ANALISI 1 - LEZIONE 026

Note Title 20/10/2016

<u>Calcolo di derivate</u>: → teo. algebrici
→ tabellina derivate funzioni elementari
→ derivata funzione composta
→ derivata funzione inversa

Teoremi algebrici

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(af)' = af'$$

La derivata è un' appl. lineare

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$
$$\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Derivata somma f deriv. in x_0, g derivab. in x_0

$$s(x) := f(x) + g(x)$$

Allora $s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

1° modo $s'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2° modo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

Sommo:

$$s(x_0+h) = s(x_0) + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]}_{s'(x_0)} h + o(h)$$

Stessa cosa per la differenza. Simile per $af(x)$

Proposizione intermedia Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Dim.
$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{(x-x_0)}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow f(x_0)$$

per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pongo $x - x_0 = h$. Quando $x \to x_0$ ho che $h \to 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

—o—o—

Derivata del prodotto $p(x) := f(x) \cdot g(x)$

1° modo $$p'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

TERMINE MISTO !

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0+h)\,g(x_0) + f(x_0+h)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{\boxed{f(x_0+h)}}_{\downarrow\, f(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, g'(x_0)} + g(x_0) \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \right]$$

(per la continuità vista prima)

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$$

2° modo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)\,h + o(h)$$

Moltiplico

$$p(x_0+h) = p(x_0) + [f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)]\,h + o(h)$$

αh

$\leftarrow$ contiene tutti i restanti 6 termini (convincersene)

Derivata del quoziente

$$q(x) := \frac{1}{f(x)}$$

stiamo assumendo che $f(x_0) \neq 0$, quindi anche per x vicini ad x_0.

1° modo

$$q'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{q(x_0+h) - q(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h)\cdot f(x_0)}$$
$$= \lim_{h\to 0} -\underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\downarrow\ f'(x_0)}\cdot\underbrace{\frac{1}{f(x_0+h)\cdot f(x_0)}}_{\downarrow\ [f(x_0)]^2}$$
$$= -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

— o — o —

A questo punto

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \left[f\cdot\frac{1}{g}\right]' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$
$$= \frac{f'\cdot g - f g'}{g^2}$$

— o — o —

Composizione **Teorema misterioso**

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Inversa **Teorema misterioso**

Siano $\delta > 0$ ed $r > 0$. Sia $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - r, y_0 + r)$ una funzione invertibile, e sia $g : \ldots \to \ldots$ la funzione inversa. Supponiamo che $f(x_0) = y_0$.
Supponiamo f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$.
Allora g è derivabile in y_0 e vale

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}}$$

Non dimostrazione $\quad f(g(x)) = x$

Derivo a dx e sx

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(occhio: ho supposto che g fosse derivabile)

<u>Esempio 1</u> $\quad f(x) = e^x, \quad g(x) = \log x \qquad f'(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

<u>Esempio 2</u> $\quad f(x) = \tan x, \quad g(x) = \arctan x$

$$f'(x) = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

stessa cosa

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$, $f'(x) = \cos x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

bisognerebbe controllare il segno, che dipende da dove sta α

A noi serve con $\alpha = \arcsin x$ che sta nel 1° o 4° quadrante, cioè proprio dove $\cos > 0$.

— o — o —

$\boxed{\text{Derivate funzioni elementari}}$

$(\text{costante})' = 0$ $(x^n)' = n x^{n-1}$ (binomio di Newton oppure induzione su n)

$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \cdot \log a$ $(x^a)' = a x^{a-1}$

$x^a = e^{a \log x}$ $(x^a)' = \left(e^{a\log x}\right)' = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x}$

$= a \cdot x^{a-1}$

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Esempio 1 $[\cos(\log x)]' = -\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x}$

$[\cos x \cdot \log x]' = -\sin x \cdot \log x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$

$[x^x]' = x^x \log x$ (vedendolo come a^x)
$= x \cdot x^{x-1} = x^x$ (" " x^a)

SBAGLIATI ENTRAMBI

$$[x^x]' = [e^{x\log x}]' = e^{x\log x}\,[x\log x]'$$

$$= e^{x\log x}\left[1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$= x^x\,[\log x + 1]$$

$$= x^x\log x + x^x$$

Esercizio Provare a calcolare $\left([f(x)]^{g(x)}\right)' = \dots$

— o — o —