01/12/2023

Esercizio (x,y,z) = 2xy + 3xz + 4yz

1 Calcolane la seguatura

Matrice associata

1 0 2 = A Syevester:

3 2 0

Det A = 3+3=6>0 Quindi a sous due possibilità +++ no se fosse così, allora Tr (A)>0 e usu è vers +-- ← quella busua

Border line: considero la forma quadratica ristretta a

Span ((1,0,0), (0,1,01) 

priano 2=0

Questa forma ha come matrice (01)

Questa ha Det = -1, quiudi seguatura + -

Quiudi esistous

→ una retta su ani è + (sef. pos.) } rette contenute nel piano

Questo ci dice che la forma su tutto  $\mathbb{R}^3$  ha  $n_+ \ge 1$  e  $m_- \ge 1$ , il che basta per escleulere che sia +++

Trovare un s.sp. di dien 2 su ani è def. negativa Sarebbe bello completere : quadrati  $2\times y+3\times z+4yz=(x+ay+bz)^2-(x-ay+cz)^2$ 

=  $x^{2} + a^{2}y^{2} + b^{2}z^{2} + 2axy + 2bxz + 2abyz$  $-x^{2} - a^{2}y^{2} - c^{2}z^{2} + 2axy - 2cxz + 2acyz$ 

= (b2-c2) 22 + 4axy + 2 (b-c) x2+2a (b+c) y2 Ora scegliaus  $a = \frac{1}{2} \cos^2 sistemiano \times y \in poi imponiano <math display="block">\begin{cases} b-c = \frac{3}{2} & \text{as } x^2 \\ b+c = 4 & \text{as } y^2 \end{cases}$  $ab = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$   $ab = \frac{11}{4}$   $ab = \frac{5}{4}$ 2xy+3x2+4y2 = (x+\frac{1}{2}y+\frac{11}{4}z)^2-(x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{4}z)^2-622 Un s. sp. di die 2 su ani è def. negativa è il piano  $x + \frac{1}{2}y + \frac{11}{4}z = 0$  cioè Spau ((1, -2,0), (11,0,-4)) 3 Sylvesterizzare la matrice A, cioè trovare M matrice 3×3 invertibile tale che MEAH = (0-10) Le coloure di M siau U1, U2, U3. Come  $U_3$  posso wave (1,-2,0)Come Uz USO (11,0,-4) corretto con GS, cioè  $U_2 = (11,0,-4) - \frac{\langle (11,0,-4), (1,-2,0) \rangle_A}{\langle (1,-2,0), (1,-2,0) \rangle_A} (1,-2,0)$ Infine vz la cerco bovinamente icorponendo ( < U3, U2 > = 0 ) < UI, UB>A=0 Cosi Uz, Uz, Uz Sous A-outogouali fra di Loro. A quel p. to basta dividerli per la cosa giusta. x2+ay2+4y2+6x2 Esercitio 2

(b) indefinita, ma definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 2,  (d) nulla su almeno un sottospazio di dimensione 2,  Per quosi valori di a succeedoro querke cosse  (1 0 3)  A = (1 0 3)	(a) definita positiva,
(d) nulla su almeno un sotrospazio di dimensione?  Per quoli voloni di a succedouo queste cose  (1 0 3)  A = (3 2 0)  (a) La forma quadrottica uou è cuai definita positiva  Barta osservare che q (0,0,1) = 0 per colpa dello 0 ta fondo  (b) Desse esserci almemo cui t e almemo cui -  (ordinamo di capire la seguestura al voniare di a  Syportu 1-3-2  Detint = 1  Detint = 1  Detint = 1  Detint = 1  Detint = 3  Se - 3a-4 >0, cioè a < - \frac{4}{3}, allora t+t-t mo segui. +  e Se a = -\frac{4}{3}, allora bet = 0 Tr = [-\frac{4}{3} = \frac{5}{3}, quinci de possibilità souo ++0 oppure +-0.  Barta però osservare che  quindi una retta di negotività c'è, quandi +-0  Conclusione: De forma è sempre indefinita.	(b) indefinita,
Per quali valori di a succedano querte cose  (1 0 3)  A = (0 a 2)  (a) La forma quadratica mon è mai definita positiva  Baota osservare che q (0,0,1) = 0 per capa dello o la fondo  (b) Deve esserci almeno mu + e almeno mu -  Cordinamo di capire la segnatura al variare di a  Syporta 1-3-2  Detini = 1  Detizi = 1  Detizi = -9  Detizi = 4  Detizi = -9  Deti	(c) indefinita, ma definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 2,
A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (a) La forma quadratica usu è cuai definita positiva  Basta osservare che $q(0,0,1)=0$ per colpa dello o la feudo  (b) Deve esserci almeno cur $+$ e almeno cur $-$ Condinano di capire la seguntura al variare di a  Systerta 1-3-2  Det = $+$ 1  Det = $+$ 2  Det = $+$ 3  Det = $+$ 3  Det = $+$ 3  Det = $+$ 4  • Se $+$ 30, cioè $+$ 4 $+$ 3, allora $+$ 4 $+$ 1 $+$ 1 segur. $+$ 1  • Se $+$ 3a-4 $+$ 0, cioè $+$ 4 $+$ 3, allora $+$ 4 $+$ 1 $+$ 2 segur. $+$ 1  • Se $+$ 3a-4 $+$ 0, cioè $+$ 4 $+$ 3, allora $+$ 4 $+$ 2 $+$ 2 segur. $+$ 4 sous solutions $+$ 4 solutions $+$ 5 segur. $+$ 4 solutions $+$ 5 secure che $+$ 4 solutions $+$ 6 secure che $+$ 6 secure che $+$ 6 secure che $+$ 6 secure che $+$ 9 secure $+$ 9 secure che $+$ 9	(d) nulla su almeno un sottospazio di dimensione 2,
(a) La forma quadratica usu è mai definita positiva  Basta osservare che 9 (0,0,1) = 0 per colpa dello 0 tu fondo  (b) Deve esserci almemo un + e almemo un -  Gardinano di capire la segnatura al voniare di a  Sylvestra 1-3-2  Det + 1 = 1  Det 2 = -9  Det 3 = -8a - 4  • Se - 9a - 4 > 0, cioè a < -\frac{4}{9}, allora + + - + \to segn. +  • Se a = -\frac{4}{9}, allora Det = 0 Tr = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}, quindi de  possibilità sono + + 0 oppure + - 0.  Basta però osservare che  9 (0,1,0) = -\frac{4}{9}  quindi una setta di negotività c'è, quandi + - 0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	Per quali valori di a succedoro queste cose
Basta osservare che $q(0,0,1)=0$ per capa dello o la foudo  (b) Deve esserci almemo cun $+$ e almemo cun $-$ Gardiamo di capire la seguntara al vanione di a  Syptember $1-3-2$ Det $_{1-3}=1$ Det $_{3\times 3}=-9a-4$ • Se $_{3}a-4$ • Se $_$	
(b) Dove errerci almeno un + e almeno un  Cordinamo di capire la segnatura al variare di a  Sejevota 1-3-2  Det erre = 1  Det erre = 1  Det erre = 4  Det erre = 9  Det erre = 1  Det	
Conclusion d' capire la seguatura al vaviare di a System $1-3-2$ Det $_{1\times1}=1$ Det $_{2\times2}=-9$ Det $_{3\times3}=-3a-4$ • Se $_{2}-3a-4>0$ , cioè $a<_{2}-\frac{4}{9}$ , allora $_{1}+_{1}+_{2}+_{3}$ segu. $_{1}+_{2}+_{3}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4$	Basta osseware che 9 (0,0,1) = 0 per colpa dello 0 in fondo
Conclusion d' capire la seguatura al vaviare di a System $1-3-2$ Det $_{1\times1}=1$ Det $_{2\times2}=-9$ Det $_{3\times3}=-3a-4$ • Se $_{2}-3a-4>0$ , cioè $a<_{2}-\frac{4}{9}$ , allora $_{1}+_{1}+_{2}+_{3}$ segu. $_{1}+_{2}+_{3}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4}+_{4$	
System 1-3-2  Det $_{xxy} = 4$ Det $_{xxy} = 9$ Det $_{xxy} = -9$ Det $_{xxy} = -9a - 4$ Se $_{-9a-4} > 0$ , cioè $_{a<-\frac{4}{9}}$ , allora $_{++-+}$ $_{-++-}$ $_{-++}$ Se $_{-9a-4} < 0$ , cioè $_{a>-\frac{4}{9}}$ , allora $_{++}$ $_{-++}$ $_{-++}$ Se $_{a=-\frac{4}{9}}$ , allora $_{-++}$ $_{-++}$ $_{-++}$ Basta però ossenare che $_{q(0,1,0)=-\frac{4}{9}}$ quiudi una retta di vegotività c'è, quiudi $_{-+-0}$ Conclusione: De formo è sempre indefinita.	(b) Dove esserci almens un + e almens un
System 1-3-2  Det $_{xxy} = 4$ Det $_{xxy} = 9$ Det $_{xxy} = -9$ Det $_{xxy} = -9a - 4$ Se $_{-9a-4} > 0$ , cioè $_{a<-\frac{4}{9}}$ , allora $_{++-+}$ $_{-++-}$ $_{-++}$ Se $_{-9a-4} < 0$ , cioè $_{a>-\frac{4}{9}}$ , allora $_{++}$ $_{-++}$ $_{-++}$ Se $_{a=-\frac{4}{9}}$ , allora $_{-++}$ $_{-++}$ $_{-++}$ Basta però ossenare che $_{q(0,1,0)=-\frac{4}{9}}$ quiudi una retta di vegotività c'è, quiudi $_{-+-0}$ Conclusione: De formo è sempre indefinita.	Condiamo di capire la seguertura al vaniare di a
Det $_{2nd}$ = 1  Det $_{2nd}$ = 1  Det $_{2nd}$ = -9  Det $_{3nd}$ = -9a-4  Se $_{-9a-4}$ > 0, cioè $_{a}$ < $_{-\frac{4}{9}}$ , allora $_{++-}$ ~ segu. $_{++-}$ Se $_{-9a-4}$ < 0, cioè $_{a}$ > $_{-\frac{4}{9}}$ , allora $_{++-}$ ~ segu. $_{++-}$ Se $_{a}$ = $_{-\frac{4}{9}}$ , allora Det = 0 $_{++-}$ $_{++}$ $_{++$	
Det 3x3 = -8a-4  • Se -9a-4 >0, cioè $a < -\frac{4}{9}$ , allora $++-+$ ms segu. $++$ • Se $-9a-4 < 0$ , cioè $a > -\frac{4}{9}$ , allora $+++$ ms segu. $++++-+$ • Se $a = -\frac{4}{9}$ , allora Det = 0 $Tr = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ , quiudi de possibilità souo $++0$ oppure $+-0$ .  Basta però osservare che $q(0,1,0) = -\frac{4}{9}$ quiudi una retta di vegatività c'è, quiudi $+-0$ Couclusione: De forma è sempre indefinita.	
• Se $-9a-4>0$ , cioè $a<-\frac{4}{9}$ , allora $++-++++++++++++++++++++++++++++++++++$	Det 2×2 = -9
• Se $-9a-4>0$ , cioè $a<-\frac{4}{9}$ , allora $++-++++++++++++++++++++++++++++++++++$	Det 3x3 = -3a-4
• Se $-9a-4<0$ , cioè $a>-\frac{4}{9}$ , allora $++$ mo segu. $++-$ • Se $a=-\frac{4}{9}$ , allora Det = $0$ Tr = $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ , quiudi le possibilità sour $++0$ oppure $+-0$ .  Basta però ossenare che $q(0,1,0)=-\frac{4}{9}$ quiudi una retta di negotività c'è, quiudi $+-0$ Conclusione: la forma è sempre indefinita.	
• Se $a = -\frac{4}{9}$ , allora Det = $0$ Tr = $1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ , quiudi le possibilità sour ++0 oppure +-0.  Barta però ossenare che $q(0,1,0) = -\frac{4}{9}$ quiudi una retta di negatività c'è, quiudi +-0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	
• Se $a = -\frac{4}{9}$ , allora Det = $0$ Tr = $1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ , quiudi le possibilità sour ++0 oppure +-0.  Barta però ossenare che $q(0,1,0) = -\frac{4}{9}$ quiudi una retta di negatività c'è, quiudi +-0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	© Se - 9a-4 <0, cioù a>- €, allora ++ ~> segu. ++-
Possibilità sous ++0 oppure +-0.  Basta però ossenare che  9 (0,1,0) = -4  quindi una retta di negatività c'è, quinoli +-0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	
Possibilità sous ++0 oppure +-0.  Basta però ossenare che  9 (0,1,0) = -4  quindi una retta di negatività c'è, quinoli +-0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	• Se a = - 4, allora Det = 0 Tr = 1-4=5, quiudi le
Basta però ossenare che $9(0,1,0) = -\frac{4}{9}$ quindi una retta di negotività c'è, quindi +-0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	
quindi una retta di negotività c'è, quindi +-0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	
quindi una retta di negotività c'è, quindi +-0  Conclusione: la forma è sempre indefinita.	
Conclusione: la forma è sempre indefinita.	
	Conclusion. La forma e semon indestinita
(c) true essere - + , quindi a < - 4	
	(c) true essere+, quindi a<-4

(d) Nulla su almeno un s.sp. d' dien 2 Nei casi ++- e +-- questo uou può succedere! Consideriano il caso ++-. Qui esiste un 5.5p. di dim 2 su an è definita positiva. Chi anniamolo W1. Supposi aux ora de esista W2 di dice 2 ser cui 9 =0. Ora Wz e Wz si intersecano per forta (per GRASSMANN) e sull'interseriare q deve essere nello stesso tempo = 0 e >0. Quindi l'unico caso in an é possibile e grando a = - 4. In quel caso si trova esplicitamente  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{4}{9} & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Per esercizio completiamo i quadrati  $x^2 - \frac{4}{9}y^2 + 6x^2 + 4y^2 = x^2 + 6x^2 - \frac{4}{9}y^2 + 4y^2$ = (x+32)2-922-4y2+4y2  $=(x+32)^2-(32+\frac{2}{3}y)^2$ Conclusion un elemento del ker = Span  $((3, -\frac{9}{2}, -1))$ = Span ((+6,-9,-2))  $x+3z=3z+\frac{2}{3}y$  oppure Il sotospazio cercato è  $x+32 = -32 - \frac{2}{3}y$ (Il Ker usu serviva).