21 Superfici

Adiamo ora a definire cos'è una superficie in $\mathbb{R}^3$. Per definire queste superfici ci sono 3 approcci, il cartesiano, l'implicito ed il parametrico.

21.1 Superficie cartesiana

Consideriamo $A \subset \mathbb{R}^2$ una $f : A \to \mathbb{R}$ la superficie è un grafico di una funzione quindi la possiamo definire come:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = f(x, y)\ (x, y) \in A\}$$

Esempio 21.1.1. Prendiamo l'insieme $A = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R} =$ piano xy e consideriamo $f(x, y) = x^2 + y^2$. La superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} =$ la parte di paraboloide che si proietta sul quadrato A.

21.2 Superficie implicita

Definire una superficie in maniera implicita vuol dire che S superficie $\subset \mathbb{R}^3$, S è il luogo di zeri di una funzione di tre variabili $\varphi(x, y, z)$.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \varphi(x, y, z) = 0\}$$

Si dice anche che $\varphi(x, y, z) = 0$ è l'equazione della superficie, superficie "implicita", quindi non viene ricavata una variabile rispetto alle altre.

Esempio 21.2.1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ sfera $\subset \mathbb{R}^3$

21.3 Superficie parametrica

Si considera un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^{\not\in}$ (insieme dove variano i parametri, che in questo caso sono 2), e consideriamo tre funzioni date che chiamiamo $x(uv), y(uv), z(u, v)$ con $(u, v) \in A$, superficie parametrica si definisce come:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ al variare di } (u, v) \in A\}$$

Esempio 21.3.1. Un esempio di superficie in $\mathbb{R}^3$ è il piano. Un piano in $\mathbb{R}^3$ ha equazioni parametrica del tipo: $(x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3)$, dove (x_0, y_0, z_0) sono i punti per cui passa il piano mentre $t(v_1, v_2, v_3), s(w_1, w_2, w_3$ sono i vettori che generano il piano.

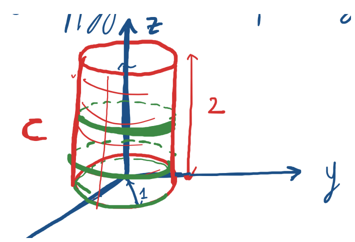
$$\begin{bmatrix} x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z_0 + tv_3 + sw_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t, s) \\ y(t, s) \\ z(t, s) \end{bmatrix} \text{ in questo caso t e s sono i parametri } (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Esempio 21.3.2. Prendiamo una superficie definita come $s = \{(1 + u^2, u \cdot v, u^2 + v^2) \,:\, u^2 + v^2 \leq 3\}$ con $(u, v) \in \overline{B_{\sqrt{3}}(0)} \,:\, u^2 + v^2 \leq 3$.

21.4 Legami tra le definizioni

Fra questi 3 approcci di definizione di una superficie c'è un legame. Si può dire infanti che tutte le superfici cartesiane sono in realtà superfici parametriche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = f(x, y) \text{ con } (x, y) \in A\} = \{(u, v, f(u, v)) \,:\, (u, v) \in A\}$, la funzione $f(u, v)$ è definita dai primi due parametri.

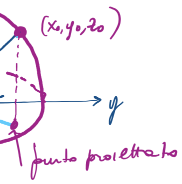
Esempio 21.4.1. Facciamo un esempio partendo da un cilindro con asse lungo l'asse z e raggio di base = 1, altezza = 2, e che si appoggi sul piano xy.



- Non possiamo descriverla come superficie cartesiana.
- Possiamo nemmeno descrivere il nostro cilindro come superficie implicita aggiungendo una limitazione, infatti dobbiamo vedere il cilindro come $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$, riusciamo quindi a scriverlo come superficie implicita ma con una limitazioni ad una delle variabili (0‘$z \leq 2$).

- Possiamo scriverla anche come superficie parametrica, per farlo usiamo come parametri z ed il Θ delle coordinate polari ($\rho \equiv 1$ perché la circonferenza di base ha raggio 1), quindi scriviamo $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) = (\cos\Theta, \sin\Theta, z)\}$ con $\{0 \leq \Theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 2\}$.

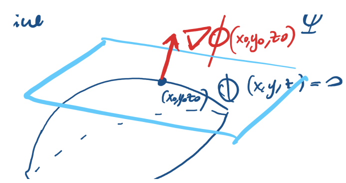
Esempio 21.4.2. Partiamo da la semisfera di raggio 3 che sta sull'asse xy. Vediamo di descrivere le superficie.



Possiamo descriverla come superficie parametrica usando le coordinate sferiche e mettendo $S = \{(3\cos\Theta \cdot \sin\phi, 3\sin\Theta \cdot \sin\phi, 3\sin\Theta\phi)$ con $0 \leq \Theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$, abbiamo che $3\cos\Theta, 3\sin\Theta$ sono le coordinate polari del punto proiettato sul piano xy, le 3 coordinate che escono sono le coordinate sferiche.

Vediamo ora, dopo aver descritto una superficie, di definire il piano tangente ad una superficie, ed il vettore normale ad una superficie (con vettore normale si intende il vettore perpendicolare al piano tangente). Prendiamo in considerazione una superficie cartesiana decritta dall'equazione $z = f(x, y)$, quindi $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y)\}$, data questa superficie vediamo come scrivere il piano tangente nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_=))$.

Sappiamo che possiamo scrivere $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)+f_x(x_0, y_0)\cdot h+f_y(x_0, y_0)\cdot k+o(\sqrt{h^2 + k^2})$, dove $f(x_0, y_0)+f_x(x_0, y_0)\cdot h+f_y(x_0, y_0)\cdot k$ ci da l'equazione del piano tangente, se poniamo $x_0+h = x$ e $y_0 + k = y$ possiamo sostituire ed otteniamo $h = x - x_0$ e$k = y - y_0$, quindi otteniamo $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ che è l'equazione del piano tangente.



Se invece partiamo da una superficie implicita quindi $s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = 0\}$, in questo caso ci accorgiamo che il luogo di zeri, cioè S, è in realtà un insieme di livello per $\varphi \Longrightarrow$ S è perpendicolare al gradiente di φ. Quindi il piano tangente ad S in un punto (x_0, y_0, z_0) è il piano che passa per (x_0, y_0, z_0) ed è perpendicolare a $\nabla\varphi(x_0, y_0, z_0)$. Di conseguenza il piano ha equazione $(x, y, z) \in$ piano se $< \nabla\varphi(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) >= d$ dove d è una costante scelta in modo che il piano passi per (x_0, y_0, z_0). Quindi l'equazione $< \nabla\varphi(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) >= d$ in modo esplicito diventa $\varphi_x(x_0, y_0, z_0)\cdot x+\varphi_y(x_0, y_0, z_0)\cdot y+\varphi_z(x_0, y_0, z_0)\cdot z = \varphi_x(x_0, y_0, z_0) \cdot x_0 + \varphi_y(x_0, y_0, z_0)y_0 + \varphi_z(x_0, y_0, z_0) \cdot x_0$.