ANALISI 1 — LEZIONE 112

Note Title 21/04/2017

FUNZIONI HÖLDERIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $\alpha \in (0,1)$.
Si dice che f è <u>α-Hölderiana</u> se esiste $H \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq H\, |x-y|^\alpha \qquad \forall x \in A \ \forall y \in A}$$

Oss. La lip. è hölderianità con $\alpha = 1$

Oss. L'hölderianità è una proprietà globale (dipende da A) e metrica.

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$, $A = [0, +\infty)$ Non è lip., ma è $\frac{1}{2}$-hölder con costante 1.

Devo verificare $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \overset{?}{\leq} 1 \sqrt{|x-y|}$

wlog $x \geq y$ e mi ritrovo $\sqrt{x} - \sqrt{y} \overset{?}{\leq} \sqrt{x-y}$

$$\Longleftrightarrow \cancel{x} + y - 2\sqrt{xy} \leq \cancel{x} - y \quad \Longleftrightarrow \quad 2y \leq 2\sqrt{xy}$$

perché posso?

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{y} \leq \sqrt{x} \qquad \text{Ok}$$

perché $y \leq x$

serve intervallo o semiretta

Esercizio Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ verifica $|f(x) - f(y)| \leq H\, |x-y|^\alpha$ con un qualche $\alpha > 1$, allora f è costante.

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = 0 \quad \Rightarrow \text{funzione costante.}$$

$$\leq \frac{H \cdot |h|^\alpha}{|h|} \longrightarrow 0 \quad \text{se } \alpha > 1$$

Esempio 2 $f(x) = x$ $A = [0, +\infty)$. Su questo insieme f NON è $\frac{1}{2}$ - Hölder (idem per ogni esponente $\alpha < 1$)

Se lo fosse, avrei $|f(x) - f(y)| \leq H |x-y|^{\alpha}$

La uso con $y = 0$:

$$|x| \leq H |x|^{\alpha} \qquad \underbrace{|x|^{1-\alpha} \leq H}$$

assurdo per $x \to +\infty$ se $\alpha < 1$.

Esempio 3 $f(x) = x^{\alpha}$ $A = [0, +\infty)$ $\alpha \in (0,1)$

Su questo insieme $f(x)$ è α - hölder, cioè

$$|x^{\alpha} - y^{\alpha}| \leq H |x-y|^{\alpha} \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

Dim. Suppongo wlog che $x > y$ e pongo $y = t$ e $x = t + h$ dove $h > 0$.

Il LHS diventa $(t+h)^{\alpha} - t^{\alpha} = g(t)$

Studio $g(t)$. Calcolo

$$g'(t) = \alpha (t+h)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha \underbrace{\left[(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right]}_{\substack{\text{negativo perché} \\ \alpha-1<0,\text{ quindi} \\ \text{"sono al denominatore"}}} < 0$$

Quindi $g(t) \leq g(0)$ per ogni $t \geq 0$, da cui

$$\underbrace{(t+h)^{\alpha}}_{|x^{\alpha}} - \underbrace{t^{\alpha}}_{y^{\alpha}|} \leq \underbrace{h^{\alpha}}_{\leq |x-y|^{\alpha}}$$

che è quello che volevo (la costante H è 1).

— o — o —

Mettendo $y = 0$ si vede che $H = 1$ è ottimale

Proprietà delle funz. Hölderiane

① f e g α Höld in A $\Rightarrow$ $f+g$ α Höld in A

$$|f(x)-f(y)| \le M_f |x-y|^\alpha \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$
$$|g(x)-g(y)| \le M_g |x-y|^\alpha \qquad \text{"} \quad \text{"}$$

Sommo e ottengo

$$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \le |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$
$$\le (M_f + M_g)|x-y|^\alpha$$

② f α Höld in A $\Rightarrow$ λf α-Höld in A

(Esercizio)

③ f e g α Höld + limitate in A $\Rightarrow$ $f \cdot g$ α-Höld in A

$\boxed{\text{Dim.}}$ $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| =$ (termine misto)

$$|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \le$$

$$\le |f(x)| \cdot |g(x)-g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x)-f(y)|$$

$$\le M_f \cdot H_g |x-y|^\alpha + M_g \cdot H_f |x-y|^\alpha$$

$$= (M_f H_g + M_g H_f)|x-y|^\alpha$$

Esercizio Fare vedere che se anche una sola è non limitata, allora il prodotto può non essere Hölderiano.

④ Composizione f α-Hölderiana, g β-Hölderiana } su insiemi compatibili con la composizione

$\Rightarrow$ $g \circ f$ $\alpha\beta$-Hölderiana

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$|g(f(x)) - g(f(y))| \leq H_g\, |f(x) - f(y)|^{\beta}$$
$$\leq H_g\, (H_f\, |x-y|^{\alpha})^{\beta}$$
$$= H_g\, H_f^{\beta}\, |x-y|^{\alpha\beta}$$

⑤ Hölder in A $\Rightarrow$ unif. cont. in A

$\boxed{\text{Dim.}}$ Dato $\varepsilon > 0$, voglio trovare $\delta > 0$ t.c.

$$|x-y| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Basta porre $H\delta^{\alpha} = \varepsilon$, cioè $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/\alpha}$. A questo punto

$$|f(x) - f(y)| \leq H\, |x-y|^{\alpha} \leq H\, \delta^{\alpha} = H \cdot \frac{\varepsilon}{H} = \varepsilon.$$

⑥ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme LIMITATO. Siano $0 < \beta < \alpha \leq 1$
Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$ sia α-Hölder.
Allora f è anche β-Hölder.

$\boxed{\text{Dim}}$ Per ipotesi $|f(x) - f(y)| \leq H_\alpha\, |x-y|^{\alpha}$ $\forall x \in A$ $\forall y \in A$
Ma allora

$$|f(x) - f(y)| \leq H_\alpha\, |x-y|^{\alpha} = H_\alpha\, |x-y|^{\beta} \cdot \underbrace{|x-y|^{\overbrace{\alpha-\beta}^{>0}}}_{\text{se } A \text{ è limitato, questo è limitato}}$$

$$\leq \underbrace{H_\alpha\, (2M)^{\alpha-\beta}}_{\text{costante}}\, |x-y|^{\beta}$$

Commento: se A è limitato, allora esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$|a| \leq M$ per ogni $a \in A$, ma allora

$$|x-y| \leq (|x|+|y|) \leq 2M$$

— o — o —

Riassunto finale $\quad f: A \to \mathbb{R}$

(1) Se l'insieme A è qualunque, allora

$$\boxed{f \text{ Hölder in } A \ (\text{lip.}) \Rightarrow f \text{ unif. cont. in } A \Rightarrow f \text{ cont. in } A}$$

(2) Se A è limitato, allora per ogni $0 < \beta < \alpha < 1$ vale

$$\boxed{f \text{ Lip in } A \Rightarrow f \ \alpha\text{-Höld in } A \Rightarrow f \ \beta\text{-Höld in } A \Rightarrow f \text{ è u.c. in } A \Rightarrow f \text{ cont. in } A}$$

Le implicazioni inverse sono tutte false.

Esempi classici da sapere

(1) $f(x) = x \log x$ non è lip in $(0,1)$, ma è α-höld per ogni $\alpha \in (0,1)$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$ è u.c. in $(0,\frac{1}{2})$, non è α-höld per ogni $\alpha \in (0,1)$.