EQUAZIONI DIFF. LINEARI NON OMOGENEE

Come trovare UNA soluzione (da cui poi si trovano tutti)
→ indovinare
→ metodo di variazione delle costanti

Ricerca per tentativi

Esempio 1 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = e^{2t}$

Sol. gen. omog. : $x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0 \rightsquigarrow e^{-4t}, e^{t}$

$$u(t) = a e^{t} + b e^{-4t} \quad \leftarrow \text{sol. gen. omog.}$$

Cerco sol. della non omog. del tipo $u(t) = \lambda e^{2t}$.
Calcolo

$$\dot{u} = 2\lambda e^{2t} \qquad \ddot{u} = 4\lambda e^{2t}$$

Sostituisco

$$\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = \cancel{4\lambda e^{2t}} + 6\lambda e^{2t} - \cancel{4\lambda e^{2t}} = e^{2t} \quad \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

Sol. gen. eq. non omog: $\boxed{u(t) = \frac{1}{6} e^{2t} + a e^{t} + b e^{-4t}}$

Esempio 2 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = t^2 - 3$

Provo con $u(t) = at^2 + bt + c$ (a, b, c da trovare)

$$\dot{u} = 2at + b \qquad \ddot{u} = 2a$$

Sostituisco

$$\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = 2a + 6at + 3b - 4at^2 - 4bt - 4c = t^2 - 3$$

$-4a = 1$ coeff. t^2 $\quad a = -\frac{1}{4}$

$6a - 4b = 0$ coeff. t $\quad 4b = 6a \rightsquigarrow b = \frac{3}{2}a = -\frac{3}{8}$

$2a + 3b - 4c = -3$ term. noto

$$4c = 2a + 3b + 3 = -\frac{1}{2} - \frac{9}{8} + 3$$

$\rightsquigarrow$ si trova.

Esempio 3 $\quad \ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = \sin(2t)$

Tentativo misto in sin e cos : $u(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$

$$\dot{u} = 2a\cos(2t) - 2b\sin(2t), \qquad \ddot{u} = -4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)}_{\ddot{u}} \underbrace{+ 6a\cos(2t) - 6b\sin(2t)}_{+3\dot{u}} \underbrace{- 4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)}_{-4u} = \sin(2t)$$

$$\begin{cases} -8a - 6b = 1 & \text{coeff. sin} \\ -8b + 6a = 0 & \text{coeff. cos} \end{cases}$$

$$b = \frac{3}{4}a \rightsquigarrow -8a - \cancel{6}^{3} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_{2}} a = 1$$

$$\left(-8 - \frac{9}{2}\right)a = 1 \rightsquigarrow \frac{25}{2}a = -1 \rightsquigarrow a = -\frac{2}{25} \rightsquigarrow b = -\frac{3}{50}$$

Sol. gen. eq. non omog:

$$u(t) = \underbrace{-\frac{2}{25}\sin(2t) - \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{sol. speciale}} + \underbrace{a e^{t} + b e^{-4t}}_{\text{sol. gen. eq. omog.}}$$

Fatti generali : per equazioni di ordine qualunque a coeff. costanti

① RHS $= e^{at}$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \lambda e^{at}$ con λ incognito

② RHS = polinomio $\rightsquigarrow$ $u(t)$ = pol. stesso grado completo a coeff. incogniti

③ RHS $= \sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \underbrace{a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)}_{\text{sempre entrambi}}$

con a e b incogniti

④ RHS = somma degli ingredienti precedenti

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ = somma dei tentativi (o anche risolvere un pezzo per volta e poi sommare le soluzioni)

Dim. $Lu = f_1 + f_2$. Se $Lu_1 = f_1$ e $Lu_2 = f_2$, allora

$$L(u_1+u_2) \underset{\text{linearità}}{=} Lu_1 + Lu_2 = f_1 + f_2$$

⑤ RHS $= \sin^k(\alpha t)$ o $\cos^k(\alpha t)$ o $\sin^k(\alpha t)\cos^\ell(\beta t)$

$\rightsquigarrow$ con un po' di precorso i prodotti e le potenze diventano somme e si ricade nel caso ③.

Esempio 4 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = \sin^2 t$

$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$

$$\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$\rightsquigarrow$ $u(t) = a + b\cos(2t) + c\sin(2t)$ con a, b, c incogniti

Esempio 5 $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = e^t$

In teoria dovrei provare $u(t) = \lambda e^t$, $\dot{u} = \lambda e^t$, $\ddot{u} = \lambda e^t$

$$\lambda e^t + 3\lambda e^t - 4\lambda e^t = e^t \quad \rightsquigarrow \quad 0 = e^t$$

Era ovvio che succedesse, perché e^t è sol. dell'omog.

Il tentativo da fare è $u(t) = \lambda t e^t$

$$\dot{u} = \lambda e^t + \lambda t e^t \qquad \ddot{u} = \lambda e^t + \lambda e^t + \lambda t e^t$$

Sostituisco nell'eq. e trovo

$$\underbrace{2\lambda e^t + \cancel{\lambda t e^t}}_{\ddot{u}} + \underbrace{3\lambda e^t + \cancel{3\lambda t e^t}}_{+3\dot{u}} \underbrace{- \cancel{4\lambda t e^t}}_{-4u} = e^t \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \frac{1}{5}$$

Sol. gen.: $u(t) = \frac{1}{5} t e^t + a e^t + b e^{-4t}$

Oss. Deve succedere che la parte in te^t se ne va

Oss. 2 Se te^t era sol. dell'omog. bisognava aggiungere ancora una t.

Oss. 3 Lo stesso discorso vale per i tentativi trigonometrici o polinomiali (cioè se $\sin(2t)$ è sol. dell'omog. e $\sin(2t)$ è al RHS, allora il tentativo è

$$u(t) = t\,(a\cos(2t) + b\sin(2t)).$$

Esempio 6 $\quad u^{(5)} + u^{(3)} = t+2$

Omogenea: $x^5 + x^3 = 0$, $\quad x^3(x^2+1) = 0$ $\qquad x=0$ molt. 3

$x = \pm i$

Sol. gen. omog.: $u(t) = \underbrace{c_1 \cos t + c_2 \sin t}_{\pm i} + \underbrace{c_3 + c_4 t + c_5 t^2}_{x=0 \text{ molt. } 3}$

Tentativo per non omog: $u(t) = (at+b)t^3$

Ho molt. per t^3 perché la molt. di $x=0$ è 3

$u(t) = at^4 + bt^3$

$\dot{u}(t) = 4at^3 + 3bt^2$

$\ddot{u}(t) = 12at^2 + 6bt$

$\dddot{u}(t) = 24at + 6b$ $\qquad u^{(5)} + u^{(3)} = 24at + 6b = t+2$

$u^{(4)}(t) = 24a$

$u^{(5)}(t) = 0$ $\qquad a = \frac{1}{24} \qquad b = \frac{1}{3}$

Sol. finale $\quad u(t) = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{3}t^3 +$ sol. gen. omog.

Cosa succede se faccio come tentativo il pol. gen. di grado 4:

$u(t) = at^4 + bt^3 + \underbrace{ct^2 + dt + e}$

non riesco a determinarli

Certo! sono la parte libera dell'omog.

Se fosse stato $\quad u^{(5)} + u^{(3)} = \cos t \quad$ il tentativo da fare era

$u(t) = t(a\cos t + b \sin t)$

perché $\pm i$ sono radici del pol. caratteristico con molt. 1 (quindi $\sin t$ e $\cos t$ sono sol. dell'omog., ma con t davanti no)

⑥ RHS con sol. dell'omog. $\rightsquigarrow$ $u(t)$ = come se non lo fossero ma con un po' di t davanti

⑦ RHS = polinomio $\cdot\, e^{\alpha t}$ e/o polinomio $\cdot$ roba trigonom.

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ = pol. $\boxed{\text{compl.}}$ $\underbrace{\text{stesso grado}}$ $\cdot\, e^{\alpha t}$ (opp. sin e cos)

o più alto se serve per colpa dell'omog.

⑧ RHS = $e^{\beta t} \cdot \sin(\alpha t)$ o simili

$\rightsquigarrow$ $u(t) = e^{\beta t}\left(a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)\right)$ con a e b incogniti

Oss. I tentativi si possono fare anche se i coeff. non sono costanti, ma spesso non riescono.