ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 19

Note Title 20/10/2023

→ MATRICE INVERSA

→ MATRICI DI CAMBIO BASE

$\boxed{\text{Matrice inversa}}$ Data A matrice quadrata $n \times n$, cerco una matrice A^{-1}, sempre $n \times n$, tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

- Esiste? È unica?
- Se esiste, come la trovo?

$\boxed{\text{Risposta se } n=2}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

→ se $ad-bc=0$, allora A^{-1} non esiste

→ se $ad-bc \neq 0$, allora A^{-1} esiste ed è data dalla formula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[I 2 sulla diag. princ. si scambiano gli altri 2 cambiano segno, poi divido per $ad-bc$]

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $ad-bc = 1 \rightsquigarrow$ è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$:)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Verifica nel caso generale = fare il prodotto]

Caso generale: uso GAUSS-JORDAN

Esempio

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_1 - R_2 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}$$

Matrice di cui voglio fare l'inversa — Identità

Lavoro alla Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_3 \\ R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3R_1 - 2R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{3}R_1 \\ \frac{1}{3}R_2 \\ -R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Dovrebbe essere A^{-1}

Verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$:)

Procedura:
- → Scrivo $(A \mid Id)$
- → Lavoro alla Gauss fino ad ottenere $(Id \mid B)$
- → Allora $B = A^{-1}$
- → Se questo non è possibile perché viene una riga di zeri dalla parte di A, allora l'inversa non esiste.

Perché funziona?

① Ogni operazione alla Gauss su A è equivalente a moltiplicare A a sx per una matrice G

ricopia R_1 →
$R_2 - 2R_3$ →
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-2g & \dots & \\ & & \end{pmatrix}$$

② Fare 25 operazioni alla Gauss è come moltiplicare a sx per una G unica

$$\underbrace{G_{25} \cdot \ldots G_3 G_2 G_1}_{G} A = GA$$

③ Moltiplicare G per $(A|I)$ viene $(GA|G)$

se qui ho Id, allora $G = A^{-1}$

— o — o —

$\boxed{\text{Matrice cambio base}}$

Setting: → V sp. vett. di dim finita
→ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V
→ $\{\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n\}$ altra base di V

Domanda: se conosco le comp. di un certo v rispetto alla prima base, come calcolo le comp. dello stesso v rispetto all'altra base?

Risposta: uso matrice di cambio base costruita con la seguente procedura.

→ Prendo v_1, e lo scrivo usando la 2ª base

$$v_1 = \boxed{c_{11}}\,\hat{v}_1 + \boxed{c_{1,2}}\,\hat{v}_2 + \ldots + \boxed{c_{1,n}}\,\hat{v}_n$$

⇝ uso i numeri come prima colonna della matrice

→ Prendo v_2 e faccio la stessa cosa

$$v_2 = \boxed{c_{2,1}}\,\hat{v}_1 + \boxed{c_{2,2}}\,\hat{v}_2 + \dots + \boxed{c_{2,m}}\,\hat{v}_m$$

⇝ 2ª colonna della matrice

→ e così via fino a v_m.

<u>Perché funziona?</u> Se io do in INPUT $(1, 0, \dots, 0)$

Queste rappresentano v_1 rispetto alla prima base

Ora $\quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$ prima colonna di M

= componenti di v_1 risp. alla 2ª base

— o — o —

<u>Esempio</u> $\quad V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,0) \qquad \hat{v}_1 = (2,3)$

$v_2 = (0,1) \qquad \hat{v}_2 = (1,2)$

↑ 1ª base $\qquad$ ↑ 2ª base

$v_1 = (1,0) = a(2,3) + b(1,2) \qquad 2(2,3) - 3(1,2)$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2a + b = 1 \\ b = -3 \quad a = 2 \end{matrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$v_2 = (0,1) = a(2,3) + b(1,2) = -(2,3) + 2(1,2)$

$a = -1 \quad b = 2$

La matrice M di cambio di base è $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Prendiamo $\quad 5v_1 + 2v_2 = (5,2)$. Chi sono le sue componenti rispetto alla seconda base?

<u>1º modo</u> Risolvo di nuovo $\quad (5,2) = a(2,3) + b(1,2)$

<u>2º modo</u> Uso matrice! $\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} \leftarrow$ componenti

Verifica: $8\hat{v}_1 - 11\hat{v}_2 = 8(2,3) - 11(1,2) = (5,2)$ ☺

Chi era la matrice che prende in input le comp. rispetto a $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ e restituisce quelle rispetto a (v_1, v_2)?

Devo fare la procedura inversa, cioè scrivere

$$\hat{v}_1 = a v_1 + b v_2$$

$$(2,3) = a(1,0) + b(0,1) \qquad a=2 \quad b=3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Basta fare ora l'inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

— o — o —