ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 37

Note Title 14/11/2023

Relazioni radici - coefficienti

Setting: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

polinomio monico a coeff. complessi (se sono reali, ancora meglio)

Per il teorema misterioso $p(x) = (x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici.

Allora $\boxed{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -a_{n-1}}$ $\boxed{\lambda_1 \cdot\ldots\cdot \lambda_n = (-1)^n a_0}$

Esempio $n=2$

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 \underbrace{-(\lambda_1+\lambda_2)}_{\text{coeff. di } x} x + \underbrace{\lambda_1\lambda_2}_{\text{termine noto}}$$

Esempio $n=3$

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) =$$
$$x^3 \underbrace{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{\text{coeff. di } x^2} x^2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)x \underbrace{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{\text{termine noto}}$$

MATRICI SIMILI Siano A e B due matrici simili.

Allora A e B hanno

→ Stesso pol. caratteristico

→ Stessi autovalori

→ Stesso Determinante

→ Stessa traccia (somma degli elementi sulla diagonale)

Dim Sappiamo che $B = M^{-1}AM$ con M invertibile

$$\text{Det}(B) = \text{Det}(M^{-1}AM) = \underbrace{\text{Det}(M^{-1})}_{=\frac{1}{\cancel{\text{Det}(M)}}} \cdot \text{Det}(A) \cdot \cancel{\text{Det}(M)} = \text{Det}(A)$$

Vediamo il polinomio caratteristico

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pol. caratt. di } B}}{P_B(\lambda)} = \operatorname{Det}(B - \lambda Id)$$

$$\overset{B = M^{-1}AM}{=} \operatorname{Det}(M^{-1}AM - \lambda Id)$$

$$\overset{Id = M^{-1}M}{=} \operatorname{Det}(M^{-1}AM - \lambda M^{-1} Id\, M)$$

$$\overset{\text{raccolgo}}{=} \operatorname{Det}[M^{-1}(A - \lambda Id) M]$$

$$\overset{\text{BINET}}{=} \cancel{\operatorname{Det}(M^{-1})} \cdot \operatorname{Det}(A - \lambda Id) \cdot \cancel{\operatorname{Det} M}$$

$$\operatorname{Det}(M^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(M)}$$

$$= \operatorname{Det}(A - \lambda Id) = P_A(\lambda)$$

Avendo A e B lo stesso pol. caratteristico, per forza hanno gli stessi autovalori.

<u>Oss.</u> $P_A(0) = \operatorname{Det}(A - 0\, Id) = \operatorname{Det}(A)$

$\quad$ ||

termine noto del polinomio caratteristico

$\quad$ ||

prodotto autovalori (il segno si aggiusta perché per n dispari il pol. caratteristico inizia con $-\lambda^n$)

In generale

→ prodotto autovalori = termine noto del pol. caratt.

= Det della matrice

→ somma autovalori = Traccia della matrice.

Esempio $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad Det = 10 = \lambda_1 \lambda_2$, $\quad Tr = 7 = \lambda_1 + \lambda_2$ $\rightsquigarrow$ $2, 5$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ anche questa ha autovalori $2, 5$
(gli autovettori saranno diversi)

$\boxed{\text{Def}}$ Sia λ un autovalore di una matrice A. Si definisce

- $\boxed{\text{molteplicità algebrica}}$, e si indica con $m_a(\lambda)$, la molteplicità di λ come radice del pol. caratteristico, cioè il numero di volte che $(x-\lambda)$ compare nella scomposizione di $p_A(\lambda)$
- $\boxed{\text{molteplicità geometrica}}$, e si indica con $m_g(\lambda)$, la dimensione dell'autospazio di λ, cioè

$$m_g(\lambda) = \text{Dim}(\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}))$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia A una matrice $n \times n$.
Allora A è diagonalizzabile se e solo se

$$m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$$

per ogni autovalore λ
(la diagonalizzazione può essere reale o complessa a seconda di dove stanno gli autovalori)
In generale vale solo che

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

$\boxed{\text{Caso speciale}}$ Se tutti gli autovalori hanno $m_a(\lambda) = 1$, cioè se $p_A(\lambda)$ ha tutte le radici distinte, allora A è diagonalizzabile per forza (eventualmente su $\mathbb{C}$ se ci sono autovalori davvero complessi).

Esercizio 1

$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\\sqrt{3}&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}$
$Tr=3$	$Tr=3$	$Tr=3$	$Tr=2$	$Tr=3$	$Tr=3$
$Det=2$	$Det=2$	$Det=2$	$Det=-5$	$Det=2$	$Det=2$
			↑ Intrusa		

Tutte le altre hanno autovalori $\lambda=1$ e $\lambda=2$, quindi sono diagonalizzabili sui reali e sono simili alla $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

Per esercizio diagonalizziamo l'ultima, cioè troviamo M t.c.

$$M^{-1}\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}M = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

Le colonne di M sono gli autovettori

$\boxed{\lambda=1}$ $\boxed{\text{Bovino}}$ $v=(a,b)$

$$\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}10a+18b=a\\-4a-7b=b\end{cases} \qquad \begin{cases}9a+18b=0\\-4a-8b=0\end{cases}$$

$\rightsquigarrow a+2b=0$ $\qquad v=(2,-1)$ $\qquad$ Autosp $=$ Span$((2,-1))$

$\boxed{\text{Leggermente meno bovino}}$ Cerco $\ker(A-1\cdot Id)$

$$\ker\begin{pmatrix}9&18\\-4&-8\end{pmatrix} = \text{Span}((-2,1))$$

$\boxed{\lambda=2}$ Meno bovino

$$A-2Id=\begin{pmatrix}8&18\\-4&-9\end{pmatrix} \qquad \ker=\text{Span}((9,-4))$$

Conclusione $\quad M=\begin{pmatrix}2&9\\-1&-4\end{pmatrix} \qquad M^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-9\\1&2\end{pmatrix}$

Verifica: $\begin{pmatrix}-4&-9\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&9\\-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcccccc} & \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{TR} & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \text{DET} & -5 & +5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ & \uparrow & & & & & \end{array}$$

$Tr = 4 \quad Det = 5 \quad \rightsquigarrow \quad$ pol. caratt. $= x^2 - 4x + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

Tutte le matrici tranne la prima sono simili a $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$
e quindi NON sono diagonalizzabili sui reali

La prima ha pol. caratt. $= x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0$
quindi ha autovalori $\lambda = -1$ e $\lambda = 5$, quindi è simile a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Per esercizio calcolare la M di passaggio

—o—o—