ANALISI 1 — LEZIONE 133 (−3)

Note Title 17/05/2017

Costruzione funzioni elementari

POTENZE E RADICI

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ voglio definire $f(x) = x^n$ come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
oppure $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

- Definizione facile per induzione $x^{n+1} = x^n \cdot x$
  prodotto su $\mathbb{R}$

- Iniettività come $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ segue dalla stretta crescenza, la quale si dimostra a partire dagli assiomi di ordinamento (per induzione su $\mathbb{N}$)

- Surgettività. Qui entrano in gioco i numeri reali. Sostanzialmente serve il teo. di esistenza degli zeri il quale ha due ingredienti
  → la continuità (segue per induzione dalla continuità del prodotto di funzioni)
  → qualcosa del tipo

$$\boxed{\forall r > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \exists x \geq 0 \text{ t.c. } x^n > r}$$

(Basta dim. per induzione che $x^n \geq x$ per ogni $n \geq 1$ e $x \geq 1$ a quel punto uso $x = r+1$)

- Avuta la surgettività, abbiamo le funzioni inverse, quindi le radici

— o — o —

ESPONENZIALI Come si definisce a^x o anche solo e^x

Soluzioni di comodo:

① $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (dopo aver osservato che la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ per assol. conv. e criterio del rapporto)

[Esercizio: dim. le proprietà :)]

② $e^x := \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (dopo aver dim. che il limite esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$)

③ Soluzione del pbm. di Cauchy $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

(Bisognerebbe sapere che la sol. esiste unica e globale)

④ L'unico numero y tale che $x = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt$

(ovviamente perché esiste? perché è unico)

⓪ Più precorsistica: attraverso l'equazione funzionale

Dato $a > 1$ (ma un discorso analogo vale per $a \in (0,1)$) cerco una funzione

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ (moralmente è a^x)

tale che

(i) $f_a(1) = a$

(ii) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$

Sorpresona: f_a NON è unica, ma quasi

$\boxed{\text{Teorema}}$ Per ogni $a>1$ esiste un'unica funzione

$$f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

che verifica (i) e (ii)

Inoltre tale funzione

- è strett. cresc. in $\mathbb{Q}$,
- è continua in $\mathbb{Q}$
- tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a 0^+ per $x \to -\infty$

$\boxed{\text{Teorema bis}}$ Per ogni $a>1$ esiste un'unica funzione

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

che verifica (i) e (ii) ed è MONOTONA.

Questa verifica su $\mathbb{R}$ le 3 proprietà prec. (monotonia, cont., limiti a $\pm\infty$).

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Passo 1}}$ $f_a(0) = 1$

$$\cancel{a} = f_a(1) = f_a(1+0) = f_a(1) \cdot f_a(0) = \cancel{a} \cdot f_a(0)$$

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Definisco $f_a(n)$ per $n \in \mathbb{N}$.

$$f_a(1) = a, \quad f_a(2) = f_a(1) \cdot f_a(1) = a \cdot a = a^2$$

Per induzione $\quad f_a(n+1) = f_a(n) \cdot f_a(1) = a^n \cdot a = a^{n+1}$

(Bisognerebbe verificare che su $\mathbb{N}$ vale la proprietà $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$ e la stretta crescenza)

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Definisco $f_a(-n)$ per $n \in \mathbb{N}$

$$1 = f_a(0) = f_a(n + (-n)) = f_a(n) \cdot f_a(-n) = a^n \cdot f_a(-n)$$

$$\rightsquigarrow \quad f_a(-n) = \frac{1}{a^n} \quad \text{(inverso moltiplicativo di } a^n\text{)}$$

(Rifare le verifiche di $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$ + monotonia)

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Definisco $f_a(q)$ per $q \in \mathbb{Q}$. Scrivo $q = \frac{m}{n}$

Dimostro come lemma che $f_a(kx) = [f_a(x)]^k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $k \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ facile induzione su k

Dal lemma segue che

$$a^m \underset{\uparrow\, m \in \mathbb{Z}}{=} f_a(m) = f_a\Big(\underset{\uparrow\, k}{n} \cdot \underset{\uparrow\, x}{\frac{m}{n}}\Big) \underset{\uparrow\, \text{Lemma}}{=} \Big[f_a\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big]^n$$

Quindi $\quad f_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}$

inversa della potenza n-esima

(Solite verifiche da rifare)

$\boxed{\text{Passo 5}}$ Come verifico la continuità: siano x e h in $\mathbb{Q}$

$$f_a(x+h) - f_a(x) \quad \leftarrow \text{è piccolo per } h \text{ piccolo}$$

$$= f_a(x) \cdot f_a(h) - f_a(x) = f_a(x) \cdot \underbrace{[f_a(h) - 1]}_{\text{deve essere piccolo per } h \text{ piccolo}}$$

Basta dimostrare, grazie alla monotonia, che $f_a\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ quando $n \to +\infty$.

Ma $f_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$ e perché $f_a\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \sqrt[n]{a} - 1$ è piccolo per n grande ?

Serve che $\sqrt[n]{a} \to 1$ e questo NON SI PUÒ DIM DICENDO

$$a^{\frac{1}{n}} \longrightarrow a^0 = 1$$

Fortunatamente si dim. con Bernoulli.

$\boxed{\text{Passo 6}}$ Restano da fare i limiti a $\pm\infty$.

Come dimostro che

$$a^x \to +\infty \quad \text{per} \quad x \to +\infty \; ?$$

Grazie alla monotonia basta fare che $a^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e questo segue da Bernoulli.

Il limite a $-\infty$ è analogo.

— o — o —

A questo punto l'estensione ad $\mathbb{R}$ è un esercizio.

— o — o —

<u>Funzioni trigonometriche</u>

1. Somma della serie
2. Eq. diff. $u'' = -u$
3. Equazione funzionale

Cerco 2 funzioni $C(x)$ e $S(x)$ t.c.

(i) $C^2(x) + S^2(x) = 1$

(ii) $C(x+y) =$ quello che viene
$S(x+y) =$ quello che viene] segue dalla successiva

(iii) Distanza sulla circ. trigonometrica

$$(C(x+y), S(x,y)) \leftrightarrow (C(x), S(x))$$
$$(C(y), S(y)) \leftrightarrow (C(0), S(0))$$

Si dimostra che sotto ipotesi decenti esistono e sono uniche, continue, e con tutte le propr. usuali.