ANALISI 1 — LEZIONE 097

Note Title 24/03/2017

$\boxed{\text{Liminf / limsup di funzioni}}$ Abbastanza analogo al caso delle successioni.

$\boxed{\text{Caso } x \to +\infty}$ Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e supponiamo che $\sup D = +\infty$

Voglio definire

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x)$$

Distinguo due casi

(1) Se $\forall R \in \mathbb{R}$ si ha che $\sup\{f(x) : x \in D, x \geq R\} = +\infty$, allora si pone

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) Se $\exists R_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\sup\{f(x) : x \in D, x \geq R_0\} \in \mathbb{R}$, allora

$$S_R := \sup\{f(x) : x \in D, x \geq R\}$$

è finito, cioè $\in \mathbb{R}$, per ogni $R \geq R_0$, anzi S_R è una funzione decrescente (debolm) di R, quindi ha limite in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ quando $R \to +\infty$.

Si pone allora

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{R \to +\infty} S_R \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

<u>Esempio</u> $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \to S_R = \sup\{\sin x : x \geq R\} = 1$

Quindi

$$\limsup_{x \to +\infty} \sin x = 1$$

Il liminf si definisce allo stesso modo a partire da

$$I_R := \inf\{f(x) : x\in D,\ x\geq R\}$$

Se voglio definire limsup/liminf per $x\to-\infty$, faccio

$$S_R := \sup\{f(x) : x\in D,\ x\leq R\}$$
$$I_R := \inf \qquad ''$$

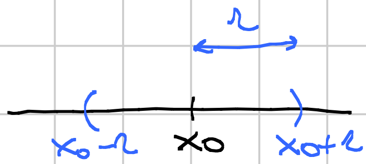
e poi faccio

$$\lim_{R\to-\infty} S_R \qquad\qquad \lim_{R\to-\infty} I_R$$

Caso finito: liminf / limsup per $x\to x_0\in\mathbb{R}$.

Definiamo il limsup distinguendo 2 casi

Caso 1 Se $\forall r>0$ (quelli interessanti sono quelli vicini a 0)



vale che

$$\sup\{f(x) : x\in[(x_0-r,x_0+r)\cap D]\setminus\{x_0\}\} = +\infty$$

allora si pone

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

Caso 2 Se $\exists r_0>0$ tale che sup di prima $\in\mathbb{R}$, allora si pone

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{r\to0^+} \sup\{f(x) : x\in[(x_0-r,x_0+r)\cap D]\setminus\{x_0\}\}$$

più r è piccolo, più il sup è piccolo perché è fatto su un insieme più piccolo.

Discorso analogo vale per il liminf.

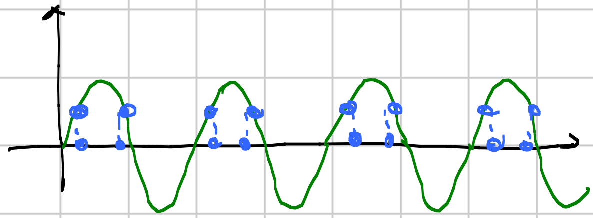
— o — o —

MAXLIM e MINLIM di funzioni

Sia $f: D \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ il punto in cui stiamo facendo liminf / limsup.

Considerano tutte le succ. $x_n \to x_0$ per cui $f(x_n)$ ha limite. Tra tutti i possibili limiti di $f(x_n)$, ce ne sarà uno più grande ed uno più piccolo (fatto non ovvio). Quello + grande è max lim, quello + piccolo è il minlim.

<u>Esempio</u> $f(x) = \sin x \quad x \to +\infty$



$x_n \to +\infty$

su (x_n) ha limite

In questo caso i possibili limiti sono tutti i numeri in $[-1,1]$.
Quindi $\max \lim = 1$ e $\min \lim = -1$.

<u>Teorema</u> $\quad \text{Max lim} = \text{limsup}$

$\text{min lim} = \text{liminf}.$

Dim Tantissimi casi, sostanzialmente quasi tutti uguali. Facciamone uno significativo:

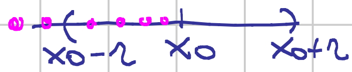
$$\boxed{x_0 \in \mathbb{R} \qquad \limsup_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}}$$

Devo dimostrare due cose:

(1) Se $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \to \ell$, allora $\ell \leq L$
(maxlim $\leq$ limsup)

(2) $\exists\ x_n \to x_0$ tale che $f(x_n) \to L$ (maxlim $\geq$ limsup)

<u>Dim</u> ① Dalla definizione di limsup sappiamo che



$$\sup\{f(x) : x \in (x_0-r, x_0+r) \cap \dots\} \le L+\varepsilon$$

per r abbastanza piccolo

Definitivamente

$$x_n \in (x_0-r, x_0+r) \cap \dots$$

quindi definitiv.

$$f(x_n) \le L+\varepsilon$$

Passando al limite

$$f(x_n) \to \ell \le L+\varepsilon \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0,$$

quindi $\ell \le L$.

<u>Dim</u> ② Devo trovare $x_n \to x_0$ tale che $f(x_n) \to L$.

Perché $\sup\{f(x) : x \in (x_0-r, x_0+r)\} \to L$

per ogni $\varepsilon > 0$ avremo che

$$\sup\{f(x) : \dots\} \ge L-\varepsilon \quad \text{per ogni } r \text{ abb. piccolo.}$$

Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $r = \frac{1}{n}$

Trovo $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ tale che $L+\frac{1}{n} \ge f(x_n) \ge L - \frac{1}{n}$

A questo punto è fatta perché $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \to L$

e questo fornisce la succ. voluta.

— o — o —

Come calcolare un limsup di funzioni

① Disuguaglianza dall'alto
② Successione dal basso

} scambiati per il liminf

Esempio $f(x) = \sin x \cdot \arctan x$

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \limsup_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Dim. il limsup

(1) $f(x) \le \arctan x$, quindi

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) \le \limsup_{x\to+\infty} \arctan x = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

(2) Successione dal basso. Serve $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to \frac{\pi}{2}$

Prendo $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ e $f(x_n) \to \frac{\pi}{2}$

Dim. il liminf

(1) Uso $f(x) \ge -\arctan x \to -\frac{\pi}{2}$

(2) Uso $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Esempio 2 $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \qquad x \to 0^+$

$$\liminf_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \limsup_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

$\boxed{\text{Dim limsup}}$ (1) $f(x) \le 1 \Rightarrow \limsup_{x\to 0^+} f(x) \le 1$

(2) $x_n = \boxed{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} \to 0^+$; $f(x_n) = \cos \dfrac{1}{\dots} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$

$= \cos \dfrac{1}{\dots} \to 1$

$\boxed{\text{Dim. liminf}}$ (1) $f(x) \ge 0$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ (2) $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$

Esempio 3 $\quad f(x) = \sin x \cdot \cos^2 \frac{1}{x} \qquad x \to 0^+$

In questo caso esiste il limite perché

$$\lim_{x\to 0^+} |f(x)| \le \lim_{x\to 0^+} |\sin x| = 0$$

Esempio 4 $\quad f(x) = \sin x \cdot \cos^2 \frac{1}{x} \qquad x \to \boxed{-\infty}$

$\boxed{\text{LIMSUP} = 1}$ ① $f(x) \le \underbrace{\cos^2 \frac{1}{x}}_{\downarrow\ 1}$

② $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ No!!! Deve tendere a $-\infty$

$x_n = \frac{\pi}{2} - 2\pi n \longrightarrow -\infty$ e $f(x_n) \to 1$.

$\boxed{\text{LIMINF} = -1}$ Analogo.

— o — o —