Complementi sulle serie

Per le sommatorie finite (numero finito di addendi) valgono
→ proprietà commutativa
→ " associativa

Vale lo stesso per le serie?

$\boxed{\text{COMMUTATIVA}}$ Sia a_n una successione
Sia $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutazione, cioè una funzione iniettiva e surgettiva.

Posso dire che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad ?$$

Risposta:

$\boxed{\text{Teo 1}}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, allora vale l'uguaglianza per ogni σ.

$\boxed{\text{Teo 2}}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

allora per ogni $S \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutazione t.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \text{ "converge" ad } S$$

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma non assolutamente.

Allora posso riordinare i termini in modo che tenda a 2017.

$\boxed{\text{Idea dim. del teo 2}}$ È evidente che ci sono termini positivi e neg. e che la serie dei positivi da soli e quella dei neg. da soli divergono entrambe.

Voglio ottenere 2017

- Inizio usando solo termini + fino a quando supero 2017 (prima o poi succede)
- Sommo termini − fino a quando torno sotto 2017 (prima o poi succede)
- continuo in questo modo usando prima o poi tutti i termini
- osservo che i superamenti dall'alto o dal basso sono sempre più piccoli in valore assoluto perché $a_n \to 0$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim Teo 1}}$ Ipotesi $\sum a_n$ converge e $\sum |a_n|$ converge

Sia S la somma della prima.

Voglio dim. che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi succedono 2 cose:

$$\exists\, H_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad \left| \sum_{k=0}^{m} a_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m \geq H_\varepsilon$$

$$\exists\, K_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad \underbrace{\sum_{k=m}^{+\infty} |a_k|}_{\text{coda di serie convergente.}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m \geq K_\varepsilon$$

Pongo $L_\varepsilon := \max\{H_\varepsilon, K_\varepsilon\}$.

Poiché $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una permutazione, esiste $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\sigma(\{0, 1, \ldots, M_\varepsilon\}) \supseteq \{0, 1, \ldots, L_\varepsilon\}$$

(prima o poi σ prende tutti i valori da 0 ad L_ε.

$\boxed{\text{CLAIM}}$ $$\left| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - S \right| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq M_\varepsilon$$

Se fosse vero, ho finito.

Pongo

$$U_{n,\sigma,\varepsilon} = \{ k \in \{1, \dots, n\} : \sigma(k) \in \{0, 1, \dots, L_\varepsilon\} \}$$

indici k "utili"

$$I_{n,\sigma,\varepsilon} = \{ k \in \{1, \dots, n\} : \sigma(k) \geq L_\varepsilon + 1 \}$$

indici k "inutili"

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k \in U_{n,\sigma,\varepsilon}} a_{\sigma(k)} + \sum_{k \in I_{n,\sigma,\varepsilon}} a_{\sigma(k)}$$

commutativa su sommatoria

$$\sum_{k \in U_{n,\sigma,\varepsilon}} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{L_\varepsilon} a_k$$

ma allora

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - S \right| &\leq \left| \sum_{k \in U} a_{\sigma(k)} - S \right| + \left| \sum_{k \in I} a_{\sigma(k)} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{L_\varepsilon} a_k - S \right| + \sum_{k \in I} |a_{\sigma(k)}| \\ &\leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{L_\varepsilon} a_k - S \right|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{perché } L_\varepsilon \geq M_\varepsilon}} + \underbrace{\sum_{k \geq L_\varepsilon + 1} |a_k|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{perché } L_\varepsilon \geq K_\varepsilon}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

— o — o —

Oss. Grazie al teorema precedente posso parlare di somma di un insieme numerabile di numeri reali, cioè dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ con A numerabile (che è immagine di una successione) posso scrivere

$$\sum_{a \in A} a$$

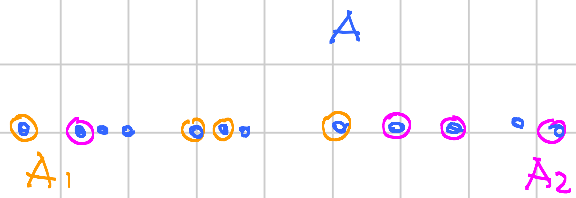
purché questa converga assolutamente
(se scrivo A in modi diversi come immagine di una succ. iniettiva, il risultato della serie non cambia).

$\boxed{\text{Proprietà associativa}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme numerabile e sia

$$\sum_{a \in A} a \quad \text{assolutamente convergente}$$

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ insiemi disgiunti (finiti o numerabili) tali che

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$



Allora vale che

$$\boxed{\sum_{a \in A} a = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{a \in A_n} a}_{\text{somma dei soli elementi di } A_n}}$$

Esercizio: provare a dimostrarlo
(l'idea è la stessa della dim. precedente).

Occhio: se la serie iniziale non converge assolutamente, raggruppando i termini può succedere di tutto

$$\underbrace{+1-1}_{0} + \underbrace{1-1}_{0} + \underbrace{1-1}_{0} + \dots$$