ANALISI 1 - LEZIONE 23

Note Title 24/10/2024

Strumenti elementari per il calcolo di limiti di funzioni

→ teoremi di confronto a 2 e a 3
→ teoremi algebrici

} esattamente come con le successioni

→ funzioni continue
→ limiti notevoli
→ cambi di variabile

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è continua in $x_0 \in D$ se succede una di queste due cose

→ x_0 è isolato in D, cioè se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D = \{x_0\}$
(cioè se in tutto l'intervallo x_0 è l'unico elemento di D)

→ x_0 è un p.to di accumulazione per D e

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

operativamente: per fare il limite basta sostituire il valore

Volendo scrivere in simboli, la definizione diventa

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon \quad \forall\, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D}$$

"quando x è vicino a x_0, allora $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$"

Metateorema (Molto misterioso) Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua in tutti i p.ti in cui non presenta problemi burocratici di definizione (denominatori $= 0$, radice (roba < 0), log (roba ≤ 0) e così via)

Cosa servirebbe per dimostrarlo

1. Le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione (Va fatto caso per caso)
2. Teoremi algebrici (somma, prodotto, quoziente)
3. La composizione di funzioni continue è continua.

Esempio $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\cos x + \sqrt{x})}{2^{x^2} + \arctan(\sin x)} = 0$

per colpa di $\sqrt{x}$

Quando $x \to 0$, allora
$$\cos x \to \cos 0 = 1$$
$$\sqrt{x} \to \sqrt{0} = 0$$
$$2^{x^2} \to 2^0 = 1$$
$$\arctan(\sin x) \to \arctan(\sin 0) = 0$$

Quindi tutto tende a $\dfrac{\log(1)}{1} = 0$

In poche parole, bastava sostituire $x = 0$ e non c'erano problemi

Oss. $\log x = \ln x$ si intende $\log_e x$

numero di Nepero

$\operatorname{Log} x = \log_{10} x$

L maiuscola

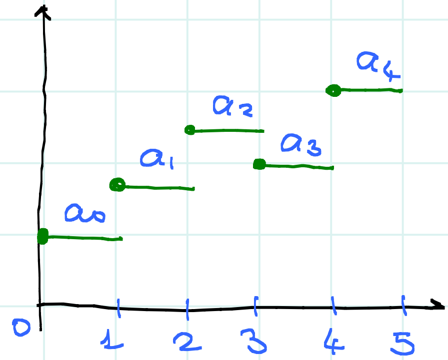
$\boxed{\text{Criterio successioni} \to \text{funzioni}}$ (I limiti di successioni aiutano i limiti di funzioni)

Esempio $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^{100}} = +\infty$ per lo stesso motivo per cui

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n^{100}} = +\infty$$

Lemma Consideriamo una funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ che sia costante a tratti di lunghezza 1, cioè

$$f(x)=a_n \qquad \forall x\in[n,n+1)$$



Allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{n\to+\infty} a_n$

Dim. Qualunque cosa che la successione fa per $n\geq n_0$, la funzione $f(x)$ lo fa per $x\geq x_0$

— o — o —

Usando il lemma dimostriamo per bene che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^{100}}=+\infty$$

Facciamo un confronto. Se $x\in[n,n+1)$, allora

$$f(x)=\underbrace{\frac{2^x}{x^{100}}}_{\substack{\to+\infty\\ \text{per confronto}\\ \text{a due}}}\geq\underbrace{\frac{2^n}{(n+1)^{100}}}_{\substack{\to+\infty \text{ per il criterio del rapporto}}}$$

← numeratore + piccolo

← denominatore + grande

Esempio 2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (per analogia con le succ.)

$\boxed{\text{Dim}}$ Quando $x\in[n,n+1)$, allora

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\geq\Big(\underbrace{1+\frac{1}{n+1}}_{\text{base + piccola}}\Big)^n$$

← esponente + piccolo

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e}\;\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}}_{\to 1}$$

Occhio! Questo non basta perché mi serve fare i carabinieri

$$\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}}_{\downarrow\; e} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}}_{\downarrow\; e}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}_{\downarrow\; 1}$$

<u>Esempio di cambio di variabili</u> $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Occhio: ora $x\to-\infty$ [viene qualcosa del tipo $1^{-\infty}$]

Pongo $y=-x$. Quando $x\to-\infty$, ho che $y\to+\infty$. Diventa

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

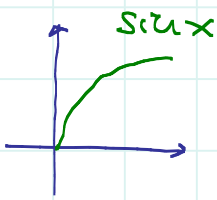
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}}_{\downarrow\; e}\underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}}_{\downarrow\; 1} = e$$

Volendo nell'ultimo limite si poteva fare un ulteriore cambio di variabili ponendo $z=y-1$. Ora quando $y\to+\infty$ ho che $z\to+\infty$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e$$

<u>Esempio</u> $\lim_{x\to0^+}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ [1^{∞}]



Pongo $y=\frac{1}{\sin x}$. Quando $x\to0^+$ ho che $\sin x\to0^+$, quindi $\frac{1}{\sin x}\to+\infty$ e quindi diventa

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$