ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 14

Note Title 13/10/2023

$\mathbb{R}^3$	$e_1=(3,1,2)$ $e_2=(4,-1,3)$ $e_3=(-1,-18,2)$	$(0,-2,1)$		$(1,0,1)$		1
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$e_1=x^2+1$ $e_2=x-2$ $e_3=x+3$	x		x^2-3x+2	.	2
Spazio	Base	vettori dello spazio				

→ Dimostrare che quella indicata è una base

→ Determinare le comp. dei vettori rispetto alla base

Per la prima domanda, basta: → vedere che sono il numero giusto
→ verificare la lin. indip. (li metto a matrice, lavoro alla Gauss, vedo se tutte le righe hanno il PIVOT)

Per la seconda domanda basta un sistema lineare.

1
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & -18 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -53 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(0,-2,1) = a\,(3,1,2) + b\,(4,-1,3) + c\,(-1,-18,2)$$

⇝ sistema in (a,b,c) che so già avere SOLUZIONE UNICA

Oss. Quando costruisco la matrice da lavorare alla Gauss, posso mettere i vettori come riga/colonna e viene lo stesso (oggi sarebbe più corretto a colonna)

2 $e_1 = x^2+1$ $\quad e_2 = x-2$ $\quad e_3 = x+3$ $\quad \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

La dim. dello spazio è 3, quindi il numero è giusto.

Verifico la lineare indipendenza

$$ae_1+be_2+ce_3=0 \overset{?}{\rightsquigarrow} a=b=c=0$$

$$a(x^2+1)+b(x-2)+c(x+3)=0$$ ↖ polinomio nullo

$$ax^2+(b+c)x+a-2b+3c=0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ a-2b+3c=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x^2+1 & x-2 & x+3 \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Ok} \quad a=b=c=0$$

Oss. È come se in $\mathbb{R}^3$ avessi lavorato con i vettori

$(1,0,1) \qquad (0,1,-2) \qquad (0,1,3)$

Per la seconda domanda, per trovare le componenti di x, devo risolvere

$$x = a(x^2+1)+b(x-2)+c(x+3)$$

(ottengo lo stesso sistema con $0,1,0$ a dx come termini noti)

—o—o—

Dimostrare che nello spazio $M_{2\times 2}$, una base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono in numero giusto. Basta lavorare alla Gauss su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Ho messo le "matrici" come colonne]

[Equivalente a fare

$$a\cdot 1^a + b\cdot 2^a + c\cdot 3^a + d\cdot 4^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio

$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1,-1)$ $v_2 = (2,3)$ $v_3 = (-3,3)$			

spazio vettori

Sono lin. indip.? No perché sono troppi

No perché $\underbrace{3v_1 + v_3}_{\text{comb. lin. che viene 0 senza che tutti i coeff. siano nulli}} = 0$

Chi è il loro Span (v_1, v_2, v_3)

[l'insieme di tutti i vettori che si scrivono come $av_1 + bv_2 + cv_3$]

È tutto $\mathbb{R}^2$! Perché?

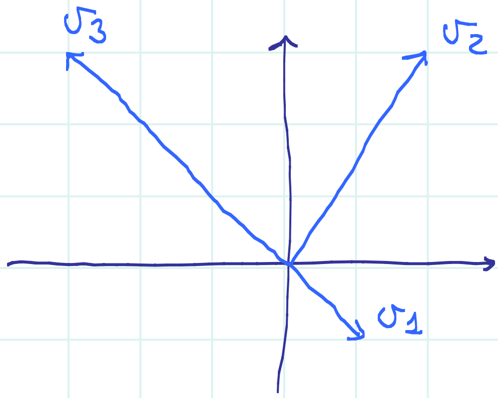
In questo caso $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) \supseteq \text{Span}(\overbrace{v_1, v_2}^{\text{sono una base di } \mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2$

perché v_1 e v_2 sono lin. indip., non essendo uno multiplo dell'altro

Allo stesso modo $\text{Span}(v_2, v_3) = \mathbb{R}^2$ [sono lin. indip.]

$\text{Span}(v_1, v_3) =$ $\boxed{\text{retta } y = -x}$

Sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1



Conclusione

$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2) = \text{Span}(v_2, v_3) = \mathbb{R}^2$

"Posso eliminare uno a caso tra v_1 e v_3"

$\boxed{\text{Lemma di eliminazione}}$ Siano $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ dei vettori in uno sp. vett. V.

Supponiamo che v_{m+1} sia comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$, cioè

$$v_{m+1} = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

per opportuni numeri $c_1, \dots, c_m$.

Allora

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

__Esempio__

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,2) \\ v_2 &= (2,0,1) \\ v_3 &= (1,1,1) \end{aligned}$$

Sono lin. indip.?
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono una base di $\mathbb{R}^3$, quindi $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

— o — o —

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,2) \\ v_2 &= (2,-1,1) \\ v_3 &= (-1,1,1) \end{aligned}$$

Non sono lin. indip. perché

$$v_3 = v_1 - v_2$$

[$v_1 - v_2 - v_3 = 0$ senza tutti i coeff. nulli]

Quindi: non sono una base e non sono generatori e il loro Span non è tutto $\mathbb{R}^3$

$\text{Span}(v_1, v_2, \cancel{v_3}) = \text{Span}(\underbrace{v_1, v_2}_{\text{lin. indip.}}) =$ s.sp. di dimensione 2, cioè un piano

$\parallel$

$\text{Span}(v_1, v_3)$ (perché $v_2 = v_1 - v_3$, quindi eliminabile)

$\parallel$

$\text{Span}(v_2, v_3)$ (perché $v_1 = v_3 + v_2$)

$$v_1 = (1,2,0)$$
$$v_2 = (2,1,1) \in \mathbb{R}^3$$
$$v_3 = (2,4,0)$$
$$v_4 = (0,1,1)$$

Non sono lin. indip. perché sono troppi!

Vedo se lo sono i primi 3 e la risposta è no! $v_3 = 2v_1$

Gli ultimi 3 sono lin. indip. $\rightsquigarrow$ fare il conto

Quindi $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Span}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$

— o — o —