SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$a_{n+1} = 3a_n - 2$ (se conosco a_n, posso calcolare a_{n+1})
(regola di passaggio da un termine al successivo)

$a_0 = 4$ ← Dato iniziale a partire dal quale calcolo i termini successivi

$a_0 = 4$, $a_1 = 3a_0 - 2 = 12 - 2 = 10$

$a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 10 - 2 = 28$

$a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 28 - 2 = 82$

e così via

Se voglio a_{2025} ... devo calcolare tutti i termini precedenti

Domande: ① Avere una formula chiusa per a_n che non richieda di calcolare i termini precedenti
(riesce in pochissimi casi fortunati)

② Stabilire il comportamento della successione (ad esempio calcolare il limite) senza avere la formula esplicita.

Nomenclatura

$a_{n+1} = f(a_n)$ 1° ordine autonoma

$a_{n+1} = 3a_n - 7n$ 1° ordine NON autonoma

↑ la regola di passaggio cambia ogni volta

$a_{n+1} = f(a_n, n)$

$a_{n+1} = 3a_n + 5a_{n-1}$ 2° ordine autonoma (dipende a 2 termini prima)

In questo caso occorre dare a_0 e a_1 per partire

$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$ o più in generale $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, n)$

... possiamo avere dipendenza anche da 3 o più termini precedenti

Esempio 1 $a_{n+1} = 2a_n - n$ $a_0 = 3$

Calcolare un po' di termini

$a_1 = 2a_0 - 0 = 6$ ← regola di passaggio con $n=0$

$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 6 - 1 = 11$ ← regola con $n=1$

$a_3 = 2a_2 - 2 = 20$

$a_4 = 2a_3 - 3 = 37$, e così via

Esempio 2 $a_{n+1} = a_n^2$ $a_0 = \frac{3}{4}$

ogni termine è il quadrato del precedente

[Si potrebbe trovare una formula chiusa $a_n = \ldots$, ma facciamo finta di non vederla]

Dimostriamo che $a_n \to 0$ mediante il seguente PIANO

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & 0 \leq a_n \leq \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ (ii) & a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ (iii) & a_n \to \ell \in \mathbb{R} \\ (iv) & \ell = 0 \end{array}\right\} \text{Piano classico con la monotonia}$$

Obiettivo: dimostrare i 4 p.ti deducendo così che $a_n \to 0$.

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (i) + (ii) + teo. succ. monotone

(se a_n è debolmente decrescente e limitata dal basso, nel nostro caso $a_n \geq 0$, allora a_n ha per forza un limite reale)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Scriviamo la ricorrenza e passiamo al limite

$$a_{n+1} = a_n^2$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\ell = \ell^2 \quad \rightsquigarrow \quad \ell = \ell^2 \quad \begin{cases} \ell = 0 \\ \ell = 1 \end{cases}$$

I limiti reali possibili sono $\ell = 0$ e $\ell = 1$, ma $\ell = 1$ è incompatibile con il p.to (i)

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Si fa per induzione

$\boxed{n=0}$ $\quad 0 \leq a_0 \leq \frac{3}{4}$ banale perché $a_0 = \frac{3}{4}$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $0 \leq a_n \leq \frac{3}{4}$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{4}$

Prendo l'ipotesi e applico la funzione $f(x) = x^2$, che è crescente per $x \geq 0$ e quindi conserva i versi delle disuguaglianze

$$0 \leq a_n \leq \frac{3}{4} \implies 0 \leq a_n^2 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \leq \frac{3}{4}$$

quindi $\quad 0 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{4}$:)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Devo dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1° modo : $\boxed{\text{ricorrenza + disequazione}}$

$$a_{n+1} \leq a_n \iff a_n^2 \leq a_n \iff a_n^2 - a_n \leq 0 \underset{\text{precorso}}{\iff} 0 \leq a_n \leq 1$$

ma noi sappiamo che $0 \leq a_n \leq \frac{3}{4}$, quindi ancora meglio.

2° modo : $\boxed{\text{induzione con applico } f}$ Dimostro che $a_{n+1} \leq a_n$ per induzione

$\boxed{\text{Passo base } n=0}$ $\quad a_1 \overset{?}{\leq} a_0 \qquad \underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{\frac{9}{16}}} \overset{?}{\leq} \underset{a_0}{\underset{\shortparallel}{\frac{3}{4}}}$ ☺

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ $\qquad$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Prendiamo l'ipotesi e facciamo il $\square$: non cambio i versi perché sappiamo dal p.to (i) che tutto è ≥ 0

$$a_{n+1} \leq a_n \rightsquigarrow a_{n+1}^2 \leq a_n^2 \rightsquigarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}$$ ☺

— o — o —

Esempio 3 $\qquad a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 5 \qquad a_0 = 3$

$\boxed{\text{PIANO}}$
(i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (ii) + teo. succ. monotone (ora il limite può essere anche $+\infty$)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Se fosse per assurdo $\ell \in \mathbb{R}$, allora passando al limite nella ricorrenza avrei

$$\begin{array}{ccccccc} a_{n+1} & = & a_n^2 & - 2a_n & + 5 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 & -2\ell & +5 \end{array}$$

, cioè $\ell^2 - 3\ell + 5 = 0$

ma questa equazione non ha soluzioni reali perché

$$\Delta = 9 - 20 < 0$$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Per induzione

$\boxed{n=0}$ $a_0 \geq 3$ ovvio perché $a_0 = 3$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $a_n \geq 3$ Tesi: $a_{n+1} \geq 3$

$$a_{n+1} \geq 3 \iff a_n^2 - 2a_n + 5 \geq 3 \iff a_n^2 - 2a_n + 2 \geq 0$$

e questa è sempre vera perché $\Delta = 4 - 8 < 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Provo con $\boxed{\text{ricorrenza + disequazione}}$

$$a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n \iff a_n^2 - 2a_n + 5 \overset{?}{\geq} a_n \iff a_n^2 - 3a_n + 5 \overset{?}{\geq} 0$$

Fortunatamente l'ultima è sempre vera perché $\Delta = 9 - 20 < 0$.

<u>Oss.</u> La disequazione del p.to (ii) è analoga all'equazione finale del p.to (iv).

— o — o —