ANALISI 1 — LEZIONE 125

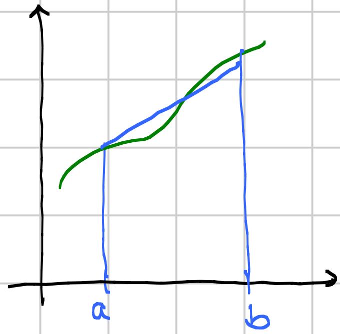
Note Title 09/05/2017

Metodo dei trapezi per gli integrali

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2

Domanda: che errore si commette dicendo che

integrale ~ area trapezio



Fatto generale

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) \right| \leq (b-a)^3 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}$$

Dim. Sia $r(x)$ la retta del lato obliquo. Poniamo $\varphi(x) := f(x) - r(x)$ e osserviamo che

$$LHS = \left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$$

Area trapezio $= \int_a^b r(x)\,dx$

Osservo che $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, quindi per Lagrange

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(a)| = |\varphi'(c)| \cdot |x-a| \leq |\varphi'(c)|\,(b-a)$$

Osservo che esiste $d \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(d) = 0$ (Rolle) e quindi

$$|\varphi'(c)| = |\varphi'(c) - \varphi'(d)| = |\varphi''(e)| \cdot |c-d| \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |\varphi''(x)|$$

$$= (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Tornando indietro

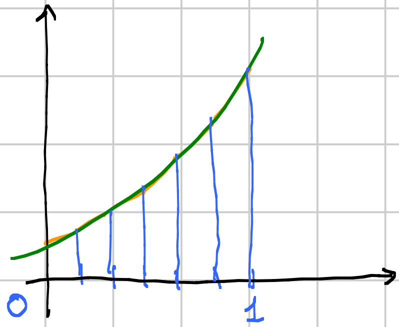
$|\varphi'(c)| \le (b-a) \max |f''(x)|$, ma allora

$|\varphi(x)| \le (b-a)^2 \max |f''(x)|$, ma allora

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx \le \int_a^b \text{cost.}\,dx = (b-a)^3 \max |f''(x)|.$$

— o — o —

Utilità pratica: posso approx un integrale con aree dei trapezi



Voglio calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$. Divido $[0,1]$ in n parti e sommo le aree di n trapezi. Su ogni pezzo l'errore è $\le \frac{1}{n^3} \max |f''(x)|$

Essendo n pezzi ottengo che

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \sum \text{aree trapezi} \right| \le n \cdot \frac{1}{n^3} \max |f''(x)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

— o — o —

$$I_n := \int_0^{\pi} \sin^n x \,dx$$

Domanda 1: calcolare il $\lim I_n$ Claim: $I_n \to 0$.

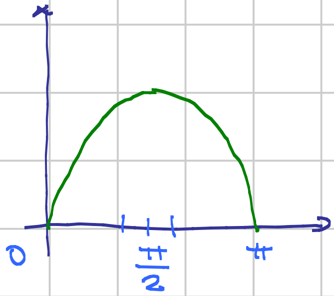
$\boxed{\text{Dim 1}}$ Usando la ricorrenza $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

Questa si può pensare come succ. per ricorrenza e da qui si fa vedere

$$I_{2n} \to 0 \quad \text{e} \quad I_{2n+1} \to 0$$

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Grande tentazione

$$I_n = \int_0^{\pi} \underset{\downarrow \atop 0}{\sin^n x}\, dx \longrightarrow \int_0^{\pi} 0\, dx = 0$$



Proviamo a sistemare l'idea.

Fisso $\varepsilon > 0$ e scrivo

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}$$

$$0 \leq I_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \sin^n x\, dx$$

$$\leq 2\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \underbrace{2\varepsilon}$$

Ho usato che $\sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$

ho usato $\sin x \leq 1$ e zona di integr. di lungh 2ε

Facendo il limsup ottengo

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty} I_n \leq \limsup_{n\to+\infty} I_n \leq 2\varepsilon$$

Ho usato che $\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \to 0$ per $n \to +\infty$

Essendo ε arbitrario ottengo che $I_n \to 0$.

— o — o —

<u>Domanda 2</u> : determinare ordine di infinitesimo e parte principale di I_n.

$\boxed{\text{Idea}}$ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ Calcoliamo un po' di termini

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \qquad I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0 \qquad I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0$$

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(2m)(2m-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\text{denom}}{\text{denom}} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

Ora uso Stirling:

$$I_{2m} = \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2m}\,(2m)^{2m}}{\cancel{e^{2m}}}\,\frac{1}{\cancel{2^{2m}}}\,\frac{\cancel{e^{2m}}}{2\pi m\cdot \cancel{m^{2m}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2m}}$$

Poi bisogna moltiplicare per $I_0 = \pi$ $\qquad I_{2m} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2m}}$

Un discorso analogo andrebbe fatto sui dispari, portando (forse) a

$$I_n \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$$

— o — o —

Esercizio Per ogni $x \leq 1$ vale $\quad 1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$

Dim Studio di funzioni (volendo a sx è convessità, a dx si può intuire con Taylor)

Pongo $x = -t^2$ e ottengo

$$1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Elevo alla n

$$(1-t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \qquad \forall t\in[-1,1]$$

serve $(1-t^2)\geq 0$

Integro su $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt \leq \int_{-1}^{1} e^{-nt^2}\,dt \leq \int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-nt^2}\,dt$$

Pongo $\sqrt{n}\,t = x$ $\quad \sqrt{n}\,dt = dx$

$$= \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{n}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt = +\int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)^n \sin x\,dx$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\,dx$

$$= I_{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

$t = \frac{1}{\tan x}$ $\quad dt = \frac{-1}{\sin^2 x}\,dx$

$$= \int \sin^{2n} x \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2}} = \frac{1}{1+\frac{\cos^2}{\sin^2}} = \sin^2$$

$$= \int \sin^{2n-2} x\,dx = I_{2n-2} \dots$$

c'è qualche esponente sbagliato ...

Aggiunto dopo video: gli esponenti sono giusti ☺
Sarebbe però meglio fare l'integrale al RHS tra $-\infty$ e $+\infty$, che così gli estremi tornano meglio.
Occhio poi che il cambio $t = \frac{1}{\tan x}$ è "improprio"

$$I_{2n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \le I_{2n-2}$$

Moltiplico per $\sqrt{n}$ e se i conti sono giusti

$$\sqrt{n}\, I_{\dots} \le \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \le \sqrt{n}\, I_{\dots}$$

$\sqrt{n}\, I_{\dots} \to \sqrt{\pi}$ $\quad$ $\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \xrightarrow{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ $\quad$ $\sqrt{n}\, I_{\dots} \to$ parte principale di I_n

$\sqrt{\pi}$