ANALISI 1 — LEZIONE 031

Note Title 17/03/2017

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = n x_n^2 \\ x_1 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 32, \ldots \qquad x_n \to +\infty$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Facile induzione]

(ii) $x_n \to +\infty$ [$x_{n+1} \geq 4n$ + confronto]

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = n x_n^2 \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = 2 \cdot x_2^2 = \frac{1}{8}, \quad x_4 = 3 \cdot x_3^2 = \frac{3}{64}, \ldots$

Osservo che disug. del tipo $x_n \leq \frac{1}{2}$ non si dim. bene per induzione (c'è un pbm. nel passo induttivo).

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

(ii) $x_n \to 0$ [Ovvio da (i)]

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ è facile. Facciamo $x_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

P. base $n=1$ è ovvio

$n \Rightarrow n+1$: Ipotesi: $x_n \leq \frac{1}{2^n}$ Tesi: $x_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$$x_{n+1} = n x_n^2 \leq n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Uso Hp e anche che $x_n \geq 0$

spero

Controllo la speranza $n \overset{?}{\leq} 2^{n-1}$ e questa a sua volta è una facile ind. o Bernoulli $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n$

Oss. Sembra che x_n sia monotona decrescente, ma dimostrarlo è una pena

$$x_{n+1} \overset{?}{\leq} x_n \quad ; \quad n x_n^2 \overset{?}{\leq} x_n \iff x_n \leq \frac{1}{n} \ldots$$

... vorrei un p.to (i) che dica che $x_n \leq \frac{1}{n}$

vado per induzione... passo induttivo ... ipotesi $x_n \leq \frac{1}{n}$ allora

$$x_{n+1} = n x_n^2 \leq n \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \text{ e non } \frac{1}{n+1}$$

— o — o —

Esempio 3

$$\begin{cases} x_{n+1} = \arctan(n x_n) \\ x_1 = 2017 \end{cases}$$

Idea: x_n è definitivamente crescente e $x_n \to \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ $\quad \forall n \geq 2$ [Facile induzione]

(ii) x_n è definitivamente crescente

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ [(i) + (ii) + teo. succ. monot.]

(iv) $\ell = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Dai p.ti (i) e (iii) sappiamo che $\ell > 0$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \arctan(\underbrace{n x_n}_{\to +\infty}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ Ci sono due casi che si escludono a vicenda

① $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \geq 1$

② $\exists\, n_0 \geq 1$ tale che $x_{n_0+1} > x_{n_0}$

Dico che nel caso ② si avrà che $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \geq n_0$

Questo si fa per induzione

→ passo base è la definizione di n_0

→ passo induttivo ... ipotesi: $x_{n+1} > x_n$, ma allora

$$x_{n+2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricorr}}}{=} \arctan((n+1)\,x_{n+1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi +} \\ \text{monot. di} \\ \arctan}}{>} \arctan((n+1)\,x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ n+1>n}}{>} \arctan(n x_n) = x_{n+1}$$

quindi $x_{n+2} > x_{n+1}$, che è la tesi del passo induttivo.

Devo solo dimostrare, per concludere, che il caso ① porta ad un assurdo.

Se fosse sempre decrescente, tenderebbe ad un certo $\ell \in [0, \frac{\pi}{2})$

Se $\ell \neq 0$ abbiamo facilmente un assurdo come da pto (iv).

L'unico pbm. è se $\ell = 0$.

[Idea: se $x_n \to 0$, allora $x_{n+1} \to 0$, allora $n x_n \to 0$, allora

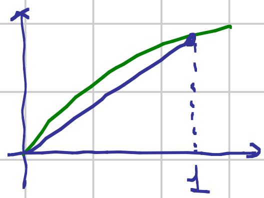
$$\arctan(n x_n) \sim n x_n$$

allora $x_{n+1} \sim n x_n$

e questo è incompatibile con l'andare a 0]

Sistemazione rigorosa: osservo con studio di funzione che

$$\arctan(x) \geq \frac{1}{2}x \qquad \forall x \in [0,1]$$



Se $n x_n \to 0$, allora definitiv. $n x_n \leq 1$, ma allora

$$x_{n+1} = \arctan(n x_n) \geq \frac{n x_n}{2} > x_n \quad \text{abbastanza presto}$$

il che contraddice la monotonia decrescente.

—o—o—

Esempio 4 (Ritorno al passato)

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n^2} \qquad x_0 = 2017$$

Ci eravamo chiesti come si comporta $\sum \alpha^n x_n$ al variare di α. Trovato

$\rightarrow \alpha > 2 \rightsquigarrow$ diverge
$\rightarrow \alpha < 2 \rightsquigarrow$ converge
} criterio del rapporto

Che succede per $\alpha = 2$? Se dimostro che

$$0 < c_1 \leq 2^n x_n \leq c_2$$

con c_1 e c_2 positive, allora di sicuro $\sum 2^n x_n$ non converge (basta in realtà quella di sx)

Pongo $y_n = 2^n x_n$. Cosa risolve y_n?

$$y_{n+1} = 2^{n+1} x_{n+1} = 2^{n+1} \frac{x_n}{2+x_n^2} = 2\, \frac{\overbrace{\boxed{2^n x_n}}^{y_n}}{2+\underbrace{x_n^2}_{(y_n 2^{-n})^2}}$$

$$= 2\, \frac{y_n}{2+y_n^2\, 4^{-n}}$$

Semplificando, ottengo

$$\boxed{y_{n+1} = \frac{y_n}{1+y_n^2 \cdot \frac{4^{-n}}{2}}}$$

Voglio dim. che $0 < c_1 \leq y_n \leq c_2$

Facile: $y_{n+1} \leq y_n$ quindi per indus. $y_n \leq y_0$

Difficile: disug. opposta. Parto osservando che

$$y_{n+1} \geq \frac{y_n}{1+4^{-n} y_0^2}$$

che posso scrivere nella forma

$$y_{n+1} \geq y_n \cdot \left(\frac{1}{1+y_0^2 \cdot 4^{-n}} \right) \qquad\qquad y_{n+1} \geq y_n \cdot a_n$$

Da questa deduco che

$$y_n \geq y_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+y_0^2 4^{-k}} \right) \qquad\qquad y_n \geq y_0 \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

Cosa succede quando $n \to +\infty$?

La produttoria tende a $\displaystyle\prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+y_0^2 4^{-k}} \right)$

il che si riduce alla serie dei log:

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \log\left(1+y_0^2 4^{-k}\right)$$

e questa converge $\left(\log\left(1+y_0^2 4^{-k}\right) \sim y_0^2 4^{-k} \right)$

Quindi la costante c_1 è $y_0 \cdot$ produttoria. ☺