ANALISI 1 — LEZIONE 16

Note Title 17/10/2024

Def. Sia $P(n)$ un predicato che parla di numeri naturali $n \in \mathbb{N}$.
Si dice che

- $P(n)$ vale DEFINITIVAMENTE se $P(n)$ vale da un certo punto in poi, cioè

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n) \text{ è vero } \forall n \geq n_0}$$

- $P(n)$ vale FREQUENTEMENTE se $P(n)$ è vero per infiniti valori di n.

Esempi

$n^2 \geq 1000$ vero definitivamente (dire $\forall n \geq 32$)
vero frequentemente

n è pari vero frequentemente
falso frequentemente
non è vero definitivamente

n, scritto in base 10, termina con le cifre 2024
vero frequentemente, ma non definitivamente

SUCCESSIONI

Def. (Rigida) Una successione è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$
di numeri reali

Ad ogni indice n è associato un unico numero reale

Def. (più elastica) Come sopra, ma basta che sia definita definitivamente, cioè per n abbastanza grandi.

Esempi

$a_n = n^2$ $\qquad\qquad$ $b_n = 2^n + n$

$c_n = \sqrt{n-27}$ ⇝ definita "solo" per $n \geq 27$, ma con la definizione elastica è ok

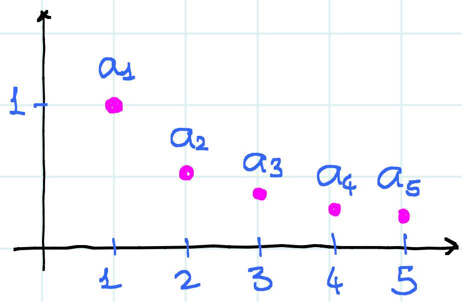
$d_n = \dfrac{1}{n-5}$ ⇝ per $n = 5$ non ha senso, ma ok con definizione elastica $\forall n \geq 6$

$e_n = \sqrt{2024 - n}$ ⇝ va male da 2025 in poi, quindi NON è una successione.

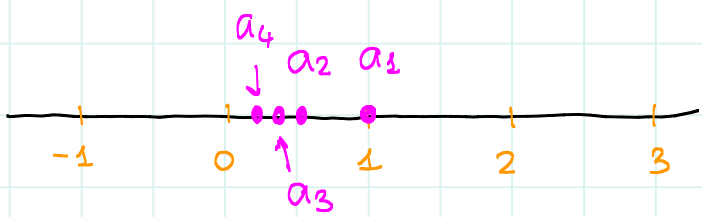
$\boxed{\text{Come visualizzare una successione}}$

Pensiamo ad $a_n = \dfrac{1}{n}$ (ok per ogni $n \geq 1$)

$\boxed{1}$ Pensiamo al "grafico", cioè ai punti (n, a_n) del piano cartesiano



$\boxed{2}$ Pensiamo alla retta reale, e segniamo i punti corrispondenti ad a_n



$\boxed{3}$ Pensiamo alla retta e allo scorrere del tempo
Dopo n secondi si accende una lampadina in a_n e resta accesa per un secondo.

— o — o —

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Andremo a definire $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n}$ — limite di a_n per n che tende all'infinito

Ci sono **quattro possibilità**

1. $a_n \to l \in \mathbb{R}$
2. $a_n \to +\infty$
3. $a_n \to -\infty$
4. a_n non ha limite (cioè il limite non esiste)

Definizioni nei quattro casi

<u>Def. di</u> 4 : Nessuno dei precedenti :)

<u>Def. di</u> 2 : si dice che $a_n \to +\infty$ o $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0}_{a_n \geq M \text{ definitivamente}}}$$

anche enorme

M da un certo punto in poi la succ. sta a dx

Intuitivamente: le lampadine si accendono sempre più a destra

<u>Def. di</u> 3 : si dice che $a_n \to -\infty$ o $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M \text{ definitivamente}}$$

anche enormemente negativo

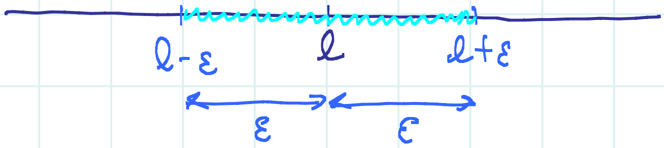
<u>Def. di</u> ① : si dice che $a_n \to \ell$ o $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$, se

(intuitivamente: con il passare del tempo le lampadine si accendono sempre più vicino ad ℓ)

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \le a_n \le \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente}}$$

anche molto vicino a 0

a_n definitivamente sta qua



Altro modo di dire la stessa cosa

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad |a_n - \ell| \le \varepsilon \quad \text{definitivamente}}$$

$|a_n - \ell|$ = distanza fra a_n ed ℓ

<u>Due varianti di</u> ①

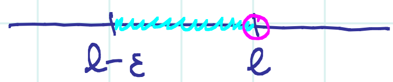
- Si dice che $a_n \to \ell^+$ o $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell^+$ se

  "a_n tende ad ℓ da destra" cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell < a_n \le \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

STRETTA

- Si dice che $a_n \to \ell^-$ o $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell^-$ se



$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \le a_n < \ell \quad \text{definitivamente}$$

STRETTA

Leggende metropolitane

① Se $a_n \to +\infty$, vuol dire che a_n è definitivamente monotona?

No! Basta pensare a Penelope ... 2 passi avanti, 1 indietro
$2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5$

② Se $a_n \to 0$, è vero che $a_n \to 0^+$ oppure $a_n \to 0^-$?

No! Basta pensare a $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

La distanza da 0 diventa sempre più piccola, ma sono alternativamente a dx e sx

③ Se $a_n \to 0^+$, è vero che a_n è definitivamente monotona?

No! Basta pensare a $\frac{1}{\text{Penelope}}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \ldots$

Questa alterna passi nelle due direzioni

④ Se $a_n \to 0$ e a_n è debolmente decrescente, è vero che $a_n \to 0^+$?

No! Se $a_n = 0$ definitivamente, allora è debolm. crescente, tende a 0, ma non a 0^+ per via della disuguaglianza stretta nella definizione $(\ell < a_n \leq \ell + \varepsilon)$

Oss. Se ci fosse "strettamente", allora sarebbe vero.

— o — o —