

Note Title 14/03/2017

SUCC. PER RICORRENZA NON LINEARI

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ (si può fare la formula esplicita, ma non vogliamo usarla)

Voglio calcolare il limite della succ. Serve un piano.

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ La succ. x_n è decrescente (deb.) per il p.to (ii) e limitata dal basso per il p.to (i).
Quindi (iii) segue dal teo. succ. monotone

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Scrivo la ricorrenza e passo al limite

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & & \ell^3 \end{array}$$

sottosucc. o meglio stessa succ. con indici shiftati di 1 $\rightsquigarrow$ (a sinistra)

da p.to (iii) + continuità di x^3 (a destra)

Quindi $\ell = \ell^3 \rightsquigarrow \ell^3 - \ell = 0$, $\ell(\ell^2 - 1) = 0$

quindi

$\ell = 0$ $\ell = 1$ $\ell = -1$

$\ell = 1$ e $\ell = -1$: incompatibili con la (i)

Quindi necessariamente $\ell = 0$.

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Il fatto che $x_n \geq 0$ è una banale induzione.
Il fatto che $x_n \leq \frac{1}{2}$ pure

[P.B. $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ☺ : Passo induttivo : ipotesi $x_n \leq \frac{1}{2}$
Tesi $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$$x_{n+1} = x_n^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2} \quad]$$

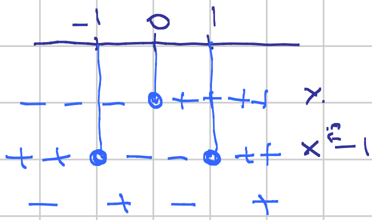
ho usato che
x^3 è deb. cresc.
quindi $x_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_n^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\boxed{\text{Primo metodo: ricorrenza + disequazione}}$

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $x_n^3 \leq x_n$, cioè

$$x_n^3 - x_n \leq 0 \qquad x_n(x_n^2 - 1) \leq 0$$

La soluz. della diseq. $x(x^2-1) \leq 0$ è $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$
quindi mi serve



$$x_n \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

per il p.to (i)
x_n sta qui

$\boxed{\text{Secondo metodo: induzione + applico } f}$

Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vado per induz.

$\boxed{n=0}$ $x_1 \overset{?}{\leq} x_0$ sì perché $x_1 = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2} = x_0$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$. Applico $f(x) = x^3$.
Poiché $f(x)$ è deb. crescente ottengo

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$$
$$\underset{\parallel}{x_{n+1}^3} \leq \underset{\parallel}{x_n^3}$$
$x_{n+2} \leq x_{n+1}$, cioè la tesi del passo induttivo.

—o—o—

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Banale induzione (ma sto già usando la monotonia di $f(x) = x^3$)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Ricorrenza + diseq. : $x_{n+1} \geq x_n \iff x_n^3 \geq x_n$
$x_n \in [-1,0] \cup [1,+\infty)$
↑ per la (i) sta qui

Induzione + applico f Per induzione $x_1 \geq x_0$ si $(8 \geq 2)$

P.I. Ipotesi $x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow x_{n+1}^3 \geq x_n^3$, cioè $x_{n+2} \geq x_{n+1}$
↑ DIRE PERCHÉ POSSO

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Segue da (ii) + teo. succ. monotone (la stima dal basso non serve a nulla)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Per assurdo sia $\ell \in \mathbb{R}$. Ragionando come prima ottengo $\ell = \ell^3$, cioè $\ell \in \{0, 1, -1\}$, ma sono tutte incompatibili con (i). Quindi resta solo $\ell = +\infty$.

Esempio 3 $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6} \\ x_0 = 2017 \end{cases}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = 3$

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

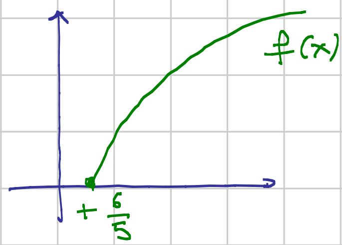
$$\ell = \sqrt{5\ell - 6} \quad \leadsto \quad \ell^2 = 5\ell - 6, \quad \ell^2 - 5\ell + 6 = 0$$

$$\underbrace{\ell = 2}_{\text{incomp. con (i)}} \text{ e } \ell = 3$$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Apro una parentesi: come è fatta $f(x) = \sqrt{5x-6}$

È monotona crescente.

Quindi (i) lo faccio per induzione



$\boxed{n=0}$ $x_0 \geq 3$ ovvio $2017 \geq 3$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $x_n \geq 3$

applico $f(x)$ e ottengo grazie alla monotonia

$x_{n+1} = f(x_n) \geq f(3) = 3$, cioè la tesi del passo induttivo

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Lo faccio per induzione + applico $f(x)$

$\boxed{n=0}$ $x_1 \leq x_0$, cioè $\sqrt{5 \cdot 2017 - 6} \leq 2017$ ... abbondante

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Applico $f(x)$ (posso ...)

e ottengo $\quad \underset{\underset{x_{n+2}}{\shortparallel}}{f(x_{n+1})} \le \underset{\underset{x_{n+1}}{\shortparallel}}{f(x_n)}$

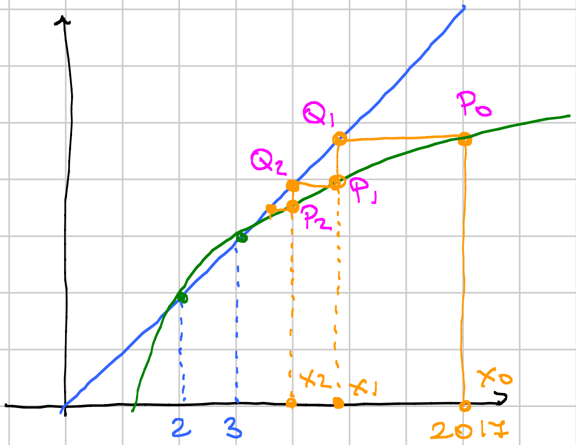
cioè la tesi del passo induttivo.

Esercizio Provare a fare il p.to (ii) con ricorrenza + diseq. (si tratta di risolvere $x_{n+1} \le x_n$, cioè

$$\sqrt{5x+6} \le x \quad).$$

— o — o —

Come ideare un piano... ① Disegno $f(x)$ e disegno la bisettrice $y = x$



Risolvo $f(x) = x$ per avere le intersezioni (tanto serve in fase (iv)) e risolvo $f(x) \le x$ (che volendo è utile in fase 2).

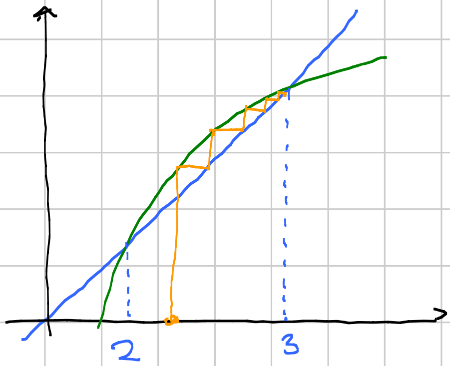
② Segno x_0 sull'asse x

③ Seguo lo slogan "verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice"

④ Le x che ottengo strada facendo sono $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$

Basta osservare che $P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$
$Q_1 = (x_1, x_1)$
$P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$
$Q_2 = (x_2, x_2)$ e così via.

Esempio 4 $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6} \\ x_0 = \sqrt{5} \end{cases}$



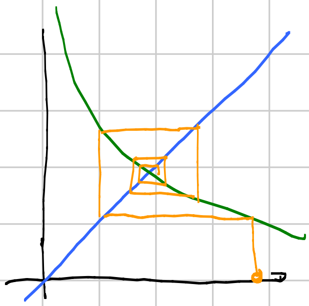
$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $\sqrt{5} \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n$ "

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

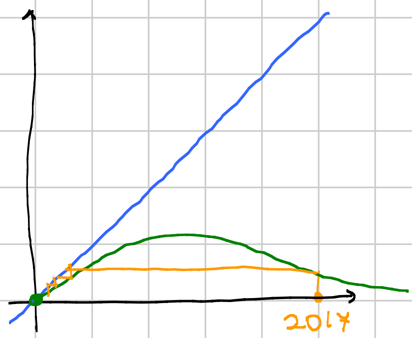
(iv) $\ell = 3$

— o —



ANALISI 1 - LEZIONE 088

Note Title 15/03/2017



Esempio 1 $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n^2+2} \qquad x_0 = 2017$

$$f(x) = \frac{x}{2+x^2}$$

Come è messa $f(x)$ risp. a x

$f(x) = x \qquad f(x) > x$

$$\frac{x}{2+x^2} > x \iff \frac{x}{2+x^2} - x > 0$$

$$\iff \frac{x(1-2-x^2)}{2+x^2} = -\frac{x(x^2+1)}{x^2+2} > 0 \iff x < 0$$

Vale il segno di uguale $\iff x = 0$. Riassumendo

$$f(x) = x \iff x = 0 \quad ; \quad f(x) > x \iff x < 0$$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (Piano con la monotonia)

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim. (i)}}$ Facile induzione

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Ricorrenza + disequazione. Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $f(x_n) \leq x_n$. Risolvendo $f(x) \leq x$ trovo $x \geq 0$, quindi $x_n \geq 0$, che è vera per il p.to (i)

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Per la (ii) x_n è deb. decr.
Per la (i) x_n è lim. inf.
Teo. succ. monotone $\Rightarrow$ $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Sapendo che ℓ è reale, passo al limite nella ricorr.

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \dfrac{x_n}{2+x_n^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \dfrac{\ell}{2+\ell^2} \end{array}$$

succ. shiftata $\rightarrow$ (primo limite) — $\leftarrow$ $f(x)$ è continua ovunque (secondo limite)

Trovo l'eq. $\ell = f(\ell)$ che sappiamo avere come unica sol. reale $\ell = 0$.

<u>Domanda</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge? ($x_n \to 0$ è cond. nec.)

Voglio usare il criterio del rapporto.
Prima cosa: osservo che $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (facile induz.)
A quel punto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{x_n}{2+x_n^2}}{x_n} = \frac{1}{2+x_n^2} \to \frac{1}{2}$$ $\Rightarrow$ la serie converge

(Brutalmente è come se fosse $x_n \sim \frac{1}{2^n}$)

Altra domanda: per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\alpha^n x_n}_{b_n}$$

Faccio il rapporto su b_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\alpha^{n+1} x_{n+1}}{\alpha^n x_n} = \frac{\alpha}{2+x_n^2} \to \frac{\alpha}{2}$$

per $\alpha = 2$ è più diff.
per $\alpha > 2$ div. a $+\infty$
per $\alpha < 2$ conv.

$\boxed{\text{PIANO ALTERNATIVO}}$ (Piano con la distanza)

Voglio dim. che $x_n \to 0$. Pongo d_n = distanza tra x_n ed il presunto limite

$$d_n = |x_n - 0| = |x_n|$$

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \dfrac{d_0}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ $\underset{\text{val. assol.}}{0 \leq} d_n \underset{\text{(iii)}}{\leq} \dfrac{d_0}{2^n}$ + carabinieri

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Segue per induzione dal punto (ii)
(per fare funzionare il seguito serve che al punto (ii) ci sia $d_{n+1} \leq c\, d_n$ con $c < 1$)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Voglio che $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 0| = |f(x_n) - f(0)| \leq L\,|x_n - 0| = L\, d_n$$

L: costante di Lip. di $f(x)$

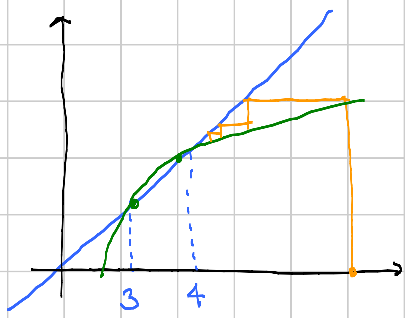
Ora $L = \sup\{|f'(x)| : x \geq 0\}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2 + x^2 - 2x^2}{(2+x^2)^2}$

$$= \sup\left\{\frac{|2 - x^2|}{(2+x^2)^2} : x \geq 0\right\} = \frac{1}{2}$$

bisognerebbe fare lo studio di funzioni

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{7x_n - 12} \\ x_0 = 2017 \end{cases}$



$f(x) = \sqrt{7x-12}$ $\qquad f(x) = x$

$x = \sqrt{7x-12}, \quad x^2 = 7x - 12, \quad x = \begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ \searrow 4 \end{smallmatrix}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ Con la distanza

$f'(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7x-12}}$ quindi per $x \geq 4$ ho che $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{7}{8}$

quindi $f(x)$ è Lip. in $[4, +\infty)$ con costante $\dfrac{7}{8}$

Pongo $d_n := |x_n - 4|$

(i) $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione come les. prec.)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{7}{8} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ((ii) + induzione)

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 4$ ((iii) + carabinieri)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 4| = |f(x_n) - f(4)| \leq \frac{7}{8} |x_n - 4| = \frac{7}{8} d_n$$

$f(x)$ è Lip. con cost. $\frac{7}{8}$ in $[4, +\infty)$

<u>Domanda</u>: come si comporta $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n^{2017}(x_n - 4)}_{a_n}$?

Osservo (cioè dimostro ☺) che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

A quel punto provo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2017}}{n^{2017}} \frac{(x_{n+1}-4)}{(x_n-4)} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2017}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\frac{f(x_n)-4}{x_n-4}}_{\downarrow \atop \frac{7}{8}} \to \frac{7}{8}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-4}{x_n-4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{7x_n-12}-4}{x_n-4} \cdot \frac{\sqrt{\ldots}+4}{\sqrt{\ldots}+4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{7x_n-12-16}{(x_n-4)(\sqrt{\ldots}+4)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7\,\cancel{(x_n-4)}}{\cancel{(x_n-4)}(\sqrt{\ldots}+4)} = \frac{7}{8}$$

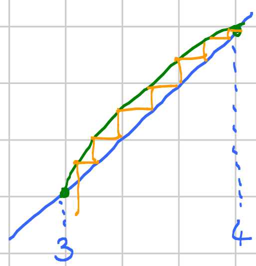
In alternativa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-4}{x_n-4} \underset{x=x_n}{\uparrow}{=} \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-4}{x-4} \underset{\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Höp}}{\uparrow}{=} \lim_{x\to 4} \frac{f'(x)}{1} = f'(4) = \frac{7}{8}$$

Poiché rapporto $\to \frac{7}{8}$, la serie converge.

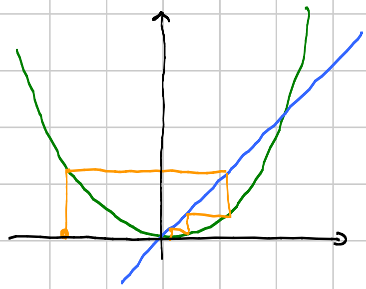
— o — o —

<u>Oss. 1</u> Se avessi avuto dato iniziale $x_0 = 3{,}0001$, allora $x_n \to 4$ crescendo



- Il piano con la monotonia era ok
- Il piano con la distanza NON può funzionare bene, perché serviva la costante di Lip in $[3{,}0001, 4]$, ma questa è di sicuro > 1. (infatti $f'(3) > 1$)

<u>Oss. 2</u> Se ho
$$x_{n+1} = x_n^2$$
$$x_0 = -\frac{1}{2}$$
conviene fare un piano con monotonia decrescente, ma a partire da $n = 1$.



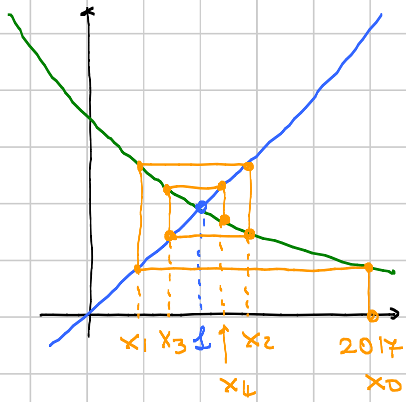
— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 089

Note Title 15/03/2017

SUCCESSIONI PER RICORRENZA SPIRALEGGIANTI

Esempio 1 $\quad x_{n+1} = \dfrac{7}{2x_n + 5} \qquad x_0 = 2017$



Due tipi di piano possibili:

→ piano con la distanza
→ piano con le due sottosucc.

Brutta notizia: x_n non è monotona

$\boxed{\text{PIANO}}$ con la distanza $\qquad$ Pongo $d_n := |x_n - 1|$

presunto limite

(i) $\quad x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ (facile induzione)

(ii) $\quad d_{n+1} \leq \frac{14}{25} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\quad d_n \leq \left(\frac{14}{25}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ (induzione a partire da (ii))

(iv) $\quad d_n \to 0$, cioè $x_n \to 1$ $\qquad$ (carabinieri a partire da (iii))

$$f(x) = \frac{7}{2x+5} \qquad f'(x) = -\frac{7 \cdot 2}{(2x+5)^2}$$

quindi $\quad \sup \{ |f'(x)| : x \geq 0 \} = \sup \left\{ \frac{14}{(2x+5)^2} : x \geq 0 \right\} = \frac{14}{25}$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Solita Lip.

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| \leq \frac{14}{25} |x_n - 1| = \frac{14}{25} d_n$$

Lip. (forse si poteva fare anche sostituendo $f(x_n) = \frac{7}{2x_n+5}$)

<u>Domanda</u> Per quali $\alpha > 0$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{\alpha^n}{n^2}(x_n - 1)} \quad a_n$$

Non posso usare il criterio del rapporto perché $x_n - 1$ ha segno variabile. Provo assoluta convergenza e faccio il rapporto su $|a_n|$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{|x_{n+1} - 1|}{|x_n - 1|} \frac{n^2}{\alpha^n} = \underbrace{\boxed{\frac{n^2}{(n+1)^2}}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\alpha}_{\downarrow \, \alpha} \underbrace{\left| \frac{f(x_n) - 1}{x_n - 1} \right|}_{\downarrow \, f'(1) = \frac{2}{7}}$$

Quindi

- se $\alpha < \frac{7}{2}$ ⇝ lim. rapp. < 1 ⇝ $\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.
- se $\alpha > \frac{7}{2}$ ⇝ lim. rapp > 1 $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{rapp. per succ.}}}{⇝}$ $|a_n| \to +\infty$ $\Rightarrow$ no cond. nec. $\Rightarrow \sum a_n$ non converge
- se $\alpha = \frac{7}{2}$ è tutto più delicato ☹.

— o — o —

$\boxed{\text{PIANO}}$ (con le 2 sottosuccessioni)

L'idea è che

- a_{2n} è decrescente
- a_{2n+1} è crescente

(i) $a_{2n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq a_{2n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{2n+2} \leq a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ sui pari $\downarrow$

$a_{2n+3} \geq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ sui dispari $\uparrow$

(iii) $a_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

$a_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$

(iv) $m = \ell = 1$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Segue da (i) + (ii) + teo. succ. monotone
(ma m ed l potrebbero essere diversi)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Bisogna scrivere l'iterazione sui pari e sui dispari

$$x_{2m+1} = \frac{7}{2x_{2m}+5} \qquad x_{2m+2} = \frac{7}{2x_{2m+1}+5}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$m = \frac{7}{2l+5} \qquad l = \frac{7}{2m+5}$$

Ho ottenuto un sistema che posso risolvere

$$\begin{cases} 2ml + 5m = 7 \\ 2ml + 5l = 7 \end{cases}$$

Sottraggo: $m = l$ e quindi $2l^2 + 5l = 7$
da cui $2l^2 + 5l - 7 = 0$

$\leadsto l = \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow -\frac{7}{2} \leftarrow \end{cases}$ incompatibile con 1

Quindi $a_{2m} \to l$, $a_{2m+1} \to l$, ed essendo lo stesso $a_n \to l$
(convincersene e magari dimostrarlo)

$\boxed{\text{Dim (i) e (ii)}}$ Volendo si possono fare per induzione

Brutal mode: $x_0 = 2017$, $x_1 = \dfrac{7}{4034+5} = \dfrac{7}{4039} = 0,$ poco

$$x_2 = \frac{7}{2x_1+5} = \frac{7}{5+\text{poco}} = 1 + \text{poco}$$

Quindi $0 \leq x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq x_0$

Applico $f(x)$, e inverto le disug. perché f è monot. decr.

$$f(0) \geq f(x_1) \geq f(1) \geq f(x_2) \geq f(x_0)$$

$$\underbrace{\frac{7}{5} \geq x_2}_{\text{ignoro}} \geq 1 \geq x_3 \geq x_1 \geq 0$$

Riapplico $f(x)$ e inverto nuovamente

$$f(x_2) \leq f(1) \leq f(x_3) \leq f(x_1)$$
$$x_3 \leq 1 \leq x_4 \leq x_2$$

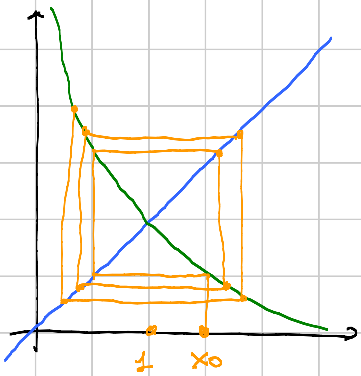
Morale: ogni volta che applico $f(x)$ ottengo una delle relazioni che mi servono!

Volendo essere rigorosi: metto (i) e (ii) insieme nella catena

$$\boxed{0 \leq x_{2n+1} \leq x_{2n+3} \leq 1 \leq x_{2n+2} \leq x_{2n}}$$

Questa si dimostra facilmente per induzione semplicemente applicando $f(x)$ due volte (gli indici salgono di 2, e le disug. tornano nello stesso verso).

— o — o —



Esempio 2 $\quad x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^2} \qquad x_0 = \dfrac{2017}{2016}$

Tira aria di spiraleggiamento USCENTE.

Cosa dimostro? Che $x_{2n} \to +\infty$ e

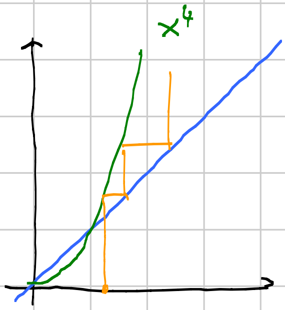
$x_{2n+1} \to 0$

da cui x_n non ha limite.

Posso scrivere la doppia iterazione.

Pongo $y_n := x_{2n}$

$$y_{n+1} = x_{2n+2} = \frac{1}{x_{2n+1}^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_{2n}^2}\right)^2} = (x_{2n})^4 = y_n^4$$

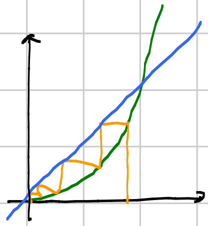


Ma allora y_n risolve $\quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n^4 \\ y_0 = \dfrac{2017}{2016} \end{cases}$

e questa si fa con la monotonia

Analogamente pongo $z_n := x_{2n+1}$ e vedo che

$$z_{n+1} = z_n^4 \quad \text{con partenza} \quad z_0 = x_1 < 1$$



da cui $z_n \to 0$ con piano monotonia

<u>Oss</u>. Tutte le volte che ho $x_{n+1} = f(x_n)$ con f decresc. posso considerare y_n e z_n come sopra e vedere che risolvono

$$y_{n+1} = f(f(y_n)) \qquad\qquad z_{n+1} = f(f(z_n))$$

e $f(f(x))$ è monotona crescente, quindi si ricade nei casi precedenti (provare con l'esempio 1).

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 090

Note Title 17/03/2017

$\boxed{\text{SUCCESSIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME}}$

Esempio 1 $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+3} \qquad x_0 = 2017$

Si potrebbe avere una formula esplicita, ma non la usiamo

$\boxed{\text{PIANO}}$ (Con la monotonia)

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione]

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ [(i) + (ii) + teo. succ. monot.]

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Ricorrenza + disequazione

$$x_{n+1} \overset{?}{\leq} x_n \iff \frac{x_n}{n+3} \overset{?}{\leq} x_n \iff x_n \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \overset{?}{\geq} 0$$

$$\iff \underbrace{\frac{n+2}{n+3}}_{>0} \underbrace{x_n}_{\geq 0 \text{ p.to (i)}} \overset{?}{\geq} 0$$

vera l'ultima, quindi vere tutte

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$

$$x_{n+1} = \frac{\boxed{x_n} \to \ell \in \mathbb{R}}{\boxed{n+3} \to +\infty}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\ell \quad = \quad 0$$

[Nemmeno pensare che $\dfrac{x_n}{n+3} \to \dfrac{\ell}{n+3}$ perché limite metà per volta]

Quindi $x_{n+1} \to 0$ e di conseguenza $x_n \to 0$ (stessa succ. solo con indici shiftati).

$\boxed{\text{PIANO 2}}$ (i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione]

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Uso criterio del rapporto (posso per (i))

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{x_n}}{n+3} \cdot \frac{1}{\cancel{x_n}} = \frac{1}{n+3} \to 0 < 1 \Rightarrow x_n \to 0.$$

$\boxed{\text{PIANO 3}}$ (limitatezza + carabinieri)

(i) $0 \leq x_n \leq 2017 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ facile induzione

$x_n \leq 2017$ pure...

... $n \Rightarrow n+1$ ... ipotesi $x_n \leq 2017 \Rightarrow x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+3} \leq \dfrac{2017}{n+3} \leq 2017$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Uso i carabinieri. Prendo il p.to (i) e divido per $n+3$ (posso perché...)

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{x_n}{n+3}}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{2017}{n+3}}}$$

Ho dim. che $x_{n+1} \to 0$, quindi anche $x_n \to 0$.

— o — o —

Esempio 2 $\qquad x_{n+1} = \dfrac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \qquad x_0 = 2017$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (limitatezza + Carabinieri)

(i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ facile induzione

$x_n \leq 10.000$

Passo base ovvio

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $x_n \leq 10.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 10.000$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \underset{\text{Hp}}{\leq} \frac{10.000 + 10}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{11.000}{\sqrt{2}} \leq 10.000$$

da cui la tesi

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Grazie al p.to (i) so che

$$\underset{\downarrow 0}{\boxed{0}} \leq \underset{\downarrow 0}{x_{n+1}} = \frac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \leq \underset{\downarrow 0}{\boxed{\frac{10.010}{\sqrt{n+2}}}}$$

Quindi $x_{n+1} \to 0$, ma allora anche $x_n \to 0$.

Oss. Se fosse stato $x_0 = \frac{1}{10}$ conveniva comunque usare al p.to (i) una limitazione "abbondante"

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \arctan x_n}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{\frac{1}{10} + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{\frac{1}{10} + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}} \underset{\text{FALSA}}{\leq} \frac{1}{10}$$

se avessi come Hp induttiva che $x_n \leq \frac{1}{10}$

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = 5 + \dfrac{n^{20}}{2^n}(x_n + \arctan x_n) \qquad x_1 = 2017$

Idea: all'inizio cresce molto, ma da un certo p.to in poi il 2^n al denominatore comanda.

Scelgo un intero n_0 tale che $\dfrac{n^{20}}{2^n} \leq \dfrac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione] (o $x_n \geq 5$)

(ii) $x_n \leq x_{n_0} + 100 \quad \forall n \geq n_0$

(iii) $x_n \to 5$

Dim (iii) Grazie al p.to (ii) sappiamo che

$$\underbrace{\boxed{5}}_{\downarrow\, 5} \leq \underbrace{x_{n+1}}_{\downarrow\, 5} \leq \underbrace{5 + \underbrace{\boxed{\frac{n^{20}}{2^n}\left(x_{n_0} + 100 + \frac{\pi}{2}\right)}}_{\downarrow\, 0}}_{\downarrow\, 5} \qquad \forall n \geq n_0$$

Ho dim. che $x_{n+1} \to 5$, quindi anche $x_n \to 5$.

Dim (ii) Per induzione

Passo base $\boxed{n = n_0}$ $\quad x_{n_0} \leq x_{n_0} + 100$ ☺

Passo ind $\quad$ Ipotesi : $x_n \leq x_{n_0} + 100$ $\quad$ Tesi : $x_{n+1} \leq x_{n_0} + 100$

$$x_{n+1} = 5 + \frac{n^{20}}{2^n}\left(x_n + \arctan x_n\right)$$

$$\underset{\text{uso Hp}}{\leq} 5 + \underbrace{\boxed{\frac{n^{20}}{2^n}}}_{\leq \frac{1}{2} \text{ per } n \geq n_0}\left(x_{n_0} + 100 + 10\right) \leq 5 + \frac{1}{2}\left(x_{n_0} + 110\right) \overset{?}{\leq} x_{n_0} + 100$$

L'ultima dis. è come dire $\quad 5 + \frac{1}{2}x_{n_0} + 55 \leq x_{n_0} + 100$

$$-40 \leq \frac{1}{2}x_{n_0}$$

e questa è vera per il p.to (i).

Oss. Se invece di 100 avessi messo 2 o addirittura nulla, avrei avuto pbm. nel passaggio induttivo

— o — o —

Esempio 4 $\quad x_{n+1} = \sqrt[n]{1.000 + x_n} \qquad x_1 = 2017$

$x_2 = \sqrt[1]{1.000 + x_1} = 3017 \qquad x_3 = \sqrt[2]{1000 + x_2} = \sqrt{4017} = 60 + \text{q.c.}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ (oppure $x_n \geq 1$)

[Facile induzione]

(ii) $x_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 1$

(iii) $x_n \to 1$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Dal punto (i) e (ii) sappiamo che

$$\underbrace{\sqrt[n]{1.000}}_{\downarrow \atop 1} \leq \underset{\downarrow ? \atop 1}{x_{n+1}} = \sqrt[n]{1.000 + x_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{11.000}}_{\downarrow \atop 1}$$

Solita conclusione.

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Induzione ... faccio a mano i passi base $n=1$ e $n=2$.

... $\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $x_n \leq 10.000$

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{1.000 + x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Uso Hp +} \\ \text{monotonia di } \sqrt[n]{\ }}}{\leq} \sqrt[n]{11.000} \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq 2}}{\leq} \sqrt{11.000} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Facile}}}{\leq} 10.000$$

Oss. → Provare a fare lo stesso con il piano con la monotonia e vedere che succede.
Quando si imposta la disug. ci sono problemi.

Esercizio Dimostrare davvero che è definitivamente monotona (idea: usare l'induzione).

—o—o—

ANALISI 1 — LEZIONE 091

Note Title 17/03/2017

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = n x_n^2 \\ x_1 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 32, \ldots \qquad x_n \to +\infty$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione]

(ii) $x_n \to +\infty$ [$x_{n+1} \geq 4n$ + confronto]

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = n x_n^2 \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = 2 \cdot x_2^2 = \frac{1}{8}, \quad x_4 = 3 \cdot x_3^2 = \frac{3}{64}, \ldots$

Osservo che disug. del tipo $x_n \leq \frac{1}{2}$ non si dim. bene per induzione (c'è un problema nel passo induttivo).

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

(ii) $x_n \to 0$ [Ovvio da (i)]

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ è facile. Facciamo $x_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

P. base $n = 1$ è ovvio

$n \Rightarrow n+1$: Ipotesi: $x_n \leq \frac{1}{2^n}$ Tesi: $x_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$$x_{n+1} = n x_n^2 \leq n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Uso Hp e anche che $x_n \geq 0$

spero

Controllo la speranza $n \overset{?}{\leq} 2^{n-1}$ e questa a sua volta è una facile ind. o Bernoulli $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n$

Oss. Sembra che x_n sia monotona decrescente, ma dimostrarlo è una pena

$x_{n+1} \overset{?}{\leq} x_n$; $n x_n^2 \overset{?}{\leq} x_n \iff x_n \leq \frac{1}{n}$ ...

... vorrei un p.to (i) che dica che $x_n \leq \frac{1}{n}$

vado per induzione... passo induttivo ... ipotesi $x_n \leq \frac{1}{n}$
allora

$$x_{n+1} = n x_n^2 \leq n \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \text{ e non } \frac{1}{n+1}$$

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} x_{n+1} = \arctan(n x_n) \\ x_1 = 2017 \end{cases}$

Idea: x_n è definitivamente crescente e $x_n \to \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ $\forall n \geq 2$ [Facile induzione]

(ii) x_n è definitivamente crescente

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ [(i) + (ii) + teo. succ. monot.]

(iv) $\ell = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Dai p.ti (i) e (iii) sappiamo che $\ell > 0$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \arctan(\boxed{\underset{\to +\infty}{n x_n}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ Ci sono due casi che si escludono a vicenda

① $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n \geq 1$

② $\exists n_0 \geq 1$ tale che $x_{n_0+1} > x_{n_0}$

Dico che nel caso ② si avrà che $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \geq n_0$

Questo si fa per induzione

→ passo base è la definizione di n_0

→ passo induttivo ... ipotesi: $x_{n+1} > x_n$, ma allora

$$x_{n+2} \underset{\text{ricorr}}{=} \arctan((n+1)x_{n+1}) \underset{\substack{\text{ipotesi +}\\ \text{monot. di}\\ \text{arctan}}}{>} \arctan((n+1)x_n) \underset{n+1>n}{>} \arctan(nx_n) = x_{n+1}$$

quindi $x_{n+2} > x_{n+1}$, che è la tesi del passo induttivo.

Devo solo dimostrare, per concludere, che il caso ① porta ad un assurdo.

Se fosse sempre decrescente, tenderebbe ad un certo $\ell \in [0, \frac{\pi}{2})$

Se $\ell \neq 0$ abbiamo facilmente un assurdo come da pto (iv).

L'unico probl. è se $\ell = 0$.

[Idea: se $x_n \to 0$, allora $x_{n+1} \to 0$, allora $nx_n \to 0$, allora

$$\arctan(nx_n) \sim nx_n$$

allora $x_{n+1} \sim n x_n$

e questo è incompatibile con l'andare a 0]

Sistemazione rigorosa: osservo con studio di funzione che

$$\arctan(x) \geq \frac{1}{2}x \qquad \forall x \in [0,1]$$

Se $nx_n \to 0$, allora definitiv. $nx_n \leq 1$, ma allora

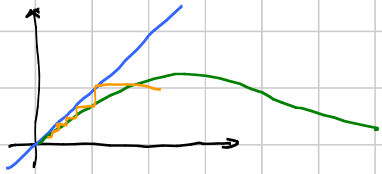
$$x_{n+1} = \arctan(nx_n) \geq \frac{nx_n}{2} > x_n \quad \text{abbastanza presto}$$

il che contraddice la monotonia decrescente.

— o — o —

Esempio 4 (Ritorno al passato)

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n^2} \qquad x_0 = 2017$$



Ci eravamo chiesti come si comporta $\sum \alpha^n x_n$ al variare di α. Trovato

→ $\alpha > 2$ ⇝ diverge
→ $\alpha < 2$ ⇝ converge

} criterio del rapporto

Che succede per $\alpha = 2$? Se dimostro che

$$0 < c_1 \leq 2^n x_n \leq c_2$$

con c_1 e c_2 positive, allora di sicuro $\sum 2^n x_n$ non converge (basta in realtà quella di sx)

Pongo $y_n = 2^n x_n$. Cosa risolve y_n?

$$y_{n+1} = 2^{n+1} x_{n+1} = 2^{n+1} \frac{x_n}{2+x_n^2} = 2 \frac{\overbrace{\boxed{2^n x_n}}^{y_n}}{2+\underbrace{x_n^2}_{(y_n 2^{-n})^2}}$$

$$= 2 \frac{y_n}{2+y_n^2 4^{-n}}$$

Semplificando, ottengo

$$\boxed{y_{n+1} = \frac{y_n}{1+y_n^2 \cdot \frac{4^{-n}}{2}}}$$

Voglio dim. che $0 < c_1 \leq y_n \leq c_2$

Facile: $y_{n+1} \leq y_n$ quindi per indus. $y_n \leq y_0$

Difficile: disug. opposta. Parto osservando che

$$y_{n+1} \geq \frac{y_n}{1+4^{-n} y_0^2}$$

che posso scrivere nella forma

$$y_{n+1} \geq y_n \cdot \left(\frac{1}{1 + y_0^2 \cdot 4^{-n}} \right) \qquad y_{n+1} \geq y_n \cdot a_n$$

Da questa deduco che

$$y_n \geq y_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+y_0^2 4^{-k}} \right) \qquad y_n \geq y_0 \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

Cosa succede quando $n \to +\infty$?

La produttoria tende a $\displaystyle\prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+y_0^2 4^{-k}} \right)$

il che si riduce alla serie dei log:

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \log \left(1+y_0^2 4^{-k} \right)$$

e questa converge $\left(\log \left(1+y_0^2 4^{-k} \right) \sim y_0^2 4^{-k} \right)$

Quindi la costante c_1 è $y_0 \cdot$ produttoria. ☺

ANALISI 1 – LEZIONE 092

Note Title 21/03/2017

VALORI SOGLIA PER SUCC. PER RICORRENZA

Esempio 1 $\quad x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n^2 \qquad x_1 = \alpha > 0$

Brutal mode: a cosa può tendere x_n? Mettiamo $x_n \to \ell$

Allora

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & \frac{n+1}{n} & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \ell & = & 1 & \ell^2 \end{array}$$

$\Rightarrow \ell = \ell^2 \rightsquigarrow \ell = 0, \ \ell = 1$, ma anche $\ell = +\infty$

Ci aspettiamo che per α grande $x_n \to +\infty$ e per α piccolo (vicino a 0) $x_n \to 0$

Congettura: esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

- se $\alpha > \alpha_0$, allora $x_n \to +\infty$
- se $\alpha \in (0, \alpha_0)$, allora $x_n \to 0$
- se $\alpha = \alpha_0$, allora $x_n \to 1$.

α_0 è il valore soglia

Notazione: indico con $x_n(\alpha)$ il valore di x_n quando parto con $x_1 = \alpha$

Per esempio: $\quad x_1(\alpha) = \alpha, \quad x_2(\alpha) = \frac{2}{1} x_1^2(\alpha) = 2\alpha^2$

$$x_3(\alpha) = \frac{3}{2} x_2^2(\alpha) = \frac{3}{2} \cdot 4\alpha^4 = 6\alpha^4$$

$$x_4(\alpha) = \frac{4}{3} x_3^2(\alpha) = \frac{4}{3} \cdot 36\,\alpha^8 = 48\,\alpha^8$$

e così via.

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Esistono dei valori di α per cui $x_n \to +\infty$

Basta prendere $\alpha = 2$. Infatti posso dimostrare che

$$x_{n+1} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\geq 1} x_n^2 \geq x_n^2 \underset{\text{se } x_n \geq 1}{\geq} x_n$$

quindi faccio piano standard con la monotonia:

(i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

esecuzione standard

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Se $\beta > \alpha$, allora $x_n(\beta) > x_n(\alpha)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

[Dim: facile induzione]

$\boxed{\text{Passo 3}}$ L'insieme degli α per cui $x_n \to +\infty$ è una semiretta (grazie al passo 2). Il problema è vedere se la semiretta comprende o no l'estremo inferiore

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Supponiamo che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} > 1$. Allora da lì in poi cresce e tende a $+\infty$

(i) $x_n \geq x_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq n_0$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Passo 5 – IMPORTANTE}}$ Supponiamo che per un certo α si abbia che $x_n(\alpha) \to +\infty$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_0}(\alpha) > 1$. Ma $x_{n_0}(\alpha)$ è una funzione continua di α (composizione di funz. continue)

Ma allora $x_{n_0}(\beta) > 1$ per ogni β in un opportuno intorno $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$.

Quindi: se per un certo α si ha che tende a $+\infty$, allora tende a $+\infty$ anche un po' prima di α.

Conseguenza: LA SEMIRETTA NON COMPRENDE L'ESTREMO.

$\boxed{\text{PASSO 6}}$ Supponiamo che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha) < 1$$

Allora da lì in poi decresce e tende a 0

(i) $0 \leq x_n \leq x_{n_0}$ $\quad \forall n \geq n_0$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n$ $\quad \forall n \geq n_0$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

L'unica cosa non ovvia è il p.to (ii) che si fa per induzione

Il passo base $n = n_0$ è l'ipotesi.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$

$$x_{n+2} = \frac{n+2}{n+1}\, x_{n+1}^2 \underset{\text{ip. induttiva}}{\leq} \frac{n+2}{n+1}\, x_n^2 \underset{\frac{n+2}{n+1} \leq \frac{n+1}{n}}{\leq} \frac{n+1}{n}\, x_n^2 = x_{n+1}$$

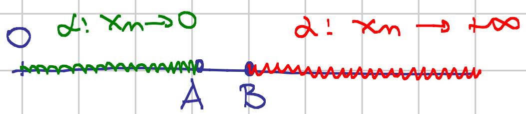
(oss: la funzione $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ è decrescente)

$\boxed{\text{Passo 7}}$ Esistono dei valori $\alpha > 0$ per cui $x_n \to 0$.

Basta fare in modo che $x_2 < x_1 < 1$

$\alpha = \frac{1}{10}$ $\qquad x_1 = \frac{1}{10}$ $\qquad x_2 = 2x_1^2 = \frac{1}{50} < x_1 < 1$

Inoltre l'insieme dei valori per cui va a 0 è un segmento cioè se va a 0 per un certo α, va a 0 per tutti gli α prima.



$\boxed{\text{Passo 8}}$ Se per un certo α si ha che $x_n \to 0$, allora anche per alcuni valori $\beta > \alpha$ si ha che $x_n \to 0$.

Infatti per forza deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha) < 1$$

(altrimenti sarebbe crescente e non potrebbe tendere a 0)
Ma per continuità delle due funzione deve esistere $\varepsilon > 0$ t.c.

$$x_{n_0+1}(\beta) < x_{n_0}(\beta) < 1 \qquad \forall \beta \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon).$$

$\boxed{\text{Passo 9}}$ Sia $A = \sup\{\alpha : x_n \to 0\}$ = sup zona verde
$B = \inf\{\alpha : x_n \to +\infty\}$ = inf zona rossa

Cosa accade se parto con $\alpha = A$ oppure $\alpha = B$?
→ Non posso andare a 0 e non posso andare a $+\infty$
→ Non posso superare 1 (se lo supero devo tendere a $+\infty$)
→ Non posso dare un colpo di decrescenza (se lo faccio devo tendere a 0).
Quindi sono costretto a stare sempre sotto 1, e crescere, dunque avere limite, e l'unico compatibile è $\ell = 1$.

Sappiamo anche che $\forall \alpha \in [A, B]$ si ha che $x_n \to 1$

$\boxed{\text{Passo 10}}$ Vediamo che $A = B$. Supponiamo per assurdo che $A < B$. Allora $x_n(A) < x_n(B)$ per ogni $n \geq 1$.
Pongo $d_n := x_n(B) - x_n(A)$

$$d_{n+1} = x_{n+1}(B) - x_{n+1}(A) = \frac{n+1}{n}\left(x_n^2(B) - x_n^2(A)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{1} \underbrace{\left(x_n(B) + x_n(A)\right)}_{2} d_n$$

Allora definitivamente

$$d_{m+1} \geq \frac{3}{2} d_m$$

da cui deduco che $d_n \to +\infty$, cosa impossibile essendo differenza di 2 succ. che tendono a 1.

— o — o —

<u>Oss</u>. I punti fondamentali nel discorso sono

- aver dato una caratt. con disug. stretta dell'andare a $+\infty$ (se $x_{m_0}(\alpha) > 1$, allora $x_n(\alpha) \to +\infty$)
  ⇝ questo ha prodotto zona rossa senza estremo
- aver dato una caratt. con disug. stretta dell'andare a 0 (se $x_{m_0+1}(\alpha) < x_{m_0}(\alpha) < 1$, allora $x_n(\alpha) \to 0$)
  ⇝ questo ha prodotto zona verde senza estremo alto.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\quad x_{m+1} = x_m^{20} + \dfrac{1}{10^{m!}} \qquad x_1 = \alpha$

Ci aspettiamo lo stesso comportamento con la stessa dim.
I pti chiave sono

① Se $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{m_0}(\alpha) > 1$, allora $x_n(\alpha) \to +\infty$
(facile induzione)

② Se $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{m_0+1}(\alpha) < x_{m_0}(\alpha) < 1$, allora $x_n(\alpha) \to 0$
(facile induzione)

Il tizio in mezzo non può portare sopra 1, né dare colpi di decrescenza. Quindi per quel valore iniziale la succ. è crescente e tende ad 1.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 093

Note Title 21/03/2017

<u>Esempio 1</u> Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 tale che

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = L < 1.$$

Consideriamo la succ. per ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad x_0 = \alpha$$

Allora $x_n \to \ell$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ed il limite ℓ non dipende da α

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Brutal mode: il limite sarà soluzione di $\ell = f(\ell)$, quindi non sarebbe male che avesse soluz. unica.

Dim. che l'equazione $f(x) = x$ ha un'unica soluzione.
Pongo $\varphi(x) = x - f(x)$ e osservo che

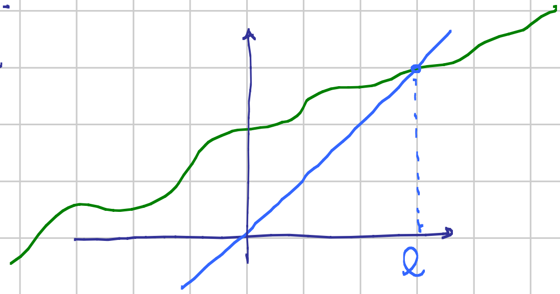
$$\varphi'(x) = 1 - f'(x) \geq 1 - L > 0$$

Quindi $\varphi(x)$ è crescente, quindi si annulla al max una volta.
Dico che

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \underbrace{\varphi'(t)}_{\geq 1-L} dt \geq \underbrace{\varphi(0) + \underbrace{(1-L)}_{>0} x}_{\downarrow \atop +\infty}$$

Ragionamento analogo per $x \to -\infty$.
Quindi c'è almeno una soluzione.



$\boxed{\text{PASSO 2}}$ Piano con la distanza. Pongo $d_n := |x_n - \ell|$

(i) $d_{n+1} \le L \, d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_n \le L^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ → facile induzione

(iii) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to \ell$ → segue dal p.to (ii).

$$d_{n+1} \underset{\substack{\text{def} \\ d_{n+1}}}{=} |x_{n+1} - \ell| \underset{\substack{\text{ricorr.} \\ + \ \ell = f(\ell)}}{=} |f(x_n) - f(\ell)| \underset{\text{Lagrange}}{=} |f'(c)| \cdot |x_n - \ell|$$

$$\le L \cdot d_n$$

— o — o —

Variante Dimostrare lo stesso risultato assumendo solo che f sia Lip. con costante $L < 1$.

(c'è da cambiare un minimo il passo 1)

— o — o —

Esempio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 e sia $\ell \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\ell = f(\ell)$$

Supponiamo che $|f'(\ell)| < 1$.

Allora esiste $r > 0$ tale la succ. per ricorrenza

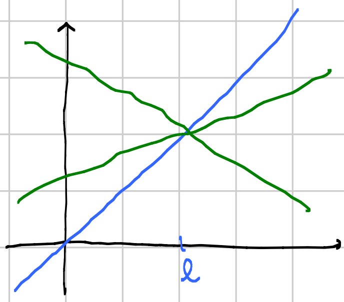
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

tende ad ℓ per ogni partenza $x_0 \in (\ell - r, \ell + r)$

(Detto brutalmente: se parto vicino ad ℓ tendo ad ℓ)

Idea: scelgo r in maniera tale che

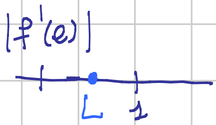
$$\sup\{|f'(x)| : x \in (\ell - r, \ell + r)\} = L < 1$$



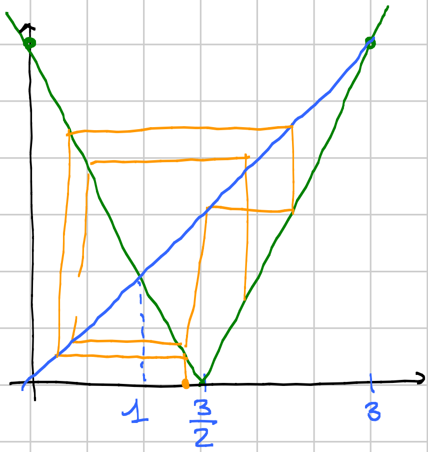
Posso trovare questo r per continuità di $f'(x)$.

Volendo posso scegliere

$$L = \frac{1 + |f'(\ell)|}{2}$$



A quel punto vale il solito piano con la distanza.



Esempio 3 $\quad x_{n+1} = |2x_n - 3|$

$x_0 = \sqrt{2}$

Le soluzioni di $x = f(x)$ sono

$\ell = 3$ e $\ell = 1$

Questi sono i possibili limiti reali della successione.

$\boxed{\text{PASSO 1}}$ $\quad 0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Questo si dimostra per induzione dopo aver osservato che

$$f([0,3]) = [0,3]$$

$\boxed{\text{PASSO 2}}$ x_n è limitata, quindi SE ha limite può tendere solo a 1 oppure a 3

Può tendere a 3? NO: se $x_n \to 3$, allora definitivamente $x_n \geq \frac{3}{2}$, quindi definitivamente

$$x_{n+1} = 2x_n - 3$$

Pongo $d_n = 3 - x_n$ e osservo che

$$d_{n+1} = 3 - x_{n+1} = 3 + 3 - 2x_n = 6 - 2x_n = 2\,d_n$$

quindi

$$d_{n+1} \geq 2\,d_n \quad \text{definitivamente con } d_n \geq 0$$

quindi non può tendere a 0 a meno che non valga proprio 0.

Può tendere a 1? Idem: pongo $d_n := |x_n - 1|$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| \underset{\substack{\text{se} \\ x_n \leq \frac{3}{2}}}{=} |3 - 2x_n - 1| = 2\,|x_n - 1| = 2\,d_n$$

Conclusione: x_n può tendere a 1 o a 3 solo se definitivamente vale 1 oppure 3.

$\boxed{\text{PASSO 3}}$ Se parto da $\sqrt{2}$ non posso mai arrivare in un numero razionale.
Si dimostra infatti per induzione che

$$x_n = a_n\sqrt{2} + b_n$$

con a_n e b_n interi e $a_n \neq 0$. (in realtà $a_n = 2^n$)

Conclusione: x_n non ha limite!

Oss. Cosa ha prodotto il caos? Il fatto che la derivata nei p.ti di intersezione ha valore assoluto >1, il che implica che quei p.ti funzionano da "respingenti"

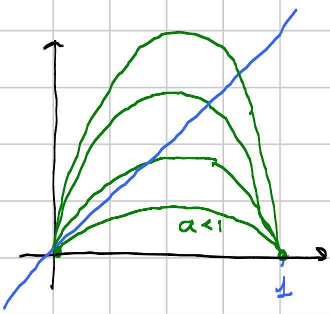
Esempio 4 Equazione logistica $x_{n+1} = a\, x_n (1-x_n)$

Se fosse $x_{n+1} = a x_n$ $\rightarrow$ esponenziale

$x_{n+1} = \underset{\uparrow \text{ parametro}}{a}(1-x_n)x_n$

$f(x) = ax(1-x)$

- $a \in [0,1]$ $x_n \to 0$
- $a \in [1,2]$ $\leadsto$ c'è intersezione nel ramo crescente della parabola e $x_n \to \ell$ sempre (tranne $x_0 \in \{0,1\}$)



- $a \in [2,3]$ $\leadsto$ ℓ sta nel ramo decrescente e $f'(\ell) \in (-1,0)$
tutte le $x_n \to \ell$ spiraleggiando
- $a \in [3,4]$ $\leadsto$ ℓ sta nel ramo decr. con $f'(\ell) < -1$
$\leadsto$ $x_n \to \ell \iff x_n = \ell$ definitivamente.

$a > 4$ x_n può diventare negativa.