ANALISI 1 — LEZIONE 013

Note Title 06/10/2016

SUCCESSIONI MONOTONE

Sia a_n una succ. di numeri reali

<u>Def.</u> La succ. si dice

- strett. crescente se $a_{n+1} > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- debolm. crescente $a_{n+1} \geq a_n$ "
- strett. decresc. $a_{n+1} < a_n$ "
- debolm. decresc. $a_{n+1} \leq a_n$ "

succ. monotòne

<u>Oss.</u> Strett. cresc. $\Rightarrow$ debolm. crescente
" decresc. $\Rightarrow$ " decrescente

<u>Oss.</u> Le definizioni si possono dare confrontando termini qual.

- Strett. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m > a_n$
- Debolm. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$
- Strett. decresc. se $m > n \Rightarrow a_m < a_n$
- Debolm. decresc. se $m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$.

<u>Def.</u> (Succ. limitate)
La succ. a_n si dice

- limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- limitata inferiorm. se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $M \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- limitata e basta se valgono entrambe, o equivalentem.

$$\exists A \in \mathbb{R} \ \exists B \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad A \leq a_n \leq B$$

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M \qquad (-M \leq a_n \leq M)$$

$\boxed{\text{Teorema delle succ. monotone}}$ (Versione crescente)

Sia a_n una succ. debolm. crescente (se strett., ancora meglio)
Allora ci sono solo 2 possibili comportamenti
(i) $a_n \to +\infty$
(ii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.
In entrambi i casi il limite coincide con

$$\sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{\text{insieme dei valori assunti dalla succ.}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono 2 casi

(i) Supponiamo che $\sup = +\infty$.
Ipotesi: $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ Tesi: $a_n \to +\infty$

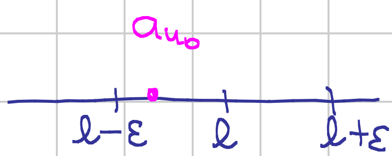
Fisso $M \in \mathbb{R}$. Per caratterizzazione del sup, esiste almeno un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \geq M$.
Grazie alla debole crescenza si avrà che

$$a_n \geq a_{n_0} \geq M \qquad \underbrace{\forall n \geq n_0}_{\text{definitivamente}}$$

(ii) Supponiamo che $\sup = \ell \in \mathbb{R}$. Voglio dim. che $a_n \to \ell$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon \qquad \text{definitiv.}$$

Per caratt. del sup vale



$$a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi la disug. a dx è gratis.
Inoltre esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq \ell - \varepsilon$, ma a quel punto
$a_n \geq \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, cioè definitivamente

— o — o —

Oss. Non è detto che $a_n \to \ell^-$ nel 2° caso, perché potrebbe essere definitivamente uguale ad ℓ.
È vero se sapessimo che è strett. crescente.

Corollario Sia a_n una succ. tale che
(i) a_n è debolm. crescente
(ii) a_n è limitata superiormente.
Allora di sicuro $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

Analoghi decrescenti (dim. per esercizio)

① Se a_n è debolm. decr. allora le uniche possibilità sono
$$a_n \to -\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to \ell \in \mathbb{R}$$
Inoltre il limite è $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

② se inoltre è limitata inferiorm., allora di sicuro $a_n \to \ell$.

— o — o —

IL NUMERO DI NEPERO (NUMERO e)

Consideriamo la successione

$$\boxed{e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Teorema La successione e_n
(i) verifica $2 \leq e_n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$
(ii) è debolmente (anzi strett.) crescente.

— o — o —

Conseguenza: e_n tende ad un limite reale compreso tra 2 e 3. Tale limite si chiama numero di Nepero e si indica con $e = 2,718\ldots$

Dim.

① Dimostro che $e_n \geq 2$ (inutile ai fini della conseguenza)

Considero la Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x > -1$

Pongo $x = \frac{1}{n}$ e ottengo

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$$

② Dimostro che e_n è debolm. crescente.

$$e_n \geq e_{n-1} \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$ [teniamo come esponente n]

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$

Pongo $x = -\frac{1}{n^2}$ (>-1 appena $n \geq 2$) e abbiamo che l'ultima disug. è vera (pure stretta se servisse)

③ Dimostro che $e_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Brutta copia. Parto dal binomio di Newton

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

Ponendo $x = \frac{1}{n}$ ottengo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\leq 1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\leq 1} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\leq 1 + 2 = 3$$

Proprietà chiave: ① $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ $\qquad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\,n^k} \leq \frac{1}{k!}$

② $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ $\qquad$ cioè $k! \geq 2^{k-1}$ (facile induzione)

③ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2$

(si dimostra per ind. che è $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$)

Fine brutta copia.

Bella copia:

$$e_n \overset{\text{Def}}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Newton}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$\underset{①}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \underset{②}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\underset{③}{=} 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3$$

— o — o —

Achtung! Se a_n è debolm. crescente e $a_n < 14$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Allora $a_n \to \ell$ e $\boxed{\ell < 14}$ NO!!! $\ell \leq 14$ $\left(a_n = 14 - \frac{1}{n}\right)$

LE DISUG. STRETTE NON PASSANO AL LIMITE