# ANALISI 1 — LEZIONE 45

Note Title 23/11/2024

**Esercizio 1** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\log(n^4+4) - 4\log n]$

$a_n = \log(n^4+4) - 4\log n = \log\left(\frac{n^4+4}{n^4}\right)$

$= \log\left(1+\frac{4}{n^4}\right) \sim \frac{4}{n^4}$ $\Rightarrow$ converge perché $4>1$

$\log(1+t)\sim t$ per $t\sim 0$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^4}$ ... $\frac{a_n}{b_n} \to 4$ $\neq 0$, $\neq +\infty$

**Esercizio 2** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$

Ricordiamo che $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x>0$, quindi

$\frac{\pi}{2} - \arctan n = \arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ la serie diverge

$\arctan x \sim x$ per $x\sim 0$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$ e si riduce a

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}} \to 1$$

↗ come prima num $= \arctan\frac{1}{n}$

↘ usare De L'Hôp dopo essere passati alle funzioni

**Esercizio 3** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n^3+3^n} - 3\right)}_{a_n \geq 0}$

$a_n = \sqrt[n]{3^n\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} - 3 = 3\left[\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$

$= 3\left[e^{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} - 1\right] \sim 3\left[e^{\frac{n^2}{3^n}} - 1\right] \sim \frac{3n^2}{3^n}$

$\log(1+t)\sim t$ $\qquad$ $e^t \sim 1+t$

Ora $\sum \frac{n^2}{3^n}$ converge per il criterio della radice o del rapporto, quindi la serie iniziale converge.

Rigoroso: devo fare C.A. con $b_n = \frac{n^2}{3^n}$ e vedo che $\frac{a_n}{b_n} \to 3$.

## Esempio 4

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}}$$

Manca la cond. necessaria

$a_n$ NON ha limite perché

$a_{2n} \to 1$

$a_{2n+1} \to -1$

$|a_n| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum |a_n| = +\infty$

$\Rightarrow$ BOH

$|a_n| = \frac{n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$

$\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge (assoluta convergenza)

Per la 2ª l'unica speranza è Leibnitz con $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

(i) $a_n \geq 0$ :) (ii) $a_n \to 0$ :)

(iii) $a_{n+1} \leq a_n$ cioè $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$ almeno definitiv.

Svolgo bovinamente i conti

$$(n+1)(n^2+1) \overset{?}{\leq} n(n^2+2n+2)$$

$$\cancel{n^3} + \cancel{n} + \cancel{n^2} + 1 \overset{?}{\leq} \cancel{n^3} + \cancel{2}n^2 + \cancel{2}n \rightsquigarrow n^2 + n \geq 1 \quad :)$$

Quindi converge per Leibnitz, ma non converge assolutamente

## Esempio 5

| | | |
|---|---|---|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$ |
| 1 | 2 | 3 |

① $|a_n| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto} \\ \text{tra serie a} \\ \text{termini } \geq 0}}{\Longrightarrow}$ $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ conv. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{assoluta} \\ \text{convergenza}}}{\Longrightarrow}$ $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ conv.

② Non è nemmeno a segni variabili!

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2+\sin n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}$$

↑ basta questo per concludere con il confronto a 2

Guai ad usare $\sin n \sim n$ !!!

③ $\frac{2+\sin n}{n} \geq \frac{1}{n} > 0 \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{2+\sin n}{n} = +\infty$

<u>Esempio 6</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+1}{n^3-4n+6}$

Assoluta convergenza: NO perché $|a_n| \sim \frac{1}{n}$ :)

"Unica" speranza: Leibnitz, ma c'è il problema della monotonia.

Alternativa più astuta: $\frac{n^2+3n+1}{n^3-4n+6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{n} + \frac{\cancel{n^3} + 3n^2 + n - \cancel{n^3} + 4n - 6}{n(n^3-4n+6)}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{3n^2+5n-6}{n(n^3-4n+6)}$$

Adesso so che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cdots = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{Leibnitz tranquillo}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \overbrace{\boxed{\frac{3n^3+5n-6}{n(n^3-4n+6)}}}^{\sim \frac{3}{n^2}}}_{\text{convergenza assoluta}}$$

**Esempio 7** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{a}$ Per quali $a>0$ converge?

$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$ quindi $a_n \sim \left(\frac{1}{6n^3}\right)^{a} = \frac{1}{6^a}\cdot\frac{1}{n^{3a}}$

$\uparrow$ $\sin x \sim x - \frac{1}{6}x^3$

e questa converge quando $3a>1$, cioè $a>\frac{1}{3}$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3a}}$

**Esempio 8** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh\frac{3}{n} - \sin\frac{a}{n}\right)$ Per quali $a>0$ converge?

$\sinh\frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}$ $\quad\quad \sin\frac{a}{n} \sim \frac{a}{n}$

Quindi $a_n \sim \frac{3-a}{n}$. Se $a \neq 3$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, quindi diverge

Se $a=3$, entrano in gioco i termini successivi, cioè

$\sinh\frac{3}{n} \sim \frac{3}{n} + \frac{1}{6}\frac{27}{n^3}$ $\quad\quad \sin\frac{3}{n} \sim \frac{3}{n} - \frac{1}{6}\frac{27}{n^3}$

$\uparrow$ $\sinh t = t + \frac{1}{6}t^3$

Quindi $a_n \sim \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{n^3} = \frac{9}{n^3}$ e quindi la serie converge.

**Esempio 9** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a \cdot \arcsin\left(\frac{n^8}{2^n}\right)$ Per quali $a>0$ converge?

$n^a \cdot \arcsin\left(\frac{n^8}{2^n}\right) \sim n^a \cdot \frac{n^8}{2^n} = \frac{n^{a+8}}{2^n}$

$\uparrow$ $\arcsin x \sim x$ per $x \sim 0$

e $\sum \frac{n^{a+8}}{2^n}$ converge $\forall a \geq 0$

per il criterio della radice o del rapporto.

— o — o —