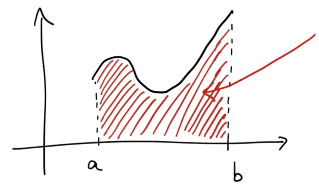
13 Integrali

In questo corso tratteremo gli integrali detti **di Riemain**. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata. (ad esempio una funzione continua). L'idea della definizione è che l'integrale (definito) di $f(x)$ in $[a, b]$ rappresenta l'area del sotto grafo di f (questo è vero se $f \geq 0$ su $[a, b]$).



Definizione 13.0.1 (Suddivisione di un intervallo)**.** *Una **suddivisione** di [a,b] è un insieme di* $A = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *con* $a = x_0 < x_1 < x:2 < ... < x_n = b$.

Osservazione 13.0.1. Le lunghezze degli intervalli $[x_{i-1}, x_u]$ non sono necessariamente uguali. Inoltre $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a =$ lunghezza di $[a, b]$.

Definizione 13.0.2 (Somma inferiore)**.** *Dato una suddivisione di un intervallo A, si dice somma inferiore di f relativa alla suddivisione di A*

$$S'(f, A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf(f(x))_{x\in[x_{i-1},x_i]} \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

E la somma delle aree dei rettangoli rossi. Approssima l'area del sotto grafico di $f(x)$ per difetto.

Definizione 13.0.3 (Somma superiore)**.** *Dato una suddivisione di un intervallo A, si dice somma superiore di f relativa alla suddivisione di A*

$$S'(f, A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup(f(x))_{x\in[x_{i-1},x_i]} \right) \cdot (x_{i-1} - x_i)$$

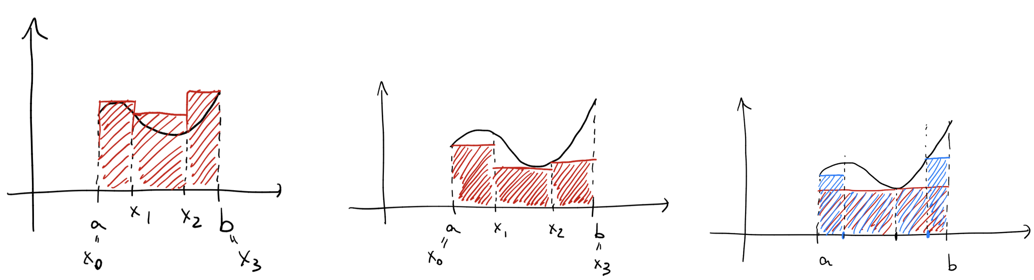
Somma delle aree dei rettangoli rossi. Questa volta è un'approssimazione per eccesso dell'area del sotto grafico.

Osservazione 13.0.2. Non server che f sia continua per dare tutte queste definizione, ma soltanto che sia limitata.

Definizione 13.0.4 (Somme indipendente dalle suddivisioni)**.** *Le somme inferiori e superiori indipendenti dalle suddivisioni si definiscono come:*

- $S'(f) = sup\{S'(f, A) \mid A$ *suddivisione di* $[a, b]\}$ *si dice somma inferiore di* f.
- $S''(f) = inf\{S'(f, A) \mid A$ *suddivisione di* $[a, b]\}$ *si dice somma superiore di* f.

Aggiungendo punti le somme inferiori crescono (e le somme superiori calano).



(a) Somma superiore (b) Somma inferiore (c) Somma indipendente

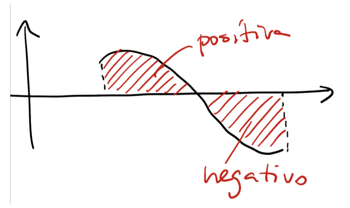
Figure 43: Somme delle sezioni

Definizione 13.0.5 (Integrabile secondo Rieman)**.** *Se* $S'(f) = S''(f)$ *si dice che* f *è **integrabile secondo Rieman** su* $[a, b]$ *e il valore comune si dice integrale di* f *su* $[a, b]$ *e si indica come:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\; = S'(f) = S''(f)$$

Osservazione 13.0.3. Questa definizione ha senso anche quando f può prendere anche valori negativi.

Se $f \leq 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ ed è l'opposto dell'area in figura. In generale $\int_a^b f(x)\,dx$ è la somma algebrica delle aree in figura (si sommano le aree dove l'integrale è positivo e si sottraggono quelle dove è negativo).



Teorema 13.0.1. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

Osservazione 13.0.4. Ci sono anche funzioni non continue che sono integrabili, ad esempio una funzione con un punto in cui c'è un salto.

Definizione 13.0.6. *Una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua se è limitata e ha eventualmente un numero finito di punti di discontinuità.*

Esempio 13.0.1. Funzione non generalmente continua. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ con $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

C'è un solo punto di discontinuità, ma f non è limitata $\implies$ non è generalmente continua.

Teorema 13.0.2. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua, allora f è integrabile.

Esempio 13.0.2. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ con $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

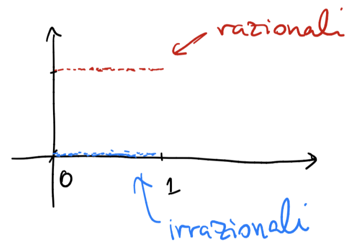
$f(x)$ non è continua ma è generalmente continua $\implies$ integrabile

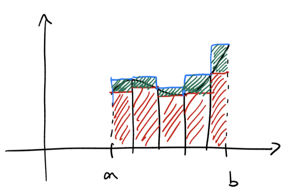
Esempio 13.0.3. Esempio di una funzione non integrabile. (Esempio con la funzione di Dirichlet).

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ con } f : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Per qualsiasi intervallo $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [0, 1]$ si ha che:

$sup(f(x))_{x \in [x_{i-1}, x_i]} = 1$ e $inf(f(x))_{x \in [x_{i-1}, x_i]} = 0$.
Segue che $S'(f, A) = 0$ $\forall A$ suddivisione di $[0, 1] \implies S'(f) = 0$ e $S''(f, A) = 1$ $\forall A$ suddivisione di $[0, 1] \implies S''(f) = 1$. Quindi $S'(f) \neq S''(f) \implies f$ non è integrabile.



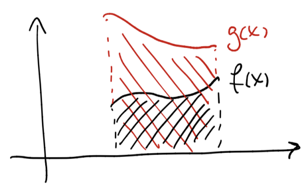


Se f è integrabile, $S''(f, A) - S'(f, A)$ (la differenza, l'area della regione verde nell'immagine) "tende a 0" al raffinarsi delle suddivisioni.

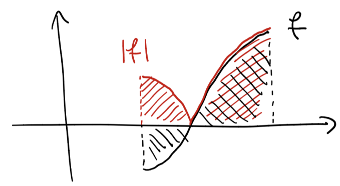
13.1 Calcolo degli integrali

Teorema 13.1.1. Siano f, g integrabili su $[a, b]$ e un numero $k \in \mathbb{R}$, allora: $f + g, k\cdot, |f|$ sono integrabili, e si ha che:

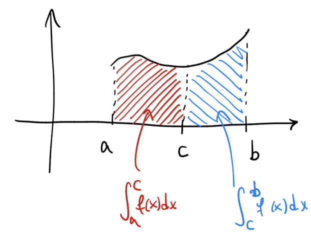
1. $\int_a^b (f + g)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
2. $\int_a^b (k \cdot f)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.
3. Se $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
4. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
5. Se $a < c < b$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.



(a) Caso 1°



(b) Caso 2°



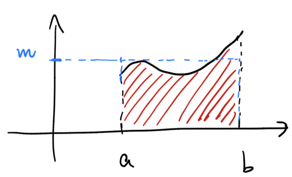
(c) Caso 3°

Osservazione 13.1.1. Osserviamo anche che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è constante, cioè $f(x) = k \ \forall x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f(x)\, dx = k \cdot (b - a)$

13.2 Media Integrabile

Definizione 13.2.1 (Media Integrabile)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si dice **media integrabile** di f su $[a, b]$.*

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$



Graficamente, m è l'altezza di un rettangolo di base $b - a$, con la stessa area del sotto grafico di f.

Teorema 13.2.1 (Teorema della media integrale)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, allora:

$$inf(f(x))_{[a,b]} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx \leq sup(f(x))_{[a,b]}$$

Se f è continua, allora $\exists x \in [a, b]$ tale che: $f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

Dimotrazione 13.2.1. $\forall x \in [a, b]$ abbiamo $inf(f(x))_{[a,b]} \leq f(x) \leq sup(f(x))_{[a,b]}$. Integriamo questa disuguaglianza usando la proprietà (3) del teorema, e otteniamo:
$\int_a^b inf(f(x))_{[a,b]}\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b sup(f(x))_{[a,b]}\, dx$. Sia $\int_a^b inf(f(x))_{[a,b]}\, dx$ che $\int_a^b sup(f(x))_{[a,b]}\, dx$ sono costanti $\Longrightarrow \big(inf(f(x))_{[a,b]}\big)(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \big(sup(f(x))_{[a,b]}\big)(b - a)$.
Dividendo per $(b - a)$ ottengo proprio: $inf(f(x))_{[a,b]} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx \leq sup(f(x))_{[a,b]}$.

Se f è continua, allora per il teorema di Weirstrass $inf(f) = min(f)$ e $sup(f) = max(f)$. Inoltre per il teorema dei valor intermedi f prende tutti i valori compresi tra il $min(x)$ e $max(f)$. La media integrale è un tale valore per quanto visto, quindi $\exists z \in [a, b]$ tale che $f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$. ■

Osservazione 13.2.1. Se $b < a$, definiamo $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$, e definiamo anche $\int_a^a f(x) = 0$.

Esempio 13.2.1. $\int_2^1 x^3\, dx = -\int_1^2 x^3\, dx$

Le proprietà viste precedentemente valgono anche con i valori scambiati come nell'esempio sopra.

Osservazione 13.2.2. La media integrale ha senso anche quando gli estremi sono scambiati. Se $b < a$, allora $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = (\frac{1}{b-a})\big(-\int_a^b f(x)\, dx\big) = \frac{1}{a-b} \int_a^b f(x)\, dx$

Definizione 13.2.2 (Primitiva)**.** *Prendiamo un $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f se F è derivabile in I e vale che $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$.*

Esempio 13.2.2. $f(x) = 2x$. Una primitiva è $F(x) = x^2$. Non è l'unica primitiva, $G(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ ho comunque $G'(x) = 2x + 0 = f(x)$ quindi queste funzioni sono tutte primitive di $f(x) = 2x$.

In generale, se F è primitiva di f, tutte le funzioni $G(x) = F(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$ sono pure primitive di $f(x)$.

Osservazione 13.2.3. In effetti due primitive di $f(x)$ differiscono sempre per una costante.

Dimotrazione 13.2.2. Siano F e G due primitive di f. Allora ho che $F' = f$, $G' = f$. Quindi $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Visto che siamo su un intervallo, concludo che $F - G$ è costante $K \in \mathbb{R} \Longrightarrow F(x) = G(x) + k \ \forall x \in I$.

Definizione 13.2.3 (Integrale indefinito)**.** ***L'integrale indefinito*** *di $f(x)$ è l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ e si indica con $\int f(x)\,dx$ (senza gli estremi).*

Osservazione 13.2.4. $\int f(x)\,dx$ non indica una singola funzione, ma un insieme di funzioni.

$$\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \ derivabile \ e \ F' = f\}$$

Esempio 13.2.3. Se prendiamo per esempio $\int 2x\,dx = \{x^2 + k \mid k \in \mathbb{R}\}$ di solito si abbrevia scrivendo $\int 2x\ dx = x^2 + k$.

L'integrale di Riemainn $\int_a^b f(x)\,dx$ invece è un numero reale, e rappresenta l'area del sotto grafico di f, e si dice **integrale definito** e a, b sono gli **estremi di integrazione** (”a” è inferiore e ”b” superiore).

13.3 Formule per integrali indefiniti

Dalle formule per le derivate seguono formule per le primitive di una funzione f(x). Vedere la tabella di seguito.

$\int e^x = e^x + k$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + k$
$\int \cos(x)\,dx = \sin x + k$	$\int \sin x\,dx = -\cos(x) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + k$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$
$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\int -\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x}$

Table 9: Formule primitive

13.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 13.4.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione $F(x) = \inf_a^x f(t)\,dt$ (chiamata anche funzione integrale) è una primitiva di f, cioè $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Dimotrazione 13.4.1. Mostriamo che F è derivabile calcolandone il rapporto incrementale in $x_0 \in I$ arbitrario, e poi facendo il limite.

$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(y)\ dt - \int_a^{x_0} f(y)\ dt\right) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\ dt$. In risultato è la media integrale di f sull'intervallo di estremi x e x_0.

Visto che f è continua, per il teorema della media integrale $\exists\ z(x)$ compreso tra x_0 e x tale che $f(z(x)) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\ dt$.
Quindi $F'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} f(z(x))$. Cambio variabile e prendo $y = z(x)$. Devo capire a cosa tende y quando $x \to x_0$. So che $z(x)$ è compreso tra x_0 e x (ad esempio se $x \leq x_0$, so che $x \leq z(x) \leq x_0$) quindi per il teorema dei carabinieri ho che $\lim\limits_{cx\to x_0} y = x_0$.

Segue che $\lim\limits_{x\to x_0} f(z(x)) = \lim\limits_{y\to x_0} f(y) = f(x_0)$ (questo per la continuità di f). Questo dimostra che $F'(x_0) = f(x_0)$m quindi $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$. ■

13.5 Teorema di Torricelli

Teorema 13.5.1 (Teorema di Torricelli)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione continua, $a \in I$. Se G è una primitiva di f in I, allora $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$ e $\forall \alpha, \beta \in I$ abbiamo che $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

A livello di notazioni si va a scrivere: $[G(x)]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

Esempio 13.5.1. Prendiamo $\int_1^3 x\,dx$. Una primitiva di $f(x) = x$ è $G(x) = \frac{x^2}{2}$.
Quindi $\int_1^3 x\,dx = [\frac{x^2}{2}]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$. (Se prendiamo un'altra primitiva ad esempio $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$, trovato $\int_1^3 x\,dx = [\frac{x^2}{2} + 1]_1^3 = \frac{8}{2} = 4$)

13.6 Integrali con estremi variabili

Teorema 13.6.1. Dato un $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Abbiamo poi $A \subseteq \mathbb{R}$, e $\alpha, \beta : A \to I$ derivabili. Sia $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$. Allora $G(x)$ è derivabile e si ha:

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

In particolare se $\alpha(x) = a$ constante e $\beta(x) = x$, si ha $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, e la formula scritta sopra è uguale a $f(x) \cdot\ - f(a) \cdot 0 = f(x)$. (Come della conclusione del teorema fondamentale)

Esempio 13.6.1. $G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^t \cdot \arctan(t)\,dt$ $\qquad f(t) = e^t \arctan(t)$, $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = \sin(x)$.
Abbiamo $G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = e^{\sin x} \cdot \arctan(\sin(x)) \cdot \cos(x) - e^{x^2} \cdot \arctan(x^2) \cdot 2$.
Applicazione: $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^t \cdot \arctan(x)\,dt}{\sin(x^4)} = \frac{\int_0^0 (\dots)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$. Usiamo de l'hopital.
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} \cdot \arctan(x^2) \cdot 2x}{\cos(x^4) \cdot 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos(x^4)} \cdot \frac{\arctan(x^2) \cdot x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos(x^4)} \cdot \frac{\arctan(x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos(x^4)} \cdot \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2} = 1 \cdot \frac{1}{2}$

13.7 Metodi di calcolo per integrali indefiniti

13.7.1 Integrazione per parti

Prendiamo $f, g : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f continua e g di classe C^1 (g e derivabile e la derivata è continua). Se F è una primitiva di f allora:

$$\int f \cdot g\,dx = F \cdot g - \int F \cdot g'\,dx$$

Dimotrazione 13.7.1. Se faccio la derivata del prodotto $(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g' = fg + F'g$.
(Se due funzioni sono uguali anche gli integrali indefiniti delle due funzioni sono uguali)Integrando ambo i membri ottengo che $\int (Fg)'\,dx = \int (fg)\,dx + \int F \cdot g'\,dx = \int F \cdot g\,dx = \int (fg)\,dx + \int F \cdot g'\,dx$. Abbiamo così dimostrato la formula. ■

Esempi ed esercizi guarda i lucidi delle lezioni (gli appunti del professore).

Osservazione 13.7.1. Se il ho $\log(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (sto supponendo che $f(x) > 0$), quindi segue che $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(f(x)) + k$.

13.7.2 Integrazione per sostituzione

Supponiamo di avere $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Prendiamo poi $\phi : J \to I$ di classe C^1. Se F è una primitiva di f, allora $\int (f \circ \phi) \cdot \phi'\,dx = (F \circ \phi) + k$.

Dimotrazione 13.7.2. $(F \circ \phi)' = (F'(\phi)) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi'$ per la regola di derivazione di funzioni composte, Integrando trovo che: $\int (f \circ \phi) \cdot \phi'\,dx = \int (F \circ \phi)'\,dx = (F \circ \phi) + k$. ■

Esempio 13.7.1. Prendiamo $\int x e^{x^2}\,dx$. Pongo $t = x^2$ (funzione di x), $\frac{dt}{dx} = dx$ quindi $dt = 2xdx$, $\frac{dt}{2} = xdx$.
$\int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t\,dt = \frac{1}{2} e^t + c$ e poi si torna in x sostituendo $t = x^2$ quindi torna $\frac{1}{2} e^{x^2} + k$.

Per gli integrali definiti possiamo fare in due modi. Prendiamo $\int_0^2 x e^{x^2}\,dx$:

1. Calcolare $\int xe^{x^2}\,dx$. Abbiamo che che è $\frac{1}{2}e^{x^2}+k$. Poi $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = [\frac{1}{2}e^{x^2}+k]_0^2 = \frac{1}{2}(e^4-1)$.

2. Possiamo usare la sostituzione, ricordandosi di cambiare gli estremi: $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$ pongo come prima $dt = 2xdx$, $\frac{dt}{2} = xdx$.
Quindi $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \int \frac{e^t}{2}\,dt$ e bisogna calcolare gli estremi vedendo quanto vale t negli estremi. $x = 0$ quindi $t = 0^2 = 0$ e $x = 2$ quindi $t = 2^2 = 4$. Alla fine avremo $\int_0^4 xe^{x^2}\,dx$, da qui poi si va avanti come prima.

Esempio 13.7.2. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. $x = \sin(t)$, $t = \arcsin(x)$ e $\frac{dx}{dt} = \cos(t)$ quidi $dx = \cos(t)\,dt$.
$= \int \sqrt{1-\sin(t)^2}\cdot\cos(t)\,dt = \int \sqrt{\cos(t)^2}\cdot\cos(t)\,dt = \int |\cos(t)|\cdot\cos(t)\,dt$ (il valore assoluto si toglie visto che $\cos(t) \geq 0$ nell'intervallo in cui stiamo integrando che è fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$).
$\int \cos(t)^2\,dt = \frac{t+\sin(t)\cdot\cos(t)}{2} + c = \frac{\arcsin(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2} + c$.

Se andiamo a fare l'integrale di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ si va a calcolare l'area del cerchio unitario.
Infatti $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\Big[\frac{\arcsin(x)+x\sqrt{1-x^2}}{2}\Big]_0^1 = 4\cdot\frac{\arcsin(1)}{2} = 2\frac{\pi}{2} = \pi$.

Se volessimo calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)+k$ visto che $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Osservazione 13.7.2. Ho anche $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, quindi $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)+k'$. Segue che $\arcsin(x)-(-\arccos(x))$ è costante. Per vedere quanto vale basta calcolare in $x = 0$, e trovo $\arcsin(0)+\arccos(0) = 0+\frac{\pi}{2}$. Quindi $\arcsin(x)+\arccos(x) = \frac{\pi}{2}\ \forall x \in [-1,1]$.

13.8 Integrali di funzioni razionali

Consideriamo integrali nella forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi in x ed il grado di $q(x) \leq 2$, $\deg(q(x)) \leq 2$.

- Caso con denominatore ha grado 1, $\deg(q(x)) = 1$.
  Esempio caso particolare con numeratore costante con $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$. In questo caso usiamo la sostituzione $y = ax+b$ e $dy = a\cdot dx$.
  $= \int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{a}\log|ax+b|+c$.

  Caso con $\deg(p(x)) > 0$. Usiamo il caso precedente ma facendo prima la divisione di polinomi di $p(x)$ per $q(x) = ax+b$. Cioè scriviamo:
  $p(x) = (ax+b)\cdot Q(x)+R(x)$ dove $Q(x)$ e $R(x)$ sono polinomi e $\deg R(x) < \deg(ax+b) = 1$, (allora R(x) è una costante ed è uguale a $p(-\frac{b}{a})$).

  C'è un algoritmo per fare la divisione in maniera veloce:

  Esempio 13.8.1. Prendiamo $\int \frac{2x^2+1}{x+1}\,dx$. $\frac{p(x)}{ax+b} = \frac{2x^2+1}{x+1}$, quindi $a = 1$ e $b = 1$.
  Divido $2x^2+1$ per $x+1$. (Fare la divisione, vedere gli appunti delle lezioni per il modo preciso).
  Il risultato è: $\int \frac{(x+1)(2x-2)+3}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(2x-2)}{(x+1)}dx + \int \frac{3}{x+1} = \int(2x-2)dx + 3\log|x+1|+c = x^2-2x+3\log|x+1|+c$

- Caso con grado denominatore uguale a 2, $\deg(q(x)) = 2$.
  Il primo passaggio è sempre quello di fare la divisione scrivendo $p(x) = (ax^2+bx+c)\cdot Q(x)+R(x)$ dove $\deg R(x) < 2$ cioè $R(x) = cx+d$.
  Quindi $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{(ax^2+bx+c)\cdot Q(x)+R(x)}{ax^2+bx+c}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{ax^2+bx+c}dx$, dove $R(x) = cx+d$.
  Per calcolare gli integrali di questa forma rimane da vedere come calcare $\int \frac{cx+d}{ax^2+bx+c}dx$.
  Ci sono usa serie di casi particolare da analizzare, a seconda del numero di radici reali del denominatore:

  1. Due radici coincidenti e numeratore costante. $\int \frac{dx}{(x-a)^2}$, si fa una sostituzione del tipo $y = x-a$ e $dy = dx$. $\int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{-1}\cdot y^{-1}+c = -\frac{1}{y}+c = -\frac{1}{x-a}+c$.

2. Due radici reali distinte e numeratore costante. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ con $a \neq b$. Si cercano due numeri reali A e B tali che valga:
$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{x(A+B)-Ab-Ba}{(x-a)(x-b)}$. Se voglio che valga questa uguaglianza, per il principio di identità dei polinomi deve essere che:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-Ba=1 \end{cases} = \begin{cases} B=-A \\ -Ab+Aa=1 \end{cases} = \begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{a-b} \end{cases} = \begin{cases} B=-\frac{1}{a-b} \\ A=\frac{1}{a-b} \end{cases}$$

A questo punto posso sostituire con l'espressione trovata sopra:
$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int (\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{(x-b)})dx = \frac{1}{a-b}(\log|x-a) - \log|x-b|) + c$

- Denominatore senza radici reali e numeratore costante.
$\int \frac{dx}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$. Generalizzando $\int \frac{dx}{k^2+x^2}$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$.
$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{k})^2}$ facciamo poi una sostituzione con $y = \frac{x}{k}$ e $dy = \frac{dx}{k}$.
$\frac{1}{k^2} \int \frac{1}{a+y^2} \cdot k\, dy = \frac{1}{k} \cdot \arctan(y) + c = \frac{1}{k} \cdot \arctan(\frac{x}{k}) + c$.
Il casi generale con il denominatore come $ax?2 + bx + c$ senza radici reali, cioè $\Delta < 0$. In realtà posso supporre che $a = 1$: $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}dx$. Quindi guardo polinomi della forma x^2+bx+c con $\Delta < 0$. Io posso fare $x^2+bx+c = (x^2+bx+\frac{b^2}{4}) - \frac{b^2}{4} + c = (x+\frac{b}{2})^2 + \frac{1}{4}(-b^2+4c)$.
$\int \frac{dx}{x^2+x+c} = \int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2})^2+k^2}$, con $k^2 = \frac{1}{4}(-b^2+4c) > 0$. Se poi andiamo a sostituire con $y = x + \frac{b}{2}$ e $dy = dx$ abbiamo $\int \frac{1}{y^2+k^2}dx$ e questo lo sappiamo fare perché visto sopra ed è $\frac{1}{k}\arctan(\frac{x+\frac{b}{2}}{k}) + c$.

Esempio 13.8.2. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+10} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{3}\arctan(\frac{x+1}{3}) + c$.
(se si fosse scelto $k = -3$ invece che $k = 3$ sarebbe venuto lo stesso risultato perché $-\frac{1}{3}\arctan(-\frac{y}{3}) + c = \frac{1}{3}\arctan(\frac{y}{3})$)

- Caso nel quale il denominatore non è costante, cioè ha grado 1, bisogna vedere come comportarsi con il numeratore.
$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+c-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d} = \frac{a}{2}\int \frac{2x+c}{x^2+cx+d}dx + \frac{a}{2}\int \frac{-c\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}dx$ ora per il primo integrale il numeratore è la derivata del denominatore, mentre nel secondo essendoci una costante al numeratore lo sappiamo fare.
$\frac{a}{2}\log|x^2+cx+d| + \frac{a}{2}\int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}dx$.

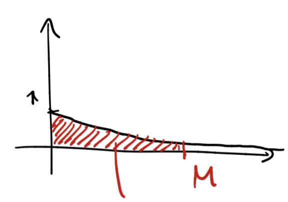
Esempio 13.8.3. $\int \frac{4x+5}{x^2+2x-1}dx = 2\int \frac{2x+\frac{5}{2}+2-2}{x^2+2x-1}dx = 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1}dx + 2\int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+2x-1}dx =$
$= 2\log|x^2+2x-1| + \int \frac{1}{x^2+2x-1}$

13.9 Integrali impropri

Gli Integrali impropri o generalizzati estendono la definizione di integrale definito al caso in cui l'integrale non è limitato, oppure l'intervallo di integrazione non è limitato.

Esempio 13.9.1. Dobbiamo dare un senso per esempio a $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$.

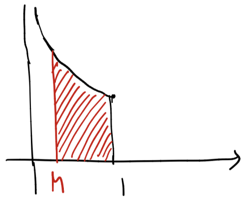
Intuitivamente rappresenta l'area di tutto il sotto grafico sopra $(0, +\infty)$. Formalmente definiremo un limite:



$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M e^{-x}\, dx = \lim_{M\to+\infty} [-e^{-x}]_0^M = \lim_{M\to+\infty} -e^{-M} + 1 = 1$.
In questo caso il sotto grafico $[0, +\infty)$ ha area finita uguale a 1.

Esempio 13.9.2. Se invece prendiamo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x}dx =$
$\lim_{M\to+\infty} [\log(1+x)]_0^M = \lim_{M\to+\infty} (\log(1+M) - 0) = +\infty$. In questo caso l'area del sotto grafico è infinito.

Esempio 13.9.3. Facciamo un' altro esempio di integrale improprio con $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.



$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ notiamo che la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata sull'intervallo compreso fra $[0,1)$.

$\lim\limits_{M\to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim\limits_{M\to 0^+} [2\sqrt{x}]_M^1 = \lim\limits_{M\to 0^+} (2-2\sqrt{M}) = 2$, l'area del sotto grafico di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sopra a $[0,1]$.

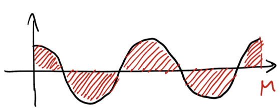
Esempio 13.9.4. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{M\to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{M\to 0^+} [\log(x)]_M^1 = \lim\limits_{M\to 0^+} (0-\log(M)) = +\infty$.
Quindi in questo caso il sotto grafico ha area infinita.

Definizione 13.9.1 (Integrali impropri o generalizzati). *Dati due punti $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ e $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ che sia integrabile in tutti gli intervalli $[a,M]$ con $a < M < b$. Se esiste $\lim\limits_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\,dx = L$, definiamo $\int_a^b f(x)\,dx = L$.*

- *Se L è reale finito si dice che l'integrale di $f(x)$ su $[a,b)$ converge (oppure che $f(x)$ è integrabile "in senso generalizzato su $[a,b)$").*
- *Se L è uguale a $+\infty$ si dice che l'integrale diverge positivamente (o "a $+\infty$").*
- *Se L è uguale a $-\infty$ si dice che l'integrale diverge negativamente (o "a $-\infty$").*

Vedendo gli esempi visti sopra possiamo dire che:
$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$ diverge pos. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge pos.

Esempio 13.9.5. Esempio in cui il limite non esiste:



$\int_0^{+\infty} \cos(x)\ dx = \lim\limits_{M\to+\infty} \int_0^M \cos(x)\ dx = \lim\limits_{M\to+\infty} [\sin(x)]_0^M = \lim\limits_{M\to+\infty} (\sin(M)-0)$ e questo non esiste.

Analogamente si definisce $\int_a^b f(x)\ dx$ quando $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ e f integrabile su $[M,B] \forall a < M < b$ come $\lim\limits_{M\to a^+} \in_M^b f(x)\ dx$ (se esiste).

Se però abbiamo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ questa funzione "ha un problema" in entrambi a e b, ad esempio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$ oppure $\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2}\ dx$.

Definizione 13.9.2. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ con $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ che sia integrabile su $[M_1,M_2]$ con $a < M_1 < M_2 < b$. Scegliamo arbitrariamente $c \in (a,b)$, se esistono entrambi $\int_a^c f(x)\ dx$ e $\int_c^b f(x)\ dx$ allora si definisce:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \textit{ Se la somma non è indeterminata (cioè non è} +\infty-\infty)$$

E in questo caso si diche che f è integrabile in senso improprio su (a,b)

Osservazione 13.9.1. L'esistenza e il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ non dipende dalla scelta di $c \in (a,b)$.
Se scelgo $d \in (a,b)$ ho $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ e $\int_d^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
Sommando queste due equazioni ottengo $\int_a^b f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^c f(x)\,dx$ la seconda somma $\int_c^d f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx = 0$ quindi vediamo che il risultato non cambia.

Esempio 13.9.6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Scelgo $c = 0$.
$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{M\to-\infty} [\arctan(x)]_{-M}^0 = \lim\limits_{M\to-\infty} [0-\arctan(M)] = +\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} =$ (stessi conti di prima) $= \frac{\pi}{2}$. Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2$ (converge)

Esempio 13.9.7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, scegliamo $c = 1$.
$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim\limits_{M\to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim\limits_{M\to 0^+} [-x^{-1}]_M^1 = \lim\limits_{M\to 0^+} [-1 + \frac{1}{M}]_M^1 = +\infty$ (diverge positivamente).
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim\limits_{M\to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\, dx = \lim\limits_{M\to +\infty} [-x^{-1}]_1^M = \lim\limits_{M\to +\infty} [-\frac{1}{M} + 1] = 1.$
Quindi $\int_0^+ \infty\frac{1}{x^2}\, dx = +\infty + 1 = +\infty$ quindi il grafico diverge positivamente.

Esempio 13.9.8. Prendiamo $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx$ in questo caso spezziamo in $c = 0$.
$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx.$
$\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\, dx = \lim\limits_{M\to 0^-} \int_{-1}^M = \lim\limits_{M\to 0^-} [\log(-x)]_{-1}^M = \lim\limits_{M\to 0^-} \log(-M) = -\infty.$
$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim\limits_{M\to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim\limits_{M\to 0^+} [\log(x)]_M^1 = \lim\limits_{M\to 0^+} -\log(M) = +\infty.$
Se vado a fare la soma ho che la somma è indeterminata $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = +\infty - \infty$ e dunque non esiste.

Attenzione a non fare $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = [\log|x|]_{-1}^1 = \log(1) - \log(1) = 0$ perché è sbagliato, il teorema di Torricelli non si applica perché f non è integrabile su $[-1, 1]$. Bisogna trattarlo come integrale improprio.

Osservazione 13.9.2. I potrebbe pensare che ha senso dire che $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = 0$ visto che $\frac{1}{x}$ è dispari, e le aree sopra e sotto si sovrappongono perfettamente. Si preferisce dire comunque che l'integrale non esiste.

Si potrebbe sommare $\int_{-1}^a \frac{1}{x}\, dx + \int_b^1 \frac{1}{x}\, dx$ e far tendere $a \to 0^-$ e $b \to 0^+$.
Il problema è che il risultante del limite dipende da come viene fatto questo limite.

Esempio 13.9.9. $\lim\limits_{b\to 0^+} (\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x}\, dx + \int_b^1 \frac{1}{x}\, dx) = \lim\limits_{b\to 0^+} (\log(b) - \log(b)) = 0.$
Ma per esempio se prendiamo $-2b$ invece che b abbiamo $\lim\limits_{b\to 0^+} (\int_{-1}^{-2b} \frac{1}{x}\, dx + \int_b^1 \frac{1}{x}\, dx) = \lim\limits_{b\to 0^+} (\log(2b) - \log(b)) = \lim\limits_{b\to 0^+} \log(\frac{2b}{b}) = \log(2)$ ed il risultato è diverso.

Se ci sono "più problemi" sull'intervallo di integrazione si spezza in tanti intervalli quanto basta per ricondursi a integrali impropri in cui c'è solo un problema.

Esempio 13.9.10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx$ ci sono problemi sia agli estremi, più ha due asintoti a -1 e 1.
Quindi si spezza come $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^{+\infty}$ e la somma ha senso se hanno senso (cioè i limiti esistono) e non è indeterminata.

Osservazione 13.9.3. In questi casi si scrive comunque $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx$ e non $\int_{[-1,0)\cup(0,1]} \frac{1}{x}\, dx$.

Proposizione 13.9.1. *Data una $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a, M]\forall\, a < M < b$ e supponiamo che f abbia segno costante. Allora esiste (finito o infinito) $\int_a^b f(x)\, dx$. Ed esiste un enunciato analogo per il caso simmetrico $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.*

Dimotrazione 13.9.1. Supponiamo ad esempio che $f \geq 0$ su $[a, b)$. Mostriamo che $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è debolmente crescente. Seguirà che $\exists \lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ che è proprio $\int_a^b f(t)\, dt$. Infatti se $x_1 < x_2$, allora $F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\, dt = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x^2} f(t)\, dt \geq \int_a^{x_1} F(x_1)$. Il pezzo $\int_{x_1}^{x^2} \geq 0$ perché $f(t) \geq 0$ e $x_2 > x_1$. ∎

13.9.1 Integrali impropri notevoli

Con la forma: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Se $\alpha = 1$, $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| \longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim\limits_{M\to +\infty} [\log(x)]_1^M = \lim\limits_{M\to +\infty} (\log(M)) = +\infty$, diverge.
- Se $\alpha \neq 1$, $\int \frac{1}{x} = \int x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + c.$
  Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim\limits_{M\to +\infty} [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^M = \lim\limits_{M\to +\infty} (\frac{1}{1-\alpha} M^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}).$
- Se $1 - \alpha > 0$, cioè $\alpha < 1$, il limite è $+\infty$.

- se $1-\alpha<0$, cioè $\alpha>1$, il limite è finito e vale $-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}>0$.

Esempio 13.9.11. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge, e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge a $+\infty$.

Con la forma: $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Se $\alpha=1$, $\int_0^1\frac{1}{x}\,dx=\lim\limits_{M\to 0^+}[\log(x)]_M^1=\lim\limits_{M\to 0^+}(\log(M))=+\infty$ diverge.
- Se $\alpha\neq 1$, $\int\frac{1}{x}=\int x^{-\alpha}\,dx=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}+c$.
  Quindi $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}=\lim\limits_{M\to 0^+}[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}]_M^1=\lim\limits_{M\to 0^+}(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}M^{1-\alpha})$.
- Se $1-\alpha>0$, cioè $\alpha<1$, il limite è finito e vale $-\frac{1}{1-\alpha}>0$.
- se $1-\alpha<0$, cioè $\alpha>1$, il limite è finito e vale $+\infty$.

Osservazione 13.9.4. Quindi questo implica che $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx=+\infty\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

13.10 Criteri per la convergenza di integrali impropri

13.10.1 Criterio del confronto

Prendiamo un $a\in\mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$ (deve essere $+\infty$), e $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ integrabile in ogni $[a,M]\ \forall\ a<M<b$. Se $\exists\,U$ intorno sinistro di b tale che $0\leq f(x)\leq g(x)\ \ \forall\,x\in U\cap[a,b)$.

1. Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
2. Se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $(a,+\infty)$, allora anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge $(a,+\infty)$.

C'è un enunciato analogo se $f,g:(a,b]$.

Esempio 13.10.1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4+3x^3+x+1}$, chiamiamo $f(x)=\frac{dx}{x^4+3x^3+x+1}$ è continua in $[1,+\infty)$ perché $x^4+3x^3+x+1>0\ \forall x\geq 1$.
Inoltre $0\leq f(x)\leq\frac{1}{x^4}\forall x\in[1,+\infty)$. Visto che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$ converge, per confronto concludiamo che $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ converge.

13.10.2 Criterio del confronto asintotico o C.A.

Prendiamo $a\in\mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$, e $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabile in ogni $[a,M]\ \forall a<M<b$. Se $\exists U$ intorno sinistro di b tale che $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0\forall x\in U\cap[a,b)$ e $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. Allora:

- Se $l\neq 0,+\infty$, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\iff\int_a^b g(x)\,dx$ converge.
- Se $l=0$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\implies\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- Se $l=+\infty$ e $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\implies\int_a^b g(x)\,dx$ converge.

C'è un enunciato analogo se $f,g:(a,b]$.
Esempio: nel secondo caso $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0\implies$ per x vicine a b vale $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 1\implies f(x)\leq g(x)$ vicino b.

Osservazione 13.10.1. Le implicazioni di questi criteri non si invertono.

Esempio 13.10.2. $\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{x}$ $(f(x)\leq g(x))$ per $x\geq 0$ e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge non si può concludere che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ diverge. Il criterio del confronto non vale in maniera inversa.

Esempio 13.10.3. $\int_0^1\frac{1}{x-\sin(x)}\,dx$, prendiamo $f(x)=\frac{1}{x-\sin x}$ è continua in $(0,1]$ e $f(x)>0$ in $(0,1]$.
Il metodo è usare Taylor per confrontare la $f(x)$ con una certa forma $\frac{1}{x^\alpha}$. Sviluppiamo il denominatore in 0 (il punto "problematico")
$x-\sin x=x-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. $f(x)=\frac{1}{x-\sin x}=\frac{1}{\frac{x^3}{6}}$ attorno a 0.

Uso il criterio del confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^3}$. $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$. Per il C.A. concludo che $\int_0^1 f(x)\,dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x^3}$ che sappiamo diverge. Quindi $\int_0^1 \frac{1}{x-\sin(x)}\,dx$ diverge.

Osservazione 13.10.2. I criteri del confronto e del confronto asintotico si possono usare anche per funzioni negative, cambiando opportunamente le conclusioni.
Ad esempio: se $g(x) \leq f(x) \leq 0$ per $x \in [a,b)$ allora:

- Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- Se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge (a $-\infty$ per forza) allora anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge (a $-\infty$).

13.10.3 Criterio dell'assoluta convergenza

Questo criterio si applica a funziono a segno variabile.

Definizione 13.10.1. *f, integrabile su ogni intervallo chiuso $[a,b] \subseteq I$, si dice assolutamente integrabile su I se $|f|$ è integrabile (eventualmente in senso generalizzato) su I, cioè $\int_I |f(x)|\,dx$ converge.*

Definizione 13.10.2 (Parte positiva e negativa)**.** *Prendiamo un $x \in \mathbb{R}$. Definiamo:*

- *La **parte positiva** di x è $x^+ = maxx, 0$ cioè è x se $x \geq 0$ ed è 0 se $x < 0$.*
- *Mentre la **parte negativa** di x è $x^- = -minx, 0$ che è $-x$ quando $x \leq 0$ e 0 se $x > 0$.*

Esempio 13.10.4. $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $(-3)^+ = 0$, $(-3)^- = 3$

Osservazione 13.10.3. Ogni $x = x^+ - x^-$ mentre $|x| = x^+ + x^-$. Segue che $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ e $x^- = \frac{|x|-x}{2}$.
Analogamente, se $f(x)$ è una funzione ho $f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-$, e $|f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$.

Proposizione 13.10.1 (Criterio dell'assoluta integrabilità)**.** *Se f è assolutamente integrabile su I allora f è integrabile (in senso generalizzato) su I.*

Per questa proposizione non vale il viceversa.

Dimotrazione 13.10.1. $|f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$ quindi:
$0 \leq (f(x))^+ \leq |f(x)|$ e $0 \leq (f(x))^- \leq |f(x)|$

Per confronto, supponendo che $\int_I |f|\,x$ converga, concludo che convergono $\int_I f(x)^+\,x$ e $\int_I f(x)^-\,x$.
Visto che $f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-$, concludo che:
$\int_I f(x)\,dx = \int_I (f(x)^+ - f(x)^-)\,dx = \int_I f(x)^+\,dx - \int_I f(x)^-\,dx$.

Ad esempio se $I = [a,b)$, abbiamo che:
$\int_a^M f(x)\,dx = \int_a^M (f(x)^+ - f(x)^-)\,dx = \int_a^M f(x)^+\,dx - \int_a^M f(x)^-\,dx$, passando al limite per $M \to b^-$ so che i limiti di $\int_a^M f(x)^+\,dx - \int_a^M f(x)^-\,dx$ esistono, quindi esiste anche $\lim_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\,dx$. ■

Corollario 13.10.0.1. *$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$ integrabili in $[a,M] \forall a < M < b$. Se $\exists U$ intorno sinistro di b tale che $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in U \cap [a,b)$ e se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ converge. (Confronto + assoluta integrabilità)*

Esempio 13.10.5. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}$. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ a segno variabile su $[1, +\infty)$.
$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, prendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ nel corollario di sopra.
Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, concludo che $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}$ converge.

Esempio 13.10.6. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$. Procedendo alla stesso modo di sopra $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ a segno variabile.
$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x}$ prendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Questa volta però $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.
Quindi non posso concludere niente su $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$. In questo caso possiamo: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x} =$ (integro per parti) $= \int_1^M \sin x \frac{1}{x}\,dx = [-\frac{\cos x}{x}]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} (-\frac{\cos M}{M} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2})\,dx =$

$\lim\limits_{M\to+\infty}(-\frac{\cos M}{M}+\cos 1)-\lim\limits_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$
Il risultato finale è uguale a $\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}$ che converge come il caso con seno (visto nell'esempio prima). Mentre la parte $-\frac{\cos M}{M}$ tende a 0, quindi $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ converge.

Osservazione 13.10.4. Stesso discorso per $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}$ che converge.

Esempio 13.10.7. Vediamo come $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}$ diverge(questo da un esempio di $f(x)$ tale che $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, ma $\int_1^{+\infty}|f(x)|\,dx$ diverge).

Osserviamo che $|\sin x| \geq (\sin x^2)$ (perché $-1 \leq \sin x \leq 1$). Quindi $\int_1^M \frac{|\sin x|}{x} \geq \int_1^M \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \int_1^M \frac{(1-\cos 2x)}{2x} = \int_1^M \frac{1}{2x} - \int_1^M \frac{\cos sx}{2x} = \int_1^M \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_2^{2M}\frac{\cos t}{t}\,dt$ con $t=2x$ e $dt = 2dx$. Il primo integrale diverge ed il secondo converge perché si ritorna ad un caso visto prima ($\int_2^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$).
Quindi in conclusione la somma diverge a $+\infty$ quindi $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}$ diverge a $+\infty$.

13.10.4 Integrali impropri ricorrenti

TIPO 1°. Vediamo ora gli integrali del tipo $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha \log(x)^\beta}\,dx$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

- Caso con $\alpha>1$: possiamo prendere un $\gamma\in\mathbb{R}$ tale che $\alpha>\gamma>1$.
  $f(x)=\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}$ e $g(x)=\frac{1}{x^\gamma}$. $f(x),g(x)\geq 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\gamma}{x^\alpha(\log(x)^\beta)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\gamma}(\log(x))^\beta}$ questo limite è 0.
  Quindi visto che $\gamma>1$, quindi $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\gamma}dx$ converge e per C.A. concludiamo che $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}dx$ converge.
- Caso con $\alpha<1$: possiamo prendere un $\gamma\in\mathbb{R}$ tale che $\alpha<\gamma<1$.
  $f(x)=\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}$ e $g(x)=\frac{1}{x^\gamma}$. $f(x),g(x)\geq 0$.
  Questa volta $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\log(x)^\beta)} = +\infty$.
  Visto che $\gamma<1$, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\gamma}\,dx$ diverge per C.A. Possiamo quindi concludere che $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}\,dx$ diverge $\forall\beta\in\mathbb{R}$.
- Caso con $\alpha=1$: $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}\,dx$.
  $\int_2^M \frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)}\,dx =$ con $t=\log(x)$ e $dt=\frac{1}{x}\,dx = \int_{\log(2)}^{\log(M)}\frac{1}{t^\beta}\,dt = \lim\limits_{M\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log(x)^\beta)} = \int_{\log(2)}^{+\infty}\frac{1}{t^\beta}\,dt$ che converge se $\beta>1$ e diverge a $+\infty$ se $\beta\leq 1$.

TIPO 2°. Analogamente studiamo $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log(x)|^\beta}\,dx$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
$\int_M^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log(x)|^\beta}\,dx =$ con $t=\frac{1}{x}$ quindi $x=\frac{1}{t}$, e $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt \int_{\frac{1}{M}}^2 \frac{-dt}{t^2\cdot t^{-\alpha}|l-\log(t)|^\beta} =$ (se $M\to 0^+$ allora $\frac{1}{M}\to+\infty$) $= \int_2^{\frac{1}{M}}\frac{dt}{t^{2-\alpha}\cdot|\log(t)|^\beta} = \lim\limits_{M\to 0^+}\frac{dt}{t^{2-\alpha}\cdot|\log(t)|^\beta} = \int_2^{\frac{1}{M}}\frac{dt}{t^{2-\alpha}\cdot|\log(t)|^\beta}$ e questo l'abbiamo appena studiato. Segue che $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log(x)|^\beta}\,dx$ abbiamo che:

- $2-\alpha>1$ ($\alpha<1$) converge $\forall\beta\in\mathbb{R}$.
- $2-\alpha<1$ ($\alpha>1$) diverge a $+\infty$ $\forall\beta\in\mathbb{R}$.
- $2-\alpha=1$ ($\alpha=1$) con $\beta>1$ converge.
- $2-\alpha=1$ ($\alpha=1$), $\beta\leq 1$ diverge a $+\infty$.

TIPO 3°. Vediamo come ultimo gli integrali della forma $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}$.

- Questo integrale converge se $a>0$ e $\alpha>1$.
- Invece l'integrale diverge a $+\infty$ se $a>0$ e $\alpha\leq 1$-

13.10.5 Esempi riassuntivi

Esempio 13.10.8. Primo esempio riassuntivo: $\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{dx}{x-x_0}$

- Converge se $\alpha < 1$.
- Diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$.

Dato M tale che $x_0 < M < x_0 + 1$. $\int_M^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$ = con $t = x - x_0$ e $dt = dx = \int_{M-x_0}^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.
$\lim_{M\to x_0^+} \int_M^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \lim_{M\to x_0^+} \int_{M-x_0}^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ e sappiamo che questo converge se $\alpha < 1$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$.

Esempio 13.10.9. Secondo esempio riassuntivo: $\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4}\, dx$. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4}$ è definita e continua in $[0, 2)$ quindi integrale va trattato come integrale improprio. Bisogna notare anche che $f(x) < 0$ (sempre positiva) in tutto $[0, 2)$ perché $x^3 + 1 > 0$ per $x > 0$ e $x^2 - 4 < 0$ per $0 \leq x < 2$.
Avendo segno costante si possono usare i criteri del confronto e del confronto asintotico.
$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3+1}{(x-2)(x+2)}$ il pezzo problematico è $g(x) = \frac{1}{x-2}$.
Usiamo C.A. con $g(x) = \frac{1}{x-2}$ (notare $g(x) < 0$ in $[0, 2)$). Poi facciamo $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$:
$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+1}{(x-2)(x+2)} \cdot (x-2) = \frac{9}{4} \neq 0, +\infty$. Per C.A. $\int_0^2 f(x)\, dx$ ha lo stesso comportamento di $\int_0^2 \frac{1}{x-2}\, dx$ che sappiamo diverge negativamente (sostituzione $t = 2 - x$ per ricondursi a $\int \frac{dt}{t}$).
Quindi $\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4}\, dx = -\infty$ (si scrive sono $-\infty$ che vuol dire che diverge negativamente)

Esempio 13.10.10. Terzo esempio riassuntivo: $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ ($1 + x^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$). Infine $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi l'unico problema è a $+\infty$.
Per x grandi $\frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$ sarà circa $\frac{\log(x^2)}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\log(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$ e sappiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, quindi probabilmente anche il nostro divergerà.
Facciamo C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$.

Quindi visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, concludo che $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge positivamente. Segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$ cioè il nostro integrale diverge positivamente.

Esempio 13.10.11. Quarto esempio riassuntivo: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})}\, dx$. $f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})}$ definita e continua su $(0, +\infty)$ e $f(x) > 0$ su $(0, +\infty)$, ci sono 2 problemi, in 0 e a $+\infty$ quindi spezziamo in $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ e studiamo i due pezzi.

- Caso $\int_0^1$: per $x \to 0^+$ si ha $\arctan(x^{5/2}) = x^{5/2} + o(x^{5/2})$ quindi $f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)(x^{\frac{5}{2}}+o(x^{5/2}))} = \frac{x^2}{2x^{\frac{5}{2}}+o(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}+o(x^{\frac{1}{2}})}$ prendo $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
  Ho $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}+o(x^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{2} \neq 0, +\infty$. Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ converge per C.A. concludo che converge anche $\int_0^1 f(x)\, dx$.
- Caso $\int_1^{+\infty}$: per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{x^2}{x^4(\frac{2}{x^4}+3)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{(\frac{2}{x^4}+3)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})}$
  la seconda parte per $x \to +\infty$ fa $\frac{1}{3\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$, prendo quindi $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\cdot(\frac{2}{x^4}+3)\cdot\arctan(x^{\frac{5}{2}})} = \frac{2}{3\pi} \neq 0, +\infty$. Vito che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, per C.A. converge anche $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

Esempio 13.10.12. Quinto esempio (con segno variabile): $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}\, dx$. $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}$ definita e continua in $(0, +\infty)$, problemi in $x = 0$ e $x = +\infty$, $f(x)$ a segno variabile.
Spezziamo $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$

- Caso $\int_0^1$: osserviamo che $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1$ perché ($\sin(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$). Quindi posso usare confronto e C.A. per $x \to 0^+$ $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)} = \frac{x+o(x)}{x^{3/2}+o(x^{3/2})} = \frac{1+o(1)}{x^{1/2}+o(x^{1/2})}$, prendo quindi $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$.
  $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+o(1)}{x^{1/2}+o(x^{1/2})} \cdot x^{1/2} = 1 \neq 0, +\infty$. Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, per C.A. concludiamo che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

- Caso $\int_1^{+\infty}$ qui $f(x)$ non è costante ma oscilla tra valori positivi e negativi. Proviamo ad usare assoluta convergenza:
  $|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x^{3/2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^{3/2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{7/2}}$. Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/2}}\,dx$ converge, per confronto ho che $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge e per il criterio dell'assoluta integrabilità segue che $\int_1^{+\infty} f(x)$ converge.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.