ANALISI 1 — LEZIONE 032

Note Title 27/10/2016

Def (Ordine di infinitesimo e parte principale)

Sia $r>0$ e sia $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$ una funzione.
Se esistono un numero reale $a>0$ ed una costante $c\neq 0$ t.c.

$$f(x)\sim cx^a \quad \text{per } x\to 0$$

allora si dice che $f(x)$ è infinitesima di $\boxed{\text{ordine}}$ a e che cx^a è la sua $\boxed{\text{parte principale}}$ (per $x\to 0$)

Esempi $\sin x\sim x$ ordine 1, parte principale x

$\cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$ ordine 2, parte principale $-\frac{1}{2}x^2$

$\sinh x - x = \cancel{x}+\frac{1}{6}x^3+\ldots-\cancel{x} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{6}x^3}}_{\text{parte principale}}+o(x^3)$

$x\log x\to 0$, ma non ha un ordine secondo la def.

Oss. Si usa lo stesso linguaggio anche per le successioni, sostituendo x con $\frac{1}{n}$

Esempi $\sin\frac{1}{n}\sim\left(\frac{1}{n}\right)^1$ ordine 1, parte princ. $=\frac{1}{n}$

$\frac{n+3}{n^5+2}\sim\frac{1}{n^4}$ ordine 4

Verifica rigorosa: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+3}{n^5+2}}{\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+3)\,n^4}{n^5+2}=1$

$\frac{n^2+7n+5}{5n^3-6n+9}\sim\frac{1}{5n}$ ordine 1
parte principale $\frac{1}{5n}$

Def. (Ordine di ∞ e parte principale)

Se $f(x) \sim c x^a$ per $x \to +\infty$ (con $a > 0$ e $c \neq 0$), allora si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine a e $c x^a$ è la parte princip.

Esempi $\dfrac{x^5+3}{3x^2+1} \sim \boxed{\dfrac{x^3}{3}}$ per $x \to +\infty$ $\left[\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{x^5+3}{3x^2+1}}{\frac{x^3}{3}} = 1 \right]$

parte principale

$$\frac{x^5 + \sin x}{3x^2+7} \sim \frac{1}{7} x \quad \text{per } x \to 0$$

Rigoroso: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^5+\sin x}{3x^2+7}}{\frac{x}{7}} = \lim_{x \to 0} \frac{7x^5 + 7\sin x}{3x^3+7x}$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{7x + o(x)}{7x + o(x)} = 1$

Esempio 1 $a_n = \dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} \sinh \dfrac{1}{n^2}$

$a_n \to 0$. Che ordine ha?

Pongo $\frac{1}{n} = x$: $\quad x^2 \sin x - x \sinh x^2 =$

$$= x^2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) - x\left(x^2 + o(x^5)\right)$$

$$= \cancel{x^3} - \frac{1}{6}x^5 + o(x^6) - \cancel{x^3} - o(x^6)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{6}x^5} + o(x^6)$$

parte principale (ordine 5)

Esempio 1bis Calcolare $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n^\alpha$ al variare di α

- per $\alpha > 5$ $\lim = -\infty$
- per $\alpha < 5$ $\lim = 0$
- per $\alpha = 5$ $\lim = -\frac{1}{6}$

$$a_n \cdot n^\alpha = \frac{a_n}{\frac{1}{n^5}} \cdot \frac{1}{n^5} \cdot n^\alpha = \boxed{\frac{a_n}{\frac{1}{n^5}}} \cdot n^{\alpha-5}$$

$\boxed{\frac{a_n}{\frac{1}{n^5}}} \to -\frac{1}{6}$ per l'esempio 1

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n - 1}{n^2} = -\frac{1}{2}$ No!!! Quello vale per $x \to 0$

Non posso nemmeno usare Taylor $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$

In realtà

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n - 1}{n^2} = 0 \qquad -\frac{70}{n^2} \le \text{frazione} \le \frac{70}{n^2}$$

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{n^\alpha}$

Brutal mode: $e^{n^\alpha \log\left(1-\frac{5}{n}\right)} \sim e^{n^\alpha\left(-\frac{5}{n}\right)} \sim e^{\boxed{-5n^{\alpha-1}}}$

- se $\alpha = 1$ $\lim = e^{-5}$
- se $\alpha > 1$ $\lim = e^{-\infty} = 0$
- se $\alpha < 1$ $\lim = e^0 = 1$

Rigoroso: $n^\alpha \log\left(1-\frac{5}{n}\right) = n^\alpha \boxed{\frac{\log\left(1-\frac{5}{n}\right)}{-\frac{5}{n}}} \left(-\frac{5}{n}\right)$

$\boxed{\frac{\log\left(1-\frac{5}{n}\right)}{-\frac{5}{n}}} \to 1$

Esempio 4 $\lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] x$

Cambio variabile $\frac{1}{x} = y$: $\lim_{y\to 0^+} \frac{(1+y)^{\frac{1}{y}} - e}{y}$

$$= \frac{e^{\frac{1}{y}\log(1+y)} - e}{y} = \frac{e^{\frac{1}{y}\left(y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right)} - e}{y}$$

$$= \frac{e^{1 - \frac{1}{2}y + o(y)} - e}{y} = e \, \frac{e^{-\frac{1}{2}y + o(y)} - 1}{y} \to -\frac{e}{2}$$

<u>Esempio 5</u> Sviluppo di Taylor di $\tan x$ (centro $x=0$, $n=6$)

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Derivare 6 volte ☹

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1}$

Come sviluppo

$$\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{t} + o(x^5)\Big)^{-1} = 1 + \overbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}^{-t} + \overbrace{\frac{x^4}{4}}^{t^2} + o(x^5)$$

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots$$

Moltiplicando viene

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ $\tan x = x + a x^3 + b x^5 + o(x^6)$

So che $\tan(\arctan x) = x$, quindi uso funz. composta

$$\cancel{x} = \arctan x + a(\arctan x)^3 + b(\arctan x)^5 + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a\left(x^3 - x^5\right) + b x^5 + o(x^6)$$

triplo prodotto quadrato del 1°. 2°

$$= \cancel{x} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} + a\right)}_{=0} x^3 + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - a + b\right)}_{=0} x^5 + o(x^6)$$

$a = \frac{1}{3}$ $\quad b = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

Quindi $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

<u>Esempio</u> $\frac{3n+1}{n^2+7}$ "Sviluppo in potenze di $\frac{1}{n}$"

$$\frac{3n+1}{n^2+7} \sim \frac{3}{n}$$

$$\frac{3n+1}{n^2+7} = \frac{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{7}{n^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{7}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{3n}-\frac{7}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{21}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$