A.A. 2016/2017
Corso di Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 - LEZIONE 001

Note Title 23/09/2016

Programma
1. PRELIMINARI
2. LIMITI, SUCCESSIONI, SERIE
3. CALCOLO DIFFERENZIALE (studi di funzione)
4. CALCOLO INTEGRALE (integrali, eq. diff.)

$\boxed{\text{PRELIMINARI}}$
→ Logica elementare, insiemi, funzioni
→ Numeri naturali + induzione
→ Numeri reali
→ Funzioni elementari classiche

$\boxed{\text{LOGICA ELEMENTARE}}$ Intuitivo ⇝ buon senso

PROPOSIZIONE Frase che può essere vera o falsa

Esempi:
- Oggi è venerdì — V
- In quest'aula ci sono 1.000 persone — F
- Il docente ha numero pari di allerle — ?

$\boxed{\text{PREDICATO}}$ Proposizione con dei parametri, che a seconda del valore dei parametri può essere vera o falsa.

→ $x^2 \geq 28$
→ Il docente d spiega la materia m
→ $a < b+c$

$\boxed{\text{QUANTIFICATORI}}$

$\forall$ Per ogni
$\exists$ Esiste almeno un
$\exists!$ Esiste un unico

$P(x)$: $x^2 \geq 28$

$\exists x \in \mathbb{N}$ [tale che] $x^2 \geq 28$ V
$\forall x \in \mathbb{N}$ $x^2 \geq 28$ F

$P(s,m)$: allo studente s piace la materia m

$\exists$ s studente $\forall$ m materia $P(s,m)$
(esiste almeno uno studente a cui piacciono tutte le materie)
$\forall$ m materia $\exists$ s studente $P(s,m)$
(ogni materia piace ad almeno uno studente)

Operazioni sulle proposizioni

$\boxed{\text{NEGAZIONE}}$ Oggi è venerdì Oggi non è venerdì
p NOT p

$N(p)$: la pecora p è nera

$\exists$ p pecora [tale che] $N(p)$
esiste almeno una pecora nera

→ esiste almeno una pecora non nera
→ tutte le pecore non sono nere

$\exists x$ tale che $P(x)$ $\overset{\text{negazione}}{\leadsto}$ $\forall x$ NOT $P(x)$
$\forall x$ $P(x)$ $\leadsto$ $\exists x$ NOT $P(x)$

<u>Esempio</u> Ogni anno a Pisa c'è almeno uno studente che non passa nessun esame

Voglio fare la negazione

$\forall a$ anno $\exists s$ studente $\forall e$ esame BOCCIA (a, s, e)

nell'anno a lo stud s viene bocciato all' esame e

$\exists a$ anno $\forall s$ studente $\exists e$ esame NOT BOCCIA (a, s, e)

In almeno un anno ogni studente a Pisa ha passato almeno un esame

— o — o —

$\boxed{\text{AND}}$ $\boxed{\text{VEL}}$
OR

P : sul tavolo ci sono mele
Q : sul tavolo ci sono pesche

P AND Q $= P \wedge Q$: sul tav... ci sono mele e pesche
P VEL Q $= P \vee Q$: sul tavolo ci sono mele o pesche

non esclusivo: possono esserci entrambe

$$\text{NOT } (P \wedge Q) = (\text{NOT } P) \vee (\text{NOT } Q)$$
$$\text{NOT } (P \vee Q) = (\text{NOT } P) \wedge (\text{NOT } Q)$$

<u>Tavole di verità</u>

$\boxed{P \wedge Q}$

Q \ P	V	F
V	V	F
F	F	F

$\boxed{P \vee Q}$

Q \ P	V	F
V	V	V
F	V	F

P AUT Q : una ed una sola tra P e Q è vera

	V	F
V	F	V
F	V	F

Esempio Ogni giorno c'è almeno un docente che non viene a lezione $\forall g\ \exists d$ DORME (g, d)

Negazione: $\exists g\ \forall d$ NOT DORME (g, d)
Almeno in un giorno tutti i docenti vengono a lezione

→ tutti i giovani sono scansafatiche o viziati

$\forall g$ giovane $S(g) \vee V(g)$

Neg. $\exists g$ giovane tale che NOT $(S(g) \vee V(g))$
$\exists g$ giovane t.c. NOT $S(g) \wedge$ NOT $V(g)$

Esiste almeno un giovane che non è né scans., né viziato

ANALISI 1 — LEZIONE 002

Note Title 23/09/2016

Operazioni tra proposizioni : IMPLICAZIONE

$\boxed{P \Rightarrow Q}$

se P è vera, allora Q è vera
se P è falsa, allora Q può fare quello che vuole

Q \ P	V	F
V	V	V
F	F	V

$\boxed{P \Leftrightarrow Q}$

P è $\frac{V}{F}$ se e solo se Q è $\frac{V}{F}$

Q \ P	V	F
V	V	F
F	F	V

Esercizio Scrivere $P \Rightarrow Q$ usando solo $\wedge, \vee$, NOT

$P \Rightarrow Q$ $\boxed{\text{è sinonimo di}}$ $(\text{NOT}\, P) \vee Q$

stessa tabella di verità

Negare $P \Rightarrow Q$

$$\text{NOT}\,(P \Rightarrow Q) = \text{NOT}\,[(\text{NOT}\,P) \vee Q]$$
$$= \text{NOT}\,(\text{NOT}\,P) \wedge \text{NOT}\,Q$$
$$= P \wedge \text{NOT}\,Q$$

L'implicazione $P \Rightarrow Q$ è falsa quando P è vera e Q è falsa

Esempi Tutte le x sono in $\mathbb{Z}$ $[3 > 7 \Rightarrow 7 > 3 \quad V]$

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$ V

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 4$ V

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 2 \Rightarrow x^3 \geq 6$ V

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 2 \iff x^3 \geq 6$ V

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 2 \iff x^3 \geq 6$ F Basta prendere $x = \sqrt[3]{7}$

Cosa da ricordare

- Se voglio dimostrare che $\forall x \in \ldots \; P(x) \Rightarrow Q(x)$ è VERA devo "fare una dimostrazione", non basta provare un po' di valori di x
- Se voglio dim. che $\forall x \in \ldots \; P(x) \Rightarrow Q(x)$ è FALSA basta che io trovi un $x \in \ldots$ tale che $P(x)$ è V e $Q(x)$ è F.

$$\text{NOT}\left(\forall x \in \ldots \; P(x) \Rightarrow Q(x)\right) = \exists x \in \ldots \text{ t.c. NOT } (P(x) \Rightarrow Q(x))$$
$$= \exists x \in \ldots \text{ t.c. } P(x) \wedge \text{NOT } Q(x).$$

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^2 \geq 9 \Rightarrow x \geq 3$ F prendo $x = -23$

— o — o —

$\boxed{\text{INSIEMI}}$ Def. di insieme: non la daremo... solo a livello intuitivo

Due modi di presentare un insieme

① per elenco $A = \{ 7, 5, a, \square, ✿ \}$

nome insieme

Convenzioni: l'ordine non conta
elementi ripetuti contano 1 sola volta

$A = \{ a, \square, 7, 5, \square, 5, ✿ \}$

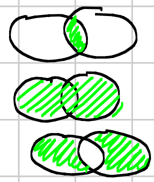
② per proprietà $B = \{ x \in \text{q.c.} : P(x) \}$

tale predicato

$= \{ x \in \text{esseri umani} : x \text{ è in questa stanza} \}$

Oss. $A = \{x \in \dots : P(x)\}$
$B = \{x \in \dots : Q(x)\}$

$\{x \in \dots : P(x) \wedge Q(x)\} = A \cap B$
$\{x \in \dots : P(x) \vee Q(x)\} = A \cup B$
$\{x \in \dots : P(x) \text{ AUT } Q(x)\} = \underbrace{A \Delta B}_{\text{Diff. simm.}}$



$\{x \in \dots : P(x) \wedge \text{NOT } Q(x)\} = A \setminus B$
$= \{x \in \dots : \text{NOT } (P(x) \Rightarrow Q(x))\}$
$\text{NOT } (\text{NOT } P(x) \vee Q(x))$

Esempio $C = \{m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ elenco

→ scrivi tutti i numeri naturali
→ fanne il $\square$
→ otterrai l'elenco di C

$C = \{m^2 : m \in \mathbb{Z}\}$ sta sotto che i ripetuti contano 1 sola volta

$C = \{n \in \mathbb{N} : \exists a \in \mathbb{N}$ tale che $n = a^2\}$ per proprietà

$\boxed{\{n \in \mathbb{N} : \forall n = a^2\}}$ Non vuol dire nulla.

— o — o —

INSIEME DELLE PARTI

Dato A insieme, si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

$A = \{1, 7, \square, z\}$ $1 \in \mathcal{P}(A)$ F $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ V
$1 \in A$ V $1 \notin \mathcal{P}(A)$

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, si definisce $A \times B$ l'insieme delle coppie ORDINATE (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 003

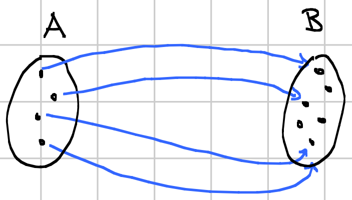
Note Title 26/09/2016

FUNZIONI TRA INSIEMI

Definizione operativa. Una funzione sono 3 cose:

- un insieme A, detto insieme di partenza
- " " B, detto insieme di arrivo
- una "legge" che ad ogni elemento $a \in A$ associa un UNICO elemento $b \in B$.

Notazione $f : A \longrightarrow B$ $\quad f(a)$ indica l'unico elemento di B che la legge associa ad $a \in A$.



Da ogni $a \in A$ parte una ed una sola freccia

Grafico di una funzione Data $f : A \to B$, definiamo

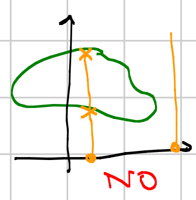
$$\text{Grafico}(f) = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$$ (def. per proprietà)

Definizione rigorosa di funzione (Una funzione è il suo grafico)

Una funzione da A in B è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ tale che

$$\boxed{\forall a \in A \quad \exists!\, b \in B \quad [\text{tale che}] \quad (a,b) \in G}$$

A posteriori $f(a)$ si definisce come l'unico $b \in B$ che rispetta la relazione di sopra.

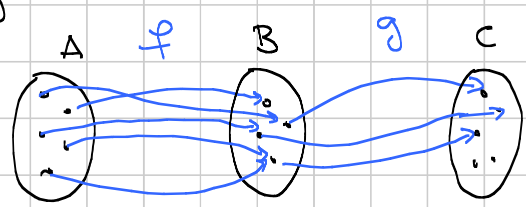


Composizione di funzioni

$f : A \to B$, $g : B \to C$

stesso

La funzione composta $g \circ f : A \to C$ ottenuta facendo "prima f, poi g"



Quando scrivo $g(f(a))$ si intende che si calcola prima $f(a)=b$ e poi $g(b)$.

Esercizio Definire la composizione a partire dalla definizione rigorosa di funzione.

— o — o —

$\boxed{\text{FUNZIONI INIETTIVE E/O SURGETTIVE}}$

Def. Sia $f : A \to B$ una funzione.

- La funzione si dice INIETTIVA se (manda elementi distinti di A in elem. distinti di B, cioè non ci sono 2 frecce che arrivano nello stesso punto)

$$\boxed{\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A \quad (\underbrace{a_1 \neq a_2}_{P} \underbrace{\Rightarrow}_{\Rightarrow} \underbrace{f(a_1) \neq f(a_2)}_{Q})}$$

Equivalentemente:

$$\boxed{\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A \quad (\underbrace{f(a_1) = f(a_2)}_{\text{NOT } Q} \underbrace{\Rightarrow}_{\Rightarrow} \underbrace{a_1 = a_2}_{\text{NOT } P})}$$

- La funzione si dice SURGETTIVA se (tutti gli el. di B sono raggiunti dalle frecce)

$$\boxed{\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{t.c. } f(a) = b}$$

- ... BIGETTIVA se è iniettiva + surgettiva (cioè se in ogni elemento di B arriva una ed una sola freccia)

In questo caso la funzione risulta INVERTIBILE, cioè esiste

$$\boxed{g : B \longrightarrow A}$$

tale che

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B \end{array}}$$

(Idea: g ha le stesse frecce percorse al contrario)

<u>Esempio</u> $f(x) = x^2$ Per stabilire iniett. / surg. serve sapere "da dove a dove"

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO IN. NO SURG

$f(1) = f(-1)$ Nessuno va in -1

$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ NO IN. SI SURG

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ SI IN. NO SURG

$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ SI SI

— o — o —

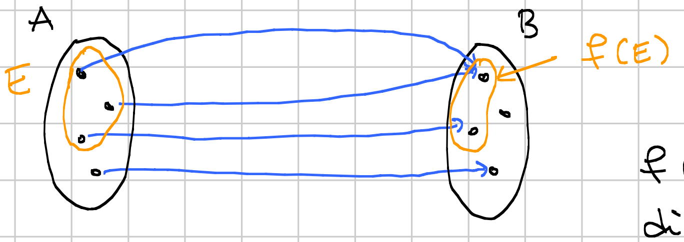
IMMAGINE E CONTROIMMAGINE (di sottoinsiemi)

Sia $f : A \to B$ una funzione.

<u>Def.</u> Dato $E \subseteq A$, si pone

$$\boxed{f(E) = \{ f(a) : a \in E \}} \subseteq B$$

(arrivi di tutte le frecce che partono da E)



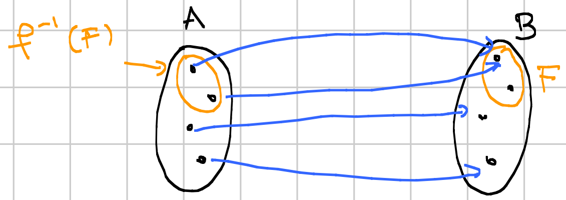
$f(E)$ si dice IMMAGINE di E

Def. Dato $F \subseteq B$, si pone

$$\boxed{f^{-1}(F) = \{a \in A : f(a) \in F\}} \subseteq A$$

(partenze delle frecce che arrivano in F)

↑ si dice CONTROIMMAGINE di F



Esercizio Scrive $f(E)$ per proprietà e non per elenco:

$$f(E) = \underbrace{\{f(a) : a \in A\}}_{\text{per elenco}} = \underbrace{\{b \in B : \exists\, a \in E \text{ t.c. } b = f(a)\}}_{\text{per proprietà}}$$

Achtung! Il simbolo f^{-1} indica almeno 3 cose diverse
- la funzione inversa (cioè $g : B \to A$ quando esiste)
- la controimmagine
- il reciproco $\frac{1}{f(x)}$ quando ha senso

Def. Si def. IMMAGINE di una funzione l'insieme $f(A) \subseteq B$.
(tutti gli elementi di B raggiunti dalle frecce)

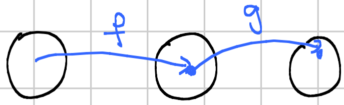
Oss. $f : A \to B$ è surgettiva $\Longleftrightarrow f(A) = B$

Iniettività, surgettività e composizioni $f : A \to B$, $g : B \to C$

① Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva

$$\left[\, a_1 \neq a_2 \underset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} f(a_1) \neq f(a_2) \underset{g \text{ inj.}}{\Rightarrow} g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \,\right]$$

② Se f e g sono surgettive, allora $g \circ f$ è surg.



③ Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva (g non è detto)

[Dim. per assurdo: se $a_1 \neq a_2$ e $f(a_1) = f(a_2)$, allora $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, quindi $g \circ f$ non è iniettiva]

④ Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva (f non è detto)

Esercizi : trovare esempi che mostrino che ③ e ④ sono ottimali.

ANALISI 1 – LEZIONE 004

Note Title 26/09/2016

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
Supponiamo che

(i) $P(0)$ è VERO (Passo base)
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ VERO $\Rightarrow$ $P(n+1)$ VERO (Passo induttivo)

Allora $P(n)$ è VERO $\forall n \in \mathbb{N}$.

Operativamente: (i) metto $n=0$ e controllo se è vero
(ii) Suppongo per ipotesi che per un certo $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ sia vero, ed usando questa ipotesi (più tutto il precorso) riesco a dimostrare che $P(n+1)$ è vero

Se (i) e (ii) riescono, allora $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Perché brutalmente funziona?
$P(0)$ è vera per (i)
Uso la (ii) con $n=0$. Deduco che $P(1)$ è vera.
Uso la (ii) con $n=1$. " " $P(2)$ è vera
E così via.

L'idea è la caduta delle tessere del domino

(i) cade la tessera 0-esima
(ii) se cade n, allora cade $n+1$

Variante: se sostituisco (i) con $P(2016)$ è vera, la tesi diventa
$P(n)$ è vera per $n \geq 2016$.

Esempio 1 ① $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\ldots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \forall a \neq +1$

$\boxed{\text{Dim. ②}}$ Passo base $n=0$: $0=0$ ☺

Passo induttivo $[n \Rightarrow n+1]$

Ipotesi: $0^2+1^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

quello di sopra con $n+1$ al posto di n

Tesi: $0^2+1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+2+1)}{6}$

Dim. Punto alla CATENA DI UGUAGLIANZE

$$\underbrace{0^2+1^2+\ldots+n^2}_{\text{so quanto fa}}+(n+1)^2 \underset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$= (n+1)\,\frac{n(2n+1)+6n+6}{6}$$

$$= (n+1)\,\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Uguagliando 1° e ultimo abbiamo la tesi.

$\boxed{\text{Dim. di ③}}$ Passo base $n=0$: $1 = \frac{a-1}{a-1}$ ☺

$[n \Rightarrow n+1]$ Ipotesi $1+a+\ldots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Tesi $1+a+\ldots+a^n+a^{n+1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. $\underbrace{1+a+\ldots+a^n}_{\text{ipotesi}}+a^{n+1} \underset{\uparrow \text{ipotesi}}{=} \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}+a^{n+1}$

$= \dfrac{\cancel{a^{n+1}}-1+a^{n+2}-\cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \dfrac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Esempio 2 Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $3^n \geq n^2$.

$n=0 \quad 3^0 \geq 0 \quad$ ok

$n=1 \quad 3^1 \geq 1 \quad$ ok

$n=2 \quad 3^2 \geq 4 \quad$ ok

$n=3 \quad 3^3 \geq 9 \quad$ ok $\quad$ Congetturo che sia vero sempre.

$\boxed{\text{Dimostro per induzione}}$ Passo base :

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $3^n \geq n^2$ $\qquad$ Tesi: $3^{n+1} \geq (n+1)^2$

Dim.: catena di disuguaglianze

$$3^{n+1} \underset{\uparrow \text{PCM}}{=} 3 \cdot 3^n \underset{\uparrow \text{ipotesi} \cdot 3}{\geq} 3n^2 \underset{\uparrow \text{spero}}{\geq} (n+1)^2$$

Controllo se ho sperato bene: $\quad 3n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$

$3n^2 \overset{?}{\geq} n^2+2n+1$

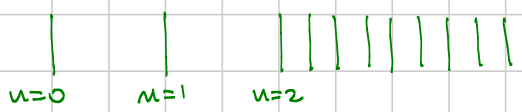
$2n^2-2n-1 \overset{?}{\geq} 0$

L'ultima è vera per valori esterni all'intervallo delle radici, cioè

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \qquad n \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Quindi da $n=2$ in poi è vera.

Il meccanismo di caduta è ok da $n=2$ in poi



Devo fare a mano $n=0,1,2$ e poi da $n=2$ in poi ci pensa l'induzione.

Esempio 3 Disuguaglianza di BERNOULLI

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > -1}$$

Dim per induzione

Passo base: $n=0$ $\qquad (1+x)^0 \geq 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \geq 1$ ☺

$[n \Rightarrow n+1]$ Ipotesi: $((1+x))^n \geq 1+nx$

Tesi: $((1+x))^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. $$(1+x)^{n+1} \underset{\text{PCM}}{=} (1+x)(1+x)^n \underset{\text{Hp}\cdot(1+x)}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

$$\underset{\text{PCM}}{=} 1+nx+x+nx^2 \underset{\text{PCM}}{=} 1+(n+1)x+\overbrace{nx^2}^{\geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

se in una somma elimino un termine ≥ 0, il risultato può solo scendere

— o — o —

Osservazione Ho usato che $x > -1$ quando ho moltiplicato l'ipotesi per $(1+x)$. Solo moltiplicando per quantità > 0 si possono conservare i versi delle disuguaglianze.

— o — o —

Esercizio utile Provare a dim. che

$$(1+x)^n \geq nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq 0 \quad (\text{o } x > -1)$$

[Ovvia per Bernoulli ... ma provare a vedere che succede per ind.]

Esempio 4 Trovare per quali $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$2^n + 3^n + 4^n \leq 5^n$$

$n=0$ $\quad 3 \leq 1$ $\quad$ NO

$n=1$ $\quad 9 \leq 5$ $\quad$ NO

$n=2$ $\quad 29 \leq 25$ $\quad$ NO

$n=3$ $\quad 99 \leq 125$ ☺ $\quad$ Congettura: vera $\forall n \geq 3$.

Passo base $\quad n=3 \rightsquigarrow$ appena fatto

Passo induttivo $\quad$ Ipotesi: $\quad 2^n + 3^n + 4^n \leq 5^n$

Tesi: $\quad 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1} \leq 5^{n+1}$

Dim. Partiamo da destra

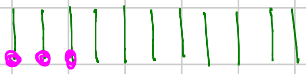
$$5^{n+1} \underset{\text{PCM}}{=} 5 \cdot 5^n \underset{5 \cdot \text{Hp}}{\geq} 5\left(2^n + 3^n + 4^n\right)$$

$$= 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n$$

$$\geq 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n = 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1}$$

sacrifico un po' dei 5

Oss. Nel pass. induttivo non ho mai usato che $n \geq 3$



Le tessere sono vicine sempre, ma le tessere 0, 1, 2 non cadono

— o — o —

Utile: andare a vedere esempio finale del 2014-15.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 005

Note Title 28/09/2016

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ NATURALI

c'è lo zero

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ZAHLEN INTERI (relativi)

$\mathbb{Q} = \{\text{frazioni}\} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ RAZIONALI

quozienti

$\mathbb{R}$ = reali

$\mathbb{C}$ = complessi

— o — o —

NUMERI REALI Sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ caratterizzata da 3 tipi di assiomi

→ assiomi algebrici,

→ assiomi di ordinamento,

→ assioma di continuità.

Assiomi algebrici $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sono un CAMPO, cioè le operazioni $+$ e $\cdot$ soddisfano le seguenti proprietà:

(S1) $a+b = b+a \quad \forall \dots$

(S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(S3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(S4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b = 0$

no in $\mathbb{N}$

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$

(P2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(P3) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(P4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $ab = 1$

no in $\mathbb{Z}$

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Assiomi di ordinamento La relazione $\geq$ ha le seguenti propr.

(Ord 1) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$ [si ha che] $x \geq y$ VEL $y \geq x$
(Ord 2) $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $x \geq x$ (RIFLESSIVA)
(Ord 3) Se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (ANTISIMMETRICA)
(Ord 4) Se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (TRANSITIVA)

L'ordinamento è legato alle operazioni da 2 assiomi

(OS) Se $x \geq y$, allora $x+z \geq y+z$ $\forall z \in \mathbb{R}$
[$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{R}$ $(x \geq y \Rightarrow x+z \geq y+z)$]

(OP) Se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $xz \geq yz$ $\forall z \in \mathbb{R}$

[$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{R}$ $(x \geq y$ AND $z \geq 0 \Rightarrow xz \geq yz)$]

Esempio Risolvere la disequazione $3x+5 \geq 7 \rightsquigarrow x \geq \frac{2}{3}$

$3x+5 \geq 7$ Aggiungo -5 a dx e sx (OS) e (S4)
$(3x+5)-5 \geq 7-5$
$3x+(5-5) \geq 2$ (S2)
$3x \geq 2$
$\frac{1}{3} \cdot 3x \geq \frac{1}{3} \cdot 2$ (andrebbe dim. che $\frac{1}{3} > 0$) poi (OP)
$\vdots$
$x \geq \frac{2}{3}$

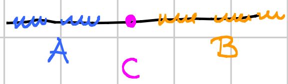
Achtung! Ci sono tante proprietà che si usano sempre, ma non sono scritte negli assiomi

- l'opposto e l'inverso $(-a$ e $\frac{1}{a})$ sono unici
- 0 e 1 sono unici
- $0 \neq 1$ e $1 \geq 0$
- Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$ (cambio verso)

Assioma di continuità

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi. Si dice che A sta a sx di B se

(tutti gli el. di A sono $\leq$ di tutti gli el. di B)



$$\boxed{\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b}$$

Assioma di continuità: se A sta a sx di B, allora esiste almeno un pto $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{ll} a \leq c & \forall a \in A \\ c \leq b & \forall b \in B \end{array}}$$

Fatto: in $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di continuità, e l'esempio classico è

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq 2 \}$$
$$B = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \geq 2 \}$$

Si potrebbe dimostrare che

1. A sta a sx di B
2. Non esiste nessun $c \in \mathbb{Q}$ che sta in mezzo (dovrebbe succedere che $c^2 = 2$, ma questo in $\mathbb{Q}$ non è possibile)

— o — o —

TEOREMONE 1 (Esistenza dei numeri reali)

Esiste una struttura $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che verifica tutti gli assiomi enunciati finora.

DIFFICILE

$\boxed{\text{TEOREMONE 2}}$ (Unicità dei numeri reali)

Supponiamo che esistano due strutture $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ e $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \geq)$ che verificano gli assiomi.
Allora esiste una funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

invertibile (quindi bigettiva) che commuta con le operazioni e l'ordinamento, cioè

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$$
$$x \geq y \iff f(x) \geq f(y)$$

UN PO' MENO DIFFICILE DA DIMOSTRARE

Esercizi

① Dimostrare la legge di semplificazione $a+c = b+c \Rightarrow a = b$

[Dim. Sia d un qualunque opposto di c, cioè $c+d=0$.
Aggiungo d a dx e sx e uso un po' di (S2) e (S3)

$$a + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(c+d)}} = b + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(c+d)}} \rightsquigarrow a+0 = b+0 \rightsquigarrow a = b \;]$$

② Dimostrare che l'opposto di a è unico
Siano b_1 e b_2 due opposti: allora $a+b_1 = a+b_2 = 0$
$b_1 + a = b_2 + a$
Uso la legge di cancellazione e concludo

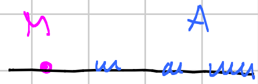
③ $1 \cdot (-1) \overset{(P3)}{=} -1$ ④ $a \cdot 0 = 0$ $[a \cdot 0 \underset{(S3)}{=} a \cdot (0+0) \underset{D}{=} \cancel{a \cdot 0} + a \cdot 0]$
$\cancel{a \cdot 0} + 0$ "="

ANALISI 1 — LEZIONE 006

Note Title 28/09/2016

$\boxed{\text{INF-SUP-MAX-MIN}}$ Raffica di definizioni.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.



Def. Si dice che

- A è LIMITATO INFERIORMENTE se

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } M \leq a \quad \forall a \in A}$$

Si dicono minoranti di A tutti gli M per cui vale la precedente

- A è LIMITATO SUPERIORMENTE se

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } M \geq a \quad \forall a \in A}$$

Tutti gli M che vanno bene si dicono maggioranti di A

- A è LIMITATO se è contemporaneamente lim. sup. e inf.

Oss. A è limitato se e solo se

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underbrace{|a| \leq M}_{-M \leq a \leq M} \quad \forall a \in A}$$

Def. (Massimo e minimo di un insieme) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.
Si dice che M è il massimo di A, e si scrive

$$M = \max A$$

se

(i) $M \geq a \quad \forall a \in A$ ← dice solo che M è maggiorante

(ii) $M \in A$ ← sta nell'insieme

Analogamente, $m = \min A$ se
(i) $m \leq a \quad \forall a \in A$
(ii) $m \in A$.

Oss. ① Max e min non sono obbligati ad esistere
② Quando max / min esistono, sono unici (dimostrarlo!)
③ I maggioranti non sono obbligati ad esistere, anzi esistono se e solo se A è limit. sup.
④ Se i maggioranti esistono, non sono mai unici.
Idem per i minoranti.

Esempi • $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ È limitato inferiormente e i minoranti sono tutti i numeri $M \leq 0$.
Non è limitato superiormente.
• $[0,1)$ È limitato inf. e sup.
I minoranti sono tutti i numeri $M \leq 0$
Il minimo è 0.
I maggioranti sono tutti i numeri $M \geq 1$
Il massimo non esiste

Def. (Estremo superiore) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.
• Si dice che $\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiorm.
• Si dice che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se A è lim. super. e L è il minimo dei maggioranti di A.

Def. (Estremo inferiore) ...
• ... $\inf A = -\infty$ se A non è lim. infer.
• ... $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se A è lim. infer. e l è il massimo dei minoranti.

— o — o —

Teorema (Esistenza del sup)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ e A limitato superiormente.
Allora esiste il minimo dei maggioranti.

Dim. Sia B l'insieme dei maggioranti di A.
B non è $\emptyset$ perché A è lim. sup.
L'insieme A sta tutto a sx di B per def. di maggiorante
Per l'assioma di continuità esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$
tale che

$a \leq c \quad \forall a \in A$ (c è maggiorante, cioè $c \in B$)
$c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è $\leq$ di tutti i maggioranti)

Questo dimostra che c è il minimo dei maggioranti. $\square$

Esercizio Enunciare e dimostrare l'esistenza dell'inf.

Conseguenza: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Allora
- $\sup A$ e $\inf A$ esistono per forza (eventualmente $+\infty, -\infty$)
- sono sempre unici
- se esiste $\max A$, allora è anche $\sup A$. Anzi,
  esiste $\max A \iff \sup A \in A$
  Stesso discorso per l'inf.

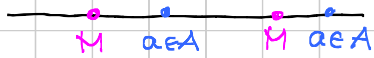
Achtung! sup e inf di $\emptyset$. Ci sono 2 possibilità

- dire che non esistono, il che costringe sempre a controllare che $A \neq \emptyset$ quando si scrive $\sup A$ o $\inf A$.
- dire che $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$ } pensando a chi sono maggioranti e minoranti
  Ma allora $\sup < \inf$, il che non è buono.

—o—o—

CARATTERIZZAZIONE DI SUP E INF Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$

① Si ha che $\sup A = +\infty$ se



$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \geq M}$$

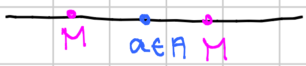
gli M interessanti sono quelli enormi

$\sup A = +\infty \iff$ NOT (esiste maggiorante)

NOT $(\exists M \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ \ a \leq M)$

$\iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists\, a \in A \ \ a > M$

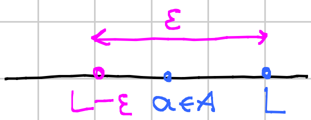
② Si ha che $\inf A = -\infty$ se



$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \leq M}$$

gli M interessanti sono quelli enormemente negativi

③ Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

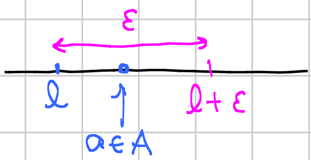


(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, a \in A$ t.c. $L - \varepsilon \leq a$

(se non esistesse a come sopra, allora $L-\varepsilon$ sarebbe un maggiorante, dunque L non sarebbe il min dei maggioranti).

④ Si ha che $\inf A = \ell \in \mathbb{R}$ se



(i) $\ell \leq a \quad \forall a \in A$

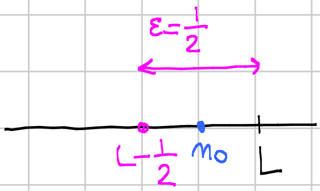
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$

Oss. La (i) dice che ℓ è un minorante

La (ii) dice che ℓ è il più $\boxed{\text{piccolo}}$ minorante, cioè non esistono minoranti $> \ell$.

GRANDE: aggiunto dopo video

Prop. $\sup \mathbb{N} = +\infty$



Dim. Supponiamo $\sup \mathbb{N} = L \in \mathbb{R}$.
Uso la caratterizzazione con $\varepsilon = \frac{1}{2}$
Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n_0 \geq L - \frac{1}{2}$$

Ora $$n_0 + 1 \underset{(\text{OSS})}{\geq} L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2}$$

D'altra parte dovrebbe essere $n_0 + 1 \leq L$. Ma allora

$$L + \frac{1}{2} \leq L$$

il che è assurdo (aggiungo $-L$ a dx e sx e ottengo $\frac{1}{2} \leq 0$)

Oss. Ci sarebbe da dim. che $\frac{1}{2} > 0$ ... ma questo è un bell' esercizio !!!

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 007

Note Title 29/09/2016

FUNZIONI REALI Setting classico: $A \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme $\neq \emptyset$
$f : A \to \mathbb{R}$

MONOTONIA Proprietà di monotonia = crescenza / decrescenza

Def. La funzione f si dice

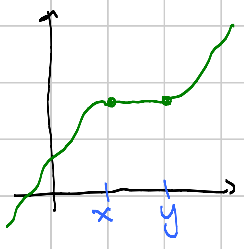
Strett. crescente $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$

Debol. crescente $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

Strett. decrescente $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

Debol. decrescente $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

Oss. ① Se f è strett. crescente, allora è pure debol. crescente
② Se f è debolm. cresc., ma non strettamente, vuol dire che il grafico ha dei tratti piatti, cioè // asse x



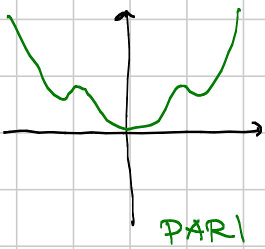
SIMMETRIA

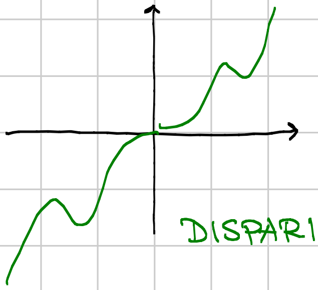
Def. La funzione f si dice

PARI se $f(-x) = f(x)$
DISPARI se $f(-x) = -f(x)$

In termini di grafico

- PARI $\iff$ grafico simm. risp. asse y
- DISPARI $\iff$ " " " origine





<u>Esercizio</u> Se f è dispari, allora $f(0) = 0$

[<u>Dim.</u> $f(-x) = -f(x)$. Metto $x=0$ e ottengo $f(0) = -f(0)$, cioè $2f(0) = 0$, cioè $f(0) = 0$]

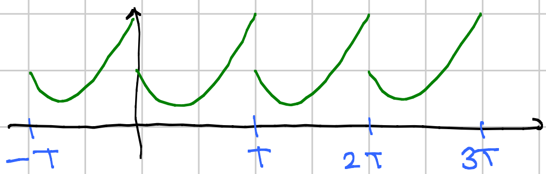
<u>Def.</u> La funzione f si dice PERIODICA se esiste almeno un $T > 0$ tale che

$$f(x) = f(x+T) \qquad \forall x \in A$$

Ogni T che va bene si dice PERIODO di f.

Se esiste un minimo $T>0$ che va bene, allora si chiama MINIMO PERIODO.

Graficamente vuol dire che il tratto tra 0 e T si ripete

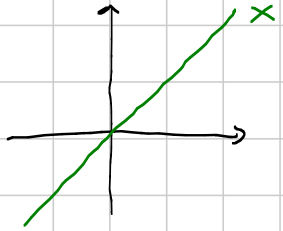


Esistono funzioni non costanti che non hanno periodo min., per es.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

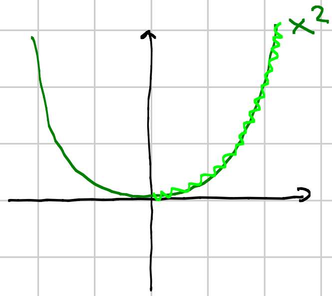
Ogni $T>0$ con $T \in \mathbb{Q}$ è un periodo

Presentazione funzioni elementari



$\boxed{\text{IDENTITÀ}}$ $f(x) = x$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari e strett. cresc.

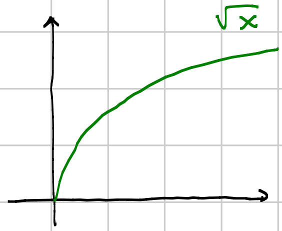
$\boxed{\text{POTENZE}}$ $f(x) = x^k$ con k intero ≥ 2



- Caso $k=2$ (e idem per k pari) $f(x) = x^2$ è pari. Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né inj., né surg.

Vista come $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva, quindi ammette inversa $g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ che è

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \leftarrow \text{Definizione}$$



Fatto generale: Il grafico di una funzione e della sua inversa sono simm. risp. alla bisettrice $y = x$

Achtung! Le radici di indice pari prendono in INPUT valori $x \geq 0$ e restituiscono valori ≥ 0

Come dimostro che $f(x) = x^2$ è strett. cresc. per $x \geq 0$

Prendiamo $y > x$. Allora $y = x + a$ con $a > 0$. Allora

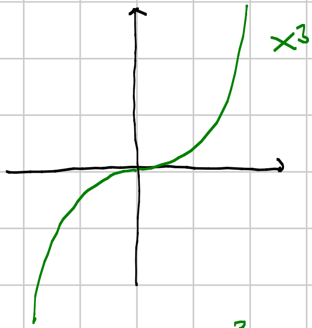
$$y^2 = (x+a)^2 = x^2 + \underbrace{2ax}_{\geq 0} + \underbrace{a^2}_{>0} > x^2$$

In alternativa posso usare che

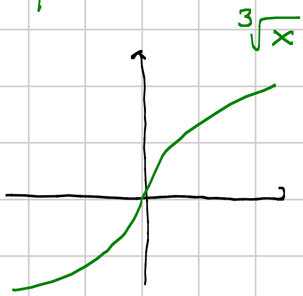
$$y^2 = y \cdot y > y \cdot x > x \cdot x = x^2$$

Essendo strett. cresc. è iniettiva.
La surgettività non è ovvia e andrebbe dimostrata.

- Caso $k=3$ (e analogo per tutti i dispari)

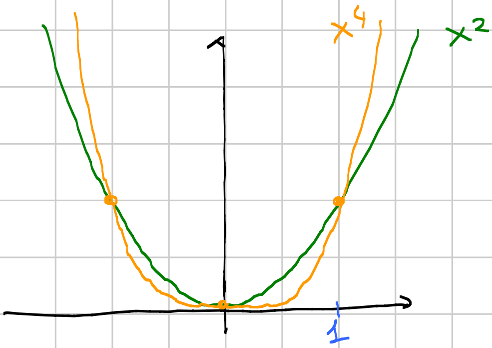


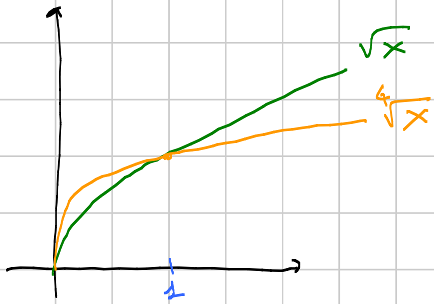
$f(x) = x^3$ è dispari e strett. cresc. su tutto $\mathbb{R}$.
Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è
iniettiva (facile)
surgettiva (difficile)
quindi ammette inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

In partenza ho $x \in \mathbb{R}$ qualunque e in output pure (con lo stesso segno)





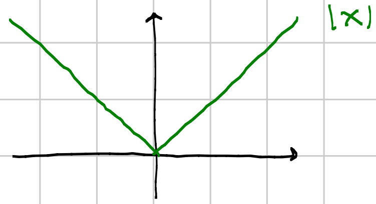
Idem per esponenti dispari

ANALISI 1 — LEZIONE 008

Note Title 29/09/2016

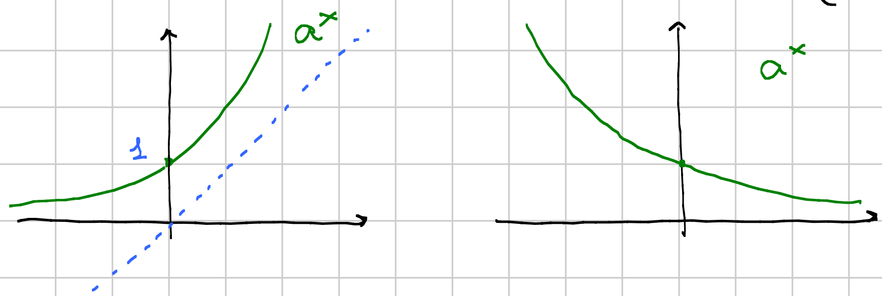
VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



FUNZIONI ESPONENZIALI

$f(x) = a^x$ con $a > 0$ FISSATO e x variabile $\left(2^x, 3^x, \pi^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$



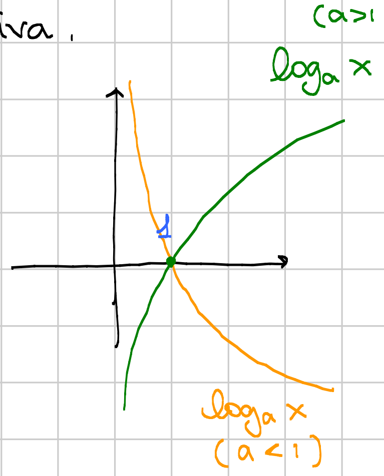
$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$

Dando per buoni i grafici, consideriamo il caso $a > 1$.

$f(x) = a^x$ pensata come $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è strettamente crescente, iniettiva e surgettiva.

L'inversa $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è

$$g(x) = \log_a x$$



Come si DEFINIREBBE l'esponenziale ?

Per ogni $a > 0$ esiste un'unica funzione $f_a: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tale che

(i) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\quad [a^{x+y} = a^x \cdot a^y]$

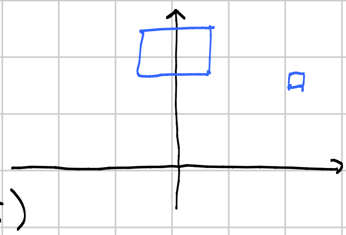
(ii) $f_a(1) = a$

(iii) va scelta tra un po' di opzioni

Date le proprietà (i) e (ii) si può dimostrare che esiste un'UNICA funzione $f_a : \mathbb{Q} \to (0,+\infty)$ che la verifica

Tuttavia esistono infinite funzioni $f_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ che verificano (i) + (ii). Se voglio che sia unica devo aggiungere qualcosa a scelta tra

- f_a è continua
- f_a è monotona
- esiste un rettangolo contenuto nel 1° o 2° quadrante che non contiene p.ti del grafico



Si verifica poi che l'unica soluzione decente ha le proprietà dette prima (invertibilità)

In questo modo $2^{\pi} = \sup\{2^q : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q < \pi\}$

— o — o —

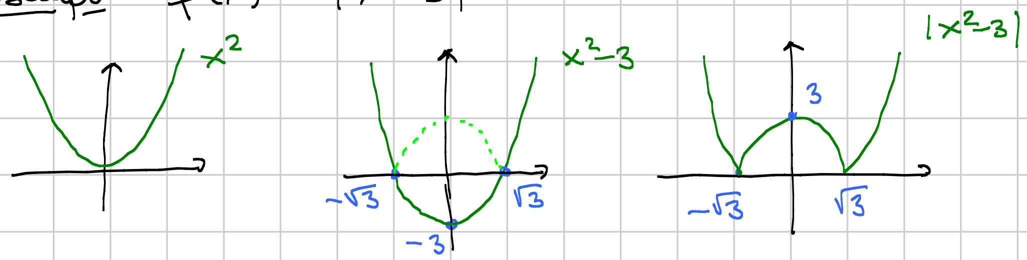
Resterebbero le funzioni trigonometriche

— o — o —

<u>Operazioni sui grafici</u> Sia dato il grafico di $f(x)$. Come ottengo il grafico di

$f(x)+a$	traslazione verticale ($\uparrow$ se $a>0$)
$f(x+a)$	" orizzontale ($\leftarrow$ se $a>0$)
	[pensare a x^2 e $(x+1)^2$]
$-f(x)$	ribalto rispetto asse x
$f(-x)$	" " " y
$-f(-x)$	" " origine
$\lvert f(x)\rvert$	ribalto parti negative
$f(\lvert x\rvert)$	sparisce parte con $x \le 0$ sostituita dal ribaltato risp. asse y della parte con $x \ge 0$

Esempi $f(x) = |x^2-3|$



Graficamente:

- f è iniettiva se ogni retta // asse x interseca il grafico in 0 oppure 1 p.to
- f è surg. se ogni retta // asse x ... in 1 o più punti.

Equazioni e iniettività $2^{5x+4} = 2^{7x+2} \rightsquigarrow 5x+4 = 7x+2$

$$\cancel{f}(5x+4) = \cancel{f}(7x+2) \rightsquigarrow 5x+4 = 7x+2$$

Questo è possibile SE f è $\boxed{\text{iniettiva}}$ $f(a_1) = f(a_2)$ e voglio dedurre $a_1 = a_2$

$$\log_5(5x-4) = \log_5(7x-2)$$

Posso eliminare i $\log_5$, ma devo imporre che gli argomenti siano >0.

Disequazioni $\cancel{f}(5x-4) \geq \cancel{f}(7x-2)$

Se f è strett. crescente, allora la posso eliminare

[$f(a) \geq f(b)$ e so che f è strett. cresc. posso dedurre che $a \geq b$
Se così non fosse, avrei $a < b$, ma allora sarebbe $f(a) < f(b)$]

Se f è strett. decresc., allora posso eliminare, ma devo invertire

$$f(a) \geq f(b) \implies a \leq b$$

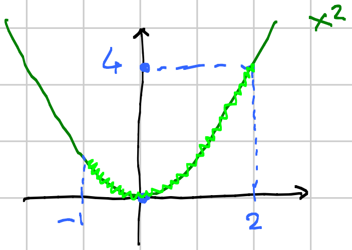
Esercizio Vedere quando valgono i passaggi

$$f(a) > f(b) \implies a > b$$

[Dim. detta a voce]

Come si vedono immagine e controimmagine

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad f([-1,2]) = [0,4]$



IMMAGINE

→ segno $[-1,2]$ sull'asse x

→ vedo il tratto di grafico corr.

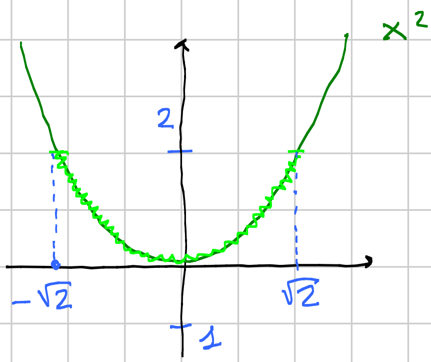
→ proietto sull'asse y

$$f^{-1}([-1,2]) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-1,2]\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

→ segno $[-1,2]$ sull'asse y

→ vado al grafico

→ proietto sull'asse x



ANALISI 1 - LEZIONE 009

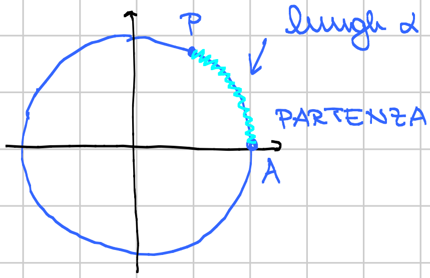
Note Title 03/10/2016

Presentazione funzioni elementari

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE E LORO INVERSE

Angoli vs archi

Archi

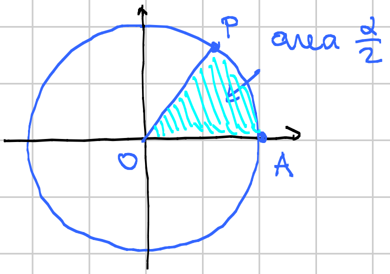


$x^2+y^2=1$

P corrisponde ad un arco α se l'arco $\widehat{AP}$ è lungo α.

Se α è negativo, vuol dire che "giro al contrario"
Se $\alpha > 2\pi$, vuol dire fare + volte il giro.

Settori



P corrisponde ad un settore α se l'area del settore circolare OPA è $\frac{\alpha}{2}$.

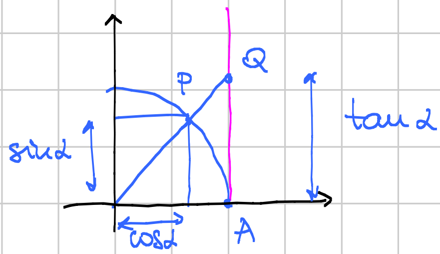
$\boxed{\text{Area} : \text{lungh} = \pi : 2\pi}$ Area sett $= \frac{1}{2}$ lungh. arco

"Def. funzioni trigonometriche"

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, questo individua in modo unico un p.to P della circ. trigonometria (sia nel 1°, sia nel 2° modo). A quel p.to

$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



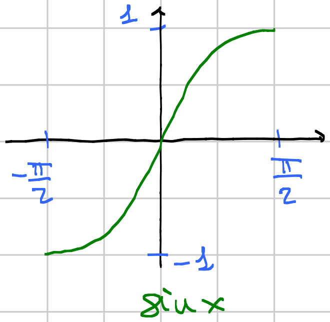
$\boxed{\sin x}$ $f(x) = \sin x$

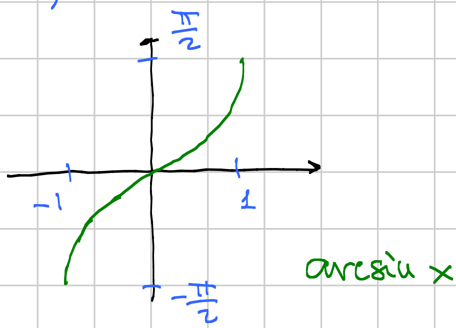
vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari e periodica di periodo minimo 2π

Vista come $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è invertibile e strett. crescente.

L'inversa è una $g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ detta

$g(x) = \arcsin x$ (dispari)





$\boxed{\cos x}$ Come sopra... $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo min 2π e pari

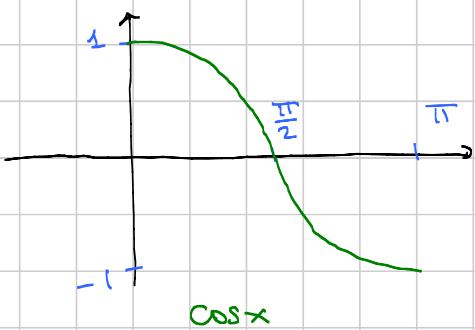
Vista come $f: [0,\pi] \to [-1,1]$ è strett. decresc. e invertibile.

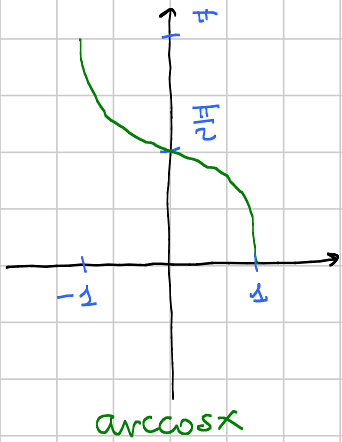
L'inversa è

$$g: [-1,1] \to [0,\pi]$$

detta

$$g(x) = \arccos x$$



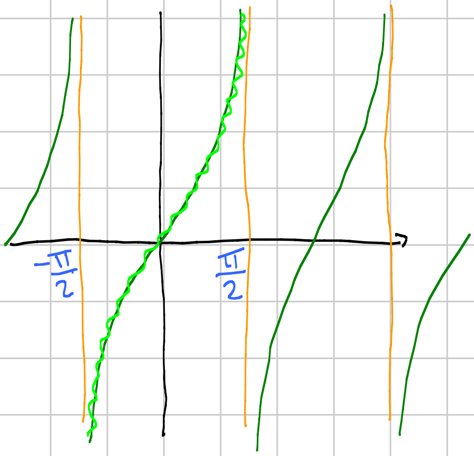


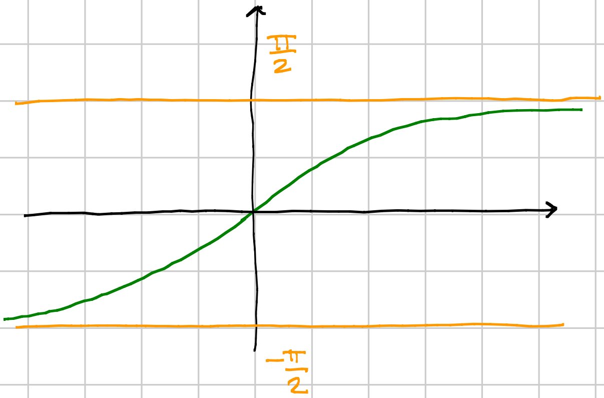
$\boxed{\tan x}$ Definita su $\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \}}_{\text{Qui } \cos = 0} = A$

Vista come $f : A \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo minimo π e dispari. Inoltre è surg., ma non iniettiva.
Vista come $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ è strett. cresc. e invertibile.

L'inversa è $g : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e si chiama

$g(x) = \arctan x$ (dispari)





$\tan x$ $\arctan x$

— o — o —

$\arcsin(\sin 1) = 1$

$\arcsin(\sin 2) = \boxed{2} \leftarrow$ NO!! Non può essere 2 perché è fuori dall'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$
$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\forall x \in$ insieme di partenza della funzione usata per fare l'inversa

$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$
$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$
$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in$ insieme di arrivo della funz. usata per definire l'inversa

$f: A \to B \qquad g: B \to A$ funzione inversa.

Allora

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$
$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Oss. C'è lo stesso probl. con le potenze / radici di indice pari

$$\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \geq 0 \qquad \sqrt{x^2} = |x| = \sqrt[4]{x^4}$$

$$\sqrt[4]{x^4} = x \quad \forall x \geq 0$$

— o — o —

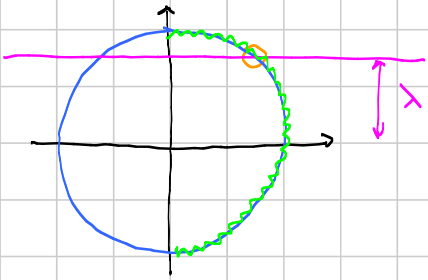
Esercizio Calcolare

$\arcsin(\sin 2) =$ NON è 2

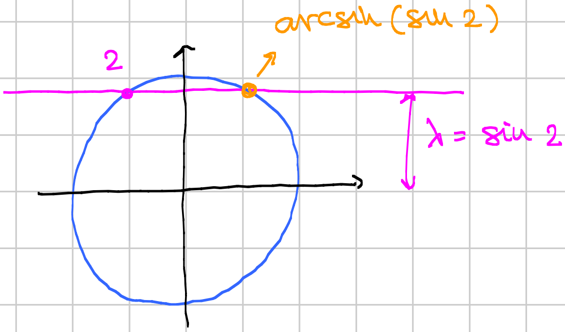
$\arccos(\cos 2) = 2$ (basta osservare che $2 \in [0, \pi]$)

$\arccos(\cos 4) =$ NON è 4

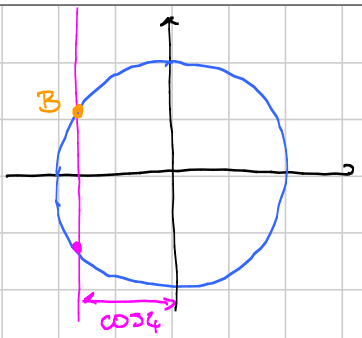
Osservazione geometrica: per calcolare $\arcsin \lambda$ vuol dire intersecare la circ. trigo. con la retta $y = \lambda$ e prendere l'intersezione a dx



Per $\arccos \lambda$ è la stessa cosa solo che prendo $x = \lambda$ e considero l'intersezione sopra.



$$\arcsin(\sin 2) = \pi - 2$$



B corrisponde ad $\arccos(\cos 4)$

Viene $2\pi - 4$

— o — o —

Formula interessante

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0}$$

Dim. Sia $\alpha = \arctan x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ perché $x > 0$

Considero $\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chi è la sua tangente?

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\text{PCM}}{=} \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$$

Nota: siamo nella zona dove $\arctan(\tan \ldots) = \ldots$

Faccio arctan a dx e sx e ottengo $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan \frac{1}{x}$ che è quello che volevo.

— o — o —

Formule analoghe $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]}$$

La seconda segue da $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ per ogni α.
Nella zona giusta si può applicare arccos a dx e sx.

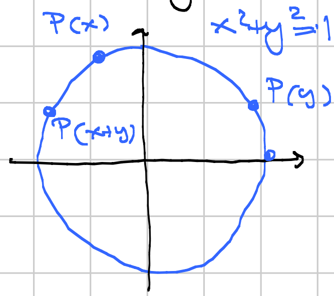
— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 010

Note Title 03/10/2016

Idea di come si potrebbe provare a definire le funzioni trigonom.

Sia T l'insieme dei punti della circ. trigo.
Allora esiste un' unica funzione



$$P: \mathbb{R} \to T$$

tale che

(i) $P(0) = (1,0)$ partenza

(ii) $P(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$

(iii) $\text{dist}\,(P(x+y), P(x)) = \text{dist}\,(P(y), P(0)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$

distanza tra p.ti del piano

(iv) qualcos'altro a scelta tra un po' di opzioni, ad esempio continuità o un po' di monotonia.

TEOREMONE Esiste un' unica funzione $P(x)$ con le proprietà enunciate.

A quel punto posso porre $P(x) = (\cos x, \sin x)$

Esercizio Definito $P(x)$ come sopra, provare ad imporre la (iii) e vedere cosa viene fuori
[Risposta: formule di addizione]

Oss. In realtà prima bisognerebbe definire π.

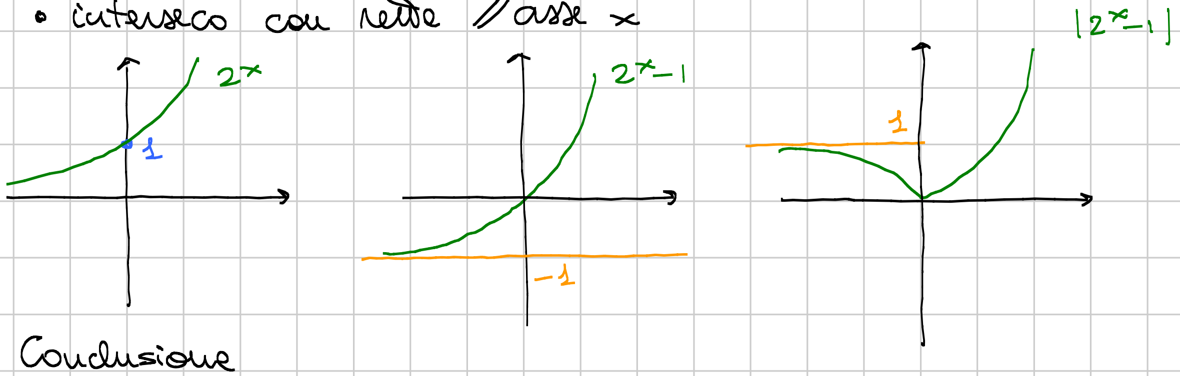
— o — o —

Esercizio 1 Studiare, al variare del parametro λ, il numero di soluzioni dell'eq.

$$\underbrace{|2^x - 1|}_{f(x)} = \lambda$$

Strategia:

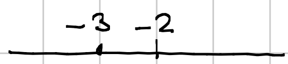
- disegno grafico di $f(x)$
- interseco con rette // asse x



Conclusione

- 0 soluzioni per $\lambda \in (-\infty, 0)$
- 1 soluzione per $\lambda \in \{0\} \cup [1, +\infty)$
- 2 soluzioni per $\lambda \in (0, 1)$

Esercizio 2 $\underbrace{|x+2| + |x+3|}_{f(x)} = \lambda$



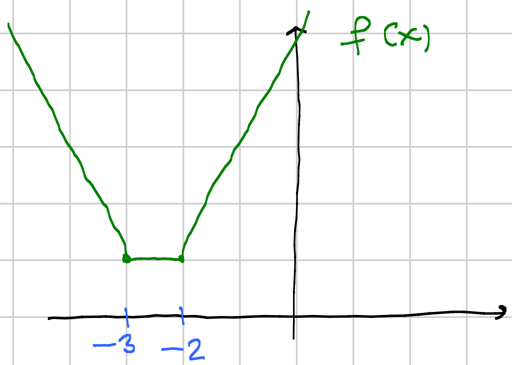
Zone: $\to$ per $x \leq -3$ si ha $f(x) = -x-2-x-3 = -5-2x$

$\to$ per $-3 \leq x \leq -2$ $f(x) = -x-2+x+3 = 1$

$\to$ per $x \geq -2$ $f(x) = x+2+x+3 = 5+2x$

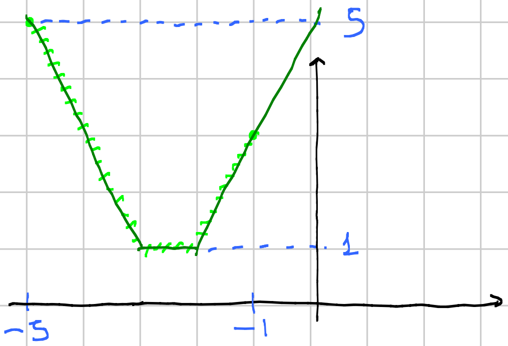
Conclusione

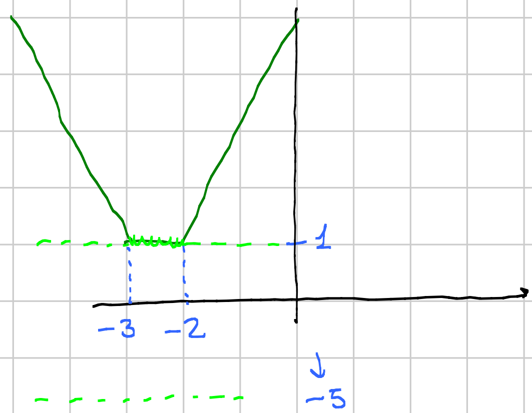
- 0 soluzioni $\lambda \in (-\infty, 1)$
- 2 soluzioni $\lambda \in (1, +\infty)$
- ∞ soluz. $\lambda \in \{1\}$



<u>Esercizio 3</u> $f(x)$ come prima. Calcolare $f([-5,-1])$ e $f^{-1}([-5,1])$

$$f([-5,-1]) = [1,5] \qquad f^{-1}([-5,1]) = [-3,-2]$$





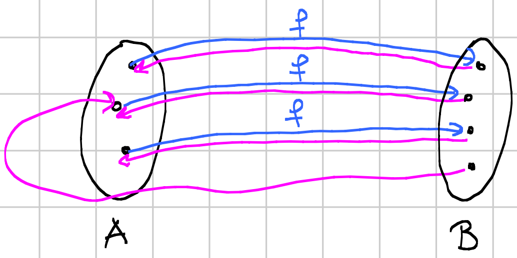
— o — o —

<u>Esercizio 4</u> Trovare $f: A \to B$ NON invertibile per cui esiste $g: B \to A$ t.c.

$$g(f(a)) = a \qquad \forall a \in A$$

(una sola delle richieste per avere l'inversa)

Vediamo subito che la f interna, cioè f, deve essere iniettiva



f è iniettiva, ma non surg.
g è surg., ma non iniett.
La composizione $g \circ f$ è bigettiva mentre $f \circ g$ non è né I né S.

Altro esempio con $A = B = \mathbb{N}$

$$f(n) = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad g(f(n)) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \geq 1 \\ 2016 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

<u>Esercizio 5</u> Risolvere l' equazione

$$\arccos(3x+1) = \arccos(2x+3)$$

"Posso" togliere l'arccos perché è iniettivo : $3x+1 = 2x+3$

↓ a patto di controllare DOPO che $3x+1$ e $2x+3$ siano in $[-1,1]$

$x = 2$ ⇝ NON va bene perché $3x+1 = 7$

Fosse stato $\cancel{\log}_{\shortparallel}(3x+1) = \cancel{\log}_{\shortparallel}(2x+3)$

a patto di controllare che $3x+1 = 2x+3 > 0$

$(x=2$ OK$)$

Fosse stato $\arctan(3x+1) = \arctan(2x+3)$ OK gratis, perché $\arctan x$ è iniettiva e definita $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Esercizio 6</u> $f(x) = \cos(\sin x)$ è periodica di periodo (non nec. minimo) 2π e PARI

<u>Fatto generale</u> Se $f(x)$ è T-periodica, allora $g(f(x))$ è T-periodica (ma potrebbe avere periodo minimo + piccolo)

<u>Dim.</u> $g(f(x+T)) = g(f(x))$.

Nell' esempio il periodo è π $[\cos(\sin(x+\pi)) \overset{\text{PCM}}{=} \cos(-\sin x) \overset{\cos \text{ è pari}}{=} \cos(\sin x)]$

Dim. che $f(x)$ è PARI: $f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x)$
$= \cos(\sin x) = f(x)$

<u>Fatti generali</u> se $f(x)$ è pari, allora Mostro $(f(x))$ è PARI

Se f e g sono dispari, allora $g(f(x))$ è dispari.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 011

Note Title 05/10/2016

Def. Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$.

(1) Si dice che $P(n)$ è vero DEFINITIVAMENTE se è vero da un certo p.to in poi, cioè

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad P(n) \text{ è vera}}$$

(2) Si dice che $P(n)$ è vero FREQUENTEMENTE se è vero per infiniti valori dell'indice n.
In alternativa equivale a dire

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq m \text{ t.c. } P(n) \text{ è vera}}$$

Oss. Se $P(n)$ è vera quando n è del tipo 2^{2^k}, è comunque vero frequentemente.

— o — o —

SUCCESSIONE

Def. ortodossa Una succ. è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Esempi $\quad a_n = n^2 + 3 \qquad\qquad b_n = \dfrac{1}{n+5}$

modo di indicare $a(n)$ $\qquad$ $b(n)$

Def. più elastica Non serve che $f(n)$ (o meglio f_n) sia definita per ogni $n \in \mathbb{N}$, basta che sia definita definitivamente, cioè che gli eventuali pbm siano un numero finito.

Esempio $a_n = \frac{1}{n}$ Ok per $n \geq 1$

$b_n = \frac{1}{n-2016}$ Ok per $n \geq 2017$ (basta $n \neq 2016$)

$c_n = \sqrt{n-2016}$ Ok per $n \geq 2016$

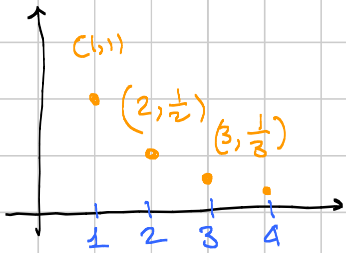
$d_n = \sqrt{2016^{2016} - n}$ NON è una succ., perché va male appena $n > 2016^{2016}$

Oss. NOT (P(n) è vera definitivamente) = P(n) è falsa frequent.

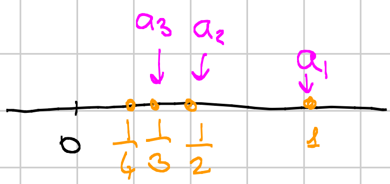
VISUALIZZAZIONE DI UNA SUCCESSIONE

1 **Cartesiano** Disegno nel piano i p.ti (n, a_n)

$a_n = \frac{1}{n}$



2 **Sulla retta** Disegno su una retta i p.ti a_n



3 **Lampadine** Pensiamo ad una retta, pensiamo al tempo che scorre, e ogni secondo si accende una lampadina in posizione $a_0, a_1, a_2, \dots$ e resta accesa un secondo.

Tra il secondo 2016 e 2017, resta accesa solo la lampadina in a_{2016}

LIMITI DI SUCCESSIONI

Sia a_n una successione (di numeri reali), nel senso elastico. Allora sono possibili 4 tipi di comportamento.

1. $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ $\qquad$ (a_n tende ad ℓ)

2. $a_n \to +\infty$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\qquad$ (a_n tende a $+\infty$) diverge

3. $a_n \to -\infty$ $\qquad$ " $\qquad -\infty$

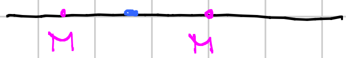
4. a_n è indeterminata $\qquad \lim_{n\to+\infty} a_n$ NON ESISTE

Def. di 4 $\quad$ Nessuno dei precedenti

Def. di 2 $\quad$ (a_n supera qualunque barriera definitivamente)

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \qquad a_n \geq M \quad \text{definitivamente}}$$

anche enorme



stessa cosa

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq M}$$

Oss. In generale n_0 dipende da M, e più M è grande più ci si aspetta che n_0 sia grande.

Def. 3 $\quad$ (come prima con superamento a sx)

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \qquad a_n \leq M \quad \text{definitivamente}}$$

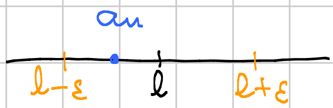
anche molto neg.

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq M}$$

Def. $\boxed{1}$ Si dice che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ se

(per tempi grandi le lampadine si accendono vicino ad ℓ)

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon \text{ definitiv.}}$$



Oss. Moralmente, se ε è molto vicino a 0, è probabile che n_0 debba essere grande.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{|a_n - \ell|}_{\text{distanza tra } a_n \text{ ed } \ell} \leq \varepsilon \text{ definit.}}$$

Variante della $\boxed{1}$ $\qquad a_n \to \ell^+ \qquad a_n \to \ell^-$

$a_n \to \ell^+$ vuol dire $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \ell < a_n \leq \ell + \varepsilon \text{ definitiv.}}$

DEVE ESSERE STRETTA $\qquad$ A SCELTA $\leq$ opp. $<$

$a_n \to \ell^-$ vuol dire $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon \leq a_n < \ell \text{ definitiv.}}$

STRETTA

Esempi intuitivi

① $a_n = n^2 + 3 \qquad a_n \to +\infty$

(se $M = 10^6$, posso prendere $n_0 = 10^3$)
$\quad M = 10^{12} \qquad n_0 = 10^6$

② $b_n = \frac{1}{n} \qquad b_n \to 0$, anzi $b_n \to 0^+$

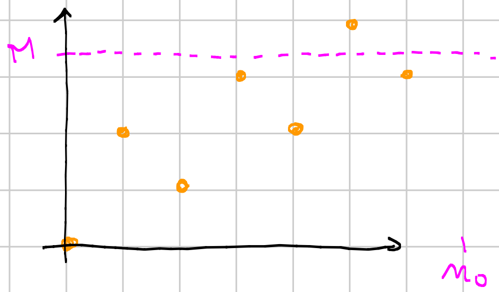
③ $c_n = (-1)^n \qquad c_n = 1, -1, 1, -1, \ldots \qquad c_n$ NON HA LIMITE.

Leggende metropolitane

[1] Se $a_n \to +\infty$, allora deve essere definitivamente crescente.

NO: $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6$

"Penelope"



[2] Se $a_n \to 0$, allora $a_n \to 0^+$ oppure $a_n \to 0^-$

NO: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$ $\qquad \frac{(-1)^n}{n+1}$

[3] Se $a_n \to 0^+$, allora a_n è definitivamente decrescente

NO: $\frac{1}{\text{penelope}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$

[4] Se $\sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}} = +\infty$, allora $a_n \to +\infty$

insieme dei punti
segnati nella rappr. sulla retta

NO: $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6 \ldots$

(questa NON ha limite)

Cosa è vero per questa

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad a_n \geq M$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ frequentemente

Non è vero che $\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ definitivamente

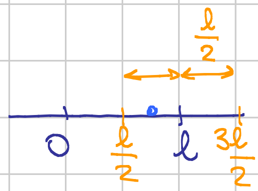
ANALISI 1 – LEZIONE 012

Note Title 05/10/2016

Teorema (permanenza del segno) Sia a_n una succ. Supponiamo che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ con $\ell > 0$.
Allora

$$a_n > 0 \quad \text{definitivamente}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di lim. con $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ e ho che



$$0 < \frac{\ell}{2} \leq a_n \leq \frac{3\ell}{2} \quad \text{definitiv.} \qquad \square$$

non serve

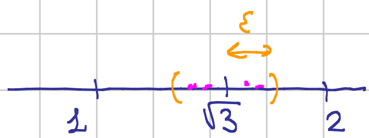
Teorema (analogo) Se $a_n \to +\infty$, allora $a_n > 0$ definitiv.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di $\boxed{2}$ con $M = 2016$. Allora

$$a_n \geq 2016 \quad \text{definitiv.}, \quad \text{quindi } a_n > 0 \text{ definit.}$$

Tanti enunciati analoghi Se $a_n \to \sqrt{3}$, allora $1 < a_n < 2$ definitiv.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta prendere ε abbastanza piccolo in modo tale che



$$1 < \sqrt{3} - \varepsilon \quad \text{e} \quad \sqrt{3} + \varepsilon < 2$$

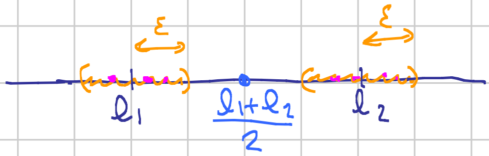
— o — o —

Teorema (unicità del limite) Una succ. a_n ha uno ed uno solo dei quattro comportamenti $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$.
Se inoltre è di tipo $\boxed{1}$, allora c'è un solo valore $\ell \in \mathbb{R}$ per cui $a_n \to \ell$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sarebbero tanti casi da dimostrare.

- Non può essere che $a_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $a_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$ con $\ell_1 \neq \ell_2$

WLOG (without loss of generality) posso assumere $\ell_1 < \ell_2$



Per il teo. precedente e varianti

se $a_n \to \ell_1$, allora $a_n < \frac{\ell_1+\ell_2}{2}$ definitiv.
se $a_n \to \ell_2$, allora $a_n > \frac{\ell_1+\ell_2}{2}$ "
incompatibili

- Non può essere che contemporaneamente $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e $a_n \to +\infty$

* Se $a_n \to \ell$, allora defin.
$\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$ $(\varepsilon = 1)$

* Se $a_n \to +\infty$, allora defin. $a_n \geq \ell + 2$ $(M = \ell + 2)$

Le due richieste sono incompatibili.

— o — o —

$\boxed{\text{Strumenti per il calcolo dei limiti}}$

$\boxed{\text{Teorema di confronto a 2}}$ Sia a_n e b_n 2 succ.
Supponiamo che
$$a_n \leq b_n \quad \text{definitiv.}$$
Allora
- se $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$,
- se $b_n \to -\infty$, allora $a_n \to -\infty$.

Achtung! Ogni altra implicazione è abusiva.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \le b_n \quad \forall n \ge n_0$ (esiste per Hp)

Supponiamo che $a_n \to +\infty$. Allora, preso $M \in \mathbb{R}$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \ge M \quad \forall n \ge n_1$$

Ma allora $\forall n \ge \max\{n_0, n_1\}$ si avrà che

$$\underset{n \ge n_0}{b_n \ge a_n} \underset{n \ge n_1}{\ge M}, \quad \text{quindi } b_n \ge M \text{ definitiv.}$$

L'altro caso è del tutto analogo.

—o—o—

$\boxed{\text{Teorema di confronto a 3}}$ (AKA teorema dei carabinieri)

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni. Supponiamo che

(i) $a_n \le b_n \le c_n$ definitivamente

(ii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e $c_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (lo stesso ℓ)

Allora

$$b_n \to \ell \quad (\text{stesso } \ell)$$

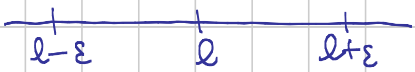
(questo dim. in particolare che b_n è di tipo $\boxed{1}$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Cosa devo dimostrare? Per ogni $\varepsilon > 0$ deve succedere che

$$\ell - \varepsilon \le b_n \le \ell + \varepsilon \quad \text{definitiv.}$$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \quad \boxed{a_n \le b_n \le c_n}$ (2)

per Hp (i)



$\exists\, n_a \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_a \quad \boxed{\ell - \varepsilon \le a_n} \le \ell + \varepsilon$ (1)

perché $a_n \to \ell$

$\exists\, n_c \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_c \quad \ell - \varepsilon \le \boxed{c_n \le \ell + \varepsilon}$ (3)

perché $c_n \to \ell$

Ma allora $\forall n \geq \max\{n_0, n_a, n_c\}$ avremo che

$$\ell - \varepsilon \underset{1}{\leq} a_n \underset{2}{\leq} b_n \underset{2}{\leq} c_n \underset{3}{\leq} \ell + \varepsilon$$

e quindi a maggior ragione $\ell - \varepsilon \leq b_n \leq \ell + \varepsilon$. $\square$

Oss. Non ho usato davvero tutta l'ipotesi, ma solo 2 pezzi.

Esercizio Se $a_n \to \ell^+$ e $c_n \to \ell^+$, allora anche $b_n \to \ell^+$.

Esempio 1 $a_n = n^2$ È intuitivo che $a_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad n^2 \geq M$

Due casi

- se $M \leq 0$, allora basta prendere $n_0 = n$ perché $n^2 \geq M$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Se $M > 0$, voglio $n^2 \geq M$ e questo è vero $\forall n \geq \sqrt{M}$ e questa è vera definitivamente

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$. Voglio dim. che $a_n \to 0^+$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Mi serve che $\forall \varepsilon > 0 \quad \underset{\text{gratis}}{0 <} \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitiv.

Vediamo quando $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ... con passaggi elementari ...

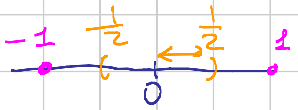
$n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, e questa è vera definitivamente.

Esempio 3 $a_n = (-1)^n$. Voglio dim. che non ha lim.

Dim. Non è vero che $a_n \to +\infty$, perché dovrebbe essere definitiv. positiva, e invece è freq. -1.
Non è vero che $a_n \to \ell > 0$ per lo stesso motivo (permanenza del segno)

Simmetricamente, non è vero che $a_n \to -\infty$ oppure $a_n \to \ell < 0$.

Resta da escludere che $a_n \to 0$, ma dovrebbe essere definitivamente in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Esempio 4 $\quad a_n = 2^n$. Voglio dim. che $a_n \to +\infty$

Dim. Devo risolvere $\quad 2^n \geq M$

- banale se $M \leq 0$
- porta a $\quad n \geq \log_2 M$ se $M > 0$, ma stiamo usando $\log_2$...

Dim. molto migliore : $\quad \underbrace{2^n}_{+\infty} \geq \underbrace{n}_{+\infty}$ $\quad$ (facile esercizio per induzione)

$n \to +\infty$ (ovvio), quindi per confronto a 2 anche $2^n \to +\infty$.

Oss. Partendo da $n^2 \geq n$, posso dim. che $n^2 \to +\infty$ senza mai scrivere una radice quadrata.

ANALISI 1 — LEZIONE 013

Note Title 06/10/2016

$\boxed{\text{SUCCESSIONI MONOTONE}}$ Sia a_n una succ. di numeri reali

<u>Def</u>. La succ. si dice

- strett. crescente se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- debolm. crescente $a_{n+1} \geq a_n$ "
- strett. decresc. $a_{n+1} < a_n$ "
- debolm. decresc. $a_{n+1} \leq a_n$ "

succ. monotòne

<u>Oss</u>. Strett. cresc. $\Rightarrow$ debolm. crescente
" decresc. $\Rightarrow$ " decrescente

<u>Oss</u>. Le definizioni si possono dare confrontando termini qual.

- Strett. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m > a_n$
- Debolm. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$
- Strett. decresc. se $m > n \Rightarrow a_m < a_n$
- Debolm. decresc. se $m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$.

<u>Def</u>. (Succ. limitate)
La succ. a_n si dice

- limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- limitata inferiorm. se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $M \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- limitata e basta se valgono entrambe, o equivalentem.

$$\exists A \in \mathbb{R} \; \exists B \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad A \leq a_n \leq B$$
$$\exists M \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M \quad (-M \leq a_n \leq M)$$

$\boxed{\text{Teorema delle succ. monotone}}$ (Versione crescente)

Sia a_n una succ. debolm. crescente (se strett., ancora meglio)
Allora ci sono solo 2 possibili comportamenti
(i) $a_n \to +\infty$
(ii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.
In entrambi i casi il limite coincide con

$$\sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{\text{insieme dei valori assunti dalla succ.}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono 2 casi

(i) Supponiamo che $\sup = +\infty$.
Ipotesi: $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ Tesi: $a_n \to +\infty$

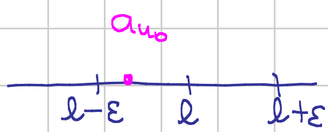
Fisso $M \in \mathbb{R}$. Per caratterizzazione del sup, esiste almeno un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} \geq M$.
Grazie alla debole crescenza si avrà che

$$a_n \geq a_{n_0} \geq M \qquad \underbrace{\forall n \geq n_0}_{\text{definitivamente}}$$

(ii) Supponiamo che $\sup = \ell \in \mathbb{R}$. Voglio dim. che $a_n \to \ell$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon \quad \text{definitiv.}$$

Per caratt. del sup vale



$$a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi la disug. a dx è gratis.
Inoltre esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq \ell - \varepsilon$, ma a quel punto $a_n \geq \ell - \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, cioè definitivamente

— o — o —

Oss. Non è detto che $a_n \to \ell^-$ nel 2° caso, perché potrebbe essere definitivamente uguale ad ℓ.
È vero se sapessimo che è strett. crescente.

Corollario Sia a_n una succ. tale che
(i) a_n è debolm. crescente
(ii) a_n è limitata superiormente.
Allora di sicuro $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

Analoghi decrescenti (dim. per esercizio)

① Se a_n è debolm. decr. allora le uniche possibilità sono
$$a_n \to -\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to \ell \in \mathbb{R}$$
Inoltre il limite è $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

② Se inoltre è limitata inferiorm., allora di sicuro $a_n \to \ell$.

— o — o —

IL NUMERO DI NEPERO (NUMERO e)

Consideriamo la successione

$$\boxed{e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Teorema La successione e_n
(i) verifica $2 \leq e_n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$
(ii) è debolmente (anzi strett.) crescente.

— o — o —

Conseguenza: e_n tende ad un limite reale compreso tra 2 e 3. Tale limite si chiama numero di Nepero e si indica con $e = 2,718\ldots$

$\boxed{\text{Dim.}}$

① Dimostro che $e_n \geq 2$ (inutile ai fini della conseguenza)

Considero la Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x > -1$

Pongo $x = \frac{1}{n}$ e ottengo

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

② Dimostro che e_n è debolm. crescente.

$$e_n \geq e_{n-1} \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$ [teniamo come esponente n]

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$ Pongo $x = -\frac{1}{n^2}$ (>-1 appena $n \geq 2$)
e abbiamo che l'ultima disug. è vera
(pure stretta se servisse)

③ Dimostro che $e_n \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Brutta copia. Parto dal binomio di Newton

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots + \binom{n}{n} x^n$$

Ponendo $x = \frac{1}{n}$ ottengo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\leq 1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\leq 1} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\leq 1 + 2 = 3$$

Proprietà chiave : ① $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ $\qquad \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k} \leq \frac{1}{k!}$

② $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ $\qquad$ cioè $k! \geq 2^{k-1}$ (facile induzione)

③ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2$

(si dimostra per ind. che è $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$)

Fine brutta copia.

<u>Bella copia</u> :

$$e_n \overset{\text{Def}}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Newton}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$\underset{①}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \underset{②}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\underset{③}{=} 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3$$

— o — o —

<u>Achtung!</u> Se a_n è debolm. crescente e $a_n < 14$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Allora $a_n \to \ell$ e $\boxed{\ell < 14}$ NO!!! $\ell \leq 14$ $\left(a_n = 14 - \frac{1}{n}\right)$

LE DISUG. STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

ANALISI 1 – LEZIONE 014

Note Title 06/10/2016

RETTA REALE ESTESA

Def. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Utilità: se dico $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ vuol dire che a_n è tipo ①, ②, ③.

Possiamo estendere 4 operazione classiche a $\overline{\mathbb{R}}$ quasi sempre, ad esempio

$$14 + (+\infty) = +\infty \qquad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$7 \cdot (-\infty) = -\infty \qquad \frac{5}{+\infty} = 0$$

I problemi nascono $\boxed{+\infty - \infty}$ $\boxed{0 \cdot (\pm\infty)}$ $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ $\boxed{\frac{7}{0}}$

TEOREMI ALGEBRICI Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

$$a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

- $a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$
- $a_n - b_n \to \ell_1 - \ell_2$
- $a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

se l'operazione prevista a dx ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$

- Se $\lambda \neq 0$, allora $\lambda a_n \to \lambda \ell_1$

— o — o —

Achtung! Achtung! Quando l'operazione non ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$ allora si dice che siamo di fronte ad una FORMA INDETERMINATA. Questo non va confuso con il tipo ④. Vuol dire solo che non posso dedurre il lim di $a_n + b_n$, $a_n \cdot b_n$ da ℓ_1 e ℓ_2

Esempio Caso $0 \cdot (+\infty)$ $\quad a_n \to 0 \quad b_n \to +\infty$

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$ $\qquad a_n \cdot b_n = n \to +\infty$

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$ $\qquad a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \to 0$

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 15n$ $\qquad a_n \cdot b_n = 15 \to 15$

$a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = n^2$ $\qquad a_n \cdot b_n = -n \to -\infty$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$ $\qquad a_n \cdot b_n = (-1)^n$ NON HA LIMITE

Dimostrazione di qualche caso del teo. algebrico

$a_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$, $b_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$. Allora $a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$

Brutta copia Fisso $\varepsilon > 0$ e vorrei che

$|(\ell_1+\ell_2) - (a_n+b_n)| \leq \varepsilon$ definitivamente

$$|\underbrace{\ell_1 - a_n}_{x} + \underbrace{\ell_2 - b_n}_{y}| \leq |\ell_1 - a_n| + |\ell_2 - b_n|$$

$|x+y| \leq |x| + |y|$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}$

$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Bella copia: Fisso $\varepsilon > 0$. Uso la def. di limite con $\frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists\, n_a \in \mathbb{N}$ t.c. $|\ell_1 - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \forall n \geq n_a$ $\quad$ poiché $a_n \to \ell_1$

$\exists\, n_b \in \mathbb{N}$ t.c. $|\ell_2 - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \forall n \geq n_b$ $\quad$ " $\quad b_n \to \ell_2$

Allora $\forall n \geq \max\{n_a, n_b\}$ si avrà che

$$\begin{aligned} |(\ell_1+\ell_2)-(a_n+b_n)| &= |(\ell_1-a_n)+(\ell_2-b_n)| \\ &\le |\ell_1-a_n|+|\ell_2-b_n| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \end{aligned}$$

— o — o —

<u>Lemma</u> Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora a_n è limitata

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di lim. con $\varepsilon = 1$ e ottengo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\ell-1 \le a_n \le \ell+1 \qquad \forall n \ge n_0$$

Ma allora $\quad m \le a_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se

$$M := \max\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, \ell+1\}$$

$$m := \min\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, \ell-1\}$$

— o — o —

<u>Achtung!</u> Se a_n è limitata, non è detto che abbia limite ($a_n = (-1)^n$)

— o — o —

$a_n \to +\infty$, $b_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Allora $a_n+b_n \to +\infty$

Poiché $b_n \to \ell \in \mathbb{R}$, di sicuro b_n è limitata, quindi esiste $K \in \mathbb{R}$ t.c. $|b_n| \le K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Voglio dimostrare che $a_n+b_n \to +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n+b_n \ge M$ definitiv.

Poiché $a_n \to +\infty$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \ge M+K$ definitiv.

Ma allora

$$a_n+\underbrace{b_n}_{\ge -K} \ge M+K-K = M \qquad \forall n \ge n_0.$$

— o — o —

$a_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$, $b_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$. Allora $a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$

Brutta copia $|\ell_1 \ell_2 - a_n b_n| =$ TERMINE MISTO

$= |\ell_1 \ell_2 - \ell_1 b_n + \ell_1 b_n - a_n b_n|$

$= |\ell_1 (\ell_2 - b_n) + (\ell_1 - a_n) \cdot b_n|$

$$\leq |\ell_1| \cdot \underbrace{|\ell_2 - b_n|}_{\text{piccolo per } n \text{ grande}} + \underbrace{|\ell_1 - a_n|}_{\text{piccolo per } n \text{ grande}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\text{non enorme perché } b_n \text{ è limitata}}$$

Bella copia Poiché $b_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$, di sicuro è limitata, quindi

$$\exists B \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |b_n| \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Poiché $a_n \to \ell_1$ e $b_n \to \ell_2$

$$\exists n_a \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |\ell_1 - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2B} \quad \forall n \geq n_a$$

$$\exists n_b \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |\ell_2 - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2|\ell_1|} \quad \forall n \geq n_b$$

Ora $\forall n \geq \max\{n_a, n_b\}$ si ha che

$$|\ell_1 \ell_2 - a_n b_n| = \text{come sopra} \leq |\ell_1| \cdot \underbrace{|\ell_2 - b_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2|\ell_1|}} + \underbrace{|\ell_1 - a_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2B}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq B}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

☹ La dimostrazione ha dei problemi se $\ell_1 = 0$ e anche se $B = 0$

Come by-passo il problema se $\ell_1 = 0$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Se $\ell_1 = 0$, allora definitivamente

$$|a_n| = |a_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{B}$$

Ma allora $$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq B} \leq \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon$$

che equivale a dire che $a_n \cdot b_n \to 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Nella dim. precedente scegliero n_0 t.c.

$$|\ell_2 - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 5)}$$

Nel gran finale ritrovo

$$\leq |\ell_1| \cdot |\ell_2 - b_n| + \underbrace{\underbrace{|\ell_1 - a_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2B}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq B}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\underbrace{|\ell_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+5)}}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

— o —

<u>Esercizio</u> Dimostrare altri casi del teorema algebrico, ad esempio $(+\infty) \cdot (-\infty)$.

ANALISI 1 — LEZIONE 015

Note Title 10/10/2016

Limiti da tabellina

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0\leq a<1 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Caso $a>1$

$$a^n = (1+(a-1))^n \geq 1+n(a-1)$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\underbrace{a^n}_{+\infty} \geq 1+\underbrace{\boxed{n(a-1)}}_{+\infty} \qquad a-1>0$$

$+\infty$ per confronto a 2

Caso $0<a<1$ Scrivo $a=\frac{1}{b}$ con $b>1$

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{\underbrace{b^n}_{\to+\infty \text{ caso prec.}}} \to \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Achtung! Se $a=1$, allora $a^n \to 1$ per $n\to+\infty$

$1^n = 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$ succ. costante tende a 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a>0}$$

Brutal: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to a^0 = 1$

andrebbe giustificato

$\boxed{\text{Dim.}}$ $(1+x)^n \geq 1+nx$ Faccio $\sqrt[n]{}$ a dx e sx:

$$1+x \geq \sqrt[n]{\underbrace{1+nx}_{a}}$$

La uso con $x=\frac{a-1}{n}$. Ottengo

$$\sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$$

Distinguo 2 casi

uso monot. di $\sqrt[n]{x}$

- se $a \geq 1$ abbiamo

$$\underset{\downarrow \atop 1}{1} \leq \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{a}} \leq \underset{\downarrow \atop 1}{1 + \frac{a-1}{n}}$$

per carab.

- se $0 < a \leq 1$, come prima scrivo $a = \frac{1}{b}$ con $b \geq 1$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to \frac{1}{1} = 1$$

caso prec.

— o — o —

$\boxed{\text{CRITERIO DELLA RADICE}}$ Sia a_n una successione con $a_n \geq 0$ definitivamente

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

- se $\ell > 1$ si ha che $a_n \to +\infty$
- se $\ell < 1$ " " " $a_n \to 0$
- se $\ell = 1$, allora BOH.

$\boxed{\text{CRITERIO DEL RAPPORTO}}$ Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definit.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora valgono le stesse conclusioni di sopra.

Utilizzo operativo Devo fare il limite di a_n e non sono capace.
Provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ oppure di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Se per caso li so fare e vengono $\neq 1$, allora
ho la risposta alla domanda iniziale.

$\boxed{\text{CRITERIO RAPPORTO} \to \text{RADICE}}$ Sia $a_n > 0$ definitiv.

Supponiamo che
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \ldots$$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ (stesso ℓ).

<u>Oss.</u> Non è vero il contrario, o per lo meno non completamente. Può succedere che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, ma il rapporto non ha limite (non può tendere a cose diverse da ℓ).

$$a_n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots$$

$$\underbrace{1}_{\downarrow \, 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{\downarrow \, 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow \, 1} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots \text{ non ha limite}$$

$\boxed{\text{Dim. radice}}$ Supponiamo $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$

• <u>Caso $\ell > 1$ e reale</u>

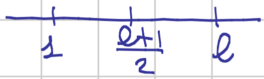
Se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora definitiv. $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2}$. Elevo alla n
$$\underbrace{a_n}_{\downarrow \, +\infty} \geq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{\downarrow \, +\infty} \quad \text{(espon. con base > 1)}$$

• <u>Caso $\ell = +\infty$</u> ... stesso discorso ... con $\sqrt[n]{a_n} \geq 2016$ definit.

• <u>Caso $0 \leq \ell < 1$</u>

Definitiv. $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$, quindi
$$\underbrace{0}_{\downarrow \, 0} \overset{Hp}{\leq} \underbrace{a_n}_{\downarrow \, 0} \leq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{\downarrow \, 0} \quad \text{base} < 1$$

$\boxed{\text{Dim. rapporto}}$



- Caso $\ell > 1$ e reale. Come prima $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, quindi definit. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2}$. Detto meglio $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

$$a_{n_0+1} \geq \frac{\ell+1}{2} a_{n_0} \quad (\text{uso qui che } a_n > 0)$$

$$a_{n_0+2} \geq \frac{\ell+1}{2} a_{n_0+1} \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$$

Per induzione si può dimostrare che

$$a_{n_0+k} \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k a_{n_0} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

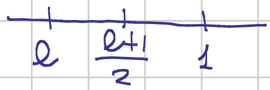
Che posso anche scrivere come

$$a_n \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} = \underbrace{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}}_{\text{FISSO} > 0}$$

$a_n \to +\infty$ per confronto a 2

- Caso $\ell = +\infty$: uguale con 2016 al posto di $\frac{\ell+1}{2}$

- Caso $0 \leq \ell < 1$: analogo partendo da



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Per induzione arrivo a

$$0 \overset{\text{Hp}}{\leq} a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}$$

Concludo con i carabinieri. $\square$

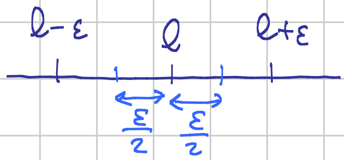
$\boxed{\text{Dim. rapporto} \to \text{radice}}$ Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in [0,+\infty)$

(il caso $\ell = +\infty$ è più facile).

Voglio dim. che

$$\sqrt[n]{a_n} \to \ell \quad (\text{stesso } \ell).$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi so che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Con la stessa induzione di prima otteniamo che

$$\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0} \leq a_n \leq \left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}$$

Faccio $\sqrt[n]{}$ ovunque

aggiunto dopo video

$$\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\text{roba fissa}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\text{roba fissa}}$$

Il termine a dx tende a $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$, ma allora definitivamente il termine di dx sta sotto $\ell + \varepsilon$.

Analogamente definitivamente il termine di sx sta sopra $\ell - \varepsilon$.

Ma allora definitivamente

$$\ell - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon \qquad \text{come volevo}$$

— o — o —

<u>Oss.</u> La precedente è una DIM. IN DUE TAPPE

<u>Oss.</u> $a_n = n^2 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to 1$ e $a_n \to +\infty$

$a_n = \frac{1}{n} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ e $a_n \to 0$

ANALISI 1 – LEZIONE 016

Note Title 10/10/2016

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+5}{4n^2-7n+8} = \frac{1}{4}$

Le potenze + alte sono più forti. $\sim \frac{\cancel{n^2}}{4\cancel{n^2}} = \frac{1}{4}$

Rigoroso: chi comanda si raccoglie!

$$\frac{\cancel{n^2}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{3}{n}}}_{\to 0}+\underbrace{\boxed{\frac{5}{n^2}}}_{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\left(4-\underbrace{\boxed{\frac{7}{n}}}_{\to 0}+\underbrace{\boxed{\frac{8}{n^2}}}_{\to 0}\right)} \to \frac{1}{4}$$

Oss. Lo stesso metodo funziona per $\frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(n)}{Q(n)}$

Si ottiene

- $\deg P < \deg Q \Rightarrow \lim = 0$
- $\deg P > \deg Q \Rightarrow \lim = \pm\infty$ a seconda dei coeff. dei termini di grado max
- $\deg P = \deg Q \Rightarrow \lim =$ rapporto coeff. grado max.

Stessa cosa vale se ci sono potenze non intere

Esempio 2 $\frac{n+3n\sqrt{n}+4}{2n-4n\sqrt[3]{n}+7} \to -\infty$

$\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$

Brutal mode: $\sim \frac{3n^{3/2}}{-4n^{4/3}} = -\frac{3}{4}\underbrace{n^{\frac{1}{6}}}_{\to+\infty} \to -\infty$

Rigoroso:

$$\frac{n^{\frac{3}{2}}\left(\underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\to 0}+3+\underbrace{\boxed{\frac{4}{n\sqrt{n}}}}_{\to 0}\right)}{n^{\frac{4}{3}}\left(\underbrace{\boxed{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}}}_{\to 0}-4+\underbrace{\boxed{\frac{7}{n\sqrt[3]{n}}}}_{\to 0}\right)} = \underbrace{\boxed{n^{\frac{1}{6}}}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{---}{----}}}_{\to -\frac{3}{4}} \to -\infty.$$

Esempio 3 $\quad n^2 - n\sin n \to +\infty$

$$n^2 - n\sin n = n(n - \sin n) \geq \boxed{n(n-1)}$$

$n^2 - n\sin n \to +\infty$, $\quad n(n-1) \to +\infty$

Esempio 4 $\quad \dfrac{\sin n}{n} \to 0$

È ovvio che $\quad -1 \leq \sin n \leq 1$. Divido per n (posso ...)

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$-\frac{1}{n} \to 0$, $\quad \frac{\sin n}{n} \to 0$, $\quad \frac{1}{n} \to 0$

Back to #3 $\quad n^2 - n\sin n = n^2\left(1 - \dfrac{\sin n}{n}\right) \to +\infty \cdot 1 = +\infty$

$n^2 \to +\infty$, $\quad \frac{\sin n}{n} \to 0$

Esempio 5 $\quad \dfrac{\sin(\log(n^2+7)) + \cos n!}{\sqrt{n}} \to 0$

$$-2 \leq \sin(\text{Mostro}_1) + \cos(\text{Mostro}_2) \leq 2$$

Divido per $\sqrt{n}$ e ottengo $\quad -\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{\cdots}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

$-\frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$, $\quad \frac{\cdots}{\sqrt{n}} \to 0$, $\quad \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$

Esempio 6 $\quad \sqrt[n]{\arctan n + 3} \to 1$

$$0 \leq \arctan n \leq \frac{\pi}{2}, \text{ quindi } \quad 3 \leq \arctan n + 3 \leq 77$$

Faccio $\sqrt[n]{}$ che è monotona crescente e ottengo

$$\sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{\cdots} \leq \sqrt[n]{77}$$

$\sqrt[n]{3} \to 1$, $\quad \sqrt[n]{\cdots} \to 1$, $\quad \sqrt[n]{77} \to 1$

Esempio 7 $\quad \dfrac{3^n}{n^{1000}} \to +\infty$

Criterio del rapporto $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^{1000}} \quad \dfrac{n^{1000}}{3^n} = 3 \underbrace{\boxed{\dfrac{n^{1000}}{(n+1)^{1000}}}}_{1} \to 3$

Se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 3$, allora $a_n \to +\infty$

Tabellina $\quad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \text{per ogni } a>1,\ b>0}$

ESPONENZIALE BATTE POTENZA

Esempio 8 $\quad \dfrac{n!}{312^n} \to +\infty$

Rapporto $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{312^{n+1}} \cdot \dfrac{312^n}{n!} = \dfrac{n+1}{312} \to +\infty$

quindi $a_n \to +\infty$

Tabellina $\quad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{a^n} = +\infty \quad \text{per ogni } a>1}$

FATTORIALE BATTE ESPONENZIALE

Esempio 9 $\quad \dfrac{n^n}{n!} \to +\infty$

Rapporto: $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\quad n^n}$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$$

Poiché $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to e > 1$, si ha che $a_n \to +\infty$

Esempio 10 $\sqrt[n]{n}$ $\qquad \sqrt[n]{n} = n^{1/n} \to \infty^0$ 😐

Rapporto → radice Ho $\sqrt[n]{a_n}$ dove $a_n = n$. Faccio il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$$ e quindi anche $\sqrt[n]{n} \to 1$

Esempio 11 $\sqrt[n]{n^{20} + 19n^{12} + 15} \longrightarrow 1$

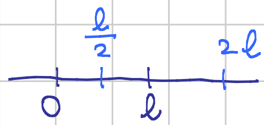
Brutal mode: $\sim \sqrt[n]{n^{20}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{20} \to 1^{20} = 1$

Rigoroso $$\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{n^{20}}}}_{\downarrow \, 1} \; \underbrace{\sqrt[n]{1 + \underbrace{\boxed{\frac{19}{n^8}}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\boxed{\frac{15}{n^{20}}}}_{\downarrow\, 0}}}_{1} \to 1$$

Fatto generale Se $a_n \longrightarrow \ell \in (0, +\infty)$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \sqrt[n]{\ell} \longrightarrow 1$ SCHIFEZZA (limite metà per volta)

Se $a_n \to \ell$, allora definitiv.



$$\frac{\ell}{2} \le a_n \le 2\ell$$

Faccio $\sqrt[n]{\ldots}$: $$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{\ell}{2}}}_{\downarrow\, 1} \le \underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{\downarrow\, 1} \le \underbrace{\sqrt[n]{2\ell}}_{\downarrow\, 1}$$

Tabellina : $\boxed{\sqrt[n]{\text{polinomio}} \longrightarrow 1}$

Esempio 12 $\sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty$

Rapporto → radice con $a_n = n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty \text{, quindi } \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty$$

Esempio 13 $\sqrt[n]{n^9 + 7^n + \cos(n!)} \longrightarrow 7$

Brutal mode: $\sim \sqrt[n]{7^n} = 7$

Rigoroso: $\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{7^n}}}_{\downarrow\, 7} \sqrt[n]{\underbrace{\boxed{\frac{n^9}{7^n}}}_{\downarrow\, 0} + 1 + \underbrace{\boxed{\frac{\cos(n!)}{7^n}}}_{\downarrow\, 0}} \longrightarrow 7 \cdot 1 = 7.$

Tabellina $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ $\longrightarrow \dfrac{1}{e}$

Faccio il limite del reciproco $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\boxed{\dfrac{n^n}{n!}}} = \sqrt[n]{a_n}$

Calcolo $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ = fatto prima = $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$. Quindi $\sqrt[n]{a_n} \to e$

Esempio 14 $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}} = 0$

Rapporto: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n^2+2n+1}} \cdot \dfrac{2^{n^2}}{n!} = \dfrac{n+1}{2^{2n+1}} = \underbrace{\dfrac{n+1}{2 \cdot 4^n}}_{\downarrow\, 0}$ potenza vs esponenz.

Poiché $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$, allora anche $a_n \to 0$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 017

Note Title 12/10/2016

$\boxed{\text{LIMITI DI FUNZIONE}}$ $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

x_0 dato

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Ciascuno di questi ha i soliti 4 possibili comportamenti

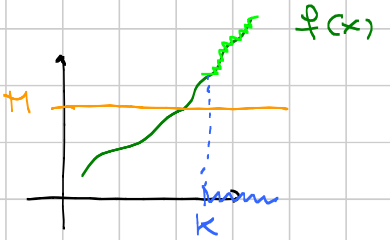
① $\ell \in \mathbb{R}$

② $+\infty$

③ $-\infty$

④ Non esiste ← Nessuno dei precedenti

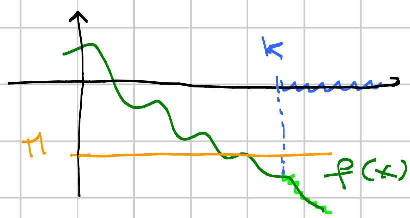
$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$



② $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$

anche molto grande

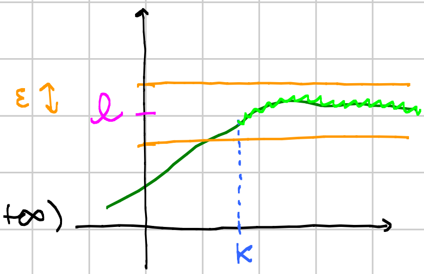


③ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$

anche molto negativo

① $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$



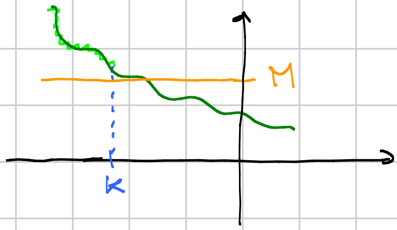
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

anche molto vicino a 0

$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$

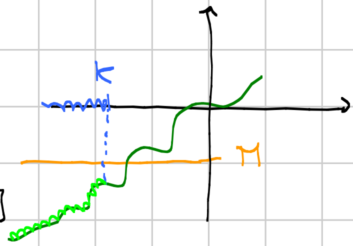
$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)}$



② $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

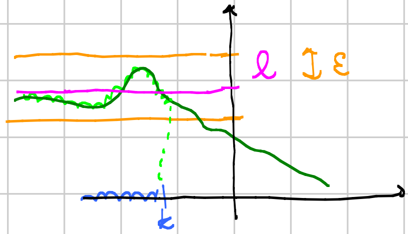
$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists k\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x)\geq M \quad \forall x\in D\cap(-\infty,k]$



③ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists k\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x)\leq M \quad \forall x\in D\cap(-\infty,k]$

Commento non richiesto: + prendo M piccolo (grande negativo)
+ k dovrà essere grande negativo

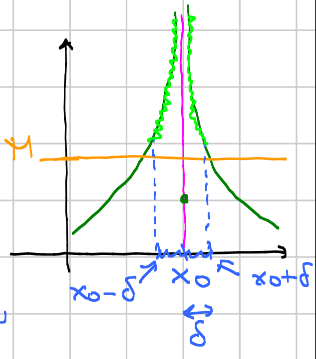


① $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{R}$ t.c. $|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$
$\forall x\in D\cap(-\infty,k]$.

— o — o —

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)}$ Si intende che x_0 è dato e che $f(x)$ è definita "dalle parti di x_0".



② $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

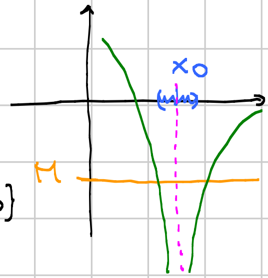
$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0$ t.c. $f(x)\geq M$
$\forall x\in([x_0-\delta,x_0+\delta]\cap D)\underbrace{\setminus\{x_0\}}_{\text{TOLTO}}$

La definizione di limite SE NE FREGA del valore di $f(x)$ nel p.to x_0. Di più: $f(x)$ potrebbe anche non essere definita per $x=x_0$.

Commento: più M è grande, più delta sarà piccolino

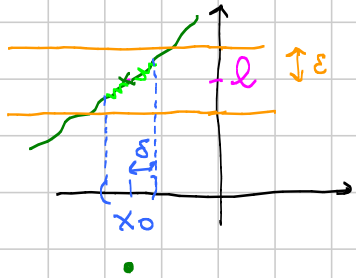
3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0$ t.c. $f(x)\le M$
$\forall x\in([x_0-\delta,x_0+\delta]\cap D)\setminus\{x_0\}$



1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c. $\ell-\varepsilon\le f(x)\le\ell+\varepsilon$
$\forall x\in([x_0-\delta,x_0+\delta]\cap D)\setminus\{x_0\}$



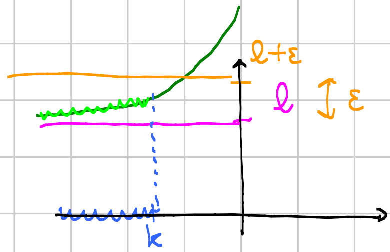
Commento: + ε è piccolo (vicino a 0)
+ δ deve essere piccolo.

—o —o —

$\boxed{\text{Varianti possibili}}$

$\boxed{\text{1- Limiti } \ell^+ \text{ ed } \ell^-}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell^+$

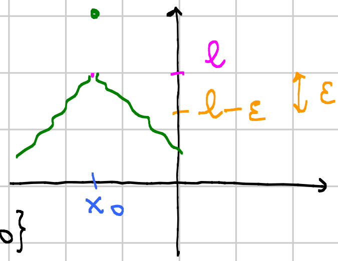


$\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{R}$ t.c. $\ell < f(x)\le\ell+\varepsilon$ $\forall x\in D\cap(-\infty,k]$

essenziale   può essere o uno stretto

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^-$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c.
$\ell-\varepsilon\le f(x)<\ell$ $\forall x\in([x_0-\delta,x_0+\delta]\cap D)\setminus\{x_0\}$



$\boxed{\text{2- Limiti per } x\to x_0^+ \text{ e } x\to x_0^-}$

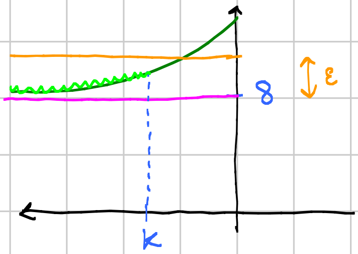
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

ESCLUSO

$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0$ t.c. $f(x)\ge M$ $\forall x\in(x_0,x_0+\delta]\cap D$

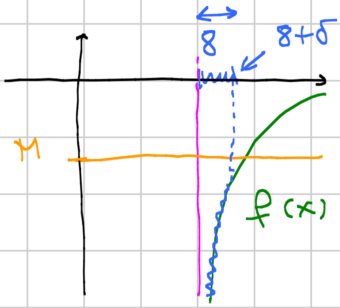
Esercizio Scrivere le definizioni di

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 8^+$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $8 < f(x) \leq 8+\varepsilon$
$\forall x \in (-\infty, k] \cap D$

$\lim_{x\to 8^+} f(x) = -\infty$



$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$ t.c.
$f(x) \leq M \quad \forall x \in (8, 8+\delta] \cap D$

$\lim_{x\to 7^+} f(x) = 6^-$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $6-\varepsilon \leq f(x) < 6$
$\forall x \in (7, 7+\delta] \cap D$

— o — o —

Definizione "barocca di limite"

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \exists g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.
$f(x) \leq M \quad \forall x \in [g(M), +\infty) \cap D$

Moralmente: g è una funzione che ad M associa il k.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ $\quad \exists g: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ t.c.

$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
$\forall x \in ([x_0 - g(\varepsilon), x_0 + g(\varepsilon)] \cap D) \setminus \{x_0\}$

Moralmente: g è una funzione che ad ε associa un possibile δ

Tale funzione g si dice MODULO DI CONTINUITÀ di f in x_0.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 018

Note Title 12/10/2016

STRUMENTI PER IL CALCOLO DEI LIMITI

→ Teoremi algebrici
→ Teoremi di confronto (a 2 e a 3)
→ Funzioni continue
→ Cambi di variabile

esattamente come con le successioni

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in D$.

- Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(è definita nel punto e vale quello che uno si aspetta)

- si dice che f è continua in D se è continua in ogni $x_0 \in D$.

In queste ipotesi, per fare il limite basta sostituire x_0 dentro $f(x)$.

METATEOREMA Qualunque funzione ottenuta da quelle elementari mediante composizioni e/o operazioni algebriche è continua dove non presenta problemi burocratici.

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(2 + \sin(3^x))}{\arctan(x+5)} = \frac{\log(2 + \sin 1)}{\arctan 5}$$

Ho sostituito $x = 0$ nella funzione, che è continua per il metateorema.

Cosa dovrei dimostrare?

1 – che le funzioni elementari sono continue dove definite.
2 – che la composizione di funzioni cont. è cont.
3 – che somma, prodotto, quoziente di cont. sono continue

LIMITI NOTEVOLI

PADRI $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

FIGLI $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

NIPOTI $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \quad \forall a>0$ $[\log x = \ln x = \log_e x]$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

LIMITE DIMENTICATO $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$

CAMBIO DI VARIABILI NEI LIMITI (Enunciato non preciso)

Esempio 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$

Pongo $y = x^2$
Quando $x\to 0$ si ha che $y\to 0$

$\displaystyle = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

Esempio 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}}_{\downarrow\ 1} \cdot 3 = 3$

Pongo $y = 3x$ e diventa il solito

Esempio 3 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ $\left[\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \right]$

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \boxed{\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}} \to 1$$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$

pongo $y = \sin x$ e osservo che per $x \to 0$ ho che $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

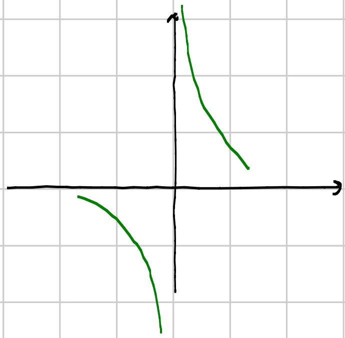
Esempio 4 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1 \cdot 1 = 1$

teo. algebrico

Esempio 5 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$ = NON ESISTE

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] \quad +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] \quad -\infty$$



Esempio 6 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = 1$ NO!!!!!

Pongo $y = \cos x$ Quando $x \to 0$ abbiamo che $y \to 1$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{\sin y}{y} = \sin 1$$

la funzione è continua in $y = 1$

Esempio 7 $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\arctan(2x)}$

$$\boxed{\frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x}} \boxed{\frac{\sin x}{x}} \boxed{\frac{2x}{\arctan(2x)}} \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

(each boxed factor $\to 1$)

Li faccio uno per uno

$$\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} = \frac{\log(1+y)}{y} \quad \text{per } y \to 0$$

Il terzo diventa con $y = 2x$: $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\arctan y} = 1$

Esempio 8 $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ $\left[= \frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \right]$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log[1+(\cos x-1)]}{\cos x - 1}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow \, -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Pongo $y = \cos x - 1$. Quando $x \to 0$ ho che $y \to 1-1 = 0$

Quindi diventa $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

Esempio 9 Diamo per buono che $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$ per $a > 1$ e $b > 0$

Dimostriamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ (potenze battono log)

Pongo $y = \log x$. Quando $x \to +\infty$ ho che $y \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\sqrt{e^y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(\sqrt{e})^y} = 0$$

esponenziale vs potenza

Esempio 10 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+3^x)}{x}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$

Modo 1 $\underbrace{\boxed{\frac{\log(1+3^x)}{3^x}}}_{\downarrow \, 1} \underbrace{\boxed{\frac{3^x}{x}}}_{\downarrow \, +\infty} \to +\infty$

Posto $y = 3^x$ non è vero che $y \to 0$

Modo 2 Si tratta di log vs potenza, quindi vince la potenza, quindi $\to 0$ Sopra non c'è $\log x$ pulito

SONO SBAGLIATI ENTRAMBI !!

$$\frac{\log(1+3^x)}{x} \sim \frac{\log 3^x}{x} = \frac{x\log 3}{x} = \log 3$$

$$\frac{\log(1+3^x)}{x} = \frac{\log\left(3^x\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\right)}{x} = \frac{x\log 3 + \log\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{x}$$

Precorso

$$= \log 3 + \boxed{\frac{\log\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{x}} \to \log 3$$

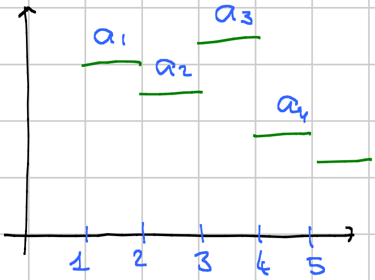
$$\frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

ANALISI 1 – LEZIONE 019

Note Title 13/10/2016

Criterio successioni → funzioni (i limiti di succ. aiutano i limiti di funzioni)

Sia $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione costante a tratti lunghi 1, cioè $f(x)$ assume lo stesso valore per ogni $x \in (n, n+1)$.
In altri termini, esiste una succ. a_n t.c.



$$f(x) = a_n \qquad \forall x \in (n, n+1)$$

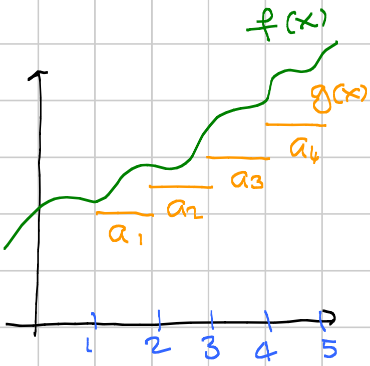
Allora $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n}$ cioè i 2 limiti hanno lo stesso tipo di comportamento ①, ②, ③, ④

Esempio 1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^{17}} = +\infty$

Per ogni $x \in (n, n+1)$ si ha che

$$\underbrace{\frac{2^x}{x^{17}}}_{f(x)} \geq \underbrace{\frac{2^n}{(n+1)^{17}}}_{a_n}$$

Abbiamo dim. che $f(x) \geq g(x)$, dove $g(x)$ è la funzione costante a tratti con valori dati da a_n.



Ora

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{succ.} \\ \to \text{funz.}}}{=} \lim_{n\to+\infty} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim. prima} \\ \text{con il rapporto}}}{=} +\infty$$

Quindi per confronto a 2 anche $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim criterio}}$ Ovvia: quello che la succ. fa per ogni $n \geq n_0$, la funzione lo fa per ogni $x \geq n_0$.

— o — o —

Esempio 2 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}_{\downarrow e} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{\downarrow e} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\downarrow e} \qquad \text{per } x\in(n,n+1)$$

Devo dimostrare che i 2 laterali tendono ad e

DX: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow 1} \to e$

SX: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}}_{\downarrow e} : \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}}_{\downarrow 1} \to \frac{e}{1}=e$

Oss. Se $a_n\to \ell$, allora anche $a_{n+1}\to\ell$

— o — o —

Dimostriamo che $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è PARI, quindi basta fare il limite per $x\to 0^+$.

Supponiamo di sapere che

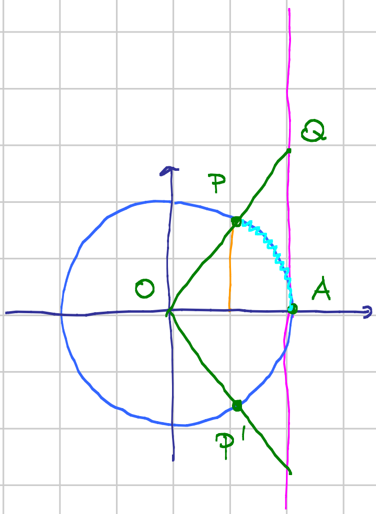
$$\boxed{\sin x \le x \le \tan x \qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$$

Divido tutto per $\sin x$:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{\downarrow 1} \le \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\downarrow 1} \le \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\downarrow 1}$$

Quindi basta passare al reciproco

Bisogna dim. la disuguaglianza



Ora $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{segm.}}}{PP'} = 2\sin x$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{arco}}}{\overset{\frown}{PP'}} = 2x$. Se diamo per buono che arco $\geq$ segmento, abbiamo

$x \geq \sin x$

Per dim. che $\tan x \geq x$ consideriamo le aree

Area triangolo $OQA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x$

Area settore OAP : Area cerchio $= \overset{\frown}{AP}$: lungh. circ.

$$\text{Area settore} = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2} \leq \text{Area triangolo} = \tan x \cdot \frac{1}{2}$$

— o — o —

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}}_{\downarrow\, 1}\ \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}$$

— o — o —

$$\frac{\tan x}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\downarrow\, 1} \to 1 \qquad (\text{per } x \to 0)$$

$\frac{\arctan x}{x}$ Pongo $y = \arctan x$, quindi $x = \tan y$
Quando $x \to 0$ abbiamo che anche $y \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Stesso metodo per $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

— o — o —

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Pongo $y = -x$. Quando $x \to -\infty$ abbiamo che $y \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to +\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = e$$

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}}_{\downarrow \; e} \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}}_{\downarrow \; 1}$$

(sostituzione $z = y-1$)

— o — o —

Osserviamo ora che $\log x$ è una funzione continua, per il teorema non dimostrato. Quindi se

$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, allora facendo il log a dx e sx

$$\lim_{x \to +\infty} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log e = 1$$

Analogamente

$$\lim_{x \to -\infty} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Ora pongo, in entrambi i casi, $y = \frac{1}{x}$.

$$\underbrace{\lim_{y \to 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} = 1}_{\text{da lim } x \to +\infty} \qquad \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{\log(1+y)}{y} = 1}_{\text{da lim per } x \to -\infty}$$

Dove ho usato la continuità?

Se $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, allora $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f(\ell)$

Sto ponendo $y = g(x)$ e trasformando

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = \lim_{y\to\ell} f(y) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{continuità}}}{=} f(\ell)$$

— o — o —

$\frac{e^x-1}{x}$ Pongo $y = e^x - 1$. Quando $x\to 0$ abbiamo che $y \to 0$.

Ricavo x: $y = e^x - 1 \iff y+1 = e^x \iff x = \log(y+1)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

— o — o —

Limite dimenticato $\lim_{x\to 0} x\cdot\log x \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} x \log x$

$\log x$ è definito solo per $x\to 0^+$

Pongo $y = \frac{1}{x}$, quindi $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \log x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\log\frac{1}{y} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{precorso}}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log y}{y} \underset{\substack{\uparrow\\ \log \text{ vs potenza}}}{=} 0$$

— o — o —

Più in generale $\lim_{x\to 0^+} x^a\cdot|\log x|^b = 0$ per ogni $a>0$ e ogni $b>0$

Fatto il solito cambio $y = \frac{1}{x}$ ci riduciamo a

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^a}\left|\log\frac{1}{y}\right|^b = \lim_{y\to+\infty} \frac{|\log y|^b}{y^a} \underset{\substack{\uparrow\\ \log \text{ vs potenza}}}{=} 0$$

($z = \log y$ e mi riduco all'esponenz.)

ANALISI 1 — LEZIONE 020

Note Title 13/10/2016

$\boxed{\text{CRITERIO FUNZIONI} \to \text{SUCCESSIONI}}$ (I limiti di funzioni aiutano i limiti di successioni)

Esempio operativo $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n}_{+\infty} \underbrace{\sin\frac{1}{n}}_{\sin 0 = 0}$ $[+\infty \cdot 0]$

$$n \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $y = \frac{1}{n}$ e osservo che per $n \to +\infty$ si ha che $y \to 0^+$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Il criterio dice che questo si può fare.

Enunciato Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

(ii) $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (o almeno definitivamente)

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$

Brutal mode: pongo $x = a_n$ e osservo che per $n \to +\infty$ si ha $x \to x_0$ quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Dim Sarebbero 9 casi... ne facciamo uno, ad esempio quello $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$.

Voglio dimostrare che $f(a_n) \to \ell$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Per ipotesi (iii) so che $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$, quindi $\exists\, \delta > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$

Dico che definitivamente si ha che $a_n \in (\underbrace{[x_0-\delta, x_0+\delta]}_{a_n \text{ sta qui per ipotesi (i)}} \cap \underbrace{D) \setminus \{x_0\}}_{a_n \in D \setminus \{x_0\} \text{ per ipotesi (ii)}}$

— o — o —

Oss. Tutti i cambi di variabile nei limiti si dimostrano in questo stesso modo.

Esercizio Provare a dimostrare un altro caso, ad esempio $x_0 = -\infty$, $\ell = +\infty$.

— o — o —

TRUCCO DEL PASSAGGIO ALL'ESPONENZIALE

Serve in situazioni del tipo $a_n^{b_n}$ oppure $[f(x)]^{g(x)}$

Base ed esponenti strani? $\boxed{e\text{-ALLA}}$!

$$\boxed{a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}} \qquad \text{CANE} = e^{\log \text{CANE}} \qquad \text{CANE} = a_n^{b_n}$$

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

Esempio 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x} = \boxed{\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}} \cdot \log a = \log a$$

$\downarrow$ Pongo $y = x\log a \to 0$

1

Esempio 2 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{2016}-1\right)$ $\quad +\infty\,(1-1) = +\infty\cdot 0$

$$n\left(\sqrt[n]{2016}-1\right) = \frac{2016^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{2016^x-1}{x} \to \log 2016$$

$\uparrow$ $x = \frac{1}{n}$

quindi $x\to 0$

Morale: grazie ad E-alla i limiti con base ed esponente variabile si riducono a limiti di prodotti

Teorema algebrico per l'esponenziale (versione succ.)

Se $a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$(a_n)^{b_n} \to (\ell_1)^{\ell_2}$$

TRANNE nei casi $1^{\pm\infty}$, 0^0, $(+\infty)^0$

che sono quelli in cui $b_n\cdot\log a_n$ è una forma indetermin. per il prodotto.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\quad a_n^{b_n} = e^{b_n\cdot\log(a_n)} \to e^{\ell_2\cdot\log\ell_1} = \ell_1^{\ell_2}$

$\uparrow$ uso continuità di esponenziale e logaritmo.

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ $+\infty\,(1-1)$

$$n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = \frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \boxed{\frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}}}\cdot\boxed{\log n} \to +\infty$$

$\downarrow 1$ $\quad \downarrow +\infty$

pongo $x=\frac{\log n}{n}$ e osservo che $x\to 0$ per cui è il solito limite notevole

Esempio 4 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$ $\left[1^{+\infty} = \text{forma indet.}\right]$

Basta fare il limite dell'esponente dopo e-alla

$$\frac{\log(\cos x)}{\tan^2 x} = \boxed{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}\boxed{\frac{x^2}{\tan^2 x}} \to -\frac{1}{2}$$

$\downarrow -\frac{1}{2}$ (vedi lezione 18) $\quad \downarrow 1$

Quindi il limite originale è $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Esempio 5 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\sin(x^2)}{\log(\arctan x)}$

Esempio 4.5 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\sin x)}{\log x}$ $\left[\frac{\log 0}{\log 0} = \frac{-\infty}{-\infty}\right]$

$$\frac{\log(\sin x)}{\log x} = \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}{\log x} = \frac{\log x + \log\frac{\sin x}{x}}{\log x}$$

$$= 1 + \frac{\boxed{\log\frac{\sin x}{x}}}{\boxed{\log x}} \quad \begin{matrix}\to \log 1 = 0\\ \to -\infty\end{matrix}$$

$$\to 1+0 = 1$$

Back to esempio 5:

$$\frac{\log(\sin(x^2))}{\log(\arctan x)} = \frac{\log\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x^2\right)}{\log\left(\frac{\arctan x}{x}\cdot x\right)} =$$

$$\frac{\log\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right) + 2\log x}{\log\left(\frac{\arctan x}{x}\right) + \log x} = \text{raccolgo } \log x \text{ sopra e sotto}$$

$$\to 2$$

Esempio 6 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\log(1+\tan x)} = 1$

$$\frac{e^{\sin x} - 1 + 1 - \cos x}{\log(1+\tan x)} = \frac{\underbrace{\boxed{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}}_{\to 1}\underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1}\cancel{x} + \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{\to \frac{1}{2}}\underbrace{\boxed{x^2}}_{\to 0}}{\underbrace{\boxed{\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x}}}_{\to 1}\underbrace{\boxed{\frac{\tan x}{x}}}_{\to 1}\cancel{x}}$$

$y = \tan x$

$$\to \frac{1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0}{1\cdot 1} = 1$$

Esempio 7 $\frac{\sqrt[n]{7} - \cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} \to \log 7$

$$\frac{\sqrt[n]{7} - \cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} = \frac{7^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}} = \frac{7^x - \cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{7^x - 1 + 1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\underbrace{\boxed{\frac{7^x-1}{x}}}_{\to \log 7}\cdot\cancel{x} + \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{\to \frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\boxed{x}}_{\to 0}\cancel{x}}{\underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1}\cdot\cancel{x}} \to \log 7$$

ANALISI 1 – LEZIONE 021

Note Title 17/10/2016

$\boxed{\text{Sottosuccessioni}}$ Sia a_n una succ. di numeri reali

Def. Si dice che b_k è una s.succ. di a_n se esiste una successione $\{n_k\}$ di interi ≥ 0, $\boxed{\text{strettamente crescente}}$, tale che

$$b_k = a_{n_k}$$

Def. (più generale, che non useremo mai) Come sopra, ma si chiede solo che $\boxed{n_k \to +\infty}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ b_0 & b_1 & & b_2 & & b_3 & b_4 & & & b_5 & \\ n_0=0 & n_1=1 & & n_2=3 & & n_3=5 & & & & n_5=9 & \end{array}$$

Esempi classici

a_{2k} = soli indici pari = $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$

a_{2k+1} = " " dispari = a_1, a_3, a_5, a_7

a_{k^2} = soli indici $\square$ = $a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia a_n una succ., e sia b_k una sua sottosuccessione.
Supponiamo che $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
Allora $b_k \to \ell$ (stesso ℓ)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Quello che a_n verifica $\forall n \geq n_0$, allora b_k lo verifica per ogni $k \geq n_0$.
Basta osservare che $n_k \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ se facciamo il prelievo in maniera strett. cresc.
Quindi

$$n_k \geq n_0 \qquad \forall n \geq n_0.$$

— o — o —

Achtung! Se a_n non ha limite (tipo ④), allora NON è detto che le s.succ. non abbiano limite.
Esempio classico

$a_n = (-1)^n$ NON ha lim., ma $a_{2n} \equiv 1 \to 1$, $a_{2n+1} \equiv -1 \to -1$.

Corollario Sia a_n una succ. Supponiamo che esistano 2 s.succ. b_k e c_k t.c.

$$b_k \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad c_k \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{con } \ell_1 \neq \ell_2.$$

Allora a_n non ha limite.

Dim. Se per assurdo $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, ma allora anche b_k e c_k tenderebbero ad ℓ. $\square$

Come dimostro che una succ. a_n non ha limite?
→ basta trovare due s.succ. con limiti diversi.

Esempio 1 $n^2 + (-1)^n n^3 = a_n$

$a_{2n} = (2n)^2 + (2n)^3 \to +\infty$
$a_{2n+1} = (2n+1)^2 - (2n+1)^3 = \text{conti} = \to -\infty$

Esempio 2 $n^3 + (-1)^n n^2 = a_n \to +\infty$

1° modo $\underset{\downarrow +\infty}{a_n} \geq \underset{\downarrow +\infty}{n^3 - n^2}$ (vera per ogni $n \in \mathbb{N}$)

2° modo $\underset{\downarrow +\infty}{\boxed{n^3}}\left(1 + \underset{\downarrow 0}{\boxed{\frac{(-1)^n}{n}}}\right)$ $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ divido per n

$$\underset{\downarrow 0}{\boxed{-\frac{1}{n}}} \leq \underset{\downarrow 0}{\frac{(-1)^n}{n}} \leq \underset{\downarrow 0}{\boxed{\frac{1}{n}}}$$

Esempio 3 $\quad \left(3+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)^n \longrightarrow +\infty$

$$\left(3+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)^n \geq \underset{\downarrow\, +\infty}{2^n}$$

Esempio 4 $\quad \left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)^n$ NON ESISTE

Cerco 2 s.succ. con comp. diverso.

$$a_{2n} = \left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right)\right)^{2n} = 2^{2n} \longrightarrow +\infty$$

$$a_{4n+3} = \left(2+\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+3)\right)\right)^{4n+3}$$

$$= \left(2+\underbrace{\sin\left(2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1}\right)^{4n+3} = 1 \longrightarrow 1$$

scelto in maniera tale che $\sin = -1$.

— o — o —

Strumento per mostrare che un limite di funzioni non esiste.

Supponiamo di dover calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)$, con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Supponiamo che esistano 2 successioni a_n e b_n tali che

(i) $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$

(ii) $f(a_n) \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(b_n) \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell_1 \neq \ell_2$.

Allora il limite di funzione non esiste

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se il limite fosse $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per il criterio funzioni $\to$ succ. dovrebbe essere che $\underset{x=a_n}{f(a_n)} \to \ell$ e $\underset{x=b_n}{f(b_n)} \to \ell$.

Esempio 1 $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ NON ESISTE

Devo trovare $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ tali che
$\sin(a_n) \to l_1$ e $\sin(b_n) \to l_2$, con $l_1 \neq l_2$

$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ e $\sin a_n \equiv 1 \to 1$

$b_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ e $\sin b_n \to -1$.

Esempio 2 $\lim_{x \to 0^+} \boxed{\cos \frac{1}{x^2}}$ NON ESISTE
$f(x)$

Devo trovare $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$ tali che
$f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno 2 limiti diversi

Cerchiamo di avere $\cos = 1$: $\frac{1}{x^2} = 2n\pi$ $\quad x = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$

$\cos = 0$: $\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\quad x = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}}$

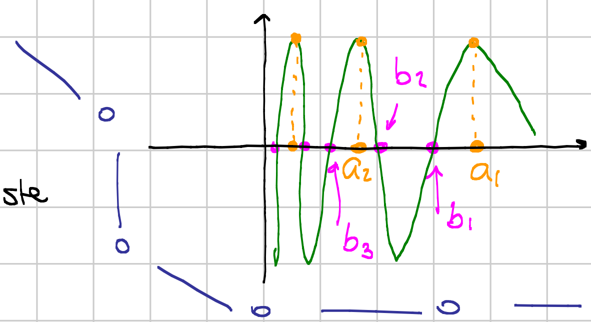
$a_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$ e abbiamo che $f(a_n) \equiv 1 \to 1$

$b_n = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}}$ " " " $f(b_n) \equiv 0 \to 0$.

Osservo inoltre che $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$

Esempio 3

$\lim_{x \to +\infty} (\sin(\log x) + 1)\, x$ NON esiste



$\sin = 0 \iff \log x = n\pi \quad x = e^{n\pi}$

$a_n = e^{n\pi} \to +\infty$ e $f(a_n) = a_n \to +\infty$

$\sin = -1 \iff \log x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \qquad x = e^{\cdots}$

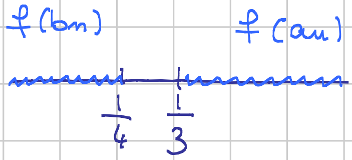
$b_n = e^{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \longrightarrow +\infty$ e $f(b_n) \equiv 0 \qquad \ell_1 \neq \ell_1$

Esempio 4

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \sin(\log x)}{5 + \sin x}$$

Prendo a_n e b_n come sopra, così tendono a $+\infty$

$$f(a_n) = \frac{2}{5 + \sin a_n} \geq \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



$$f(b_n) = \frac{1}{5 + \sin b_n} \leq \frac{1}{4}$$

Quindi il limite non può esistere (dovrebbe essere contemporaneamente $\ell \geq \frac{1}{3}$ e $\ell \leq \frac{1}{4}$, e non è possibile.

ANALISI 1 – LEZIONE 022

Note Title 17/10/2016

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \end{array}}$$

Ovvie dalla definiz. di limite

Esempio 1 $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(\cos x)}{\arctan x} \cos\frac{1}{x^3}}_{f(x)}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ N.E.}\right]$

Facciamo finta che ci sia solo la 1ª parte.

$$\underbrace{\boxed{\frac{\log(1+(\cos x - 1))}{\cos x - 1}}}_{\downarrow\ y = \cos x - 1 \to 0 \quad 1} \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\downarrow\ -\frac{1}{2}} \underbrace{\boxed{\frac{x}{\arctan x}}}_{\downarrow\ 1} \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\ 0} \to 0$$

Basta ora osservare che

$$\underbrace{0}_{\downarrow\ 0} \le \underbrace{|f(x)|}_{\downarrow\ 0} \le \underbrace{\left|\frac{\log(\cos x)}{\arctan x}\right|}_{\downarrow\ 0} \text{ (dim. sopra)}$$

Per i carabinieri $|f(x)| \to 0$, quindi anche $f(x) \to 0$.

Esempio 2 $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\arctan^2 x} \cos\frac{1}{x^3}$ NON esiste

Ora la parte senza $\cos\frac{1}{x^3}$ tende a $-\frac{1}{2}$

Ora scelgo $\cos\frac{1}{a_n^3} = 1$ $\qquad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}} \to 0$

$\cos\frac{1}{b_n^3} = -1$ $\qquad b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi + 2\pi n}} \to 0$

$\boxed{\text{RAZIONALIZZAZIONI}}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+7}\right) \qquad [+\infty(+\infty-\infty)]$$

$$\boxed{\sqrt{A}-\sqrt{B} = (\sqrt{A}-\sqrt{B})\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}} \qquad (a-b)(a+b)=a^2-b^2 \quad a=\sqrt{A} \quad b=\sqrt{B}$$

$$x\left(\sqrt{\dots}-\sqrt{\dots}\right)\frac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = x\,\frac{\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}-7}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+7}} \longrightarrow -1$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\,\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}$$

Esempio 4 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+7x}-2}{\log(1+\sin x)} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{\sqrt{4+7x}-2}{\log(1+\sin x)}\,\frac{\sqrt{}+2}{\sqrt{}+2} = \frac{\cancel{4}+7x-\cancel{4}}{\log(1+\sin x)}\,\frac{1}{\sqrt{4+7x}+2}\,\frac{\sin x}{\sin x}\,\frac{x}{x}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{\log(1+\sin x)}}}_{\downarrow\,1}\;\underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow\,1}\;\underbrace{\boxed{\frac{7}{\sqrt{4+7x}+2}}}_{\downarrow\,\frac{7}{4}} \longrightarrow \frac{7}{4}$$

Esempio 5 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x \qquad \sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{x^3}$

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\frac{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{\dots} = \frac{A-B}{\dots}}$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\text{testo} = \frac{\cancel{x^3}+2x^2+1-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2+1)^2}+\sqrt[3]{\dots}\cdot x+x^2} \longrightarrow \frac{2}{3}$$

$$\frac{2x^2}{x^2+x^2+x^2}$$

Esempio 6

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+3} - \sqrt[3]{2n+1}}{n+4} = \sqrt{2}$$

I termini al numeratore hanno ordine diverso!

$$\frac{\sqrt{2n^2} - \sqrt[3]{2n}}{n} = \frac{\sqrt{2}\,n}{n} = \sqrt{2} \qquad [\text{Brutal mode}]$$

$$- o \qquad - o \qquad -$$

Limiti per $x \to x_0$, con $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq +\infty$.

Suggerimento: cercare di riportarli a 0 oppure $+\infty$.

Esempio 7

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Pongo $y = x-\pi$. Quando $x \to \pi$ ho che $y \to 0$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi)}{y} \underset{\text{precorso}}{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{y} = -1$$

Esempio 8

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^2+x-2} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Pongo $y = x-1$. Quando $x \to 1$ ho che $y \to 0$, e $x = y+1$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y^2+2y+\cancel{1}+y+\cancel{1}-\cancel{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y(y+3)} = \frac{1}{3}$$

Esempio 9

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+3} + x \qquad [+\infty-\infty]$$

Pongo $y = -x$ quindi $y \to +\infty$

$$\lim_{y\to+\infty} \left(\sqrt{y^2-y+3} - y\right) \frac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\cancel{y^2}-y+3-\cancel{y^2}}{\sqrt{y^2-y+3}+y} = -\frac{1}{2}$$

LIMITI DI SOMMATORIE

Esempio 10 $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{4n} \frac{1}{k^2}}_{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n^2}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{(n+1)^2}} + \dots + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{(4n)^2}} \right)$$

$$0 \le a_n \le \boxed{\frac{1}{n^2}} \cdot \boxed{(3n+1)}$$

numero degli addendi

termine + grande

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \underset{\downarrow \atop 0}{a_n} \le \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{3n+1}{n^2}}$$

Esempio 11 $$\lim_{n\to\infty} \left(\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} + \dots + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{\sqrt{4n}}} \right) = +\infty$$

$$a_n \ge \boxed{\frac{1}{\sqrt{4n}}} (3n+1) = \frac{3n+1}{\sqrt{4n}} \to +\infty$$

termine + piccolo

Oss. Il limite della somma è = alla somma dei limiti se il numero degli addendi è FISSATO.
Negli esempi il numero dei termini cresce con n, quindi è come se fosse $0 \cdot +\infty$

Esempio 12 $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^a} + \frac{1}{(n+1)^a} + \dots + \frac{1}{(4n)^a} \right) = \begin{cases} +\infty & a<1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$$

Per $a=1$ si vede facilmente che a_n è limitata dall'alto e dal basso con una costante positiva. Inoltre si dimostra che è monotona, quindi ha limite. Più avanti si vedrà che lim = log 4.

ANALISI 1 — LEZIONE 023

Note Title 19/10/2016

LINGUAGGIO DEGLI INFINITESIMI : SIMBOLI DI LANDAU

- → o piccolo — fondamentale per i limiti
- → O grande — non è utilissimo per ora
- → equivalenza asintotica $\sim$ — pericolosa per i limiti

Def. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un p.to in cui fare i limiti.
Sia $g : D \to \mathbb{R}$.
Si dice che f è o piccolo di g per $x \to x_0$, e si scrive

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0}$$

se esiste $\omega : D \to \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x) = \omega(x)\, g(x)} \qquad \forall x \in D$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0}$$

Brutalmente: se $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora $f(x) \to 0$ "di più"

Def. quasi equivalente Nel caso in cui $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, la definizione è come chiedere che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Def. Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, se come sopra con

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1 \qquad \text{quasi equiv.: } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Esempio 1 $\quad x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$

$$x^3 = x \cdot x^2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$$
$$f(x) = \omega(x)\, g(x)$$

Esempio 2 $\quad \sin^2 x = o(x)$ per $x \to 0$

1° modo
$$\underset{f(x)}{\sin^2 x} = \underset{\omega(x)}{\frac{\sin^2 x}{x}} \cdot \underset{g(x)}{x}$$

Devo verificare
$$\lim_{x\to 0} \omega(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0$$

2° modo : uso def. quasi equiv. (posso perché $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$)
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

Esempio 3 $\quad \tan^2 x = o(\arctan x)$ per $x \to 0$

2° modo : posso dividere perché ...
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow\, 1}{\boxed{\frac{\tan^2 x}{x^2}}} \underset{\downarrow\, 1}{\boxed{\frac{x}{\arctan x}}} \cdot \underset{\downarrow\, 0}{\boxed{x}} = 0$$

Esempio 4 $\quad \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ per $x \to 0$

1° modo :
$$\underset{\uparrow\, f(x)}{\frac{1}{x}} = \underset{\uparrow\, g(x)}{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \underset{\uparrow\, \omega(x)}{\frac{\sin^2 x}{x}} \qquad \lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$$

In questo caso $f(x)$ e $g(x)$ non tendono a 0 per $x \to 0$.

Proprietà algebriche di o piccolo

Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x)) \quad e \quad f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

- **SOMMA** $\boxed{f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))}$

$$f_1(x) = g(x)\,\omega_1(x) \qquad f_2(x) = g(x)\,\omega_2(x)$$

con $\lim_{x\to x_0} \omega_1(x) = \lim_{x\to x_0} \omega_2(x) = 0$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x)\,\underbrace{[\omega_1(x) + \omega_2(x)]}_{=\omega_3(x) \to 0}$$

- **PRODOTTO** $\boxed{f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x)^2)}$

$$f_1(x)\,f_2(x) = g(x)\,\omega_1(x)\,g(x)\,\omega_2(x) = g(x)^2 \cdot \underbrace{[\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)]}_{=\omega_3(x) \to 0}$$

- **MULTIPLO** $\boxed{\alpha f_1(x) = o(g(x))}$

$$\alpha f_1(x) = \alpha\,g(x)\,\omega_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{[\alpha\,\omega_1(x)]}_{\omega_3(x) \to 0}$$

- **RAPPORTO** $\boxed{\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \text{Nulla di furbo}}$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)}\,\omega_1(x)}{\cancel{g(x)}\,\omega_2(x)} = \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = \text{BOH ?!?}$$

Brutalmente: f_1 batte g, f_2 batte g, ma che accade tra f_1 ed f_2?

Riassunto proprietà algebriche

$$o(g) + o(g) = o(g)$$
$$o(g) - o(g) = o(g)$$
$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$
$$\alpha\, o(g) = o(g)$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{boh!}$$

— o — o —

Sia $\alpha \neq 0$ e sia $f(x) = o(\alpha g(x))$ per $x \to x_0$. Cosa posso dire?

$$f(x) = \alpha g(x) \cdot \omega(x) \qquad \text{con} \quad \lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

$$= g(x) \cdot \underbrace{\alpha\, \omega(x)}_{\omega_1(x) \to 0} \quad \rightsquigarrow \quad f(x) = o(g(x))$$

$$\boxed{o(\alpha g) = o(g)}$$

— o — o —

TRANSITIVITÀ Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$, allora

$$f(x) = o(h(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Dim. Per ipotesi

$$f(x) = g(x)\, \omega_1(x) \qquad \omega_1(x) \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$
$$g(x) = h(x)\, \omega_2(x) \qquad \omega_2(x) \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

Ma allora

$$f(x) = h(x) \underbrace{\omega_2(x)\, \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0}$$

— o — o —

COMPOSIZIONI

Supponiamo che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$

① $\arctan(f(x)) = o(x)$

② $f(\arctan x) = o(x)$

Dim. di ②

Per ipotesi

$f(x) = x \cdot \omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$ per $x \to 0$.

$$f(\arctan x) = \arctan x \cdot \omega(\arctan x)$$

$$= x \underbrace{\boxed{\frac{\arctan x}{x} \cdot \omega(\arctan x)}}_{\omega_1(x) \to 0}$$

quindi $f(\arctan x) = o(x)$

$$\lim_{x \to 0} \omega_1(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan x}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\omega(\arctan x)}}_{\to 0} = 0$$

pongo $y = \arctan x$ e osservo che $y \to 0$

Dim. di ①

$$\arctan(f(x)) = x \, \frac{\arctan(f(x))}{x}$$

$$= x \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(f(x))}{f(x)} \; \frac{f(x)}{x}}}_{\omega_1(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \omega_1(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(f(x))}{f(x)}}}_{\to 1} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x}}}_{\to 0} = 0.$$

— o — o —

Esempio 1 $\quad \sin(2x) \sim 2x \quad$ per $x \to 0$

2° modo: posso dividere... $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$

1° modo: $\sin(2x) = 2x \underbrace{\boxed{\frac{\sin(2x)}{2x}}}_{\omega(x) \to 1}$

Esempio 2 $\quad e^x - \cos x \sim x \quad$ per $x \to 0$

2° modo: $\displaystyle \frac{e^x - \cos x}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{e^x - 1}{x}}}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x\cdot x}}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0} = 1.$

Esempio 3 $\quad f(x) = o(g(x)) \quad$ per $x \to x_0$

$\qquad g(x) \sim h(x) \quad$ per $x \to x_0$

Allora

$$f(x) = o(h(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Dim. $\quad f(x) = g(x)\cdot \omega_1(x) \quad$ con $\omega_1(x) \to 0 \quad$ per $x \to x_0$

$\qquad g(x) = h(x) \cdot \omega_2(x) \quad$ con $\omega_2(x) \to 1 \quad$ ''

Ma allora $\quad f(x) = h(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x)\,\omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0\cdot 1 = 0}$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = o(g(x)) & \text{per } x \to x_0 \\ h(x) \sim f(x) & \text{per } x \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad h(x) = o(g(x))$$

Dim. come sopra

$$h(x) = f(x)\cdot \underset{\downarrow\, 1}{\omega_1(x)} = g(x)\cdot \underbrace{\omega_2(x)\cdot\omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to 0}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 024

Note Title 19/10/2016

SVILUPPINI Per $x \to 0$ valgono i seguenti

$\sin x = x + o(x)$

$\tan x = x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$

$\arcsin x = x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\cos x = 1 + o(x)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

vale per α reale, anche negativo

Vanno interpretati nel senso che $\sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$ ...

Caso di $\sin x$: $\sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$. Divido per x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

Analogamente si fanno quelli della colonna sx

Caso di e^x: Devo dim. che $e^x - 1 - x = o(x)$ per $x \to 0$ ...

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} - 1 = 0$$

Caso di $\cos x$: Devo dim. che $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2)$ per $x \to 0$

Divido e ottengo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$\boxed{\text{L'altro con } \cos x}$ Si può dimostrare analogamente (esercizio ...) ma si può ottenere anche più elegantemente

$$\cos x = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{o(x)} + \underbrace{o(x^2)}_{o(x)} = 1 + o(x) + o(x) = 1 + o(x)$$

Vediamo i 2 fatti usati:

$\boxed{1}$ $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$ $\qquad x^2 = x \cdot \underset{\downarrow 0}{x}$

$\boxed{2}$ Se $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$, allora $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$

(f batte x^2, x^2 batte x, quindi f batte x)

$$f(x) = x^2 \omega(x) = x \cdot \underbrace{x\,\omega(x)}_{\omega_1(x) \to 0}$$

— o — o —

Esempio 0 $\quad x \sin \frac{1}{x} = o\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ per $x \to 0$

ma qui non lo posso vedere con il 2° modo

— o — o —

Esempio 1 $\quad \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x) + e^{2x} - 1}{\arctan x + \sin(3x)} = \frac{5}{4}$

Modo classico

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \, \frac{\dfrac{\tan(3x)}{3x} 3 + \dfrac{e^{2x}-1}{2x} 2}{\dfrac{\arctan x}{x} + \dfrac{\sin(3x)}{3x} 3} \to \frac{3+2}{1+3} = \frac{5}{4}$$

Metodo o piccolo: sviluppo tutto con gli sviluppini

$$\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$
$$e^{2x} - 1 = 1 + 2x + o(2x) - 1 = 2x + o(x)$$
$$\arctan x = x + o(x)$$
$$\sin(3x) = 3x + o(x)$$

Numeratore $= 3x + o(x) + 2x + o(x) = 5x + o(x)$

Denominatore $= 4x + o(x)$

$$\text{Frazione} = \frac{5x + o(x)}{4x + o(x)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \, \frac{5 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}^{\to 0}}{4 + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}_{\to 0}} \to \frac{5}{4}$$

Fatto generale: $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^k)}{x^k} = 0$

Dim. $\frac{o(x^k)}{x^k} = \frac{\cancel{x^k}\,\omega(x)}{\cancel{x^k}} \to 0.$

Esempio 2 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) + \arctan(x^2)}{\log(1+7x) + \sin^2 x} = \frac{3}{7}$

Uso gli sviluppini:
$$\sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$
$$\arctan(x^2) = x^2 + o(x^2) = o(x) + o(x) = o(x)$$
$$\log(1+7x) = 7x + o(x)$$
$$\sin^2 x = (x + o(x))^2$$
$$= x^2 + o(x)^2 + 2x\,o(x)$$
$$= o(x)$$

Se uno ha fifa, usa la definizione:

$$[o(x)]^2 = [x\,\omega(x)]^2 = x^2\omega^2(x) = x \cdot \underbrace{x\omega^2(x)}_{\to 0}$$

$$x\,o(x) = x \cdot \overbrace{x \cdot \omega(x)}^{\to 0}$$

Frazione $= \dfrac{3x+o(x)}{7x+o(x)} =$ solito finale $= \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \dfrac{3+\frac{o(x)}{x}}{7+\frac{o(x)}{x}} \to \dfrac{3}{7}$

Composizioni Per $x \to 0$

$e^{\sin x}$ $e^x = 1+x+o(x)$

$$e^{\sin x} = 1+\sin x + o(\sin x)$$
$$= 1+x+o(x)+o(\sin x)$$
$$= 1+x+o(x)+o(x) = 1+x+o(x)$$

Se uno ha fifa $o(\sin x) = \sin x \cdot \omega(x) = x \boxed{\frac{\sin x}{x}\,\omega(x)}$

$\omega_1(x) \to 1 \cdot 0 = 0$

Via alternativa: $e^{\sin x} = e^{x+o(x)} = e^x \cdot e^{o(x)}$

$= \underbrace{(1+x+o(x))(1+o(x))}_{\text{svolgo e trovo } 1+x+o(x)}$

ho usato che

$$e^{o(x)} = 1+o(x)$$

Perché è vero?

$$e^{o(x)} = 1+o(x)+o(o(x)) = 1+o(x)$$
$$e^t = 1+t+o(t)$$

Esempio ($n+1$) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} + \log(1+\arctan(2x)) - \cos(7x)}{\arcsin(x^2) + 3\tan(5x)} = \frac{1}{5}$

$e^{\sin x} = 1+x+o(x)$

$\cos(7x) = 1+o(x)$ Frazione $= \dfrac{3x+o(x)}{15x+o(x)} \to \dfrac{1}{5}$

$\log(1+\arctan(2x)) = 2x+o(x)$

$\tan(5x) = 5x+o(x)$

$\arcsin(x^2) = o(x)$

$$\log(1+\arctan(2x)) = \arctan(2x) + \overbrace{o(\arctan(2x))}^{o(2x)=o(x)} = 2x+o(x)$$

Sviluppini in versione equiv. asintotica Per $x \to 0$

$\sin x \sim x$ $e^x \sim 1+x$

$\tan x \sim x$ $\log(1+x) \sim x$

$\arctan x \sim x$ $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$\arcsin x \sim x$

$(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x$

Usare queste è PERICOLOSISSIMO (vedi tra qualche lezione)

$$\boxed{\frac{e^{\sin x} + \log(1+\arctan(2x)) - \cos(7x)}{\arcsin(x^2) + 3\tan(5x)} = \frac{e^x + \log(1+2x) - 1 + \frac{49x^2}{2}}{x^2+15x} = \frac{\cancel{1}+x+2x-1+\frac{49x^2}{2}}{15x+x^2} \to \frac{3}{15}}$$

MOLTO PERICOLOSO

Esempio finale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\log(\cos(3x)) + \arctan(\arcsin(9x))}^{9x+o(x)}}{\underbrace{e^{\sin(\tan x)} - 1}_{x+o(x)}} = 9$$

$\log(\cos(3x)) = \log(1+o(x))$ $\cos(x) = 1+o(x)$

$= o(x) + o(o(x)) = o(x)$

$\log(1+t) = t+o(t)$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 025

Note Title 20/10/2016

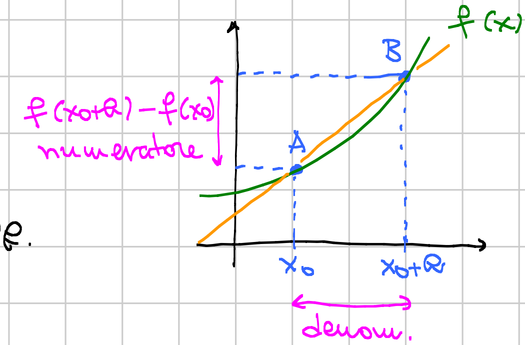
DERIVATE IN UNA VARIABILE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$ [x_0 interno ad A, cioè esiste $\delta > 0$ t.c. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$]

RAPPORTO INCREMENTALE (Difference quotient)

È la funzione $\boxed{\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$ definito almeno per $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{\text{incremento di } y}{\text{incremento di } x}$$



Geometricamente rappresenta il coeff. angolare della retta AB

Def. di derivata Si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ esiste ed è reale.

Tale limite si indica con $f'(x_0)$ (derivata prima di f in x_0)

Altre notazioni: $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $Df(x_0)$

Geometricamente: fare tendere $h \to 0$ equivale a $B \to A$, quindi la retta AB $\to$ retta tangente al grafico in A

$\boxed{f'(x_0) = \text{coeff. angolare retta tang. al grafico in } A}$

<u>Eq. retta tangente</u> $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

<u>Def. di differenziale</u> Siano A, f, x_0 come sopra.
Si dice che f è <u>differenziabile</u> in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)} \quad \text{per } h \to 0$$

<u>Teorema</u> La funzione f è diff. in x_0 se e solo se f è derivabile in x_0. Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Hp: f derivabile
Tesi: f diff. e $\alpha = f'(x_0)$

Devo dim. che $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$, cioè
$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h)$ per $h \to 0$

cioè

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, f'(x_0)} - f'(x_0) = 0$$

Hp: f diff. Tesi: f derivabile e $f'(x_0) = \alpha$

Faccio il limite del rapp. incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \alpha + \frac{o(h)}{h} = \alpha = f'(x_0).$$

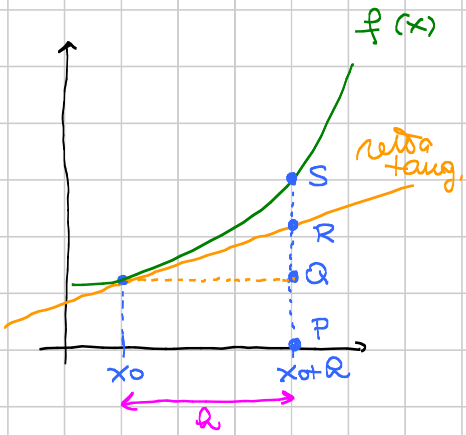
— o — o —

<u>Oss.</u> Ad analisi 2 non c'è più l'equivalenza fra le 2 definizioni.

Interpretazione geometrica del differenziale

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

$$SP = PQ + QR + SR$$



Il termine αh è proporzionale ad h come la lungh. di QR

Quando $h \to 0$, anche $SR \to 0$, ma lo fa più velocemente di h, e questo vuol dire $o(h)$

Operativamente: se riesco a scrivere $f(x_0+h)$ come somma di 3 termini (costante + costante $\cdot h$ + $o(h)$), la seconda costante è la derivata.

— o — o —

Derivata delle funzioni elementari

Esempio 1 $\quad f(x) = x^2$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{2x_0}_{\alpha} h + \underbrace{h^2}_{+o(h)}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = x^3$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = \underbrace{x_0^3}_{f(x_0)} + \underbrace{3x_0^2}_{\alpha} h + \underbrace{3x_0h^2 + h^3}_{+o(h)}$$

$$f'(x_0) = 3x_0^2$$

Esempio 3 $f(x) = e^x$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\overset{e^{x_0}\cdot e^h}{\shortparallel}}{e^{x_0+h}} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \underbrace{\boxed{\frac{e^h-1}{h}}}_{\downarrow\ 1} = e^{x_0}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $$f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^h = e^{x_0}(1+h+o(h))$$

sviluppino

$$= \underset{f(x_0)}{e^{x_0}} + \underset{\alpha}{e^{x_0}}\, h + o(h)$$

$$f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Esempio 4 $f(x) = \sin x$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

$\sin\alpha - \sin\beta = \ldots$

$\sin(x_0+h) = \ldots$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0\cdot\cos h + \cos x_0\cdot\sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos x_0 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin h}{h}}}_{\downarrow\ 1} + \sin x_0 \underbrace{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h\cdot h}}}_{\downarrow\ -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{h}}_{\downarrow\ 0}\right] = \cos x_0$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $$f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$$

$$= \sin x_0\cdot\cos h + \cos x_0\cdot\sin h$$

(sviluppini) $$= \sin x_0(1+o(h)) + \cos x_0(h+o(h))$$

$$= \underset{f(x_0)}{\sin x_0} + \underset{\alpha}{\cos x_0}\cdot h + \underset{o(h)}{o(h)}$$

Esempio 5 $f(x) = \log x$ $\qquad x_0 > 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $$f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right]$$

$$= \log x_0 + \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

Uso sviluppino $\log(1+t) = t + o(t)$

$$= \underbrace{\log x_0}_{f(x_0)} + \frac{1}{x_0} \cdot h + o(h)$$

$$f(x_0) + \alpha \cdot h + o(h)$$

Quindi $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

Esempio 6 $f(x) = 7^x$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{7^{x_0+h} - 7^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} 7^{x_0} \underbrace{\boxed{\frac{7^h - 1}{h}}}_{\log 7}$$

$$= \log 7 \cdot 7^{x_0}$$

Conclusione In poche parole

- limiti notevoli
- sviluppini
- derivate delle funzioni elementari

sono 3 facce della stessa medaglia.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 026

Note Title 20/10/2016

Calcolo di derivate: → teo. algebrici
→ tabellina derivate funzioni elementari
→ derivata funzione composta
→ derivata funzione inversa

Teoremi algebrici

$$\left.\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (af)' &= af'\end{aligned}\right\} \text{La derivata è un'appl. lineare}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Derivata somma f deriv. in x_0, g derivab. in x_0

$$s(x) := f(x) + g(x)$$

Allora $s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

1° modo $s'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2° modo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

Sommo:

$$s(x_0+h) = s(x_0) + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]}_{s'(x_0)} h + o(h)$$

Stessa cosa per la differenza. Simile per $af(x)$

Proposizione intermedia Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Dim. $f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$

$$= f(x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}}_{\downarrow \, f'(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{(x-x_0)}}_{\downarrow \, 0} \longrightarrow f(x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pongo $x - x_0 = h$. Quando $x \to x_0$ ho che $h \to 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

— o — o —

Derivata del prodotto $p(x) := f(x) \cdot g(x)$

1° modo $p'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

TERMINE MISTO!

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{\boxed{f(x_0+h)}}_{\downarrow \, f(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}_{\downarrow \, g'(x_0)} + g(x_0) \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\downarrow \, f'(x_0)} \right]$$

(per la continuità vista prima)

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)\,h + o(h)$$

Moltiplico

$$p(x_0+h) = p(x_0)$$
$$+ [f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)]\,h \qquad \alpha h$$
$$+ o(h) \leftarrow \text{contiene tutti i restanti 6 termini (convincersene)}$$

$\boxed{\text{Derivata del quoziente}}$ $\quad q(x) := \dfrac{1}{f(x)}$ stiamo assumendo che $f(x_0) \neq 0$, quindi anche per x vicini ad x_0.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$

$$q'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{q(x_0+h) - q(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h)\cdot f(x_0)}$$
$$= \lim_{h\to 0} - \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\downarrow\; f'(x_0)} \cdot \frac{1}{\underbrace{f(x_0+h)\cdot f(x_0)}_{\downarrow\; [f(x_0)]^2}}$$
$$= -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

— o — o —

A questo punto

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \left[f\cdot\frac{1}{g}\right]' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$
$$= \frac{f'\cdot g - f g'}{g^2}$$

— o — o —

Composizione | Teorema misterioso

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Inversa | Teorema misterioso

Siano $\delta > 0$ ed $r > 0$. Sia $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - r, y_0 + r)$ una funzione invertibile, e sia $g : \ldots \to \ldots$ la funzione inversa. Supponiamo che $f(x_0) = y_0$.
Supponiamo f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$.
Allora g è derivabile in y_0 e vale

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}}$$

Non dimostrazione $\quad f(g(x)) = x$
Derivo a dx e sx

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \leadsto \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(occhio: ho supposto che g fosse derivabile)

Esempio 1 $\quad f(x) = e^x, \quad g(x) = \log x \qquad f'(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = \tan x, \quad g(x) = \arctan x$

$$f'(x) = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

stessa cosa

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$, $f'(x) = \cos x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

bisognerebbe controllare il segno, che dipende da dove sta α
A noi serve con $\alpha = \arcsin x$ che sta nel 1° o 4° quadrante, cioè proprio dove $\cos > 0$.

— o — o —

Derivate funzioni elementari

$(\text{costante})' = 0$ $\qquad (x^n)' = n x^{n-1}$ (binomio di Newton oppure induzione su n)

$(e^x)' = e^x$ $\qquad (a^x)' = a^x \cdot \log a$ $\qquad (x^a)' = a x^{a-1}$

$$x^a = e^{a\log x} \qquad (x^a)' = \left(e^{a\log x}\right)' = e^{a\log x}\cdot\frac{a}{x} = x^a\cdot\frac{a}{x} = a\cdot x^{a-1}$$

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad (\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Esempio 1 $[\cos(\log x)]' = -\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}$

$[\cos x \cdot \log x]' = -\sin x\cdot\log x + \cos x\cdot\frac{1}{x}$

$[x^x]' = x^x \log x$ (Vedendolo come a^x)
$\quad = x \cdot x^{x-1} = x^x$ (" " x^a)

SBAGLIATI ENTRAMBI

$$[x^x]' = [e^{x\log x}]' = e^{x\log x}\,[x\log x]'$$

$$= e^{x\log x}\left[1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$= x^x[\log x + 1]$$

$$= x^x\log x + x^x$$

Esercizio Provare a calcolare $\left([f(x)]^{g(x)}\right)' = \dots$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 027

Note Title 24/10/2016

$\boxed{\text{Teorema di De L'Hôpital}}$ Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

<u>Teorema misterioso</u> Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (f e g definite dalle parti di x_0, f' e g' devono esistere, poter dividere per g e g')

(ii) il limite sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) esista in $\overline{\mathbb{R}}$ il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$$ (il tipo ④ è escluso)

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Operativamente</u> Devo fare il lim di $\frac{f(x)}{g(x)}$. Controllo che sia forma ind. $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Poi faccio il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

1 – Se questo non esiste, allora BOH

2 – Se questo esiste in $\overline{\mathbb{R}}$, allora ☺

3 – Se questo è ancora $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, allora posso iterare il procedimento, derivando nuovamente.

Esempio 1 $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$

No! Non è una forma indet. come previsto.

In realtà è del tipo $\frac{1}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$

Esempio 2 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cos(3x) + x}{x}$

Questa è una forma del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Ha senso provare Hôp

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6\sin(3x)+1}{1} = \text{N.E.}$ (basta prendere oppor. succ. $a_n = \pi n$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$)

Su quello iniziale Hôp non dice nulla. In realtà in via del tutto elem. tende ad 1

$$\underbrace{\frac{x-7}{x}}_{\to 1} \leq \frac{2\cos(3x)+x}{x} \leq \underbrace{\frac{7 12 + x}{x}}_{\to 1}$$

$\boxed{\text{Esempio fondamentale}}$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x}$

$\boxed{1^\circ \text{modo}}$ Con i limiti notevoli

$$\frac{\underbrace{\boxed{\frac{e^x-1}{x}}}_{\to 1} \cdot x - \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} \cdot x + x^2}{\underbrace{\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}}_{\to 1} \cdot x^2} \to \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^2}{x^2} = 1.$$

No!!! Non si fanno i limiti metà per volta!!!

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Con equivalenza asintotica

$e^x - 1 \sim x$, $\quad \sin x \sim x$, $\quad \sin^2 x \sim x^2$

$$\frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} \sim \frac{x - x + x^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

No!! Non si usa l'equivalenza asintotica

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ De L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} \underset{\left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + 2x}{2 \sin x \cos x} \underset{\left[\frac{0}{0} : \text{Hôp}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x + 2}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \underset{\text{corretto}}{\frac{3}{2}} \qquad \text{OPS} \ldots$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo revisited}}$ Uso gli sviluppini

$$\frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} - \cancel{x} - o(x) + x^2}{x^2 + o(x^2)}$$

$$= \frac{x^2 + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$$

$$\frac{o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\cancel{x}\ \boxed{\frac{o(x)}{x}} \to 0}{\underbrace{x^{\cancel{2}}}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}_{\downarrow\, 1}} \qquad \text{resta } \frac{0}{0}$$

— o — o —

<u>Morale</u>

→ Mai fare limiti metà per volta

→ Mai usare equiv. asintotica (a meno di non sapere cosa si sta facendo).

Utilità di Hôp nel fare i limiti: 3%. Di solito va evitato perché le derivate "peggiorano" le funzioni.

Esempio 1 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ $[+\infty\cdot 0]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \underset{[\frac{0}{0}:\text{Hôp}]}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

Si poteva fare senza ricordando che $\frac{\pi}{2}-\arctan x = \arctan\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{\arctan y}{y} = 1$$

Esempio 2 $\lim_{x\to-1^+}\frac{\arccos x-\pi}{\sqrt{x+1}}$ $\left[\frac{\pi-\pi}{0}\right]$

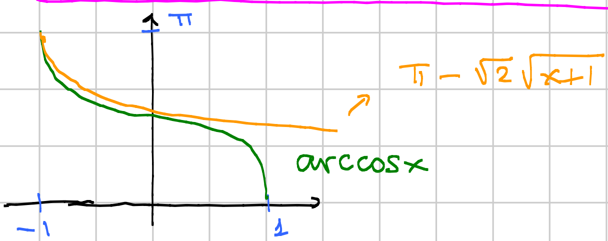
$$= \lim_{x\to-1^+}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to-1^+} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,2\sqrt{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1^+} -2\frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{\cancel{\sqrt{1+x}}\,\sqrt{1-x}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Conseguenza: $\arccos x = \pi-\sqrt{2}\sqrt{x+1}+o(\sqrt{x+1})$ per $x\to-1^+$

o equivalentemente, ponendo $y=x+1$:

$$\boxed{\arccos(-1+y) = \pi-\sqrt{2}\sqrt{y}+o(\sqrt{y}) \quad \text{per } y\to 0^+}$$



Oss. finali

① Posso usare Hôp per fare limiti di succ. ?

NI: posso all'interno del criterio funzioni → successioni

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = 1.$$

② Posso usare Hôp per calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$?

NI, anzi più NO: abbiamo usato quel limite per dire che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$.
Stesso discorso per gli altri lim. notevoli.

③ Si può fare un uso parziale di Hôp per calcolare effettivamente i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\overbrace{\boxed{\sin^3(\sqrt{x}\arctan x)}}^{o(x),\ \text{anzi}\ \sim\ x^{9/2}}}{x+\underbrace{\boxed{\tan^2|x|\cdot|\sin x|}}_{o(x),\ \text{anzi}\ \sim\ |x|^3}}$$

Tutta la sporcizia è $o(x)$ e non c'è verso di trattarla con Hôpital.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 028

Note Title 24/10/2016

POLINOMI DI TAYLOR

Obiettivo: approssimare le funzioni con polinomi.

Problema: data una funzione $f(x)$ ed un intero positivo n, trovare un polinomio $P_n(x)$ tale che $\deg P_n \le n$ e

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

(il resto è scritto come o piccolo)

Operativamente: nel calcolo di un limite che coinvolge $f(x)$ posso sostituire $f(x)$ con $P_n(x)$, pagando un $o(x^n)$

"Resto": se approx $f(x)$ con $P_n(x)$, il resto è l'errore che commetto, cioè $f(x) - P_n(x)$

Lemma Se per caso per un certo n esiste il $P_n(x)$, allora questo è unico

Dim. Supponiamo ce ne siano 2. Allora

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Sottraendo: $\underbrace{P_n(x) - Q_n(x)}_{\deg \le n} = o(x^n)$

Questo è impossibile se $P_n - Q_n \neq 0$. Basta scrivere $P_n(x) - Q_n(x) = a_k x^k +$ potenze + alte e dividere per x^k e fare il lim.

— o — o —

Teorema misterioso Sia $r>0$ e sia $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$. Sia $n\geq 1$.
Supponiamo che
(i) f è derivabile $n-1$ volte in $(-r,r)$.
(ii) f è derivabile n volte almeno in $x=0$.
se è derivabile + volte, meglio ancora
Allora esiste $P_n(x)$ ed è dato dalla seguente formula:

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

derivata n-esima

Osservazioni

① La formula di Taylor con resto di Peano si riscrive come

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)}$$

(Taylor – Mc Laurin)

② Passando dal grado n ad $n+1$ basta aggiungere un termine

③ Esistono esempi di funzioni che non sono nemmeno derivabili in $x=0$, ma che ammettono polinomi di Taylor di ogni ordine n.

— o — o —

POLINOMI DI TAYLOR DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

se mi serve il grado 2016, mi arresto quando arrivo a 2016

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

numero reale qualunque

Oss. ① Funzione pari = solo termini di deg pari
" dispari " " dispari

(Dim.: basta osservare che una funzione pari ha $f^{(2k+1)}(x)$ dispari, e quindi $f^{(2k+1)}(0) = 0$.
Idem per le funzioni dispari)

② Gli sviluppini sono gli sviluppi di Taylor con $n=1$, tranne quello del cos che ha $n=2$.

Esempio 1 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x}$ Uso Taylor con $n=2$

$\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$ (qui bastano gli sviluppini)

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sin x = x + o(x^2)$

Quindi numeratore: $\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\cancel{-1}-\cancel{x}-o(x^2)+x^2 = \frac{3}{2}x^2+o(x^2)$

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dots \text{ solito finale } \to \frac{3}{2}$$

Morale: quando entrano in gioco termini succ. al 1°, allora i limiti notevoli non bastano. Se entra in gioco il coeff. di x^{2016}, servirebbero 2016 iterazioni di Hôp.

Classico: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$ — Ok, ma inutile: $o(x^2)$ si mangia $\frac{x^3}{6}$

$\sin x = \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_3(x)} + o(x^3)$ — Ok: Taylor con $n=3$

$\sin x = \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_4(x)} + o(x^4)$ — Ok: Taylor con $n=4$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$ — NO: manca $\frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{120}$

— o — o —

Dimostrazione sviluppi funzioni elementari:

$\boxed{e^x}$ Sia $f(x) = e^x$. Allora $f^{(k)}(x) = e^x$, quindi il coeff. di x^k è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

$\boxed{\sin x}$ $f(x) = \sin x$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \dots \quad f^{(2016)}(x) = \sin x$$
$$f^{(1)}(x) = \cos x$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

Quindi $f^{(k)}(0) = 0, 1, 0, -1, 0, \dots$ cioè 0 sui pari e alternativ. ± 1 sui dispari. Dividendo per $k!$ si ottiene lo sviluppo

$\boxed{\cos x}$ Stessa cosa...

$\boxed{\log(1+x)}$ $f(x) = \log(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad \dots$$

Congettura: $$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$ (si dimostra facilmente per induzione)

A questo punto

$$\text{coeff. di } x^k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

Casi speciali di sviluppo di $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$\boxed{\alpha = -1}$ $\quad \alpha = -1, \quad \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = 1, \quad \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = -1, \dots$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots}$$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

$$\boxed{(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 029

Note Title 26/10/2016

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO QUALUNQUE

Teorema misterioso Sia $r>0$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia
$$f:(x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$$
una funzione. Sia n un intero positivo.
Supponiamo che
(i) f sia derivabile $n-1$ volte in (x_0-r, x_0+r),
(ii) f sia derivabile n volte in x_0.
Allora

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Polinomio di Taylor di ordine } n \text{ in } x_0} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{resto alla PEANO}} \quad \text{per } x \to x_0}$$

Altro modo di scrivere la stessa cosa: cambio di variabili $x-x_0=h$,
da cui $x = x_0+h$

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n) \quad \text{per } h \to 0}$$

Per $n=1$ diventa

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

quindi differenziale = Taylor di ordine 1

$\boxed{\text{Dim.}}$ Pongo $g(x) = f(x+x_0)$ e applico la formula con centro in $x = 0$ per la funzione $g(x)$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

ora osservo che $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x+x_0)$, quindi $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$ e così otteniamo la formula voluta (con $h = x$).

— o — o —

Operazioni con i polinomi di Taylor, ovvero come calcolare i pol. di Taylor senza fare le derivate.

$\boxed{\text{Somma}}$ Siano

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Poniamo $s(x) := f(x) + g(x)$. Allora

$$s(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Ci sono 2 vie:

→ osservare che $s^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) + g^{(k)}(0)$

→ usare le propr. di o piccolo

$$s(x) = \underbrace{P_n(x) + o(x^n)}_{f(x)} + \underbrace{Q_n(x) + o(x^n)}_{g(x)} = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

$\boxed{\text{Prodotto per una costante}}$ $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

Allora $a f(x) = a P_n(x) + o(x^n)$

Dim. Proprietà $a\, o(x^n) = o(x^n)$.

$\boxed{\text{Prodotto di 2 funzioni}}$ f e g come sopra. Poniamo

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Allora $\quad p(x) = \boxed{P_n(x) \cdot Q_n(x)} + o(x^n)$

in questo calcolo posso limitarmi ai termini di grado $\leq n$ (gli altri sono mangiati da $o(x^n)$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\quad p(x) = (P_n(x) + o(x^n)) \cdot (Q_n(x) + o(x^n))$

$$= P_n(x) \cdot Q_n(x) + \underbrace{P_n(x) \cdot o(x^n) + Q_n(x) \cdot o(x^n) + o(x^n) \cdot o(x^n)}_{o(x^n)}$$

Vediamo un caso

$$P_n(x) \cdot o(x^n) = P_n(x) \cdot x^n \cdot \omega(x) = x^n \cdot \underbrace{\boxed{P_n(x) \cdot \omega(x)}}_{\omega_1(x) \to P_n(0) \cdot 0 = 0} = o(x^n)$$

— o — o —

Esempio 1 $\quad f(x) = \sin x \cdot \log(1+x) \qquad n = 4 \qquad x_0 = 0$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Calcolare le derivate fino alla 4^a.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Sfrutto il prodotto

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Reverse engineering: quanto vale $f^{(4)}(0)$?

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}}}_{=\frac{1}{6}} x^4 + o(x^4)$$

Quindi $\quad f^{(4)}(0) = \frac{1}{6} \cdot 4! = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$

$\boxed{\text{Composizione 1}}$ $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

Allora

$$f(ax) = P_n(ax) + o(a^n x^n) = P_n(ax) + o(x^n)$$

Brutalmente: metto ax al posto di x nello sviluppo

$\boxed{\text{Composizione 2}}$ f come sopra.

Allora

$$f(x^a) = P_n(x^a) + o((x^a)^n) = P_n(x^a) + o(x^{na})$$

Brutalmente: metto x^a al posto di x nello sviluppo

Esempio 1 $\quad e^{x^2} \cdot \cos(3x) \quad n=4 \quad x_0 = 0$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4) \qquad \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \qquad \cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)$$

Prodotto $\quad e^{x^2} \cdot \cos(3x) = \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4\right) + o(x^4)$

$$= 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + x^2 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$+ o(x^5)$

perché $f(x)$ è PARI

Esempio 2 $\quad \sin(x^5) \quad n = 15$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ $\quad$ Metto $t = x^5$:

$$\sin(x^5) = x^5 - \frac{1}{6}x^{15} + o(x^{15})$$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \rightsquigarrow \sin(x^5) = x^5 - \frac{1}{6}x^{15} + o(x^{20})$$

Posso arrivare fino a $o(x^{24})$, anzi $o(x^{24.99\ldots})$ perché il termine successivo sarebbe x^{25}.

Se $f(x) = \sin(x^5)$, calcolare $f^{(2016)}(0)$ e $f^{(2015)}(0)$

Quella 2016-esima è 0 perché nello sviluppo di $f(x)$ ci sono solo potenze dispari.

Quella 2015-esima la ritrovo nel coeff. di x^{2015}, il quale arriva dal coeff. di t^{403} visto che $403 \cdot 5 = 2015$

$$\sin t = \ldots - \frac{1}{403!} t^{403} + \ldots$$

$$\sin(x^5) = \ldots \underbrace{\boxed{-\frac{1}{403!}}}_{\frac{f^{(2015)}(0)}{2015!}} x^{2015} + \ldots$$

Quindi

$$f^{(2015)}(0) = -\frac{2015!}{403!}$$

Esempio 3 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} + \cos(2x) - 2}{x(\arctan x - x)}$ Scelgo $n = 4$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ $\qquad e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2} 4x^4 + o(x^4)$

$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4)$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

Numeratore $= \cancel{1} + \cancel{2x^2} + 2x^4 + \cancel{1} - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 \cancel{-2} + o(x^4) = \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)$

Denominatore $= -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Frazione $= \dfrac{\frac{8}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} =$ solito finale $= -8$

Alternativa: 4 passaggi di Hôpital.

ANALISI 1 — LEZIONE 030

Note Title 26/10/2016

Composizioni "vere" $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

Allora $f(g(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$ per $x \to 0$

vale se $g(0) = 0$ e quindi $Q_n(x)$ non ha il termine noto

Esempio $e^{\sin x}$ $n = 4$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

Al posto di t metto $\sin x$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(\sin^4 x)$$

Al posto di ogni $\sin x$ sostituisco il suo sviluppo

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}(\dots)^2 + \frac{1}{6}(\dots)^3 + \frac{1}{24}(\dots)^4 + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Doppio} \\ \text{prodotto}}}{\frac{1}{3}x^4}\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(\sin^4 x)$$

Vorrei poter dire che $o(\sin^4 x)$ è $o(x^4)$. Questo è vero perché $\sin^4 x \sim x^4$ e quindi entra in gioco una propr. di o piccolo

Altro modo di vederlo $\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$, quindi

$$o(\sin^4 x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. di} \\ \text{o piccolo}}}{=} o(x^4) + o(o(x^4)) = o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$$

$\boxed{\text{Dim fatto generale}}$ $f(g(x)) = P_m(g(x)) + o([g(x)]^n)$

$f(t) = P_m(t) + o(t^n)$

Fatto 1: $o(g(x)^n) = o(x^n)$

Srotoliamo la definizione

$o(t^n) = t^n \omega(t)$ quindi $o(g(x)^n) = [g(x)]^n \omega(g(x))$

$$= x^n \underbrace{\boxed{\left[\frac{g(x)}{x}\right]^n}}_{\text{numero}} \underbrace{\omega(g(x))}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perché } g(x)\to 0}}$$

$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

$$\frac{g(x)}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{Q_n(x)}{x}}}_{\text{coeff. di } x \text{ in } Q_n(x)} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x^n)}{x}}}_{\downarrow 0}$$

$= x^n \cdot$ roba che tende a 0.

Quindi $o([g(x)]^n) = o(x^n)$ grazie al fatto che $g(0) = 0$

Fatto 2 $P_m(g(x)) = P_m(Q_n(x) + o(x^n)) = P_m(Q_n(x)) + o(x^n)$

Questo va dimostrato monomio per monomio...

$P_m(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$

$P_m(Q_n(x) + o(x^n)) = a_0 + a_1(Q_n(x) + o(x^n)) + a_2(Q_n(x) + o(x^n))^2 + \ldots$

$= a_0 + a_1 Q_n(x) + a_2 Q_n(x)^2 + a_3 Q_n(x)^3 + \ldots + o(x^n)$

$= P_m(Q_n(x)) + o(x^n).$

— o — o —

Esempio 2 $\cos(\sin x)$ $n = 4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

se voglio posso mettere $o(x^5)$ perché la funzione è pari

Esempio 3 $\sin(\cos x)$

La funzione più interna non si annulla in $x=0$, quindi non posso usare lo sviluppo di $\sin t$ centrato in $t=0$.
lo sviluppo in centro 0 approssima bene $\sin t$ per $t \sim 0$, ma $\cos x \sim 1$.

Via d'uscita: sviluppare $\sin t$ con centro in $t=1$, e qui entrano in gioco i centri $x_0 \neq 0$.

Esempio 4 $f(x) = e^x$ $x_0 = 6$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Calcolo tutte le derivate in $x_0 = 6$: fanno $f^{(k)}(6) = e^6$ quindi

$$e^x = e^6 + \frac{e^6}{1!}(x-6) + \frac{e^6}{2!}(x-6)^2 + \frac{e^6}{3!}(x-6)^3 + \dots$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ scrivo $x = 6 + h$ e penso $h \to 0$:

$$e^{6+h} = e^6 \cdot e^h = e^6\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \dots\right)$$

$h \to 0$

Esempio 5 $\quad f(x) = \sin x \qquad x_0 = 1$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Farsi le derivate

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scrivo $x = 1 + h$ e penso che $h \to 0$

$$\sin(1+h) = \sin 1 \cdot \cos h + \cos 1 \cdot \sin h$$

$$= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 + \dots\right) + \cos 1 \left(h - \frac{1}{6}h^3 + \dots\right)$$

Back to esempio 3 $\quad \sin(\cos x) \qquad n = 4$

Sviluppo prima la funzione DENTRO

$$\sin(\cos x) = \sin\Big(1 \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}_{h \to 0}\Big)$$

$=$ (uso formula dell'esempio precedente)

$$= \sin 1 \left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}(\dots)^4\right]$$

$$+ \cos 1 \left[(\dots) - \frac{1}{6}(\dots)^3\right]$$

$$= \sin 1 \left[1 - \frac{1}{8}x^4\right] + \cos 1 \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right] + o(x^4)$$

Esempio 6 $\quad f(x) = \log x \qquad$ Non ha senso sviluppare in $x = 0$ (dovrebbe essere definita in un intorno di 0)

$x_0 = 7, \quad n = 4$

$$\log(7+h) = \log\left[7\left(1 + \frac{1}{7}h\right)\right] = \log 7 + \log\left(1 + \frac{1}{7}h\right)$$

$$= \log 7 + \frac{1}{7}h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{7^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{7^3} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{7^4} + o(h^4)$$

Esempio 6 bis $\quad f(x) = \log(2 + 5\cos x) \quad n = 3 \quad x = 0$

Sviluppo $\cos x$:

$$f(x) = \log\left(2 + 5\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\right)$$

$$= \log\Big(7 \underbrace{- \frac{5}{2}x^2 + o(x^3)}_{h}\Big)$$

$$= \log 7 + \frac{1}{7}\left(-\frac{5}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \log 7 - \frac{5}{14}x^2 + o(x^3)$$

Esempio 7 $\quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\arctan^2 x}} \quad [1^\infty]$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\arctan^2 x}} = e^{\frac{1}{\arctan^2 x}\log\frac{\sin x}{x}} \to e^{-\frac{1}{6}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

Esponente $\quad \dfrac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{\arctan^2 x} = \dfrac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \to -\dfrac{1}{6}$

ANALISI 1 - LEZIONE 031

Note Title 27/10/2016

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Simmetria

$$\cosh(-x) = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R} \leadsto \text{PARI}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad \forall x \in \mathbb{R} \leadsto \text{DISPARI}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \quad '' \leadsto \text{DISPARI}$$

Derivate

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$ (segno diverso rispetto alle classiche)

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Sviluppi di Taylor (centro in $x=0$)

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$ (come $\cos x$, solo con tutti +)

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Oss $$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Relazione fondamentale

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot 2 = 2 \cosh x \sinh x$$

Indagare formule analoghe per $\cosh(2x)$

Oss. $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

Monotonia $\sinh x$ è strettamente crescente (quindi non periodica)

$$\sinh x = \underbrace{\frac{1}{2} e^x}_{\text{strett. cresc.}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} e^{-x}\right)}_{\text{strett. cresc.}} = \text{somma di 2 funz. strett. cresc.}$$

$\cosh x$ è strett. cresc. per $x \geq 0$.

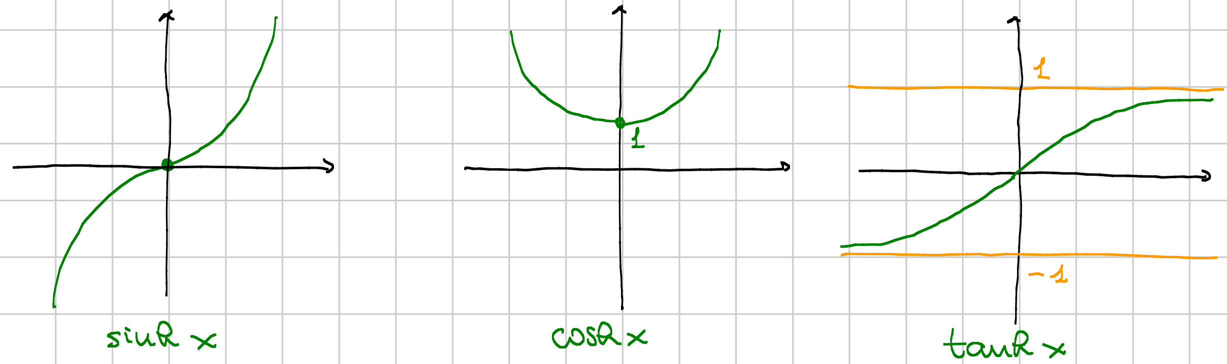
Dim. Dati $y > x \geq 0$ devo verificare che $\cosh y > \cosh x$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{\cancel{2}} > \frac{e^x + e^{-x}}{\cancel{2}} \qquad \text{Pongo } e^y = b \text{ e } e^x = a \qquad (b > a \geq 1)$$

$$b + \frac{1}{b} > a + \frac{1}{a} \iff \frac{b^2+1}{b} > \frac{a^2+1}{a} \iff ab^2 + a > a^2 b + b$$

$$\iff ab(b-a) + (a-b) > 0 \iff \underbrace{(b-a)}_{>0} \underbrace{(ab-1)}_{>0 \text{ perché } a \geq 1 \text{ e } b > 1} > 0$$

Grafici : $\quad \sinh 0 = 0 \quad \cosh 0 = 1$



Esercizio Verificare "precorsisticamente" che $\tanh x$ è crescente.
(Con le derivate è evidente)

— o — o —

FUNZIONI INVERSE

$f(x) = \sinh x$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è bigettiva, quindi ammette inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta

$$g(x) = \text{arcsinh}\, x \qquad (\text{o settsinh}\, x) \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

$f(x) = \cosh x$, vista come $f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ è bigettiva, quindi ha inversa $g: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ detta

$$g(x) = \text{arccosh}\, x \qquad (\text{o settcosh}\, x) \qquad \boxed{\forall x \geq 1}$$

Idem per $\text{arctanh}\, x$ definita $(-1, 1) \to \mathbb{R}$

Oss. Lo sviluppo di Taylor di $\text{arctanh}\, x$ è

$$\text{arctanh}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Formula per arcsinh (per esercizio fare arccosh)

Devo risolvere $\sinh x = y$, cioè trovare x in funzione di y

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$; $e^x - e^{-x} = 2y$; Pongo $a = e^x$

$a - \frac{1}{a} = 2y$; $a^2 - 1 = 2ya$; $a^2 - 2ya - 1 = 0$

$\rightsquigarrow$ Trovo $a = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Di queste 2 radici, solo quella con il segno + è positiva

Quindi $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ $\rightsquigarrow$ $x = \log(y + \sqrt{y^2+1}) = \operatorname{arcsinh} y$

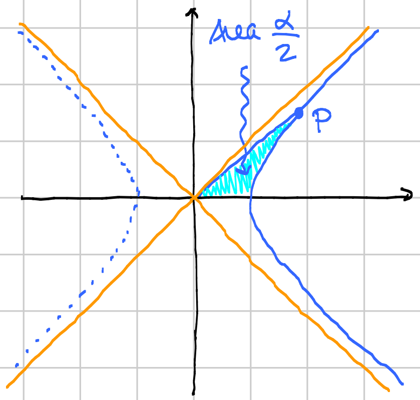
Conclusione: $\boxed{\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Nota bene: l'arg. del log è sempre > 0, anche se $x < 0$

— o — o —

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Parto dall'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ (ramo dx)



Fatto misterioso: per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un punto P sull'iperbole tale che l'area del settore sia $\frac{\alpha}{2}$
(Area negativa = girare dall'altra parte)
Il punto P è unico e

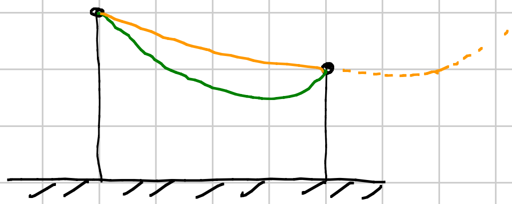
$$P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$

La relazione fondamentale dice che P sta sull'iperbole

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

INTERPRETAZIONE MECCANICA

Un filo inestensibile sospeso tra 2 pali (anche di altezza diversa) assume la forma di un cosh



— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 032

Note Title 27/10/2016

Def (Ordine di infinitesimo e parte principale)

Sia $r>0$ e sia $f: (-r,r) \to \mathbb{R}$ una funzione.
Se esistono un numero reale $a>0$ ed una costante $c \neq 0$ t.c.

$$f(x) \sim c x^a \quad \text{per } x \to 0$$

allora si dice che $f(x)$ è infinitesima di $\boxed{\text{ordine}}$ a e che $c x^a$ è la sua $\boxed{\text{parte principale}}$ (per $x \to 0$)

Esempi $\sin x \sim x$ ordine 1, parte principale x

$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ ordine 2, parte principale $-\frac{1}{2}x^2$

$\sinh x - x = \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + \ldots - \cancel{x} = \boxed{\frac{1}{6}x^3} + o(x^3)$

parte principale

$x \log x \to 0$, ma non ha un ordine secondo la def.

Oss. Si usa lo stesso linguaggio anche per le successioni, sostituendo x con $\frac{1}{n}$

Esempi $\sin \frac{1}{n} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^1$ ordine 1, parte princ. $= \frac{1}{n}$

$$\frac{n+3}{n^5+2} \sim \frac{1}{n^4} \quad \text{ordine } 4$$

Verifica rigorosa: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{n+3}{n^5+2}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+3)\,n^4}{n^5+2} = 1$

$$\frac{n^2+7n+5}{5n^3-6n+9} \sim \frac{1}{5n} \quad \text{ordine 1, parte principale } \frac{1}{5n}$$

Def. (Ordine di ∞ e parte principale)

Se $f(x) \sim cx^a$ per $x \to +\infty$ (con $a > 0$ e $c \neq 0$), allora si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine a e cx^a è la parte princip.

Esempi $\frac{x^5+3}{3x^2+1} \sim \boxed{\frac{x^3}{3}}$ per $x \to +\infty$ $\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^5+3}{3x^2+1}}{\frac{x^3}{3}} = 1 \right]$

parte principale

$\frac{x^5+\sin x}{3x^2+7} \sim \frac{1}{7}x$ per $x \to 0$

Rigoroso: $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^5+\sin x}{3x^2+7}}{\frac{x}{7}} = \lim_{x \to 0} \frac{7x^5+7\sin x}{3x^3+7x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{7x+o(x)}{7x+o(x)} = 1$

Esempio 1 $a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sinh \frac{1}{n^2}$

$a_n \to 0$. Che ordine ha?

Pongo $\frac{1}{n} = x$: $x^2 \sin x - x \sinh x^2 =$

$= x^2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) - x\left(x^2 + o(x^5)\right)$

$= \cancel{x^3} - \frac{1}{6}x^5 + o(x^6) - \cancel{x^3} - o(x^6)$

$= \boxed{-\frac{1}{6}x^5} + o(x^6)$

parte principale (ordine 5)

Esempio 1bis Calcolare $\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n^\alpha$ al variare di α

- per $\alpha > 5$ $\lim = -\infty$
- per $\alpha < 5$ $\lim = 0$
- per $\alpha = 5$ $\lim = -\frac{1}{6}$

$$a_n \cdot n^\alpha = \frac{a_n}{\frac{1}{n^5}} \cdot \frac{1}{n^5} \cdot n^\alpha = \boxed{\frac{a_n}{\frac{1}{n^5}}} \cdot n^{\alpha-5}$$

$\downarrow$ per l'esempio 1

$-\frac{1}{6}$

Esempio 2 $\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos n - 1}{n^2} = -\frac{1}{2}$

NO!!! Quello vale per $x \to 0$

Non posso nemmeno usare Taylor $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$

In realtà

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos n - 1}{n^2} = 0 \qquad -\frac{70}{n^2} \le \text{frazione} \le \frac{70}{n^2}$$

Esempio 3 $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{n^\alpha}$

Brutal mode: $e^{n^\alpha \log\left(1-\frac{5}{n}\right)} \sim e^{n^\alpha\left(-\frac{5}{n}\right)} \sim e^{\boxed{-5n^{\alpha-1}}}$

- se $\alpha = 1$ $\lim = e^{-5}$
- se $\alpha > 1$ $\lim = e^{-\infty} = 0$
- se $\alpha < 1$ $\lim = e^0 = 1$

Rigoroso: $n^\alpha \log\left(1 - \frac{5}{n}\right) = n^\alpha \boxed{\frac{\log\left(1-\frac{5}{n}\right)}{-\frac{5}{n}}} \left(-\frac{5}{n}\right)$

$\downarrow$

1

Esempio 4 $\lim_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] x$

Cambio variabile $\frac{1}{x} = y$: $\lim_{y \to 0^+} \frac{(1+y)^{\frac{1}{y}} - e}{y}$

$$= \frac{e^{\frac{1}{y}\log(1+y)} - e}{y} = \frac{e^{\frac{1}{y}\left(y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\right)} - e}{y}$$

$$= \frac{e^{1-\frac{1}{2}y+o(y)} - e}{y} = e\,\frac{e^{-\frac{1}{2}y+o(y)} - 1}{y} \longrightarrow -\frac{e}{2}$$

<u>Esempio 5</u> Sviluppo di Taylor di $\tan x$ (centro $x=0$, $n=6$)

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Derivare 6 volte ☹

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1}$

Come sviluppo

$$\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{t}\Big)^{-1} = 1 + \overbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}^{-t} + \overbrace{\frac{x^4}{4}}^{t^2} + o(x^5)$$

$(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots$

Moltiplicando viene

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ $\tan x = x + a x^3 + b x^5 + o(x^6)$

So che $\tan(\arctan x) = x$, quindi uso funz. composta

$$\cancel{x} = \arctan x + a(\arctan x)^3 + b(\arctan x)^5 + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a\left(x^3 - x^5\right) + b x^5 + o(x^6)$$

triplo prodotto quadrato del 1°. 2°

$$= \cancel{x} + \Big(\underbrace{-\frac{1}{3} + a}_{=0}\Big)x^3 + \Big(\underbrace{\frac{1}{5} - a + b}_{=0}\Big)x^5 + o(x^6) \qquad a = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Quindi $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

<u>Esempio</u> $\frac{3n+1}{n^2+7}$ "Sviluppo in potenze di $\frac{1}{n}$"

$$\frac{3n+1}{n^2+7} \sim \frac{3}{n}$$

$$\frac{3n+1}{n^2+7} = \frac{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{7}{n^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{7}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{3n}-\frac{7}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{21}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 033

Note Title 02/11/2016

SERIE NUMERICHE Sia a_n una successione

Brutalmente: la serie di a_n, che si indica con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

indica la somma degli infiniti termini della successione.

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

SOMME PARZIALI

$$\boxed{S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k} \qquad S_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

Achtung! S_n è una sommatoria (somma di un numero finito di termini), ben diversa da una serie.

Def. Si dice serie, e si indica con il simbolo introdotto all'inizio, il

$$\lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Essendo un limite ha le solite 4 possibilità:

① $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ⇝ la serie converge ad ℓ.

② $S_n \to +\infty$ ⇝ " " diverge a $+\infty$

③ $S_n \to -\infty$ ⇝ " " " " $-\infty$

④ S_n non ha limite ⇝ la serie è indeterminata

— o — o —

Procedura: a_n ⇝ costruisco S_n ⇝ comportamento serie.

Esempio banale 1 $\quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ $S_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$

Esempio banale 2 $\quad a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_n := n+1$ (ci sono $n+1$ termini) $\rightsquigarrow$ $S_n \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

Piccola variante $\quad \sum_{n=15}^{+\infty} a_n$ si definisce analogamente, con

$$S_m := a_{15} + a_{16} + \dots + a_m = \underbrace{\sum_{k=15}^{m} a_k}_{\text{sommatoria finita}} \qquad \forall m \geq 15$$

Oss. fondamentale $\quad$ Siano a_n e b_n due succ. tali che

$$a_n = b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora le 2 serie corrispondenti hanno lo stesso tipo di comp. ①, ②, ③, ④. Nel caso ① le somme finali possono essere diversi.

$\boxed{\text{Idea della dim.}}$ Le somme parziali delle due serie definitivamente differiscono per una costante.

Conseguenza $\quad$ Se in una serie cambio un numero finito di termini, allora la tipologia ①, ②, ③, ④ non cambia.

— o — o —

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 (MENGOLI)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots$$
$$= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$$

Esperimenti: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 1-\frac{1}{3}$
$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{3}{4} = 1-\frac{1}{4}$$

Congettura: $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Facile induzione ... passo base banale ... passo induttivo

$$\underset{\uparrow\ \text{rel. fond.}}{S_{n+1} = S_n + a_{n+1}} = \underbrace{1-\frac{1}{n+1}}_{\text{Hp ind.}} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{= a_{n+1}} = \dots = 1 - \frac{1}{(n+2)}$$

$S_n \to 1$, quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n+1}{n} = +\infty$

$S_1 = \log\frac{2}{1}$; $S_2 = \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} = \log 3$

Congettura: $S_n = \log(n+1) \to +\infty \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

— o — o —

Back to esempio 1 Osservo che $\displaystyle\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}}_{a_2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}}_{a_3} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \dots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Back to esempio 2 Osservo che $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$

$$S_n = \underbrace{\cancel{\log 2} - \log 1}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}}_{a_2} + \underbrace{\log 4 - \cancel{\log 3}}_{a_3} + \dots + \underbrace{\log(n+1) - \log n}_{a_n}$$

Questo è l'effetto telescopico ...

— o — o —

SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$$

per convenzione

A suo tempo per induzione abbiamo dim.:

$$\boxed{S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall a \neq 1$ (se $a=1$ è banale che diverge a $+\infty$)

Qual è il limite di S_n? Dipende da a:

- per $a>1$, allora $S_n \to \frac{+\infty}{\text{roba} > 0} = +\infty \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$
- per $a \in (-1,1)$, allora $|a^{n+1}| = |a|^{n+1} \to 0$, quindi $a^{n+1} \to 0$ quindi
$$S_n \to \frac{0-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$$
- per $a=-1$: al denom. c'è -2, al numeratore si alternano 0 e -2, quindi
$$S_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0$$ (sto sommando $1-1+1-1+1-1$
quindi la serie è indeterminata
- per $a<-1$, allora S_n non ha limite perché

$$S_{2m} = \frac{a^{2m+1}-1}{a-1} \rightarrow \frac{-\infty}{\text{roba} < 0} = +\infty$$

$$S_{2m+1} = \frac{a^{2m+2}-1}{a-1} \rightarrow \frac{+\infty}{\text{roba} < 0} = -\infty$$

quindi ancora una volta è indet.

Conclusione

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \rightarrow \frac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1,1) \\ \searrow \text{indeter.} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}}$$

— o — o —

TEOREMI ALGEBRICI Siano a_n e b_n due successioni.

① $$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

tranne nei casi di $+\infty - \infty$ o quando una delle due a dx è indeterminata

② Se $\lambda \neq 0$, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Achtung! $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in generale

Non è vero nemmeno se a_n e b_n sono definitiv. nulli

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

Vengono fuori i prod. misti.

$\boxed{\text{Dim di } ①}$ Pongo $c_n := a_n + b_n$

Chiamo S_n^a, S_n^b, S_n^c le somme parziali delle 3 serie. Allora

$$S_n^c = S_n^a + S_n^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Andrebbe dim per induzione, ma brutalmente è una banalità

$$S_n^c = c_0 + c_1 + \dots + c_n = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) + \dots + (a_n+b_n)$$

$$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$$= S_n^a + S_n^b$$

A questo punto è il teo. sulla somma dei limiti

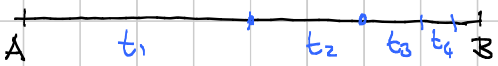
— o — o —

Dim. di ② : esercizio

— o — o —

Oss finale : Zenone e la sua freccia

La freccia deve fare infinite cose, quindi ci mette tempo infinito.



No: ci mette tempo $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, ma la somma può convergere

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)}_{\text{geometrica con } a = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 034

Note Title 02/11/2016

Studio della convergenza delle serie

Obiettivo: data una succ. a_n, stabilire se la relativa serie è di tipo ①, ②, ③, ④ senza avere un'espressione esplicita per S_n. Non ci interessa nel caso ① il valore esplicito della somma.

Strumenti

- Condizione necessaria
- Criteri di convergenza:

$\boxed{a_n \geq 0 \text{ sempre}}$

→ crit. radice
→ crit. rapporto
→ crit. confronto
→ crit. confr. asintotico
  * caso standard
  * casi limite

→ confronto serie - integrali
→ crit. di condensazione di CAUCHY

$\boxed{a_n \text{ a segno variabile}}$

→ crit. LEIBNITZ
→ crit. assoluta convergenza

→ crit. DIRICHLET

— o — o —

CONDIZIONE NECESSARIA

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (tipo ①), allora $a_n \to 0$

Achtung! Non vale il viceversa, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n} = +\infty, \quad \text{ma} \quad \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$$

Utilizzo operativo della cond. nec.: devo studiare $\sum a_n$, provo a fare il lim. di a_n.

→ Se $a_n \to 0$, allora la serie può convergere, ma non è detta, quindi BOH

→ Se $a_n \not\to 0$ (cioè tende ad altro o non ha limite), allora posso escludere il comp. ①, ma restano gli altri tre.

Dim. Osservo che $a_n = S_n - S_{n-1}$ (fondamentale)

Se la serie converge, allora $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$, quindi

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0.$$

— o — o —

Serie a termini $a_n \geq 0$

↑ almeno definitivamente

Oss. Se sono $a_n \leq 0$, basta mettere il − davanti alla serie.

Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora S_n è debolm. crescente, quindi i comportamenti possibili sono solo 2

→ convergere

→ divergere a $+\infty$.

Esempio $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3n+5}{6n^2+7}}_{a_n}$

Trovare una formula esplicita per S_n è impraticabile. Tuttavia osservo che $a_n \geq 0$ sempre e $a_n \to \frac{1}{6}$, quindi no cond. nec., quindi non può convergere, quindi può solo divergere a $+\infty$.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio del confronto}}$ Siano a_n e b_n due succ. tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{almeno definitiv.}$$

Allora valgono le seguenti implicazioni:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

Ogni altra implicazione è abusiva.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Siano S_n^a e S_n^b le due somme parziali

$$S_n^a := a_0 + a_1 + \ldots + a_n \qquad\qquad S_n^b := b_0 + b_1 + \ldots + b_n.$$

Possiamo anche supporre che la relazione dell'ipotesi valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora con una facile induzione segue che

$$S_n^a \leq S_n^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $\sum a_n = +\infty \underset{\text{def}}{\implies} S_n^a \to +\infty \underset{\text{confronto tra limiti}}{\implies} S_n^b \to +\infty \underset{\text{def.}}{\implies} \sum b_n = +\infty$

- $\sum b_n$ conv. $\implies S_n^b \to l \in \mathbb{R} \implies S_n^a$ non può tendere a $+\infty$, ma noi già sappiamo che S_n^a ha limite in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, quindi l'unica possibilità è che $S_n^a \to \ell_2 \in \mathbb{R}$ con $\ell_2 \le \ell$, quindi $\sum a_n$ converge.

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio della radice}}$ Sia $a_n \ge 0$ definitiv.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

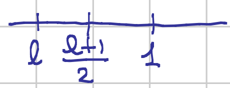
Allora

- $\ell > 1$, allora $\sum a_n = +\infty$ e anzi non verifica la cond. nec.
- $\ell < 1$, allora $\sum a_n$ converge
- $\ell = 1$, allora BOH.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\boxed{\ell > 1}$ In questo caso $a_n \to +\infty$, quindi niente cond. nec., quindi addio convergenza

$\boxed{\ell < 1}$ Ora $a_n \to 0$, quindi ok cond. nec., ma questo NON BASTA!!!

Supponiamo $\ell < 1$. Allora



$$\sqrt[n]{a_n} \le \frac{\ell+1}{2} \quad \text{definitiv.}$$

quindi $$a_n \le \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

Ora $\sum b_n$ è una serie geometrica con $a = \frac{\ell+1}{2} \in (0,1)$, quindi $\sum b_n$ converge, quindi per confronto anche $\sum a_n$ converge

— o — o —

$\boxed{\text{Criterio del rapporto}}$ Supponiamo $a_n > 0$ definitiv.

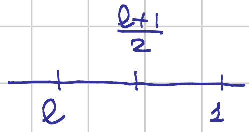
Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora... come nel criterio della radice.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty \Rightarrow$ no cond. nec.

Se $\ell < 1$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora... [vedi dim. crit. rapp. per succ.]

$$a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \qquad \text{(facile induzione)}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{b_n} \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}}_{\lambda \text{ fisso}}$$

Come prima $\sum b_n$ converge perché geometrica con $a \in (0,1)$

$\Rightarrow \sum \lambda b_n$ converge (prod. per una costante)

$\Rightarrow \sum a_n$ converge (confronto a 2)

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}}_{a_n}$ $\qquad a_n \geq 0$ sempre

Criterio della radice : $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{2^n+4^n}{3^n+5^n}} = \ldots = \dfrac{4}{5}$

$\frac{4}{5} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}$ $a_n \geq 0$

Criterio radice: $\sqrt[n]{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ ... BOH ☹

Però $a_n \to \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow$ no cond. nec. $\Rightarrow$ no conv. $\Rightarrow$ div. a $+\infty$

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ $a_n \geq 0$

Rapporto : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{n!}{3^n} = \dfrac{3}{n+1} \to 0$

rapporto $\to 0$ $\Rightarrow$ la serie converge

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{3^n}\right)$

Oss. È a termini definitivamente positivi perché $\frac{n^2}{3^n} \to 0^+$ quindi defin. sta in $(0,\pi)$ dove $\sin > 0$.

$$0 \leq \underbrace{\sin\left(\frac{n^2}{3^n}\right)}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{b_n}$$

Ora $\sum b_n$ converge (radice o rapporto tendono ad $\frac{1}{3}$)

quindi $\sum a_n$ converge per confronto.

ANALISI 1 — LEZIONE 035

Note Title 03/11/2016

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano a_n e b_n due succ. con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitiv.

Supponiamo che

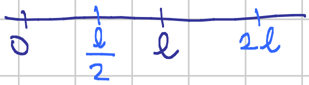
$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \ell \in (0, +\infty) \qquad (\neq 0, \neq +\infty) \text{ (CASO STANDARD)}$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ converge (magari ad un altro valore)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, allora definitiv.



$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$$

Posso molt. per b_n: $\quad \frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2\ell\, b_n$

Conclusione:

- se $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{\ell}{2} b_n = +\infty \underset{\text{disug. sx}}{\Rightarrow} \sum a_n = +\infty$
- se $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum 2\ell\, b_n$ conv. $\underset{\text{disug dx}}{\Rightarrow} \sum a_n$ conv.

— o — o —

<u>Utilizzo operativo</u>: $\rightarrow$ devo studiare $\sum a_n$

$\rightarrow$ cerco tra le serie che conosco una b_n, magari più semplice, tale che $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0, \neq +\infty$

$\rightarrow$ a quel punto ho finito ☺

$\boxed{\text{CASI LIMITE}}$ Stesse ipotesi su $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$.

(1) Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

$\left[\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \right.$ definitiv. $\to a_n \leq b_n$ defin. $]$

Allora $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow$ BOH

(2) Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$

$\left[\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \right.$ defin. $\Rightarrow a_n \geq b_n$ defin. $]$

Allora $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow$ BOH

— o — o —

Serie note: → geometriche
→ telescopiche (poche)
→ armoniche generalizzate

$\boxed{\text{ARMONICHE GENERALIZZATE}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

TABELLINA

← la somma non è nota se non in casi MOLTO SPECIALI

Parente stretto

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Studio armoniche gen.: ① Disuguaglianze ad hoc
② Condensazione di Cauchy
③ Confronto serie – integrali

$\boxed{\text{Caso } a=1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} = +\infty$ per confronto asintotico con $\displaystyle\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{b_n}}_{\text{diverge telescopica}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \text{solito} = 1 \quad \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ stesso comportamento.

$\boxed{\text{Caso } a<1}$ $\displaystyle\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

$\displaystyle\sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n^a} = +\infty$ confronto normale

$\boxed{\text{Caso } a>1}$ Considero le somme parziali $S_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a}$

Devo dim. che sono limitate superiormente. Dico che

$$\boxed{S_n \leq 1 + \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{n^{a-1}}\right)} \underset{\text{uso che } a>1}{\leq} 1 + \frac{1}{a-1}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Induzione ... passo base è banale ...
... passo induttivo

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^a} \underset{\text{Hp ind.}}{\leq} 1 + \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{n^{a-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^a}$$

$$\underset{\text{spero ...}}{\leq} 1 + \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{a-1}}\right)$$

Controllo l'ultima disug.

$$\frac{1}{a-1}\left(\cancel{1}-\frac{1}{n^{a-1}}\right)+\frac{1}{(n+1)^a}\overset{?}{\le}\frac{1}{a-1}\left(\cancel{1}-\frac{1}{(n+1)^{a-1}}\right) \iff$$

$$-\frac{1}{n^{a-1}}+\frac{a-1}{(n+1)^a}\overset{?}{\le}-\frac{1}{(n+1)^{a-1}} \iff \text{Molt. per } (n+1)^{a-1}$$

$$-\frac{(n+1)^{a-1}}{n^{a-1}}+\frac{a-1}{n+1}\overset{?}{\le}-1 \iff 1+\frac{a-1}{n+1}\overset{?}{\le}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1}$$

L'ultima è vera perché segue da Bernoulli

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1}\ge 1+\frac{a-1}{n}\ge 1+\frac{a-1}{n+1}$$ ☺

— o — o —

CONDENSAZIONE DI CAUCHY Sia a_n una succ.

Supponiamo che

(i) $a_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \le a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (debolm. decresc.)

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{si comporta come} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

↑ indice

Applicazione $a_n = \frac{1}{n^a}$. Le ipotesi (i) e (ii) sono verificate (purché $a>0$, ma altrimenti è banale)

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2^a}\right)^n$

L'ultima serie è una geometrica con ragione $\frac{2}{2^a}$. Quindi

- per $\frac{2}{2^a}\ge 1$ diverge (quindi $a \le 1$)
- per $\frac{2}{2^a}< 1$ converge (quindi $a > 1$)

Esercizio Provare con la potenza dell'armonica.

Dim. condensazione

Brutta copia:

$$\begin{array}{c|c|cc|cccc|ccc|l}
a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_8 & \ldots & a_8 & \leftarrow \text{più grandi} \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \ldots & a_{16} & \\
a_1 & a_2 & a_4 & a_4 & a_8 & a_8 & a_8 & a_8 & a_{16} & \ldots & a_{16} & \leftarrow \text{più piccole}
\end{array}$$

Sembra ragionevole che

$$a_1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k}$$

$$\shortparallel$$

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$$

Formalmente dimostro le disug. per induzione (farlo!).

Conclusione

- se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge, allora guardo la disug. di dx e ottengo che S_{2^k} (somme parziali della serie iniziale) sono limitate superiormente se l'indice è una potenza di 2, ma allora essendo crescenti sono limitate sempre $\Rightarrow \sum a_n$ conv.
- se $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = +\infty$, allora guardo la disug. di sx e concludo come sopra

—o—o—

Oss. Posso fare la condensazione con le potenze di 7.

Oss. Nel caso $a=2$ abbiamo $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$

$$\leq 1 + \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}}_{1 - \frac{1}{n} \ \text{(telescopica)}}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 036

Note Title 03/11/2016

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+7n+5}{n^3+n^2+10}}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ definitivamente e $a_n \to 0$, quindi può convergere

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ ⇝ armonica con $a=1$ ⇝ diverge

Rigoroso: confronto asint. con $b_n = \frac{1}{n}$.

$\frac{a_n}{b_n} = \ldots \to 1 \quad \neq 0, \neq +\infty \Rightarrow \sum a_n$ si comp. come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge

Oss. Un confronto secco del tipo $a_n \geq \frac{1}{n}$ non è evidente

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{n^2+7n+5}{n^a+n^2+10}$

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$ e quindi converge $\Leftrightarrow a-2>1 \Leftrightarrow a>3$

per $a \geq 2$

Rigoroso: per $a \geq 2$ faccio il C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{a-2}}$

per $a < 2$ ho che $a_n \to 1$, quindi manca la cond. nec. ⇒ diverge

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{n^a+7n+5}{n^7+n^2+10}$ converge $\Leftrightarrow a<6$

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^a}{n^7} = \frac{1}{n^{7-a}}$ che converge per $7-a>1$ quindi $a<6$

Rigoroso: solito confronto asintotico

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n+8^n}{2^n+a^n}$ converge $\Longleftrightarrow$ $a>8$ (limitandosi agli $a>0$)

Rigoroso:

- per $a<8$ si ha $a_n \to +\infty \Rightarrow$ no cond. nec. $\Rightarrow$ diverge
- per $a=8$ " " $a_n \to 1 \Rightarrow$ come sopra
- per $a>8$ uso criterio radice

$$\sqrt[n]{\frac{5^n+8^n}{2^n+a^n}} = \frac{8}{a}\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{a}\right)^n+1}}}}_{\to 1} \to \frac{8}{a}<1 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^4\log n + n^3+1}$

Brutal mode: $a_n \sim \dfrac{n^2}{n^4\log n} = \dfrac{1}{n^2\log n}$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \dfrac{1}{n^2\log n}$

Facile: $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$ quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \dfrac{1}{n^2\log n}$ che resta da studiare

Provo un confronto asintotico con $c_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{\cancel{n^2}\log n}\cdot\cancel{n^2} \to 0 \quad \text{(caso limite)}$$

$\dfrac{b_n}{c_n} \leq 1$ definitiv. $\Rightarrow$ $b_n \leq c_n$ definit.

$\sum c_n < +\infty \Rightarrow \sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ conv.

—o—o—

In alternativa si poteva osservare che da subito

$$\frac{1}{n^2\log n} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{definitiv. (appena } \log n \geq 1)$$

e usare confronto secco.

Esempio 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

Tentativo 1: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$ ... $\frac{a_n}{b_n} = \log n \to +\infty$

$\leadsto a_n \geq b_n$ definitiv. $\Rightarrow$ BOH ☹

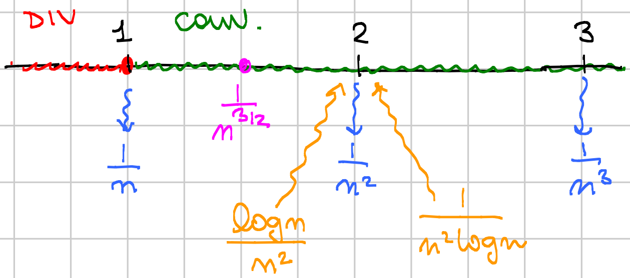
Tentativo 2: C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$ ... $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n} \to 0$

$\leadsto a_n \leq b_n$ definit. $\Rightarrow$ BOH ☹

Tentativo buono: C.A. con $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ... $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$

$\leadsto a_n \leq b_n$ definit. Poiché $\sum b_n < +\infty$ (armonica con $a = \frac{3}{2} > 1$)
anche $\sum a_n < +\infty$.

Interpretazione brutale



Oss. Potevo confrontare con $\frac{1}{n^a}$ con ogni $a \in (1,2)$

Esempio 7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ $\qquad a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$

Punto sulla convergenza. Tentativo 1: $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{3^n}$ MAGARI!
è vero il contrario

Tentativo 2: $b_n = \frac{1}{n^{2016}}$ e faccio C.A.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \cdot n^{2016} = e^{2016 \log n - \sqrt{n} \log 3} \to e^{-\infty} = 0$$

$\leadsto a_n \leq b_n$ definitiv. $\Rightarrow$ OK

Tentativo 3 Criterio radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \to 1 \implies \text{BOH}$$ ☹

Esempio 8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^a \sin\left(\frac{n+33}{n^5+4}\right)$

Intanto $a_n > 0$ definitivamente perché argom. di $\sin \to 0^+$

Brutal mode: $a_n \sim n^a \sin\frac{1}{n^4} \sim n^a \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^{4-a}}$

quindi conv. $\iff 4-a>1$
$\iff a<3$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{4-a}}$

Esempio 9 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \sinh\frac{1}{n}\right)$ $\quad a_n \to 0$

Il segno sembra un problema

Brutal mode: $a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}}$ TROPPO BRUTALE

$$a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}$$

Suggerisce anche che $a_n < 0$ definitiv.

Rigoroso C.A. con $b_n = \frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \sinh\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sinh x}{x^3} \underset{\text{Taylor}}{=} -\frac{1}{3}$$

Quindi $\frac{a_n}{b_n} < 0$ definitiv. $\implies a_n < 0$ definitiv.

$\implies$ segni costanti definitiv. $\implies$ per C.A. la serie converge.

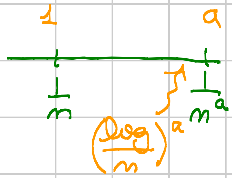
Esempio 10

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^a \qquad a>0 \text{ reale}$$

$a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$

Brutal mode: $a_n = \left(e^{\frac{1}{n}\log n} - 1\right)^a$

$$\sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^a = \frac{\log^a n}{n^a}$$



Quindi $a>1$ converge

$a \leq 1$ diverge

Rigoroso: $a>1 \rightsquigarrow$ C.A. con $\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$

$a \leq 1 \rightsquigarrow$ C.A. con $\frac{1}{n}$ (il log sopra aiuta a divergere)

ANALISI 1 — LEZIONE 037

Note Title 07/11/2016

$\boxed{\text{CRITERIO DI LEIBNITZ}}$ (Serie a segno alterno).

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (la serie è a segno alterno)

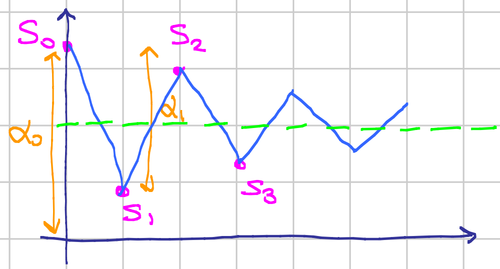
(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (a_n è deb. decr.)

(iii) $a_n \to 0$.

Allora la serie converge.

Achtung! Se (i) o (ii) non sono verificate, allora BOH.
Se (iii) non è verificata (cioè $a_n \to \ell > 0$), allora manca la cond. nec., quindi di sicuro la serie non converge (e quindi restano aperte 3 possibilità).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Disegniamo le somme parziali.



Idea:

$S_{2m+2} \leq S_{2m}$ (sui pari ↓)

$S_{2m+3} \geq S_{2m+1}$ (sui dispari ↑)

Inoltre

$$S_1 \leq S_n \leq S_0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se dimostro queste disuguaglianze, allora per il teo. delle succ. monotone

$$S_{2m} \to \ell \qquad\qquad S_{2m+1} \to m$$

Non resta che dimostrare che $\ell = m$.

D'altra parte

$$\underset{\downarrow \atop m}{S_{2m+1}} - \underset{\downarrow \atop -\ell}{S_{2m}} = a_{2m+1} = \boxed{-\alpha_{2m+1}} \quad \underset{=}{} \quad \underset{\downarrow \atop 0}{} \ \text{(iii)}$$

Non resta che dim. le disuguaglianze.

$$S_{2m+2} = S_{2m} \underbrace{\boxed{-\alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2}}}_{\leq 0} \leq S_{2m}$$

$$S_{2m+3} = S_{2m+1} \underbrace{\boxed{+\alpha_{2m+2} - \alpha_{2m+3}}}_{\geq 0} \geq S_{2m+1}$$

Resta da dim. che $\quad S_1 \leq S_n \leq S_0$

Dimostro quella di sx (l'altra è uguale). Ci sono due casi

- se n è dispari è ovvia (perché sui dispari è $\nearrow$)
- se n è pari, diciamo $n = 2k$, allora

$$S_{2k} \geq S_{2k+1} \geq S_1$$

$S_{2k+1} = S_{2k} - \alpha_{2k+1}$ perché è dispari

— o — o —

<u>Oss.</u> Tutte le S_{2k} sono una approx dall'alto della somma della serie, mentre le S_{2k+1} lo sono dal basso.

— o — o —

ASSOLUTA CONVERGENZA

<u>Def.</u> Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice **ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE** se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{converge}$$

Criterio Le serie assolutamente conv. sono convergenti, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

non vale il viceversa

Operativamente: invece di studiare $\sum a_n$, studio $\sum |a_n|$ per cui ho tanti criteri a dispos.

- Se $\sum |a_n| < +\infty$, allora $\sum a_n$ conv.
- Se $\sum |a_n| = +\infty$, allora BOH.

Due dimostrazioni: ① via ordinamento
② via completezza dei reali (vedi 2° parte del corso).

Lemma (carabinieri per serie) Siano a_n, b_n, c_n tre succ. t.c.

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(basta defin.)}$$

Supponiamo che $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano. (anche a somme diverse)
Allora
$\sum b_n$ converge.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Osserviamo che $\sum (c_n - a_n)$ converge (diff. di 2 serie convergenti).
Osserviamo che

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n \quad \text{(dall' ipotesi)}$$

e quindi anche $\sum (b_n - a_n)$ converge (confronto tra serie a termini ≥ 0).
Ma allora

$$\sum b_n = \sum [a_n + (b_n - a_n)] = \sum a_n + \sum (b_n - a_n)$$

è la somma di 2 serie convergenti. ☺

— o — o —

Dim. criterio Basta osservare che

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

Se $\sum |a_n|$ converge, allora le laterali convergono, quindi converge la centrale. $\square$

— o — o —

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n\ge 1}^{\infty} \boxed{\frac{\cos n}{n^2}}$ Ora a_n ha segno variabile

$\frac{\cos n}{n^2} = a_n$

1° modo: $a_n \le \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ converge

NOOO!!!!! Il confronto secco lo posso usare solo se i termini sono ≥ 0.

2° modo (corretto): studio $\sum |a_n| = \sum \frac{|\cos n|}{n^2}$. Ora

$0 \le |a_n| \le \frac{1}{n^2}$; ora posso usare il confronto a 2

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \underset{\text{confr.}}{\Rightarrow} \sum |a_n| \text{ conv.} \underset{\text{assol. conv.}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ conv.}$$

— o — o —

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

Leibnitz classico con $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Devo fare 3 controlli

(i) $\alpha_n \ge 0 \rightsquigarrow$ banale

(ii) $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$, $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ banale

(iii) $\alpha_n \to 0$ ok.

Quindi la serie conv. per Leibnitz.

Oss. Questa serie non converge assol. Se metto $|a_n|$ viene $\sum \frac{1}{n}$, che diverge.

Analogamente, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$

- converge per ogni $a > 0$ per Leibnitz,
- converge assolutamente se e solo se $a > 1$.

Quindi nella fascia $a \in (0, 1]$ l'assol. conv. non è utilizzabile.

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^3 - 7n + 8}{n^5 + 5n^2 + 2016}}}_{a_n}$

Facciamo i controlli di Leibnitz:

(iii) $a_n \to 0$ ⇝ banale

(i) $a_n \geq 0$ ⇝ banale, almeno definitiv. (num $\to +\infty$, den $\to +\infty$, quindi defin. sono ≥ 0)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ ⇝ uhm ...

(non pensare nemmeno cose del tipo: $a_n > 0$ sempre e $a_n \to 0$, quindi defin. è decrescente ⇝ Penelope)

Volendo evitare il punto (ii), si può usare direttamente l'assol. convergenza.

Pongo $a_n = (-1)^n a_n$ e osservo che

$\sum |a_n| = \sum a_n$ converge per confr. asint. con $\frac{1}{n^2}$, quindi

↑ almeno def.

anche $\sum a_n$ converge.

— o — o —

Se ci fosse stato n^4 invece di n^5 erano guai.

ANALISI 1 – LEZIONE 038

Note Title 07/11/2016

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=82}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$

Leibnitz con $a_n = \dfrac{1}{\log(\log n)}$

(i) Ok, almeno defin. (iii) ok (ii) Ok $\Rightarrow$ converge

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^3-7n+8}{n^4+5n^2+2016}}}_{a_n}$

È seccante mostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

Alternativa : $a_n \sim \frac{1}{n}$ ma non potendo fare il confronto asintotico $\boxed{\text{aggiungo e tolgo}}$

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \left[a_n - \frac{1}{n}\right]$$

$$(-1)^n \left[\frac{n^3-7n+8}{n^4+5n^2+2016} - \frac{1}{n}\right]$$

$$(-1)^n \boxed{\frac{\cancel{n^4}-7n^2+8n-\cancel{n^4}-5n^2-2016}{n(n^4+5n^2+2016)}}$$

Conseguenza

$$\sum (-1)^n a_n = \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n \frac{1}{n}}}_{\text{conv. per Leibnitz}} + \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n \beta_n}}_{\text{conv. assolutamente per confr. asint. con } \frac{1}{n^3}}$$

Quindi la serie iniziale è somma di 2 serie convergenti.

— o — o —

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^2+1}{n^2+3n+2}}}_{\alpha_n}$

$\alpha_n \to 1 \Rightarrow$ niente (iii) di Leibnitz $\Rightarrow$ NON può convergere.
Sì, ma che fa?
Aggiungo e tolgo 1.

$$(-1)^n \alpha_n = (-1)^n + (-1)^n \left[\frac{n^2+1}{n^2+3n+2} - 1\right]$$
$$= (-1)^n + (-1)^n \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}-3n-2}{n^2+3n+2}$$
$$= (-1)^n - (-1)^n \frac{3n+1}{n^2+3n+2}$$

Quindi
$$\sum (-1)^n \alpha_n = \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n}}_{\text{indet. facile.}} - \sum (-1)^n \frac{3n+1}{n^2+3n+2}$$

Se la seconda convergesse, sapremmo che quella iniziale è indeterminata.
Per dimostrare che la 2ª è conv., si può fare come l'esempio 2.

— o — o —

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{(-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}}}_{a_n}$

Brutale: $a_n \sim (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, quindi conv. per Leibnitz

"Rigoroso": confronto asintotico con $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 1 \Rightarrow \text{stesso comp.}$$

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

NOOO!!!

Recorsista: $(-1)^n \dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$

quindi $\sum (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = \underbrace{\boxed{\sum (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}}}_{\text{conv. per Leibnitz}} + \underbrace{\boxed{\sum \dfrac{1}{n}}}_{\text{div. a } +\infty}$

Quindi la serie iniziale diverge a $+\infty$

Morale: quando le serie sono a segno variabile, non bisogna fidarsi del brutale e NON si può usare il confr. asintotico.

— o — o —

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Converge ad esempio per il rapporto. La somma è uguale ad e. Più in generale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Quella a sx è una serie di Taylor, cioè una serie in cui le somme parziali sono i polinomi di Taylor di una certa $f(x)$. Sotto opportune ipotesi, e per opportuni valori del parametro x, le serie di Taylor convergono proprio ad $f(x)$.

Dimostro l'esempio per valori $a \geq 0$, ed in particolare per $a = 1$.

Dimostro che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

$\quad\ \ \shortparallel$

$\quad\ e^a$

Dimostro che è $\boxed{\leq}$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{binomio}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\boxed{\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}}}_{\leq \frac{1}{k!}} 1^{n-k} a^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Quindi

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad \text{per ogni } n \geq 1$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$e^a \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Dimostro che è $\boxed{\geq}$. Fisso un qualunque $m \geq 0$. Uso di nuovo il binomio di Newton e osservo che per ogni $n \geq m$ vale

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^{m} a^k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

uso che $a \geq 0$ e $n \geq m$

Faccio il limite per $n \to +\infty$ a dx e sx:

$$e^a \geq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} a^k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \lim_{n \to +\infty} a^k \boxed{\binom{n}{k} \frac{1}{n^k}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!}$$

numero finito di addendi

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$$

Ho quindi dimostrato che

$$e^a \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ora faccio tendere $m \to +\infty$ e ottengo

$$e^a \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

— o — o —

Esempio (finale)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a}-\arctan\frac{1}{n}\right)}_{b_n}$$

Studiare il comportamento al variare di $a>0$.

- Se $a\in(0,1)$, allora la serie si comporta come $\sum\frac{1}{n^a}$, quindi diverge a $+\infty$
  (Dim: confronto asintotico con $c_n=\frac{1}{n^a}$)

- Se $a>1$, posso scrivere $\sum b_n = \underbrace{\sum\frac{1}{n^a}}_{\text{converge}} - \underbrace{\sum\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}_{+\infty}$ (C.A. con $\frac{1}{n}$)

  quindi compless. diverge a $-\infty$

- Se $a=1$, entrano in gioco i termini successivi

  $$b_n=\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\sim\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{3n^3}$$

  $\rightsquigarrow$ converge (rigoroso: confr. asint. con $c_n=\frac{1}{n^3}$)
  (e i termini sono defin. >0).

—o—o—

ANALISI 1 — LEZIONE 039

Note Title 09/11/2016

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

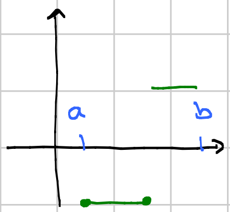
Supponiamo che

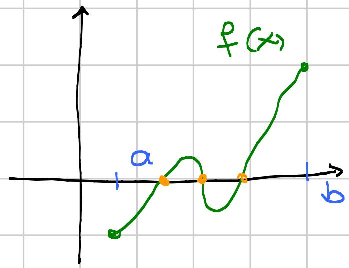
(i) f è continua

(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (valori di segno opposto agli estremi)

Allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

<u>Oss.</u> La continuità serve





È essenziale essere sui reali $f(x) = x^2 - 2$, $f(0) = -2$, $f(3) = 7$, ma in mezzo non si annulla in $\mathbb{Q}$.

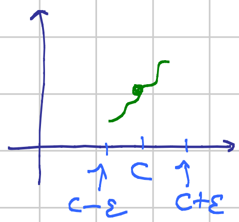
$\boxed{\text{Dim 1}}$ (inf/sup + assurdo) Supponiamo WLOG $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Definiamo

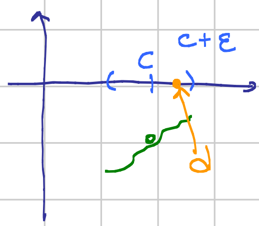
$$c := \inf \underbrace{\{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}}_{\text{non è } \emptyset \text{ perché contiene } b}$$

Dico che $f(c) = 0$. Supponiamo che così non sia.

- Se fosse $f(c) > 0$, allora per continuità esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $f(x) > 0$ per ogni $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Ma allora $f(x) > 0$ anche a sx di c, il che è contro la def. di inf.



- Se fosse $f(c) < 0$, allora come prima
$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$
D'altra parte, per caratt. di inf., per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $d < c+\varepsilon$ t.c. $f(d) \geq 0$. Questo è assurdo.



— o — o —

Oss. Potevo definire c in vari modi:

$$c := \inf\{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$$
$$c := \sup\{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$
$$c := \sup\{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$$

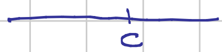
Esercizio utile: ① rifare la dim. con le altre def. di c

② trovare una $f(x)$ per cui le 4 def. di c producono 4 p.ti diversi.

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ (inf/sup + diretta) Come prima WLOG $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e

$$c := \inf\{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$$

Passo 1: osserviamo che $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a,c)$ ed in particolare



$$f(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [a,c]$$

Allora

$$f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x) \leq 0$$

Passo 2: uso un lemma utile

— o — o —

Lemma Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Sia $\ell = \inf A$. Supponiamo che $\ell \in \mathbb{R}$ (se $\ell = -\infty$ è analogo). Allora $\exists \{a_n\} \subseteq A$ t.c. $a_n \to \ell$

Dim. Uso la caratt. di inf. con $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Trovo $a_n \in A$ t.c.

$$\ell \leq a_n \leq \ell + \frac{1}{n}$$

Per i carabinieri segue che $a_n \to \ell$.

— o — o —

Tornando alla dim. principale, uso il lemma nell'insieme

$$A := \{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$$

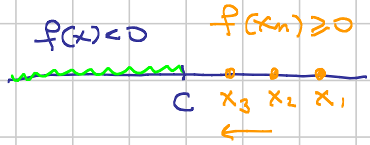
Per il lemma $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \to c = \inf A$. Ma allora

$$f(x_n) \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \geq 0.$$

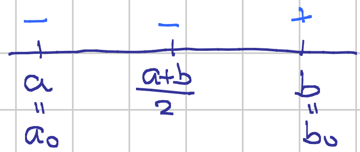
L'unica possibilità è che $f(c) = 0$.



— o — o —

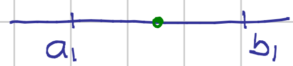
$\boxed{\text{Dim 3}}$ (Bisezione) Come sempre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Considero $\frac{a+b}{2}$.



- Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, allora abbiamo finito
- Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, allora pongo $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ e ho che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$
- Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, allora pongo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b_0$

In ogni caso ho ottenuto un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ tale che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$.



Ora ripeto il procedimento iterativamente.
Al k-esimo passaggio trovo un intervallo $[a_k, b_k]$ t.c.

$$f(a_k) < 0 \qquad e \qquad f(b_k) > 0$$

e

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

Inoltre a_n è deb. crescente e limitata dall'alto da b
b_n è deb. decr. " " dal basso da a.

Quindi

$$a_n \longrightarrow a_\infty \qquad\qquad b_n \longrightarrow b_\infty$$

per il teo. delle succ. monotone e $a_\infty = b_\infty$ perché $b_k - a_k \to 0$.
Chiamato c il valore comune si avrà

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0 \qquad e \qquad f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0$$

L'unica poss. è che $f(c) = 0$.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Il punto c della bisezione coincide con uno dei 4 c precedenti?

— o — o —

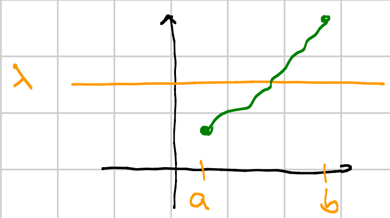
<u>Teorema</u> (Teorema dei valori intermedi) (Intermediate value thm.)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia λ tale che

$$f(a) < \lambda < f(b) \qquad (\text{o viceversa } f(a) > \lambda > f(b))$$

Allora

$$\exists\, c \in (a,b) \quad t.c. \quad f(c) = \lambda$$

<u>Dim.</u> basta porre $g(x) := f(x) - \lambda$ e osservare che $g(a)\cdot g(b) < 0$
e $g(x) = 0 \iff f(x) = \lambda$.



<u>Esempio 1</u> Dimostrare che l'equazione

$$\underbrace{x^{12} - 7\sin x}_{f(x)} = 2016$$

ha almeno una soluzione reale.

$f(0) = 0 < 2016$, $\quad f(10) \geq 10^{12} - 7 > 2016$
Quindi $\exists\, c \in (0, 2016)$ t.c. $f(c) = 2016$. Volendo potevo usare le 2.
10: corretto dopo video

Esempio 2 L'eq. $\sinh x - x^{7212} + \arctan(x^2) = 2016$
ha almeno una sol. reale

Come prima $f(x) = \sinh x - x^{7212} + \arctan(x^2)$.
Basta cercare $a < b$ tale che $f(a) < 2016$ e $f(b) > 2016$.
Posso scegliere $a = 0$ visto che $f(0) = 0$.
Osservo che

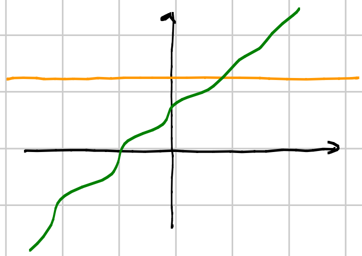
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ (l'esponenziale in $\sinh x$ batte tutto il resto)

Questo mi dice che $f(x)$ supera definitivamente ogni valore, dunque anche 2017.

Esempio 3 Dimostrare che la $f(x)$ dell'esempio prec., vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è surgettiva

Devo dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x) = \lambda$$



ha almeno una sol. reale. Per questo basta trovare un p.to in cui $f(x) > \lambda$ e uno in cui $f(x) < \lambda$. Questo segue dai 2 limiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

— o — o —

Fatto generale Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ (o viceversa)

Allora f è surgettiva.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 040

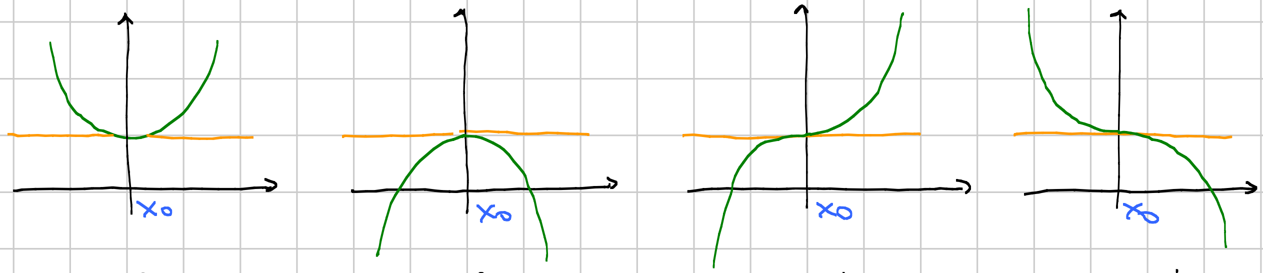
Note Title 09/11/2016

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

Obiettivo: descrivere il comportamento di una funzione in un intorno di un p.to stazionario.

Def. Un p.to x_0 si dice stazionario per f se $f'(x_0)=0$.
(si intende che ha senso calcolare $f'(x_0)$, quindi f è definita almeno in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ per un qualche $\delta>0$).

Ci sono 5 tipi possibili di comportamento



min. loc. — max. loc. — flesso a tang. orizz. ascendente — flesso a tang. orizz. disc.

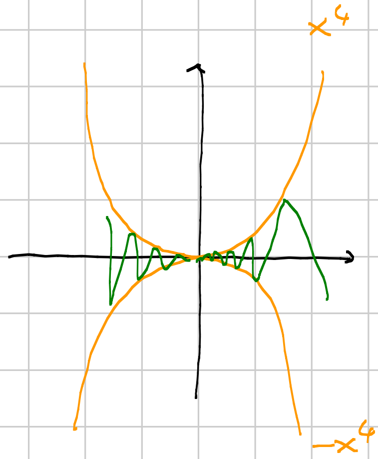
Il quinto comportamento è patologico ...
Detto meglio

- MIN. LOC. : $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
- MAX. LOC. : $f(x) \leq f(x_0)$ "
- FL. TG. ORIZZ. ASC : $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$
  $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$
- FL. TG. ORIZZ. DISC : contrario di sopra.

Il quinto caso è nessuno dei precedenti.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x^{20}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Si verifica che

- in ogni intervallo $(0,\delta)$ o $(-\delta,0)$ ci sono sia p.ti in cui $f(x) > 0$ sia p.ti in cui $f(x) < 0$
- $f(0) = f'(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} h^3 \sin \frac{1}{h^{20}} = 0 \quad \text{per carab.}$$

Oss. Potremmo definire i 4 comp. standard in maniera più stretta, cioè per esempio

min loc. se $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

$\boxed{\text{Criterio delle derivate successive}}$ Sia x_0 un p.to staz. per $f(x)$. Supponiamo che esista $k \geq 1$ tale che

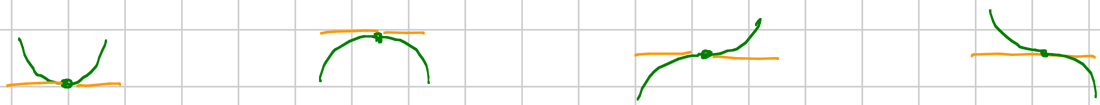
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

$$f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

Allora vale il seguente schema

k pari → $f^{(k)}(x_0) > 0$, $f^{(k)}(x_0) < 0$

k dispari → $f^{(k)}(x_0) > 0$, $f^{(k)}(x_0) < 0$



Il quinto comportamento è possibile solo quando o tutte le derivate sono nulle, o smettono di esistere prima di essere $\neq 0$ in x_0.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono 4 casi. Facciamone qualcuno

$\boxed{k \text{ pari e } f^{(k)}(x_0) > 0}$ $\qquad f(x) = f(x_0) + \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$

Questo è lo sviluppo di Taylor di ordine k con centro in x_0.
Riscritto diventa

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k) \qquad \text{per } k \to 0$$

Da questo si ottiene che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} > 0$$

Essendo il limite >0, per permanenza del segno abbiamo che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} > 0 \qquad \text{per } h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

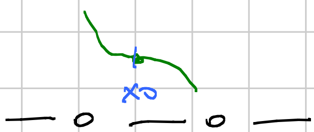
Poiché k è pari, il denom è >0, quindi num. >0, quindi $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ per h vicini a 0, quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ per $h \in (-\delta,\delta) \setminus \{0\}$. $\rightsquigarrow$ min. loc.

$\boxed{k \text{ dispari e } f^{(k)}(x_0) < 0}$ Come prima da Taylor arriviamo a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} < 0 \qquad \text{per } h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

per un opportuno $\delta > 0$. Ora essendo k dispari

- in $(0, \delta)$ denom >0, quindi num. <0 $\rightsquigarrow$ $f(x_0+h) < f(x_0)$
- in $(-\delta, 0)$ denom <0, quindi num >0 $\rightsquigarrow$ $f(x_0+h) > f(x_0)$



Stesso criterio, detto diversamente: in un opportuno intorno di un p.to stazionario una funzione si comporta come il primo termine non nullo e non costante del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $f(x) = e^{x^2} + \cosh x^4$ $\qquad x_0 = 0$

Si vede in vario modo che $f'(0) = 0$

1° modo: calcolo la derivata

2° modo: è una funzione pari, quindi $f'(x)$ è dispari, quindi $f'(0) = 0$.

3° modo: Taylor

$$f(x) = \boxed{2 + x^2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Visto che "non c'è" x, per forza $f'(0) = 0$

Che tipo di punto stazionario è? È un p.to di min. loc.

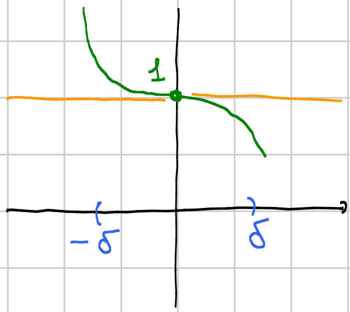
Si comporta come $2 + x^2$

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{1+x^4} + \sin x^5 - \sinh x^3$ $\qquad x_0 = 0$

L'origine è un p.to di flesso a tang. orizz. discendente

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + x^5 + o(x^5) - x^3 - o(x^3)$$

$$= 1 - x^3 + o(x^3)$$



Se usassi le derivate successive la prima non nulla sarebbe la 3ª e sarebbe < 0 (verrebbe -6)

<u>Esempio 3</u> Studiare iniettività e surg. di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x^5 + x^3$ I + S

$x^5 - x^3$ ~~I~~ S

$x^7 + \log(1+x^2)$ ~~I~~ S

Sono tutte surgettive perché continue ovunque e

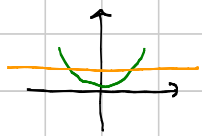
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

La prima è iniettiva perché somma di due funz. strett. cresc.

La seconda non è iniettiva perché $f(0) = f(1) = 0$.

La terza non è iniettiva perché ha un min. locale per $x = 0$

$$x^7 + \log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$$



<u>Esempio 4</u> Dimostrare che l'equazione

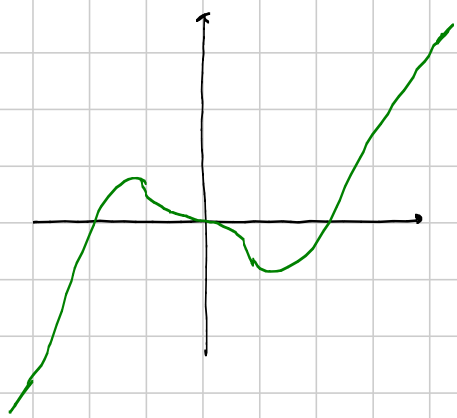
$$1000\, x^5 - \sin(x^3) + 777 \arctan x^4 = 0$$

ha almeno 3 soluzioni reali

Osservazioni fondamentali

0. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua
1. limiti a $\pm\infty$
2. $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ in $x = 0$

Per ottenere una sol. $x > 0$ e una sol $x < 0$ devo usare l'esistenza degli zeri.



ANALISI 1 — LEZIONE 041

Note Title 10/11/2016

Monotonia e segno della derivata prima

MONOTONIA 1 (Segno della derivata in un punto)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f'(x_0) > 0$.

Allora esiste $\delta_0 \in (0, \delta]$ tale che

$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_0)$$
$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0)$$

(un po' dopo vale di +, un po' prima vale di −)

Oss. Non c'è scritto nella tesi che f è monotona in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$.

Dim. Per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Per permanenza del segno esiste $\delta_0 \in (0, \delta]$ tale che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \qquad \forall h \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$$

Conclusione:

- per $h \in (0, \delta_0)$ si ha den > 0, quindi num > 0, quindi
$$f(x_0 + h) > f(x_0) \qquad \forall h \in (0, \delta_0)$$
- per $h \in (-\delta_0, 0)$ tutto al contrario ...
$$f(x_0 + h) < f(x_0) \qquad \forall h \in (-\delta_0, 0).$$

— o — o —

Oss. Allo stesso modo, supponendo $f'(x_0) < 0$ si ottiene

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_0)$$
$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0).$$

MONOTONIA 2 (Segno della derivata in un intervallo)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che f sia derivabile in (a,b).
Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ deb. cresc. in } (a,b) & \Longleftrightarrow & f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \\ f \text{ strett. cresc. in } (a,b) & \Longleftarrow & f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \end{array}}$$

Achtung! L'implicazione mancante è falsa. Ad esempio $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3$ è strett. cresc., ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla nell'intervallo.

— o — o —

Teorema misterioso (LAGRANGE) (MEAN VALUE THEOREM)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.
Supponiamo che
(i) f continua in $[a,b]$ (estremi compresi)
(ii) f derivabile in (a,b) (se lo è in $[a,b]$, ancora meglio)
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

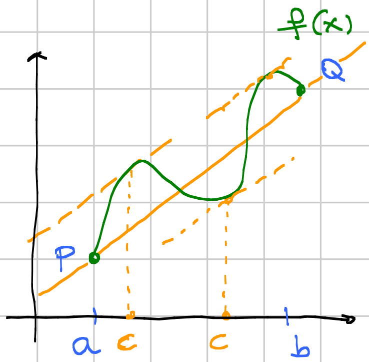
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).}$$

Interpretazione geometrica Dividendo per $b-a$ otteniamo

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \boxed{f'(c)}$$

coeff. ang. retta PQ

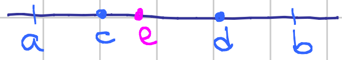
la retta tangente al grafico in $(c, f(c))$ è // alla retta PQ



— o — o —

$\boxed{\text{Dim}}$ (Di monotonia 2 dando per buono Lagrange)

$\boxed{f' \geq 0 \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \text{ deb. monotona}}$



Comunque scelti $a < c < d < b$, devo dim. che $f(d) \geq f(c)$.
D'altra parte usando Lagrange in $[c,d]$ si ottiene

$$f(d) - f(c) = \overbrace{f'(e)}^{\geq 0}\,\overbrace{(d-c)}^{>0} \geq 0$$

pto misterioso in (c,d)

$\boxed{f' > 0 \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \text{ strett. cresc.}}$ Tutto come prima

$$f(d) - f(c) = \underbrace{f'(e)}_{>0}\,\underbrace{(d-c)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(d) > f(c)$$

$\boxed{f \text{ deb. cresc. in } (a,b) \Rightarrow f' \geq 0 \text{ in } (a,b)}$

Preso un qualunque punto $x_0 \in (a,b)$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \geq 0$$

$$= \frac{\geq 0}{> 0} \geq 0$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Se f è strett. cresc. in (a,b), allora

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{per ogni } h \text{ ammissibile}$$

Però le disuguaglianze strette NON passano al limite e quindi nessuno impedisce a $f'(x_0)$ di essere 0.

— o — o —

MONOTONIA 3 (Annullamento sporadico di f')

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione.
Supponiamo che

(i) f è derivabile e $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

(ii) f' non si annulla identicamente in nessun sottointervallo

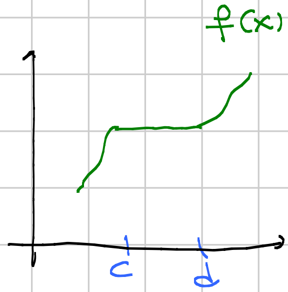
(cioè le soluz. dell'eq. $f'(x)=0$ sono un po' di punti isolati, non un intero sottointervallo)

Allora f è STRETT. CRESC. in (a,b).

Dim. Dall'ipotesi (i) sappiamo che f è deb. cresc.
Se per assurdo non lo fosse strettamente, esisterebbe un sottointervallo $[c,d]$ in cui f è costante. Ma allora si avrebbe

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in [c,d]$$

il che è contro l'ipotesi (ii).



— o — o —

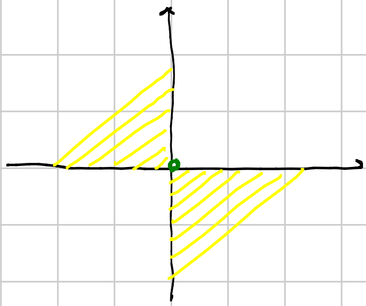
Esempio patologico

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 \sin \frac{1}{x^4} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si verifica facendo il limite del rapp. incr. che $f'(0) = 2$, quindi siamo nelle ipotesi di monotonia 1.

Fatto: non esiste nessun intervallo $(0,\delta)$ o $(-\delta, 0)$ in cui $f(x)$ risulta crescente.

Per $x \neq 0$ la derivata è



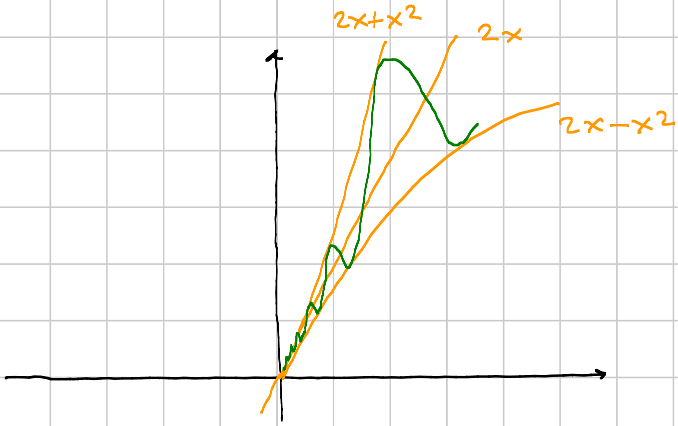
$$f'(x) = 2 + 2x \sin \frac{1}{x^4} + x^2 \cos \frac{1}{x^4} \left(-\frac{4}{x^5}\right)$$

$$= 2 + 2x \sin \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} \cos \frac{1}{x^4}$$

In ogni intorno $(0,\delta)$ esistono valori di x per cui $f'(x) > 0$

ed esistano valori di x per cui $f'(x) < 0$.

Anzi: esistono sottointervalli in cui $f' > 0$ (dunque f è strett. cresc.) ed esistono sottointervalli in cui $f' < 0$ (dunque f è strett. decr.).



Grosso problema che causa la patologia: $f'(x)$ non è continua in $x=0$.

ANALISI 1 — LEZIONE 042

Note Title 10/11/2016

$\boxed{\text{MASSIMI E MINIMI}}$ (Globali)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione

Def. Si dice che
$$M = \max\{f(x) : x \in A\}$$
se

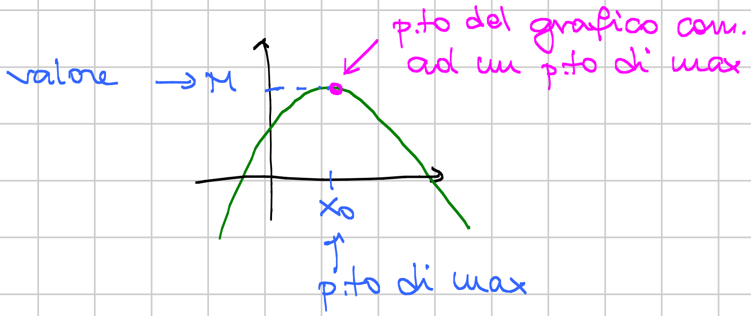
(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists\, x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = M$.

Tutti i punti x_0 per cui vale la (ii) si dicono p.ti di max.

Def. analoga vale per il minimo e i p.ti di min.

Achtung! Max e min sono VALORI assunti dalla funzione, cioè "delle y". Se esistono sono nec. unici.
I p.ti di max/min sono "delle x". Esistono se e solo se esistono max/min e non sono obbligati ad essere unici.



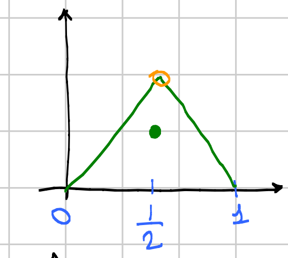
$\boxed{\text{TEOREMA MISTERIOSO}}$ (WEIERSTRASS edulcorato)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

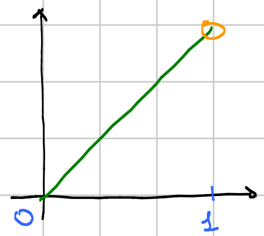
Supponiamo che f sia continua in $[a,b]$ ← (con gli ESTREMI)

Allora esistono per forza
$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\},$$
$$\min\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

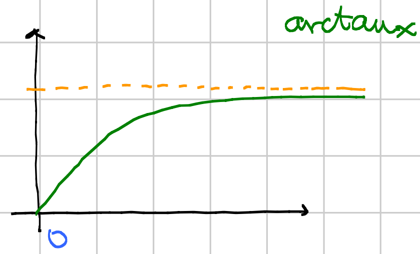
Oss. Le ipotesi servono davvero



manca la cont. in $\frac{1}{2}$ e non c'è il max



funzione definita solo in $[0,1)$ e manca il max



funzione definita in $[0,+\infty)$ e non esiste il max.

Esercizi (semihard)

1. $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Possono mancare sia max, sia min?
2. $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ " " " " " " "
3. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tranne in $x = \frac{1}{2}$. Stessa domanda.

Oss. Ovviamente possono non essere verificate le ipotesi, ma valere lo stesso la tesi. Ad esempio

$$f : (0,10) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x$$

Tuttavia max e min esistono.

— o — o —

$\boxed{\text{Ricerca dei punti di max / min}}$

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora max / min esistono per W.

Domanda: come li trovo? Come determino p.ti max / min?

Risposta: i punti di max / min appartengono alle seguenti 3 categorie

1. P.ti STAZIONARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x) = 0$
2. P.ti SINGOLARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste
3. BORDO : p.ti $x = a$ e $x = b$.

Operativamente: data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ faccio l'elenco dei p.ti di tipo ①, ②, ③.
Fatto l'elenco, li sostituisco nella funzione: dove vale di + è il max, dove vale di − è il min.

Dim. Consideriamo un p.to x_0 di min. (analogo per il max)

- Se $x_0 \in \{a,b\}$, allora x_0 è di tipo 3.
- Se $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ non esiste, allora x_0 è di tipo 2.
- Se $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ esiste, allora per forza $f'(x_0)=0$.

Infatti se fosse $f'(x_0)>0$, allora $f(x)<f(x_0)$ un po' a sx di x_0 per monotonia 1; se fosse $f'(x_0)<0$, allora $f(x)<f(x_0)$ un po' a dx di x_0. In entrambi i casi x_0 non sarebbe p.to di min.

— o — o —

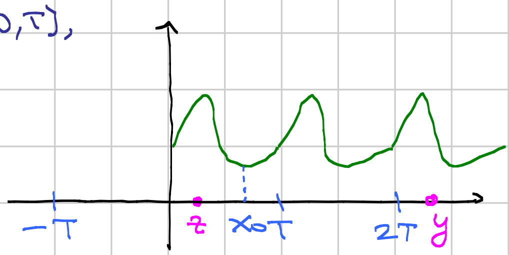
VARIANTE 1 DI WEIERSTRASS Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e PERIODICA.

Allora esistono per forza max e min.

Dim. Sia $T>0$ UN periodo di $f(x)$. Dico che max/min in $[0,T]$ sono max/min su tutto $\mathbb{R}$.

Sia $x_0\in[0,T]$ p.to di min per $[0,T]$, cioè

$$f(x)\geq f(x_0) \qquad \forall x\in[0,T].$$



Sia ora $y\in\mathbb{R}$ qualunque. Per periodicità esiste $z\in[0,T]$ t.c. $y-z=kT$ per un qualche $k\in\mathbb{Z}$. Ora

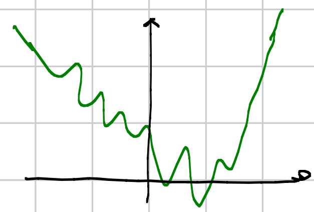
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{per periodicità}}}{f(y)=f(z)}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{perché } z\in[0,T].}}{\geq f(x_0)}$$

Oss. Anche i p.ti di min. si "ripetono periodicamente".

$\boxed{\text{WEIERSTRASS GENERALIZZATO}}$ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

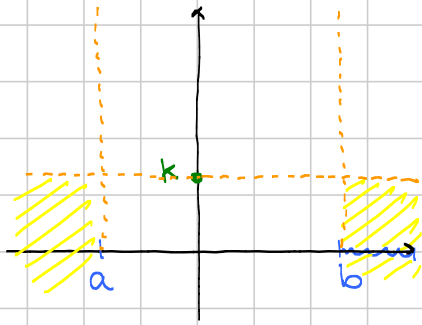
Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$



$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $k = f(0)$ (andava bene anche $k = f(2016)$)

Per definizione di limite per $x \to +\infty$ esiste b, che posso suppore $b > 0$ tale che

$$f(x) \geq k \qquad \forall x \geq b$$

Analogamente per il limite a $-\infty$ esiste a, che posso suppore $a < 0$, tale che

$$f(x) \geq k \qquad \forall x \leq a$$

Per W. esiste

$$M = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}.$$

Dico che M è anche minimo in generale, cioè su tutto $\mathbb{R}$.

Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero qualunque. Ci sono 3 casi

- Se $x \in [a, b]$, allora $f(x) \geq M$ per def. di M.
- Se $x \geq b$, allora

$$f(x) \underset{\text{def. di } b}{\geq} k = f(0) \underset{\text{perché } 0 \in [a,b]}{\geq} M$$

- Se $x \leq a$, allora stessa cosa.

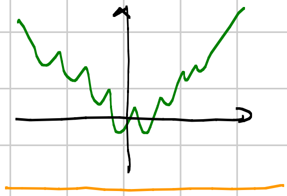
— o — o —

Oss. Se partivo con $k = f(2016)$ dovevo scegliere $a < 2016 < b$.

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = \cos^2 x - x^{217}$
$g(x) = \sin^2 x + \sin x$

Iniettività / surgettività di $f(x)$? Nessuno dei 2 !!



Basta osservare che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

W gen ⟹ ha min ⟹ non assume i valori sotto il min, ed assume i valori sopra almeno 2 volte

E per $g(x)$? Surgettività sì per i limiti a $\pm\infty$.

Iniettività : fare la derivata e usare monotonia 3.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 043

Note Title 14/11/2016

Esempio 1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + \cos x$

Iniettività e surgettività

Surgettiva sì perché $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$

$f(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$

e f è continua. Conclusione: teo. esistenza valori intermedi.

Questo dice che $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluz. per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

Iniettività: $f'(x) = 2 - \sin x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Monotonia 2 $\Rightarrow$ f strett. cresc. $\Rightarrow$ iniettiva.

Esempio 2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x + \cos x$

Surg: come prima

Iniett: $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ $\Rightarrow$ deb. cresc. il che non basta

Vedo dove $f'(x) = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$,

quindi $f'(x) \geq 0$ e si annulla "sporadicamente"

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f strett. cresc. $\Rightarrow$ iniettiva

Esempio 1+2 = 3 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \lambda x + \cos x$

Studiare iniettività e surg. al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Surgettiva $\Leftrightarrow$ $\lambda \neq 0$. Infatti

- per $\lambda = 0$ non è chiaramente surg.
- per $\lambda \neq 0$ i limiti a $\pm\infty$ sono $\pm\infty$ (per $\lambda > 0$) o $\mp\infty$ ($\lambda < 0$) e quindi si conclude per esistenza degli 0.

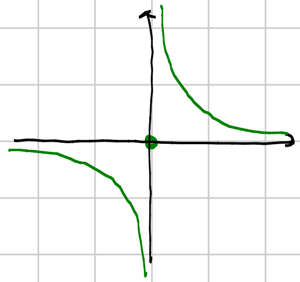
Iniettiva $\iff |\lambda| \geq 1$. Ci sono sostanzialmente 2 casi

- $\lambda \geq 1$ (o simmetricamente $\lambda \leq -1$): $f(x)$ è strett. cresc. (o strett. decr.) per monotonia 2 o 3
- per $\lambda \in (-1,1)$ non c'è iniettività. Quello che è evidente è che $f'(x)$ può cambiare di segno (basta mettersi dove $\sin x = 1$ oppure $\sin x = -1$). Apriamo una parentesi.

<u>Domanda</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva, possiamo dedurre che è monotona?

Senza continuità, risposta negativa

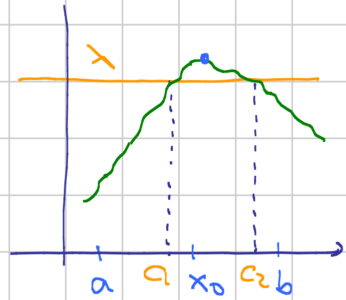
iniettiva, ma non monotona $\longrightarrow$



<u>Rilancio</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata che cambia segno. Posso dedurre che è non iniettiva ?

Sì, ma va dimostrato per bene. Supponiamo che esistano $a < b$ con $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$. L'idea è che in mezzo ci sia un p.to di max. Infatti

- per W un p.to di max x_0 in $[a,b]$ c'è.
- per monotonia 1 escludo che x_0 sia a opp. b, quindi per forza $x_0 \in (a,b)$



Ora osservo che esiste un valore

$$\max\{f(a), f(b)\} < \lambda < f(x_0)$$

L'esistenza segue dal fatto che $f(x_0) > f(a)$ e $f(x_0) > f(b)$ per monotonia 1.
Ora concludo per teo. valori intermedi in $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$.

Il rilancio sistema l'esempio $1+2=3$.

Rilancio finale: se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e iniettiva, possiamo dedurre che f è monotona (strettamente)?

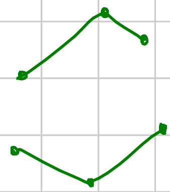
Sì, ma si basa su un lemma misterioso, che non dimostrerò mai.

Lemma (del triangolino) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON monotona. Allora esistono 3 punti $a < b < c$ tali che

$f(b) > f(a)$ e $f(b) > f(c)$

oppure

$f(b) < f(a)$ e $f(b) < f(c)$



Dato il lemma misterioso, l'ulteriore rilancio è ovvio (basta tirare la retta $y = \lambda$ con λ opportuno.

— o — o —

Esempio 4 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + e^x}{2x^4 + 3x^2 + e^x}$$

non è surgettiva.

Osserviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Inoltre f è continua perché il denom. è sempre strett. > 0.

Trattandosi di una funzione continua, dai 2 limiti segue che f è limitata inferiormente e superiormente.

Fatto generale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se esistono

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R},$$

allora f è limitata (dall'alto e dal basso).

Deve avere anche max/min? Non è detto: $f(x) = \arctan x$

Dim. Mostriamo che $f(x)$ è limitata dall'alto.
Per il limite a $+\infty$ sappiamo che esiste b, che posso supporre $b > 0$, tale che

$$f(x) \le \ell_1 + 5 \qquad \forall x \ge b$$

Per il limite a $-\infty$ esiste a, che posso supporre < 0, tale che

$$f(x) \le \ell_2 + 5 \qquad \forall x \le a$$

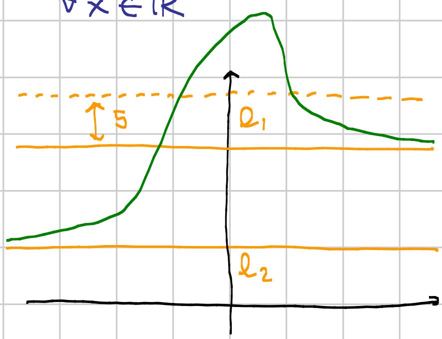
Tra a e b per W esiste M tale che

$$f(x) \le M \qquad \forall x \in [a, b]$$

posso prendere il max

Conclusione

$$f(x) \le \max\{\ell_1 + 5, \ell_2 + 5, M\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

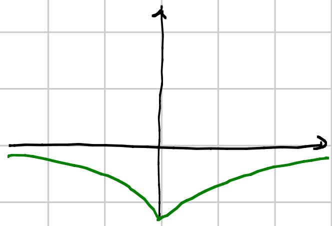


Esempio 5 Supponiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e

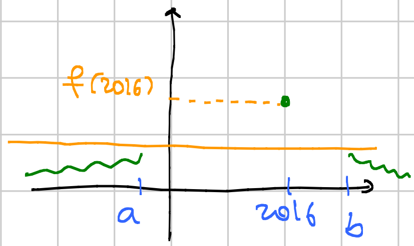
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

→ Posso dedurre che c'è il max?

NO: basta prendere $f(x) = -e^{-|x|}$



→ Se inoltre suppongo che $f(2016) > 0$, posso ora dedurre che c'è il max?



SI, ma va dimostrato...

Per le definizioni di limite

- esiste $b > 2016$ tale che
$$f(x) < \tfrac{1}{2} f(2016) \quad \forall x \geq b$$
- esiste $a < 2016$ tale che
$$f(x) < \tfrac{1}{2} f(2016) \quad \forall x \leq a$$

Sia ora x_0 un p.to di max in $[a,b]$. Dico che è p.to di max su tutto $\mathbb{R}$. Infatti

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$f(x_0) \geq f(2016) > \tfrac{1}{2} f(2016) \geq f(x) \qquad \forall x \geq b$$
idem $\qquad \forall x \leq a.$

Oss. Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$

ed esiste $a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(a) \geq \max\{\ell_1, \ell_2\}$, allora di sicuro esiste

$$\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

(Dimostrarlo, con occhio al $\geq$ nell'ipotesi).

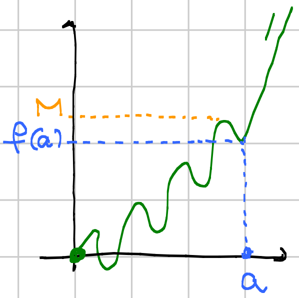
ANALISI 1 — LEZIONE 044

Note Title 14/11/2016

Esempio 1 Consideriamo l'equazione

$$\underbrace{x^3\cos(x^2)+\sinh x}_{f(x)} = \lambda$$

→ Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ l'eq. ha almeno una sol. $x>0$.



Basta osservare che f è continua, $f(0)=0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per merito di $\sinh x$

→ Dimostrare che $\exists\, \lambda_0 > 0$ t.c. la sol. $x>0$ è unica per ogni $\lambda \geq \lambda_0$.

Idea: • $f'(x)$ sarà positiva per ogni $x \geq a$
• in $[0,a]$ la funzione ha un max M
• per $\lambda > M$ la soluzione è unica

Rigorosamente: $f'(x) = 3x^2\cos(x^2) - 2x^4 \sin(x^2) + \cosh x$

Osservo che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, quindi per defin. esiste $a>0$ t.c.

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \geq a$$

ed in particolare f è strett. cresc. in $[a,+\infty)$.

Pongo

$$M := \max\{f(x) : x \in [0,a]\} \qquad \text{(esiste per W.)}$$

Cosa succede per $\lambda > M$? Sappiamo che $f(x)=\lambda$ ha almeno una soluzione. Questa sol. non può essere in $[0,a]$, quindi è $>a$, quindi nella zona di iniettività, quindi è unica.

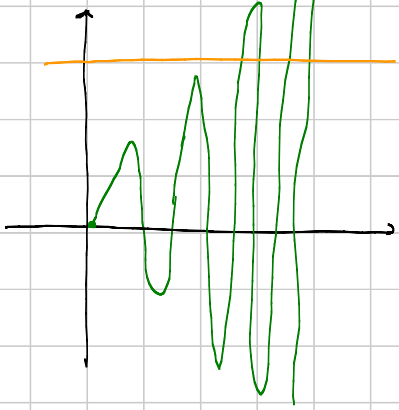
Si può analogamente partire supponendo che $f(x_1) = f(x_2) = \lambda > M$...

—o—o—

<u>Esempio 2</u> $x^2 + \sin x + x^3 \cos(x^2) = \lambda$

Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ ci sono infinite soluzioni $x > 0$

Idea: quando x cresce, la funzione $f(x)$ ha infinite oscillazioni sempre più ampie.



Punto essenziale: esistono 2 successioni

$a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$

tali che

$f(a_n) \to +\infty$ e $f(b_n) \to -\infty$

[Posso prendere per esempio $a_n = \sqrt{2\pi n}$, $b_n = \sqrt{\pi + 2\pi n}$]

Ora si può dimostrare che, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste almeno una soluzione dell'eq. maggiore di M. Questo implica che le sol. sono infinite.

Poiché $a_n \to +\infty$ e $f(a_n) \to +\infty$, allora definitivam. si avrà che

$a_n > M$ e $f(a_n) > \lambda$

Poiché $b_n \to +\infty$ e $f(b_n) \to -\infty$, allora defin.

$b_n > M$ e $f(b_n) < \lambda$

Quindi ho trovato p.ti $> M$ in cui f vale $+$ o $-$ di λ. Concludo con il teorema dei valori intermedi.

— o — o —

<u>Esempio 3</u> Dimostrare che esiste una costante c tale che

$$x^4 + x^2 \sin x + \arctan(e^x) \le c \, \sinh x \qquad \forall x \ge 2016$$

Idea: posso dividere per $\sinh x$ (che è >0 per $x \geq 2016$).
Ottengo

$$\boxed{\frac{x^4 + x^2 \sin x + \arctan(e^x)}{\sinh x}} \overset{?}{\leq} c \qquad \forall\, x \geq 2016$$

$f(x)$

Questo è come dire che $f(x)$ è limitata superiormente in $[2016, +\infty)$
Questo a sua volta segue dal fatto che f è continua e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad (\text{basterebbe } \in \mathbb{R})$$

$\to$ la costante c ottimale è $\max\limits_{x \geq 2016} f(x)$, e questo esiste, ma va dimostrato con le solite varianti di W (basta trovare un $x \geq 2016$ in cui $f(x) > 0$).

Esempio 4 $\quad x^{33} + x^4 \sin x \leq c\,(\sinh x - x)^a \qquad \forall\, x \geq 0$

Domanda: per quali $a > 0$ esiste c tale che

Risposta: se e solo se $a \leq \frac{5}{3}$. Ci sono due sottoproblemi

$x^{33} + x^4 \sin x \leq c\,(\sinh x - x)^a \quad \forall\, x \geq 1 \quad \rightsquigarrow$ ok per ogni $a > 0$

$x^{33} + x^4 \sin x \leq c\,(\sinh x - x)^a \quad \forall\, x \in [0,1] \quad \rightsquigarrow$ ok solo per $a \leq \frac{5}{3}$

La disuguaglianza in $x \geq 1$ è come l'esercizio 3.
La seconda è ovvia in $x = 0$. Per $x \in (0,1]$ posso dividere e ottengo

$$\boxed{\frac{x^{33} + x^4 \sin x}{(\sinh x - x)^a}} \leq c \qquad \forall\, x \in (0,1]$$

$f(x)$

Oss. $\sinh x - x > 0$ per $x > 0$ perché la derivata è $\cosh x - 1 > 0$

Ci stiamo chiedendo se $f(x)$ è limitata in $(0,1]$. L'unica cosa che può andare storta è il limite per $x \to 0^+$.

Ora

$$f(x) = \frac{x^5 + o(x^5)}{\left(\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^a}$$

quindi $\to$ per $a > \frac{5}{3}$ il limite è $+\infty$

$\to$ per $a = \frac{5}{3}$ il limite è $6^{5/3}$

$\to$ per $a < \frac{5}{3}$ il limite è 0.

la funzione $f(x)$ è limitata in $(0,1]$

Fatto generale: $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ continua e $\lim_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Allora f è lim. sup. in $(0,1]$

Dim: è la solita storia, ma va fatta.

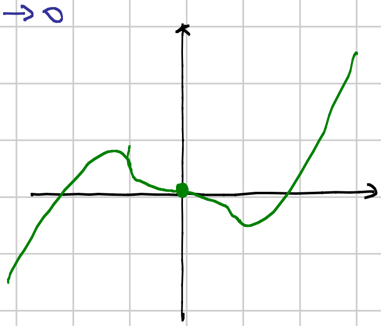
— o — o —

Esempio 5 $\quad x^{33} - x^4 \sin x = 0$ ha almeno 3 soluz. reali.

$x = 0$ è soluzione, $f(x) = -x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ flesso tang. oriz. disc. nell'origine

con i limiti all'infinito si conclude



Oss. Il numero di sol. è dispari e finito (dipende dall'essere i limiti $\pm\infty$, ma non è ovvio e andrebbe dimostrato).

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 045

Note Title 16/11/2016

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: disegnare l'andamento di una funzione su tutto l'insieme di definizione

Punti principali:
1. Eventuali simmetrie
2. Zona di definizione e continuità
3. Limiti agli estremi della zona di def.
4. Zeri e segno
5. Derivabilità e monotonia
6. max/min locali / globali
7. Asintoti
8. Convessità e flessi
9. LIPSCHITZIANITÀ

Esempio $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x}$

1. Simmetrie Purtroppo nulla

2. Zona def. e continuità Serve $x^2+x \neq 0$, cioè $x(x+1) \neq 0$ cioè $x \notin \{-1, 0\}$

$\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

Continua nella zona di def. per il metateorema

3. Limiti agli estremi Sono 6 limiti

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

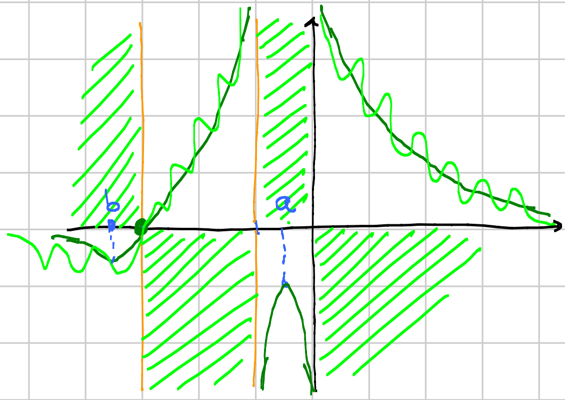
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

④ Zeri e segno. Risolvere $\qquad f(x) = \dfrac{x+3}{x(x+1)}$

→ l'equazione $f(x) = 0$

→ le disequazioni $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$

	$x<-3$	-3	$-3<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$x>0$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$f=0$	$+$		$-$		$+$



Idea che ci siamo fatti dai punti ③ e ④, ma potrebbe succedere di tutto

⑤ Studio derivata e monotonia $\qquad f'(x) = \dfrac{x^2+x-(2x+1)(x+3)}{(x^2+x)^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2+x-2x^2-6x-x-3}{(x^2+x)^2} = \frac{-x^2-6x-3}{(x^2+x)^2} = -\frac{x^2+6x+3}{(x^2+x)^2}$$

La funzione $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ per i teoremi algebrici sulle derivate e $f'(x)$ è quella calcolata.

Ora risolvo $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6} = \begin{cases} \nearrow a \\ \searrow b \end{cases}$$

	$x<b$	b	$b<x<-1$	-1	$-1<x<a$	a	$a<x<0$	0	$x>0$
x^2+6x+3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Denom.	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘		↘

Tutto questo conferma il grafico precedente

⑥ Max / min loc. / glob. $x = -3+\sqrt{6}$ p.to di max locale
$x = -3-\sqrt{6}$ p.to di min locale

Non è difficile trovare le corrispondenti y.

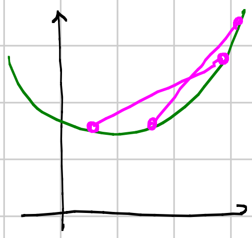
Max e min globali non ci sono.

⑦ Asintoti → orizzontali
→ verticali
→ obliqui

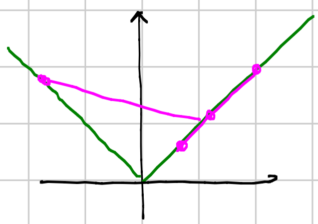
- Orizzontali : $y=0$ e asint. oriz. per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$
- Verticali : $x=0$ e $x=-1$

⑧ Flessi, convessità e derivata seconda

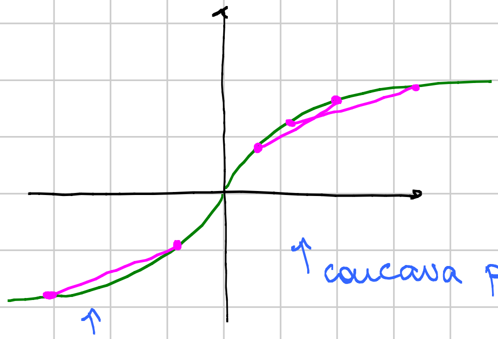
Def. "geometrica" Una funzione $f(x)$ si dice convessa (in un intervallo, una semiretta, tutto $\mathbb{R}$) se, presi comunque 2 p.ti sul grafico, tutto il segmento congiungente sta sopra il grafico.
La convessità è stretta se il segmento tocca il grafico solo agli estremi.
Una funzione si dice concava se tutti i segmenti congiungenti stanno sotto il grafico.



(strett. convessa)



Convessa ma non strett.



concava per $x \geq 0$

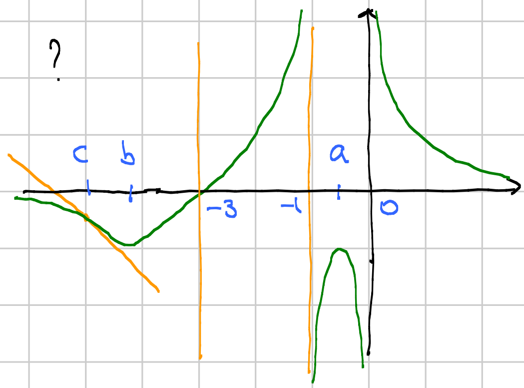
convessa per $x \leq 0$

Def. Un punto x_0 si dice punto di flesso se esiste $\delta > 0$ tale che f è convessa in $[x_0, x_0+\delta]$ e concava in $[x_0-\delta, x_0]$ (o viceversa). Detto in altri termini, cambia la concavità/conv. nel punto x_0.

Oss. (geometrica) Una funzione convessa sta sopra le rette tang.
" " concava " sotto " " "

Di conseguenza "nei punti di flesso il grafico attraversa la retta tangente"

Cosa ci aspettiamo con $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x}$?



- per $x > 0$ è convessa
- per $x \in (-1, 0)$ è concava
- esiste $c < b$ p.to di flesso con f convessa in $[c, -1)$ e concava per $x \in (-\infty, c]$.

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ (Convessità e derivata seconda)

Supponiamo che f'' esista in un certo insieme A (intervallo, semiretta o tutto $\mathbb{R}$).

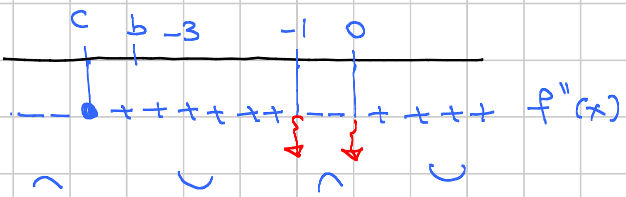
Allora valgono le seguenti implicazioni

$$\boxed{f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in A \iff f \text{ è convessa in } A}$$

$$\boxed{f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in A \implies f \text{ strett. conv. in } A}$$

$\Leftarrow$ in generale è falsa (pensare a x^4)

Nell' esempio ci aspettiamo dalla $f''(x)$ un segno del tipo



<u>Teorema misterioso</u> Se $f''(x)$ esiste in A e vale

- $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$
- $f''(x) = 0$ non ha come soluzione un intero intervallo,

allora f è strett. conv. in A.

<u>Achtung!</u> I punti in cui $f''(x) = 0$ NON sono per forza p.ti di flesso. Per esserlo occorre che $f''(x)$ cambi segno in quel punto.

Come esempio pensare sempre a x^4.

ANALISI 1 — LEZIONE 046

Note Title 16/11/2016

<u>Classi di regolarità</u> Sia A un insieme aperto (ad esempio tutto $\mathbb{R}$, una semiretta senza estremo, un interv. senza estremi)

$C^0(A)$ = insieme delle funzioni continue in A
$C^1(A)$ = " " " con derivata continua in A
$\vdots$
$C^k(A)$ = " " " con k derivate continue in A
$C^\infty(A)$ = insieme delle funzioni con tutte le derivate continue in A

<u>Esempio</u> $\frac{x+3}{x^2+x} \in C^0(\mathbb{R}\setminus\{-1,0\})$

" $\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{-1,0\})$
" " C^∞ (")

$|x| \in C^0(\mathbb{R})$, $|x| \notin C^1(\mathbb{R})$, $|x| \in C^{27}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

— o — o —

$\boxed{\text{ASINTOTI}}$

- <u>Def.</u> La retta $y=l$ è asintoto orizz. per $x\to+\infty$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$
  " " " " per $x\to-\infty$ se $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$

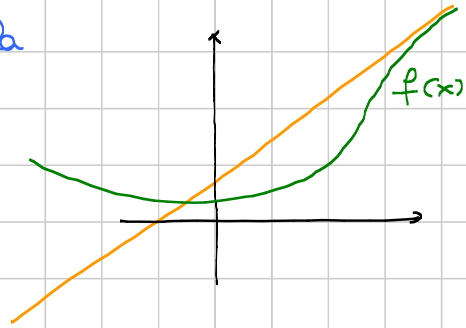
- <u>Def.</u> La retta $x=x_0$ è <u>asintoto verticale</u> se vale una delle seguenti 4 opzioni

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \in \{\pm\infty\}$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \in \{\pm\infty\}$

• <u>Def.</u> La retta $y = mx + n$, con $m \neq 0$, è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$ (variante per $x \to -\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(f(x) - mx - n)}_{} = 0 \qquad \text{(variante: stessa per } x \to -\infty)$$

la "distanza" tra la retta e la funzione tende a 0.



<u>Come individuare gli asintoti obliqui</u>

La retta $y = mx + n$ è asint. obliquo a $+\infty$ se e solo se

$$\boxed{m := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \qquad n := \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}}$$

<u>Oss.</u> Se per qualche motivo sono verificate le ipotesi di Hôpital, allora

$$m = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

$\boxed{\text{Dim. criterio se e solo se}}$

Supponiamo che valga il 2° limite. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{f(x) - mx}_{n} - n) = 0 \implies mx+n \text{ è asint. obliquo}$$

Supponiamo ora che la retta sia asint. obliquo. Voglio dim. che m ed n sono dati dalle formule sopra

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Bigg[\underbrace{\boxed{\frac{f(x)-mx-n}{x}}}_{\frac{0}{+\infty} = 0} + \underbrace{\boxed{\frac{mx+n}{x}}}_{m} \Bigg] = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{f(x)-mx-n}_{0}+n) = n.$$

— o — o —

Esempio 1 $\quad f(x) = \dfrac{3x^2+5x+6}{x+3}$

$x=-3$ è asintoto verticale

Cerco gli asintoti obliqui

$$m := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$$n := \lim_{x\to+\infty} (f(x)-3x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{3x^2}+5x+6-\cancel{3x^2}-9x}{x+3} = -4$$

$\Rightarrow$ la retta $y=3x-4$ è asint. obliquo per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \text{e idem per } n$$

Esempio 2 $\quad f(x) = 7x + \log x$

$$m := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 7 \qquad n := \lim_{x\to+\infty} (f(x)-7x) = +\infty \quad ☹$$

Niente asintoto obliquo

Esempio 3 $\quad f(x) = x + \dfrac{\sin(x^{20})}{x}$

Si vede con la definizione che $y=x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ sia a $-\infty$, però

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + 20x^{18}\cos(x^{20}) - \frac{\sin(x^{20})}{x^2}\right] = \text{N.E.}$$

— o — o —

Utilizzi dello studio globale di funzioni

- studiare iniettività / surgettività
- risolvere equazioni, anche parametriche $f(x) = \lambda$
- risolvere disequazioni $f(x) \geq 0$ oppure $f(x) \leq 0$
- Calcolare max / min di una funzione in un insieme.

Esempio Risolvere la disequazione $\underbrace{x + 2\sin x}_{f(x)} \geq 0$

Studio $f(x)$ e vedo che succede

① È dispari ☺

② Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Diciamo $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

③ Limiti agli estremi

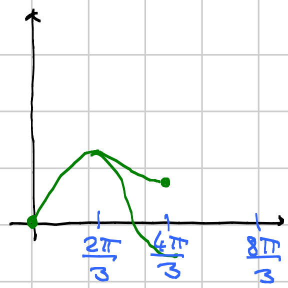
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

(Questo ci dice già che è surgettiva, ma qui non serve)
Ora sappiamo che la diseq. è ok definitivamente.

④ Zeri e segno ☹ Non lo so fare

⑤ Derivata e monotonia $f'(x) = 1 + 2\cos x$

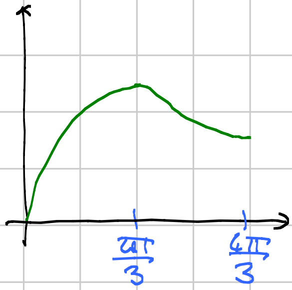
$$f'(x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$f'(x) > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2}$$



Calcolo $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 0$

Ci sono infiniti p.ti di min. loc.
con

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$



In tutti quelli con $k \geq 0$ la funzione è >0
(quello più a rischio era $\frac{4\pi}{3}$).

Ora sappiamo che $f(x)$ si annulla solo per $x=0$ e
poi $f(x) > 0$ per $x > 0$

Ora sappiamo rispondere al 4 e
alla domanda iniziale

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 047

Note Title 17/11/2016

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

<u>Def.</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è $\boxed{\text{lip. in } A}$ se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{|f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x \in A, \forall y \in A}$$

<u>Oss.</u> Se un certo L va bene, allora vanno bene tutti i successivi

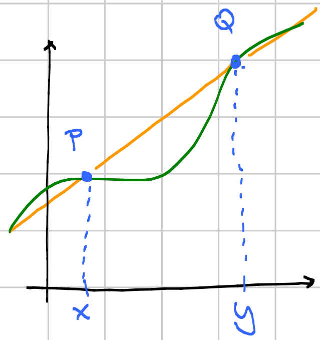
<u>Def.</u> Se f è lip. A, allora il più piccolo L che va bene si dice $\boxed{\text{costante di Lipschitz}}$ di f in A, ed è dato da

$$\boxed{L := \sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x \in A, y \in A, x \neq y \right\}}$$

<u>Interpretazione geometrica</u> Se f è lip. in A, allora vale

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq L \qquad \forall\, x \neq y \text{ in } A$$

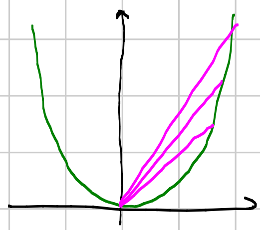
↑
coeff. angolare della retta PQ



Quindi geom.

$\boxed{f \text{ lip. in } A \iff \text{le rette PQ hanno pendenza limitata}}$

<u>Oss.</u> La lip. dice che errore commetto sulle funzioni noto l'errore commesso sugli argomenti.



Esempio 1 $\quad f(x) = x^2 \quad$ Non è Lip. in $\mathbb{R}$

Se lo fosse, esisterebbe L tale che

$$|x^2-y^2| \leq L\,|x-y| \qquad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Uso $y=0$ e $x=n$ e ottengo $\quad n^2 \leq L\,n \quad$ che è assurdo per n grande

Avrei potuto usare $y=n$ e $x=n+1$:

$$|(n+1)^2-n^2| \leq L\,|n+1-n| \,; \qquad |2n+1| \leq L \qquad \text{assurdo}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = x^2 \quad$ è Lip. in $[0,100]$

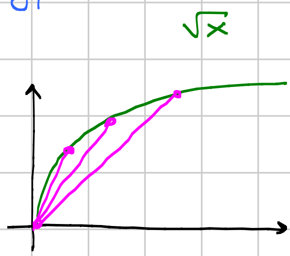
Devo dim. che esiste $L\in\mathbb{R}$ tale che

$$|x^2-y^2| \leq L\,|x-y| \qquad \forall\, x\in[0,100] \quad \forall\, y\in[0,100]$$

$$|(x+y)(x-y)|$$

Semplificando viene $\quad |x+y| \leq L \quad$ e questa è Ok se prendo $L=200$.

Bella copia: $\quad |x^2-y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 200}\cdot|x-y| \leq 200\,|x-y|$



Esempio 3 $\quad f(x)=\sqrt{x} \quad$ è Lip. in $[0,+\infty)$?

No! Per colpa delle rette vicine a 0

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq L\,|x-y|$$

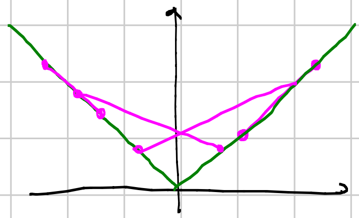
Scelgo $y=0$ e $x=\frac{1}{n}$: $\quad \left|\sqrt{\frac{1}{n}}\right| \leq L\,\frac{1}{n}$, cioè $\quad \sqrt{n}\leq L$

il che è assurdo per n grande.

LIPSCHITZIANITÀ E DERIVATA PRIMA

Fatto: le funzioni lip. non sono obbligate ad essere derivabili

Esempio $f(x) = |x|$ è lip. in $\mathbb{R}$ ma non derivabile in $x=0$



La lip. con costante 1 segue dalla disuguaglianza

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \underset{L=1}{\leq} |x-y| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(si dimostra facilmente per via elementare $\rightsquigarrow$ precorso)

$\boxed{\text{Teorema}}$ (lip. e derivata prima) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme decente (intervallo, semiretta, tutto $\mathbb{R}$) e sia $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$$\boxed{f \text{ lip. in } A \iff |f'(x)| \text{ è limitata in } A}$$

Non solo, ma la costante di lip. di f in A in tal caso è

$$\boxed{L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ipotesi: f lip. in A con costante L
Tesi: $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in A$

Prendo $x_0 \in A$ e per definizione

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \underbrace{\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|}_{\substack{\leq L \text{ per ogni} \\ h \text{ ammissibile}}} \leq L$$

Ipotesi : $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in A$

Tesi : $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ per ogni x e y in A

Per il teorema di Lagrange vale

$$|f(x) - f(y)| = \overbrace{|f'(c)|}^{\leq L} \cdot |x-y| \qquad \leq L|x-y|$$

c = punto tra x e y (ignoto)

Oss. È fondamentale che l'insieme di def. di f non abbia buchi, cioè se x e y stanno in A, allora tutto il segmento con estremi x e y deve essere contenuto in A, in modo che possa applicare Lagrange.

Oss. Nella seconda parte della dim. ho mostrato che la costante di Lip. di f in A è $\leq$ del sup di $|f'(x)|$.
Dovrei dimostrare che f non può essere Lip. con una costante $<$ del sup. Per far questo bisogna tornare nella prima parte della dimostrazione.

Esempio 1 $\quad f(x) = x^2$ in $[0, 100]$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in [0, 100] \} = \sup \{ 2x : x \in [0, 100] \} = 200$$

quindi è Lip. con costante 200

Esempio 2 $\quad f(x) = x^2$ su tutto $\mathbb{R}$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = +\infty \implies \text{no Lip.}$$

Esempio 3 $\quad f(x) = \sqrt{x}$ in $A = [1, +\infty)$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \geq 1 \} = \sup \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} : x \geq 1 \right\} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\sqrt{x}$ è Lip con costante $\frac{1}{2}$ in $[1,+\infty)$, cioè

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le \frac{1}{2}|x-y| \qquad \forall x\ge 1,\ \forall y\ge 1$$

Analogamente

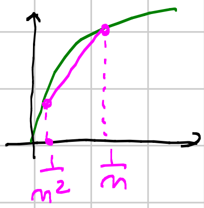
$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le 5\,|x-y| \qquad \forall x\ge \frac{1}{100},\ \forall y\ge \frac{1}{100}$$

$$\sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x \ge \frac{1}{100}\right\}$$

Esempio 4 $f(x)=\sqrt{x}$ è Lip. in $(0,+\infty)$? No!

$$\sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x\in(0,+\infty)\right\} = +\infty \implies \text{NO}$$

[Volendo usare la definizione e trovare un assurdo, posso prendere $x=\frac{1}{n}$, $y=\frac{1}{n^2}$]



Esempio 5 $f(x)=x^2\sin(x^3)\,e^{-\sqrt{x}}$ è Lip. per $x\ge 0$?

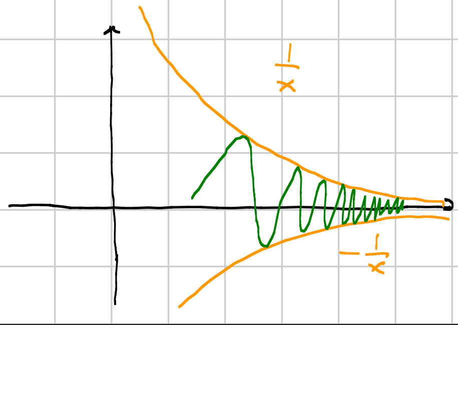
Facciamo la derivata (in $x=0$ andrebbe fatta a parte)

$$f'(x) = 2x\sin(x^3)e^{-\sqrt{x}} + 3x^4\cos(x^3)e^{-\sqrt{x}} - x^2\sin(x^3)e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Mi serve che sia limitata su tutto $[0,+\infty)$. Questo è vero perché in $x=0$ non ci sono problemi e tende a 0 per $x\to+\infty$.

Esempio 6 $f(x)=\dfrac{\sin(x^{20})}{x}$ è Lip. in $[10,+\infty)$?

No! La derivata non è limitata!



Domanda: e se $f(x)\to 0$ ed è monotona?

ANALISI 1 — LEZIONE 048

Note Title 17/11/2016

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Teorema misterioso Sia $\delta > 0$ e sia $f : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, sia $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che f sia derivabile $n+1$ volte in $(-\delta, \delta)$.
Allora

$$\boxed{f(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\text{pol. di Taylor di ordine } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}_{\text{Resto di LAGRANGE, e } c \text{ è un p.to misterioso compreso tra } 0 \text{ e } x.} x^{n+1}}$$

Oss 1 – Il resto alla Peano fornisce informazioni al limite, quello alla Lagrange per ogni x

2 – Per $n=0$ la formula diventa

$$f(x) = \underbrace{P_0(x)}_{= f(0)} + f'(c)\, x \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{f(x) - f(0) = f'(c)\, x}_{\text{Teo. Lagrange classico}}$$

3 – Con la solita traslazione la formula vale anche con centro in un p.to x_0 qualunque

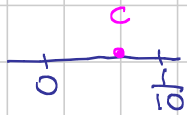
$$f(x) = P_n(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove c sta tra x e x_0 e P_n è il pol. di Taylor di ordine n in x_0.

— o — o —

Utilizzi operativi : → calcolo approx. di funzioni
→ dim. di disug.
→ convergenza di serie di Taylor

Esempio 1 Calcolare approx $\cos \frac{1}{10}$



$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}_{P_5(x)} + \underbrace{\frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6}_{\text{resto di Lagrange}}$$

Se invece di $\cos\frac{1}{10}$ scrivo

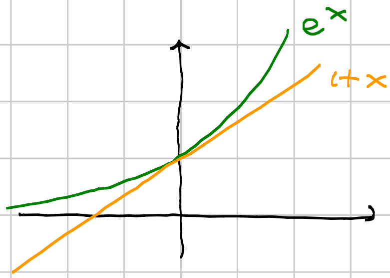
$$1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{100} + \frac{1}{24}\,\frac{1}{10.000} = \frac{240.000 - 1.200 + 1}{240.000} = \frac{238.801}{240.000}$$

ho commesso un errore che è

$$\frac{\overbrace{|f^{(6)}(c)|}^{\leq 1}}{720} \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{1}{7{,}2 \cdot 10^8}$$

Riprova Frazione $= 0{,}99500416\underset{\uparrow}{6}$ $\quad \cos\frac{1}{10} = 0{,}99500416\underset{\uparrow}{5}$

Esempio 2 Dimostrare che $e^x \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(con uguaglianza $\Leftrightarrow x = 0$)



Taylor-Lagrange con $f(x) = e^x$, $n = 1$

$$e^x = \underbrace{1 + x}_{P_1(x)} + \frac{f''(c)}{2!}x^2$$

$$= 1 + x + \underbrace{\boxed{\frac{e^c}{2}x^2}}_{\geq 0} \geq 1 + x$$

$\uparrow$ vale $=$ se e solo se $x = 0$.

Esempio 3 Dim. che $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(con $=$ se e solo se $x = 0$)

Stessa cosa con $n = 3$ $\qquad e^x = P_3(x) + \frac{e^c}{24}x^4$

Esempio 4 Risolvere la diseq. $e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$

Osservo che per $x \to -\infty$ non può essere vera

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2 + \boxed{\frac{e^c}{6}x^3}$$

il segno dipende da x

- per $x>0$ $e^x > P_2(x)$
- per $x=0$ c'è $=$
- per $x<0$ $e^x < P_2(x)$

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti.

$\boxed{\text{Dim. nel caso speciale di } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^2}$

Prendo un punto x_0 e scrivo Taylor-Lagrange con $n=1$ e centro nel punto:

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$$

$$= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{equazione retta tangente in } x_0} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2}}_{\geq 0}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

— o — o —

Esempio 5 Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{\text{serie di Taylor di } e^x} = e^x$$

Le somme parziali della serie sono i polinomi di Taylor $P_n(x)$ di e^x, quindi

dipende da x e da n, ma comunque sta tra 0 e x

$$\left| e^x - P_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

$$= \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

$$\leq \boxed{\frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}} \to 0$$ perché fattoriale batte le potenze

dove $M = \max$ di e^c per c tra 0 e x (cioè e^x per $x>0$ e 1 per $x<0$)

Oss. In una lezione prec. c'è dim. diversa per $x>0$.

—o—

Allo stesso modo si dimostra la convergenza per ogni $x \in \mathbb{R}$ delle serie di $\sin x$ e $\cos x$ (anche iperbolici)

—o—o—

Esempio 6 Per quali $x \in \mathbb{R}$ possiamo dire che

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$\boxed{1^a \text{ osservazione}}$ Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Per $x > 1$ manca la cond. necessaria
per $x = 1$ converge per Leibnitz
per $x \in (-1, 1)$ c'è pure assoluta convergenza
per $x = -1$ è l'armonica che diverge
per $x < -1$ manca la cond. nec.

Posso sperare nella convergenza uguaglianza solo per $x \in (-1, 1]$

2ª oss. Taylor Lagrange

$$\log(1+x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Quindi $$\left|\log(1+x) - P_n(x)\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c)\right|$$

c'è la formula ed è del tipo

$$\frac{n!\,(-1)^{\cdots}}{(1+c)^{n+1}}$$

$$\text{errore} \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{(1+c)^{n+1}}$$

dipende da x e da n

Cosa succede per $n \to +\infty$. Tutto dipende da $\left|\frac{x}{1+c}\right|$

se $x \in [0,1)$ il termine è più piccolo di 1 $\rightsquigarrow$ resto $\to 0$

se $x \in (-1,0]$ non è chiaro per nulla

Se $x = 1$ si osserva che

$$\left|\frac{x}{1+c}\right| \leq \frac{1}{1}\text{, e in questo caso mi salva } (n+1) \text{ sotto.}$$

Quindi per $x=1$ c'è convergenza, quindi

$$\boxed{\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots}$$

— o — o —

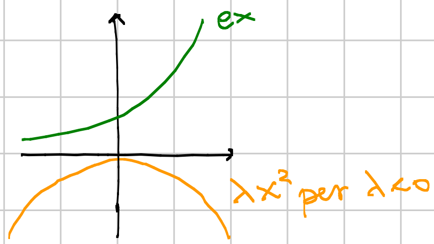
ANALISI 1 – LEZIONE 049

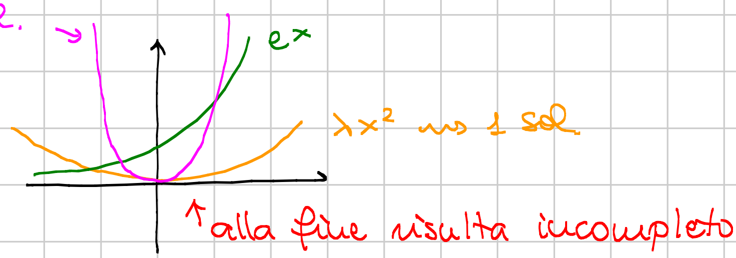
Note Title 21/11/2016

Esempio 1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluz. dell'eq.

$$\boxed{e^x = \lambda x^2}$$

Consideraz. gen.: se l'eq. è $f(x) = \lambda$, allora studio $f(x)$ e interseco con // asse x.
Se l'eq. è in altra forma, sembra di dover confrontare 2 grafici, COSA DA NON FARE MAI

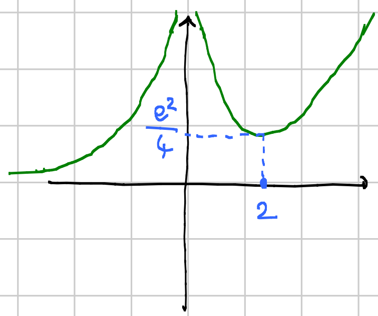




Oss. Una buona strategia, quando possibile, è $\boxed{\text{isolare } \lambda}$

Nell'esempio, osservo che $x=0$ non è mai sol., quindi riscrivo

$$\underbrace{\boxed{\frac{e^x}{x^2}}}_{f(x)} = \lambda \qquad \rightsquigarrow \text{ studio } f(x)$$

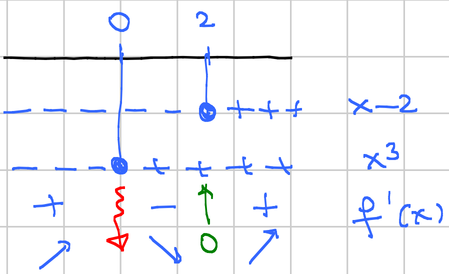


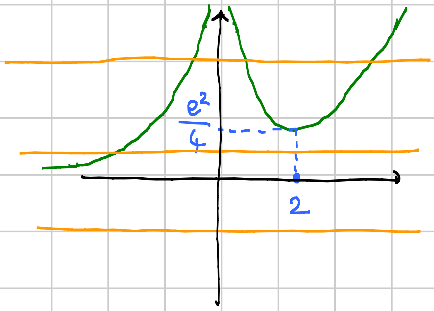
- Definita e continua (pure C^∞) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Limiti agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

- $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- Studio segno $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = e^x \, \dfrac{x-2}{x^3}$





Conclusioni

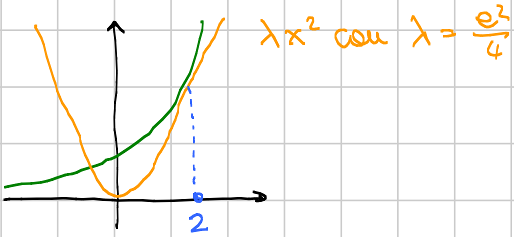
→ per $\lambda \leq 0$ non ci sono soluzioni

→ per $\lambda \in \left(0, \frac{e^2}{4}\right)$ ⇝ 1 sol.

→ per $\lambda = \frac{e^2}{4}$ ⇝ 2 sol.

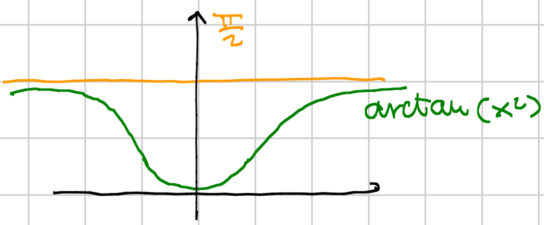
→ per $\lambda > \frac{e^2}{4}$ ⇝ 3 sol.

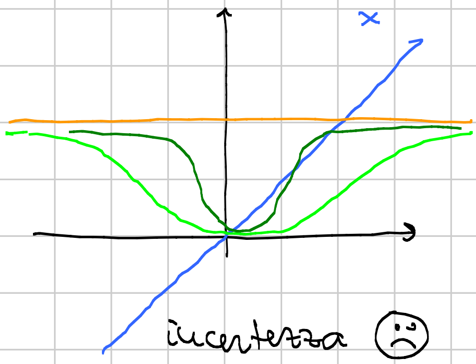
Il disegno di prima era incompleto



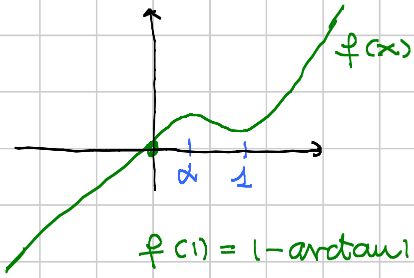
<u>Esempio 2</u> Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$

Se provo a sorrapporre i grafici...





$f(x) = x - \arctan(x^2)$



- Definita e C^∞ su tutto $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

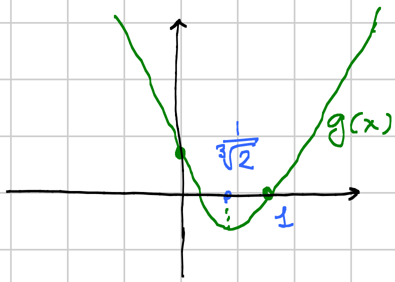
$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$

$f(0) = 0$ se fosse monotona, avrei finito

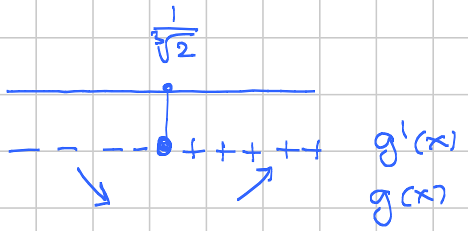
- $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$

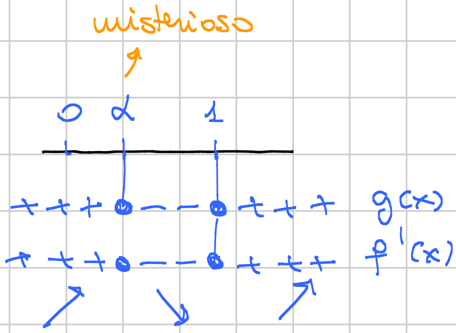
Il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $\boxed{x^4 - 2x + 1}$ $= g(x)$

Apro una parentesi e studio $g(x)$:



... convenevoli ... $g'(x) = 4x^3 - 2$
$= 2(2x^3 - 1)$





Quindi $g(x)$ si annulla in 2 p.ti

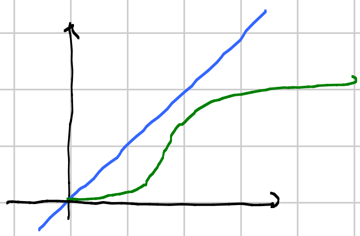
Conclusione: visto il valore di $f(1)$, possiamo concludere che

$f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$

con uguaglianza solo per $x = 0$.

— o — o —

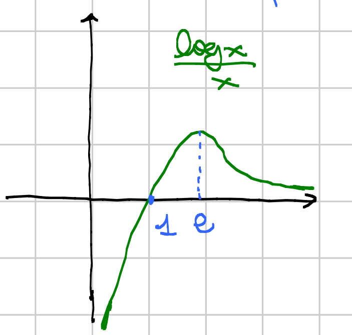
vero grafico. →



Esempio 3 Studiare la monotonia della succ. $\sqrt[n]{n}$ per $n \geq 1$.
Qual è il valore max che raggiunge?

Dovrei risolvere $\sqrt[n+1]{n+1} \geq \sqrt[n]{n}$ ...

Scrivo $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n}$ e studio la funzione $\boxed{\dfrac{\log x}{x}}$ "$f(x)$"



- Definita e C^∞ in $(0, +\infty)$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- zeri e segno dipendono da $\log x$

$0 \quad 1$

$- - \bullet + + + \quad f(x)$

- Segno di $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

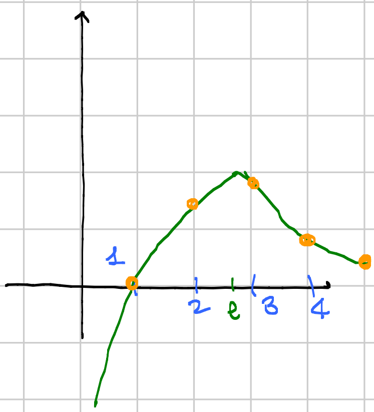
$0 \quad 1 \quad e$

$+ + + + + + \bullet - - - \quad 1 - \log x$

$+ + + + + + + + + \quad x^2$

$+ \qquad - \quad f'(x)$

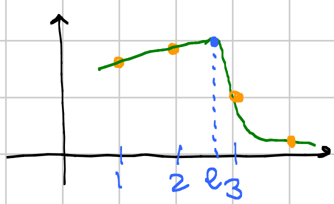
$\nearrow \qquad \searrow \quad f(x)$



Dallo studio su x deduco che
→ la succ. è decrescente da $n = 3$ in poi
→ crescente fino ad $n = 2$

Errore classico: il max su $\mathbb{N}$ si realizza in $n = 3$ perché
3 è l'intero più vicino al p.to di max in $\mathbb{R}$ (e)

In generale per il max occorre confrontare il valore prima e quello dopo (in questo caso $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$)



— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 050

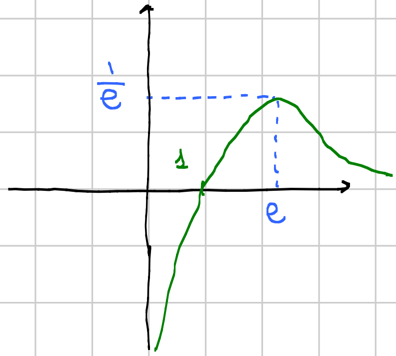
Note Title 21/11/2016

Esempio 1 Determinare, al variare del parametro $\boxed{a>0}$, il numero di sol. dell'equazione

$$\boxed{a^x = x^a}$$

Lo scrivo come $e^{x \log a} = e^{a \log x} \rightsquigarrow x \log a = a \log x$

$$\frac{\log x}{x} = \boxed{\frac{\log a}{a}} = b$$



$\boxed{1^\circ \text{ passo}}$ Studio al variare di b

→ per $b \le 0 \rightsquigarrow 1$ sol.

→ per $b \in (0, \frac{1}{e}) \rightsquigarrow 2$ sol.

→ per $b = \frac{1}{e} \rightsquigarrow 1$ sol.

$\boxed{2^\circ \text{ passo}}$ Torno in a

→ per $\frac{\log a}{a} \le 0 \rightsquigarrow 1$ sol. $\qquad a \in (0,1] \rightsquigarrow 1$ sol.

→ per $\frac{\log a}{a} = \frac{1}{e} \rightsquigarrow 1$ sol. $\qquad a = e \rightsquigarrow 1$ sol.

→ per $0 < \frac{\log a}{a} < \frac{1}{e} \rightsquigarrow 2$ sol. $\qquad a \in (1,e) \cup (e,+\infty) \rightsquigarrow 2$ sol.

Oss. Per $a=2$ diventa $2^x = x^2 \rightsquigarrow$ ha 2 sol. che sono $x=2$ e $x=4$

Per $a=3$ si riesce a scrivere le 2 sol. $\rightsquigarrow$ provarci

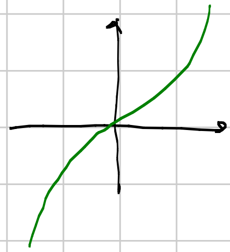
Per $a=e$ diventa $e^x = x^e$: sol. unica $x=e$

Per $a=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2^x} = \sqrt{x} \rightsquigarrow \text{sol unica } x = \frac{1}{2}$$

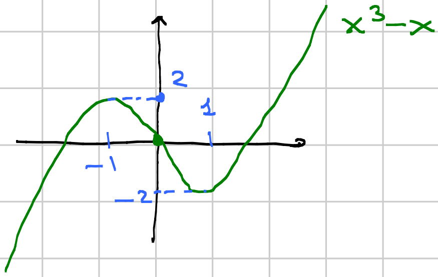
Esempio 2 $\underbrace{x^3+x}_{f(x)} = a^3+a$ al variare di a

$f(x)$ è strett. cresc. e surg.



$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ la sol. è unica $(x=a)$

Esempio 3 $\underbrace{x^3-3x}_{f(x)} = a^3-3a$



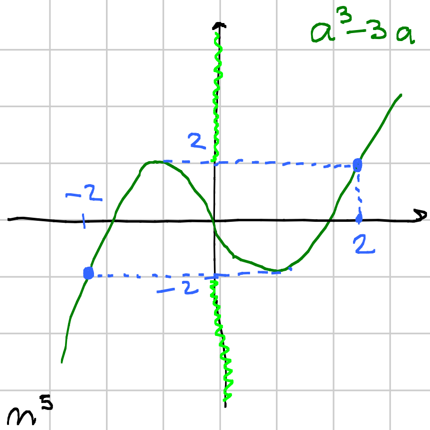
$f'(x) = 3x^2-3$

Studio $x^3-3x = b$ e ottengo

- $b \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \rightsquigarrow$ 1 sol.
- $b = \pm 2 \rightsquigarrow$ 2 sol.
- $b \in (-2,2) \rightsquigarrow$ 3 sol.

Torno in a:

- 1 sol. se $a^3-3a \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$
  cioè $a \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$



Altri casi sono analoghi

—o —o —

Esempio 4 Consideriamo la succ. $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$.

Dimostrare che ha max e calcolarlo.

Esistenza del max Prendo $n=2$ ottengo $a_2 = 8$

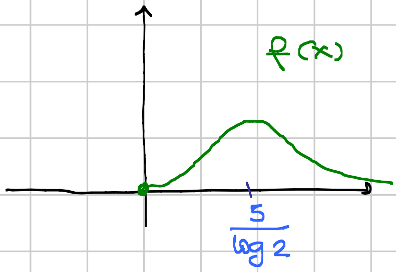
Osservo che $a_n \to 0$, quindi $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq 7 \ \forall n \geq n_0$

Quindi $\underbrace{\max\{a_n : n = 0, \ldots, n_0\}}_{\text{numero finito, quindi esiste ed è } \geq 8} = \max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Trovo il max: passo alla funzione $f(x) = x^5 2^{-x}$ e la studio

$$f'(x) = 5x^4 2^{-x} - x^5 2^{-x} \log 2$$

$$= x^4 2^{-x} (5 - x \log 2)$$



Per passare ad n occorre stimare $\frac{5}{\log 2}$

In realtà basta calcolare i valori di a_n fino a quando inizia a decrescere: l'ultimo prima della decrescenza è il max.

— o — o —

Disuguaglianze classiche

$\sin x \le x \iff x \ge 0$ con uguaglianza solo per $x = 0$

$\arctan x \le x \iff x \ge 0$ " $x = 0$

$\log(1+x) \le x \iff x > -1$ " $x = 0$

$e^x \ge 1 + x \iff x \in \mathbb{R}$ " $x = 0$

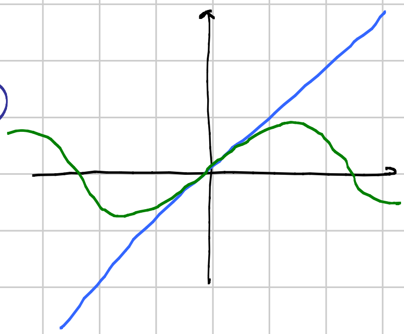
Sono confronti tra funzioni e sviluppini.
Si dimostrano tutte con studio di funzione

$\sin x \le x$ ⇝ pongo $f(x) = x - \sin x$ ⇝ osservo che $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 - \cos x$. Ora $f'(x) \ge 0$ sempre con annullamento sporadico. Monotonia 3 $\Rightarrow$ f è strett. cresc. Quindi

$f(x) > 0$ per $x > 0$ (quindi $x > \sin x$)

$f(x) = 0$ per $x = 0$ (" $x = \sin x$)

$f(x) < 0$ per $x < 0$ (" $x < \sin x$)

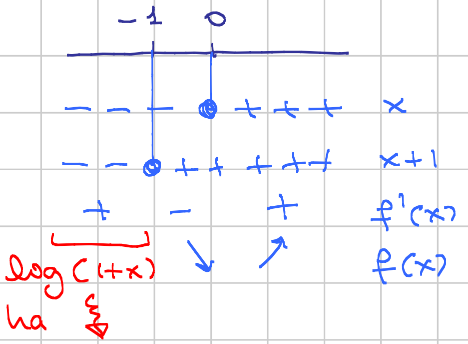


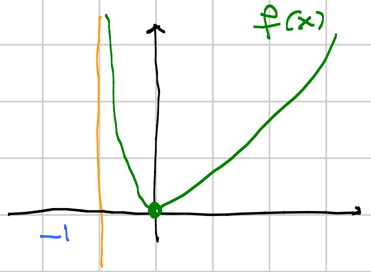
$\arctan x \leq x \rightsquigarrow$ stessa cosa con $f(x) = x - \arctan x$

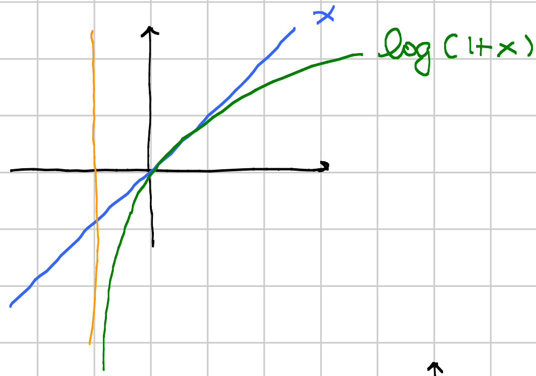
strett. cresc. e $f(0) = 0$.

- $\log(1+x) \leq x \rightsquigarrow$ studio $f(x) = x - \log(1+x)$

$f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geq 0$ per $x \geq 0$

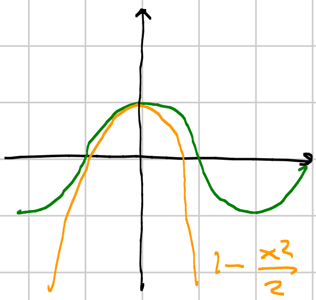






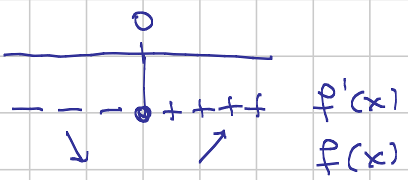
$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

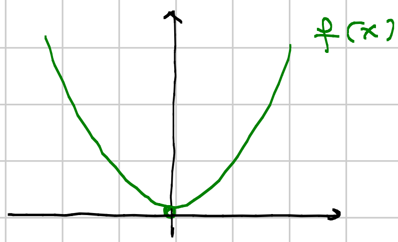
con uguaglianza $\Leftrightarrow x = 0$



Pongo $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$. Osservo che

$f(0) = 0$ e $f'(x) = x - \sin x$

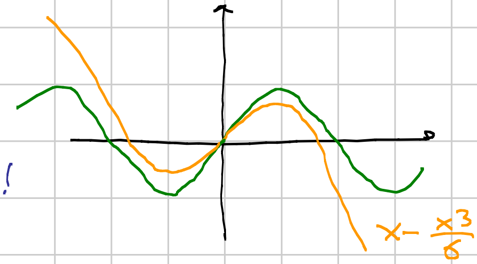




$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ per ogni $x \geq 0$ con ug. $\Leftrightarrow x=0$

$\frac{1}{6}x^3 - x + \sin x = f(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x$ = quella di prima!



<u>Conclusione</u> Posso stimare $\sin x$ e $\cos x$, ma anche $\arctan x$, con opportuni pol. di Taylor dall'alto e dal basso.

— o — o —

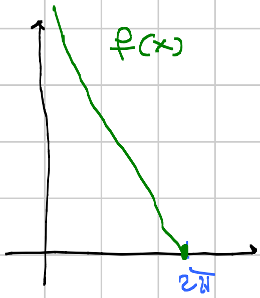
ANALISI 1 — LEZIONE 051

Note Title 23/11/2016

Esercizio 1 $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x - \sin x}$

Dim. che $\forall \lambda > 0 \ \exists! x \in (0, 2\pi)$ t.c. $f(x) = \lambda$

Dimostriamo che $f: (0,2\pi) \to (0,+\infty)$ è bigettiva



1° fatto: continua in $(0,2\pi)$ e $f(2\pi) = 0$. Va osservato che denom $\neq 0$ perché

$\sin x < x \quad \forall x > 0$

(è continua pure in $(0,+\infty)$)

2° fatto $f(x) > 0$ in $(0,2\pi)$ perché num e denom > 0.

3° fatto $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{\text{Taylor}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = +\infty$

4° fatto spero che $f(x)$ sia decrescente.

$$f'(x) = \frac{\sin x(x - \sin x) - (1-\cos x)^2}{(x-\sin x)^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di

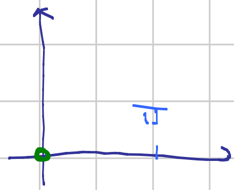
$$x\sin x - \sin^2 x - 1 - \cos^2 x + 2\cos x = x\sin x - 2 + 2\cos x = g(x)$$

Spero che $g(x) < 0$ per ogni $x \in (0,2\pi)$

$g(x) = \underbrace{x\sin x}_{\substack{\leq 0 \\ \text{in } [\pi,2\pi]}} + \underbrace{2(\cos x - 1)}_{<0}$ quindi $g(x) < 0$ in $[\pi, 2\pi)$

Resta da studiare g in $[0,\pi]$

$g'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$



Vorrei che $g'(x) \le 0$ per $x \in [0,\pi]$

Questo è banale se $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Rimane $[0, \frac{\pi}{2}]$

$g''(x) = \cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x} < 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$

$g'(0) = 0$ + $g''(x) < 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow$ $g'(x) < 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$

$g(0) = 0$ + $g'(x) < 0$ in $(0, \pi)$ $\Rightarrow$ $g(x) < 0$ in $(0, \pi)$.

— o — o —

Esercizio 2 Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ di

$$(x - \sin x)\sin x - (1-\cos x)^2 = \left(\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2$$

$$= \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^5)$$

funzione pari (oppure vedo che il termine dopo è x^6)

— o — o —

Esercizio 3 Dimostrare che esiste una costante $\boxed{m > 0}$ tale che

$$\underbrace{\cos^6 x + \sin^{22} x}_{f(x)} \ge m \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Oss. Se fosse ≥ 0 è gratis.

Dim sbagliata: $f(x) \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f(x) \neq 0$ sempre perché altrimenti deve succedere che $\sin x = \cos x = 0$. Quindi $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, FINE.

Oss. Lo stesso discorso mostrerebbe che $\frac{1}{1+x^2} \geq m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dim. Per W. esteso alle funzioni periodiche $\boxed{\text{esiste il minimo}}$, quindi esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0)}_{\overset{\shortparallel}{m}} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio 4 Esiste $m > 0$ t.c. $\underbrace{\cos x + 3\sin^3 x}_{f(x)} \geq m \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Come prima in $[0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione ammette minimo, quindi

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0)}_{\overset{\shortparallel}{m}} > 0$$ (somma di 2 quantità ≥ 0 che non sono entrambe nulle)

Oss. 1 – negli altri quadranti $f(x)$ può diventare negativa

2 – nello stesso modo si vede che $\frac{1}{\cos x + 3\sin^3 x}$ è ben definita in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e limitata super.

— o — o —

Esempio 5 Dimostrare che $\sinh x \leq x + \frac{x^3}{3}$ per ogni $x \in [0,1]$

Oss. 1 – È banale che $\sinh x \geq x + \frac{x^3}{6}$ per ogni $x \geq 0$ (Taylor – Lagrange)

2 – È banale che $\sinh x \leq x + \frac{x^3}{3}$ non può essere vera $\forall x \geq 0$.

(a sinistra c'è un esponenziale, a dx un polinomio)

Pongo $f(x) = x + \frac{x^3}{3} - \sinh x$ e spero che $f(x) \geq 0$ in $[0,1]$

Osservo che $f(0) = 0$ e spero che sia crescente in $[0,1]$

$f'(x) = 1 + x^2 - \cosh x$, $f''(x) = 2x - \sinh x$, $f'''(x) = 2 - \cosh x$

Ora $f'''(x) \geq 0$ in $[0,1]$ perché $f'''(x) \geq 2 - \cosh 1 \geq 0$

$\cosh 1 \overset{?}{\leq} 2$

$\frac{e + \frac{1}{e}}{2} \overset{?}{\leq} 2$ ok

Visto che $f'''(x) > 0$ in $[0,1]$ e $f'(0) = f''(0) = 0$, allora

$f''(x) \geq 0$ in $[0,1]$

$f'(x) \geq 0$ in $[0,1]$

$f(x) \geq 0$ in $[0,1]$

Oss. Abbiamo dimostrato strada facendo che

$$\sinh x \leq 2x \qquad \forall x \in [0,1]$$
$$\cosh x \leq 1 + x^2 \qquad \forall x \in [0,1]$$

—o —o —

Esercizio 6 Dimostrare che $f(x) = \sinh(x^5) - \cosh(x^3)$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è bigettiva.

La surgettività segue dai limiti per $x \to \pm\infty$ (qui comanda $\sinh(x^5)$)

Per l'iniettività guardo la derivata:

$$f'(x) = 5x^4 \cosh(x^5) - 3x^2 \sinh(x^3) = x^2 \left(5x^2 \cosh(x^5) - 3 \sinh(x^3)\right)$$

Spero che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e anzi $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.
Ora

- per $x < 0$ è ovvio che $f'(x) > 0$
- per $x \geq 1$ è semplice che $f'(x) > 0$. Infatti

$$\underbrace{5x^4}_{\geq x^2} \underbrace{\cosh(x^5)}_{\geq \cosh(x^3)} \geq 5x^2 \cosh(x^3) \geq 5x^2 \sinh(x^3) > 3x^2 \sinh(x^3)$$

- Resta il caso con $x \in (0,1)$. Qui uso che

$$5x^2 \cosh(x^5) \geq 5x^2 \geq 3\left(x^3 + \frac{x^9}{3}\right) \geq 3\sinh(x^3)$$

$\cosh \geq 1$

uso esercizio precedente + $x^3 \in [0,1]$

La disug. centrale è $5x^2 \geq 3x^3 + x^9$ e questa è vera in $[0,1]$ perché

$$x^2 \geq x^3 \qquad x^2 \geq x^9$$

ANALISI 1 – LEZIONE 052

Note Title 23/11/2016

Esempio 1 Dimostrare le disuguaglianze

$$|\sin x - \sin y| \le |x-y| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$|\cos x - \cos y| \le |x-y| \qquad \text{"}$$
$$|\arctan x - \arctan y| \le |x-y| \qquad \text{"}$$

Dim. Sono tutte disuguaglianze di Lipschitzianità con costante $= 1$.
Le funzioni sono $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$.
Basta fare nei 3 casi

$$\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

$f(x) = \sin x \leadsto \sup\{|\cos x| : x \in \mathbb{R}\} = 1$
$f(x) = \cos x \leadsto \sup\{|-\sin x| : x \in \mathbb{R}\} = 1$

$f(x) = \arctan x \leadsto \sup\left\{\frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\} = 1.$

Esempio 2 Trovare la più piccola costante c tale che

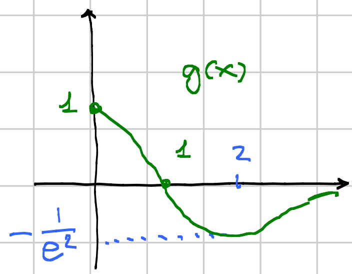
$$|xe^{-x} - ye^{-y}| \le c|x-y| \qquad \forall x \ge 0 \ \forall y \ge 0$$

Dim Devo trovare la costante di Lip. di $f(x) = xe^{-x}$ in $[0, +\infty)$

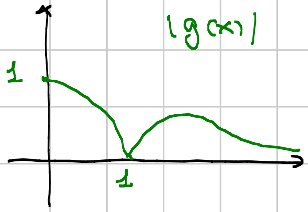
$$\sup\{|f'(x)| : x \ge 0\} = \sup\{|e^{-x} - xe^{-x}| : x \ge 0\}$$

Quindi studio $g(x) = (1-x)e^{-x}$ per $x \ge 0$

$$g'(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$



Quindi

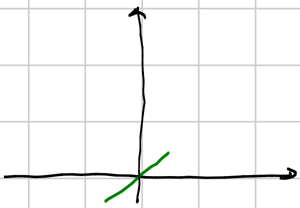


$$\sup\{|g(x)| : x \geq 0\} = 1 = c \text{ ottimale.}$$

Oss. Esiste c per cui la disug. vale $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$?

No! Se esistesse, $f(x) = xe^{-x}$ sarebbe Lip. in $\mathbb{R}$, quindi $f'(x)$ sarebbe limitata in $\mathbb{R}$, ma non lo è perché tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$.

Esempio 3 $\quad f(x) = \arctan^2 x + \sin x$



Domanda: esistono max/min su $\mathbb{R}$?

Esplorazione: limiti per $x \to \pm\infty$ ... poi li facciamo

$f(x)$ assume valori negativi. Infatti $f(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, quindi $f'(0) = 1$, quindi $f(x) < f(0) = 0$ in un intorno sx di 0.

Il limite per $x \to +\infty$ non esiste. Per dimostrarlo per bene prendo

$a_n = 2\pi n \qquad f(a_n) \to \frac{\pi^2}{4}$

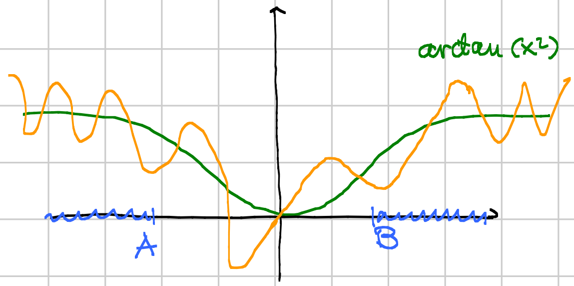
$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad f(b_n) \to \frac{\pi^2}{4} + 1$

Idem a $-\infty$.

$$\boxed{\text{Fatto 1: } \sup = \frac{\pi^2}{4} + 1 \text{ e max non esiste}}$$

Basta osservare che $f(x) < \frac{\pi^2}{4} + 1$ sempre e $f(b_n) \to \frac{\pi^2}{4} + 1$.

$\boxed{\text{Fatto 2: esiste } \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)}$



Osservo che $f(x) \geq \arctan^2 x - 1$

Quindi esistono $A<0$ e $B>0$ t.c.

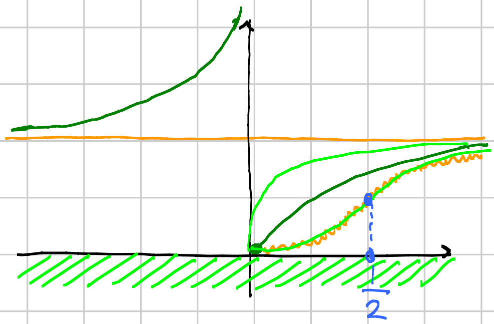
$$f(x) > 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in (-\infty, A] \cup [B, +\infty)$$

Per W. vero esiste $\min\{f(x) : x \in [A,B]\} \leq 0$

perché $x=0$ gioca

Ora il min in $[A,B]$ è anche min. in generale.

Esempio 4 Studiare per bene $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$



- C^∞ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- limiti agli estremi ⇝ vedi figura

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

- $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} > 0$ per ogni $x \neq 0$.
- Per vedere come va a 0^+, basta vedere $\lim_{x\to 0^+} f'(x) =$

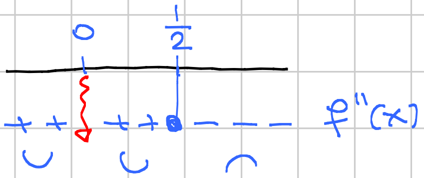
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} y^2 = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$$

Oss. Possiamo ora dire che $e^{-\frac{1}{x}}$ è Lip. in $(0, +\infty)$

(infatti $f'(x)$ tende a 0 sia per $x\to 0^+$, sia per $x \to +\infty$, quindi $|f'(x)|$ è limitata)

Ci aspettiamo un p.to di flesso in $(0, +\infty)$

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^4} - e^{-\frac{1}{x}} \frac{2}{x^3} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(1-2x)$$



$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 0$$

<u>Commento</u> Tutte le derivate successive hanno lo stesso comp., cioè

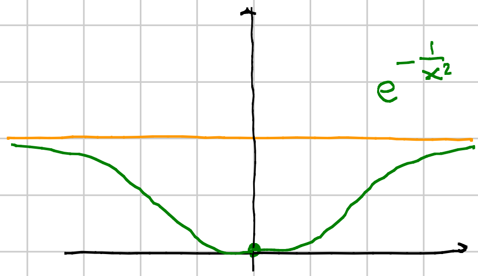
$$\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x) = 0$$

ANALISI 1 – LEZIONE 053

Note Title 24/11/2016

$\boxed{\text{EPPUR SI MUOVE}}$ Consideriamo la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = [e^{-\infty}] = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^0 = 1$$

$f(x)$ è strett. cresc. per $x > 0$ e pari

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \qquad \text{per } x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \underset{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} e^{-y^2} \cdot 2y^3 = \lim_{y \to +\infty} 2 \frac{y^3}{e^{y^2}} = 0$$

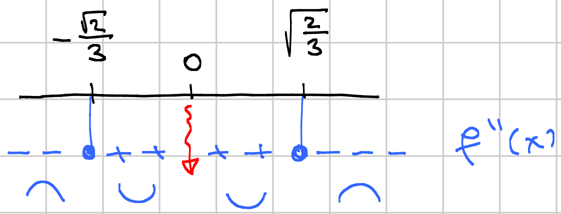
Per vedere se è derivabile in $x = 0$ uso rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} e^{-\frac{1}{h^2}} \cdot \frac{1}{h} = 0$$

Da questi conti segue che $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{+4}{x^6} + e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{-6}{x^4} = -e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^6} (-4 + 6x^2)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^6} (4 - 6x^2)$$



Si può verificare che $f''(x)$ esiste anche per $x=0$ e vale 0 (basta fare il rapporto incrementale in $x=0$ per $f'(x)$), quindi $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Più in generale si verifica che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(k)}(0) = 0$.

L'idea è di dimostrare per induzione che

$$\boxed{f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \qquad x \neq 0 \qquad e \qquad f^{(k)}(0) = 0}$$

dove $P_k(x)$ è un opportuno polinomio.

In particolare tutti i polinomi di Taylor di $f(x)$ in $x=0$ sono identicamente nulli, cosa che si poteva vedere direttamente osserv. che

$$f(x) = o(x^n) \qquad \text{per} \qquad x \to 0$$

Verifica: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^n}$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0$$

In particolare: questa funzione NON è uguale alla somma della sua serie di Taylor.

Notazione: si dicono ANALITICHE le funzioni che sono somma di una serie di Taylor (si indicano con C^ω)

omega

Quindi $e^{-\frac{1}{x^2}}$ non è analitica.

—o —o —

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^8 \sin \frac{1}{x^8} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Dico che $f(x)$ ha i polinomi di Taylor in $x=0$ fino all'ordine 7 e questi polinomi sono tutti nulli.
Basta dim. che

$$f(x) = o(x^7) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^7} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x^8} = 0$$

Come lo giustifico $\quad -x \leq x \sin \frac{1}{x^8} \leq x$

$$\begin{array}{ccccc} -x & \leq & x\sin\frac{1}{x^8} & \leq & x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Uno direbbe... $\quad -1 \leq \sin \frac{1}{x^8} \leq 1$ ... poi moltiplico per x ...
impunemente solo per $x > 0$ ...

Molto meglio: trucco del valore assoluto

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \left| x \sin \frac{1}{x^8} \right| & \leq & |x| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Dico che $f(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Per $x \neq 0$ sono i teo. algebrici sulle derivate:

$$f'(x) = 8x^7 \sin \frac{1}{x^8} - 8x^8 \frac{1}{x^9} \cos \frac{1}{x^8}$$

$$= 8x^7 \sin \frac{1}{x^8} - \frac{8}{x} \cos \frac{1}{x^8}$$

Per $x = 0$ faccio il limite del rapporto incrementale

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^7 \sin \frac{1}{h^8} = 0.$$

Posso dire che $f \in C^1(\mathbb{R})$?

No! Perché non esiste $\lim_{x\to 0} f'(x)$ per colpa del termine con $\frac{1}{x}$

In particolare $f''(0)$ non esiste (se esistesse, $f'(x)$ sarebbe continua in 0).

Conclusione: i polinomi di Taylor (che esistono fino al grado 7) non sono dati dalla formula classica.
Quindi il teorema di esistenza dei polinomi di Taylor fornisce una cond. suff. ma non necessaria.

— o — o —

Esempio $f(x) = \arctan(x - x^3)$ sviluppare di ordine 3 in $x=0$

Errore classico: $f(x) = x - x^3 + o(x^3)$

Corretto: $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$

$$\arctan(x-x^3) = (x-x^3) - \frac{1}{3}(x-x^3)^3 + o(x^3)$$

$$= x - x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Errore rivisitato: $\arctan t = t + o(t)$

$$\arctan(x-x^3) = x - x^3 + o(x-x^3)$$

$$= x - x^3 + o(x) + o(x^3)$$

$$= x + o(x)$$

— o — o —

Esempio $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n} + \frac{3}{n}\right)^n$ $\quad \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$

limite metà per volta

Criterio radice $\rightsquigarrow$ Boh

e-alla generale : $e^{n\log\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)}$ Guardo l'esponente

$$n\log\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right) = n\log\frac{3}{n}\left(1+\frac{n}{3}\sqrt[n]{n}\right)$$ ☹

Faccio e-alla sulla radice

$$n\log\left(e^{\frac{1}{n}\log n}+\frac{3}{n}\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\log n+\frac{3}{n}+o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)$$

$$= \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}}\log n + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \longrightarrow +\infty$$

moltiplicando per n se ne va! aggiunto dopo video

A posteriori: $\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)^n \geq \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n$

$\sqrt[n]{n}\to 1$, $n\to+\infty$

Interpreto nuovamente:

$$\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n} = e^{\frac{1}{n}\log n}+\frac{3}{n} \sim 1+\frac{1}{n}\log n+\frac{3}{n} \sim 1+\frac{1}{n}\log n$$

$$\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)^n \sim \left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n \longrightarrow +\infty$$

Analogo:

$$\left(\sqrt[n]{n}+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}} \longrightarrow e$$

BUFFONE!!!

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 054

Note Title 24/11/2016

Esercizio $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n!}{n \log n}$

Preliminare: se fosse $\frac{1}{n}\log(n!) = \log \sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Limite da tabellina: $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ (rapporto radice)

$$\frac{\log(n!)}{n\log n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{precorso}}}{=} \frac{\log\sqrt[n]{n!}}{\log n} = \frac{\log\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n\right)}{\log n}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}{\log n}}}_{\frac{-1}{+\infty}=0} + \underbrace{\frac{\cancel{\log} n}{\cancel{\log} n}}_{1} \to 1.$$

Esercizio $f(x) = e^x - \lambda \arctan x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Studiare iniettività, surgettività, limitatezza al variare di λ.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ addio lim. superiore

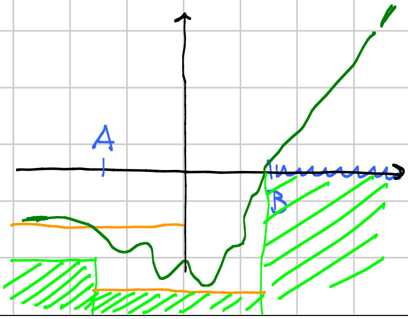
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
- è limitata inferiormente
- NON è surgettiva.

Dimostro che è lim. inferiormente

Poiché $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$,

esiste $B > 0$ t.c.

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq B$



Poiché $f(x) \to \frac{\pi}{2}\lambda$ per $x \to -\infty$, esiste $A<0$ t.c.

$$f(x) \geq \frac{\pi}{2}\lambda - 12 \qquad \forall x \leq A$$

Per Weierstrass vero esiste $m := \min\{f(x) : x \in [A,B]\}$.
Ora posso dire che

$$f(x) \geq \min\left\{ m, \frac{\pi}{2}\lambda - 12, 0 \right\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Resta da esaminare l'iniettività. Essendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua vale l'implicazione

iniettiva $\Longleftrightarrow$ strett. monotona (crescente)

Guardo $f'(x)$

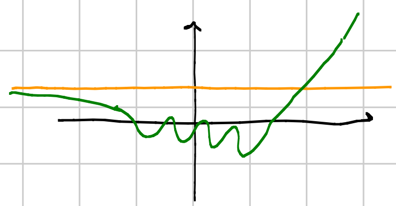
$$f'(x) = e^x - \lambda \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)e^x - \lambda}{(1+x^2)}$$

Il segno dipende dal solo numeratore. Distinguo 2 casi:

- se $\lambda \leq 0$, allora $f'(x) > 0 \Rightarrow$ (monotonia 2) è strett. cresc. e quindi iniettiva (in questo caso non esiste il min)
- se $\lambda > 0$, allora $f'(x) > 0$ per x grandi ($f'(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$)

  mentre $(1+x^2)e^x - \lambda \to -\lambda < 0$ per $x \to -\infty$, quindi il num. è negativo per x molto negativi.
  Questo dice che ci sono intervalli (anzi una semiretta) in cui $f(x)$ è decrescente. $\Rightarrow$ addio iniettività

<u>Osservazione</u> Ora possiamo dire che $f(x)$ ammette minimo in $\mathbb{R}$ se e solo se $\lambda > 0$.



<u>Fatto generale</u>: sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supp. che

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (basterebbe un $m > \ell$) (o un qualunque m^-)
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell^-$

Allora esiste $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

<u>Partenza</u> Dalla seconda ipotesi so che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < \ell$

Da qui è in discesa, cioè prendo

$A < 0$ t.c. $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \le A$

$B > 0$ t.c. $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \ge B$

A questo punto $x_0 \in [A, B]$ e

$$\underbrace{\min\{f(x) : x \in [A,B]\}}_{\le f(x_0)} = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

— o — o —

<u>Esercizio</u> $a_n = \dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{n^2 + \qquad + 7}$ $\qquad a_n \to +\infty$

Dimostrare che è definitivamente monotona

Moralmente è n, ma anche $x + 10 \sin x$ è moralmente x ma non è crescente.

Impongo $a_{n+1} > a_n$: $\dfrac{(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 + \qquad + 7} \overset{?}{>} \dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{n^2 \qquad + 7}$

Svolgo alcuni conti e spero di ridurmi a qualcosa del tipo

$f(n) \overset{?}{>} 0$ se per caso $f(n) \to +\infty$, allora ho gratis che è vera definitivamente.

$$\left[(n+1)^3+3(n+1)^2+1\right](n^2+7) \overset{?}{>} (n^3+3n^2+1)(n^2+2n+8)$$

Guardo le potenze + grandi

$$(n^3+3n^2+3n^2+\dots)(n^2+7) \overset{?}{>} (n^3+3n^2+\dots)(n^2+2n+8)$$

$$\cancel{n^5}+6n^4+\dots \overset{?}{>} \cancel{n^5}+2n^4+3n^4+\dots$$

$$n^4+\dots \overset{?}{>} 0$$

Oss 1 – Se c'era pure il $\cos n!$ non cambiava nulla perché andava a moltiplicare i termini tipo n^3 o meno

2 – Volendo essere rigoroso, al posto dei puntini devo scrivere $o(n^4)$

N.B. $n^3 = o(n^4)$ per $n \to +\infty$

$n^2 = o(n^4)$ per $n \to +\infty$

— o — o —