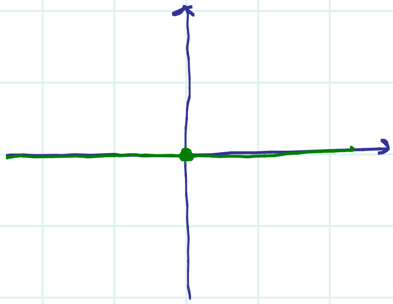
Esempio 1 $\begin{cases} u' = \sin t \cdot u^3 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Per quali valori di α c'è esistenza globale nel futuro

Fatto 1 Se $\alpha = 0$, la soluzione è $u(t) \equiv 0$



Da questa sola oss. segue che le soluzioni con $\alpha > 0$ restano sempre > 0
" $\alpha < 0$ " " < 0
perché altrimenti ci sarebbe violazione di unicità.

Fatto 2 L'eq. è a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = \sin t \cdot u^3 \rightsquigarrow \frac{du}{u^3} = \sin t \, dt \rightsquigarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = -\cos t + c$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2u^2} = \cos t + c \rightsquigarrow \frac{1}{u^2} = 2\cos t + c \rightsquigarrow u^2 = \frac{1}{2\cos t + c}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\cos t + c}}}$$

Se $\alpha > 0$ scelgo il $+$
" $\alpha < 0$ " " $-$

Fatto 3 Supponiamo $\alpha > 0$ e troviamo c

$$\alpha = u(0) = \frac{1}{\sqrt{2+c}} \rightsquigarrow \sqrt{2+c} = \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow 2 + c = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha^2} - 2 = \frac{1 - 2\alpha^2}{\alpha^2}$$

Sostituendo $u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cos t + \frac{1-2\alpha^2}{\alpha^2}}} = \boxed{\dfrac{\alpha}{\sqrt{2\alpha^2 \cos t + (1 - 2\alpha^2)}}}$

Facendo la verifica si dovrebbe vedere che la formula trovata rappresenta la soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. (verifica = conto tombale)

Fatto 4 Per quali α c'è soluzione globale (nel futuro)?
Quando ci sono problemi? Quando

$$2\alpha^2 \cos t + (1-2\alpha^2) = 0$$

cioè

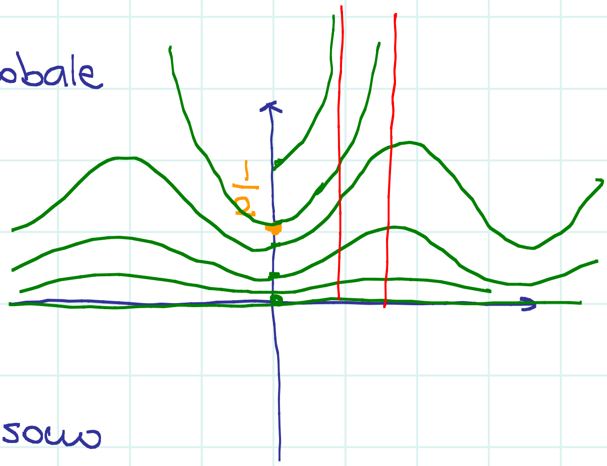
$$\cos t = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} = \boxed{1 - \frac{1}{2\alpha^2}}$$

Problemi se questo sta tra -1 e 1. Sotto 1 ci sta. Quindi il problema c'è se $1 - \frac{1}{2\alpha^2} \geq -1$

$$1 - \frac{1}{2\alpha^2} \geq -1 \iff \frac{1}{2\alpha^2} \leq 2 \iff \alpha^2 \geq \frac{1}{4} \iff \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ oppure } \alpha \leq -\frac{1}{2}$$

Quindi emerge un EFFETTO SOGLIA

- se $\alpha \geq \frac{1}{2}$ allora c'è blow-up (sia nel futuro sia nel passato)
- se $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, allora c'è esistenza globale
- analogo ribaltato sui negativi



Fatto 5 Le soluzioni con α negativo sono quelle positive riflesse rispetto all'asse x

Rigoroso: se $u(t)$ è una soluzione, allora anche $v(t) = -u(t)$ è soluzione

verifica: $v'(t) = -u'(t) = -\sin t \cdot u(t)^3 = \sin t \cdot v(t)^3$
quindi $v(t)$ risolve la stessa equazione.

— o — o —

Esempio 2 $\quad u'' + \lambda u = 0$

Per quali valori di λ tutte le soluzioni sono limitate, nel passato e nel futuro.

Come sono fatte le soluzioni? Dipende dalle radici del polinomio

$$x^2 + \lambda = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 = -\lambda$$

- $\lambda < 0 \rightsquigarrow$ radici reali $\rightsquigarrow x = \pm \sqrt{\underbrace{-\lambda}_{\text{positivo}}}$

$$u(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, t}$$

Questa di sicuro non è limitata per $t > 0$

- $\lambda = 0 \rightsquigarrow$ equazione diventa $u'' = 0 \rightsquigarrow u(t) = c_1 + c_2 t$
  e queste sono limitate solo se $c_2 = 0$, quindi non è vero che sono tutte limitate

- $\lambda > 0 \rightsquigarrow x^2 = -\lambda \rightsquigarrow x = \pm i \sqrt{+\lambda}$
  e quindi la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, t)$$

e queste sono limitate al variare di t.

Oss. Nell'ultimo caso le soluzioni si possono scrivere come

$$u(t) = \underset{\text{ampiezza}}{A} \cos(\sqrt{\lambda}\, t + \underset{\text{fase}}{c})$$

Fatto generale

$$c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at) = \underbrace{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}_{= A} \left\{ \underbrace{\overset{\cos(\beta)}{\overset{\parallel}{\frac{c_1}{\sqrt{\dots}}}} \cos(at) + \overset{\sin(\beta)}{\overset{\parallel}{\frac{c_2}{\sqrt{\dots}}}} \sin(at)}_{\cos(at - \beta)} \right\}$$

Esempio 3 $\qquad u'' + 9u = \sin(\alpha t)$

Per quali α le soluzioni sono tutte limitate

Lineare, coeff. costanti, NON omogenea

Parte omog.: $u'' + 9u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 9 = 0 \rightsquigarrow x^2 = -9$

$\rightsquigarrow x = \pm 3i$

$$u(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$$

Ora devo trovare una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$ della non omogenea.

La cerco del tipo

$$\bar{u}(t) = a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)$$

Riesco a trovare a e b se $\alpha \neq 3$.

$\boxed{\alpha \neq 3}$ Le soluzioni sono TUTTE limitate

$\boxed{\alpha = 3}$ Cerco la soluzione speciale del tipo

$$\bar{u}(t) = t\,(a \sin(3t) + b\cos(3t))$$

Riesco a trovare a e b, ma in ogni caso quello che ottengo è del tipo

$$\bar{u}(t) = t \cdot A\cos(3t + b)$$

e quindi NESSUNA delle soluzioni è limitata.

Questa è la famigerata RISONANZA.

[Vedi su YOUTUBE : TAKOMA BRIDGE

MILLENIUM BRIDGE]