ANALISI 1 — LEZIONE 101

Note Title 02/05/2025

SUCCESSIONI PER RICORRENZA LINEARI

Caso semplice $x_{n+1} = a x_n + b$ con a e b numeri dati

(esempio : $x_{n+1} = 3x_n - 2$ oppure $x_{n+1} = -7x_n + 5$)

Obiettivo : trovare FORMULA ESPLICITA

Caso banale Se $b=0$, allora $\boxed{x_{n+1} = a x_n}$

Formula generale : $\boxed{x_n = a^n x_0}$ (si dimostra per induzione)

$x_1 = a x_0$, $x_2 = a x_1 = a a x_0 = a^2 x_0$, $x_3 = a x_2 = a \cdot a^2 x_0 = a^3 x_0 \ldots$

Caso più generale $x_{n+1} = a x_0 + b$

Proviamo a scrivere i primi termini

$x_1 = a x_0 + b$, $x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

Sembra venire

$$x_n = a^n x_0 + b\,(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$$
$$= a^n x_0 + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Sembra ragionevole la formula $\boxed{x_n = x_0 a^n + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}}$ se $a \neq 1$

Se $a = 1$, allora $x_{n+1} = x_n + b \rightsquigarrow \boxed{x_n = x_0 + nb}$ se $a = 1$

Entrambe le formule si dimostrano facilmente per induzione.

Modo alternativo $\quad x_{n+1} = a x_n + b$

Domanda: esiste una succ. costante che la verifica?

Se $x_n \equiv \ell$, allora $\ell = a\ell + b$, cioè $\ell = -\frac{b}{a-1}$

Ogni altra soluzione la scriviamo come $x_n = \ell + y_n$
Vedo cosa risolve y_n:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \ell = a x_n + b - \ell = a(\ell + y_n) + b - \ell$$
$$= a y_n + \underbrace{\boxed{a\ell - \ell + b}}_{=0 \text{ per l'eq. che definisce } \ell}$$

quindi $y_{n+1} = a y_n$, quindi dal caso banale

$$y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 - \ell)$$

Ma allora $\quad x_n = \ell + y_n = \ell + a^n(x_0 - \ell)$

$$= a^n x_0 + (1 - a^n)\ell$$

$$= a^n x_0 + \frac{a^n - 1}{a-1} b,$$

che è la stessa formula di prima.

Interpretazione $\quad x_{n+1} = \underbrace{a x_n}_{\text{parte omogenea}} + b$ parte non omogenea

Soluz. generale $= \underbrace{c a^n}_{\text{soluzione generale della omogenea}} + \ell$ soluzione speciale costante della non omogenea

→ Per trovare ℓ, sostituiamo come prima e viene $\ell = -\frac{b}{a-1}$

→ Per trovare c, sostituiamo il dato iniziale

$x_0 = c \cdot a^0 + \ell \quad \rightsquigarrow \quad c = \frac{x_0 - \ell}{\underbrace{a^0}_{=1}} \quad \rightsquigarrow$ si fanno i conti.

↖ [Corretto dopo video]

Esempio 1 $\quad x_{n+1} = 3x_n - 2$

Formula generale $\quad x_n = c \cdot 3^n + \ell$

Trovo ℓ : $\quad \ell = 3\ell - 2 \rightsquigarrow 2\ell = 2 \rightsquigarrow \ell = 1$

Trovo c : $\quad x_0 = c + 1 \rightsquigarrow c = x_0 - 1$

Finale $\quad \boxed{x_n = (x_0 - 1) \cdot 3^n + 1}$

Oss. Se invece di x_0, io conoscevo x_{10}, allora per trovare c sostituivo $n = 10$.

Esempio 2 $\quad x_{n+1} = -5x_n + 7 \qquad x_2 = 3$

Trovare x_{2025}.

Formula generale: $\quad x_n = c\,(-5)^n + \ell$

→ Calcolo ℓ : $\quad \ell = -5\ell + 7 \rightsquigarrow 6\ell = 7 \rightsquigarrow \ell = \frac{7}{6}$

→ Calcolo c : metto $n = 2 \rightsquigarrow x_2 = 25c + \frac{7}{6} \rightsquigarrow 25c = 3 - \frac{7}{6}$

$25c = \frac{11}{6} \rightsquigarrow c = \frac{11}{150} \rightsquigarrow \boxed{x_n = \frac{11}{150}(-5)^n + \frac{7}{6}}$

Sostituendo $n = 2025$ si trova la risposta

Fare la verifica
→ mettere $n=2$
→ sostituire x_{n+1} e x_n nella ricorrenza

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = 2x_n + 7 + n^2$

La soluzione generale sarà $\quad x_n = c \cdot 2^n$ + soluzione speciale

$x_n = an^2 + bn + c$ sostituisco

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2an^2 + 2bn + 2c + 7 + n^2$$

$$an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2an^2 + 2bn + 2c + 7 + n^2$$

$$\begin{cases} a = 2a + 1 & \text{(coeff. } n^2\text{)} & a = -1 \\ 2a + b = 2b & \text{(coeff. } n\text{)} & b = -2 \\ a + b + c = 2c + 7 & \text{(termine noto)} & c = -10 \end{cases}$$

Soluzione generale: $\boxed{x_n = c \cdot 2^n - n^2 - 2n - 10}$

lo posso calcolare se conosco un valore di x_n

Esempio 4 $\quad x_{n+1} = 2x_n + 3^n + n$

Formula generale: $\quad x_n = c \cdot 2^n + \underbrace{an + b}_{\text{per far contenuto } n} + \underbrace{d \cdot 3^n}_{\text{per far contenuto } 3^n}$

Calcola a, b, d sostituendo nella ricorrenza la seconda parte

$$\overbrace{a(n+1) + b + d \cdot 3^{n+1}}^{x_{n+1}} = \overbrace{2an + 2b + 2d \cdot 3^n}^{2x_n} + 3^n + n$$

$$an + a + b + 3d \cdot 3^n = 2an + 2b + 2d \cdot 3^n + 3^n + n$$

$$\begin{cases} a = 2a + 1 & a = -1 \\ a + b = 2b & b = -1 \\ 3d = 2d + 1 & d = 1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x_n = c \cdot 2^n - n - 1 + 3^n}$$

se conosco x_0 posso trovare c

Esempio 5 $\qquad x_{n+1} = 2x_n + 2^n$

Ora la soluz. gen. sarà $\qquad x_n = \underbrace{c \cdot 2^n}_{\uparrow} + a\,n \cdot 2^n$

dipende dal 2 nella parte omogenea

perché 2^n è già soluz. dell'omog.

Sostituendo solo la seconda parte

$$\overbrace{a(n+1)\,2^{n+1}}^{x_{n+1}} = \overbrace{2a\,n \cdot 2^n}^{2x_n} + 2^n$$

$$2a(n+1) \cdot 2^n = 2a\,n \cdot 2^n + 2^n$$

$$2a\cancel{n}\,2^n + 2a \cdot 2^n = 2a\cancel{n} \cdot 2^n + 2^n \quad \rightsquigarrow \quad 2a = 1 \quad \rightsquigarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

se ne devono andare

Soluzione generale $\qquad x_n = c \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1}$

Se sapessi che $x_0 = 7$, allora sostituisco $n=0$ e trovo $7 = c$.

— o — o —