ANALISI 1 — LEZIONE 084

Note Title 10/03/2017

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\qquad$ $x_{n+1} = 2x_n + 3$

x_0 dato

<u>Esempio</u> $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3 \\ x_0 = 5 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 5,\quad x_1 = 2x_0 + 3 = 13$

$x_2 = 2x_1 + 3 = 29$

$x_3 = 2x_2 + 3 = 61$

$\vdots$

Determina univocamente tutta la successione, MA... se voglio x_{2017} mi devo calcolare tutti i precedenti.

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\rightsquigarrow$ succ. per ricorrenza di ORDINE 1 (dipende dal termine precedente) AUTONOMA (la regola di passaggio è la stessa per ogni n)

$x_{n+1} = f(x_n, n)$ $\rightsquigarrow$ ORDINE 1 NON AUTONOMA

(Esempio : $x_{n+1} = 2x_n + n$)

colpevole del non autonoma

$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n, n)$ $\rightsquigarrow$ ORDINE 2 (dipendenza dai 2 termini precedenti)

L'ordine k si definisce analogamente.

<u>Esempio celeberrimo</u> Fibonacci $\qquad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

<u>Oss.</u> Se l'ordine è k, devo dare k valori iniziali.

Domande: → trovare una formula esplicita
→ capire il limite della successione senza avere la formula esplicita.

Caso banale (ordine 1, autonomo, lineare, omogeneo)

$$x_{n+1} = a\, x_n$$

x_0, $x_1 = a x_0$, $x_2 = a^2 x_0$, ... $\qquad x_n = a^n x_0$

(si dimostra per induzione)

Secondo caso (come sopra, ma non omogeneo)

$$x_{n+1} = a x_n + b$$

x_0, $x_1 = a x_0 + b$, $x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

$x_4 = \ \dots = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b$

$= a^4 x_0 + b\,(a^3 + a^2 + a + 1)$

Congettura: $\boxed{x_n = a^n x_0 + \boxed{\dfrac{a^n - 1}{a-1}}\, b}$ se $a \neq 1$

somma parziale della geom. di ragione a

Se invece $a = 1$ $\qquad \boxed{x_n = x_0 + n b}$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Bovina verifica per induzione

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Pongo $y_n = x_n - \ell$, dove ℓ è un numero da scegliere

Cosa risolve y_n?

$$y_{n+1} \underset{\text{def.}}{=} x_{n+1} - \ell \underset{\text{ric.}}{=} a x_n + b - \ell \underset{\text{def}}{=} a(y_n + \ell) + b - \ell = a y_n + a\ell + b - \ell$$

Scelgo ℓ in modo da annullare il termine noto

$$a\ell + b - \ell = 0 \ ; \quad \ell(a-1) = -b \ , \quad \ell = \frac{-b}{a-1}$$

Ottengo $y_{n+1} = a y_n \rightsquigarrow y_n = a^n y_0$. Concludo

$$x_n = y_n + \ell = a^n y_0 + \ell = a^n y_0 - \frac{b}{a-1}$$

$$= a^n (x_0 - \ell) - \frac{b}{a-1}$$

$$= a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$$

$$= a^n x_0 + \frac{b}{a-1}(a^n - 1)$$

☺.

$\boxed{\text{DIM 3}}$ Voglio risolvere $x_{n+1} = a x_n + b$

Siano y_n e z_n due successioni tali che
$$y_{n+1} = a y_n$$
$$z_{n+1} = a z_n + b$$

Allora la somma $x_n := y_n + z_n$ risolve la ricorrenza data.
Viceversa, la differenza tra due sol. della ric. data risolve la ricorrenza omogenea associata. Quindi

$$\boxed{\text{sol. ric. data} = \text{sol. gen. ric. omog} + \text{sol. part. ric. data}}$$

Sol. gen. equ. omogenea $\quad c \cdot a^n$

Sol. speciale la cerco del tipo costante, cioè $x_n \equiv \ell$.
Sostituisco

$$x_{n+1} = a x_n + b$$
$$\ell = a\ell + b \rightsquigarrow \ell = \frac{b}{1-a}$$

Quindi

$$\text{sol. gen.} = c \cdot a^n + \frac{b}{1-a} = x_n$$

Per calcolare c impongo $x_0 = c \cdot a^0 + \frac{b}{1-a}$ e trovo

$c = x_0 - \frac{b}{1-a}$ da cui

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a} = \text{solita formula.}$$

—o—o—

Ricorrenze lineari omogenee di ordine 2

$$\boxed{x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n}$$

a, b numeri dati
x_0, x_1 " "

Considero il polinomio associato $x^2 = ax + b$
$x^2 - ax - b = 0$

Supponiamo che abbia 2 radici λ, μ reali distinte.
Allora la formula esplicita è

$$\boxed{x_n = c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n}$$

dove c_1 e c_2 si determinano sulla base di x_0 e x_1

Se le radici sono complesse coniugate, la formula è la stessa, solo con le potenze dei numeri complessi.
Volendo non usare i complessi scrivo λ e μ come $\alpha \pm i\beta$, ossia come

$$\rho e^{\pm i\theta}$$

$$x_n = c_1 (\rho e^{i\theta})^n + c_2 (\rho e^{-i\theta})^n$$

$$= c_1 \rho^n e^{in\theta} + c_2 \rho^n e^{-in\theta} = c_1 \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$
$$+ c_2 \rho^n (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))$$

e ottengo, cambiando c_1 e c_2,

$$\boxed{x_n = c_1 \rho^n \cos(n\theta) + c_2 \rho^n \sin(n\theta)}$$

Se l'eq. associata ha 2 radici reali λ coincidenti, allora

$$\boxed{x_n = c_1 \lambda^n + c_2 n \lambda^n}$$

Perché funzionano queste formule?

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ $x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$. Cerco una soluz. del tipo

$$x_n = R^n$$

Sostituisco: $R^{n+2} = a R^{n+1} + b R^n$ semplifico

$$R^2 = a R + b$$

Quindi se R è sol. dell' eq. $x^2 - ax - b = 0$, allora R^n è una soluzione della ricorrenza.

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Se λ e μ sono reali distinti, allora λ^n e μ^n sono 2 soluzioni della ricorrenza. Poiché la ricorr. è lineare e omogenea, ogni loro comb. lin. è ancora soluzione

$$c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n$$

è soluzione

$\boxed{\text{Oss. 3}}$ Per dim. che non ce ne sono altre basta che mostro che posso soddisfare le cond. iniziali:

$$c_1 \lambda^0 + c_2 \mu^0 = x_0 \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

$$c_1 \lambda^1 + c_2 \mu^1 = x_1$$

Det matrice dei coeff $= \mu - \lambda \neq 0 \rightsquigarrow$ sol. unica

$\boxed{\text{Oss. 4}}$ Nel caso in cui λ ha molt. 2 si verifica come sopra che λ^n è una sol.
Si verifica poi che

$\rightarrow$ $n\lambda^n$ è soluz. [$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$

$$(n+2)\lambda^{n+2} = a(n+1)\lambda^{n+1} + b n \cancel{\lambda^n}$$

$$n\lambda^2 + 2\lambda^2 = an\lambda + a\lambda + bn$$

$$n \underbrace{(\lambda^2 - a\lambda - b)}_{\substack{\shortparallel \\ \lambda \text{ è soluz.} \\ \shortparallel \\ 0}} + \lambda \underbrace{(2\lambda - a)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ (\text{derivata})}} = 0 \quad]$$

$\rightarrow$ posso trovare c_1 e c_2 per sistemare le cond. iniz.
(sistema lineare triangolare).

— o — o —