ANALISI 1 — LEZIONE 075

Note Title 28/02/2017

Esempi di sol. di eq. diff.

① $\dot{u} = 7u$ $\qquad u(t) = e^{7t}$ è UNA soluzione

Verifica: $\dot{u}(t) = 7e^{7t} = 7u(t)$

Altre soluzioni sono quelle del tipo $u(t) = ce^{7t}$

Verifica: $\dot{u}(t) = 7c\,e^{7t} = 7u(t)$

Morale: l'eq. ha infinite soluzioni $u(t) = ce^{7t}$ e si potrebbe dim. che non ce ne sono altre

② $\ddot{u} = -u$ $\qquad u(t) = \sin t$ è UNA soluzione
$\qquad u(t) = \cos t$ è un'altra sol.

$u(t) = a \sin t + b \cos t$ è sol. per ogni valore dei parametri a e b

Non ce ne sono altre.

③ $\dot{u} = -u^2$ $\qquad u(t) = \frac{1}{t}$ è UNA soluzione

Verifica: $\dot{u}(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$

$u(t) = \frac{3}{t}$ non è una soluzione $\quad \dot{u}(t) = -\frac{3}{t^2} \neq -\frac{9}{t^2} = [u(t)]^2$

$u(t) = \frac{1}{t+c}$ $\qquad \dot{u}(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -[u(t)]^2$

Inoltre c'è anche la soluzione banale $u(t) \equiv 0$.

Fatti generali : "di solito" un' eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all' ordine dell' eq.

— o — o —

PROBLEMA DI CAUCHY Fatto da 2 ingredienti

→ eq. diff.

→ condizioni iniziali: se l' eq. è di ordine k si prescrive il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla (k-1)-esima in un certo t_0 comune a tutte.

Esempi

$$\begin{cases} \ddot{u} = -u \\ u(\boxed{7}) = 22 \\ \dot{u}(\boxed{7}) = 34 \end{cases}$$

a scelta

t_0

$$\begin{cases} \ddot{u} = -u \\ u(7) = 22 \\ \dot{u}(8) = 34 \end{cases}$$

NO

devono essere uguali

$$\begin{cases} \dddot{u} = 3\dot{u}^2 + t^5 \\ u(1) = 5 \\ \dot{u}(1) = 6 \\ \ddot{u}(1) = 24 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{u} = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{array}}$$

Forma generale del pbm. di Cauchy per equ. di ordine 1 in forma normale

Speranza Imponendo le k condizioni iniziali spero di poter determinare univocamente i k parametri liberi che descrivono le infinite soluz. dell' eq. diff.

Fatto generale: "di solito la cosa riesce"

Esempio

$$\begin{cases} \ddot{u} = -u \\ u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 4 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow u(t) = a \sin t + b \cos t$

$a \sin 0 + b \cos 0 = 0$ $\qquad u(0) = 0$

$\dot{u}(t) = a \cos t - b \sin t$

$a \cos 0 - b \sin 0 = 4$ $\qquad \dot{u}(0) = 4$

$\rightsquigarrow b = 0$ e $a = 4$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = 4 \sin t$ è LA sol. del pbm. di Cauchy

Teorema di esistenza (misterioso)

Consideriamo il pb. di Cauchy per un' eq. diff. di ordine k in forma normale:

$$\begin{cases} u^{(k)} = F(u^{(k-1)}, \dots, \dot{u}, u, t) \\ + \text{ condizioni iniziali} \end{cases}$$

Supponiamo che F sia continua (dovrei dire cosa vuol dire in più variabili).

Allora il problema ammette ALMENO una soluzione.

Teorema di esistenza e unicità (misterioso)

Consideriamo il pbm. come sopra.

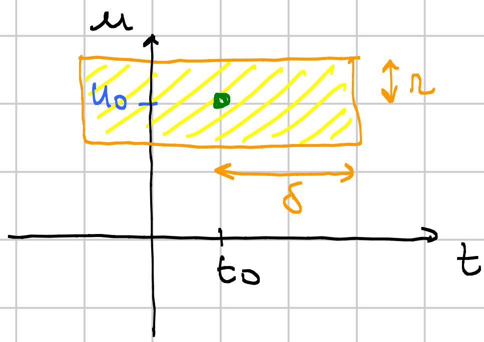
Supponiamo che F sia un po' meglio

Allora la soluzione è pure UNICA.

— o — o —

Qualche dettaglio su "un po' meglio". Consideriamo il caso di ordine 1:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Supponiamo

$$f : [t_0-\delta, t_0+\delta] \times [u_0 - r, u_0 + r] \to \mathbb{R}$$

Un po' meglio vuol dire che esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

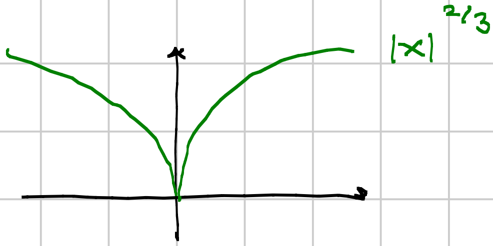
$$|f(t,u_2) - f(t,u_1)| \le L\,|u_2 - u_1| \qquad \begin{array}{l} \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \\ \forall u_1 \in [u_0-r, u_0+r] \\ \forall u_2 \in \quad " \end{array}$$

f è lip. in u unif. risp. a t, cioè la stessa L va bene per tutti i t.

Oss. Basta un po' di derivabilità e questa è verificata.

— o — o —

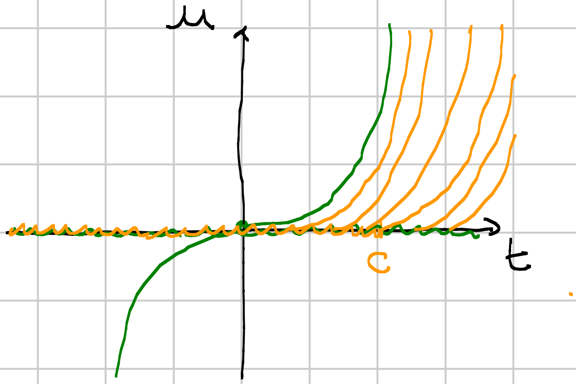
ESEMPIO DI NON UNICITÀ (Pennello di PEANO)



$$\begin{cases} \dot{u} = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$u(t) \equiv 0$ è UNA soluzione

$u(t) = t^3$ è un'altra soluzione $\quad \dot{u}(t) = 3t^2 = 3\,[u(t)]^{2/3}$



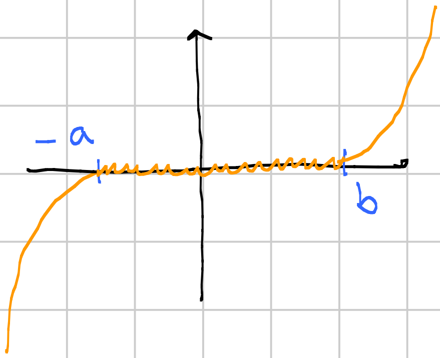
In realtà ha infinite soluzioni

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

(verifica immediata)

Posso estendere il pennello anche su tempi negativi, ottenendo che sono soluzioni tutte le funzioni del tipo ($a \geq 0$, $b \geq 0$)

$$u(t) = \begin{cases} (t+a)^3 & \text{se } t \leq -a \\ 0 & \text{se } t \in [-a, b] \\ (t-b)^3 & \text{se } t \geq b \end{cases}$$



<u>Oss.</u> $\begin{cases} \dot{u} = -u^2 \leftarrow \text{funzione bella} \Rightarrow \text{esistenza e unicità} \\ u(0) = 7 \end{cases}$

Sol. generale: $u(t) = \dfrac{1}{t+c}$. Impongo cond. iniz.

$$u(0) = 7 \iff \frac{1}{c} = 7 \iff c = \frac{1}{7} \rightsquigarrow u(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{7}} = \frac{7}{7t+1}$$

Occhio! Non è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, ma solo per $t \neq -\frac{1}{7}$
L'intervallo di def. della soluzione è tra le incognite e non è prevedibile dall'equazione.