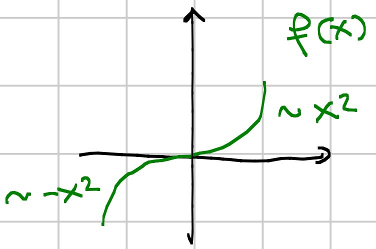
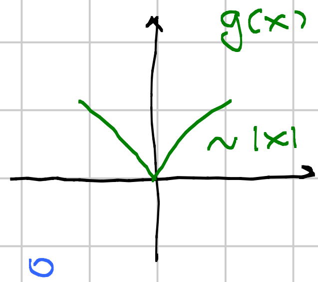
Come stabilisco se $f(x)$ è derivabile in un dato $x_0 \in \mathbb{R}$?

Quando posso usare i teoremi algebrici è facile.

Esempio 1 $\quad f(x) = |x| \sin x \qquad g(x) = |x| \cos x \qquad x_0 = 0$

$f'(0) = 0$ (quindi esiste) $\qquad g'(0)$ non esiste





$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{0}{\uparrow}|h|\,\sin h}{h_{\downarrow 1}} = 0$$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h| \cos h}{h} \quad \text{c'è un problema}$$

$$\underbrace{\lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h} \cos h}{\cancel{h}} = 1}_{f'_+(0)}, \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{-\cancel{h} \cos h}{\cancel{h}} = \underbrace{-1}_{f'_-(0)}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = x\,|\sin x|$ in quali p.ti è derivabile?

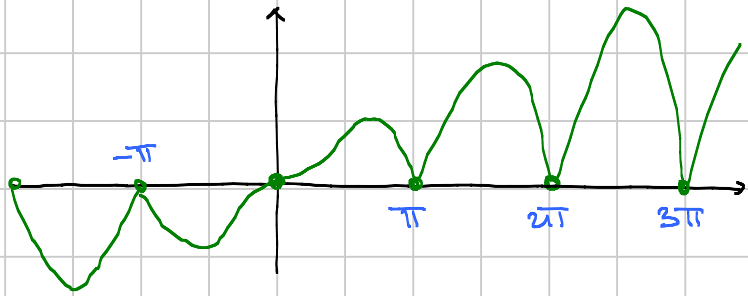
Facile: $\underbrace{\text{tutti quelli tranne}}_{\text{è deriv. in}}$ $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ ⇝ teo. algebrico

Meno facile: $f'(0)$ esiste e fa 0 ⇝ definizione come sopra

Nei p.ti $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ NON è derivabile ⇝ definizione

Vediamo per esempio $x = \pi$

$$\frac{f(\pi+h) - \overset{0}{\overset{\parallel}{f(\pi)}}}{h} = \frac{(\pi+h)|\sin(\pi+h)|}{h} = \underbrace{\boxed{(\pi+h)}}_{\pi} \underbrace{\boxed{\frac{|\sin h|}{h}}}_{\pm 1 \text{ a seconda che } h \to 0^\pm}$$



Quando sono in $n\pi$ ottengo $f'_+(n\pi) = n\pi$

$f'_-(n\pi) = -n\pi$

— o — o —

Lemma Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $r > 0$. Sia $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che f sia derivabile in $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ e supponiamo di sapere che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

Allora in realtà $f'(x_0) = l$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per $h > 0$ vale $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{\cancel{h} \cdot f'(c_h)}{\cancel{h}}$

con $x_0 < c_h < x_0 + h$, quindi $c_h \to x_0$ (carabinieri)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{c_h \to x_0} f'(c_h) = l$$

Stessa cosa per $h \to 0^-$.

Alternativa : Hôpital

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{\text{Hôp.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{1} = l$$

Achtung! Se f è derivabile in $(x_0-1, x_0) \cup (x_0, x_0+1)$ e continua ovunque, ma

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \quad \text{NON ESISTE}$$

allora LA DERIVATA IN x_0 PUÒ ESISTERE ALLA FACCIA DEL LIMITE

Esempio $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{per } x \neq 0$$

Ora $\limsup\limits_{x \to 0} f'(x) = 1$ e $\liminf\limits_{x \to 0} f'(x) = -1$

D'altra parte

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

PROPRIETÀ DI DARBOUX DELLE DERIVATE

Supponiamo $f(x)$ derivabile in (x_0-1, x_0+1). Allora

$$\liminf_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-}} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-}} f'(x)$$

Dim Hôpital o Lagrange come sopra

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \limsup_{h \to 0^+} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \limsup_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Hôp con limsup

Stessa cosa per $h \to 0^-$ e con il liminf.

Conseguenza Sia f continua in (x_0-r, x_0+r) e derivabile in $(x_0-r, x_0) \cup (x_0, x_0+r)$

Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$
con $l_1 \neq l_2$
$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $f'(x_0)$ non esiste, e anzi $f_+'(x_0) = l_1$, $f_-'(x_0) = l_2$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $f_+'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f'(x_0+h) = l_1$

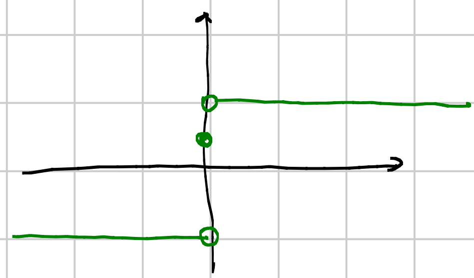
Idem per $f_-'(x_0)$.

Problema (aperto?) Data una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è vero che esiste sempre $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{f' = g}_{\text{ovunque}}$?

$\boxed{\text{FACILE SI}}$ Se g è continua (teo. fond. calcolo integrale)

corretto dopo video

$\boxed{\text{FACILE NO}}$ Se g non ha la proprietà di Darboux



Non è una derivata!

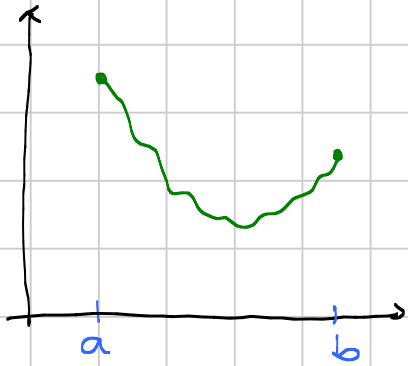
Esercizio Sia f derivabile in (x_0-r, x_0+r), ma non sappiamo se f' è continua.

Supponiamo che esistano 2 p.ti a e b t.c.
$$f'(a) < 0 \quad e \quad f'(b) > 0.$$
Allora esiste c t.c. $f'(c) = 0$.

(Se f' è continua è banalmente il teo. valori intermedi)

$\boxed{\text{Dim}}$ Supponiamo $a < b$

Idea. Considero



$$\min \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

Questo esiste per W. (f deriv. $\Rightarrow f$ cont.)

Sia c uno dei p.ti di minimo.

Se fosse $c \in (a,b)$ (interno), allora di siamo $f'(c) = 0$ ☺

Può essere che il min è assunto in a oppure b?

Questo è impossibile per monotonia 1

- dato che $f'(a) < 0$, allora $f(x) < f(a)$ un po' a dx di a
- " " $f'(b) > 0$, " $f(x) < f(b)$ " " " sx di b.

<u>Oss 1</u> Vale un risultato analogo se $f'(a) < 2$ e $f'(b) > 2$?

<u>Domanda</u> Se $f(x)$ ha la ~~propr.~~ propr. di Darboux, vale il teo. di esistenza degli zeri ?

— o — o —