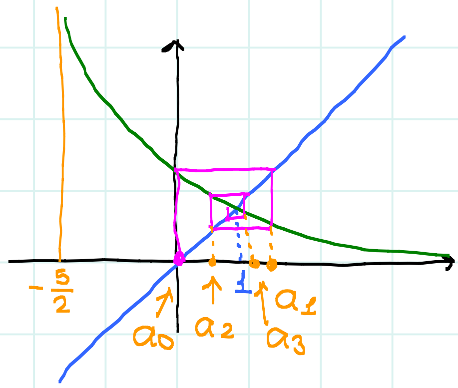
ANALISI 1 – LEZIONE 96

Note Title 05/04/2025

SUCCESSIONI PER RICORRENZA SPIRALEGGIANTI

Esempio 1 $\quad a_{n+1} = \dfrac{7}{2a_n + 5} \qquad a_0 = 0$



Calcolo l'intersezione

$$\frac{7}{2x+5} = x \rightsquigarrow 7 = 2x^2 + 5x$$

$$\rightsquigarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\rightsquigarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{4} = \frac{-5 \pm 9}{4} = \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Idea: $a_n \to 1$ spiraleggiando

Due tipi di piano: $\longrightarrow$ piano con la distanza

$\longrightarrow$ piano con le due sottosuccessioni

PIANO CON LA DISTANZA

$d_n = |a_n - 1|$ ← presunto limite

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq c\, d_n$ (spero con $c < 1$)

(iii) $d_n \leq c^n d_0$

(iv) $d_n \to 0$

I punti (i), (iii) e (iv) sono sostanzialmente banali.

Si tratta di trovare il c per cui vale il p.to (ii)

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che} \\ a_{n+1} = f(a_n) \\ f(1) = 1}}{=} |f(a_n) - f(1)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante di} \\ \text{Lipschitz di } f(x) \\ \text{per } x \geq 0}}{L} |a_n - 1| = L\, d_n$$

Come calcolo L? Dal primo semestre sappiamo che

$$L = \sup\{ |f'(x)| : x \geq 0 \}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{(2x+5)^2} \cdot 2 = \frac{-14}{(2x+5)^2} \rightsquigarrow |f'(x)| = \frac{14}{(2x+5)^2} \leq \frac{14}{25}$$

denom. + piccolo possibile

Fortunatamente $\frac{14}{25} < 1$ e quindi ☺

Da questo momento posso scrivere il piano di sopra con $c = \frac{14}{25}$.

$\boxed{\text{PIANO CON LE DUE SOTTOSUCCESSIONI}}$

Idea: a_n non è monotona, ma sui pari cresce e sui dispari decresce

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ oppure $0 \leq a_n \leq \underbrace{\frac{7}{5}}_{a_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sui pari cresce)

$1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sui dispari decresce)

(iii) $a_{2n} \to l \in \mathbb{R}$ (debolm. cresc. e limitata dall'alto)

$a_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$ (debolm. decresc. e limitata dal basso)

(iv) $l = m = 1$

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Scriviamo la ricorrenza sui pari e sui dispari

$$a_{2n+1} = \frac{7}{2a_{2n}+5} \qquad a_{2n} = \frac{7}{2a_{2n-1}+5}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$m = \frac{7}{2l+5} \qquad l = \frac{7}{2m+5}$$

Ora abbiamo un sistema in m ed l, che risolviamo

$$\begin{cases} m = \dfrac{7}{2\ell+5} \\ \ell = \dfrac{7}{2m+5} \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2m\ell + 5m &= 7 \\ 2m\ell + 5\ell &= 7 \end{aligned} \qquad 1^a - 2^a \rightsquigarrow m = \ell$$

Una volta che $m = \ell$ troviamo $\ell = f(\ell) \rightsquigarrow$ $\ell = 1$, $\ell = -\frac{7}{2}$

ma $\ell = m = -\frac{7}{2}$ è incompatibile con (i)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Si fa per induzione. Cerchiamo di capire perché è vero.

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = \frac{7}{5} \qquad a_2 = \frac{7}{2a_1+5} = \frac{7}{\frac{14}{5}+5} = \frac{35}{39}$$

Da questi primi conti vediamo che

$$a_0 \leq a_2 \leq 1$$

Ora applico f che è decrescente, quindi inverto i versi

$$f(a_0) \geq f(a_2) \geq f(1)$$
$$a_1 \geq a_3 \geq 1$$

Applico f

$$f(a_1) \leq f(a_3) \leq f(1)$$
$$a_2 \leq a_4 \leq 1$$

Applico f

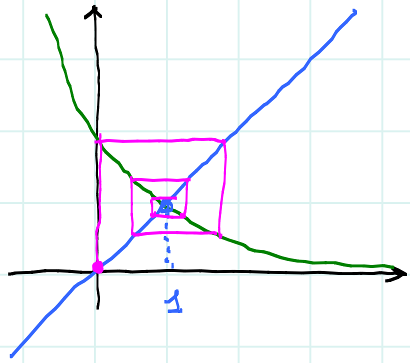
$$f(a_2) \geq f(a_4) \geq f(1)$$
$$a_3 \geq a_5 \geq 1$$

e così via. Ogni volta che applico f trovo la relazione successiva che mi serve.

Tutte le relazioni del p.to (ii) seguono a partire da $a_0 \leq a_2 \leq 1$ applicando f un numero sufficiente di volte

— o — o —

Esempio 2 $\qquad a_{n+1} = \dfrac{7}{5a_n+2} \qquad a_0 = 0$



Sembra tutto come prima, quindi verrebbe da provare con la distanza.

Al p.to (ii) serve $d_{n+1} \leq c\, d_n$ con $c < 1$ e $d_n = |a_n - 1|$

Ora

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)| \leq L\, |a_n - 1| = L\, d_n$$

dove $\qquad L = \sup\{ |f'(x)| : x \geq 0 \}$

Ora $\quad f'(x) = -\dfrac{7}{(5x+2)^2} \cdot 5 \qquad\qquad |f'(x)| = \dfrac{35}{(5x+2)^2}$

Ora il sup è $\dfrac{35}{4}$, che è maggiore di 1 :(

Due vie di uscita.

1° modo : piano con le due sottosuccessioni

... il p.to fondamentale era che $\quad a_0 \leq a_2 \leq 1$ (poi applicando f trovavo tutte le altre disuguaglianze)

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = \frac{7}{2} \qquad a_2 = \frac{7}{5a_1+2} = \frac{7}{\frac{35}{2}+2} = \frac{14}{39}$$:)

2° modo : provo a salvare il piano con la distanza.

Osservo che quando $5x+2 \geq 6$, cioè $x \geq \frac{4}{5}$, allora di sicuro

$$|f'(x)| = \frac{35}{(5x+2)^2} \leq \frac{35}{36} < 1$$

Con un po' di pazienza posso provare a calcolare un po' di termini della successione fino a quando ne trovo uno con indice pari che sia $\geq \frac{4}{5}$.

A quel p.to posso fare un piano con la distanza

Supponiamo di sapere che $a_{10} \geq \frac{4}{5}$ perchè l'ho calcolato a mano.
Allora il piano diventa

(i) $a_n \geq \frac{4}{5} \quad \forall n \geq 10$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{35}{36} d_n \quad \forall n \geq 10$ ((i) + Lipschitzianità)

(iii) $d_n \leq \left(\frac{35}{36}\right)^{n-10} d_0 \quad \forall n \geq 10$ (induzione da (ii))

(iv) $d_n \to 0$ (banale da (iii)).

— o — o —