ANALISI 1 — LEZIONE 102

Note Title 04/04/2017

Teoremi di De L'Hôpital

Ci sono tanti casi, facciamo il caso $x \to x_0^+$ con $x_0 \in \mathbb{R}$

(fare per esercizio $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$)

$\boxed{\text{Caso } \frac{0}{0}}$ Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $r > 0$, siano $f : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

$g : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f e g sono derivabili in (x_0, x_0+r) (in particolare continue)

(ii) $g'(x)$ sempre >0 oppure <0 in (x_0, x_0+r)

(iii) vale che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$$

Allora $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0+r)$ e vale

$$\boxed{\liminf_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

In particolare, se $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste, allora questo coincide con

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Due possibili dimostrazioni

→ estendendo f e g

→ senza estendere f e g

$\boxed{\text{DIM 1}}$ (via estensione) Definisco $\hat{f}$ e $\hat{g}$ in $[x_0, x_0+2)$ ponendo

compreso

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (x_0, x_0+2) \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Stessa cosa per $\hat{g}(x)$.

Oss. fondamentale: $\hat{f}(x)$ e $\hat{g}(x)$ sono continue in $[x_0, x_0+2)$ e derivabili in (x_0, x_0+2)

(uso qui l'ipotesi (iii))

Dimostro che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0+2)$. Se infatti per assurdo esistesse $y_0 \in (x_0, x_0+2)$ tale che $g(y_0) = 0$, potrei applicare Rolle a $\hat{g}(x)$ in $[x_0, y_0]$. Ma allora

$$\exists\, c \in (x_0, y_0) \text{ t.c. } \hat{g}'(c) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{g'(c) = 0} \implies \text{contro l'ipotesi (ii)}$$

Oss. Qui non ho usato che $g'(x)$ ha un segno, ma solo che è $\neq 0$.

Ora dimostriamo $\displaystyle \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Chiamiamo L il RHS. Supponiamo $L \in \mathbb{R}$ (se $L = +\infty$ è banale, se $L = -\infty$ è analogo, anzi più facile).

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratt. del limsup

$$\exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

Ora per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta)$ vale

per un opportuno $c \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

Passando al limsup ho finito

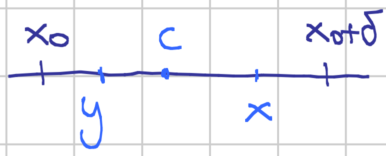
$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \le L+\varepsilon$$

Valendo per ogni $\varepsilon>0$ ho finito.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Facciamo il finale. Fisso $\varepsilon>0$ e trovo $\delta>0$ t.c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \le L+\varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$



Considero $x_0 < y < x < x_0+\delta$. Allora

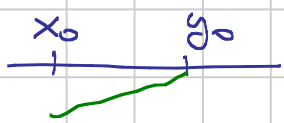
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \le L+\varepsilon$$

Passo al limite per $y \to x_0^+$. Ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le L+\varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in (x_0, x_0+\delta)$$

Ora faccio il limsup e concludo.

Resta da dire (senza estensione) che $g(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r). Se so che $g'(x)$ ha un segno $+$ o $-$ in (x_0, x_0+r) la cosa segue dalla stretta monotonia di $g(x)$.



[Consideriamo $g'(x)>0$ sempre. Se $g(y_0)=0$ per un qualche y_0, allora non può tendere a 0 per $x \to x_0^+$ (formalizzare meglio questo discorso)]

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$ (Per modo di dire, perché serve solo che sia ∞ il denominatore)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $f : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$
$g : (x_0, x_0+r) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f e g derivabili in (x_0, x_0+r)

(ii) $g'(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r)

(iii) vale

$$\lim_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$$ (basta solo la g)

Allora solito discorso

$$\liminf \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e $g(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r) a patto di prendere un nuovo r eventualmente più piccolo

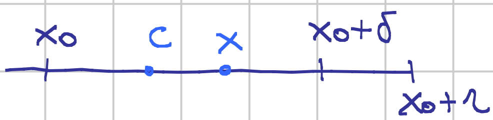
$\boxed{\text{DIM}}$ È facile che $g(x) \neq 0$ in un intornino (tende a $+\infty$, quindi sta sopra 2017)

Come sempre dim. disug. di dx e pongo $L := \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ che assumo $\in \mathbb{R}$.

Fisso $\varepsilon > 0$ e per la caratt. del limsup esiste $\delta \in (0, r)$ t.c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

Ora



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0+\delta) + f(x_0+\delta)}{g(x)}$$

aggiungo e tolgo solo al numeratore

e osservo che

$$\frac{f(x)-f(x_0+\delta)}{g(x)-g(x_0+\delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L+\varepsilon$$

Moltiplicando (e si può se x è abbastanza piccolo perché $g(x) > g(x_0+\delta)$) ottengo

$$f(x)-f(x_0+\delta) \leq (L+\varepsilon)\left(g(x)-g(x_0+\delta)\right)$$

Sostituendolo in quella sopra ottengo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{(L+\varepsilon)\left(g(x)-g(x_0+\delta)\right)+f(x_0+\delta)}{g(x)}$$

$$= (L+\varepsilon) + \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+\delta)-(L+\varepsilon)\,g(x_0+\delta)}{g(x)}}}_{\to\, 0 \text{ per } x \to x_0^+}$$

(numeratore è fisso, denom $\to +\infty$)

da cui

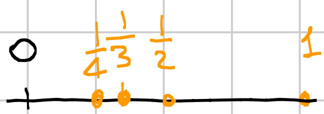
$$\limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L+\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0, \text{ quindi} \ldots$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Serve per De L'Hôpital che le f e g siano definite in tutto un intervallo. Non basta che la zona di def. sia un aperto e che x_0 sia un p.to di accumulazione di questo aperto.

Non basta che f e g siano definite in

$$(0,1) \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$



(Posso fare esempi con f costante a tratti)

— o — o —