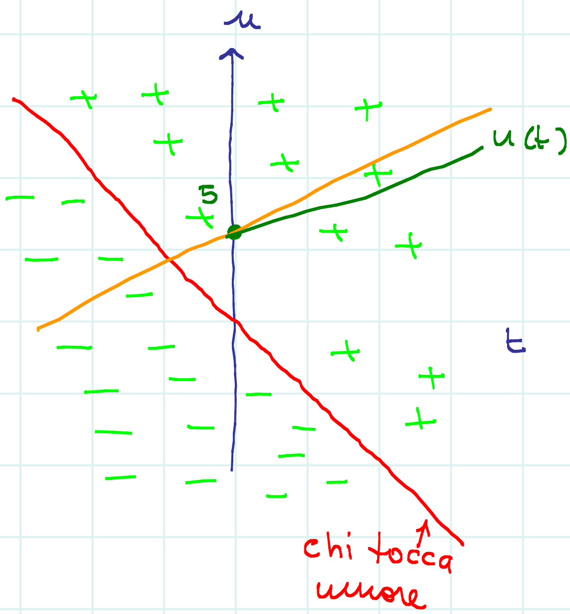
ANALISI 1 — LEZIONE 118

Note Title 17/05/2025

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ $\quad u' = \dfrac{1}{u+t} \qquad u(0) = 5$



Serve $u+t \neq 0$, cioè $u \neq -t$

Nel futuro la soluzione cresce.
Esiste globalmente (nel futuro) perché

$$u'(t) = \frac{1}{u(t)+t} \underset{\substack{t \geq 0 \\ u(t)\geq 5}}{\leq} \frac{1}{5}$$

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ sta sotto la retta $5 + \frac{1}{5}t$. Questo esclude il BU

Qual è $\lim_{t\to+\infty} u(t)$? Dico che è $+\infty$.

Se fosse $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) = \dfrac{1}{u(t)+t} \underset{u(t)<\ell}{\geq} \dfrac{1}{\ell+t}$

Ma allora integrando

$$\underbrace{u(t)}_{\ell} \geq u(0) + \int_0^t \frac{1}{\ell+s}\,ds = u(0) + \underbrace{\log(t+\ell)}_{+\infty} - \log \ell$$

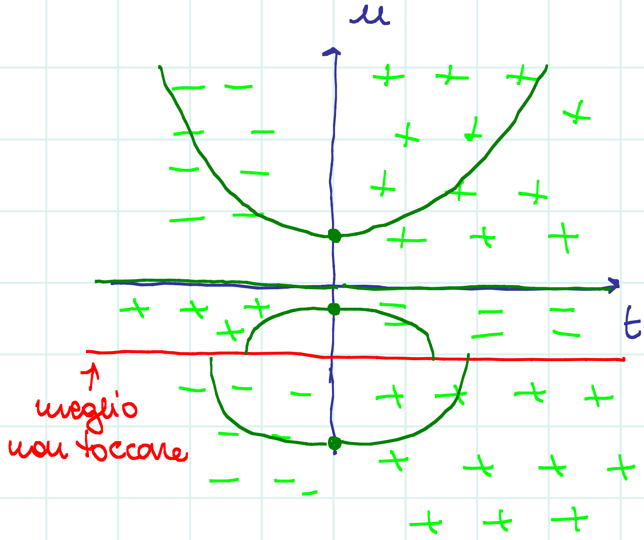
che è assurdo.

Nel passato u ha BD perché per monotonia è costretta ad incrociare la retta rossa.

—o—o—

Esercizio 2 $\quad u' = \dfrac{tu}{u^3+1} \qquad u(0)=\alpha$

Capire come sono fatte le soluzioni al variare di α



FATTO 1 Problemi quando $u=-1$

FATTO 2 $u(t)\equiv 0$ è una soluzione

FATTO 3 Segni di u' come in figura

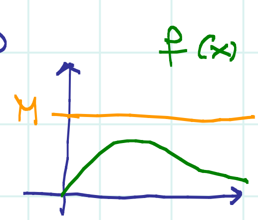
FATTO 4 Partiamo con $\alpha>0$. Dico che c'è esistenza globale nel futuro e nel passato.
Non può esserci BD.
Può esserci BU?

$$u'(t) = t \boxed{\frac{u(t)}{u(t)^3+1}} \le Mt$$

quando $u(t)\geq 0$ è più piccolo di una costante M

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ cresce meno di una parabola, quindi $u(t)$ non può avere BU

Basta osservare che $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ è limitata per $x \geq 0$



FATTO 5 Sappiamo che per $\alpha>0$ la soluzione u è crescente, quindi ha limite per $t\to+\infty$ e questo limite è $\ell\in[\alpha,+\infty)$ oppure $\ell=+\infty$

Uso teorema dell'asintoto. Se per assurdo $\ell\in\mathbb{R}$, allora

$$u'(t) = \underset{\uparrow\, +\infty}{\boxed{t}}\ \underbrace{\boxed{\frac{u}{u^3+1}}}_{\text{numero}>0} \longrightarrow +\infty \text{ e non va bene}$$

Stessa cosa nel passato.

$\boxed{\text{FATTO 6}}$ Se $\alpha \in (-1, 0)$, allora abbiamo BD sia nel futuro, sia nel passato.
Perché?

Vediamo il futuro: se ci fosse esistenza globale, sarebbe
$$-1 < u(t) \leq \alpha$$
e quindi $u(t)$ decrescerebbe e quindi $u(t)$ avrebbe un limite $\ell \in [-1, \alpha]$. Ma allora

$$u'(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\boxed{t}} \; \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{\ell}{\ell^3+1}}}{\boxed{\frac{u(t)}{u(t)^3+1}}}$$ e questo non può essere o

$\boxed{\text{FATTO 7}}$ Se partiamo con $\alpha < -1$, ancora una volta abbiamo BD nel passato e nel futuro

Se avessimo esistenza globale, ... allora $u(t) \to \ell \leq -1$ ...
ma allora $u'(t) \to$ ... e non è possibile per il teorema dell'asintoto.

$\boxed{\text{Parentesi}}$ $f(x) = x^k$ ... primitiva $F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Quando $x \to +\infty$ abbiamo $\frac{F(x)}{f(x)} \to +\infty$

cioè la primitiva batte la funzione all'infinito.

Questo è sempre vero? O ci sono casi in cui perde?

Intanto con $f(x) = e^x$ c'è il pareggio :)

Proviamo con una funzione più che esponenziale

$f(x) = e^{x^2}$ $\boxed{\text{La}}$ sua primitiva è $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

quella t.c. $F(0)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2x\cdot e^{x^2}} = 0$$

Domanda: ma quanto perde?

Dico che $\int_0^x e^{t^2}dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{\cancel{2x}e^{x^2}}{\cancel{2x}} - \frac{e^{x^2}}{2x^2}} = 1$$

:)

<u>Oss.</u> Tutto questo era prevedibile a priori. Basta considerare

$u' = t^{20} \cdot u$ (la derivata è molto + forte a $+\infty$ della funzione)

Questa si risolve $\rightsquigarrow \frac{du}{u} = t^{20}dt \rightsquigarrow \log u = \frac{t^{21}}{21} + c$

$\rightsquigarrow u(t) = e^{\frac{t^{21}}{21}} \cdot k$

— o — o —