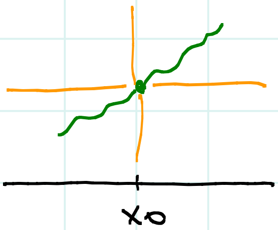
ANALISI 1 — LEZIONE 51

Note Title 30/11/2024

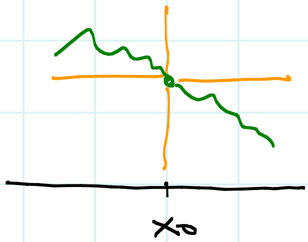
STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

Capire come è fatto il grafico di $f(x)$ vicino ad un p.to x_0

Monotonia 1 fornisce la risposta quando $f'(x_0) > 0$ oppure $f'(x_0) < 0$

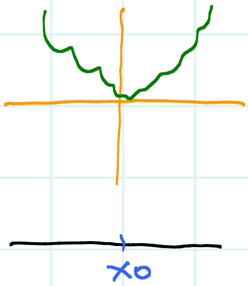


$f'(x_0) > 0$

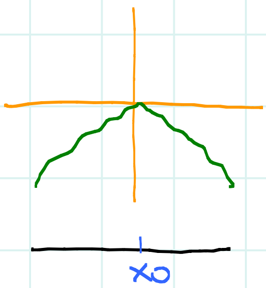


$f'(x_0) < 0$

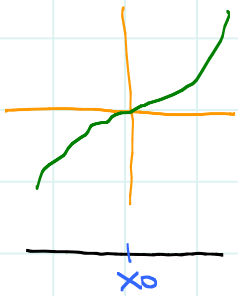
Cosa può succedere quando $f'(x_0) = 0$. Quattro scenari standard



MIN. LOC.



MAX. LOC.



flesso a tan. orizz. ascendente

flesso a tan. oriz. discendente

più uno patologico

← Nessuno dei precedenti

Domanda : quando $f'(x_0) = 0$, come stabilisco in quale scenario mi trovo ?

Teorema (Criterio delle derivate successive)

Supponiamo che esista un intero positivo k tale

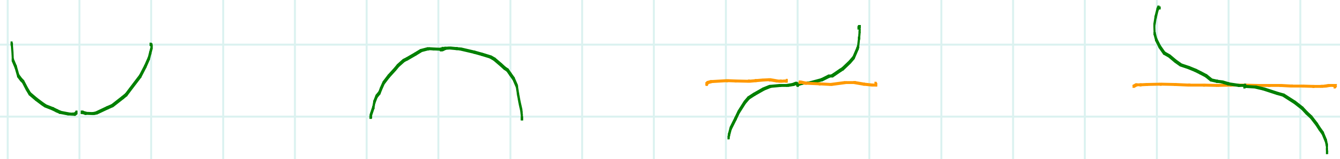
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

(la derivata k-esima è la prima che NON si annulla in x_0)

Allora la situazione è descritta dal seguente schema

$\boxed{k \text{ pari}}$ $\swarrow$ $f^{(k)}(x_0) > 0$ $\searrow$ $f^{(k)}(x_0) < 0$

$\boxed{k \text{ dispari}}$ $\swarrow$ $f^{(k)}(x_0) > 0$ $\searrow$ $f^{(k)}(x_0) < 0$



Oss. Il quinto scenario si può presentare

$\rightarrow$ o quando tutte le derivate di ogni ordine si annullano in x_0

$\rightarrow$ o quando le derivate smettono di esistere prima di trovarne una $\neq 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Taylor! Vediamo un paio di scenari. Da Taylor sappiamo che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k}_{\text{primo termine non nullo}} + o(h^k) \qquad \text{per } h \to 0$$

da cui

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$$

e dividendo mi ritrovo

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \boxed{\frac{o(h^k)}{h^k}}$$

$\downarrow$
0

da cui

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Si aprono vari scenari

$\boxed{k \text{ pari e } f^{(k)}(x_0)>0}$ Il limite è positivo quindi esiste $\delta>0$ t.c.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k}>0 \qquad \forall h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$$

Poiché k è pari, il denom. è sempre >0, quindi deve essere num. >0, quindi $f(x_0+h)>f(x_0)$ sia a dx sia a sx

$\boxed{k \text{ dispari e } f^{(k)}(x_0)<0}$ Il limite è negativo quindi esiste $\delta>0$ t.c.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^k}<0 \qquad \forall h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$$

Per $h\in(0,\delta)$ il denom. è >0, quindi num. <0, quindi $f(x_0+h)<f(x_0)$

Per $h\in(-\delta,0)$ il denom. è <0 (qui uso k dispari), quindi num. >0, quindi $f(x_0+h)>f(x_0)$

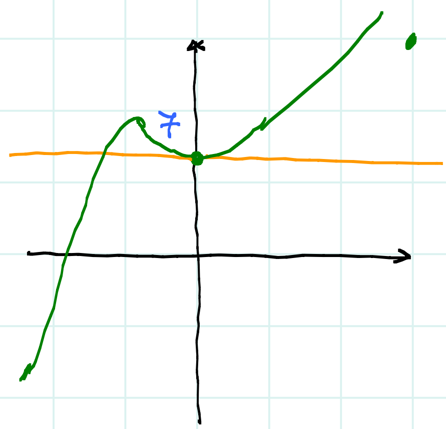
Analogamente negli altri due casi

— o — o —

$\boxed{\text{In pratica}}$ Quando $f'(x_0)=0$, la funzione f si comporta vicino ad x_0 come il primo termine non nullo nel suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $\qquad f(x) = x^{33} + x^{22} + 7$

Dico che l'equazione $f(x)=7$ ha almeno due soluzioni reali



La soluzione $x=0$ si vede a occhio

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Per lo studio locale, $f(x)$ si comporta vicino a $x=0$ come $7 + x^{22}$

primo termine di Taylor dopo la costante

quindi in $x=0$ c'è un p.to di min. locale

A questo punto è chiaro che esiste $c<0$ t.c. $f(c)=7$.

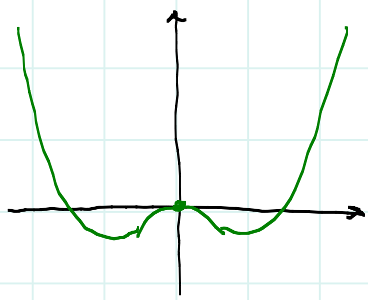
Non ci sono altre soluzioni per $x>0$?

Basta dim. che è strett. crescente in $(0,+\infty)$

$$f'(x) = 22x^{21} + 33x^{32} > 0 \qquad \text{per } x>0 \text{ (monotonia 2)}$$

Esempio 2 $\qquad f(x) = x^4 - \sin(x^2)$

Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva



Basta osservare che è pari

Dico che $f(x)=0$ ha almeno 3 soluzioni

Come è ~~fatta~~ fatta vicino a 0? Taylor:

$$f(x) = -x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0$$

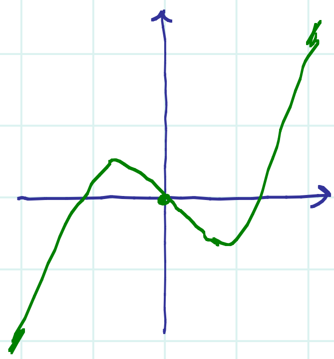
quindi 0 è un p.to di max locale
Quindi è negativa in un intorno dx e sx di $x=0$, ma poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

quindi attraversa nuovamente l'asse x

<u>Esempio 3</u> $\quad f(x) = x^3 - \arctan x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

iniettiva? Surgettiva?



Surgettiva: quasi gratis da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Vicino a $x=0$ abbiamo $f(x) \sim -x$

quindi $f'(0) = -1$, quindi

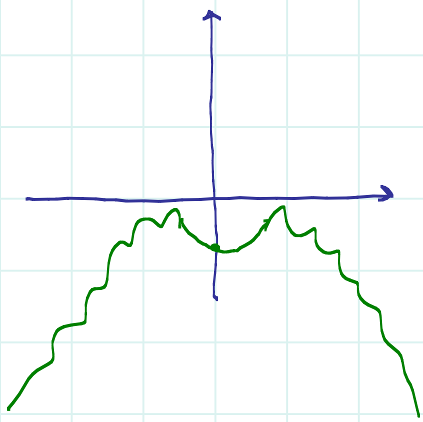
$\left.\begin{array}{l} \to f(x) < 0 \text{ un po' a dx di } x=0 \\ \to f(x) > 0 \quad \text{"} \quad \text{sx di } x=0 \end{array}\right\}$ monotonia 1

Addio iniettività

<u>Esempio 4</u> $\quad f(x) = \sin h(x^2) - \cos h(x^3)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$$

comanda $\cos h(x^3)$



Vicino a $x=0$ si ha $f(x) \sim -1 + x^2$

$\Rightarrow$ Addio iniettività

— o — o —