ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 13

Note Title 10/10/2023

→ Combinazione lineare
→ Lineare indipendenza
→ Generatori
→ SPAN
→ Basi
→ Dimensione

① Comb. lineare: $v_1, \dots, v_n$ vettori $c_1, \dots, c_n$ numeri

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n}$$

② Un insieme di vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ si dice lin. indip. se l'unica loro comb. lineare che fa $\vec{0}$ è quella con tutti i coeff. nulli

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \implies c_1 = \dots = c_n = 0$$

③ Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di uno sp. vett. V se ogni $v \in V$ si scrive come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.

④ Si dice $\mathrm{SPAN}(v_1, \dots, v_n)$ l'insieme di tutte le comb. lineari di $v_1, \dots, v_n$

⑤ Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono una BASE di V se
→ sono lin. indip.
→ sono generatori, cioè $\mathrm{SPAN}(v_1, \dots, v_n) = V$

⑥ La dim di uno sp. vett. è il numero di elementi di una base di V (tutte le basi hanno lo stesso numero di elem.)

Esempio 1 $\quad V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = (1,0) \quad v_2 = (0,1)$

→ Sono lin. indip.

Una loro comb. lineare è $a(1,0) + b(0,1) = (a,b)$

e questo è $(0,0)$ se e solo se $a = b = 0$.

→ Sono generatori di $\mathbb{R}^2$

Dato $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ lo posso scrivere come $A(1,0) + B(0,1)$

→ Quindi $\{v_1, v_2\}$ sono UNA base di $\mathbb{R}^2$, che quindi ha dimensione 2

Esempio 2 $\quad V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = (3,1) \quad v_2 = (-1,2)$

→ Sono lin. indip.?

$$a v_1 + b v_2 = a(3,1) + b(-1,2) = (3a-b, a+2b) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 3a - b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a - b = 0 \\ -7b = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

⇝ $a = b = 0$ ⇝ sono lin. indip.

→ Sono generatori?

Dato un qualunque $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, lo posso scrivere come

$$a(3,1) + b(-1,2) = (A,B)$$

$$(3a-b, a+2b) = (A,B)$$

$$\begin{cases} 3a - b = A \\ a + 2b = B \end{cases}$$

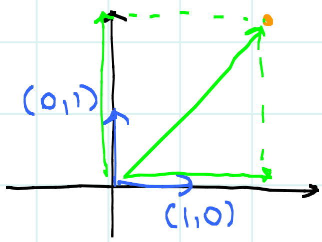
Dati A e B, posso trovare a e b?

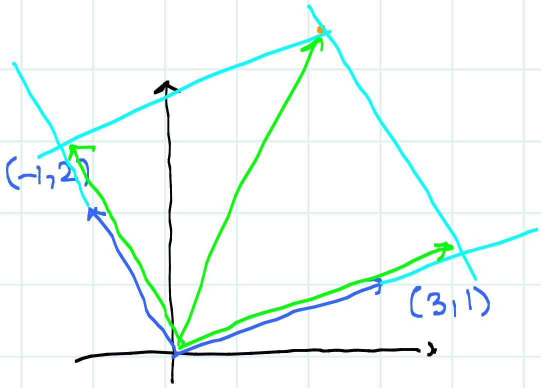
$$\begin{cases} 3a - b = A \\ -7b = A - 3B \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & A \\ 0 & -7 & A-3B \end{array}\right)$$

⇝ il sistema ammette sol. unica.

→ Anche questi sono $\boxed{\text{una}}$ base di $\mathbb{R}^2$

Geometricamente





Una base sono i mattoni fondamentali mediante i quali posso ottenere ogni altro vettore IN MANIERA UNICA

Se un vettore lo scrivo in 2 modi

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \hat{c}_1 v_1 + \dots + \hat{c}_n v_n$$

allora

$$(c_1 - \hat{c}_1) v_1 + \dots + (c_n - \hat{c}_n) v_n = 0$$

da cui, grazie alla lin. indip., $c_1 = \hat{c}_1$, $c_2 = \hat{c}_2$, ...

<u>Esempio 3</u> $V = \mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = (1,2)$ $\quad v_2 = (2,3)$ $\quad v_3 (5,1)$

→ Sono una base di $\mathbb{R}^2$?

NO: sono troppi!

→ Sono lin. indip.?

NO: sono troppi. Cerchiamo una relazione

$$a(1,2) + b(2,3) + c(5,1) = (0,0)$$

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ \quad -b - 9c = 0 \end{cases}$$

param. libero

$c = t$, $b = -9t$, $a = -2b - 5c = 13t$

quindi ad esempio $\quad a = 13, b = -9, c = 1$

e la somma viene 0.

→ Sono generatori? Certo: se metto (A, B) al posto di $(0,0)$ cui viene comunque un sistema che posso risolvere perché i coeff. sono gli stessi di prima.

Esempio 4 $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,0,2)$ $v_2 = (3,1,1)$

→ Sono una base?

Osserviamo che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3, perché una possibile base è $\underbrace{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}_{\text{BASE CANONICA}}$ ⇝ FACILE VERIFICA

Quindi quelli dati sono troppo pochi! ⇝ NO BASE

→ Sono lin. indip.? SI

$$a(1,0,2) + b(3,1,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \rightsquigarrow a = b = 0 \rightsquigarrow \text{☺}$$

→ Sono generatori? NO!

Se lo fossero, sarebbero una base

→ Cos'è SPAN $((1,0,2), (3,1,1))$?

Per def. è l'insieme delle comb. lineari

$$a(1,0,2) + b(3,1,1) \qquad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Quindi si tratta del piano che passa per l'origine e per $(1,0,2)$ e $(3,1,1)$

Oss. Quando è che 2 vettori v_1 e v_2 sono lin. DIPENDENTI?

Quando esistono a e b, NON ENTRAMBI NULLI, tali che

$$a v_1 + b v_2 = 0$$ vettore nullo

Se per esempio $a \neq 0$, allora

$$v_1 = -\frac{b}{a} v_2$$

cioè uno è multiplo dell'altro.

Esempio 5 $\quad V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Che dimensione ha V? [Da quanti parametri dipende un elemento di V?]

Risposta 3, e una possibile base è

$$\begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \end{array}$$

→ I polinomi $5x - x^2$ e $7 + x^2$ sono lin. indip.?

Risposta: SI, perché non sono uno multiplo dell'altro.

Bovino

$$a(5x - x^2) + b(7 + x^2) = (-a+b)x^2 + 5ax + 7b = 0$$

cioè

$$\begin{cases} -a+b = 0 \\ 5a = 0 \\ 7b = 0 \end{cases} \leadsto a = b = 0$$

→ Sono generatori?

NO! Sono troppo pochi

È uguale a considerare $(0,5,-1)$ e $(7,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$.

— o — o —