ANALISI 1 — LEZIONE 062

Note Title 07/12/2016

Decomposizione in fratti semplici

Teorema misterioso Ogni funzione razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\deg P < \deg Q$ si può scrivere come somma di fratti semplici, cioè come somma di frazioni che

- → hanno come denominatore potenze dei singoli fattori di $Q(x)$, con esponente $\leq$ molteplicità
- → numeratore del tipo A oppure $Bx+C$, a seconda del tipo di fattore al denominatore.

Esempio

$$\frac{P(x)}{(x+1)^2(x+2)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^3}$$

Conseguenza Data la decomp. in fratti semplici, devo poi saper integrare anche termini del tipo

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \qquad\qquad \frac{Bx+C}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

↑ semplice ↑ meno semplice ⇝ meglio Hermite

Esempio $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ si può fare alla Hermite

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2}$$ ⇝ sistema lineare

Alternativa:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$ l'esponente è sceso di uno

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \underset{F}{x}\, \underset{g}{\frac{x}{(x^2+1)^3}} = \underset{F}{x}\, \underset{G}{\left[-\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\frac{1}{4}\right]}$$

$$- \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\left(-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)}\,dx$$

grado sceso di 1.

In caso di problemi

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$$ Pongo $y = x^2+1$, quindi $dy = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

— o — o —

Oss. Si può calcolare la primitiva di una funzione razionale, a patto di saper scomporre il denominatore, cosa possibile solo teoricamente

Esempio $\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

Scomposto il denominatore posso usare l'algoritmo.

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$ $\rightsquigarrow$ trovo A, B, C, D.

Fattorizzazione di polinomi reali   Si passa dai complessi

① Ogni pol. a coeff. reali (o complessi) di grado n si può scrivere come prodotto di n fattori di 1° grado a coeff. complessi (teo. fond. dell'algebra)

② Se il polinomio è a coeff. reali, allora le radici complesse non reali appaiono a coppie $\alpha \pm i\beta$, e le 2 della stessa coppia hanno la stessa molteplicità

③ Mettendo insieme i fattori complessi della stessa coppia, ottengo i termini reali di 2° grado non riducibili:

$$\underbrace{(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)}_{\text{coeff. compl.}} = \underbrace{x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)}_{\text{tutto reale}}$$

— o — o —

Decomposizione in fratti semplici

① Sia $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, dove $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono polinomi coprimi. Allora per BEZOUT polinomiale posso trovare polinomi $M(x)$ ed $N(x)$ t.c.

$$1 = M(x)\,Q_1(x) + N(x)\,Q_2(x)$$

Dividendo per $Q(x)$ trovo

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{M(x)}{Q_2(x)} + \frac{N(x)}{Q_1(x)}$$

Se al numeratore ci fosse $P(x)$ basta moltiplicare tutto

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\,M(x)}{Q_2(x)} + \frac{P(x)\,N(x)}{Q_1(x)}$$

② Se il denominatore è prodotto di k fattori coprimi, basta procedere per induzione

③ Sono sicuro che nelle varie frazioni deg num < deg denom ?
A priori no, ma in ogni frazione posso fare la divisione tra numeratore e denominatore e arrivo a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{Q_1(x)} + \frac{B(x)}{Q_2(x)} + C(x)$$

↓ 0 ↓ 0 ↓ 0 per $x \to +\infty$

↑ polinomio che è nullo perché deve tendere a 0 per $x \to +\infty$

④ Devo liberarmi delle potenze al denominatore

$$\frac{P(x)}{(x+1)^3(x+2)^4} = \frac{A(x)}{(x+1)^3} + \frac{B(x)}{(x+2)^4}$$

↓ perché è somma di fratti semplici ?

Osservo che $1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3, \dots$ sono una base dello spazio dei polinomi e quindi

$$\frac{A(x)}{(x+1)^3} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{a_3}{(x+1)^3}$$

e così abbiamo la decomposizione in fratti semplici.

Discorso analogo per i fattori di 2° grado.

— o — o —

<u>Come by-passare il sistema lineare</u>

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}$$

Voglio trovare A, B, C.

Troviamo A: moltiplico per $x+1$

$$\frac{x^2}{(x-3)(x+2)} = A + B\,\frac{x+1}{x-3} + C\,\frac{x+1}{x+2}$$

Sostituisco $x = -1$

$$\frac{1}{-4} = A \quad \rightsquigarrow \quad A = -\frac{1}{4}$$

Analogamente: $B = \frac{9}{20}$, $C = \frac{4}{5}$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)(x-3)(x-2)}\,dx = -\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{9}{20}\log|x-3| + \frac{4}{5}\log|x-2|$$

— o — o —

Se sotto ci sono i fattori di 2° grado, si può provare a sostituire i numeri complessi che lo annullano.

— o — o —

Esempio $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \qquad A = -\frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1| = \log\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}.$$

— o — o —