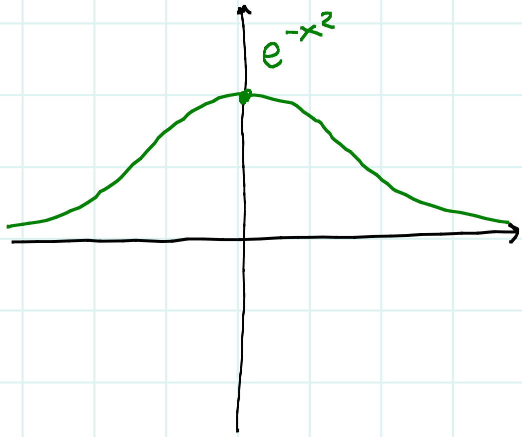
Studio di funzioni integrali

Esempio 1 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

In altre parole: $f(x)$ è LA primitiva di e^{-x^2} che si annulla in $x=0$.
Problema: la primitiva non si esprime in termini di funzioni elementari.
Obiettivo: disegnare il grafico di $f(x)$.



Zona di definizione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

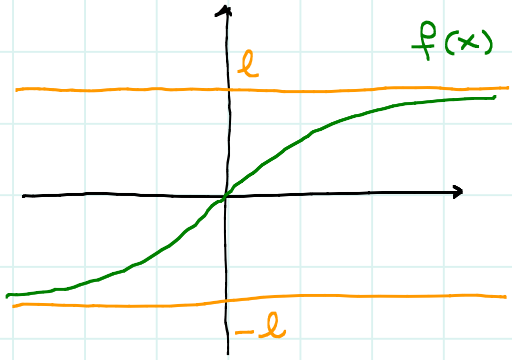
Simmetrie f è dispari perché

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt = -\int_{-x}^{0} e^{-t^2}\,dt$$

ho invertito gli estremi

$$= -\int_0^x e^{-t^2}\,dt = -f(x)$$

e^{-t^2} è PARI



Limiti agli estremi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

def. di integrale improprio

L'integrale improprio converge, quindi il limite è un certo $\ell \in \mathbb{R}$.
Analogamente per parità

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

Perché converge l'int. improprio ?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $\quad e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per ogni $x \geq 1$

Ora $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (si calcola esplicitamente), quindi per confronto anche

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \text{ converge}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Confronto asintotico con $g(x) = \dfrac{1}{x^{2025}}$. Ci si riduce a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2025}}{e^{x^2}} = 0 \qquad [\text{caso limite}]$$

quindi $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{x^{2025}}$ per x grandi ...

$\boxed{\text{Studio della monotonia}}$ $\quad f'(x) = e^{-x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x)$ è strett. cresc. su tutto $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Studio della convessità}}$ $\quad f''(x) = -2x\,e^{-x^2}$

f'': $+ + +$ $\overset{0}{\bullet}$ $- - -$

$\quad\ \smile \qquad \frown$

<u>Esempio 2</u> Prendiamo la $f(x)$ di prima. Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \arctan x}{x^3}$$

È del tipo $\frac{0}{0}$, quindi usiamo de L'Hôpital

$$\ldots = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2 - (1 - x^2) + o(x^2)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{3x^2} = 0$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ di ordine $n=8$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + o(t^7)\right) dt$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + o(x^8)$$

Moralmente: $o(t^7)$ contiene tutte potenze con esponente >7

$\rightsquigarrow$ la sua primitiva contiene tutte potenze con esponente >8

Fatto generale : se $g(x) = o(x^k)$ per $x \to 0$, allora

$$\int_0^x g(t)\,dt = o(x^{k+1}) \text{ per } x \to 0$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Devo fare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^{k+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{(k+1)\,x^k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } g(x) = o(x^k)}}{=} 0$$

Achtung! Gli o piccolo si comportano bene con le primitive, ma non con le derivate.

Esempio classico $\quad f(x) = x^{20} \sin \frac{1}{x^4}$

È evidente che $f(x) = o(x^{19})$, ma non è vero che $f'(x) = o(x^{18})$

Infatti $\quad f'(x) = 20\,x^{19} \sin\frac{1}{x^4} + x^{20} \cdot \cos\frac{1}{x^4}\left(-\frac{4}{x^5}\right)$

$$= \underbrace{20\,x^{19} \sin\frac{1}{x^4}}_{\text{questo è } o(x^{18})} - \underbrace{4\,x^{15} \cos\frac{1}{x^4}}_{\text{Non è } o(x^{18})}$$

Esempio 3 Studiare la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt$$

[Sarebbe LA primitiva di $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}$ che si annulla per $x=1$]

$\boxed{\text{Zona di definizione}}$ Di sicuro ha senso per $x>0$.

Di sicuro non ha senso per $x<0$ perché la funzione che sto integrando non è definita per $t<0$.

Resta $x=0$ per cui diventa

$$\int_1^0 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt = -\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt$$

È un int. impr. per colpa di 0. Per $t \sim 0$ si ha $\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \sim \frac{1}{t}$

e quindi l'int. diverge [rigoroso: C.A. con $\frac{1}{t}$]

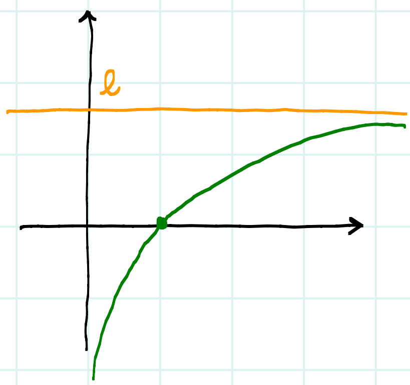
Questo ci dice che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt = -\infty$

Già che ci siamo

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt$$ che converge ad un certo $l \in \mathbb{R}$

[Basta fare C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^{2023}}$ e ci si ritrova nel caso limite]

$\boxed{\text{Monotonia}}$ $f'(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} > 0 \quad \forall x>0$



$\rightsquigarrow$ $f(x)$ è strett. cresc. in $(0,+\infty)$

Convessità $f''(x) = \left[\frac{1}{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} \right]'$

$$= -\frac{1}{x^2} e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{x} e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0 \qquad \forall\, x > 0$$

$\rightsquigarrow$ $f(x)$ è concava in $(0, +\infty)$, come previsto.

Esempio 4 Sia $f(x)$ come nell' esempio precedente.

Capire come $f(x)$ va a $-\infty$ per $x \to 0^+$.

Ad esempio capire

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot \sqrt[3]{x}$$

Brutale: $\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \sim \frac{1}{t}$ per $t \to 0^+$, quindi facendo la primitiva avremo

$$f(x) \sim \log x \quad \text{per } x \to 0^+$$

Rigoroso: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\log x} \underset{\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \cdot x = 1$$

Quindi a maggior ragione

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot \sqrt[3]{x} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{\log x}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{\log x \cdot \sqrt[3]{x}}}_{\downarrow\, 0}$$

(limite dimenticato)

— o — o —

[La versione originale di questo file è andata perduta. Questa è una ricostruzione sulla base del video]