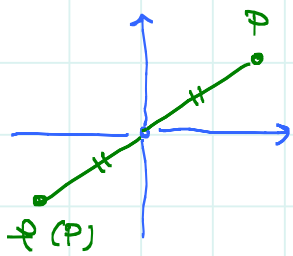
ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 58

Note Title 15/12/2023

$\boxed{\text{Simmetria centrale}}$

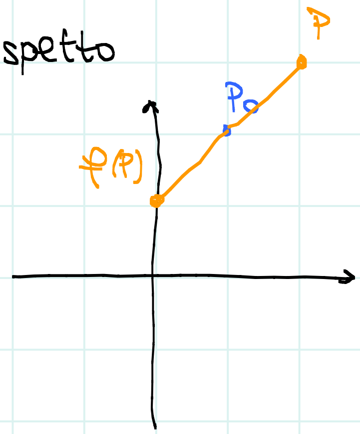


Rispetto all'origine In $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \to (-x,-y)$

in $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$

In $\mathbb{R}^2$ equivale a ruotare di 180° intorno all'origine (il verso non importa)

Esempio 1 Scrivere in $\mathbb{R}^2$ la simmetria centrale rispetto al p.to $\underset{\overset{\shortparallel}{P_0}}{(1,2)}$



$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow \text{Simm}(P-P_0) \rightsquigarrow \text{Simm}(P-P_0)+P_0$

$(x,y) \rightsquigarrow (x-1,y-2) \rightsquigarrow (1-x,2-y) \rightsquigarrow (2-x,4-y)$

Verifica: $(1,2) \to (1,2)$ ☺

$(2,3) \to (0,1)$ ☺

Esempio 2 Scrivere in $\mathbb{R}^3$ la simm. centrale rispetto a $\underset{\overset{\shortparallel}{P_0}}{(5,-2,3)}$

$(x,y,z) \rightsquigarrow (x-5,y+2,z-3) \rightsquigarrow (5-x,-2-y,3-z) \rightsquigarrow (10-x,-4-y,6-z)$

Esempio 3 Cosa succede se faccio prima simm. centrale rispetto a $(5,-2,3)$ e poi la simm. centrale risp. a $(7,1,2)$?

$S_1(x,y,z) = (10-x,-4-y,6-z)$ $S_2(x,y,z) = (14-x,2-y,4-z)$

$S_2(S_1(x,y,z)) = S_2(10-x,-4-y,6-z)$

$= (14-10+x, 2+4+y, 4-6+z) = (4+x,6+y,-2+z)$

$= (x,y,z)+(4,6,-2)$ ← Traslazione di $(4,6,-2)$

Era prevedibile che sarebbe venuta una traslazione?

Sì! Perché quando compongo più in generale due affinità sto componendo le due matrici

$(f_1(x) = A_1x+b_1 \ , \ f_2(x) = A_2x+b_2$

$f_2(f_1(x)) = A_2(A_1x+b_1)+b_2 = A_1A_2x + Ab_1+b_2 \ )$

Ora le simmetrie centrali hanno matrice $= -Id$, che moltiplicata per se stessa viene l'identità.

— o — o —

Distanza tra 2 rette sghembe

Calcolare la distanza tra le rette

$(1,2,3)+t(2,1,0)$ $\qquad\qquad$ $(1,-1,2)+t(1,3,1)$

Le direzioni non sono multiple, quindi sono sghembe o incidenti.

Cerco le eventuali intersezioni

$1+2t = 1+s$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 2t=1 \\ t=0 \end{array}\right\}$ incompatibili, quindi nessuna inters.

$2+t = -1+3s$ $\qquad$ ⇝ sono sghembe

$3 = 2+s \leadsto s=1$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Cerco $P \in$ prima retta, $Q \in$ seconda retta tali che $P-Q \perp$ alle direzioni delle due rette

$P = (1+2t, 2+t, 3)$ $\qquad$ $Q = (1+s, -1+3s, 2+s)$

$P-Q = (2t-s, 3+t-3s, 1-s)$

$$\begin{cases} 2(2t-s)+(3+t-3s)=0 & P-Q \perp (2,1,0) \\ (2t-s)+3(3+t-3s)+(1-s)=0 & P-Q \perp (1,3,1) \end{cases}$$

⇝ risolvo ⇝ trovo P e Q e ho i due p.ti che minimizzano la distanza

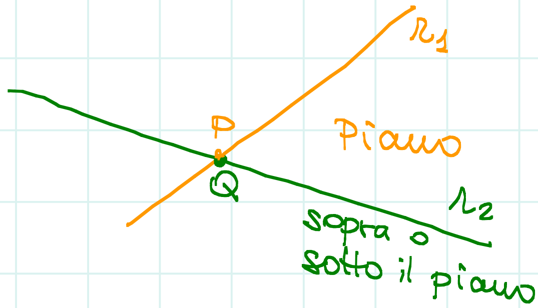
$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scrivo il piano che contiene la prima retta ma non interseca la seconda

In parametrica

$$\underbrace{(1,2,3)+t(2,1,0)}_{\text{prima retta}} + s\underbrace{(1,3,1)}_{\text{dir. seconda retta}}$$

Volendo lo passo in cartesiana [Verifica che non interseca la retta]

La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra il piano e un qualunque p.to della retta r_2, ad esempio $(1,-1,2)$. Per calcolarla uso la formula per la distanza p.to/piano.



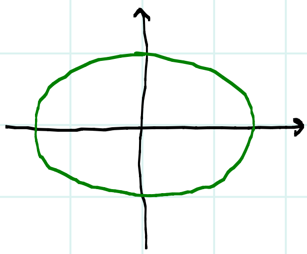
Occhio: il secondo modo non trova i p.ti P e Q.

Ci sarebbe anche un terzo modo (vedi anni precedenti).

<u>Esercizio</u> Allenamento. (Percorso)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+3y^2=5\}$$

Ellisse $\qquad (\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3}y)^2=5$

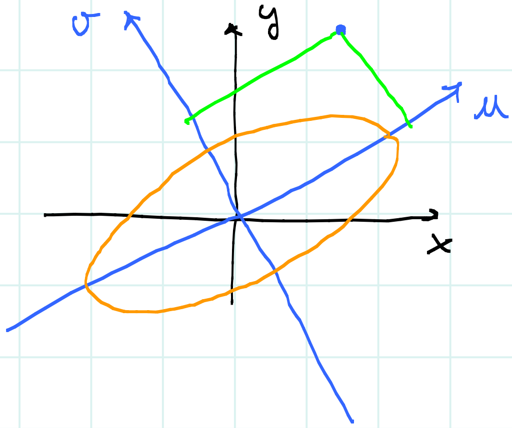


$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{2x^2+13y^2+10xy}_{\text{forma quadratica}}=5\} \qquad ?$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{Det} = 1 \\ \text{Tr} = 15 \end{matrix} \qquad \text{Segnatura } ++$$

Teoria: esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ in cui la forma avrà una matrice diagonale con due numeri positivi sulla diagonale

Esistono dei nuovi assi $\perp$, rispetto ai quali posso calcolare delle nuove componenti (u, v) mediante le quali l'eq. diventa



$$\underbrace{\lambda_1}_{\text{autovalori positivi}} u^2 + \lambda_2 v^2 = 5$$

— o — o —

Seno / coseno / esponenziale di una matrice :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\sin A = A - \frac{1}{6} A^3 + \frac{1}{120} A^5 - \dots$$

Se per caso A fosse diagonale, allora $\sin A$ sarebbe anche lei diagonale con sulla diagonale il seno degli autovalori di A.

Se $\quad M A M^{-1} = D$

allora $\quad A = M^{-1} D M$

e quando faccio il sin ottengo

$$\sin A = M^{-1} \underbrace{\sin D}_{\text{la so fare}} M$$

— o — o —