ANALISI 1 — LEZIONE 027

Note Title 24/10/2016

$\boxed{\text{Teorema di De L'Hôpital}}$ Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Teorema misterioso Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (f e g definite dalle parti di x_0, f' e g' devono esistere, poter dividere per g e g')

(ii) il limite sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) esista in $\overline{\mathbb{R}}$ il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$$ (il tipo 4 è escluso)

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Operativamente Devo fare il lim di $\frac{f(x)}{g(x)}$. Controllo che sia forma ind. $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Poi faccio il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

1 – Se questo non esiste, allora BOH

2 – Se questo esiste in $\overline{\mathbb{R}}$, allora ☺

3 – Se questo è ancora $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, allora posso iterare il procedimento, derivando nuovamente.

Esempio 1 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$

No! Non è una forma indet. come previsto.

In realtà è del tipo $\frac{1}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$

Esempio 2 $\lim_{x\to +\infty} \frac{2\cos(3x) + x}{x}$

Questa è una forma del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Ha senso provare Hôp

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-6\sin(3x)+1}{1} = $ N.E. (basta prendere opport. succ. $a_n = \pi n$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$)

Su quello iniziale Hôp non dice nulla. In realtà in via del tutto elem. tende ad 1

$$\frac{x-7}{x} \le \frac{2\cos(3x)+x}{x} \le \frac{7\,12+x}{x}$$

Esempio fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x}$

$\boxed{1^\circ \text{modo}}$ Con i limiti notevoli

$$\frac{\boxed{\frac{e^x-1}{x}}\cdot x - \boxed{\frac{\sin x}{x}}\cdot x + x^2}{\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\cdot x^2} \to \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^2}{x^2} = 1.$$

No!!! Non si fanno i limiti metà per volta!!!

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Con equivalenza asintotica

$e^x - 1 \sim x$, $\sin x \sim x$, $\sin^2 x \sim x^2$

$$\frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} \sim \frac{x - x + x^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

No!! Non si usa l'equivalenza asintotica

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} \underset{\left[\frac{0}{0} \Rightarrow H\hat{o}p\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + 2x}{2\sin x \cos x} \underset{\left[\frac{0}{0} : H\hat{o}p\right]}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x + 2}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{3}{2}$$ OPS ...

corretto

$\boxed{2^\circ \text{ modo revisited}}$ Uso gli sviluppini

$$\frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} - \cancel{x} - o(x) + x^2}{x^2 + o(x^2)}$$

$$= \frac{x^2 + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$$

$$\frac{o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\cancel{x}\ \boxed{\frac{o(x)}{x}}}{\underbrace{x^{\cancel{2}}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}_{\downarrow\, 1}}$$

$\boxed{\frac{o(x)}{x}} \to 0$ resta $\frac{0}{0}$

Morale

→ Mai fare limiti metà per volta

→ Mai usare equiv. asintotica (a meno di non sapere cosa si sta facendo).

Utilità di Hôp nel fare i limiti: 3%. Di solito va evitato perché le derivate "peggiorano" le funzioni.

Esempio 1 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ $[+\infty\cdot 0]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

Si poteva fare senza ricordando che $\frac{\pi}{2}-\arctan x=\arctan\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{\arctan y}{y}=1$$

Esempio 2 $\lim_{x\to-1^+}\frac{\arccos x-\pi}{\sqrt{x+1}}$ $\left[\frac{\pi-\pi}{0}\right]$

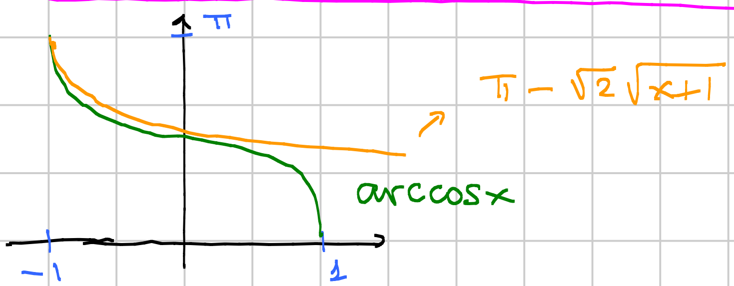
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to-1^+}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,2\sqrt{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^+}-2\frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{\cancel{\sqrt{1+x}}\sqrt{1-x}}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

Conseguenza: $\arccos x=\pi-\sqrt{2}\sqrt{x+1}+o\left(\sqrt{x+1}\right)$ per $x\to-1^+$

o equivalentemente, ponendo $y=x+1$:

$$\boxed{\arccos(-1+y)=\pi-\sqrt{2}\sqrt{y}+o(\sqrt{y}) \quad \text{per } y\to 0^+}$$



Oss. finali

① Posso usare Hôp per fare limiti di succ. ?

SI : posso all'interno del criterio funzioni → successioni

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = 1.$$

② Posso usare Hôp per calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$?

SI, anzi più NO: abbiamo usato quel limite per dire che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$.
Stesso discorso per gli altri lim. notevoli.

③ Si può fare un uso parziali di Hôp per calcolare effettivamente i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + \overbrace{\boxed{\sin^3(\sqrt{x}\arctan x)}}^{o(x),\text{ anzi } \sim x^{3/2}}}{x + \underbrace{\boxed{\tan^2|x|\cdot|\sin x|}}_{o(x),\text{ anzi } \sim |x|^3}}$$

Tutta la sporcizia è $o(x)$ e non c'è verso di trattarla con Hôpital.

— o — o —