ANALISI 1 — LEZIONE 41

Note Title 21/11/2024

Studio della convergenza di una serie

Data una serie, la formula esplicita per S_n non si riesce quasi mai a trovare (tranne casi telescopici o molto speciali).

Domanda: come stabilisco se una serie converge o no senza avere la formula esplicita?
Una volta che si sa che converge, possiamo chiederci come approssimare la somma con un errore piccolo a piacere.

Strumenti **Condizione necessaria**

Serie a termini positivi

- → criterio radice
- → criterio rapporto
- → criterio del confronto
- → criterio confronto asintotico
  - * casi standard
  - * casi limite

Serie a segno variabile

- → criterio di LEIBNITZ
- → Carabinieri per serie
- → Convergenza assoluta
- → DIRICHLET

CONDIZIONE NECESSARIA Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \to 0$

Dim Basta osservare che $a_n = \underbrace{S_n}_{\to \ell} - \underbrace{S_{n-1}}_{\to \ell} \to \ell - \ell = 0.$ $\square$

Come si usa? Devo studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Intanto calcolo $\lim_{n\to+\infty} a_n$

- Se il limite non viene 0 (cioè viene altro oppure non esiste), allora di sicuro la serie NON converge (e restano libere tre possibilità: diverge a $\pm\infty$, oppure indeterminata)
- Se il limite viene 0, allora la serie può convergere (ma non è obbligata a farlo, e restano aperte tutte le 4 possibilità)

$\boxed{\text{SERIE A TERMINI POSITIVI}}$

Supponiamo che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Se $a_n \leq 0$ sempre, basta raccogliere -1 e ci si riconduce al caso $a_n \geq 0$ sempre).
Allora i comportamenti possibili sono solo 2:
→ converge ad un numero $l \geq 0$
→ diverge a $+\infty$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora S_n è debolmente crescente e quindi, per il teorema sulle succ. monotone, le uniche possibilità sono

$$S_n \to l \in \mathbb{R}$$
$$S_n \to +\infty.$$

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^2+3n+5}{5n^2+7}}}_{a_n} = +\infty$

Infatti: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{5}$, quindi manca la condizione necessaria, quindi la serie non può convergere.
Essendo a termini positivi, l'unica possibilità è che diverga a $+\infty$.

Oss. Se sotto c'era n^3 non potevo dire nulla (per ora).

Oss. In tutto questo basta che $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE (in tal caso S_n è debolm. crescente definitivamente, e tutto funziona allo stesso modo).

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano a_n e b_n due successioni con $0 \leq a_n \leq b_n$ definitiv.
Allora valgono queste due implicazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Idea della dim. Chiamiamo S_n^a e S_n^b le somme parziali delle due serie.

Supponiamo per semplicità che $0 \leq a_n \leq b_n$ sia vera $\forall n \in \mathbb{N}$ e non solo definitivamente.
Allora

$$S_n^a \leq S_n^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow S_n^a \to +\infty \underset{\substack{\text{confronto} \\ \text{per i limiti}}}{\Rightarrow} S_n^b \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow S_n^b \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow S_n^a$ non possono tendere a $+\infty$

$\Rightarrow$ dal momento che S_n^a ha un limite, essendo monotona, quel limite è reale

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

CRITERIO DELLA RADICE Supponiamo che $a_n \geq 0$ definitiv. e

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Allora

- Se $\ell > 1$, allora la serie diverge a $+\infty$
- Se $\ell < 1$, " " converge
- Se $\ell = 1$, allora BOH :(

CRITERIO DEL RAPPORTO Stessa cosa con $a_n > 0$ definitiv., e

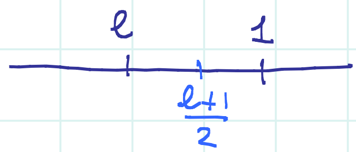
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$$

Dim. criterio radice Ci sono due casi

1° caso Se $\ell > 1$, allora $a_n \to +\infty$, quindi niente cond. nec., quindi non può convergere, quindi diverge a $+\infty$ (è l'unica possibilità essendo a termini ≥ 0)

2° caso Se $\ell < 1$, allora $a_n \to 0$, quindi cond. nec. OK, quindi potrebbe convergere, ma non basta.

Ricordando la dim. per i limiti, se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1$



allora

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \quad \text{definitiv.}$$

quindi

$$0 \leq a_n \leq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{b_n} \quad \text{definitiv}$$

Ora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è una geometrica con parametro $\in (-1,1)$

e quindi converge. Ma allora per confronto anche la serie di a_n converge.

Oss. La dim. del criterio del rapporto è analoga.

Esercizio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}}_{a_n}$$

Criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n}\,\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}} = \frac{4}{5}\underbrace{\left\{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}\right\}^{1/n}}_{\downarrow \atop 1^0=1} \longrightarrow \frac{4}{5} < 1$$

$\rightsquigarrow$ la serie converge

Esercizio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{-n^3}$

Criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^4}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{-n^2} = \overset{\displaystyle 1 \atop \uparrow}{\boxed{\sqrt[n]{n^4}}}\;\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}_{\downarrow \atop e^3}} \longrightarrow \frac{1}{e^3} < 1$$

$\rightsquigarrow$ la serie converge.

— o — o —