2 Relazioni

Definizione 2.1 (Relazione)**.** *Prendiamo in considerazione un prodotto cartesiano con due insieme* A, B *che sia* $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} = U$ *(Universo).*
Una relazione è $R \subseteq U$ *dove, come scritto sopra,* $U = A \times B$.
*In una relazione A è detto **insieme di partenza** e B è detto **insieme di arrivo**.*

In sintesi possiamo definire una relazione come un sottoinsieme del prodotto cartesiano fra due insiemi. L'insieme $rel(A, B)$ è l'inseme di tutte le possibili relazioni fra A e B.

Esempio 2.0.1. Esempio relazione.
Prendiamo due insiemi e facciamo il prodotto cartesiano.

- Insieme degli **studenti** $S = \{luca, mario, angela, gino, maria\}$
- Insieme dei **corsi** $C = \{PA, LAB, FI, AN\}$

Il prodotto cartesiano fra S e C è uguale a tutte le possibile coppie ordinate che si possono formare fra i due insieme, quindi:

$$S \times C = \{(luca, PA), (luca, LAB), ..., (marica, AN)\} \tag{5}$$

In questo caso possiamo creare una relazione del prodotto cartesiano andando appunto a prendere un sottoinsieme di $A \times B$ e stabilendo una regola o condizione per scegliere quali coppie ordinate vogliamo, ad esempio $R \subseteq A \times B$ è una relazione che specifica quali esami sono stati sostenuti dai vari studenti.

2.1 Identità

Quando l'insieme di partenza e quello di arrivo coincidono, si ottengono alcuni casi particolari di relazioni. Un esempio è il seguente:

Esempio 2.1.1. Sia $\mathbb{U}$ l'insieme di tutti gli esseri umani, e consideriamo le seguenti relazioni di parentela:

- $Madre = (x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U} \implies x$ madre di y
- $Padre = (x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U} \implies x$ padre di y
- $Figlia = (x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U} \implies x$ figlio di y
- $Figlio = (x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U} \implies x$ figlia di y

Esempio 2.1.2 (Identità)**.** Preso un insieme A, l'identità su A è una relazione con se stessa, e si scrive $Id_A \subseteq$ A X A. Si può quindi vedere come nell'identità di un insieme ogni elementi è identico a se stesso. Inoltre l'identità di un insieme si definisce come:

$$Id_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \tag{6}$$

2.2 Composizione

Definizione 2.2 (Composizione)**.** *Siano* $R : A \to B$ *e* $S : B \to C$*. La **composizione** di R con S è la relazione* $R; S : A \to C$ *così definita:*

$$R; S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists b \in B.(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}^6 \tag{7}$$

Note 2.2.1. *L'insieme di arrivo di R deve essere uguale all'insieme di partenza di S per effettuare l'operazione di composizione.*

Esempio 2.2.1.

[6] Il simbolo "." indica *tale che*. Ad esempio $\exists x.P$ indica che esiste un x per cui vale la proprietà P.

2.3 Relazione opposta

Definizione 2.3 (Relazione opposta)**.** *Sia $R : A \rightarrow B$ una relazione. La* ***relazione opposta*** *di R è la relazione $R^{op} : B \rightarrow A$ definita come:*

$$R^{op} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\} \tag{8}$$

Esempio 2.3.1. A = {pagine web} B = {parole del vocabolario} $R \subseteq$ A X B
Si associa ciascuna pagina web con le parole in essa contenuta:

- $(x, y) \in \mathbb{R}$ dice che nella pagina web "x" è contenuta la parola "y".
- R^{op} $((y, x) \in \mathbb{R})$ dice per ogni parola "y" quali sono le pagine web che le contengono.

2.4 Leggi

Come per gli insiemi, anche per le relazioni esistono delle leggi che regolano il comportamento delle varie operazioni.

Per tutti gli insiemi A, B, C, D e per tutte le relazioni $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$, valgono le leggi scritte nelle tabelle 4, 5, 6, una volta preso $A \times B$ come universo.

Associatività	(R;S);T = R;(S;T)
Unità	Id_A;R = R;Id_B = R
Assorbimento	Ø;S = S;Ø = Ø

Table 4: Leggi composizione

Convoluzione	$(R^{op})^{op} = R$
Opposto-identità	$(Id)^{op} = Id$
Opposto-complemento	(A X B)^{op} = (B X A)
Opposto-vuoto	$(\emptyset)^{op} = \emptyset$

Table 5: Leggi relazioni opposte

Distributività composizione	R;(S ∪ T) = (R;S) ∪ (R;T)	(S ∪ T); R = (S;R) ∪ (T;R)
Distributività opposto	$(R \cup S)^{op} = S^{op} \cup R^{op}$	$(R \cap S)^{op} = S^{op} \cap R^{op}$
Distributività opposto su negazione	$(\overline{R})^{op} = (\overline{R^{op}})$	
Distributività opposto su composizione	(R;S)^{op} = S^{op};R^{op}	

Table 6: Leggi distributività

Spiegazione Associatività:
R;S ⊆ A X C, facendo la composizione con T la prima parte dell'uguaglianza (R;S);T ⊆ A X D. A sua volta, analizzando la seconda parte dell'uguaglianza, S;T ⊆ B X D che poi se andiamo a comporre con R risulta che R;(S;T) ⊆ A X D. Possiamo così vedere che l'uguaglianza è verificata. Per la dimostrazione discorsiva completa vedere in seguito.

Spiegazione Unità:
Essendo che $Id_A = A \times A$ e $Id_B = B \times B$ vediamo che la prima parte dell'uguaglianza $Id_A; R = A \times B$ e la seconda è $R; Id_B = A \times B$, quindi la prima uguaglianza è verificata. La seconda uguaglianza si verifica in automatico visto che $A \times B = R$.

2.4.1 Dimostrazione proprietà associativa

Dimostrazione 2.4.1. Facciamo una dimostrazione discorsiva della proprietà associativa in tabella 4.
Proprietà associativa: (R;S);T = R;(S;T) Con: $R \subseteq$ A X B, $S \subseteq$ B X C, $T \subseteq$ C X D.

Innanzitutto ricordiamo la proprietà per cui dati 2 insiemi X, Y $X = Y \iff X \subseteq Y \land Y \subseteq X$.
Utilizziamo la proprietà sopra scritto andando a sostituire alla X "(R;S);T" e alla Y "R;(S;T)", troviamo così due condizioni che, per l'operatore logico $\land$, devono essere vere entrambe per far valere l'uguaglianza:

- (R;S);T $\subseteq$ R;(S;T) - Dimostrazione 1°.
- R;(S;T) $\subseteq$ (R;S);T - Dimostrazione 2°.

Dimostrazione 1°: (R;S);T $\subseteq$ R;(S;T)
Come prima cosa ricordiamo che un insieme $W \subseteq Z \ \forall w \in W \land z \in Z$.
Sostituendo "(R;S);T" a W e "R;(S;T)" a Z troviamo che, per fare in modo che la condizione che un insieme sia sottoinsieme di un altro $\forall (a, d) \in$ (R;S);T $\land$ $(a, d) \in$ R;(S;T). [7]

Noi dobbiamo dimostrare che $\forall (a, d) \in$ R;(S;T) sia vera:
Prendiamo come prima cosa una generica coppia di valori (a,d) $\in$ (R;S);T. Perché esista questa coppia deve esistere per forza un valore "c" che faccia da ponte fra "(R;S)" e "T" (ricordiamo che R;S $\subseteq$ A X C e T $\subseteq$ C X D). Possiamo scrivere quindi (Colore **nero** nella rappresentazione [8]):

$$(a, d) \in (R; S); T \implies \exists\, c \in C \bullet (a, c) \in R; S \land (c, d) \in T \text{ (Nel disegno freccia NERA)} \quad (9)$$

Ora nella forma scritta sopra [9] abbiamo una parte (a,c) $\in$ R;S che deve essere "scomposta" in maniera specifica per verificare che tutta la composizione di partenza sia vera, infatti deve esistere un valore b che colleghi l'insieme R ed S nell'operazione di composizione R;S (ricordiamolo che R $\subseteq$ A X B e R $\subseteq$ B X S). Possiamo scrivere quindi (Colore **blu** nella rappresentazione [8]):

$$(a, d) \in (R; S); T \implies \exists b \in B, c \in C \bullet (a, b) \in R \land (b, c) \in S \land (c, d) \in T \text{ (Nel disegno freccia BLU)} \quad (10)$$

Ora per arrivare alla forma che dobbiamo dimostrare, R;(S;T), l'ultima forma [10] è troppo estesa, infatti la parte $(b, c) \in S \land (c, d) \in T$ deve essere racchiusa per arrivare alla forma S;T. Quindi andiamo a scrivere che (Colore **rosso** nella rappresentazione [8]):

$$(a, d) \in R; (S; T) \implies \exists\, b \in B \bullet (a, b) \in R \land (b, d) \in S; T \text{ (Nel disegno freccia ROSSA)} \quad (11)$$

L'ultima forma raggiunta [11] dimostra che $\forall (a, d) \in$ R;(S;T) è vera e quindi che (R;S);T $\subseteq$ R;(S;T) è verificata. ■

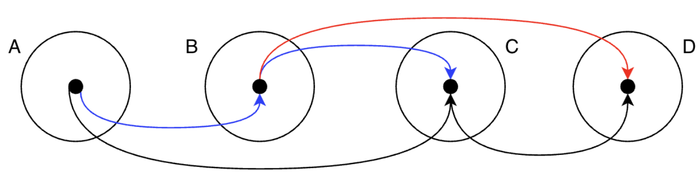


Figure 8: Rappresentazione dimostrazione 1°

[7] Ricordati che (R;S);T ha al suo interno coppie (a,d) $\subseteq$ A X D per le operazioni di composizione

Dimostrazione 2°: R;(S;T) ⊆ (R;S);T
La seconda dimostrazione ha uno svolgimento analoga alla prima. Pure qui andiamo a considerare che: per fare in modo che la prima parte, cioè "R;(S;T)", sia sottoinsieme della seconda, la seconda deve contenere tutti gli elementi della prima. quindi $\forall (a,d) \in R;(S;T) \ \wedge \ (a,d) \in (R;S);T$.

Per fare in modo che ciò scritto sia vero dobbiamo dimostrare che $\forall \, (a,d) \in (R;S);T$ sia vero:
Come prima cosa dobbiamo capire in che casi i punti appartengono a "(R;S);T", questo avviene quando esiste un punto "c" che collega "R;S" e "T" (R;S è uguale a A X C e T è C X D), quindi possiamo scrivere che:

$$(a,d) \in (R;S);T \Longrightarrow \forall c \in C \bullet (a,c) \in R;S \wedge (c,d) \in T \tag{12}$$

Da questo punto procediamo come nella dimostrazione 1° quindi andiamo a scomporre ulteriormente la forma [12] in $(a,c) \in R;S$ per verificare i casi in cui la composizione esista:

$$(a,d) \in (R;S);T \Longrightarrow \exists \, b \in B, \ c \in C \bullet (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \wedge (c,d) \in T \tag{13}$$

L'ultimo passaggio è trasformare la forma [13] in una versione che possa validare $\forall \, (a,d) \in (R;S);T$, ed essa sarebbe:

$$(a,d) \in R;(S;T) \Longrightarrow \exists \, c \in C \bullet (a,c) \in R;S \wedge (c,d) \in T \tag{14}$$

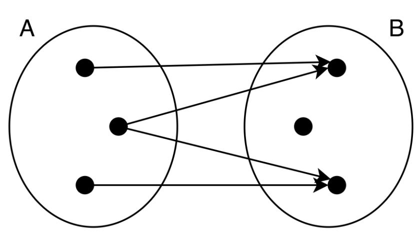
L'ultima forma travata [14] verifica che $\forall \, (a,d) \in (R;S);T$ sia vero, di conseguenza pure R;(S;T) ⊆ (R;S);T è verificato. ■

Dato che siamo riusciti a dimostrare entrambe le dimostrazioni la proprietà associativa ((R;S);T = R;(S;T)) con cui siamo partiti è verificata. ■

2.5 Proprietà fondamentali

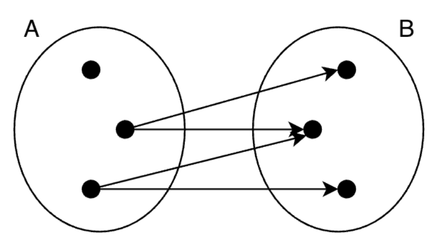
Prendendo in considerazioni due insiemi A e B ed una relazione R, dove R ⊆ A X B, valgono le seguenti proprietà.

Totale: $\forall a \in A.(\exists b \in B.(a,b) \in R)$



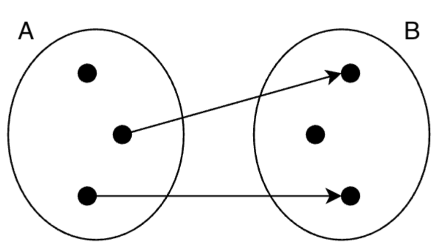
(a) Ogni elem. di A è collegato ad almeno uno di B

Surgettiva: $\forall \ b \in B.(\exists a \in A.(a,b) \in R)$



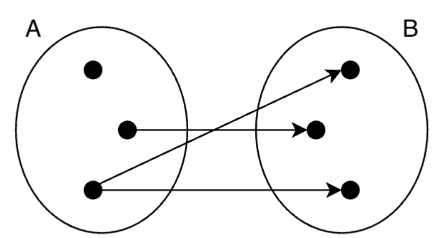
(b) Ogni elem. di B ha almeno un entrata da A

Univalente:
$\forall a \in A.\exists$ al più un $b \in B.(a,b) \in R$



(a) Ogni elem. di A deve avere al massimo 1 collegamento con B

Iniettiva:
$\forall b \in B.\exists$ al più un $a \in A.(a,b) \in R$



(b) Ogni elem. di B deve avere al massimo un entrante da A

Le proprietà fra di loro sono legate da un rapporto di **dualità**:

- R $\subseteq A \times B$ è totale $\iff R^{op} \subseteq B \times A$ è surgettiva.
- R $\subseteq A \times B$ è surgettiva $\iff R^{op} \subseteq B \times A$ è totale.
- R $\subseteq A \times B$ è univalente $\iff R^{op} \subseteq B \times A$ è iniettiva.
- R $\subseteq A \times B$ è iniettiva $\iff R^{op} \subseteq B \times A$ è univalente.

2.5.1 Teorema di caratterizzazione

Prendendo due insiemi A e B ed una relazione R tale che $R \subseteq A \times B$. Possiamo vedere come ogni proprietà fondamentale vale solo se sono soddisfatte determinate condizioni:

- **Totale** $\iff Id_A \subseteq R; R^{op}$
  La congiunzione fra R che è $A \times B$ e il suo opposto che è $B \times A$ torna un insieme $A \times A$, per questo l'identità di A (Id_A), che sarebbe un insieme $A \times A$, è un sottoinsieme di $R; R^{op}$.
  Se R non fosse totale vorrebbe dire che alcuni elementi di $R(A)$ non sono collegati.
- **Univalente** $\iff R^{op}; R \subseteq Id_B$
  La congiunzione fra R^{op} che sarebbe $B \times A$ e R, che è $A \times B$, forma un insieme $B \times B$ che è quindi sottoinsieme di Id_B, che sarebbe $B \times B$.
- **Surgettiva** $\iff Id_B \subseteq R^{op}; R$
  La congiunzione fra R^{op} ed R, che sono rispettivamente $B \times A$ e $A \times B$, torna una relazione $B \times B$, quindi Id_B, che è $B \times B$, è sottoinsieme.
- **Iniettiva** $\iff R; R^{op} \subseteq Id_A$
  La congiunzione fra R ed R^{op} torna $A \times A$, essendo che R è $A \times B$ e l'opposto è $B \times A$, che è sottoinsieme di Id_A che è $A \times A$.

2.5.2 Proprietà di chiusura per composizione

Per tutti gli insiemi A, B, C e per tutte le relazioni, $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$ vale che:

1. Se R ed S sono totali allora la loro composizione $R; S$ è totale.
2. Se R ed S sono univalenti allora la loro composizione $R; S$ è univalente.
3. Se R ed S sono surgettive allora la loro composizione $R; S$ è surgettiva.
4. Se R ed S sono iniettive allora la loro composizione $R; S$ è iniettiva.

2.6 Funzione

Una funzione può essere definita utilizzando le proprietà fondamentali delle relazioni.

Definizione 2.4 (Funzione)**.** *Dati due insiemi A, B ed una relazione $R \subseteq A \times B$, tale relazioni si definisce funzione quando rispetta la proprietà **totale** e **univalente** quindi tutti gli elementi dell'insieme A hanno uno ed un solo corrispettivo in B.*

Esempio 2.6.1. Ad esempio ne lcaso dei booleani, dato l'insieme $B = \{\text{true, false}\}$:

- $\neg : B \to B \; B = (t, f), (f, t)$
- $\wedge : B \times B \to B$

Definizione 2.5 (Funzione parziale)**.** *Una funzione si dice parziale se rispetta solamente la proprietà univalente.*

Esempio 2.6.2. Un esempio è la funzione $f : \frac{1}{x}$ con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

Definizione 2.6 (Funzioni iniettive e surgettive)**.**

Definizione 2.7 (Biezione)**.** *Dati due insiemi A, B ed una relazione $R \subseteq A \times B$, tale relazioni si definisce funzione biettiva quando rispetta tutte e 4 le proprietà. Quindi:*

- $\forall a \in A$ *esiste* ***esattamente un*** $b \in B.(a, b) \in \mathbf{R}$
- $\forall b \in B$ *esiste* ***esattamente un*** $a \in A.(a, b) \in \mathbf{R}$

Domanda: Se dati due insiemi A, B dove $|A| \neq |B|$ la loro relazione R $\subseteq$ A X B può essere una biezione?
La risposta è NO visto che avendo cardinalità diverse esisterà sempre un elemento in B che o non ha corrispettivo o ne ha 2.

2.6.1 Composizione di funzioni

Proposizione 2.6.1. *Per tutti gli insiemi* A, B, C *e tutte le funzioni* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*, la relazione* $f; g$ *è una funzione,* $f; g : A \to C$.

Esempio 2.6.3. Dati due funzioni f e g dove:
$f : A \to B \qquad g : B \to C$ [8]
La compozione si scrive come $f; g$ e sarebbe $f; g \subseteq A \times C$ [9]

Note 2.6.1. *Indichiamo con* $fun(A, B) = \{f \mid f : A \to B\}$ *l'insieme di tutte le funzioni che vanno da* A *a* B*. Di conseguenza* $fun(A, B) \subseteq rel(A, B)$.

2.6.2 Proprietà di chiusura per funzioni

Per tutti gli insiemi A, B, C e per tutte le relazioni, funzioni, $i : A \to B$ e $j : B \to C$ valgono le seguenti proprietà:

1. Id_A è una biezione, essendo una relazione con se stesso
2. Se prendiamo $i : A \to B$ e $j : B \to C$, dove entrambe le funzioni sono biezioni, la loro composizione, $i; j : A \to C$ è a sua volta una biezione
3. Se prendiamo la funzione $i : A \to B$ biettiva, il suo opposto $i^{op} : B \to A$ è a sua volta biettiva

2.6.3 Caratterizzazione in biezione

Per tutti gli insiemi A, B, per tutte le relazioni $R : A \leftrightarrow B$ vale che:

- R è una biiezione se e solo se $Id_A = R; R^{op}$ e $Id_B = R^{op}; R$
- Una relazione $S : B \leftrightarrow A$ è l'inversa di R se $Id_A = R; S$ e $Id_B = S; R$
- $R : A \leftrightarrow B$

Spiegazione: Per definire la proprietà di caratterizzazione per una relazione biettiva bisogna partire da cos'è una relazione biettiva: una relazione è biezione quando è contemporaneamente totale, univalente, surgettiva ed iniettiva.
Da qui capiamo che se una relazione ha tutte e 4 le proprietà a suo volta dovrà rispettare per ciascuna di esse la caratterizzazione associata vista nel paragrafo 2.5.1.
Quindi semplicemente riscriviamo questa quattro proprietà semplificando $Id_A \subseteq R; R^{op}$ con $R; R^{op} \subseteq Id_A$ in $Id_A = R; R^{op}$ e $Id_B \subseteq R^{op}$; con $R^{op}; R \subseteq Id_B$ con $Id_B = R^{op}; R$ (possiamo fare questa "semplificazione" perché due insiemi sono uguali quando uno è sottoinsieme dell'altro, come in questo caso).

Esempio 2.6.4. Come si usa la caratterizzazione:
Dati due insiemi A, B ed una relazione R $\subseteq$ A X B. Se riusciamo a trovare una relazione S $\subseteq$ B X A tale che venga soddisfatta la definizione sopra scritta per cui $Id_A = R; S \wedge S; R = Id_B$ è equivalente a dimostrare che la relazione R è una biezione.

[8] Scrivere una funzione "f" nella forma $f : A \to B$ equivale a scrivere f $\subseteq A \times B$
[9] É possibile scrivere la composizione di funzioni anche come $g \cdot f$ oppure $g(f())$

2.6.4 Insiemi di biezione

Definizione 2.8 (Insiemi di biezione)**.** *Dati due insiemi A e B, essi sono in biezione* [10] *se esiste una biezione* $i : A \to B$*, e si scrive come* $A \cong B$ [11]

Esempio 2.6.5. Esempi insiemi di biezione:

- Dati gli insiemi $2 = \{0, 1\}$ e bool $= \{true, false\}$ l'insieme di biezione è $2 \cong$ bool
- Dati A e B l'insieme di biezione è A × B ≅ B × A
  Altri modi per scriverlo sono: i:A × B ⟶ B × A - i((a,b))=(b,a)[12]
  NOTA: A × B = B × A sarebbe farlo perché uno crea coppie (a,b) e l'altro coppie (b,a).
- Dati gli insieme $1 = \{0\}$ ed A l'insieme di biezione è A × 1 ≅ A
  Altri modi per scriverlo sono: i:A × 1 ⟶ A i((a,0)) = a
- fun(A × B, C) ≅ fun(A, (fun(B,C))
  Spiegazione esempio: la prima funzione data una coppia (a,b) restituisce un valore c mentre la seconda funzione dando un valore a restituisce una nuova funzione, dove a sua volta se inseriamo un valore b restituisce c. Quindi f((a,b)) = c e f(a)(b)=c.

Esempio 2.6.6. Esempio particolare con dimostrazione
Per tutti gli insiemi A, B, C vale che:

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C) \tag{15}$$

Dimostrazione 2.6.1. Innanzitutto scriviamo questa biezione sotto la seguente forma
i((a,b),c) = (a,(b,c)) dove la funzione "i" prende in input una coppia di valori ((a,b),c) e restituisce (a,(b,c)).
Utilizziamo la proprietà di caratterizzazione scritta nel paragrafo 2.6.3 che dice che:
$R \iff Id_A = R; R^{op} \wedge Id_B = R^{op}; R$.
Sfruttiamola applicandola al nostro caso quindi (consideriamo i come una relazione fra due insiemi W e K dove W è $((A \times B) \times C)$ e K è $(A \times (B \times C))$):

$$i\ biettiva \iff Id_W = i; i^{op} \wedge i^{op}; i = Id_K \tag{16}$$

Il nostro obbiettivo è quindi trovare i^{op} che soddisfi le due condizioni determinate da $\wedge$ sopra:

- $Id_W = i; i^{op}$ - Dimostrazione 1°
- $Id_K = i^{op}; i$ - Dimostrazione 2°

Dimostrazione 1° - $Id_W = i; i^{op}$ Ricordiamo che l'opposto di "i" è $i^{op} : A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C$ che quindi possiamo vedere come una funzione che prende in ingresso una coppia di valori (a, (b,c)) e restituisce ((a,b),c).
Ora rappresentiamo la composizione fra i e i^{op} come unione fra funzioni come funzione di una funzione quindi: $i; i^{op} = i^{op}(i(x))$
Ora semplicemente riscriviamo la composizione di funzioni scrivendo i parametri di input ed output:

$$i^{op}(i((a, b), c) = i^{op}(a, (b, c))\ che\ restituisce\ ((a, b), c) \tag{17}$$

Vediamo così che l'opposto di i restituisce lo stesso valore che restituisce Id_W (Id_W è una relazione fra W e W, visto che W è (A × B) × C possiamo scrivere che $Id_W((a, b), c) = ((a, b), c)$).
$\mathcal{P}(A) \cong$ fun(A,2)[13]. Questo caso è dimostrato. ■

[10] puoi chiamare due insiemi in biezione anche in corrispondenza, 1-1 o in una relazione biunivoca
[11] attenzione: usare il simbolo ≅ invece che un semplice = vuole dire che non per forza le due parti devono essere ugualia
[12] questa forma vuol dire che se diamo in input alla funzione i una coppia di valori (a,b) restituirà una coppia (b,a)
[13] Questo insieme è quello dei numeri binari

Dimostrazione 2° - $Id_K = i^{op}; i$ Procediamo in maniera analoga alla dimostrazione 1° quindi andiamo a rappresentare la composizione fra l'opposto i^{op} ed i come funzioni di funzione $i(i^{op})$ andando poi ad inserire i parametri i input ed output:

$$i(i^{op}(a,(b,c)) = i((a,b),c) \ che \ restituisce \ (a,(b,c)) \tag{18}$$

Pure in questo caso possiamo vedere che l'opposto di K Id_K restituisce gli stessi valori scritti sopra (anche in questo caso tieni a mente che l'opposto di Id_K è una relazione che associa K con K quindi, ricordando che K è A × (B × C), se la scriviamo sotto forma di funzione è $Id_K(a,(b,c)) = (a,(b,c))$. Anche questo caso è dimostrato. ■

Essendo che entrambi le casistiche sono state dimostrate possiamo concludere che l'insieme di biezione (A × B) × C ≅ A × (B × C) è dimostrato. ■

2.6.5 Proprietà insiemi di biezione

Per tutti gli insiemi A, B, C valgono le proprietà scritte nella tabella 7.

Riflessiva	A ≅ A
Simmetrica	A $\cong B \Longrightarrow B \cong A$
Transitiva	$A \cong B,\ B \cong C \Longrightarrow A \cong C$

Table 7: Proprietà insiemi di biezione

2.7 N-upla

Definizione 2.9 (N-upla)**.** *Sia A un insieme e $n \in \mathbf{N}$. Una sequenza su A di lunghezza n è una n-upla $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ dove $a_i \in A$ per ogni indice $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Definiamo quindi l'insieme A^n du tutte le sequenze come:*

$$A^n = \{(a_0, a_1, ..., a_{n+1}) \mid \forall\, i \in \{0, ..., n-1\} \,.\, a_i \in A\} \tag{19}$$

Definizione 2.10 (Sequenza su A di lunghezza arbitraria)**.** *Una sequenza su A di lunghezza arbitraria è una sequenza di lunghezza n per qualsiasi numero naturale $n \in \mathbb{N}$. L'insieme di tutte le sequenze su A di lunghezza arbitraria:*

$$A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$