ANALISI 1 — LEZIONE 015

Note Title 10/10/2016

Limiti da tabellina

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0\le a<1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Caso $a>1$

$a^n = (1+(a-1))^n \geq 1+n(a-1)$

$(1+x)^n \geq 1+nx$

$a^n \geq 1+\underbrace{\boxed{n(a-1)}}_{+\infty}$ $\quad a-1>0$

$a^n \to +\infty$ per confronto a 2

Caso $0<a<1$ Scrivo $a=\frac{1}{b}$ con $b>1$

$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \to \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

$b^n \to +\infty$ caso prec.

Achtung! Se $a=1$, allora $a^n \to 1$ per $n\to+\infty$

$1^n = 1, 1, 1, 1, 1 \dots$ succ. costante tende a 1.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a>0$$

Brutal: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to a^0 = 1$

andrebbe giustificato

$\boxed{\text{Dim.}}$ $(1+x)^n \geq 1+nx$ Faccio $\sqrt[n]{\ }$ a dx e sx:

$1+x \geq \sqrt[n]{\underbrace{1+nx}_{a}}$ La uso con $x=\frac{a-1}{n}$. Ottengo

$$\sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$$

Distinguo 2 casi

uso monot. di $\sqrt[n]{x}$

- se $a \geq 1$ abbiamo

$$\underset{\downarrow}{1} \leq \underset{\downarrow}{\sqrt[n]{a}} \leq \underset{\downarrow}{1+\frac{a-1}{n}}$$
$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

per carab.

- se $0 < a \leq 1$, come prima scrivo $a = \frac{1}{b}$ con $b \geq 1$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Caso prec.

— o — o —

$\boxed{\text{CRITERIO DELLA RADICE}}$ Sia a_n una successione con $a_n \geq 0$ definitivamente

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

- se $\ell > 1$ si ha che $a_n \to +\infty$
- se $\ell < 1$ " " " $a_n \to 0$
- se $\ell = 1$, allora BOH.

$\boxed{\text{CRITERIO DEL RAPPORTO}}$ Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definit.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora valgono le stesse conclusioni di sopra.

<u>Utilizzo operativo</u> Devo fare il limite di a_n e non sono capace.
Provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ oppure di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Se per caso li so fare e vengono $\neq 1$, allora ho la risposta alla domanda iniziale.

$\boxed{\text{CRITERIO RAPPORTO} \to \text{RADICE}}$ Sia $a_n > 0$ definitiv.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \ldots$$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ (stesso ℓ).

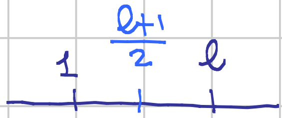
<u>Oss.</u> Non è vero il contrario, o per lo meno non completamente. Può succedere che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, ma il rapporto non ha limite (non può tendere a cose diverse da ℓ).

$a_n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots$

$$\underset{\downarrow \atop 1}{1} \le \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{a_n}} \le \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{2}} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots \text{ non ha limite}$$

$\boxed{\text{Dim. radice}}$ Supponiamo $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$

- <u>Caso $\ell > 1$ e reale</u>



Se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora definitiv. $\sqrt[n]{a_n} \ge \frac{\ell+1}{2}$. Elevo alla n

$$\underset{\downarrow \atop +\infty}{a_n} \ge \underset{\downarrow \atop +\infty}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n} \quad \text{(espon. con base } > 1)$$

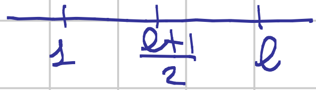
- <u>Caso $\ell = +\infty$</u> … stesso discorso … con $\sqrt[n]{a_n} \ge 2016$ definit.

- <u>Caso $0 \le \ell < 1$</u>

Definitiv. $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{\ell+1}{2}$, quindi

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \overset{\text{Hp}}{\le} \underset{\downarrow \atop 0}{a_n} \le \underset{\downarrow \atop 0}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n} \quad \text{base} < 1$$

Dim. rapporto



- **Caso $\ell > 1$ e reale** Come prima $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, quindi definit.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2}$. Detto meglio $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

$a_{n_0+1} \geq \frac{\ell+1}{2} a_{n_0}$ (uso qui che $a_n > 0$)

$a_{n_0+2} \geq \frac{\ell+1}{2} a_{n_0+1} \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$

Per induzione si può dimostrare che

$$a_{n_0+k} \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k a_{n_0} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

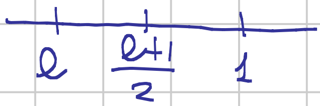
Che posso anche scrivere come

$$a_n \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} = \underbrace{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}}_{+\infty} \underbrace{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}}}_{\text{FISSO} > 0}$$

$+\infty$ per confronto a 2

- **Caso $\ell = +\infty$** : uguale con 2016 al posto di $\frac{\ell+1}{2}$

- **Caso $0 \leq \ell < 1$** : analogo partendo da



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Per induzione arrivo a

$$0 \overset{\text{Hp}}{\leq} a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}$$

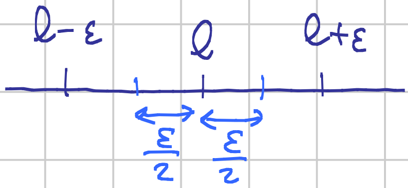
Concludo con i carabinieri. $\square$

$\boxed{\text{Dim. rapporto} \to \text{radice}}$ Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in [0, +\infty)$ (il caso $\ell = +\infty$ è più facile).

Voglio dim. che

$$\sqrt[n]{a_n} \to \ell \quad (\text{stesso } \ell).$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi so che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Con la stessa induzione di prima otteniamo che

$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0} \leq a_n \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}$$

Faccio $\sqrt[n]{\ }$ ovunque

aggiunto dopo video

$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\text{roba fissa}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\text{roba fissa}}$$

Il termine a dx tende a $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$, ma allora definitivamente

il termine di dx sta sotto $\ell + \varepsilon$.

Analogamente definitivamente il termine di sx sta sopra $\ell - \varepsilon$.

Ma allora definitivamente

$$\ell - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon \qquad \text{come volevo}$$

—o—o—

<u>Oss.</u> La precedente è una DIM. IN DUE TAPPE

<u>Oss.</u> $a_n = n^2 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \to 1 \quad$ e $\quad a_n \to +\infty$

$a_n = \frac{1}{n} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \to 1 \quad$ e $\quad a_n \to 0$