ANALISI 1 - LEZIONE 76

Note Title 08/03/2025

Ancora sostituzioni trigonometriche

Esempio 1 $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Ricordiamo che $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ e $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

Quindi pongo

$x = \sinh y \rightsquigarrow dx = \cosh y\, dy$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 y} \cdot \cosh y\, dy = \int \cosh^2 y\, dy$$

Come integro $\cosh^2 y$? $\to$ o ricordo chi è $\cosh y$ in termini di e^y

$\to$ o ricordo che

$$\cosh(2y) = \cosh^2 y + \sinh^2 y$$
$$= 2\cosh^2 y + 1$$

da cui $\cosh^2 y = \dfrac{\cosh(2y) - 1}{2}$ e quindi

$$\int \cosh^2 y\, dy = -\frac{1}{2} y + \frac{1}{4}\sinh(2y)$$ e posso proseguire con $\sinh(2y) = \ldots$

In generale, se abbiamo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ il metodo trigonometrico consiste nello scrivere

$$ax^2+bx+c = \text{costante} \pm \text{quadrato}$$

e ridursi ai casi $\sqrt{1+x^2}$ oppure $\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{2° \text{ metodo}}$ **Esempio 2** $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Pongo $\sqrt{1+x^2} = x + y$ (Idea: se provo a ricavare x, viene di 1° grado)

$$1+\cancel{x^2} = \cancel{x^2}+2xy+y^2 \rightsquigarrow x = \frac{1-y^2}{2y} \rightsquigarrow dx = \left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy$$

Sostituendo

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \Big(\underbrace{\frac{1-y^2}{2y} + y}_{x\ +y} \Big) \underbrace{\left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy}_{dx}$$

da qui in poi è razionale e si fa ... alla fine sostituisco

$$y = \sqrt{1+x^2} - x$$

Esempio 3 $\int \sqrt{3x^2+5x-2}\, dx$

Pongo $\sqrt{3x^2+5x-2} = \sqrt{3}\,x + y$

Quando vado a ricavare

$$\cancel{3x^2}+5x-2 = \cancel{3x^2}+2\sqrt{3}\,xy + y^2$$

$$\rightsquigarrow x(2\sqrt{3}\,y-5) = -2-y^2 \rightsquigarrow x = -\frac{y^2+2}{2\sqrt{3}\,y-5} \rightsquigarrow dx = (\ )'dy$$

e sostituendo è tutto brutto ma razionale!

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Se ho $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$, allora pongo

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + y}$$

Funziona tutte le volte che $a>0$

$\boxed{3^\circ \text{ metodo}}$ Fattorizzo il polinomio di 2° grado

Esempio 4 $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

Si potrebbe fare con il metodo trigonometrico ponendo

$$x = \cosh y \rightsquigarrow \sqrt{x^2-1} = \sinh y$$

Osservo che $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

Scelgo uno a caso dei due fattori, ad esempio $x+1$, e pongo

$\sqrt{x^2-1} = y(x+1)$ ⇝ se vado a ricavare $x^2-1 = y^2(x+1)^2$

$\cancel{(x+1)}(x-1) = y^2(x+1)^{\cancel{2}}$ [Nuovamente di 1° grado in x!]

$x(y^2-1) = -1-y^2$ ⇝ $x = \frac{y^2+1}{1-y^2}$ ⇝ $dx = \left(\frac{y^2+1}{1-y^2}\right)' dy$

Quindi mi sono ridotto ad integrare

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \underbrace{y\left(\frac{y^2+1}{1-y^2}+1\right)}_{y(x+1)} \left(\frac{y^2+1}{1-y^2}\right)' dy$$

= non bellissimo, ma razionale ...

alla fine sostituisco

$$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

<u>Esempio 5</u> $\int \sqrt{x^2-6x+8}\, dx$

Osservo che $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$ e poi pongo

$\sqrt{x^2-6x+8} = y(x-2)$ ⇝ $x^2-6x+8 = y^2(x-2)^{\cancel{2}}$

$= \cancel{(x-2)}(x-4)$

⇝ $x(1-y^2) = 4-2y^2$ ⇝ $x = \frac{4-2y^2}{1-y^2}$ e da qui in poi è tutto razionale

<u>Fatto generale</u> Se $ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu)$, allora posso porre

radici del polinomio

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda) \quad \text{oppure} \quad y(x-\mu)$$

Riassunto per $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$

- Se $a>0$ posso usare $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x+y$
- Se $\Delta>0$ posso usare $\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda)$
  radice
- Se $\Delta=0$ il pol. di $2°$ grado è un quadrato...

$\boxed{\text{Sembrano}}$ esserci problemi quando $a<0$ e $\Delta<0$. Però in questo caso $ax^2+bx+c<0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, quindi la radice non è definita per nessun valore di x !!
Quindi tutti i casi possibili sono coperti

<u>Esempio 6</u> $\int \sqrt{x^2+4x+7}\, dx$

$\Delta = 16-28<0 \rightsquigarrow$ niente metodo con le radici

Il coeff. di x^2 è positivo, quindi ok con $\sqrt{x^2+4x+7} = x+y$ e ricavo y.

Possiamo farlo con metodo trigonometrico?

$$x^2+4x+7 = x^2+4x+4+3 = (x+2)^2+3 \quad \text{, quindi}$$

$$\int\sqrt{x^2+4x+7}\, dx = \int\sqrt{3+(x+2)^2}\, dx \underset{z=x+2}{=} \int\sqrt{3+z^2}\, dz$$

Ora pongo $z=\sqrt{3}\sinh y$ e viene

$$\int\sqrt{3+3\sinh^2 y}\,\underbrace{\sqrt{3}\cosh y\, dy}_{dz} = 3\int\cosh^2 y\, dy = \text{si fa}$$

Esempio 7 $\int \sqrt{x^2+4x-7}\,dx$

$\Delta = 16+28>0$ ⇝ potevo usare $\sqrt{x^2+4x-7} = y(x-\lambda)$
dove λ è una delle radici del polinomio

Coeff. x^2 è >0, quindi posso fare $\sqrt{x^2+4x-7} = x+y$

Se lo voglio fare trigonometrico, osservo che

$x^2+4x-7 = x^2+4x+4-11 = (x+2)^2-11$, quindi

$$\int\sqrt{x^2+4x-7}\,dx = \int\sqrt{(x+2)^2-11}\,dx \underset{z=x+2}{=} \int\sqrt{z^2-11}\,dz$$

$$\underset{z=\sqrt{11}\cosh y}{=} \int \sqrt{11\cosh^2 y-11}\cdot\sqrt{11}\sinh y\,dy = 11\int \sinh^2 y\,dy$$