EQUAZIONI DIFF. LINEARI

Teoria generale caso omogeneo

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)} = 0}$$

Supponiamo per semplicità che $a_k(t) \equiv 1$.

Teorema (misterioso) La sol. di un'eq. diff. lineare esiste fin che può.
Se tutti gli $a_i(t)$ sono definiti e continui in un certo interv. (a,b), allora tutte le sol. sono definite in tutto (a,b).
Stessa cosa se invece di (a,b) c'è una semiretta o tutto $\mathbb{R}$.

Teorema Supponiamo $a_i(t) \in C^0((a,b))$ per ogni $i = 0, \dots, k$.
Allora l'insieme delle soluz. dell'eq. diff. lin. omogenea è uno spazio vettoriale di dim. k.

Conseguenza operativa: se $u_1(t), \dots, u_k(t)$ è UNA base dello spazio delle sol., allora la sol. generale sarà del tipo

$$\boxed{u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}$$

$c_1, \dots, c_k$ sono numeri reali

Interpretazione Se L indica il LHS come operatore lineare

$$L : C^k((a,b)) \to C^0((a,b))$$

allora risolvere l'eq. vuol dire trovare $\operatorname{Ker} L$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dimostrare che l'insieme delle sol. è uno sp. vett. è un conto di algebra lineare

Siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni, cioè per ogni $t \in (a,b)$

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, v^{(i)}(t) = 0$$

Pongo $w(t) := u(t) + v(t)$. Dico che $w(t)$ è ancora sol.
Osservo che

$$w^{(i)}(t) = u^{(i)}(t) + v^{(i)}(t) \qquad \text{(linearità della deriv.)}$$

quindi

$$\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, w^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{a_i(t)\, u^{(i)}(t)}_{\Sigma = 0} + \underbrace{a_i(t)\, v^{(i)}(t)}_{\Sigma = 0} = 0$$

Dovrei dim. pure che $\lambda u(t)$ è sol., ed è una facile verifica.

Per dim. che ha dim. k posso esibire una base fatta da k elementi.
Scelgo $t_0 \in (a,b)$ e risolvo il pbm. di Cauchy con dati iniziali:

$$u^{(j)}(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{se } j \neq i-1 \end{cases}$$

Sostanzialmente uso dati iniziali del tipo
$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & & & k-1 \\ 0 \dots 0 & & 1 & & 0 \dots 0 & \\ & & \uparrow & & & \\ & & i-1 & & & \end{array}$$
Questo definisce $u_i(t)$.
Sono ovviamente k.

<u>Dico che generano</u>: sia u una soluz. qualunque. In t_0 avrà dati

$$\begin{aligned} u(t_0) &= a_1 \\ \dot{u}(t_0) &= a_2 \\ &\vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) &= a_k \end{aligned}$$

Allora dico che $u(t) = a_1 u_1(t) + \dots + a_k u_k(t)$.
Infatti questa risolve l'eq. e soddisfa le cond. iniziali, quindi per unicità è proprio lei.

Dico che sono lin. indip. Supponiamo che

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) = 0 \qquad \text{per ogni } t \in (a,b).$$

Allora in particolare vale per $t = t_0$, dove u e tutte le sue derivate si annullano. Ora basta osservare che

$$\begin{aligned} u(t_0) &= c_1 = 0 \\ u'(t_0) &= c_2 = 0 \\ &\vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) &= c_k = 0 \end{aligned} \implies \text{tutti i coeff. sono nulli}$$

— o — o —

Teoria generale caso non omogeneo

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\, u^{(i)}(t) = f(t)}$$

Teorema La soluz. gen. di un'eq. diff. lin. non omogenea è del tipo

$$\boxed{u(t) = \bar{u}(t) + c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}$$

dove → $u_1(t), \dots, u_k(t)$ è una base dello spazio delle sol. dell'eq. omogenea associata
→ $\bar{u}(t)$ è una sol. qualunque dell'eq. non omogenea.

<u>Vantaggio operativo</u>: basta che trovo una soluz. qualunque e automaticamente ho tutte le soluzioni, a patto di saper risolvere l'omogenea.

Dim. Ci sono due verifiche da fare

<u>Fatto 1</u> Se $u(t)$ e $v(t)$ sono soluz. della non omogenea, allora la differenza $u(t)-v(t)$ è sol. dell'omog. associata

$$Lu = f \qquad L(u-v) \underset{\uparrow \text{ linearità}}{=} Lu - Lv = f - f = 0$$
$$Lv = f$$

<u>Fatto 2</u> Se $u(t)$ risolve la non omog. e $w(t)$ risolve l'omog, allora $v(t) = u(t) + w(t)$ risolve la non omog.

$$Lv = L(u+w) = Lu + Lw = f + 0 = f$$

Conclusione:

→ sia $\bar{u}(t)$ una sol. data e sia $u(t)$ una qualunque altra sol. della non omog. Allora per il fatto 1 $u - \bar{u}$ risolve l'omog., quindi è del tipo $c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$

→ viceversa, ogni roba del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{risolve non omog.}} + \underbrace{c_1 u_1(t) + \ldots + c_k u_k(t)}_{\text{risolve omog.}}$$

Per il fatto 2 si ha che $u(t)$ risolve la non omog.

— o — o —

Domande a cui rispondere

① Come trovo una base delle sol. dell' omog. ?
Se i coeff. dell' eq. sono costanti c'è un algoritmo

② Come trovo una sol. qualunque della non omog. ?
Due metodi
→ metodo di variazione delle costanti (funziona sempre, ma richiede parecchi calcoli)
→ provare ad indovinare a occhio (metodo di similitudine, metodo degli annichilatori, ...)

— o — o —

<u>Caso speciale</u> $k=1$ e <u>equazione omogenea</u>

$$\boxed{\dot{u} + a(t)\,u = 0}$$

Questa è pure a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = -a(t)\,u \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)\,dt \rightsquigarrow \log|u| = -A(t) + c$$

$A(t)$: primitiva di $a(t)$

$$|u(t)| = e^{-A(t)+c} \qquad \boxed{u(t) = \underset{\text{costante libera}}{c}\ \underbrace{e^{-A(t)}}_{u_1(t)}}$$

<u>Oss. 1</u> In questo caso speciale si vede che la soluz. $u(t)$ esiste fino a quando esiste $a(t)$

<u>Oss. 2</u> Ho usato da qualche parte che $a_k(t) \equiv 1$?
→ per dire che le soluz. sono sp. vettoriale NO
→ per costruire la base e dim. che lo è SI, avendo usato il teo. di esistenza e unicità che vale per eq. in forma normale.