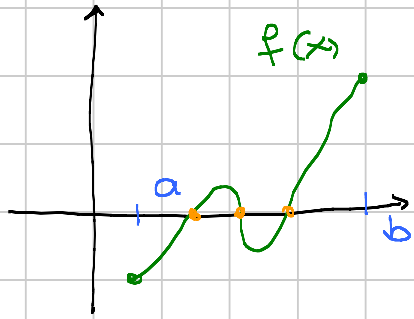
# ANALISI 1 – LEZIONE 039

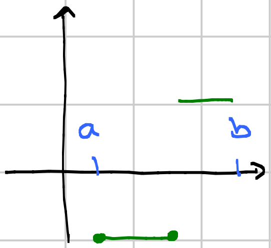
Note Title 09/11/2016

## TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) $f$ è continua
(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (valori di segno opposto agli estremi)
Allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.




Oss. La continuità serve



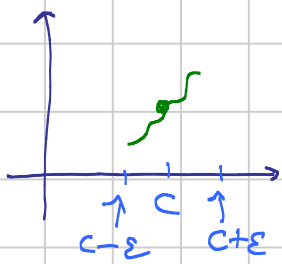

È essenziale essere sui reali $f(x) = x^2 - 2$, $f(0) = -2$, $f(3) = 7$, ma in mezzo non si annulla in $\mathbb{Q}$.

Dim 1 (inf/sup + assurdo) Supponiamo WLOG $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$
Definiamo

$$c := \inf \underbrace{\{ x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \}}_{\text{non è } \emptyset \text{ perché contiene } b}$$

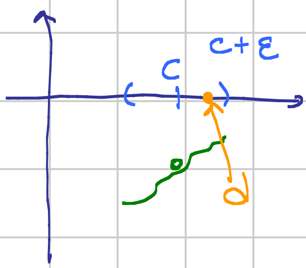
Dico che $f(c) = 0$. Supponiamo che così non sia.

- Se fosse $f(c) > 0$, allora per continuità esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $f(x) > 0$ per ogni $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Ma allora $f(x) > 0$ anche a sx di $c$, il che è contro la def. di inf.




- Se fosse $f(c) < 0$, allora come prima $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) < 0$ $\forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$.

D'altra parte, per caratt. di inf., per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $d < c+\varepsilon$ t.c. $f(d) \geq 0$. Questo è assurdo.




—o—o—

Oss. Potevo definire $c$ in vari modi:

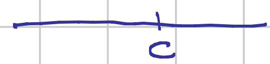
$$c := \inf \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$$
$$c := \sup \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$
$$c := \sup \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$$

Esercizio utile: ① rifare la dim. con le altre def. di $c$
② trovare una $f(x)$ per cui le 4 def. di $c$ producono 4 p.ti diversi.

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ (inf/sup + diretta) Come prima WLOG $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e

$$c := \inf \{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$$

Passo 1: osserviamo che $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a, c)$ ed in particolare




$$f(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [a, c]$$

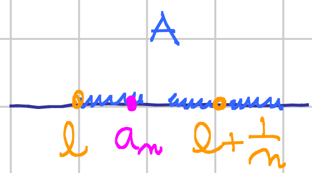
Allora

$$f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x) \leq 0$$

Passo 2: uso un lemma utile

— o — o —

Lemma Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Sia $l = \inf A$. Supponiamo che $l \in \mathbb{R}$ (se $l = -\infty$ è analogo). Allora $\exists \{a_n\} \subseteq A$ t.c. $a_n \to l$




Dim. Uso la caratt. di inf. con $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
Trovo $a_n \in A$ t.c.

$$l \leq a_n \leq l + \frac{1}{n}$$

Per i carabinieri segue che $a_n \to l$.

— o — o —

Tornando alla dim. principale, uso il lemma nell'insieme

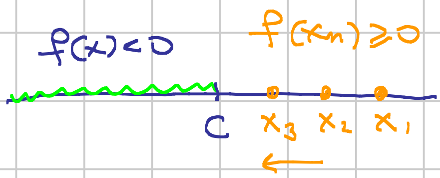
$$A := \{x \in [a,b] : f(x) \geq 0\}$$

Per il lemma $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \to c = \inf A$. Ma allora

$$f(x_n) \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \geq 0.$$

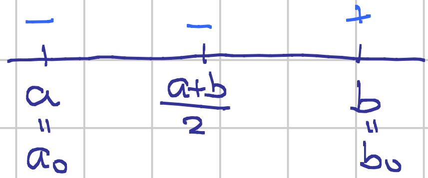



L'unica possibilità è che $f(c) = 0$.

— o — o —

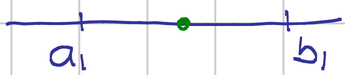
$\boxed{\text{Dim 3}}$ (Bisezione) Come sempre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Considero $\frac{a+b}{2}$.




- Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, allora abbiamo finito
- Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, allora pongo $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ e ho che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$
- Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, allora pongo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b_0$

In ogni caso ho ottenuto un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ tale che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$.




Ora ripeto il procedimento iterativamente.
Al $k$-esimo passaggio trovo un intervallo $[a_k, b_k]$ t.c.

$$f(a_k) < 0 \qquad e \qquad f(b_k) > 0$$

e

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

Inoltre $a_n$ è deb. crescente e limitata dall'alto da $b$

$b_n$ è deb. decr. " " dal basso da $a$.

Quindi

$$a_n \longrightarrow a_\infty \qquad\qquad b_n \longrightarrow b_\infty$$

per il teo. delle succ. monotone e $a_\infty = b_\infty$ perché $b_k - a_k \to 0$.
Chiamato $c$ il valore comune si avrà

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le 0 \qquad e \qquad f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \ge 0$$

L'unica poss. è che $f(c) = 0$.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Il punto $c$ della bisezione coincide con uno dei 4 $c$ precedenti?

— o — o —

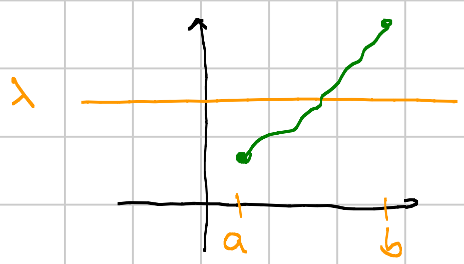
<u>Teorema</u> (Teorema dei valori intermedi) (Intermediate value thm.)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $\lambda$ tale che

$$f(a) < \lambda < f(b) \qquad \text{(o viceversa } f(a) > \lambda > f(b)\text{)}$$

Allora

$$\exists\, c \in (a,b) \quad t.c. \quad f(c) = \lambda$$

<u>Dim.</u> basta porre $g(x) := f(x) - \lambda$ e osservare che $g(a)\cdot g(b) < 0$
e $g(x) = 0 \iff f(x) = \lambda$.




<u>Esempio 1</u> Dimostrare che l'equazione

$$\underbrace{x^{12} - 7\sin x}_{f(x)} = 2016$$

ha almeno una soluzione reale.

$f(0) = 0 < 2016$, $f(10) \ge 10^{12} - 7 > 2016$

Quindi $\exists\, c \in (0, 2016)$ t.c. $f(c) = 2016$. Volendo potevo usare le 2.

↑10: corretto dopo video

**Esempio 2** L'eq. $\sinh x - x^{7212} + \arctan(x^2) = 2016$ ha almeno una sol. reale

Come prima $f(x) = \sinh x - x^{7212} + \arctan(x^2)$.
Basta cercare $a < b$ tale che $f(a) < 2016$ e $f(b) > 2016$.
Posso scegliere $a = 0$ visto che $f(0) = 0$.
Osservo che

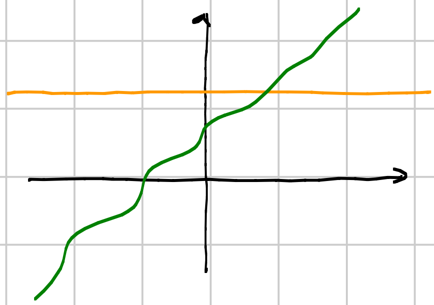
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ (l'esponenziale in $\sinh x$ batte tutto il resto)

Questo mi dice che $f(x)$ supera definitivamente ogni valore, dunque anche 2017.

**Esempio 3** Dimostrare che la $f(x)$ dell'esempio prec., vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è surgettiva

Devo dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x) = \lambda$$



ha almeno una sol. reale. Per questo basta trovare un p.to in cui $f(x) > \lambda$ e uno in cui $f(x) < \lambda$. Questo segue dai 2 limiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

— o — o —

**Fatto generale** Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ (o viceversa)

Allora $f$ è surgettiva.

— o — o —