# ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 12



## Sottospazi vettoriali

<u>Def</u>. Sia $V$ uno sp. vett. e sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto.
Si dice che $W$ è un sottospazio se (è chiuso rispetto alla somma e al prodotto)
- $\forall w_1 \in W$ e $\forall w_2 \in W$ si ha che $w_1 + w_2 \in W$
- $\forall w \in W$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $\lambda w \in W$

<u>Oss</u>. La seconda con $\lambda = 0$ dice in particolare che $0 \in W$
[ $0 \cdot \vec{w} = \vec{0}$ ]
0 numero   0 vettore

<u>Come dimostro che un certo $W \subseteq V$ NON è un sottospazio?</u>
Faccio vedere che qualcosa va storto, ad esempio
→ mostro che $\vec{0} \notin W$
→ trovo $w_1$ e $w_2$ in $W$ t.c. $w_1 + w_2 \notin W$
→ trovo $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda w \notin W$
} basta un esempio

<u>Come dimostro che un certo $W \subseteq W$ è davvero un sottospazio?</u>
Faccio vedere che nulla va storto, quindi
→ per ogni $w_1$ e $w_2$ in $W$, la somma $w_1 + w_2 \in W$
→ per ogni $w \in W$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto $\lambda w \in W$
[qui non basta un esempio, serve una dimostrazione "universale", devo usare le lettere]

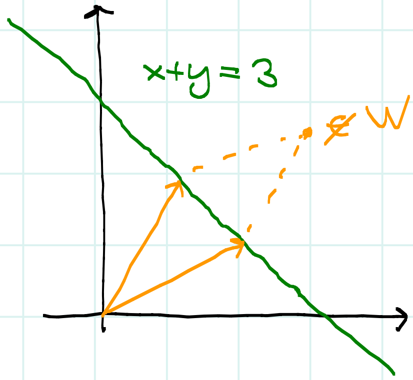
— o — o —

# Sottospazi di $\mathbb{R}^2$

| $x+y=3,$ | $2x+3y=0,$ | $x\geq 0,$ | $x^2+y^2=1,$ | $xy\geq 0,$ |
|---|---|---|---|---|
| NO | SI | NO | NO | NO |

① $x+y=3$

Qui va male tutto



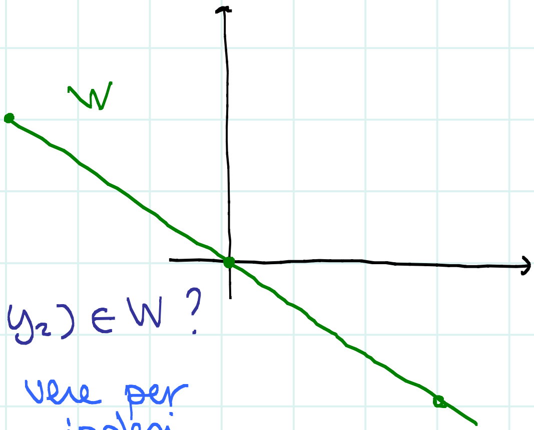

- $(0,0) \notin W$
- $(1,2) \in W, \quad (3,0) \in W$

  $$(1,2)+(3,0)=(4,2)\notin W$$
- $(1,2)\in W, \quad 5\,(1,2)=(5,10)\notin W$

Posso vedere tutto anche geometricamente

② $2x+3y=0$

Qui va bene tutto




- Se $(x_1,y_1)\in W$ e $(x_2,y_2)\in W$, posso concludere che $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\in W$ ?

  $2x_1+3y_1=0 \qquad 2x_2+3y_2=0$ ← vere per ipotesi

  Allora $\quad 2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)$

  $$=(2x_1+3y_1)+(2x_2+3y_2)=0+0=0$$

  ⇝ SOMMA OK
- Se $(x,y)\in W$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, posso concludere che $(\lambda x,\lambda y)\in W$ ?

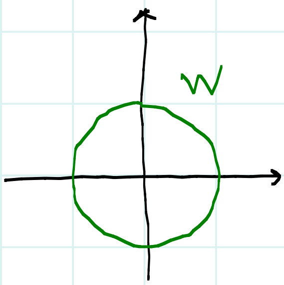
  Hp: $2x+3y=0 \qquad$ Th: $2\lambda x+3\lambda y=0$

  vero perché basta raccogliere $\lambda$.

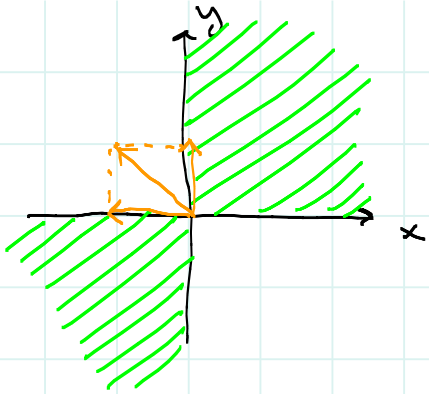
③ $x^2+y^2=1$

Qui va male tutto

(fare gli esempi)



④ $xy \geq 0$ (cioè $x$ e $y$ hanno stesso segno)




- $(0,0) \in W$ ☺
- Se $(x,y) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, posso concludere che $(\lambda x, \lambda y) \in W$?

  Sì, perché $\lambda x \cdot \lambda y = \underbrace{\lambda^2}_{\geq 0} \underbrace{xy}_{\geq 0} \geq 0$ ☺

- La somma però va male ☹

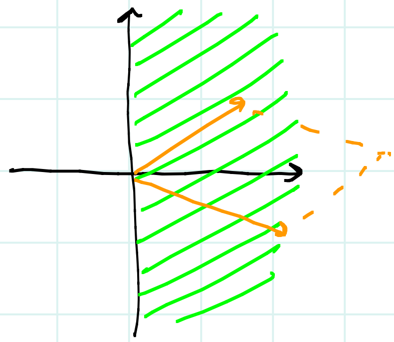
  $(1,2) \in W$ $\qquad$ $(-2,-2) \in W$ $\qquad$ $(-1,0) \overset{?}{\in} W$ ☺

  $(3,1) \in W$ $\qquad$ $(-2,-2) \in W$ $\qquad$ $(1,-1) \notin W$ ☹

Quindi NON è un sottospazio

Esempio più eclatante: $(0,1)$ e $(-1,0)$

⑤ $x \geq 0$



- $(0,0) \in W$ ☺
- somma va bene

  $(x_1, y_1) \in W \rightsquigarrow x_1 \geq 0$

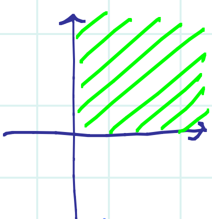
  $(x_2, y_2) \in W \rightsquigarrow x_2 \geq 0$

  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \overset{?}{\in} W \qquad x_1 + x_2 \overset{?}{\geq} 0 \qquad$ sì!

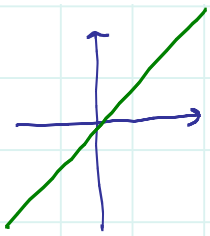
- Se $(x,y) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $(\lambda x, \lambda y) \notin W$ se $\lambda < 0$ e $(x,y) \neq (0,0)$.

  Ad esempio $(1,1) \in W$ ma $-(1,1) \notin W$.

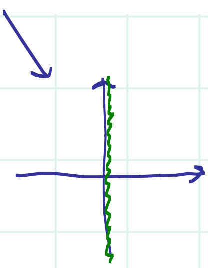
$\boxed{\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}}, \qquad x = y, \qquad x = 0, \qquad x^2 + y^2 \geq 1, \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$



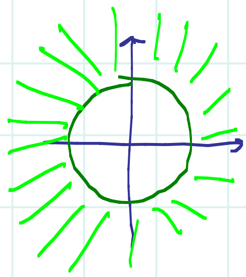
☹ prod. per $\lambda$ negativi



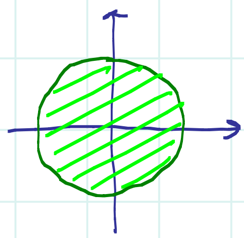
☺



☺



$0 \notin W$ ☹



$(1,0) \in W$
$(0,1) \in W$ ☹
$(1,1) \notin W$

Spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$p(0) = 5,$ $p(5) = 0,$ $p(0) = 0,$ $p(5) = 5,$ $p(0) = p(5),$

1. Va male tutto: $0 \notin W$, somma e prodotto
2. Va bene tutto [Se $p_1(5) = 0$ e $p_2(5) = 0$, allora $(p_1 + p_2)(5)$ $= p_1(5) + p_2(5) = 0$]
3. Tutto bene
4. $p(5) = 5 \rightsquigarrow$ tutto male come in 1
5. Tutto bene

[Volendo posso espandere la condizione: scrivo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Cosa vuol dire che $p(0) = p(5)$?

$$\cancel{a_0} = \cancel{a_0} + 5a_1 + 25a_2 + 125\, a_3$$

cioè $a_1 + 5a_2 + 25\, a_3$

Quindi l'esercizio è la stessa cosa che dire

$$W = \{ (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4 : \; a_1 + 5a_2 + 25\, a_3 = 0 \}$$

qui andava male se era $\neq 0$

$p(x) = p(x^2),$ Espando la condizione...

$$a_0 + a_1 \cancel{x} + a_2 \cancel{x^2} + a_3 \cancel{x^3} = a_0 + a_1 \cancel{x^2} + a_2 \cancel{x^4} + a_3 \cancel{x^6}$$

$\rightsquigarrow a_3 = 0 \rightsquigarrow a_2 = 0 \rightsquigarrow a_1 = 0 \rightsquigarrow a_0$ qualunque

Quindi $W$ = polinomi costanti

Quindi va tutto bene!

— o — o —