ANALISI 1 - LEZIONE 64

Note Title 16/12/2024

Cauchy $\Rightarrow$ De L'Hôpital $\Rightarrow$ Taylor

$\boxed{\text{Teorema}}$ (De L'Hôpital $\frac{0}{0}$) Sia $f : (x_0, x_0 + r) \to \mathbb{R}$

$g : (x_0, x_0 + r) \to \mathbb{R}$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$

Supponiamo che

(i) f e g continue e derivabili in (x_0, x_0+r)

(ii) $g'(x) \neq 0$ in (x_0, x_0+r)

(iii) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$

(iv) esista $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \text{(stesso } \ell\text{)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamo il caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$ (i casi $\ell = +\infty$ e $\ell = -\infty$ sono analoghi)

Per l'ipotesi (iv) sappiamo che

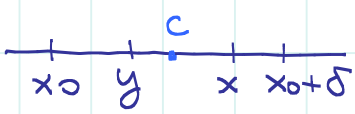
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Dico che vale

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

lo stesso δ che andava bene per le derivate

Considero un qualunque $y \in (x_0, x)$



Applico il teo. di Cauchy nell'intervallo $[x,y]$. Ottengo

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon] \leftarrow \text{perché } c \in (x_0, x_0+\delta)$$

p.to misterioso in (x,y)
lo stesso c sopra e sotto

Quindi

$$\ell-\varepsilon \leq \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \leq \ell+\varepsilon$$

e ora passiamo al limite per $y \to x_0^+$ e grazie all'ipotesi (iii)

$$\ell-\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell+\varepsilon$$

Abbiamo usato le ipotesi (i) e (ii) per poter scrivere Cauchy.

— o — o —

<u>Oss.</u> Se fosse stato $\ell = +\infty$ si partiva da

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq M \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

e poi si procedeva allo stesso.
Discorso analogo per i casi di $\lim_{x \to x_0^-}$ o anche $\lim_{x \to \pm\infty}$

(provare a scriverne qualcuno per esercizio).

— o — o —

$\boxed{\text{De L'Hôpital } \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Taylor}}$

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{resto di Peano}$$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

Proprietà fond. del polinomio di Taylor

$P_n(0) = f(0)$ $\qquad$ $P_n'(0) = \text{coeff. di } x = f'(0)$

$P_n''(0) = f''(0)$ $\qquad$ $P_n'''(0) = f'''(0)$

Le derivate del $\underbrace{\text{polinomio di Taylor}}_{P_n(x)}$, calcolate in $x=0$, coincidono con le derivate di $f(x)$ fino all'ordine n

Motivo brutale: quando derivo i volte un polinomio, e poi sostituisco $x=0$, quello che ottengo è il coeff. di x^i moltiplicato per $i!$ (i termini di grado $< i$ spariscono, quelli di grado $> i$ conservano almeno una x che sparisce quando sostituisco $x=0$)

Quindi, sia nel caso Peano sia nel caso Lagrange, posso considerare la funzione differenza

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$$

e osservare che

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0. \qquad (\star)$$

Conclusione PEANO Sia φ una funzione che soddisfa $(\star)$.

Allora $\qquad \varphi(x) = o(x^n) \quad$ per $x \to 0$.

Dim. Basta calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^n} \underset{[\frac{0}{0}:\,\text{Hôp}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)}{n\,x^{n-1}} \underset{[\frac{0}{0}:\,\text{Hôp}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\varphi''(x)}{n(n-1)\,x^{n-2}}$$

$$= \dots = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n!\;x} \underset{[\frac{0}{0}:\,\text{Hôp}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

[Formalmente si sistema per induzione]

Oss. (da matematici risparmiosi) Che ipotesi abbiamo usato?
Apparentemente abbiamo usato che φ ha n derivate in un intorno di 0.
In realtà basta che

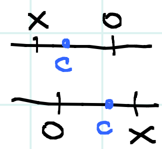
→ φ abbia $n-1$ derivate in un intorno di $x=0$,

→ la derivata n-esima basta in $x=0$

Basta osservare che l'ultimo passaggio è il rapporto incrementale per $\varphi^{(n-1)}(x)$, cioè

$$\varphi^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi^{(n-1)}(x) - \overbrace{\varphi^{(n-1)}(0)}^{0}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{x}$$

$\boxed{\text{Conclusione LAGRANGE}}$ Sia φ una qualunque funzione che verifica $(\star)$.

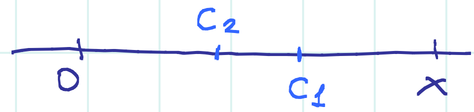


Allora per ogni x esiste c, compreso tra 0 ed x tale che

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$$

Dim. Basta applicare varie volte il teorema di Lagrange.
Supponiamo per fissare le idee che $x>0$.
Allora

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{n+1}-0^{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy}}}{=} \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\,c_1^{n}}$$



$$= \frac{\varphi'(c_1)-\varphi'(0)}{(n+1)c_1^{n}-(n+1)\cdot 0^{n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy}}}{=} \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)\cdot n\, c_2^{\,n-1}}$$

Procedendo allo stesso modo ad ogni passaggio trovo un nuovo "c" e aumento di 1 l'ordine di derivazione sopra e sotto.

Dopo $(n+1)$ passaggi mi ritrovo

$$\frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!\cdot 1}$$

che è proprio quello che volevo.

Oss. Qui come ipotesi abbiamo usato che φ ha $n+1$ derivate in tutto un intorno di $x=0$.

— o — o —