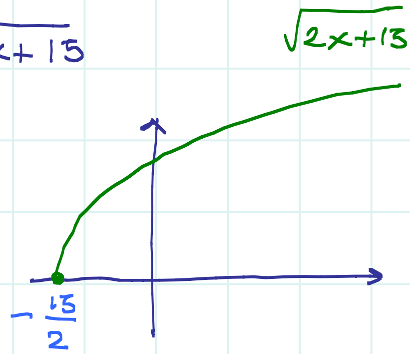
$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15}$ $a_0 = 1$

$a_1 = \sqrt{17}$ $a_2 = \sqrt{2\sqrt{17}+15}$ e poi sempre più brutto

Dimostriamo che $a_n \to 5$ con il piano

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & 1 \le a_n \le 5 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{(ii)} & a_{n+1} \ge a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{(iii)} & a_n \to \ell \in \mathbb{R} \\ \text{(iv)} & \ell = 5 \end{array}\right\} \text{PIANO classico con monotonia}$$

Preliminare: cerchiamo di studiare $f(x) = \sqrt{2x+15}$



Definita per $2x+15 \ge 0$, cioè $x \ge -\frac{15}{2}$

Crescente e ≥ 0 sempre

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Per induzione

$\boxed{n=0}$ ☺

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $1 \le a_n \le 5$ applico $f(x)$ che è crescente

$$\begin{array}{ccccccc} & f(1) & \le & f(a_n) & \le & f(5) \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 \le & \sqrt{17} & \le & a_{n+1} & \le & 5 \end{array} \rightsquigarrow 1 \le a_{n+1} \le 5 \text{ che è la tesi ☺}$$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Induzione + applico f

Devo dim. per induzione che $a_{n+1} \ge a_n$

$\boxed{n=0}$ $a_1 \overset{?}{\ge} a_0 \iff \sqrt{17} \overset{?}{\ge} 1$ OK ☺

$\boxed{n = n+1}$ Ipotesi: $a_{n+1} \geq a_n$ Applico f che è crescente

$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$ cioè $a_{n+2} \geq a_{n+1}$ che è la tesi :)

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (i) + (ii) + teo. succ. monotone
(debolm. cresc. + limitata dall'alto perché $a_n \leq 5$)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Passiamo al limite nella ricorrenza e otteniamo

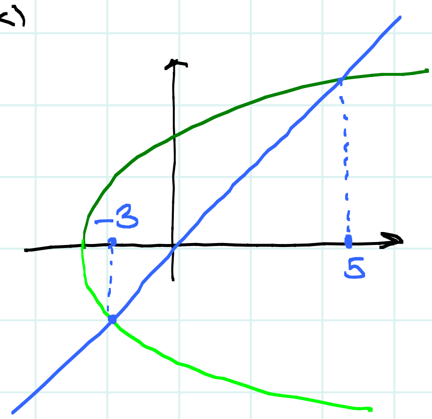
$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{2a_n + 15} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{2\ell + 15} \end{array}$$

$\ell = \sqrt{2\ell + 15} \rightsquigarrow \ell^2 = 2\ell + 15 \rightsquigarrow \ell^2 - 2\ell - 15 = 0 \rightsquigarrow (\ell - 5)(\ell + 3) = 0$

$\boxed{\ell = -3}$ oppure $\ell = 5$

non è accettabile perché viene $-3 = \sqrt{9}$

<u>Oss.</u> L'equazione risolta in (iv) è $\ell = f(\ell)$, che corrisponde ad intersecare il grafico di $f(x)$ con la bisettrice $y = x$



Dimostro che $a_n \to 5$ usando un PIANO con la DISTANZA.

Pongo $d_n = |a_n - 5|$

presunto limite

Dimostrare che $a_n \to 5$ è la stessa cosa che dimostrare che $d_n \to 0$.

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq a_n \leq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Esattamente come prima.

Supponiamo di aver fatto (ii).

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Induzione che segue da (ii)

$$d_1 \leq \frac{1}{2} d_0 \,, \quad d_2 \leq \frac{1}{2} d_1 \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2} d_0 = \frac{1}{4} d_0$$

$$d_3 \leq \frac{1}{2} d_2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} d_0 = \frac{1}{8} d_0 \ldots$$ in generale si dimostra per induzione

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Sappiamo che

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq \underset{\substack{\wr \\ 0}}{d_n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n d_0}$$

Per i carabinieri $d_n \to 0$ (al posto di $\frac{1}{2}$ andava bene qualunque cosa < 1)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Dico che la funzione $f(x)$, per $x \geq 0$, è Lipschitziana con costante $\frac{1}{2}$, cioè

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b-a| \qquad \forall b \geq 0 \quad \forall a \geq 0$$

Perché è vero? Ripassino: $|f(b) - f(a)| = |b-a| \cdot |f'(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tra } a \text{ e } b}}{c})|$

Quindi basta dim. che $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+15}} = \frac{1}{\sqrt{2x+15}} \le \frac{1}{\sqrt{15}} \le \frac{1}{2}$$

Ora che so che è Lip. con costante $\frac{1}{2}$ basta osservare che

$$\begin{aligned} d_{n+1} = |a_{n+1} - 5| &= |f(a_n) - 5| \\ &= |f(a_n) - f(5)| \\ &\le \frac{1}{2}|a_n - 5| \\ &= \frac{1}{2} d_n \end{aligned}$$

uso la Lip. $\nearrow$

Mettendo insieme otteniamo $d_{n+1} \le \frac{1}{2} d_n$.

<u>Esempio 2</u> $\quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15} \qquad a_0 = 2025$

Anche adesso $a_n \to 5$. Proviamo a fare un piano per dimostrarlo

$\boxed{\text{PIANO 1}}$

(i) $a_n \ge 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (i) + (ii) + teo. succ. monot.

(iv) $\ell = 5$ $\qquad \rightsquigarrow \ell = \sqrt{2\ell + 15}$

<u>Dim (i)</u> Induzione ... $a_n \ge 5$ ... applico f e diventa

$$\underset{\overset{\shortparallel}{a_{n+1}}}{f(a_n)} \ge \underset{\overset{\shortparallel}{5}}{f(5)} \quad \rightsquigarrow \text{tesi} \ ☺$$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Induzione $\quad a_1 \le a_0$ è una verifica diretta

Passo $n \Rightarrow n+1$ ... $a_{n+1} \le a_n$ ... applico f che è crescente

$$\dots \underset{\overset{\shortparallel}{a_{n+2}}}{f(a_{n+1})} \le \underset{\overset{\shortparallel}{a_{n+1}}}{f(a_n)} \quad ☺$$

$\boxed{\text{PIANO 2}}$ Con la distanza. Pongo $d_n = |a_n - 5|$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (o anche $a_n \geq 5$) (come prima)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$ (ii) + induzione

(iv) $d_n \to 0$ (iii) + carabinieri

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Qui serve la Lip.

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 5| = |f(a_n) - f(5)| \leq \frac{1}{2} |a_n - 5| = \frac{1}{2} d_n$$

Oss. A che serve il p.to (i)?
Serve perché abbiamo dim. che $f(x)$ è Lip con costante $\frac{1}{2}$ per $x \geq 0$
quindi per usarla serve $a_n \geq 0$.

— o — o —