Integrali impropri classici Sia $b>0$ numero reale

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a\leq 1 \end{cases}$$

Problema a $+\infty$

$$\int_0^{b} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a<1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a\geq 1 \end{cases}$$

Problema a $+\infty$

Oss. geometrica Le funzioni $\frac{1}{x^a}$ per x grandi diventano sempre + piccole all'aumentare di a. Quindi: più a è grande e più è facile che l'integrale converga.

Vicino a 0 le cose si scambiano: più a è grande, più la funzione è grande, quindi più è facile che l'integrale diverga

Dimostrazione del caso a $+\infty$

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_b^A \frac{1}{x^a}\,dx \overset{\text{se } a\neq 1}{=} \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{1-a}\, x^{1-a}\right]_b^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-a}\left[A^{1-a}-b^{1-a}\right]$$

- Se $a<1$, allora "A è al numeratore" e il limite fa $+\infty$
- Se $a>1$, allora "A è al denominatore" e il limite fa $\frac{b^{1-a}}{a-1}$
- Se $a=1$ ... $= [\log x]_b^A = \lim_{A\to+\infty} (\log A - \log b) = +\infty$

La dimostrazione per il problema a 0 è analoga

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a\leq 1 \end{cases}$$

Qui serve $b>1$

Per la dimostrazione basta osservare che la primitiva è

$\frac{1}{1-a}(\log x)^{1-a}$ se $a\neq 1$ $\qquad$ $\log(\log x)$ se $a=1$

— o — o —

Criteri di convergenza Come stabilire se un integrale improprio converge senza calcolarlo esplicitamente (ad esempio perché non si sa calcolare la primitiva)

Occorre intanto guardare se il segno di $f(x)$ è costante (diciamo ≥ 0) oppure no (basta in realtà che il segno sia costante vicino al problema)

<u>Segno costante</u>
→ criterio confronto
→ confronto asintotico (caso standard e casi limite)

<u>Segno variabile</u>
→ Assoluta integrabilità
→ Tecniche per integrali oscillanti (Dirichlet)

Assoluta integrabilità Se $\int_E |f(x)|\,dx$ converge, allora

$$\int_E f(x)\,dx \text{ converge}$$

Non vale il viceversa.

Oss. Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$, allora $\int_E f(x)\,dx$ può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Le dimostrazioni sono analoghe a quelle per le serie

Esempio 1 $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+3x+1}\,dx$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ L'unico problema è a $+\infty$. Qui bisogna osservare che il denominatore è sempre ≥ 1.

Brutal mode $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per x grandi, che è dove abbiamo il problema, quindi ci aspettiamo che l'integrale si comporti come $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ e quindi converge.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Faccio confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to \boxed{+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$ quindi stesso comportamento

perché il pbm. è a $+\infty$

Cosa ci sta sotto: se $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$, allora

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 5$$ per ogni x abbastanza grande

cioè $$\frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq 5g(x)$$ per x grandi

Quindi se $\int g(x)\,dx$ converge, anche $\int f(x)\,dx$ converge per la disuguaglianza di destra.

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx$

Problema in $x=0$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ e questo converge perché $\frac{1}{2} < 1$

Rigoroso: confr. asint. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ che porta a fare

$$\lim_{x \to \underbrace{0^+}_{\uparrow}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad \ldots$$

dove sta il problema

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+3x+1}\,dx$

Come prima $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$,

e questo diverge. Infatti $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^7 \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{diverge}} + \underbrace{\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{converge}}$

LE RIGHE SOPRA SONO SPAZZATURA !! Infatti $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge per colpa di 0, ma $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ solo per x grandi.

L'esito corretto del confronto asintotico è questo:

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$ quindi $\int f(x)\,dx$ con unico problema a $+\infty$
si comporta come $\int g(x)\,dx$ " " "
e quindi in questo caso converge

Oss. Se il problema è in $x=5$, si sposta in $x=0$ con un cambio di variabili.

— o — o —