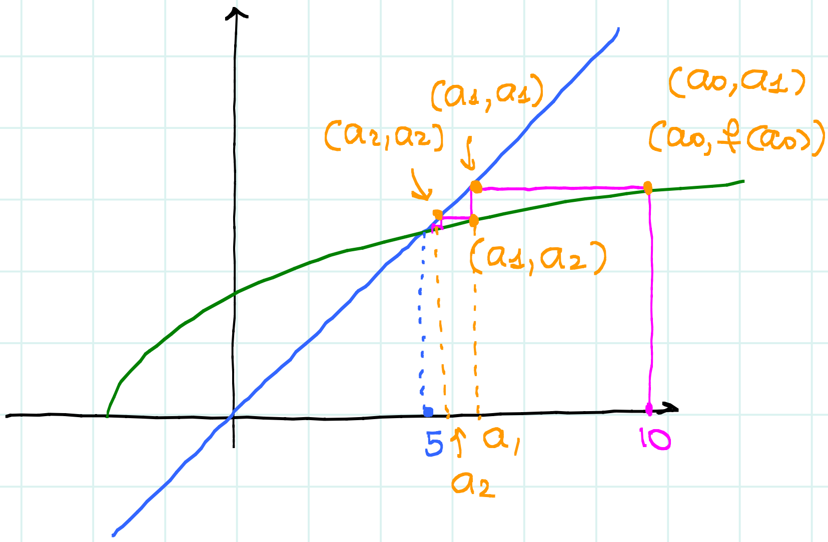
Interpretazione grafica delle successioni $a_{n+1} = f(a_n)$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15} \\ a_0 = 10 \end{cases}$$



Disegno a_0 sull'asse x

Poi seguo lo SLOGAN

verticale alla funzione
orizzontale alla bisettrice

Chi sono i p.ti che trovo strada facendo

$$(a_0, 0) \rightsquigarrow (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$$

$\rightsquigarrow (a_1, a_1)$ (stessa y del precedente e poi $x = y$)

$\rightsquigarrow (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$ (stessa x del prec. e sta sulla funzione)

<u>Morale</u>: seguendo lo slogan, le x dei p.ti che si trovano sono $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

quindi dal disegno sappiamo quale piano aspettarci

quella che serve per punto (iii)

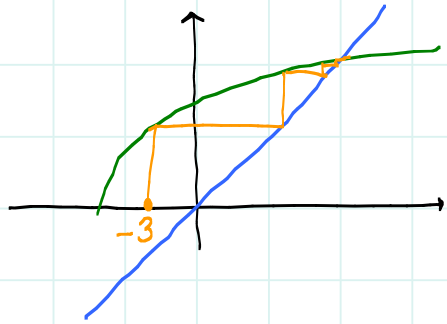
Con la monotonia:
(i) $5 \le a_n \le 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 5$

Stessa cosa con $a_0 = -3$



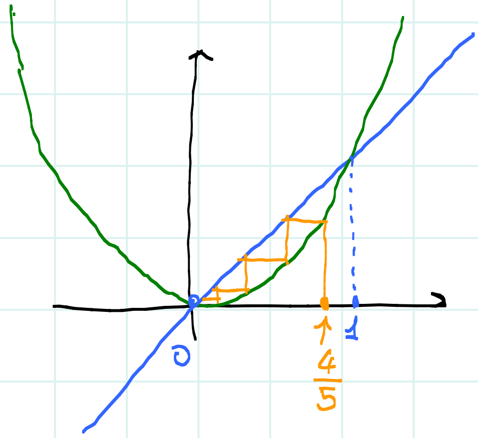
$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $-3 \leq a_n \leq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 5$

$\boxed{\text{Esempio 0}}$ $\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = \frac{4}{5} \end{cases}$



Ora $f(x) = x^2$

Le due intersezioni sono $x = 0$ e $x = 1$

(è la stessa equazione del p.to (iv) quando si passa la ricorrenza al limite)

$\boxed{\text{Piano con la monotonia}}$ (i) $0 \leq a_n \leq \frac{4}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (i) + (ii) + succ. monot.

(iv) $\ell = 0$

... $\boxed{\text{dim (iv)}}$ $a_{n+1} = a_n^2$

$\ell = \ell^2 \rightsquigarrow \ell = 0$ oppure $\ell = 1$

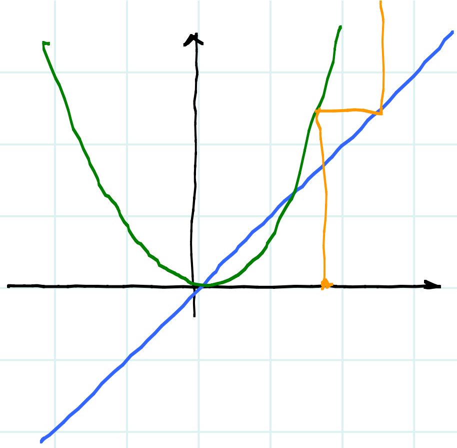
escluso da $a_n \leq \frac{4}{5}$

Qual è il comportamento di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$a_n \to 0$, quindi cond. nec. ok. Essendo $a_n > 0$ sempre (induz.) posso usare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2}{a_n} = a_n \to 0 < 1 \rightsquigarrow \text{la serie converge}$$

Esempio 1 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = 2 \end{cases}$



Idea: a_n sale e se ne va a $+\infty$

PIANO

(i) $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

(i) Induzione (ii) induzione + applico

(iii) teo. succ. monot. (so solo che è deb. cresc.)

(iv) Se fosse $\ell \in \mathbb{R}$, allora passando al limite

$$\begin{array}{ccc} a_n & = & a_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 \end{array} \rightsquigarrow \ell = 0 \text{ oppure } \ell = 1, \text{ che}$$

sono incompatibili con (i)

Esempio 1 bis $\begin{cases} a_n = a_n^2 \\ a_0 = -2 \end{cases}$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

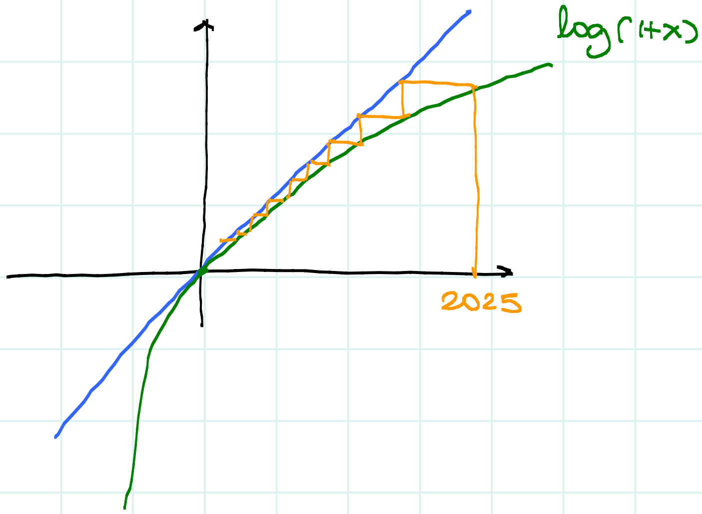
(iv) $\ell = +\infty$

$\rightsquigarrow$ se metto $a_n \geq -2 \quad \forall n \geq 0$ poi ho problemi ad escludere $\ell = 0$ e $\ell = 1$ (darebbe problemi anche ad applicare f)

Al variare di a_0, a cosa tende la succ. $a_{n+1} = a_n^2$

- Se $|a_0| > 1$, allora $a_n \to +\infty$
- Se $|a_0| < 1$, allora $a_n \to 0$
- Se $a_0 = \pm 1$, allora $a_n \equiv 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi $a_n \to 1$

Esempio 2 $\begin{cases} a_{n+1} = \log(1+a_n) \\ a_0 = 2025 \end{cases}$



Per prima cosa dimostro che

$$\log(1+x) \leq x \quad \forall\, x \geq 0$$

con uguaglianza $\Leftrightarrow$ $x=0$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

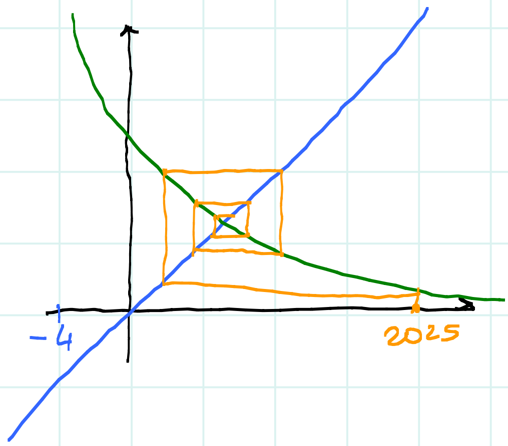
(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

Si potrebbe usare la Lip? NO perché $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ e $f'(0) = 1$

$\boxed{\text{Esempio di domani}}$ $a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 4}$

$a_0 = 2025$



— o — o —