ANALISI 1 — LEZIONE 009

Maggioranti, minoranti, INF, SUP, MAX, MIN

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

- Si dice che un numero $M \in \mathbb{R}$ è un MAGGIORANTE di A se
$$a \le M \quad \forall a \in A \qquad (M \text{ sta a dx di } A)$$
- si dice che un numero $m \in \mathbb{R}$ è un MINORANTE di A se
$$m \le a \quad \forall a \in A \qquad (m \text{ sta a sx di } A)$$

Def. L'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante
- " inferiormente " " " " minorante
- limitato se esiste almeno un maggiorante e almeno un minorante

Oss. I maggioranti non sono obbligati ad esistere. Quando esistono non sono unici (se M è un maggiorante di A, allora anche $M+1$ o $M+2024$ sono maggioranti di A). Idem per i minoranti

Esempi ① $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

Non ha nessun maggiorante (non esiste nessun reale M che è più grande di tutti i positivi)

Invece tutti i reali $m \le 0$ sono minoranti di A

Quindi A è limitato inferiormente ma non superiormente.

② $A = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$

Stesso discorso di sopra. In particolare, tutti gli $m \le 0$ sono minoranti.

Intuitivamente: i maggioranti, quando esistono, sono le barriere dall'alto per A, i minoranti quelle dal basso.

Def. (Massimo) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A, e si scrive

$$M = \max A$$

se

(i) $a \leq M \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante)

(ii) $M \in A$ (M sta in A)

Def. (minimo) Sia ... $\qquad m = \min A$ se

(i) $m \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(ii) $m \in A$ (m sta in A)

Oss. Massimo e minimo non sono obbligati ad esistere, ma quando esistono sono unici.

Occhio: massimo e minimo possono non esistere anche se A è limitato

Esempi

① $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 4\}$

② $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

③ $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 42\}$

→ L'insieme A è limitato inferiormente e superiormente (un maggiorante è 25, un minorante è −7)

$\text{Max } A = 4 \qquad \min A$ NON ESISTE

→ L'insieme B è limitato super, ma non inferiormente

Max B e min B non esistono

→ L'insieme C è limitato infer., ma non superiormente

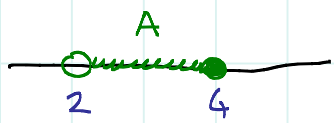
Max C non esiste $\qquad \min C = 42$

Def. (Estremo superiore) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

- Se A non è limitato superiormente si pone per definizione
$$\sup A = +\infty$$
- Se A è limitato superiormente, allora si pone per defin.
$$\sup A = \text{minimo dei maggioranti di } A$$

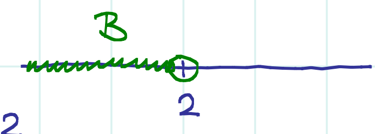
Def. (Analogamente) Sia A come sopra
- Se A non è limitato infer., si pone per defin.
$$\inf A = -\infty$$
- Se A è limitato inferiormente, allora si pone per defin.
$$\inf A = \text{massimo dei minoranti di } A$$

Esempi Siano A, B, C come sopra



→ I maggioranti di A sono tutti i numeri $M \geq 4$, quindi $\sup A = 4$

I minoranti di A sono tutti i numeri $m \leq 2$, quindi
$$\inf A = \text{massimo dei minoranti} = 2$$



→ I maggioranti di B sono tutti gli $M \geq 2$

quindi $\sup B = \text{minimo dei maggioranti} = 2$

Invece $\inf B = -\infty$ perché non esistono minoranti

→ $\sup C = +\infty$ e $\inf C = \min C = 42$

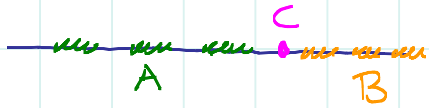
per gli stessi motivi.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto, allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono per forza (e sono unici, eventualmente $\pm\infty$)

$\boxed{\text{Dim. nel caso del sup}}$ Voglio dimostrare che sup esiste.

- Se non esistono maggioranti, allora $\sup A = +\infty$ per defin.
- Supponiamo quindi che esistano dei maggioranti, e chiamiamo B l'insieme dei maggioranti di A.

Allora A sta a sx di B (ogni elemento di A è più piccolo di ogni maggiorante)



L'assioma di continuità ci dice che esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che

$\rightarrow$ $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante, quindi $c \in B$)

$\rightarrow$ $c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo di tutti i maggioranti)

Quindi $c = \min B$ che per definizione è il sup di A.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Ripetere la dimostrazione nel caso dell' inf.

<u>Oss.</u> Questo è un punto in cui $\mathbb{R}$ si distingue da $\mathbb{Q}$

<u>Esempio</u> Consideriamo

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ e } q^2 < 2 \}$$
$$B = \{ q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ e } q^2 > 2 \}$$

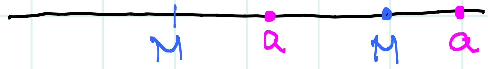
Si potrebbe dimostrare che

- A è a sinistra di B (se $a > 0$ e $b > 0$, allora $a^2 < b^2 \iff a < b$)
- se ci fosse un $c \in \mathbb{Q}$ in mezzo, questo dovrebbe verificare $c^2 = 2$ (bisognerebbe dimostrare che se $c^2 < 2$, allora esiste $q > c$ t.c. $q^2 < 2$, e se $c^2 > 2$ allora esiste $q < c$ con $q^2 > 2$)
- non esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c^2 = 2$

Fatte queste verifiche, viene fuori che in $\mathbb{Q}$ gli insiemi A e B non ammettono un separatore $c \in \mathbb{Q}$.

Caratterizzazione di sup A

- $\sup A = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$

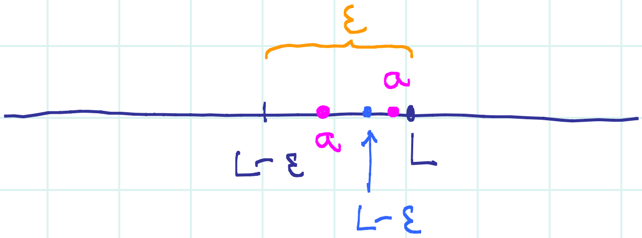


- $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

  (i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (cioè L è un maggiorante di A)

  (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A$ t.c. $a > L - \varepsilon$

  (cioè $L-\varepsilon$ non è un maggiorante di A)



<u>Esercizio</u> Scrivere lo stesso per l'inf.

— o — o —