MATRICI = tabelle rettangolari di numeri

righe colonne

$A \in M^{m \times n}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M^{2,3}$ $(7) \in M^{1,1}$

Operazioni tra matrici

1. Somma : elemento per elemento tra matrici della stessa dimensione
2. Prodotto matrice × numero : moltiplico tutto per il numero

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$5B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

3. Trasposta : scambio righe con colonne

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ Se $A \in M^{m \times n}$, allora $A^t \in M^{n \times m}$

uguali

4. Prodotto tra 2 matrici Se $A \in M^{m,n}$ e $B \in M^{n,\ell}$, allora $AB \in M^{m,\ell}$

ed è definita dalla relazione

$$\underbrace{(AB)_{i,j}}_{\text{elemento della matrice } AB \text{ nella riga } i \text{ e colonna } j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}}_{\text{Brutalmente è il prod. scalare tra la } i\text{-esima riga di } A \text{ e la } j\text{-esima colonna di } B}$$

Esempio 1 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \qquad AB \in M_{2\times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

"Brutta" notizia : in generale $AB \neq BA$

Esempio 2 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{2\times 2} \quad C \in M_{2\times 3}$

$$AC = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

si può fare e diventa 2×3

$CA =$ non si può fare perché le dimensioni non sono compatibili

Esempio 3 $\quad A = \underbrace{(1, 0, 2)}_{\text{vettore riga}} \qquad B = (-1, 1, 4)$

$$AB^t = (1 \;\; 0 \;\; 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (7)$$

$$A^t B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}(-1 \;\; 1 \;\; 4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$3\times 1 \quad 1\times 3$

Quando si può fare AB e BA? $\quad A \in M_{m\times n} \quad B \in M_{\ell\times k}$

Per fare AB serve $n = \ell$

Per fare BA serve $k = m$

Matrice Identica È una matrice quadrata che ha 1 sulla diag. principale e 0 altrove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si indica con I. La proprietà è che

$$IA = AI = A \quad \text{per ogni } A \in \underbrace{M_{n\times n}}_{\text{quadrata}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ Idem dall'altra parte

Dimostrazione $$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

Ora supponiamo $A \in M_{n\times n}$ e B = Identità $n\times n$

$$B_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

Nella sommatoria di sopra l'unico elemento che si salva è quello con $k=j$, quindi $(AB)_{i,j} = A_{i,j}$

Stesso discorso quando l'identità è A.

—o—o—

Proprietà Sia $A \in M_{m\times n}$ e sia $B \in M_{n\times k}$, quindi AB si può fare.

Allora

$$\boxed{(AB)^t = B^t \cdot A^t}$$ $B^t \in M_{k\times n}$ $A^t \in M_{n\times m}$

La trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte, ma con ordine invertito

[Si dimostra con la solita formula]

Back to sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$$

In generale un sistema lineare si scrive nella forma

$$\boxed{Ax = b}$$

numero col. = numero incognite

dove • A è una matrice $m \times n$

numero righe = numero equ.

• x è un vettore con n componenti, cioè le incognite
• b è un vettore con m componenti, cioè i termini noti.

Cosa vorrebbe fare uno? $Ax = b$. Uno vorrebbe una matrice A^{-1} tale che $A^{-1}A = Id$. In questo modo

$$\underbrace{\underbrace{A^{-1}A}_{Id}\, x}_{x} = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Quello che uno un giorno vorrà fare è trovare l'inversa della matrice A e poi moltiplicarla per b.

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Cerco una matrice B t.c. $AB = Id$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$$

Se voglio l'Id devo imporre

$$\begin{cases} 2a + 3c = 1 & 2\cdot 3^a - 1^a \rightsquigarrow c=-1 \overset{3^a}{\rightsquigarrow} a=2 \\ 2b + 3d = 0 & \\ a + 2c = 0 & 2^a - 2\cdot 4^a \rightsquigarrow -d=-2 \rightsquigarrow d=2 \\ b + 2d = 1 & \rightsquigarrow b=-3 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifica : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:)

Allo stesso modo si verifica che anche $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

— o — o —