ANALISI 1 — LEZIONE 008

Note Title 03/10/2024

INSIEMI NUMERICI

Notazioni standard

c'è lo zero

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ NATURALI

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ INTERI

$\mathbb{Q} = \{\text{frazioni } \frac{a}{b} \text{ con } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ RAZIONALI

$\mathbb{R}$ REALI

$\mathbb{C}$ COMPLESSI

$\mathbb{Q}$ deriva da "quozienti" $\mathbb{Z}$ da "ZAHLEN" (numeri in tedesco)

Approccio assiomatico ai numeri reali: breve descrizione delle proprietà dei numeri reali

I numeri reali sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$, cioè un insieme che indichiamo con $\mathbb{R}$, in cui sono definite due operazioni (la somma e la moltiplicazione), e una relazione d'ordine che indichiamo con $\geq$.

Valgono 3 tipi di proprietà

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

(S1) $a+b = b+a$

(S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(S3) $\exists\, 0$ t.c. $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(S4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b = 0$

moralmente $b = -a$

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$

(P2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(P3) $\exists\, 1$ t.c. $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(P4) $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0\ \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$

moralmente $b = \frac{1}{a}$

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

<u>Oss.</u> In $\mathbb{N}$ abbiamo solo (S1), (S2), (S3), (P1), (P2), (P3), (D)
in $\mathbb{Z}$ si aggiunge (S4)
in $\mathbb{Q}$ si aggiunge (P4)

PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO La relazione $\geq$ ha le seguenti proprietà

(ord-1) Per ogni x e y in $\mathbb{R}$ vale $x \geq y$ oppure $y \geq x$ (ord. totale)
(ord-2) $x \geq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (riflessiva)
(ord-3) Se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (transitiva)
(già usata quando abbiamo fatto le catene di disuguag.)
(ord-4) Se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (antisimmetrica)

Ci sono due proprietà che legano l'ordinamento alle operazioni

(ord-S) Se $a \geq b$ allora $a+c \geq b+c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$
(ord-P) Se $a \geq b$, allora $a \cdot c \geq b \cdot c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ con $\boxed{c \geq 0}$

<u>Oss.</u> Le stesse proprietà valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
Finora nulla distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

<u>Oss.</u> Tutte le volte che risolviamo equazioni o disequazioni siamo autorizzati ad usare solo queste proprietà

<u>Esempio</u> $2x+7 \geq 10 \rightsquigarrow 2x \geq 3 \rightsquigarrow x \geq \frac{3}{2}$

In realtà

$2x+7 \geq 10$ aggiungo a dx e sx -7 e conservo il verso per la (ord-S)

$$2x+\underbrace{7+(-7)}_{0} \geq \underbrace{10+(-7)}_{3}$$

$$\underbrace{2x+0}_{2x}$$

$2x \geq 3$

Moltiplico a dx e sx per $\frac{1}{2}$

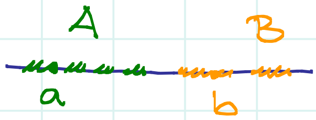
serve che $\frac{1}{2} \geq 0$

$$2x \cdot \frac{1}{2} \geq \underbrace{3 \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}}$$

$$2x \cdot \frac{1}{2} = x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = x \cdot 1 = x$$

$\boxed{\text{ASSIOMA DI CONTINUITÀ}}$ ← quello che vale in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$

<u>Def.</u> Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi, diciamo non vuoti.
Si dice che A $\boxed{\text{sta a sinistra}}$ di B se
$\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$



<u>Assioma di continuità</u> Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti tali che A sta a sinistra di B.
Allora esiste almeno un numero reale c che "sta in mezzo", cioè

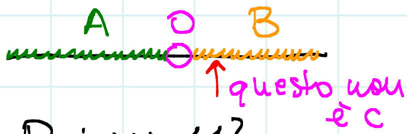
$a \leq c \quad \forall a \in A$ (c è più grande dei verdi)

$c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo degli arancioni)

<u>Oss.</u> L'assioma dice che c esiste. A seconda dei casi può essere unico oppure NO.

<u>Oss.</u> Può succedere che l'elemento più grande di A coincida con l'elemento più piccolo di B.
In tal caso quello è l'unico c che possiamo usare

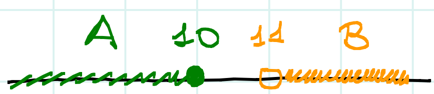
<u>Esempio</u> (1) Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
allora l'$\boxed{\text{unica}}$ possibilità è $c = 0$.



(2) Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 10\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 11\}$
allora vanno bene tutti i c che soddisfano

$10 \leq c \leq 11$

vanno bene anche gli estremi



$\boxed{\text{FATTO IMPORTANTE NON BANALE}}$ In $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di continuità, in $\mathbb{R}$ sì.