ANALISI 1 - LEZIONE 58

Note Title 12/12/2024

Alcuni motivi per fare uno studio di funzione:

→ capire iniettività e/o surgettività

→ trovare max / min

→ risolvere equazioni del tipo $f(x)=0$ oppure $f(x)=\lambda$

→ risolvere disequazioni.

<u>Esempio 1</u> Risolvere la disequazione $\sin x \leq x$.

Pongo $f(x) = x - \sin x$ e cerco di capire dove $f(x) \geq 0$.

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

[Volendo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e questo dice che f è surgettiva]

Osservo che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 - \cos x$

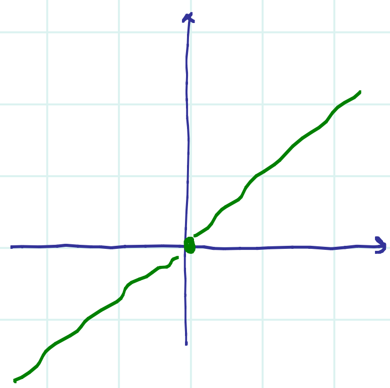
Ora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ se e solo se $\cos x = 1$, cioè se e solo se $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, cioè $f'(x)$ si annulla sporadicamente.

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f è strett. crescente.

A questo punto sappiamo che

$f(x) > 0$ per $x > 0$

$f(x) < 0$ per $x < 0$.



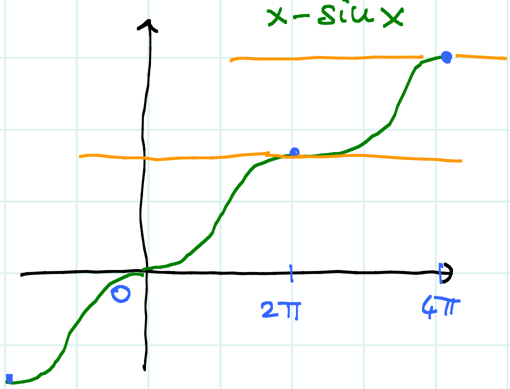
Conclusione:

$$\sin x \leq x \qquad \forall\, x \geq 0$$

e vale il segno di uguale se e solo se $x = 0$

— o — o —

Oss. In realtà sappiamo meglio come è fatto il grafico di $x - \sin x$.
Tutti i p.ti $x = 2k\pi$ sono p.ti stazionari, cioè $f'(x) = 0$, e sono p.ti di flesso a tangente orizzontale ascendente

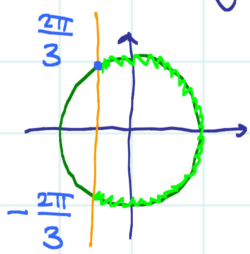


Oss. La disug. $\sin x \leq x$ si vede anche geometricamente dalla circonferenza trigonometrica (vedi lezione sul limite di $\frac{\sin x}{x}$).

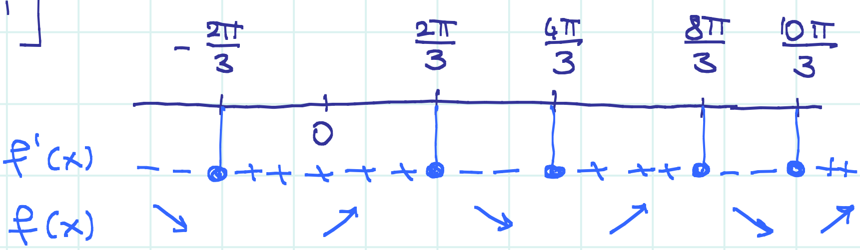
Esempio 2 Risolvere l'equazione $x + 2\sin x = 0$

Come prima $f(x) = x + 2\sin x$ e osserviamo che è una funzione dispari e surgettiva. Inoltre $f(0) = 0$, quindi $x = 0$ è una soluz.
Calcolo $f'(x) = 1 + 2\cos x$, che può diventare negativa.
Studio il segno di $f'(x)$.

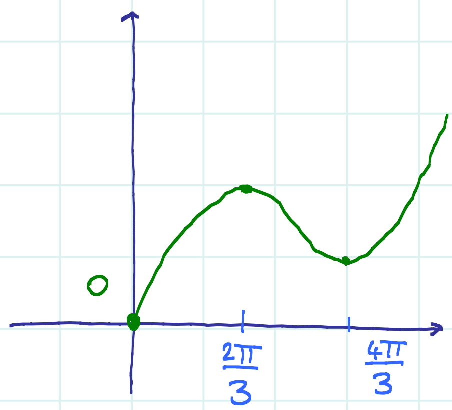
$$f'(x) \geq 0 \iff 1 + 2\cos x \geq 0$$
$$\iff \cos x \geq -\frac{1}{2}$$



$$\iff x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$$



Quindi, partendo da $x = 0$, la funzione
→ cresce fino a $x = \frac{2\pi}{3}$
→ poi decresce fino a $x = \frac{4\pi}{3}$.
Va sotto zero? Basta sostituire

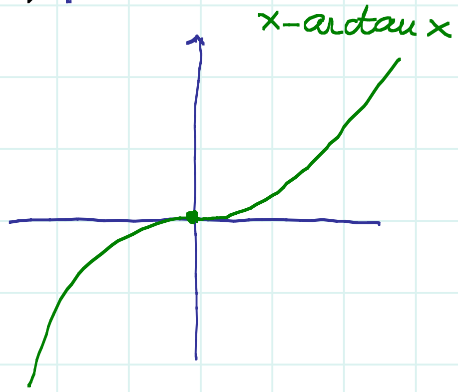


$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 4 - \sqrt{3} > 0$$

→ poi cresce fino a $\frac{8\pi}{3}$ e da quel p.to in poi non può più annullarsi perché di certo non si annulla quando $x > 2$

Conclusione: l'unica soluzione di $x + 2\sin x = 0$ è $x = 0$

<u>Esempio 3</u> Risolvere la disequazione $\arctan x \leq x$.



Considero $f(x) = x - \arctan x$

Funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari e surgettiva

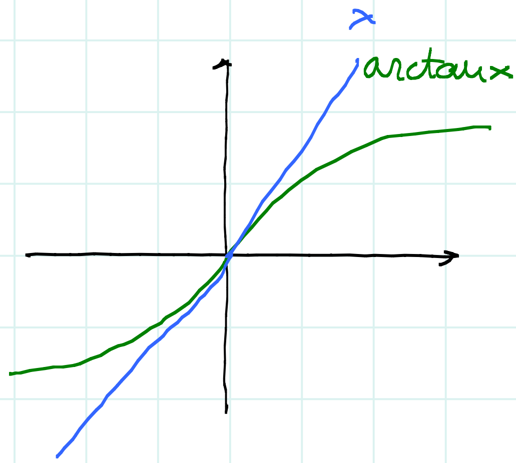
Anche in questo caso $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Monotonia 3 ⇝ f è strett. crescente

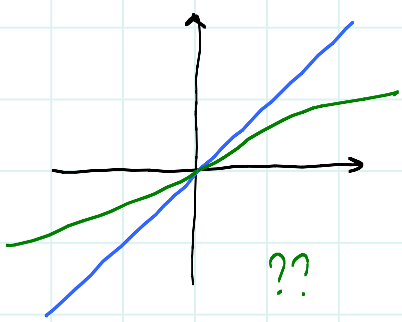
<u>Conclusione</u>:
$$\arctan x < x \quad \forall x > 0$$
$$\arctan x > x \quad \forall x < 0$$
(in $x = 0$ vale l'uguaglianza)

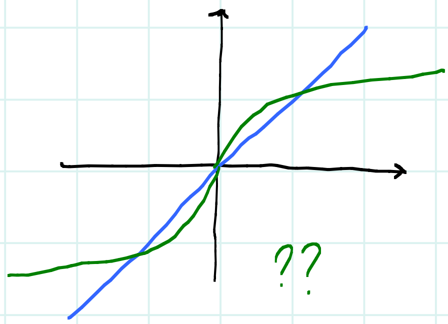


<u>Oss</u>. In termini di grafici sovrapposti
La situazione è quella qui a destra

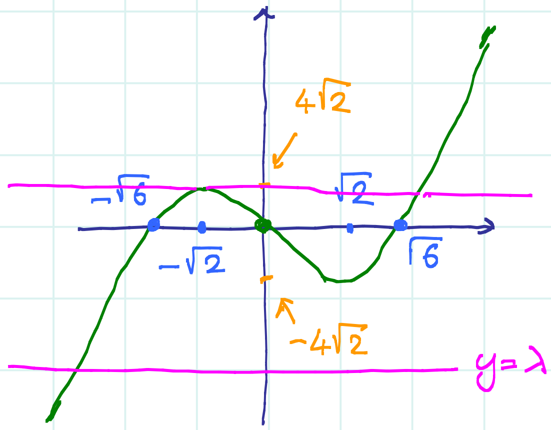
<u>Achtung</u>! È molto pericoloso
sovrapporre due grafici !!

Nessuno può escludere situazioni diverse

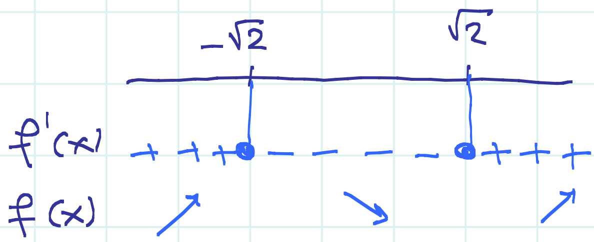




Esempio 4 Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di
$$x^3 - 6x = \lambda$$



Considero la funzione $f(x) = x^3 - 6x$.
Questa come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari
e surgettiva
Osservo che
$$f(x) = -6x + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$
quindi vicino all'origine si
comporta come $-6x$.
Calcolo
$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$$



$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$
$$f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \quad \text{per disparità}$$

Conclusione: l'equazione ha

→ 1 soluzione se $\lambda < -4\sqrt{2}$ oppure $\lambda > 4\sqrt{2}$
→ 2 soluzioni se $\lambda = \pm 4\sqrt{2}$
→ 3 soluzioni se $-4\sqrt{2} < \lambda < 4\sqrt{2}$.

— o — o —