ANALISI 1 — LEZIONE 061

Note Title 07/12/2016

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

Def. Una *funzione razionale* è il rapporto di due polinomi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad P(x) \in \mathbb{R}[x], \quad Q(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Per le funzioni razionali "si può" determinare una primitiva in 4 fasi:

1. DIVISIONE
2. FATTORIZZAZIONE
3. SISTEMA LINEARE
4. INTEGRAZIONE

1 - Divisione Se $\deg P(x) < \deg Q(x)$ non c'è nulla da fare.

Altrimenti faccio la div. di polinomi, cioè scrivo

$$P(x) = A(x)\,Q(x) + R(x)$$

con $\deg R(x) < \deg Q(x)$

A questo punto

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$A(x)$: polinomio, quindi primitiva banale

$\frac{R(x)}{Q(x)}$: nuova funz. raz. con deg num < deg. denom.

Conclusione: basta saper fare la primitiva quando grado sopra < grado sotto.

2 - <u>Fattorizzazione</u> = scomporre $Q(x)$

<u>Teorema</u> (misterioso) Ogni polinomio $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ si può scrivere come prodotto di polinomi di primo o secondo grado (questi ultimi non ulteriormente scomponibili), eventualmente ripetuti

<u>Def</u>. La <u>molteplicità</u> di un fattore indica quante volte è ripetuto.

Alla fine della fase 2 mi ritrovo

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (a_i x + b_i)^{\overset{\text{molt.}}{m_i}} \cdot \prod_{J=1}^{\ell} \underbrace{(\alpha_J x^2 + \beta_J x + \gamma_J)}_{\beta_J^2 - 4\alpha_J \gamma_J < 0}^{\overset{\text{molt.}}{\mu_J}}$$

3 - <u>Sistema Lineare</u> $\to$ caso semplice : tutte molteplicità = 1
$\to$ caso generale.

<u>Caso semplice</u> Se $\deg P(x) < \deg Q(x)$, allora posso scrivere la funzione razionale nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \dots + \frac{A_k}{a_k x + b_k} + \frac{B_1 x + C_1}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \dots + \frac{B_\ell x + C_\ell}{\alpha_\ell x^2 + \beta_\ell x + \gamma_\ell}$$

dove

- come denominatori ho usato i singoli fattori di $Q(x)$
- come numeratori ho usato numeri incogniti $A_1, \dots, A_k$ sui fattori di grado 1, e polinomi incogniti di 1° grado sui fattori di grado 2.

<u>Oss</u>.
- $\deg Q(x) = k + 2\ell$
- Incognite : $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_\ell, C_1, \dots, C_\ell$, quindi $k+2\ell$
- I coeff. di $P(x)$ sono $k+2\ell$, perché sappiamo che $\deg P(x) \leq k + 2\ell - 1$, e un pol. di quel grado ha $k+2\ell$ coeff.

Esempio
$$\frac{x}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$
$$= \frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx-3Bx-3C}{(x-3)(x^2+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{coeff. di } x^2 \\ C-3B=1 & \text{coeff. di } x \\ 2A-3C=0 & \text{termine noto} \end{cases}$$

Sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite

Teorema misterioso Il sistema lineare che si ottiene ha sempre soluzione (unica).

Alla fine della fase 3, nel caso semplice, basta saper fare primitive di funzioni del tipo

$$\frac{A}{ax+b} \qquad \frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

non scomponibile

Caso generale (in cui ci sono le molteplicità).
Ci sono due possibili strade
① Decomposizione in fratti semplici generale
② Decomposizione di HERMITE (più semplice operativamente)

Esempio alla Hermite

$$\frac{x^2+5}{(x+1)^3(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

fin qui come se non ci fossero le molteplicità

$$+\frac{d}{dx}\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

polinomio incognito di grado = grado denom − 1.

stessi fattori di $Q(x)$, ma con molteplicità scesa di 1

Teorema misterioso Il sistema lineare ha soluzione unica!

Conseguenza Alla fine basta saper fare le primitive di prima e poi la primitiva della derivata è banale !!

Esempio
$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{d}{dx}\frac{C}{x+1}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} - \frac{C}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{A(x+1)(x+2) + B(x+1)^2 - C(x+2)}{(x+1)^2(x+2)}$$
$= \ldots$ sistema lineare

4 - **Integrazione**. Devo fare le primitive finali

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\log|ax+b|$$

Restano da fare quelle del tipo $\dfrac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

C'è una formula, ma non vale la pena ricordarla.
Strategia: $\rightarrow$ un po' di logaritmo per mandare via Bx
$\rightarrow$ arctan per il resto.

Esempio 1
$$\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\log(x^2+1) + 2\arctan x$$

Esempio 2
$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

sopra vorrei $2x+2$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2} \log (x^2+2x+2) - \arctan (x+1).$$

Esempio 3 $\displaystyle \int \frac{1}{2+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Fatto generale $\displaystyle \boxed{\int \frac{1}{a+x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}}$ Per ogni $a>0$

Ricorso I polinomi di 2° grado non ulteriormente scomponibili si possono sempre scrivere come

$$\boxed{\text{numero positivo} + \text{quadrato}}$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha x^2 + \beta x + \frac{\beta^2}{4\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma$$

$$= \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$$

$$= \underbrace{\alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}_{\text{quadrato}} + \underbrace{\boxed{\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}}}_{\text{positivo}}$$

Posso supporre $\alpha>0$