22 Cheatsheet

Disuguaglianza triangolare	$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ $\|\|a\| + \|b\|\| \leq \|a-b\|$
Rapporto incrementale	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
Funzione pari e dispari	$f(-x) = f(x)$ $f(-x) = -f(x)$
Boh	$f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$
Continuità in un punto	$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
Derivabilità in un punto	$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$
Asintoto obliquo	$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x)$

Table 10: Formule varie

Limite di un polinomio che tende ad infinito: raccoglimento
Limite di rapporto di polinomi che tende ad infinito: raccoglimento
Derivate fondamentali Inclusa composta e inversa

Zeri	$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua $f(a)\cdot f(b)<0\Longrightarrow \exists c\in(a,b): f(c)=0$
Confronto	$A\subset\mathbb{R}$, $x_0\in Acc(x)$, $f,g:A\to\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1\wedge\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2\wedge$ $\exists U$ intorno $x_0: x\in U\cap A\setminus\{x_0\}$ $f(x)\le g(x)\Longrightarrow l_1\le l_2$ $f(x)\ge g(x)\Longrightarrow l_1\ge l_2$
Weirstrass	$a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua: $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1\wedge\exists\lim\limits_{x\to b} f(x)=l_2$ f lim. inf. $\iff l_1\neq-\infty\wedge l_2\neq-\infty$ f lim. sup. $\iff l_1\neq+\infty\wedge l_2\neq+\infty$ f lim. $\iff l_1\in\mathbb{R}\wedge l_2\in\mathbb{R}$ f ha min $\iff\ \exists x_0\in(a,b): f(x_0)\le min\{l_1,l_2\}$ f ha max $\iff\ \exists x_0\in(a,b): f(x_0)\ge max\{l_1,l_2\}$
Carabinieri	Se due funzioni hanno lo stesso limite ed una è inferiore all'altra, se esiste una $g(x)$ in mezzo a queste due, avrà lo stesso limite
Lagrange	$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua f derivabile in (a,b) $\exists c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
De l'Hopital	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ oppure $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\pm\infty$ $g'(x)\neq 0$ in un introno destro di a $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
o-piccolo	$f(x)=o(g(x))\iff\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
O-grande	$A\subset\mathbb{R}\wedge x_0\in Acc(A)\wedge f,g:A\to\mathbb{R}$ U intorno di x_0 $\exists M\in\mathbb{R}:$ $\|f(x)\|\ge M\cdot\|g(x)\|\Longrightarrow f(x)=O(g(x))$ $\forall x\in U\cap A\setminus\{x_0\}$
Infinitesima e parte principale	$A\subset\mathbb{R}\wedge x_0\in Acc(A)$ $f,g:A\to\mathbb{R}$ infinitesime per $x\to x_0$ $\exists L,\alpha\in\mathbb{R}$ con $L\neq 0$ t.c. $f(x)=L\cdot(g(x))^\alpha+o((g(x))^\alpha)$ f infinitesimo di ordine α rispetto a g $L(g(x))^\alpha$ parte principale

Table 11: Teoremi e definizioni

[1] $(+\infty)+(-\infty)$	[2] $(-\infty)+(+\infty)$	[3] $0\cdot(\pm\infty)$
[4] $(\pm\infty)^0$	[5] $(0^+)^0$	[6] $(1)^{\pm\infty}$

Table 12: Forme indeterminate

SE	**ALLORA**
$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$	$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^-$	$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ con } l \neq 0, \pm\infty$	$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

Table 13: Limiti ovvi

$\mathbf{x^n}$	$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$
$\mathbf{e^x}$	$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$
$\log \mathbf{x}$	$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$
$\mathbf{a^x}, a \geq 1$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$
$a = 1$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = 1$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = 1$
$0 < a < 1$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Table 14: Limiti fondamentali

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

Table 15: Limiti notevoli

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log(x))^\beta}{x^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^\beta}{(e^y)^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^\beta}{e^{y \cdot \alpha}} = 0$
$\lim_{x \to 0^+} x \log(x) = \lim_{y \to -\infty} e^y \cdot y = \lim_{z \to +\infty} e^{-z} \cdot (-z) = \frac{-z}{e^z} = 0$
$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \log(x) = \lim_{y \to 0^+} y \cdot \log(y^{\frac{1}{\alpha}}) = \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\alpha} \cdot \log(y) = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to 0^+} y \cdot \log(y) = 0$

Table 16: Limiti con sostituzione

Prodotto	$f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$
Prodotto costante	$k \in \mathbb{R}, k \neq 0 \Longrightarrow o(k \cdot g(x)) = o(g(x))$
Somma	$o(g) + o(g) = o(g)$
Prodotto 0	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) \cdot g(x) = o(g(x))$
Somma 0	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longrightarrow o(g) + o(f \cdot g) = o(g)$
o di o	$o(o(g)) = o(g)$
o di somma	$o(f+g) = o(f) + o(g)$
o di prodotto	$o(g) \cdot o(f) = o(f \cdot g)$

Table 17: Proprietà o-piccolo

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2x+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3)$

Table 18: Formule di taylor

$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ se $a > 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = 0^+$ se $0 < a < 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x^\beta}{x^\alpha} = 0$
$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \log x = 0$

Table 19: Confronto tra infiniti e infinitesimi