ANALISI 1 — LEZIONE 26

Note Title 26/10/2024

SOTTOSUCCESSIONI Sia a_n una succ. di numeri reali.
Una sottosuccessione si ottiene prendendo solo alcuni termini della successione

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad \dots$$

Più formalmente, data una successione n_k di interi ≥ 0 strettamente crescente, posso considerare la sottosucc.

$$a_{n_k}$$

sono gli indici che sto pescando: nell'esempio 0, 2, 3, 6, 8

Esempi

a_{2n} = sottosucc. dei termini con indice pari
$= a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

a_{2n+1} = ... termini con indice dispari
$= a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$

$a_{n^2} = a_0, a_1, a_4, a_9, \dots$

Fatto fondamentale Se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (quindi siamo nei casi ①, ②, ③ della def. di limite)
allora $\boxed{\text{tutte}}$ le sue sottosuccessioni $\to \ell$ (stesso ℓ)

CONSEGUENZA Se una succ. $\{a_n\}$ ha due sottosuccessioni che hanno limiti ℓ_1 ed ℓ_2 DIVERSI, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ NON esiste (quindi tipo ④)

Se esistesse il limite di a_n, tutte le sottosucc. dovrebbero avere lo stesso limite.

$\boxed{\text{Operativamente}}$ Come dimostro che $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste?

Basta trovare due sottosucc. con limiti diversi!

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$ $\qquad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Basta osservare che $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$

Essendo diversi, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste.

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} (3n-n^2)^n$ $\qquad [(-\infty)^{+\infty}]$

$$a_{2n} = (6n-4n^2)^{2n} = (4n^2-6n)^{2n} \longrightarrow +\infty \qquad (+\infty^{+\infty})$$

l'esponente è pari

$A^{pari} = (-A)^{pari}$

$$a_{2n+1} = (6n+3-(2n+1)^2)^{2n+1} = -[(2n+1)^2-(6n+3)]^{2n+1} \longrightarrow -\infty$$

esponente dispari

⤳ il − esce fuori

$-[+\infty]^{+\infty}$

Ancora una volta il limite non esiste.

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}_{a_n}$ $\qquad 0, \underset{a_1}{1}, 0, -1, 0, \underset{a_5}{1}, 0, -1, \dots$

L'idea è che il limite non esiste

$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Avrei potuto fare anche $a_{4n+3} = \dots = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \to -1$

—o—o—

$\boxed{\text{Analogo per le funzioni}}$

Come dimostro che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste?

(si intende che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$)

Basta che trovo due successioni $a_n \to \underset{\uparrow}{x_0}$ e $b_n \to \underset{\uparrow}{x_0}$

quello dove tende x

tali che
$$f(a_n) \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$f(b_n) \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$
con $\ell_1 \neq \ell_2$

[Se fosse che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per quanto visto alla lez. prec. anche $f(a_n)$ e $f(b_n)$ tenderebbero allo stesso ℓ]

Esempio 4 $\lim_{x \to +\infty} \cos(x^2)$

L'idea è che il limite non esiste. Devo trovare

$a_n \to \boxed{+\infty}$ $\qquad \cos(a_n^2) \to \ell_1$

$b_n \to \boxed{+\infty}$ $\qquad \cos(b_n^2) \to \ell_2$

sto facendo il lim. per $x \to +\infty$

Posso prendere $a_n = \sqrt{2\pi n} \to +\infty$ e $\cos(a_n^2) = \cos(2\pi n) = 1 \to 1$

$b_n = \sqrt{\pi + 2\pi n} \to +\infty$ e $\cos(b_n^2) = \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \to -1$

Esempio 5 $\lim_{x \to \boxed{0^+}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

L'idea è che non esiste. Devo trovare

$a_n \to \boxed{0^+}$ $\qquad \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \to \ell_1 \qquad \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) \to \ell_2$

$b_n \to \boxed{0^+}$ $\qquad$ con $\ell_1 \neq \ell_2$

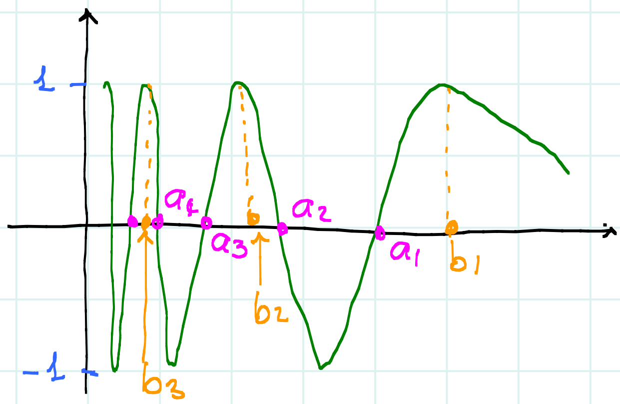
Posso prendere $a_n = \frac{1}{\pi n}$ così $a_n \to 0^+$ e

$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin(\pi n) = 0 \to 0$

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ così $b_n \to 0^+$ e $\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$= 1 \to 1$

Interpretazione grafica



Volendo potevo usare $c_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$ così $c_n \to 0^+$ e $\sin\left(\frac{1}{c_n}\right) \to -1$

Esempio 6 $\lim_{x \to 0^+} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$ $= 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^+} \cos x \cdot \cos\frac{1}{x}$ Non esiste

Per il 1° limite usiamo il trucco del valore assoluto

$$\underset{\downarrow\, 0}{\boxed{0}} \leq |\sin x| \cdot \overbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}^{\leq 1} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\boxed{|\sin x|}}$$

Per i carabinieri $\lim_{x \to 0^+} |\sin x| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| = 0$, e quindi lo stesso vale senza i valori assoluti

Per dimostrare la non esistenza del secondo, cerco

$a_n \to 0^+$ t.c. $\cos a_n \cdot \cos\frac{1}{a_n} \to l_1$

con $l_1 \neq l_2$

$b_n \to 0^+$ t.c. $\cos b_n \cdot \cos\frac{1}{b_n} \to l_2$

$a_n = \frac{1}{2\pi n}$ così $a_n \to 0^+$ e

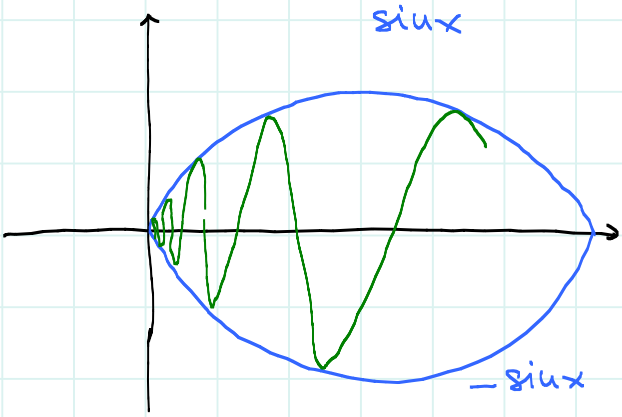
$$\cos a_n \cdot \cos \frac{1}{a_n} = \cos\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \cdot \underbrace{\cos(2\pi n)}_{= 1} = \cos\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \to \cos 0 = 1$$

$b_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$ così $b_n \to 0^+$ e

$$\cos b_n \cdot \cos \frac{1}{b_n} = \cos\left(\frac{1}{2\pi n + \pi}\right) \cdot \underbrace{\cos(2\pi n + \pi)}_{= -1}$$

$$= -\cos\left(\frac{1}{2\pi n + \pi}\right) \to -\cos 0 = -1$$

Come è fatto il grafico di $\sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$?



$\boxed{\sin x} \cdot \boxed{\sin \frac{1}{x}}$

smorza le oscillazioni quando $x \to 0^+$

fa oscillare sempre di + quando $x \to 0^+$

— o — o —