$\boxed{\text{Liminf e Limsup di funzioni}}$ L'idea è sempre la stessa

$$\limsup_{x\to+\infty} \sin x = +1 \qquad \liminf_{x\to+\infty} \sin x = -1$$

Vediamo la definizione in qualche caso.

$\boxed{x\to+\infty}$ Supponiamo per semplicità $f : \underbrace{[a,+\infty)}_{\text{definita su una semiretta}} \to \mathbb{R}$

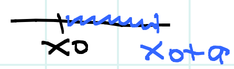
Allora per ogni $x \geq a$ possiamo definire

$$S(x) = \sup\{f(t) : t \geq x\} \qquad I(x) = \inf\{f(t) : t \geq x\}$$

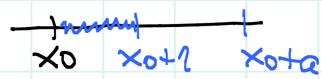
Allora
$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} S(x)$$
$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} I(x)$$
esistono perché $S(x)$ è deb. decr. e $I(x)$ è deb. cresc.

Ovviamente dovrei prima distinguere i casi in cui $S(x) = +\infty$ per infiniti x oppure $I(x) = -\infty$ per ∞ x.

$\boxed{x\to x_0^+}$ Supponiamo $f : (x_0, x_0+a) \to \mathbb{R}$ con $a > 0$



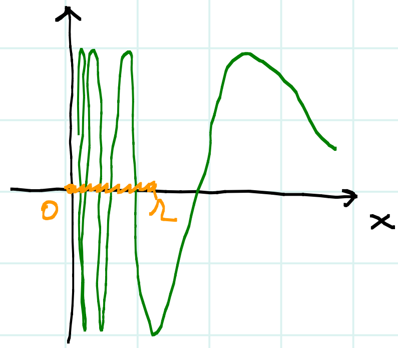
Ora per ogni $r \in (0,a)$ definisco



$$S(r) = \sup\{f(x) : x \in (x_0, x_0+r)\}$$
$$I(r) = \inf\{f(x) : x \in (x_0, x_0+r)\}$$

Poi faccio il limite di $S(r)$ ed $I(r)$ per $r \to 0^+$.

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $\quad x \to 0^+$



Per ogni $r > 0$ avremo che $S(r) = 1$ e $I(r) = -1$

quindi

$$\limsup_{x \to 0^+} \sin\frac{1}{x} = 1 \qquad \liminf_{x \to 0^+} \sin\frac{1}{x} = -1$$

Anche qui potrei definire Max lim e min lim andando a vedere tutte le possibili successioni che hanno limite, e vale la solita caratterizzazione.

Nell'esempio vorrebbe dire che (guardando $\limsup_{x \to 0^{+}} \sin\frac{1}{x} = 1$)

① per ogni succ. $x_n \to 0^+$ succede che, se $\sin\frac{1}{x_n} \to \ell$, allora $\ell \leq 1$.

② esiste succ. $x_n \to 0^+$ tale che $\sin\frac{1}{x_n} \to 1$

Ad esempio posso fare in modo che $\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

Quindi ancora una volta la strategia per dim. un limsup è

→ disuguaglianza dall'alto

→ successione dal basso

<u>Esempio 2</u> $\quad f(x) = \cos x \cdot \sin\frac{1}{x} \qquad x \to 0^+$

<u>Brutale</u>: $\cos x \to 1$, $\sin\frac{1}{x}$ oscilla fra -1 e 1, quindi

$$\limsup_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \liminf_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

$\boxed{\text{Dim. del limsup}}$

→ Disug. dall'alto $\qquad \cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \underset{\downarrow 1}{\boxed{\cos x}}$

$\leadsto \limsup f(x) \leq 1$

→ Succ. dal basso Devo trovare $x_n \to 0^+$ t.c. $f(x_n) \to 1$

[questo ci dirà che $\limsup_{x \to 0^+} f(x) = \max \lim_{x \to 0^+} f(x) \geq 1$]

È utile che il $\sin \frac{1}{x}$ tenda a 1, quindi come prima $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

E se fosse per $x \to +\infty$?

$$\underbrace{\cos x}_{\text{oscilla tra } -1 \text{ e } 1} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\to 0}$$

In questo caso esiste il limite e fa 0. Rigorosamente si dimostra con i carabinieri a partire da

$$-\sin \frac{1}{x} \leq \cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \sin \frac{1}{x}$$

Esempio 3 $\quad f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$

$\boxed{x \to 0}$ Esiste il limite e fa 1 (quindi liminf = limsup = 1)

$\boxed{x \to +\infty}$ Se fosse $f(x) = \sin^3 x$ avremmo limsup = 1
liminf = −1

Se fosse $f(x) = \cos^3 x$ avremmo lo stesso

Quando li metto insieme non posso fare la somma.
Osservo però che $\sin^3 x + \cos^3 x$ è una funzione 2π-periodica, quindi in $[0, 2\pi]$ avrà un max M e un minimo $-M$
(è anche una funzione dispari)

A questo p.to $\limsup_{x\to+\infty} \sin^3 x + \cos^3 x = M$

$\liminf_{x\to+\infty}$ " $= -M$

Come trovo M ? Studio la funzione

Esempio 4 $\quad f(x) = \cos x + \cos^2 \frac{1}{x}$

$\boxed{x \to +\infty}$ $\quad \liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \limsup_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Stime dall'alto e dal basso

$$\underbrace{\boxed{-1+\cos^2\frac{1}{x}}}_{\to 0} \le \cos x + \cos^2\frac{1}{x} \le \underbrace{\boxed{1+\cos^2\frac{1}{x}}}_{\to 2}$$

(liminf ≥ 0) $\qquad$ (limsup ≤ 2)

Succ. per il limsup : serve $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to 2$

dove faccio il lim. $\qquad$ presunto limsup

Basta prendere $\quad x_n = 2\pi n$

Succ. per il liminf : serve $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to 0$

Basta prendere $\quad x_n = 2\pi n + \pi$

$\boxed{x \to 0}$ $\qquad f(x) = \underbrace{\cos x}_{\to 1} + \underbrace{\cos^2\frac{1}{x}}_{\text{oscilla tra 0 e 1}}$

$\liminf_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad \limsup_{x\to 0} f(x) = 2$

Disuguaglianze $\quad \boxed{\cos x} \leq \cos x + \cos^2 \frac{1}{x} \leq \boxed{\cos x + 1}$

$\cos x \to 1$ (liminf ≥ 1) $\qquad \cos x + 1 \to 2$ (limsup ≤ 2)

Succ. per limsup $\quad$ Serve $x_n \to 0$ $\quad$ tale che $f(x_n) \to 2$

Basta prendere $\quad x_n = \frac{1}{n\pi}$ $\quad$ così $\cos^2 \frac{1}{x} = \cos^2(n\pi) = 1$

Succ. per liminf $\quad$ Serve $x_n \to 0$ $\quad$ t.c. $f(x_n) \to 1$

Basta prendere $\quad x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ $\quad$ così $\cos^2 \frac{1}{x} = 0$

oppure $\quad x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$