SOMME DIRETTE E PROIEZIONI

<u>Esempio</u> Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i due sottospazi

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$

$W = \mathrm{Span}((1,2,1))$

① Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$, cioè $V + W = \mathbb{R}^3$ e $V \cap W = \{\overset{(0,0,0)}{0}\}$

$V = \mathrm{Span}((1,1,0),(2,0,-1))$ Una base si vede a occhio

$W = \mathrm{Span}((1,2,1))$

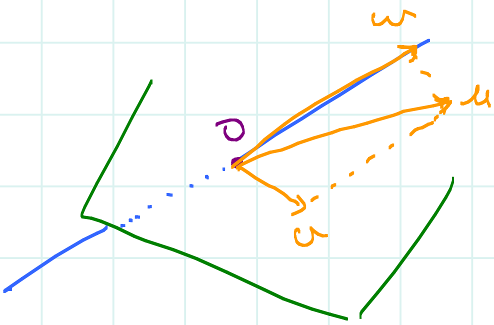
$V + W = \mathrm{Span}((1,1,0),(2,0,-1),(1,2,1)) \underset{\text{se sono lin. indip.}}{=} \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Det} = -1 - 2 + 2 = -1 \neq 0.$$

[Altro metodo: se fosse stato $V \cap W \neq \{0\}$, allora voleva dire che $W \subseteq V$, cioè retta $\subseteq$ piano, ma allora $(1,2,1)$ doveva risolvere l'eq. del piano]

Grassmann $\Rightarrow$ $\dim(V \cap W) = 0$ e in particolare la somma è diretta

② Essendo la somma diretta, vuol dire che ogni $u \in \mathbb{R}^3$ si scrive IN MODO UNICO come $u = \underset{\text{in } V}{v} + \underset{\text{in } W}{w}$



Domanda: dato u, come calcolo v e w?

$\boxed{\text{Bovino}}$ Scrivo $u = \underbrace{a\,(1,1,0) + b\,(2,0,-1)}_{\in V} + \underbrace{c\,(1,2,1)}_{\in W}$

Metodo generale: quando $X = V \oplus W$, allora basta prendere una base di X fatta mettendo insieme una base di V e una base di W

$\boxed{\text{Astuto}}$ C'è una "black box" che prende in input u e restituisce le due componenti v e w?

Sì, e sono le matrici di proiezione.

Vediamo la proiezione su V (poi banalmente $w = u - v$)

Quale proprietà ha la proiezione?

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v_1 = (1,1,0) \\ v_2 = (2,0,-1) \end{array}\right\} \text{base di } V \\ \left.\begin{array}{l} w_1 = (1,2,1) \end{array}\right\} \text{base di } W \end{array}\right\} \text{base di } \mathbb{R}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} (1,1,0) \longrightarrow (1,1,0) \\ (2,0,-1) \longrightarrow (2,0,-1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{se un vettore sta nel piano,} \\ \text{coincide con la sua proiezione} \end{array}$$

$$(1,2,1) \longrightarrow (0,0,0)$$

A questo p.to basta scrivere la matrice dell'applicazione $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con queste proprietà. Dalla canonica alla canonica risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{Canonica} \xleftarrow[\substack{\uparrow \\ \text{proiezione}}]{} \text{strana} \xleftarrow[\substack{\uparrow \\ \text{cambio base}}]{} \text{Canonica}$$

Facciamo l'inversa con Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

MATRICE DI PROIEZIONE SU V

Cosa succede se dò in pasto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -25 \\ -7 \end{pmatrix}$$

← Questo dovrebbe stare nel piano $x-y+2z=0$:)

$$(2,1,6) = \underbrace{(-11,-25,-7)}_{\text{piano}} + \underbrace{(13,26,13)}_{\text{retta Span}((1,2,1))}$$

<u>Oss.</u> Matrice di proiezione su W = Id − proiezione su V

— o — o —

<u>Esercizio</u> Consideriamo $f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$ definita da

$$f(A) = A^t + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$$

Domande: Ker, Im, matrice di f usando base canonica

$\boxed{\text{Bovino}}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a+2c & b+c+2d \\ 3a+b+4c & 4c+5d \end{pmatrix}$$

Quindi è come se stessi studiando

$$f(a,b,c,d) = (2a+2c,\ b+c+2d,\ 3a+b+4c,\ 4c+5d)$$

Matrice tra basi canoniche
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \\ = B \\ \\ \end{matrix}$$

$f(e_1)$

Ovviamente la prima colonna sarebbe $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2e_1 + 3e_3$$

e così via per le altre colonne.

Per studiare ker e Im, calcolo Det B.

$\longrightarrow$ Se Det $B \neq 0$, allora $\ker(f) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = M_{2\times 2}$

Matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ Se Det $B = 0$, allora rango $(B) = 3$ e in questo caso $\dim(\ker(f)) = 1$ e una base si trova risolvendo e $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ (vorrebbe dire che c'è una relazione non banale tra le colonne e quindi ne posso eliminare una)

— o — o —