ANALISI 1 — LEZIONE 063

Note Title 12/12/2016

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Sostituzioni preconfezionate per trasformare integrali "strani" in integrali di funzioni razionali.

Quattro casi:

1 – integrali con esponenziali
2 – Radici (qualunque) di roba di 1° grado
3 – Radici quadrate di roba di 2° grado
4 – integrali con $\sin x$ e $\cos x$

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ Pongo $e^x = y$, quindi $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{e^x \cdot \overbrace{e^x\,dx}^{dy}}{1+e^x} = \int \frac{y}{1+y}\,dy = \int \frac{y+1-1}{1+y}\,dy$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = y - \log|1+y| = e^x - \log(1+e^x)$$ Verifica!

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{1}{2+e^x}\,dx =$ Pongo $e^x = y$, da cui $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{2+e^x} \cdot \frac{1}{e^x} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dy} = \int \frac{1}{y(y+2)}\,dy = (*)$$

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} \qquad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$(*) = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\log|y| - \log|y+2|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log e^x - \frac{1}{2}\log(2+e^x)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(2+e^x)$$

Tabellina Questa tecnica funziona quando abbiamo

$\boxed{\int Raz(e^x)\,dx}$ dove Raz è una qualunque funzione razionale

Esempio 3 $\int \frac{16^x}{3+8^x}\,dx$ Pongo $y=2^x$, da cui $dy = 2^x \log 2\, dx$

$$= \int \frac{16^x}{3+8^x}\, \frac{1}{2^x \log 2} \cdot \underbrace{2^x \log 2\, dx}_{dy} = \frac{1}{\log 2}\int \frac{y^4}{(3+y^3)\,y}\,dy$$

$$= \frac{1}{\log 2}\int \frac{y^3}{3+y^3}\,dy = \text{si fa...}$$

— o — o —

Esempio 4 $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-3}}\,dx$ Pongo $y=\sqrt{x-3}$ $\rightsquigarrow$ ricavo x in funzione di y: $y^2 = x-3 \rightsquigarrow x = y^2+3$ $\rightsquigarrow dx = 2y\,dy$

$$= \int \frac{y^2+3+2}{\cancel{y}} \cdot 2\cancel{y}\,dy = 2\left(\frac{1}{3}y^3+5y\right) = \frac{2}{3}(x-3)^{3/2} + 10\sqrt{x-3}$$

Esempio 5 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x-3}}\,dx$ Come prima $y=\sqrt{x-3}$ $\rightsquigarrow x = y^2+3$ $\rightsquigarrow dx = 2y\,dy$

$$= \int \frac{1}{y^2+3+y}\,2y\,dy = 2\int \frac{y}{y^2+y+3}\,dy = \text{si fa...}$$

Esempio 6 $\int \frac{\sqrt[3]{x-3}}{x}\,dx$ $y = \sqrt[3]{x-3}$ $\rightsquigarrow x = y^3+3$ $\rightsquigarrow dx = 3y^2\,dy$

$$= \int \frac{y}{y^3+3}\,3y^2\,dy = \text{si fa ... modulo fattorizzare il denominatore.}$$

Esempio 7 $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx$

Pongo $y=\sqrt[6]{x}$ (minimo com. mult.)

$\rightsquigarrow x=y^6$

$\rightsquigarrow dx = 6y^5\,dy$

$$=\int \frac{y^6+y^3}{y^6-y^2}\,6y^5\,dy = 6\int \frac{y^4+y}{y^4-1}\,y^5\,dy = \text{divisione} \dots \text{fattorizz.} \dots$$

Esempio 8 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\,dx$

Pongo $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ $\rightsquigarrow$ ricavo x

$y^2=\dfrac{x+2}{x-3}$; $xy^2-3y^2=x+2$

$\rightsquigarrow x(y^2-1)=3y^2+2 \rightsquigarrow x=\dfrac{3y^2+2}{y^2-1}$

$dx=\left(\dfrac{3y^2+2}{y^2-1}\right)' dy$

$$=\int \underset{F}{y}\underset{g}{\left(\frac{3y^2+2}{y^2-1}\right)'}\,dy = \underset{F}{y}\,\underset{G}{\frac{3y^2+2}{y^2-1}} - \int \underset{f}{1}\cdot\underset{G}{\frac{3y^2+2}{y^2-1}}\,dy$$

$$= y\,\frac{3y^2+2}{y^2-1} - \int \frac{3y^2-3+5}{y^2-1}\,dy = y\,\frac{3y^2+2}{y^2-1} - \int 3+\frac{5}{y^2-1}\,dy$$

$$= y\,\frac{3y^2+2}{y^2-1} - 3y - \frac{5}{2}\left(\log|y-1|-\log|y+1|\right)$$

Ora basta sostituire $y=\dots$

— o — o —

Tabellina Questa tecnica funziona per integrali del tipo

$$\boxed{\int \mathrm{Raz}\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[3]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right)}$$

Basta porre $y=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

stessa roba sotto tutte le radici

dove m = m.c.m. indici coinvolti

— o — o —

Radici di polinomi di 2° grado

Esempio 9 $\int \sqrt{x^2+3x-4}\, dx$

1ª tecnica $\sqrt{x^2+3x-4} = x+y$ Provo a ricavare x

$$\cancel{x^2}+3x-4 = \cancel{x^2}+2xy+y^2 \; ; \quad x(3-2y) = y^2+4$$

$$x = \frac{y^2+4}{3-2y} \rightsquigarrow dx = \left(\frac{y^2+4}{3-2y}\right)' dy$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2+3x-4}\, dx = \int \Big(\underbrace{\frac{y^2+4}{3-2y}}_{x} \underbrace{+y}_{+y}\Big)\left(\frac{y^2+4}{3-2y}\right)' dy$$

Nella variabile y è razionale, quindi si fa. Alla fine sostituisco

$$y = \sqrt{x^2+3x-4} - x$$

2ª tecnica $\sqrt{x^2+3x-4} = y\,\overbrace{(x+4)}^{\text{uno dei fattori del polinomio sotto radice}}$ $\rightsquigarrow$ ricavo x

$$x^2+3x-4 = y^2(x+4)^2 \; ; \quad \cancel{(x+4)}(x-1) = y^2(x+4)^{\cancel{2}}$$

È di 1° grado in x ☺ $\quad x-1 = xy^2+4y^2$

$$x = \frac{4y^2+1}{1-y^2} \rightsquigarrow dx = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2+3x-4}\, dx = \int \underbrace{y\left(\frac{4y^2+1}{1-y^2}+4\right)}_{y(x+4)}\left(\frac{4y^2+1}{1-y^2}\right)' dy$$

= con pazienza si fa.

Esempio 10 $\int \sqrt{7x^2+2x+1}\,dx$

Cosa diventa la 1a tecnica?

$$\sqrt{7x^2+2x+1} = \sqrt{7}\,x+y \;;\; \cancel{7x^2}+2x+1 = \cancel{7x^2}+2\sqrt{7}\,xy+y^2$$

1° grado in x $\Rightarrow$ ☺

Riassunto

1a tecnica $\boxed{\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \qquad \text{Pongo } \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x+y}$

2a tecnica $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ Pongo $\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda)$
dove λ è una radice del polinomio

Oss.
- la 1a funziona purché $a>0$
- la 2a funziona se il pol. ha radici reali
- cosa succede se $a<0$ e non ci sono radici reali?

Lasciate ogni speranza: la funzione non è mai definita sui reali perché il polinomio dentro è sempre negativo!!

Tecnica 3 A seconda del segno di a il polinomio si può scrivere nella forma

$$\alpha \pm (\beta x+\gamma)^2$$

A quel punto pongo $y=\beta x+\gamma$ e ritrovo integrali del tipo

$\int \sqrt{\alpha \pm y^2}\,dy$ e da qui vado con cos t o cosh t a seconda dei segni!