ANALISI 1 — LEZIONE 18

Note Title 17/10/2024

Tabellina di limiti

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 0^+ & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

(si dimostrano usando la definizione)

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ 0^+ & \text{se } \alpha\in(0,1) \end{cases}$$

Il caso $\alpha>1$ si dimostra a partire da $\alpha^n \geq 1+(\alpha-1)n$

Il caso $\alpha\in(0,1)$ si deduce dal precedente osservando che

$$\alpha^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

ora se $\alpha\in(0,1)$, allora $\frac{1}{\alpha}>1$, quindi $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \to +\infty$ e $\frac{1}{+\infty}=0$

[Caso speciale : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$]

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} n^3-n^2$ $(+\infty-\infty = \text{forma indet.})$

Osservo che $n^3-n^2 = \underset{\downarrow \atop +\infty}{n^2}\underbrace{(n-1)}_{\downarrow \atop +\infty} \to +\infty$ per teo. algebrico

Esempio 1-bis $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-n$ $(+\infty-\infty = \text{forma indet.})$

Osservo che $\sqrt{n}-n = \underset{\downarrow \atop +\infty}{\sqrt{n}}\ \cdot\ (\underset{\downarrow \atop -\infty}{1-\sqrt{n}}) \to -\infty$

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+7n}{7n^2+4}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty} = \text{forma indet.}\right]$

$$\frac{n^2+7n}{7n^2+4} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{7}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(7+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{7}{n}}{7+\frac{4}{n^2}} \to \frac{1}{7}$$

$\frac{7}{n} \to 0$, $\frac{4}{n^2} \to 0$

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2-8n}{3n-4n\sqrt{n}}$ $\left[\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty} = \text{tutto indet.}\right]$

SLOGAN: CHI COMANDA SI RACCOGLIE

$$\frac{5n^2-8n}{3n-4n\sqrt{n}} = \frac{n^2\left(5-\frac{8}{n}\right)}{n\sqrt{n}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}-4\right)} = \sqrt{n}\,\frac{5-\frac{8}{\sqrt{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n}}-4} \to -\frac{5}{4}$$

$\sqrt{n} \to +\infty$, $\frac{8}{\sqrt{n}} \to 0$, $\frac{3}{\sqrt{n}} \to 0$

Quindi il limite è $-\infty$.

Esempio 4 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Osservo che $-1 \le \sin n \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Divido per n conservando i versi perché $n>0$, almeno definitiv.

$$-\frac{1}{n} \le \boxed{\frac{\sin n}{n}} \le \frac{1}{n}$$

$-\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{\sin n}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$

(per carabinieri)

Esempio 5 $$\frac{\cos(n!+2^n)}{3^n+n^2} \to 0$$

$$-1 \le \cos(\text{Mostro}) \le 1$$

quindi

$$-\frac{1}{3^n+n^2} \le \boxed{\frac{\cos(\text{Mostro})}{3^n+n^2}} \le \frac{1}{3^n+n^2}$$

$\downarrow 0$ $\quad \downarrow 0$ $\quad \downarrow 0$

Esempio 6 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$

Brutal mode: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 2^0 = 1$

Abbiamo usato che se $a_n \to \ell$, allora $2^{a_n} \to 2^{\ell}$. Se volessi dimostrare questo, mi servirebbe prima sapere che $\sqrt[n]{2} \to 1$

Dimostrazione senza fatti misteriosi. Partiamo dalla Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Voglio avere 2 a dx, quindi uso $x = \frac{1}{n}$. Viene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

Facendo la radice n-esima: $1+\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$, ma allora

$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2}$ appena dimostrata

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{2}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1+\frac{1}{n}}$$

Esempio 6-bis $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a>0}$ $\to$ Tabellina

Se $a \geq 1$ possiamo scrivere la Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$ e ottenere

$\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \geq a$ e quindi

$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$ e si conclude con i carabinieri

Se $a \in (0,1)$, allora $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ con $b = \frac{1}{a}$ e quindi $b>1$

Esempio 7 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$ ⇝ Tabellina

Abbiamo dimostrato in una lezione precedente che

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

[Un pezzo del binomio di Newton]

Voglio far venire n a dx, quindi uso $x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$

Così abbiamo ottenuto che $\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq n$, cioè

$$\underset{\downarrow \atop 1}{\boxed{1}} \leq \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{n}} \leq \underset{\downarrow \atop 1}{\boxed{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}}}$$

Esempio 8 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{20}-20n^{17}+\cos(n)} = 1$

Brutal mode: $\sqrt[n]{\ldots} = \sqrt[n]{n^{20}} = (\sqrt[n]{n})^{20} \to 1^{20} = 1.$

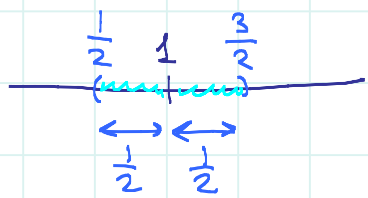
Rigorosamente: raccolgo n^{20} dentro la radice

$$\sqrt[n]{n^{20}\left(1-\frac{20}{n^3}+\frac{\cos(n)}{n^{20}}\right)} = \underset{\downarrow \atop 1}{\boxed{(\sqrt[n]{n})^{20}}} \cdot \sqrt[n]{1-\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{20}{n^3}}+\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{\cos(n)}{n^{20}}}}$$

C'è da giustificare bene che, se $a_n \to 1$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

Se $a_n \to 1$, allora definitivamente

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$$



quindi $\underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} \leq \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{a_n}} \leq \underset{1}{\sqrt[n]{\frac{3}{2}}}$