ANALISI 1 — LEZIONE 046

<u>Classi di regolarità</u> Sia A un insieme aperto (ad esempio tutto $\mathbb{R}$, una semiretta senza estremo, un interv. senza estremi)

$C^0(A)$ = insieme delle funzioni continue in A
$C^1(A)$ = " " " con derivata continua in A
$\vdots$
$C^k(A)$ = " " " con k derivate continue in A
$C^\infty(A)$ = insieme delle funzioni con tutte le derivate continue in A

<u>Esempio</u> $\frac{x+3}{x^2+x} \in C^0(\mathbb{R}\setminus\{-1,0\})$

" $\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{-1,0\})$
" " C^∞ (")

$|x| \in C^0(\mathbb{R})$, $|x| \notin C^1(\mathbb{R})$, $|x| \in C^{27}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

ASINTOTI

- <u>Def.</u> La retta $y=\ell$ è asintoto orizz. per $x\to+\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$
  " " " " per $x\to-\infty$ se $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$

- <u>Def.</u> La retta $x=x_0$ è <u>asintoto verticale</u> se vale una delle seguenti 4 opzioni

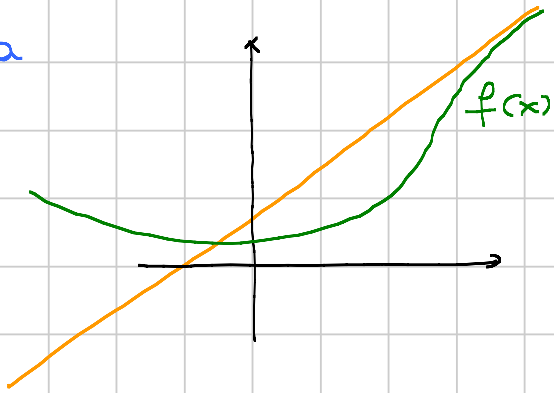
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \in \{\pm\infty\}$ $\qquad$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \in \{\pm\infty\}$

• Def. La retta $y = mx + n$, con $m \neq 0$, è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$ (variante per $x \to -\infty$) se

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(f(x) - mx - n)}_{} = 0$$

(variante: stessa per $x \to -\infty$)

la "distanza" tra la retta e la funzione tende a 0.



Come individuare gli asintoti obliqui

La retta $y = mx + n$ è asint. obliquo a $+\infty$ se e solo se

$$\boxed{m := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \qquad n := \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}}$$

Oss. Se per qualche motivo sono verificate le ipotesi di Hôpital, allora

$$m = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$$

Dim. criterio se e solo se

Supponiamo che valga il 2° limite. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{f(x) - mx}_{\tilde{n}} - n) = 0 \Rightarrow mx + n \text{ è asint. obliquo}$$

Supponiamo ora che la retta sia asint. obliquo. Voglio dim. che m ed n sono dati dalle formule sopra

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\boxed{\frac{f(x) - mx - n}{x}}}_{\frac{0}{+\infty} = 0} + \underbrace{\boxed{\frac{mx + n}{x}}}_{m} \right] = m$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{f(x)-mx-n}_{\to 0}+n)=n.$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $f(x)=\dfrac{3x^2+5x+6}{x+3}$

$x=-3$ è asintoto verticale

Cerco gli asintoti obliqui

$$m:=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

$$n:=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3x^2}+5x+6-\cancel{3x^2}-9x}{x+3}=-4$$

$\Rightarrow$ la retta $y=3x-4$ è asint. obliquo per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=3 \quad \text{e idem per } n$$

<u>Esempio 2</u> $f(x)=7x+\log x$

$$m:=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=7 \qquad n:=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-7x)=+\infty$$

Niente asintoto obliquo

<u>Esempio 3</u> $f(x)=x+\dfrac{\sin(x^{20})}{x}$

Si vede con la definizione che $y=x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ sia a $-\infty$, però

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+20x^{18}\cos(x^{20})-\frac{\sin(x^{20})}{x^2}\right]=\text{N.E.}$$

— o — o —

Utilizzi dello studio globale di funzioni

- studiare iniettività / surgettività
- risolvere equazioni, anche parametriche $f(x) = \lambda$
- risolvere disequazioni $f(x) \geq 0$ oppure $f(x) \leq 0$
- Calcolare max / min di una funzione in un insieme.

Esempio Risolvere la disequazione $\underbrace{x + 2\sin x}_{f(x)} \geq 0$

Studio $f(x)$ e vedo che succede

1. È dispari ☺
2. Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Diciamo $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$
3. Limiti agli estremi

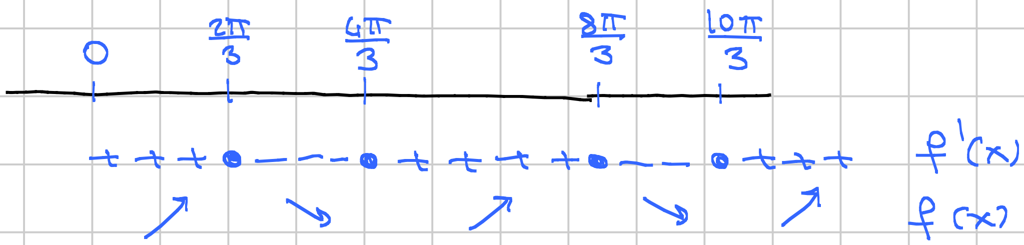
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

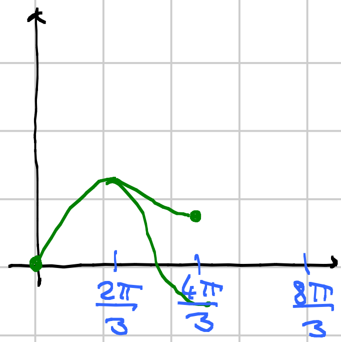
(Questo ci dice già che è surgettiva, ma qui non serve)
Ora sappiamo che la diseq. è ok definitivamente.

4. Zeri e segno ☹ Non lo so fare

5. Derivata e monotonia $f'(x) = 1 + 2\cos x$

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$f'(x) > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2}$$

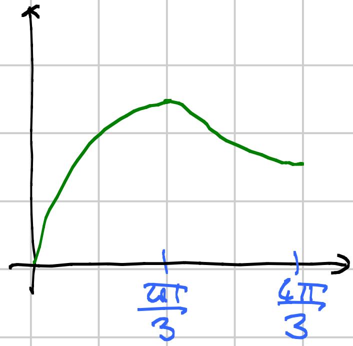




Calcolo $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 0$

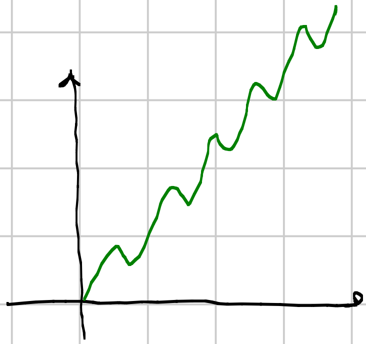
Ci sono infiniti p.ti di min. loc.
con

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$



In tutti quelli con $k \geq 0$ la funzione è >0
(quello più a rischio era $\frac{4\pi}{3}$).

Ora sappiamo che $f(x)$ si annulla solo per $x=0$ e
poi $f(x) > 0$ per $x > 0$



Ora sappiamo rispondere al 4 e
alla domanda iniziale

— o — o —