ANALISI 1 - LEZIONE 031

Note Title 27/10/2016

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Simmetria

$$\cosh(-x) = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R} \leadsto \text{PARI}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad \forall x \in \mathbb{R} \leadsto \text{DISPARI}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \quad \text{"} \leadsto \text{DISPARI}$$

Derivate

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

(segno diverso rispetto alle classiche)

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Sviluppi di Taylor (centro in $x=0$)

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

(come $\cos x$, solo con tutti $+$)

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Oss $\sinh x + \cosh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Relazione fondamentale

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot 2 = 2 \cosh x \sinh x$$

Indagare formule analoghe per $\cosh(2x)$

Oss. $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

Monotonia $\sinh x$ è strettamente crescente (quindi non periodica)

$$\sinh x = \underbrace{\frac{1}{2} e^x}_{\text{strett. cresc.}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} e^{-x}\right)}_{\text{strett. cresc.}} = \text{somma di 2 funz. strett. cresc.}$$

$\cosh x$ è strett. cresc. per $x \geq 0$.

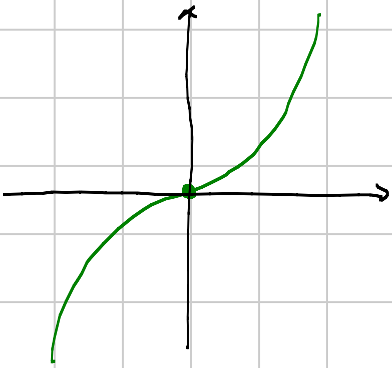
Dim. Dati $y > x \geq 0$ devo verificare che $\cosh y > \cosh x$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{\cancel{2}} > \frac{e^x + e^{-x}}{\cancel{2}} \qquad \text{Pongo } e^y = b \text{ e } e^x = a \quad (b > a \geq 1)$$

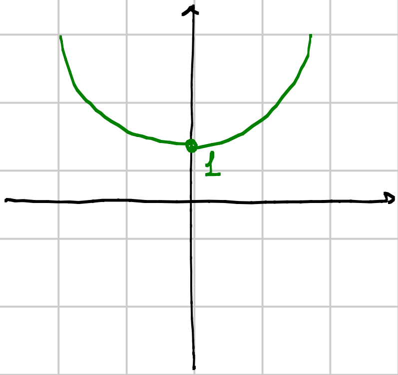
$$b + \frac{1}{b} > a + \frac{1}{a} \iff \frac{b^2+1}{b} > \frac{a^2+1}{a} \iff ab^2 + a > a^2 b + b$$

$$\iff ab(b-a) + (a-b) > 0 \iff \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{(ab-1)}_{>0 \text{ perché } a \geq 1 \text{ e } b > 1} > 0$$

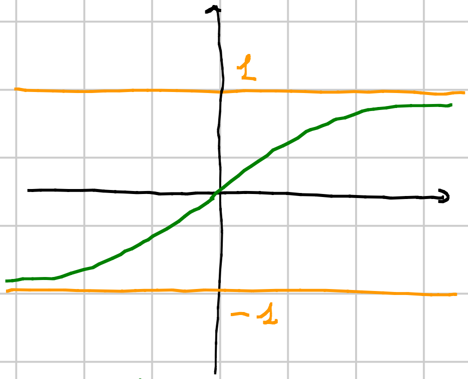
Grafici: $\sinh 0 = 0$ $\cosh 0 = 1$



$\sinh x$



$\cosh x$



$\tanh x$

Esercizio Verificare "precorsisticamente" che $\tanh x$ è crescente.
(Con le derivate è evidente)

— o — o —

FUNZIONI INVERSE

$f(x) = \sinh x$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è bigettiva, quindi ammette inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta

$$g(x) = \operatorname{arcsinh} x \qquad (\text{o settsinh } x) \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

$f(x) = \cosh x$, vista come $f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ è bigettiva, quindi ha inversa $g: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ detta

$$g(x) = \operatorname{arccosh} x \qquad (\text{o settcosh } x) \qquad \boxed{\forall x \geq 1}$$

Idem per $\operatorname{arctanh} x$ definita $(-1, 1) \to \mathbb{R}$

Oss. Lo sviluppo di Taylor di $\operatorname{arctanh} x$ è

$$\operatorname{arctanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

Formula per arcsinh (per esercizio fare arccosh)

Devo risolvere $\sinh x = y$, cioè trovare x in funzione di y

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \ ; \quad e^x - e^{-x} = 2y \ ; \quad \text{Pongo } a = e^x$$

$$a - \frac{1}{a} = 2y \ ; \quad a^2 - 1 = 2ya \ ; \quad a^2 - 2ya - 1 = 0$$

$\rightsquigarrow$ Trovo $a = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Di queste 2 radici, solo quella con il segno + è positiva

Quindi $e^x = y + \sqrt{y^2+1} \rightsquigarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \operatorname{arcsinh} y$

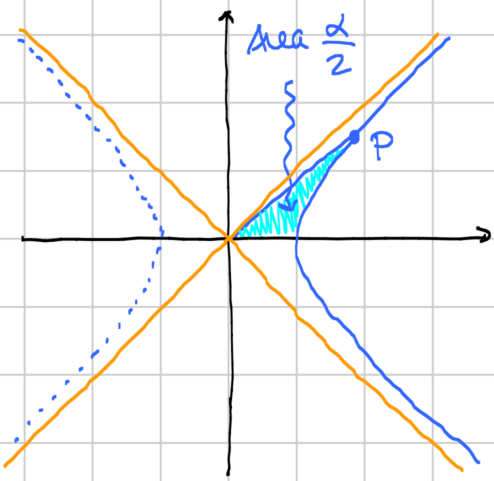
Conclusione: $\boxed{\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Nota bene: l'arg. del log è sempre > 0, anche se $x < 0$

— o — o —

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Parto dall'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ (ramo dx)



Fatto misterioso: per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un punto P sull'iperbole tale che l'area del settore sia $\frac{\alpha}{2}$
(Area negativa = girare dall'altra parte)
Il punto P è unico e

$$P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$

La relazione fondamentale dice che P sta sull'iperbole

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

INTERPRETAZIONE MECCANICA

Un filo inestensibile sospeso tra 2 pali (anche di altezza diversa) assume la forma di un cosh