CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE DEL PIANO

Si guarda l'insieme dei p.ti fissi (cioè le sol. di $f(x,y) = (x,y)$)
Ci sono varie possibilità

1. Fix = tutto $\mathbb{R}^2$ ⇝ f è l'identità
2. Fix = una retta ⇝ f è la simmetria rispetto a quella retta
3. Fix = singolo punto ⇝ f è una rotazione di un certo angolo intorno a quel punto (l'angolo lo deduco dalla matrice)
4. Fix = $\emptyset$, cioè non ci sono p.ti fissi. Allora ci sono 2 possib.
   - $\boxed{4.1}$ f è una traslazione $f(x) = x + b$ $(A = Id,\ b \neq 0)$
   - $\boxed{4.2}$ f è una simmetria rispetto ad una retta, seguita da una traslazione parallela alla retta

<u>Esempi</u> (1) $f(x,y) = (2x+4,\ 2y-6)$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

↑ Non è ortogonale, quindi non è una isometria

Matrice $A = 2\,Id$ ⇝ f è una dilatazione di fattore 2 rispetto ad un p.to.

Quale punto? Quello che resta fisso, cioè

$$\begin{cases} 2x+4 = x \\ 2y-6 = y \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 6 \end{array}$$

(2) $$\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y + 5, x + \sqrt{3}y + 7),$$

$$f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{7}{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Non è una matrice ortogonale, quindi non è isometria

(3) $$\frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 5, x + \sqrt{3}y + 7),$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

ortogonale

Det = 1 $\rightsquigarrow$ matrice di rotazione

Quindi f è una rotazione rispetto ad un p.to che posso trovare risolvendo $f(x,y) = (x,y)$.

Di quale angolo ruotiamo?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \alpha = 30° \text{ antiorario}$$

(4) $$\left(\frac{-3x + 4y + 1}{5}, \frac{4x + 3y - 2}{5}\right),$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Matrice ortogonale, quindi è una isometria

Det = −1, quindi è una matrice di simmetria

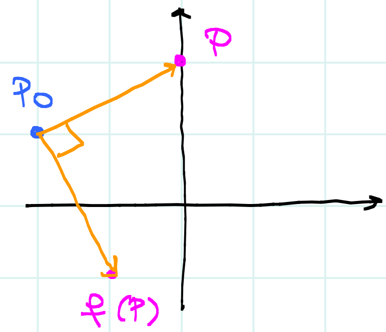
Vediamo chi sono i p.ti fissi

$f(x,y) = (x,y)$ $\quad \begin{cases} \dfrac{-3x+4y+1}{5} = x \\ \dfrac{4x+3y-2}{5} = y \end{cases}$

$\begin{cases} -3x+4y+1 = 5x \\ 4x+3y-2 = 5y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -8x+4y = -1 \\ 4x-2y = 2 \end{cases}$ $\rightsquigarrow 2x-y = 1 \rightsquigarrow y = 2x-1$

Quindi f è la simmetria rispetto alla retta $y = 2x-1$.

Esercizio 2 Scrivere la rotazione di $90°$ in verso orario rispetto al punto $(-2,1)$



Se fosse rispetto all'origine userei la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha = -90°$$

perché è oraria

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Non essendo rispetto all'origine, facciamo la solita storia

$$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow R(P-P_0) \rightsquigarrow R(P-P_0)+P_0$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x+2, y-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ -x-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y-3 \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

Conclusione $f(x,y) = (y-3, -x-1)$

Qualche verifica: $f(-2,1) = (-2,1)$ ☺
$f(0,2) = (-1,-1)$ ☺

P.ti fissi $\begin{cases} y-3 = x \\ -x-1 = y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-y = -3 \\ x+y = -1 \end{cases}$ $\quad 2x = -4 \quad x = -2 \quad y = 1$ ☺

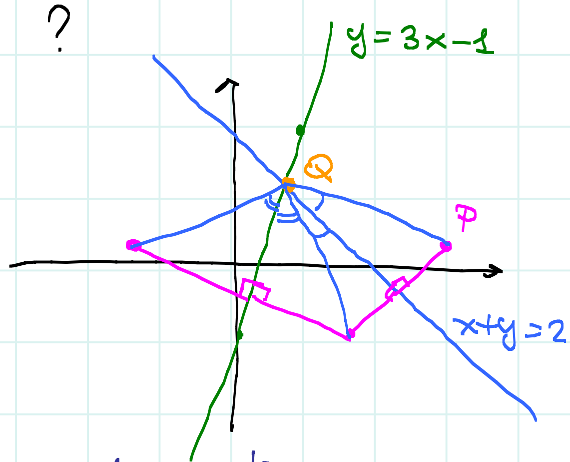
Composizione di affinità e/o isometrie

$f_1(x) = A_1 x + b_1$ $\qquad\qquad$ $f_2(x) = A_2 x + b_2$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prima } f_1, \\ \text{poi } f_2}}{f_2(f_1(x))} = A_2(f_1(x)) + b_2 = A_2(A_1 x + b_1) + b_2$$

$$= \underbrace{A_2 A_1}_{\substack{\text{nuova } A \\ = \text{prodotto delle} \\ A \text{ precedenti}}} x + \underbrace{A_2 b_1 + b_2}_{\text{nuovo } b}$$

Domanda: cosa succede se faccio prima la simmetria rispetto alla retta $x+y=2$ e poi la simmetria rispetto alla retta $y=3x-1$?



La prima è $f(x) = A_1 x + b_1$
seconda $f(x) = A_2 x + b_2$

La composizione avrà come matrice
$A_2 A_1$

Il prodotto di matrici ortogonali è ancora ortogonale, quindi è ancora una isometria.

Ma A_1 e A_2 hanno Det = −1 perché sono simmetrie, quindi $A_1 A_2$ ha Det = +1, quindi è una rotazione!

Rispetto all'unico p.to che resta fisso?

Questo p.to è l'intersezione delle 2 rette!

Di quale angolo stiamo ruotando?

Del doppio dell'angolo compreso fra le due rette.

Analogamente: se faccio la simmetria rispetto a 2023 rette che cosa posso ottenere?

Il Det finale è −1, quindi sarà una simmetria, eventualmente seguita da una traslazione.

Oss. Quando si compongono due matrici di rotazione, si ottiene una rotazione pari alla somma degli angoli

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Cosa succede se faccio

→ prima rot. oraria di $26°$ intorno a $(5,-11)$

→ poi rot. antioraria di $26°$ intorno a $(7,-43)$

La composizione delle due matrici è l'identità, quindi ottengo una traslazione!!

— o — o —