ANALISI 1 — LEZIONE 112

$\boxed{\text{TEOREMA DEL CONFRONTO}}$ Consideriamo due problemi

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = g(t,v) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

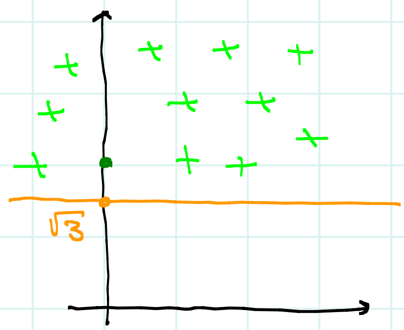
Supponiamo che $f(t,x) \geq g(t,x)$ nella zona in cui so che le soluzioni stanno.

Supponiamo che $u_0 \geq v_0$.

Allora $u(t) \geq v(t)$ per tutti i $t \geq 0$ per cui esistono entrambe

Brutalmente: u parte sopra v e cresce di più; quindi u sta sempre sopra v.

Come si usa?



$$\begin{cases} u' = u^2 - 3 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

So che $u(t) \geq 2$ per ogni $t \geq 0$ perché so che la sua derivata è positiva

So che per $x \geq 2$ esiste una costante $c > 0$ t.c.

$$x^2 - 3 \geq c x^2 \qquad \forall x \geq 2$$

Basta dimostrare che $\varphi(x) = \frac{x^2-3}{x^2}$ ha minimo positivo per $x \geq 2$ e questo si fa usando che $\varphi(2) = \frac{1}{4}$ e $\varphi(x) \to 1$ a $+\infty$ e $\varphi(x)$ non si annulla mai

Adesso considero il problema $\begin{cases} v' = c v^2 \\ v(0) = 2 \end{cases}$

Siamo nelle ipotesi del teo. del confronto

$\rightarrow$ u e v partono insieme $(u(0) = 2$ e $v(0) = 2)$

$\rightarrow$ $x^2 - 3 \geq c x^2 \quad \forall x \geq 2$ $\leftarrow$ questa è la zona in cui stanno u e v

Ma allora $u(t) \geq v(t)$ per ogni $t \geq 0$ per cui esistono entrambe.
Risolvendo esplicitamente trovo che v ha B.U. per t positivi.
Quindi u ha blow-up pure lei.

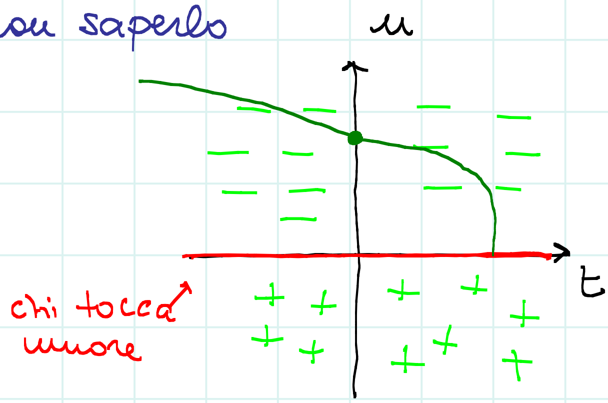
— o — o —

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ $\quad v' = (v)^\alpha$

hanno blow-up se si parte positivi quando $\alpha > 1$
e esistenza globale quando $0 \leq \alpha \leq 1$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = 6 \end{cases}$

Potrei integrarla, ma faccio finta di non saperlo



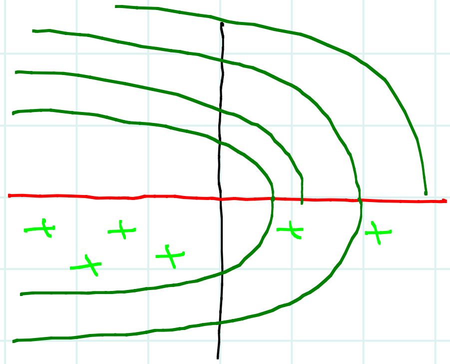
La soluzione fin quando esiste è decrescente.
Può esistere globalmente nel futuro?

NO! Se esistesse globalmente, per monotonia $\lim_{t \to +\infty} u(t) = \ell \in [0, 6]$
Ma allora

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$$

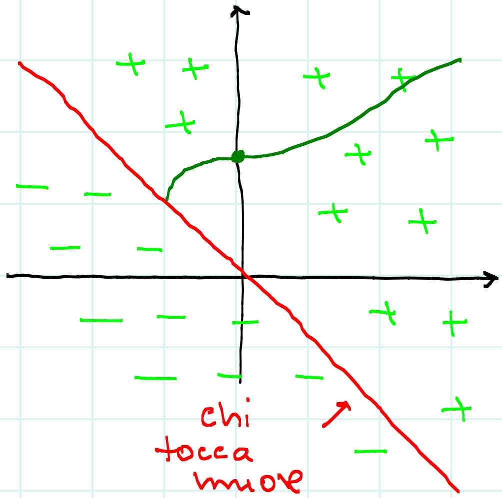
In ogni caso esisterebbe, ma allora dovrebbe fare 0 per il teorema dell'asintoto, e questo non è possibile.
Quindi la soluzione nel futuro ha break-down da qualche parte

Nel passato sappiamo che $u(t) \geq 6$, quindi $|u'(t)| \leq \frac{1}{6}$
quindi niente BU e niente BD, quindi
esistenza globale con limite $+\infty$.



Come sono fatte le altre soluzioni?

Esempio 2
$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{u+t} \\ u(0) = 5 \end{cases}$$



Grossi problemi quando $u+t=0$

→ Nel passato c'è di sicuro BD
in un tempo finito

→ Nel futuro la soluzione ha esistenza globale perché

$$0 \leq u'(t) = \frac{1}{u(t)+t} \underset{\substack{u(t)\geq 5 \\ t \geq 0}}{\leq} \frac{1}{5+0}$$

Quindi $u'(t)$ limitata, quindi niente BU

Domanda: calcolare $\lim_{t\to+\infty} u(t)$

Sappiamo che $u(t) \to \ell$ per monotonia, con $\ell \geq 5$ oppure $\ell = +\infty$
Ma allora

$$u'(t) \to 0 \quad \text{qualunque sia } \ell$$

Sembra che tutti gli ℓ, finiti o infiniti, vadano bene.

Brutale: se $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \sim \frac{1}{\ell+t}$,
ma allora $u(t) \sim \log(\ell+t)$
e quindi tende a $+\infty$. Assurdo. Quindi $\ell = +\infty$

Rigoroso: Se per assurdo fosse che $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$, allora sarebbe

$$5 \leq u(t) \leq \ell \qquad \forall t \geq 0$$

Ma allora

$$u'(t) = \frac{1}{u(t)+t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denom.} \\ \text{più grande}}}{\geq} \frac{1}{\ell+t}$$

Ma allora integrando

$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s)\,ds \geq \int_0^t \frac{1}{\ell+s}\,ds = [\log(\ell+s)]_0^t$$
$$= \log(\ell+t) - \log \ell$$

Ma allora passando al limite per $t \to +\infty$ otterrei

$$\ell - u(0) \geq +\infty$$

Conclusione: $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$.

Ci tenderà logaritmicamente?

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{\log t} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{+\infty}{+\infty}}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{u'(t)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{u(t)+t}$$

Mi piacerebbe dire che tende a 1, ma dovrei sapere chi comanda sotto, cioè mi serve sapere che $\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t} = 0$

Provo a dimostrarlo:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t} \underset{\uparrow \atop \frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{t\to+\infty} u'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{u(t)+t} = 0$$

<u>Esempio 2 bis</u>

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{u+t^2} \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

allora per $t \to +\infty$ le soluzioni avevano un limite finito

$$u'(t) \leq \frac{1}{t^2+5}$$

quindi $\quad u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s)\,ds$

$$\leq \underbrace{\int_0^t \frac{1}{s^2+5}\,ds}$$

quando $t \to +\infty$ tende a

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+5}\,ds$ e questo CONVERGE

— o — o —