ANALISI 1 - LEZIONE 005

Note Title 28/09/2016

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ NATURALI

c'è lo zero

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ZAHLEN INTERI (relativi)

$\mathbb{Q} = \{\text{frazioni}\} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ RAZIONALI

quozienti

$\mathbb{R}$ = reali

$\mathbb{C}$ = complessi

— o — o —

NUMERI REALI Sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ caratterizzata da 3 tipi di assiomi

→ assiomi algebrici,

→ assiomi di ordinamento,

→ assioma di continuità.

<u>Assiomi algebrici</u> $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sono un CAMPO, cioè le operazioni $+$ e $\cdot$ soddisfano le seguenti proprietà:

(S1) $a+b = b+a \quad \forall \dots$

(S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(S3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(S4) $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b = 0$

no in $\mathbb{N}$

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$

(P2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(P3) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(P4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $ab = 1$

no in $\mathbb{Z}$

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Assiomi di ordinamento La relazione $\geq$ ha le seguenti propr.

(Ord 1) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$ [si ha che] $x \geq y$ VEL $y \geq x$

(Ord 2) $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $x \geq x$ (RIFLESSIVA)

(Ord 3) Se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (ANTISIMMETRICA)

(Ord 4) Se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (TRANSITIVA)

L'ordinamento è legato alle operazioni da 2 assiomi

(OS) Se $x \geq y$, allora $x+z \geq y+z$ $\forall z \in \mathbb{R}$

[$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{R}$ $(x \geq y \Rightarrow x+z \geq y+z)$]

(OP) Se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $xz \geq yz$ $\forall z \in \mathbb{R}$

[$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{R}$ $(x \geq y$ AND $z \geq 0 \Rightarrow xz \geq yz)$]

Esempio Risolvere la disequazione $3x+5 \geq 7 \rightsquigarrow x \geq \frac{2}{3}$

$3x+5 \geq 7$ Aggiungo -5 a dx e sx (OS) e (S4)

$(3x+5)-5 \geq 7-5$

$3x+(5-5) \geq 2$ (S2)

$3x \geq 2$

$\frac{1}{3} \cdot 3x \geq \frac{1}{3} \cdot 2$ (andrebbe dim. che $\frac{1}{3} > 0$) poi (OP)

$\vdots$

$x \geq \frac{2}{3}$

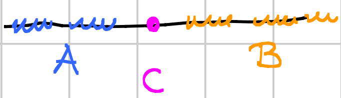
Achtung! Ci sono tante proprietà che si usano sempre, ma non sono scritte negli assiomi

- l'opposto e l'inverso $(-a$ e $\frac{1}{a})$ sono unici
- 0 e 1 sono unici
- $0 \neq 1$ e $1 \geq 0$
- Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \underset{\text{cambio verso}}{\leq} yz$

Assioma di continuità

<u>Def.</u> Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi. Si dice che A sta a sx di B se

(tutti gli el. di A sono $\leq$ di tutti gli el. di B)



$$\boxed{\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad a \leq b}$$

Assioma di continuità: se A sta a sx di B, allora esiste almeno un pto $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{ll} a \leq c & \forall a \in A \\ c \leq b & \forall b \in B \end{array}}$$

<u>Fatto</u>: in $\mathbb{Q}$ non vale l'assioma di continuità, e l'esempio classico è

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 \leq 2 \}$$
$$B = \{ x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 \geq 2 \}$$

Si potrebbe dimostrare che
1. A sta a sx di B
2. Non esiste nessun $c \in \mathbb{Q}$ che sta in mezzo (dovrebbe succedere che $c^2 = 2$, ma questo in $\mathbb{Q}$ non è possibile)

— o — o —

TEOREMONE 1 (Esistenza dei numeri reali)

Esiste una struttura $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che verifica tutti gli assiomi enunciati finora.

DIFFICILE

$\boxed{\text{TEOREMONE 2}}$ (Unicità dei numeri reali)

Supponiamo che esistano due strutture $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ e $(\mathbb{R}, \oplus, \odot, \geq)$ che verificano gli assiomi.
Allora esiste una funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

invertibile (quindi bigettiva) che commuta con le operazioni e l'ordinamento, cioè

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$$
$$x \geq y \iff f(x) \geq f(y)$$

UN PO' MENO DIFFICILE DA DIMOSTRARE

Esercizi

① Dimostrare la legge di semplificazione $a+c = b+c \Rightarrow a = b$

[Dim. Sia d un qualunque opposto di c, cioè $c+d=0$.
Aggiungo d a dx e sx e uso un po' di (S2) e (S3)

$$a+\underbrace{(c+d)}_{0} = b+\underbrace{(c+d)}_{0} \rightsquigarrow a+0 = b+0 \rightsquigarrow a=b \;]$$

② Dimostrare che l'opposto di a è unico

Siano b_1 e b_2 due opposti: allora $a+b_1 = a+b_2 = 0$

$b_1 + a = b_2 + a$

Uso la legge di cancellazione e concludo

③ $1 \cdot (-1) \overset{(P3)}{=} -1$ ④ $a \cdot 0 = 0$ $\left[a\cdot 0 \overset{(S3)}{=} a\cdot(0+0) \overset{D}{=} \cancel{a\cdot 0} + a\cdot 0 \right]$

$\cancel{a\cdot 0} + 0$ "F"