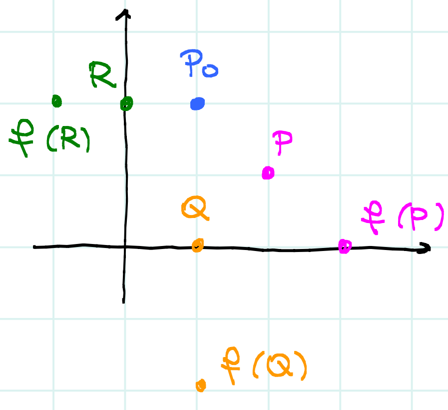
Esercizio 1 Scrivere l'espressione dell'omotetia con centro in $(1,2)$ e fattore di dilatazione 2



Strategia generale

$$P \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{porto l'origine in } P_0}}{P-P_0} \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{dilato di fattore } 2}}{2(P-P_0)} \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{riporto l'origine al suo posto}}}{2(P-P_0)+P_0}$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-1, y-2) \rightsquigarrow (2x-2, 2y-4) \rightsquigarrow (2x-1, 2y-2)$$

L'omotetia cercata è $f(x,y) = (2x-1, 2y-2)$

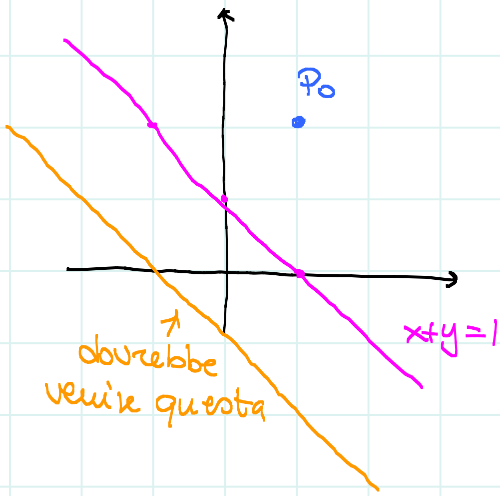
Facciamo qualche verifica

$f(1,2) = (1,2)$:)

$f(2,1) = (3,0)$:) $\quad P \quad f(P)$

$f(0,2) = (-1,2)$:) $\quad R \quad f(R)$

Calcolare l'immagine della retta $x+y=1$



Parametrica $(0,1)+t(1,-1) = (t, 1-t)$

Sostituisco in f:

$$(2t-1, 2(1-t)-2) = (2t-1, -2t)$$
$$= (-1,0)+t(2,-2)$$
$$= (-1,0)+t(1,-1)$$

Volendo torno in cartesiana e ottengo $x+y=-1$

— o — o —

ISOMETRIE DEL PIANO

$f(x) = Ax + b$

matrice 2x2 ortogonale

Le matrici 2x2 ortogonali sono solo di due tipi

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det} = 1$

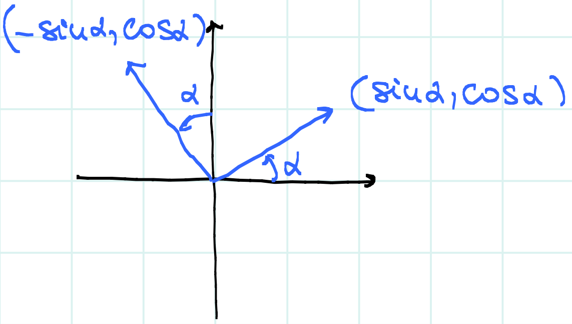
$\mathrm{Tr} = 2\cos\alpha$

Autovalori

$\cos\alpha \pm i \sin\alpha$

(verificare somma e prodotto)

Questa è la JORDAN REALE di se stessa



$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Questa è la ROTAZIONE risp. all'origine di un angolo α in verso ANTIORARIO.

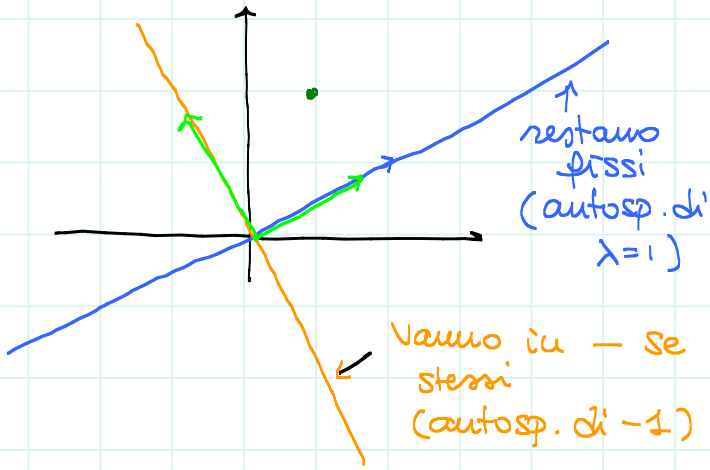
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det} = -1$

$\mathrm{Tr} = 0$

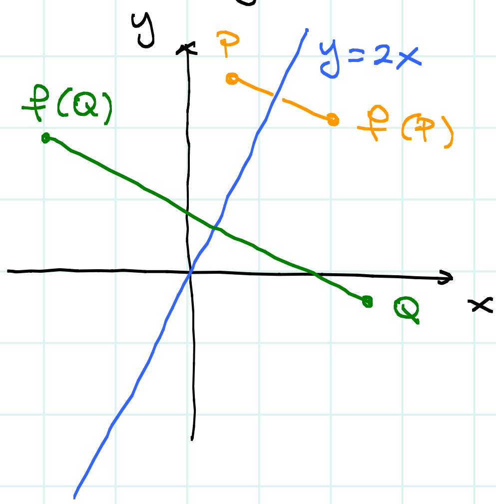
Autovalori : ± 1

La matrice è simmetrica, quindi gli autovettori sono ortogonali



Questa è la SIMMETRIA rispetto all'autospazio di 1

Esercizio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 2x$



La retta passa per l'origine, quindi $b=0$

Cosa deve fare questa applicazione?

Prendiamo una base ortonormale con v_1 sulla retta

$(1,2)$ e $(2,-1)$

Ora vogliamo

$f(1,2) = (1,2)$ (sta sulla retta, quindi resta fisso)

$f(2,-1) = (-2,1)$ (è $\perp$ alla retta, quindi va in $-$ se stesso)

Questo è un problema risolto tante volte

$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)$ $\quad v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)$ Base ortonormale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{simmetria} \\ \text{dalla } \{v_1, v_2\} \\ \text{alla } \{v_1, v_2\}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Conclusione $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ è una matrice di simmetria

Quindi

$$\boxed{f(x,y) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)}$$

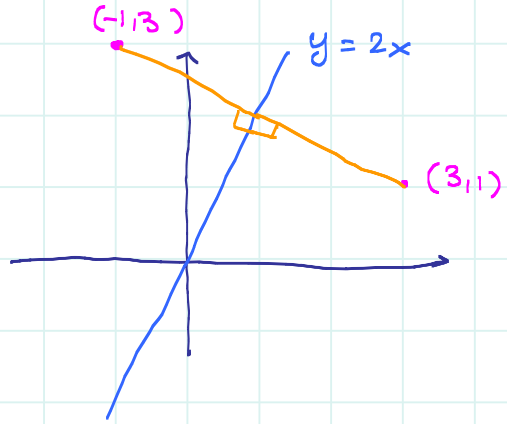
Facciamo qualche verifica

Quali sono i p.ti fissi di $f(x,y)$

Risolvo $f(x,y) = (x,y)$

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = y \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x+4y = 5x \\ 4x+3y = 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} -8x+4y = 0 \\ 4x-2y = 0 \end{cases}$$

Viene $y = 2x$:) è la retta rispetto alla quale stiamo facendo la simmetria

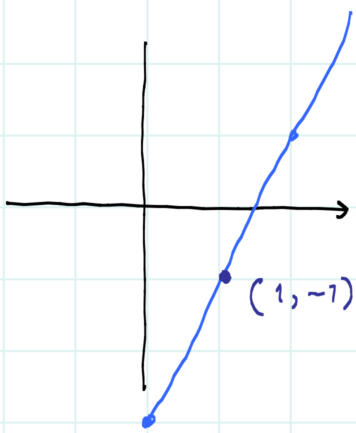


Altra verifica : $f(3,1) = (-1,3)$

Oss. Con lo stesso metodo si può costruire più in generale la simmetria rispetto alla retta $ax+by=0$

Basta partire con
$$v_1 = \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$v_2 = \left(\frac{a}{\sqrt{\ldots}}, \frac{b}{\sqrt{\ldots}}\right)$$

Esercizio 3 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 2x-3$



Ora la retta non passa più per l'origine
Scelgo un p.to della retta, ad esempio $P_0 = (1,-1)$.
Faccio il solito giochino

$$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow \underbrace{S}_{\text{simmetria di prima}}(P-P_0) \rightsquigarrow S(P-P_0)+P_0$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-1, y+1) \rightsquigarrow \frac{1}{5}\left(-3(x-1)+4(y+1),\ 4(x-1)+3(y+1)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(-3x+4y+7,\ 4x+3y-1\right) = \left(-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{7}{5},\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{aggiungo} \\ (1,-1)}}{\rightsquigarrow} \boxed{\left(-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{12}{5},\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{6}{5}\right)}$$

Se risolvo $f(x,y) = (x,y)$ DEVE venire la retta $y = 2x-3$

— o — o —