ANALISI 1 — LEZIONE 041

Note Title 10/11/2016

Monotonia e segno della derivata prima

MONOTONIA 1 (Segno della derivata in un punto)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$.

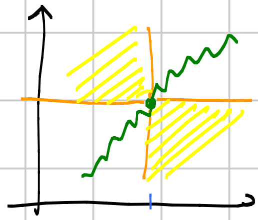
Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f'(x_0) > 0$.

Allora esiste $\delta_0 \in (0, \delta]$ tale che

$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_0)$$

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0)$$

(un po' dopo vale di +, un po' prima vale di −)



<u>Oss.</u> Non c'è scritto nella tesi che f è monotona in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$.

Dim. Per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Per permanenza del segno esiste $\delta_0 \in (0, \delta]$ tale che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \qquad \forall h \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$$

Conclusione:

- per $h \in (0, \delta_0)$ si ha den > 0, quindi num > 0, quindi
$$f(x_0 + h) > f(x_0) \qquad \forall h \in (0, \delta_0)$$
- per $h \in (-\delta_0, 0)$ tutto al contrario ...
$$f(x_0 + h) < f(x_0) \qquad \forall h \in (-\delta_0, 0).$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Allo stesso modo, supponendo $f'(x_0) < 0$ si ottiene

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_0)$$

$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0).$$

MONOTONIA 2 (Segno della derivata in un intervallo)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che f sia derivabile in (a,b).
Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ deb. cresc. in } (a,b) & \Longleftrightarrow & f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \\ & & \\ f \text{ strett. cresc. in } (a,b) & \Longleftarrow & f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \end{array}}$$

Achtung! L'implicazione mancante è falsa. Ad esempio
$f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3$ è strett. cresc., ma
$f'(x) = 3x^2$ si annulla nell'intervallo.

— o — o —

Teorema misterioso (LAGRANGE) (MEAN VALUE THEOREM)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.
Supponiamo che
(i) f continua in $[a,b]$ (estremi compresi)
(ii) f derivabile in (a,b) (se lo è in $[a,b]$, ancora meglio)
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

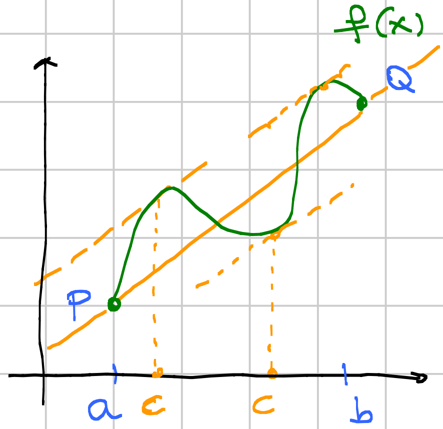
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).}$$

Interpretazione geometrica Dividendo per $b-a$ otteniamo

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \boxed{f'(c)}$$

coeff. ang. retta PQ

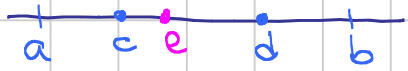
la retta tangente al grafico in $(c, f(c))$ è // alla retta PQ



— o — o —

$\boxed{\text{Dim}}$ (Di monotonia 2 dando per buono Lagrange)

$\boxed{f' \geq 0 \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \text{ deb. monotona}}$



Comunque scelti $a < c < d < b$, devo dim. che $f(d) \geq f(c)$.
D'altra parte usando Lagrange in $[c,d]$ si ottiene

$$f(d) - f(c) = \overbrace{f'(e)}^{\geq 0}\,\overbrace{(d-c)}^{>0} \qquad \geq 0$$

pto misterioso in (c,d)

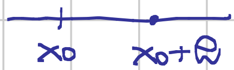
$\boxed{f' > 0 \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \text{ strett. cresc.}}$ Tutto come prima

$$f(d) - f(c) = \underbrace{f'(e)}_{>0}\,\underbrace{(d-c)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(d) > f(c)$$

$\boxed{f \text{ deb. cresc. in } (a,b) \Rightarrow f' \geq 0 \text{ in } (a,b)}$

Preso un qualunque punto $x_0 \in (a,b)$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \geq 0$$



$$= \frac{\geq 0}{> 0} \geq 0$$

— o — o —

<u>Oss.</u> Se f è strett. cresc. in (a,b), allora

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \qquad \text{per ogni } h \text{ ammissibile}$$

Però le disuguaglianze strette NON passano al limite e quindi nessuno impedisce a $f'(x_0)$ di essere 0.

— o — o —

$\boxed{\text{MONOTONIA 3}}$ (Annullamento sporadico di f')

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione.
Supponiamo che

(i) f è derivabile e $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

(ii) f' non si annulla identicamente in nessun sottointervallo

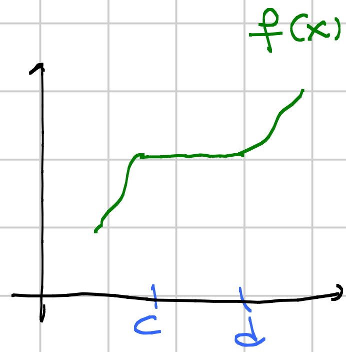
(cioè le soluz. dell'eq. $f'(x)=0$ sono un po' di punti isolati, non un intero sottointervallo)

Allora f è STRETT. CRESC. in (a,b).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dall'ipotesi (i) sappiamo che f è deb. cresc.
Se per assurdo non lo fosse strettamente, esisterebbe un sottointervallo $[c,d]$ in cui f è costante. Ma allora si avrebbe

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in [c,d]$$

il che è contro l'ipotesi (ii).



— o — o —

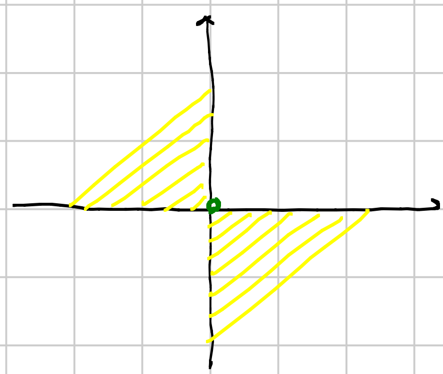
<u>Esempio patologico</u>

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 \sin \frac{1}{x^4} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si verifica facendo il limite del rapp. incr. che $f'(0) = 2$, quindi siamo nelle ipotesi di monotonia 1.

Fatto: non esiste nessun intervallo $(0,\delta)$ o $(-\delta, 0)$ in cui $f(x)$ risulta crescente.

Per $x \neq 0$ la derivata è



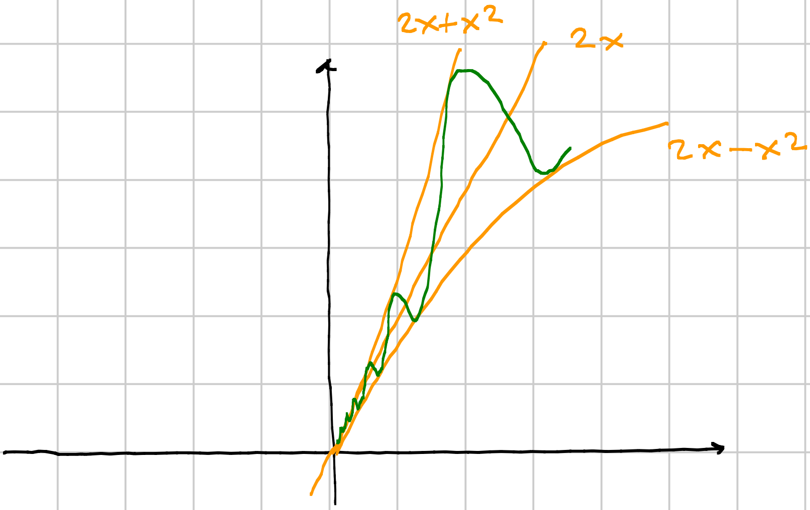
$$f'(x) = 2 + 2x \sin \frac{1}{x^4} + x^2 \cos \frac{1}{x^4} \left(-\frac{4}{x^5}\right)$$

$$= 2 + 2x \sin \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} \cos \frac{1}{x^4}$$

In ogni intorno $(0,\delta)$ esistono valori di x per cui $f'(x) > 0$

ed esistano valori di x per cui $f'(x) < 0$.

Anzi: esistono sottointervalli in cui $f' > 0$ (dunque f è strett. cresc.) ed esistono sottointervalli in cui $f' < 0$ (dunque f è strett. decr.).



Grosso problema che causa la patologia: $f'(x)$ non è continua in $x=0$.