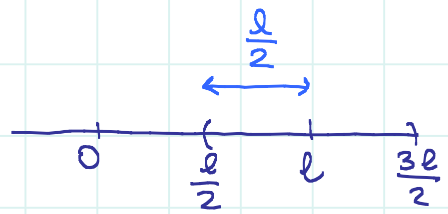
ANALISI 1 — LEZIONE 20

Note Title 19/10/2024

Teoremi di tipo permanenza del segno

Se $a_n \to \ell > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente



$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di limite con $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$

Ottengo che

$$\ell - \underbrace{\frac{\ell}{2}}_{\varepsilon} \leq a_n \leq \ell + \underbrace{\frac{\ell}{2}}_{\varepsilon} \quad \text{definitiv.}$$

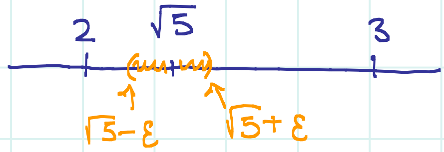
Questo dimostra che $a_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$ definitiv.

Se $a_n \to +\infty$, allora $a_n > 0$ definitiv.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso la def. di lim. con $M = 2024$ e ottengo che

$$a_n \geq 2024 \quad \text{definitiv.}$$

Se $a_n \to \sqrt{5}$, allora $2 \leq a_n \leq 3$ definitiv.



$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta prendere $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che

$$2 < \sqrt{5} - \varepsilon \qquad e \qquad \sqrt{5} + \varepsilon < 3$$

Sappiamo che definitiv. $\sqrt{5} - \varepsilon \leq a_n \leq \sqrt{5} + \varepsilon$

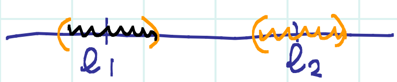
— o — o —

Teorema misterioso (Unicità del limite)

Ogni successione ha uno e uno solo dei possibili comportamenti ①, ②, ③, ④

Se inoltre è di tipo ①, allora il valore del limite ℓ è unico

Definitivamente dovrebbe stare in due intervalli disgiunti!



Tre criteri per i limiti di successioni

→ Criterio della RADICE

→ Criterio del RAPPORTO

→ Criterio RAPPORTO → RADICE

CRITERIO DELLA RADICE Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ definitiv. (serve per fare le radici)

(ii) $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora

- se $L < 1$, allora $a_n \longrightarrow 0$
- Se $L > 1$ (incluso il caso $L = +\infty$), allora $a_n \rightarrow +\infty$
- Se $L = 1$, allora BOH.

CRITERIO DEL RAPPORTO Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n > 0$ definitiv. (serve per fare i rapporti)

(ii) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora ... esattamente come nel caso della radice.

Come si usano operativamente?

Devo fare il limite di a_n ma non sono capace.

Magari sono capace di calcolare il limite di

$$\sqrt[n]{a_n} \qquad \text{oppure di} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se uno di questi due lo so fare, e viene che esiste ed è $\neq 1$, allora ho la risposta per quanto riguarda il limite di a_n.

CRITERIO RAPPORTO → RADICE

Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n > 0$ definitivamente

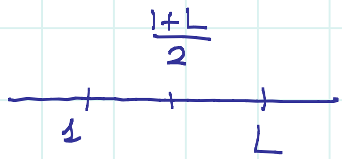
(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \to L$ (stesso L, compreso il caso $L=1$)

Dim. radice

Caso 1 Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to L \in \mathbb{R}$ con $L>1$.

Allora per la storia di permanenza del segno, si avrà che



$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{L+1}{2} \quad \text{definitiv.}$$

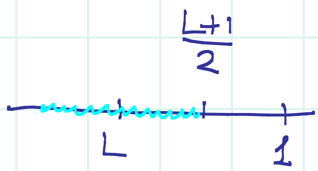
Ma allora $\underbrace{a_n}_{\downarrow \, +\infty} \geq \underbrace{\boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^n}}_{\downarrow \, +\infty}$ definitiv.

$+\infty$ perché base fissa >1

quindi $a_n \to +\infty$.

Caso 1-bis Se $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$, allora $\sqrt[n]{a_n} \geq 2024$ definitiv., quindi $a_n \geq 2024^n$ definitiv, ...

Caso 2 Se $\sqrt[n]{a_n} \to L < 1$, allora definitivamente



$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2}$$

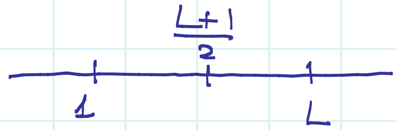
e quindi $\underbrace{\boxed{0}}_{\downarrow \, 0} \leq \underbrace{a_n}_{\downarrow \, 0} \leq \underbrace{\boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^n}}_{\downarrow \, 0}$ definitivamente

per i carabinieri

esponenziale con base fissa in $[0,1)$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim rapporto}}$ Facciamo solo il caso $L > 1$ (l'altro è uguale)



Per i soliti discorsi sappiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{L+1}{2} \quad \text{definitiv., diciamo per } n \geq n_0$$

Allora $\quad a_{n_0+1} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right) a_{n_0}$ (posso molt. perché sono >0)

$$a_{n_0+2} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right) a_{n_0+1} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$$

$$a_{n_0+3} \geq \ldots \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^3 a_{n_0}$$

e quindi per induzione $\quad \underbrace{a_{n_0+k}}_{+\infty} \geq \underbrace{\boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^k a_{n_0}}}_{+\infty}$

<u>Esempio 1</u> $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n^2} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$

Proviamo con il rapporto con $a_n = \frac{3^n}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{n^2+2n+1} \longrightarrow 3 > 1 \leadsto a_n \longrightarrow +\infty$$

Più in generale: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1 \text{ e } b \geq 0}$

Tabellina: esponenziale con base > 1 batte le potenze

Rapporto diventa

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)^b} \cdot \frac{n^b}{a^n} = a \cdot \underbrace{\boxed{\left(\frac{n}{n+1}\right)^b}}_{1} \longrightarrow a > 1$$

Esempio 2 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2024^n} = +\infty}$ Tabellina: fattoriale batte esponenziale

Rapporto con $a_n = \frac{n!}{2024^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2024^{n+1}} \cdot \frac{2024^n}{n!} = \frac{1}{2024}(n+1) \longrightarrow +\infty > 1$$

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n}!} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1 \quad \rightsquigarrow \quad a_n \to +\infty$$