ANALISI 1 — LEZIONE 98

Note Title 05/04/2025

Esempio 1 $a_{n+1} = \sqrt[n]{7 + a_n}$ $\quad a_1 = 2025$

$a_1 = 2025 \quad a_2 = \sqrt[1]{7 + a_1} = 2032 \quad a_3 = \sqrt[2]{7 + 2032} = 40$ e qc. ...

Idea: $a_n \to 1$

PIANO (i) $1 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $a_n \to 1$

Dim (ii) Dopo aver fatto (i) sappiamo che

$$\sqrt[n]{8} \leq a_{n+1} \leq \sqrt[n]{10.007}$$

e si conclude con carabinieri

Dim (i) $a_n \geq 1$ è semplice induzione (bastava anche $a_n \geq 0$)

$a_n \leq 10000$ per induzione

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n + 7} \underset{\text{uso ip.}}{\leq} \sqrt[n]{10.007} \underset{\text{se } n \geq 2}{\leq} \sqrt{10.007} \leq 101 \leq 10.000$$

Quindi come passi base mi servono $n = 1$ e $\boxed{n = 2}$.

Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n}$ $\quad a_1 = 2025$

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $a_n \to 1$ (segue da (i) con carabinieri)

Dim (i) per induzione non è così ovvio

$$\dots \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n} \underset{\text{Uso Ip}}{\leq} \sqrt[n]{n+10.000} \underset{n\geq 2}{\leq} \sqrt{n+10.000} \underset{\text{spero}}{\leq} 10.000$$

Purtroppo la speranza non può essere vera per ogni $n \geq 2$:(

$\boxed{\text{PIANO ALTERNATIVO}}$ (i) $0 \leq a_n \leq 10.000\, n \quad \forall n \geq 1$

(ii) $a_n \to 1$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{n}}}_{\downarrow \atop 1} \leq a_{n+1} \leq \underbrace{\boxed{\sqrt[n]{10.001\, n}}}_{\downarrow \atop 1}$ e quindi carabinieri...

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Mi limito alla disug. di sinistra

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n} \underset{\text{Ip}}{\leq} \sqrt[n]{10.001\, n} \underset{n\geq 2}{\leq} \sqrt{10.001\, n} \underset{\text{speranza}}{\leq} 10.000\, n$$

Speranza

$$\sqrt{10.001\, n} \leq 10.000\, n \iff 10.001\, n \leq 10^8\, n^2$$

$$\iff n \geq \frac{10.001}{10^8}$$

il che è verissimo.

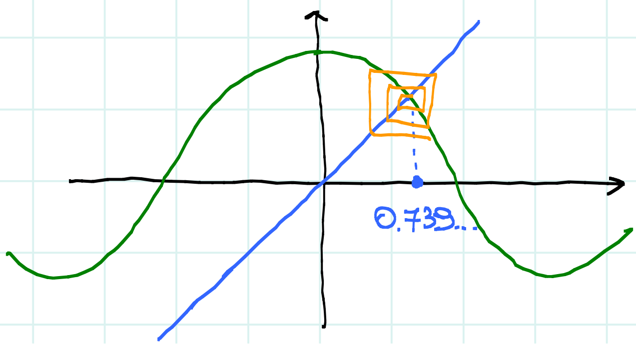
Esempio 3 Prendo la calcolatrice, scrivo 2025, e inizio a premere tante volte cos

Dopo un po' si stabilizza su un valore 0.739...

indipendente dal p.to di partenza

Stiamo calcolando la successione $a_{n+1} = \cos a_n \quad a_0 = 2025$

Idea: dopo un po' la succ. spiraleggia intorno all'unica intersezione



$\boxed{\text{FATTO 1}}$ L'equazione $x = \cos x$ ammette un'unica sol. reale

$\boxed{\text{Dim}}$ Considero $g(x) = x - \cos x$

Osservo che $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, quindi g è surgettiva

Osservo che $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ e si annulla sporadicamente quando $\sin x = -1$, quindi per MONOTONIA 3 la funzione $g(x)$ è strett. crescente, quindi iniettiva.

Quindi la soluzione esiste ed è unica.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Detta ℓ l'unica soluzione di $\ell = \cos \ell$, diciamo che

$$a_n \to \ell$$

Vorremmo fare un piano con la distanza, ma la costante di Lip di $\cos x$ è 1 e non va bene.

$\boxed{\text{MA}}$ La successione non arriva dove la derivata di $\cos x = 1$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ (ovvio perché $\cos \in [-1, 1]$)

(ii) $d_{n+1} \leq (\sin 1) \cdot d_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $d_n \leq (\sin 1)^{n-1} \cdot d_1 \quad \forall n \geq 1$ (segue da (ii))

(iv) $d_n \to 0$ (segue da (iii) perché $\sin 1 < 1$)

dove $d_n = |a_n - \ell|$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $d_{n+1} = |a_{n+1} - \ell| = |\cos a_n - \cos \ell| \leq \underset{\uparrow}{L}\, |a_n - \ell| = L d_n$

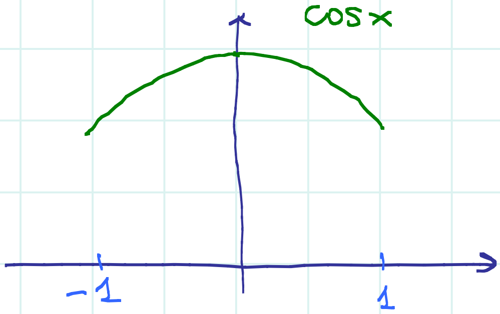
costante di Lip di $\cos x$ in $[-1, 1]$

Ora

$L = \sup\{|\sin x| : x \in [-1, 1]\} = \sin 1$

$|$derivata di $\cos x|$

è anche un max



Esempio 4 $a_{n+1} = \arctan(n a_n)$ $a_1 = 2025$

Idea: $a_n \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

Se sapessi che $a_n \geq m > 0$, avrei finito perché

$$\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{2}}}_{\downarrow \frac{\pi}{2}} \geq a_{n+1} \geq \underbrace{\boxed{\arctan(n \cdot m)}}_{\downarrow \frac{\pi}{2}}$$

Tutto sta a fare un p.to (i) in cui $a_n \geq m$ $\forall n \geq 1$

m: costante positiva da trovare

Provo con $m = \frac{\pi}{4}$ ($= \arctan 1$). Dimostro per induzione che $a_n \geq \frac{\pi}{4}$ $\forall n \geq 1$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ $a_{n+1} = \arctan(n\, a_n) \underset{\text{Hp}}{\geq} \arctan\left(n \frac{\pi}{4}\right) \underset{\text{speranza}}{\geq} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

La speranza è ok se $n \frac{\pi}{4} \geq 1$, il che succede appena $n \geq 2$

Quindi basta controllare a mano i casi $n = 1$ e $n = 2$

— o — o —

Oss. Se parto con $a_0 = \frac{1}{2025}$ la cosa è più complicata

perché $\frac{\pi}{4}$ non può andare bene. Con cosa si può sostituire?

— o — o —