ANALISI 1 — LEZIONE 022

Note Title 17/10/2016

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

$$a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$$

Ovvio dalla definiz. di limite

Esempio 1 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(\cos x)}{\arctan x} \cos\frac{1}{x^3}}_{f(x)}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ N.E.}\right]$

Facciamo finta che ci sia solo la 1ª parte.

$$\boxed{\frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}} \boxed{\frac{\cos x-1}{x^2}} \boxed{\frac{x}{\arctan x}} \boxed{x} \to 0$$

$$\downarrow \ y=\cos x-1\to 0 \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad -\frac{1}{2} \qquad 1 \qquad 0$$

Basta ora osservare che

$$0 \le |f(x)| \le \underbrace{\left|\frac{\log(\cos x)}{\arctan x}\right|}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0 \ \text{(dim. sopra)}$$

Per i carabinieri $|f(x)| \to 0$, quindi anche $f(x) \to 0$.

Esempio 2 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\arctan^2 x} \cos\frac{1}{x^3}$ NON esiste

Ora la parte senza $\cos\frac{1}{x^3}$ tende a $-\frac{1}{2}$

Ora scelgo $\displaystyle \cos\frac{1}{a_n^3} = 1$ $\qquad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}} \to 0$

$\displaystyle \cos\frac{1}{b_n^3} = -1$ $\qquad b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi + 2\pi n}} \to 0$

RAZIONALIZZAZIONI

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+7}\right) \qquad [+\infty\,(+\infty-\infty)]$$

$$\boxed{\sqrt{A}-\sqrt{B} = \left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}}$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$a=\sqrt{A} \qquad b=\sqrt{B}$

$$x\left(\sqrt{\dots}-\sqrt{\dots}\right)\frac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = x\,\frac{\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}-7}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+7}} \to -1$$

$$=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\,\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}$$

Esempio 4 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+7x}-2}{\log(1+\sin x)} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\frac{\sqrt{4+7x}-2}{\log(1+\sin x)}\,\frac{\sqrt{}+2}{\sqrt{}+2} = \frac{\cancel{4}+7x-\cancel{4}}{\log(1+\sin x)}\,\frac{1}{\sqrt{4+7x}+2}\,\frac{\sin x}{\sin x}\,\frac{x}{x}$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{\log(1+\sin x)}}}_{\downarrow\,1}\;\underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow\,1}\;\underbrace{\boxed{\frac{7}{\sqrt{4+7x}+2}}}_{\downarrow\,\frac{7}{4}} \to \frac{7}{4}$$

Esempio 5 $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x \qquad \sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{x^3}$$

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\frac{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{\dots} = \frac{A-B}{\dots}}$$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\text{testo} = \frac{\cancel{x^3}+2x^2+1-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2+1)^2}+\sqrt[3]{\dots}\cdot x+x^2} \to \frac{2}{3}$$

$$\frac{2x^2}{x^2+x^2+x^2}$$

Esempio 6
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+3}-\sqrt[3]{2n+1}}{n+4} = \sqrt{2}$$

I termini al numeratore hanno ordine diverso!

$$\frac{\sqrt{2n^2}-\sqrt[3]{2n}}{n} = \frac{\sqrt{2}\,n}{n} = \sqrt{2} \quad [\text{Brutal mode}]$$

Limiti per $x \to x_0$, con $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq +\infty$.

Suggerimento: cercare di riportarli a 0 oppure $+\infty$.

Esempio 7
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Pongo $y = x-\pi$. Quando $x \to \pi$ ho che $y \to 0$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{y} = -1$$

precorso

Esempio 8
$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^2+x-2} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Pongo $y = x-1$. Quando $x \to 1$ ho che $y \to 0$, e $x = y+1$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y^2+2y+\cancel{1}+y+\cancel{1}-\cancel{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y(y+3)} = \frac{1}{3}$$

Esempio 9
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+3}+x \qquad [+\infty-\infty]$$

Pongo $y = -x$ quindi $y \to +\infty$

$$\lim_{y\to+\infty} \left(\sqrt{y^2-y+3}-y\right) \frac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\cancel{y^2}-y+3-\cancel{y^2}}{\sqrt{y^2-y+3}+y} = -\frac{1}{2}$$

LIMITI DI SOMMATORIE

Esempio 10

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k^2}}_{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n^2}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{(n+1)^2}} + \dots + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{(4n)^2}} \right)$$

$$0 \leq a_n \leq \boxed{\frac{1}{n^2}} \cdot \boxed{(3n+1)}$$

numero degli addendi

termine + grande

$$\underset{\downarrow\, 0}{0} \leq \underset{\downarrow\, 0}{a_n} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{3n+1}{n^2}}$$

Esempio 11

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} + \dots + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{\sqrt{4n}}} \right) = +\infty$$

$$a_n \geq \boxed{\frac{1}{\sqrt{4n}}} (3n+1) = \frac{3n+1}{\sqrt{4n}} \to +\infty$$

termine + piccolo

Oss. Il limite della somma è = alla somma dei limiti se il numero degli addendi è FISSATO.
Negli esempi il numero dei termini cresce con n, quindi è come se fosse $0 \cdot +\infty$

Esempio 12

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^a} + \frac{1}{(n+1)^a} + \dots + \frac{1}{(4n)^a} \right) = \begin{cases} +\infty & a<1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$$

Per $a=1$ si vede facilmente che a_n è limitata dall'alto e dal basso con una costante positiva. Inoltre si dimostra che è monotona, quindi ha limite. Più avanti si vedrà che $\lim = \log 4$.