# ANALISI 1 — LEZIONE 21

Note Title 03/05/2017

**Teo 2.2** $f: A \to B$ con $f$ continua e $A$ convesso $\Rightarrow g$ continua

**Dim.**
- Per un lemma precedente $f$ è monotona
- Per un altro lemma, $g$ è monotona
- Sempre per i suddetti lemmi, $B = f(A)$ è convesso
- Ma allora $g$ è continua se e solo se $g(B)$ è convesso, ma $g(B) = A$ ☺.

— o — o —

## Invertibilità e derivabilità

(3) Se $f$ è invertibile e $f'(x_0)$ esiste in $x_0 \in \text{Int}(A)$, posso dire che $g(x)$ è derivabile in $f(x_0)$?

**NO** $f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile ovunque, in part. in $x_0 = 0$
$g(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $f(x_0) = 0$.

**Teorema** Se $f$ è invertibile, $x_0 \in \text{Int}(A)$, $f'(x_0)$ esiste e $f'(x_0) \neq 0$
Allora $g$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

**Dim. sbagliata** $g(f(x)) = x$ ... derivo

$$g'(f(x))\, f'(x) = 1 \rightsquigarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \rightsquigarrow x = x_0$$

Il pbm. è che ho usato che $g$ sia derivabile...

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$g'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y_0+h) - g(y_0)}{h} \overset{y = y_0+h}{=} \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Per calcolare il limite pongo $g(y) = x$ e ottengo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad g(y) = x, \quad y = f(x)$$

Occhio: perché posso dire che quando $y \to y_0$ ho che $x \to x_0$? Sto usando che $g$ è continua in $y_0$ (continuità della funzione inversa).

— o — o —

Oss. Tutte le funzioni inverse elementari rientrano nelle ipotesi di almeno uno dei teo. di continuità dell'inversa. (Insieme di partenza compatto o convesso).

Oss. La formula per la derivata dell'inversa si può scrivere come

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}}$$

— o — o —

(4) Se $f \in C^1$, posso dire che $g \in C^1$?

$\boxed{\text{SI}}$ PURCHÉ $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$

$\boxed{\text{Dim}}$ Basta guardare la formula di sopra.

— o — o —

(5) Se $f \in C^{28}$, posso dire che $g \in C^{28}$?

$\boxed{\text{SI}}$ PURCHÉ $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$

Detto altrimenti: passato lo scoglio di $C^1$, la $g$ ha tutta la regolarità di $f(x)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{BOOTSTRAP}}$ Partiamo dalla formula

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \qquad g' = \text{Mostro}(g)$$

- Se $f'$ è continua, allora $g'$ è continua
- Se $f'$ è $C^1$, allora $f'(g(x)) \in C^1$ perché composizione di funzioni $C^1$, quindi $g' \in C^1 \Rightarrow g \in C^2$

- $f \in C^3 \Rightarrow f' \in C^2 \Rightarrow f'(g(x)) \in C^2 \Rightarrow g' \in C^2 \Rightarrow g \in C^3$

Avanti di questo passo ottengo $f \in C^{28} \Rightarrow g \in C^{28}$.

— o — o —

Altra applicazione del bootstrap:
considero il pbm. di Cauchy

$$u' = \arctan u \qquad u(0) = 2017 \qquad u' = \text{Mostro}(u).$$

Allora la soluzione è di classe $C^\infty$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per un teo. misterioso abbiamo che $u \in C^1$. Ma allora

$$u \in C^1 \Rightarrow \arctan u \in C^1 \Rightarrow u' \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$
$$\Rightarrow \arctan u \in C^2 \Rightarrow u' \in C^2 \Rightarrow u \in C^3$$
$$\Rightarrow \dots$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x + \cos x$

Facile: $f$ è invertibile

Dimostrare che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e calcolare $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$.

Osserviamo che $f'(x) = 2 - \sin x \geq 1 \Rightarrow g$ ha la stessa regolarità di $f$.

Osserviamo $1 = f(0)$, cioè $g(1) = 0$.

Uso le formule $\quad g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Per la $g''(y)$ devo fare il conto:

$$g''(y) = -\frac{1}{[f'(g(y))]^2}\, f''(g(y))\, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ri-sostituisco}}}{g'(y)} = -\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3}$$

$$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad g''(1) = -\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = -\frac{-1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$g'''(y) = -\frac{f'''(g(y))\, g'(y)}{[f'(g(y))]^3} - f''(g(y))\,(-3)\,\frac{f''(g(y))\, g'(y)}{[f'(g(y))]^4}$$

= volendo sostituisco nuovamente $g'(y)$.

—o—o—o—

Alternativa: cerco direttamente il polinomio di Taylor di $g(y)$

$$g(1+h) = g(1) + g'(1)h + \frac{1}{2} g''(1) h^2 + \frac{1}{6} g'''(1) h^3 + o(h^3)$$

E sappiamo che $\quad f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad$ e che

$$f(g(1+h)) = 1 + h$$

Per semplicità pongo $\quad g(1+h) = \overset{g(1)=0}{\overset{\|}{a}} + bh + ch^2 + dh^3 + o(h^3)$

e calcolo la composizione degli sviluppi:

$$\cancel{1} + \underbrace{h} = f(g(1+h)) = f(bh + ch^2 + dh^3 + o(h^3))$$

$$= \underbrace{2bh} + 2ch^2 + 2dh^3 + \cancel{1} - \frac{1}{2}(b^2h^2 + 2bch^3) + o(h^3)$$

$$\underset{h}{1 = 2b} \qquad \underset{h^2}{2c - \frac{1}{2}b^2 = 0} \qquad \underset{h^3}{2d - bc = 0}$$

$b = \frac{1}{2}$ $\qquad c = \frac{1}{4} b^2 = \frac{1}{16}$ $\qquad d = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{64}$

da cui facilmente

$$g'(1) = b = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} g''(1) = c = \frac{1}{16} \quad \leadsto \quad g''(1) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{6} g'''(1) = d = \frac{1}{64} \quad \leadsto \quad g'''(1) = \frac{3}{32}$$

(controllare che il contaccio dia lo stesso risultato)