ANALISI 1 — LEZIONE 31

Note Title 09/11/2024

DERIVATA E DIFFERENZIALE

Setting: $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

$f : D \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$

Supponiamo per semplicità che x_0 sia p.to INTERNO a D

cioè $\exists\, \delta > 0$ t.c. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq D$

Def. (Derivata) Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste ed è reale il

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Quando il limite esiste ed è reale si indica con una delle seguenti notazioni

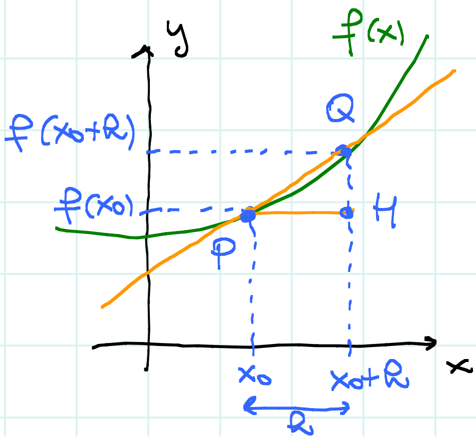
$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \dot{f}(x_0)$$

Oss. Se la derivata esiste in ogni $x_0 \in D$ allora possiamo considerare la funzione $x \longrightarrow f'(x)$

Def. L'oggetto di cui stiamo facendo il limite si chiama RAPPORTO INCREMENTALE

h = incremento della variabile x

$f(x_0 + h) - f(x_0)$ = corrispondente incremento della variabile y



<u>Interpretazione geometrica</u> Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta PQ

$$\text{rapp. increm.} = \frac{QH}{PH}$$

Quando $h \to 0$, intuitivamente la retta PQ tende alla retta tangente al grafico nel p.to P.
Quindi

$$\boxed{f'(x_0) = \text{coeff. angolare della retta tangente al grafico di } f(x) \text{ nel p.to } P = (x_0, f(x_0)).}$$

Retta tangente Passa per P e ha coeff. angolare $f'(x_0)$, quindi la sua equazione

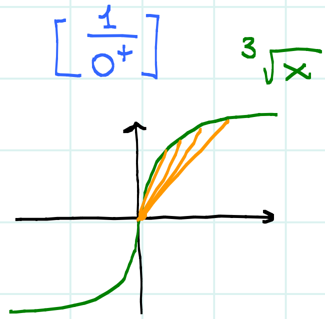
$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

<u>Oss.</u> La derivata $f'(x_0)$ non è obbligata ad esistere

<u>Esempio 1</u> Consideriamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e prendiamo $x_0 = 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \qquad \left[\frac{1}{0^+}\right]$$



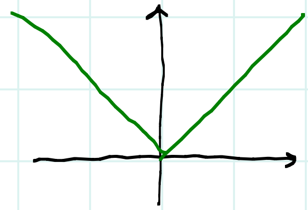
Brutalmente è dovuto al fatto che la retta tangente al grafico in $x = 0$ è verticale

<u>Esempio 2</u> $f(x) = |x|$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \ ; \ \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Quindi $\lim_{h\to 0}$ non esiste



Brutalmente: da dx la retta tangente vorrebbe avere coeff. ang. $= 1$, da sx vorrebbe -1.

— o — o —

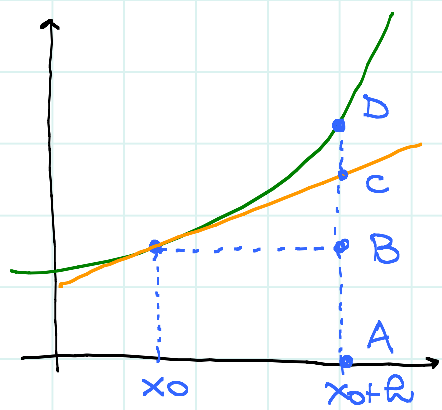
<u>Def</u>. (Differenziale) Stesso setting delle derivate.
Si dice che f è $\boxed{\text{differenziabile}}$ in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \to 0^-}$$

In tal caso si chiama differenziale di f in x_0 l'applicazione lineare $\quad h \to \alpha h$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sempre solito setting.
Allora f è derivabile in x_0 se e solo se f è differenziabile in x_0. Inoltre in tal caso $\alpha = f'(x_0)$.

<u>Interpretazione geometrica</u>



$f(x_0+h) = AD \qquad f(x_0) = AB$

$f'(x_0)\cdot h = BC$

$$\underbrace{f(x_0+h)}_{AD} = \underbrace{f(x_0)}_{AB} + \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{BC} + \underbrace{o(h)}_{CD}$$

Cosa succede a destra quando $h \to 0$

- $f(x_0)$ non cambia
- $f'(x_0) \cdot h$ tende a 0 in maniera proporzionale ad h (cioè linearmente in h) (se divido h per 7, anche BC viene diviso per 7)
- CD tende a 0 ma più velocemente di h.

$\boxed{\text{Dim teorema}}$

$\boxed{1^a \text{ freccia}}$ Ipotesi: f derivabile in x_0

Tesi: f differenziabile in x_0 con $\alpha = f'(x_0)$.

Devo dim. che $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \to 0$

cioè $f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h = o(h)$ per $h \to 0$

Uso def. quasi equivalente cioè divido per h e faccio i limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\downarrow \, f'(x_0)} - f'(x_0) = 0$$

$\boxed{2^a \text{ freccia}}$ Ipotesi: f diff. in x_0, cioè

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Tesi: $f'(x_0)$ esiste e vale α ← corretto dopo video

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sostituisco} \\ f(x_0+h)}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \alpha + \underbrace{\boxed{\frac{o(h)}{h}}}_{\downarrow \, 0} = \alpha = f'(x_0)$$

Teorema Stesso setting di sempre.

Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0

Dim Devo dim. che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Spostiamo il limite in 0 ponendo $h = x - x_0$ $\quad (x = x_0 + h)$

Quando $x \to x_0$ abbiamo che $h \to 0$ e quindi dobbiamo dim. che

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Basta osservare che

$$f(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{h}}_{0} + \underbrace{\boxed{f(x_0)}}_{f(x_0)} \longrightarrow f(x_0)$$

— o — o —

Oss. Se f è continua in x_0, non è detto che sia derivabile (pensare a $|x|$).

— o — o —