# LIMINF e LIMSUP DI SUCCESSIONI

Sia $a_n$ una successione

## Def. di Limsup

① Se $a_n$ NON è limitata superiormente, allora per def.

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

② Se $a_n$ è limitata superiormente (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$) allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso porre

$$S_n := \sup\{a_k : k \geq n\} \in \mathbb{R}$$

Osservo che $S_{n+1} \leq S_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (sto facendo il sup su meno roba), quindi ammette limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si pone allora

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

— o — o —

## Def. di liminf

① Se $a_n$ non è limitata inferiormente, allora per def.

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

succ. deb. cresc.

② Se $a_n$ è lim. inf., allora $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$.

Oss. 1 Liminf e limsup esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}}$

Oss. 2 Per ogni successione vale

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n \quad (\text{disug. in } \overline{\mathbb{R}})$$

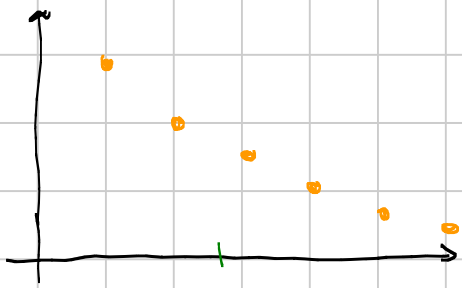
Più avanti vedremo che vale il segno di = se e solo se esiste il limite.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $I_n \leq S_n$ (inf ≤ sup)
Passando al lim. si ha la tesi.

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$S_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = 1 \longrightarrow 1 = \limsup$$
$$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = -1 \longrightarrow -1 = \liminf$$

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$. Allora



$$S_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = \frac{1}{n}$$

$$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = 0$$

Quindi $\limsup \frac{1}{n} = \lim S_n = 0$

$$\liminf \frac{1}{n} = \lim I_n = 0$$

Esempio 3 $a_n = 2^{(-3)^n}$. Allora

$a_n$ non è lim. sup (basta vedere sui pari) $\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$I_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (basta vedere sui dispari) $\Rightarrow \liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$.

## CARATTERIZZAZIONE DEL LIMSUP

① $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ frequentemente

② $\limsup_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff$ succedono due cose $\forall \varepsilon > 0$

(i) $a_n \leq L+\varepsilon$ definitivamente
(ii) $a_n \geq L-\varepsilon$ frequentemente

③ $\limsup_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M$ definitivamente
$\iff \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

**Dim**

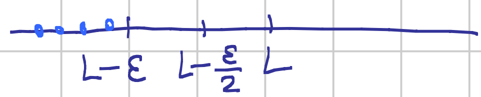
① $\limsup = +\infty \iff a_n$ non è limitata superiormente
$\iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n > M$ almeno una volta
in realtà sono $\infty$ volte perché altrimenti la successione avrebbe un massimo, ma allora non supererebbe mai i valori sopra il max.

② Sappiamo che $L = \lim S_n$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$L - \frac{\varepsilon}{2} \leq S_n \leq L + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{definitivamente}$$

Allora $a_n \leq S_n \leq L + \frac{\varepsilon}{2} \leq L + \varepsilon$ definitivamente, il che dimostra (i).

Per la (ii), supponiamo per assurdo che $a_n \geq L-\varepsilon$ solo un numero finito di volte. Allora da un certo p.to in poi si avrà che $a_n \leq L-\varepsilon$, da cui $S_n \leq L-\varepsilon$, il che va contro il fatto che $S_n \geq L - \frac{\varepsilon}{2}$ definitiv.



③ Se $\limsup a_n = -\infty$, allora $S_n \to -\infty$, quindi $\forall M \in \mathbb{R}$ vale $S_n \leq M$ definitiv., ma

$a_n \leq S_n$, quindi $a_n \leq M$.

— o — o —

## CARATTERIZZAZIONE DEL LIMINF

① $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ vale $a_n \leq M$ frequent.

② $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ valgono 2 cose

(i) $a_n \leq \ell+\varepsilon$ frequentemente

(ii) $a_n \geq \ell-\varepsilon$ definitivamente

③ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}$ vale $a_n \geq M$ definitiv.

$\iff a_n \to +\infty$

— o — o —

Prop. $a_n$ ammette limite $\iff \liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$

Ovviamente in tal caso il valore comune è il limite.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ abbastanza semplice (ovvia se $a_n \to +\infty$ o $a_n \to -\infty$)

Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $\forall \varepsilon > 0$ vale

$$\ell-\varepsilon \leq a_n \leq \ell+\varepsilon \quad \text{definitiv.}$$

ma allora

$$\ell-\varepsilon \leq I_n \leq S_n \leq \ell+\varepsilon \quad \text{definitiv.}$$

che è come dire che $I_n \to \ell$ ed $S_n \to \ell$

$\boxed{\Leftarrow}$ Se liminf e limsup sono $\pm\infty$, siamo nel caso della caratterizzazione (quando limsup è $-\infty$, quando liminf è sono $+\infty$). Supponiamo ora che

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora per la caratterizzazione vale

$$\ell-\varepsilon \le a_n \le \ell+\varepsilon \qquad \text{definitiv.}$$

per merito del liminf      per merito del limsup

che è quello che serve nella def. di limite.

— o — o —

<u>Teorema del confronto</u> Supponiamo che $a_n \le b_n$ definitiv.
Allora

$$\liminf a_n \le \liminf b_n \qquad\qquad \limsup a_n \le \limsup b_n$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $S_n^a \le S_n^b$     $S_n^a = \sup\{a_k : k \ge n\}$
$S_n^b = \sup\{b_k : k \ge n\}$

$\downarrow$     $\downarrow$

$\limsup a_n \le \limsup b_n$

Stessa cosa per gli inf.

<u>Teorema dei carabinieri</u> Supponiamo che $a_n \le b_n \le c_n$ definitiv.
Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{n\to+\infty} b_n \le \limsup_{n\to+\infty} b_n \le \limsup_{n\to+\infty} c_n$$

confronto     ovvia     confronto

<u>Oss.</u> Se $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$ (stesso $\ell$ reale, come nel caso classico, allora i 2 laterali sono uguali, ma allora i 2 centrali sono uguali, quindi $b_n \to \ell$.

— o — o —