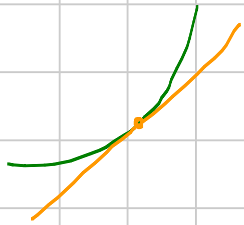
DISUGUAGLIANZE DI CONVESSITÀ

→ le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti

→ JENSEN



① Funzioni convesse e retta tangente

<u>Caso classico</u> supponiamo che f'' esista. Allora

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{eq. retta tg. al grafico in } x_0} \qquad \forall x \in C \qquad \forall x_0 \in \operatorname{Int}(C)$$

Dim Pongo $x - x_0 = h$, da cui $x = x_0 + h$. Allora

$$f(x) = f(x_0+h) \underset{\substack{\text{Taylor} \\ \text{Lagrange}}}{=} f(x_0) + f'(x_0)h + \overbrace{\frac{1}{2} f''(c)h^2}^{\geq 0}$$

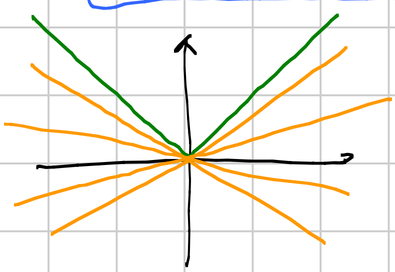
c tra x_0 e x_0+h

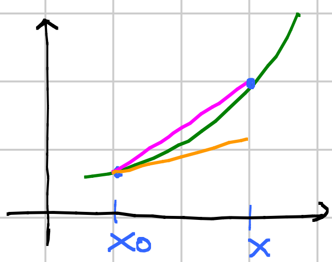
$$\geq f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

<u>Caso generale</u> Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa, sia $x_0 \in \operatorname{Int}(C)$.

Allora per ogni $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ vale

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) \qquad \forall x \in C.}$$

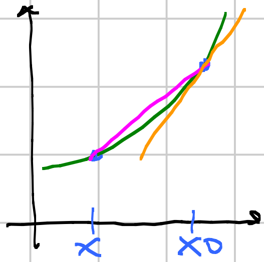




$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $x > x_0$, allora

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = r(x_0,x) \geq f'_+(x_0) \geq m$$

Moltiplico per $(x-x_0)$ (posso perché ...) ottengo la tesi



Se $x < x_0$, allora

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq f'_-(x_0) \leq m$$

Moltiplicando per (x_0-x) (posso perché ...) ottengo

$$f(x_0) - f(x) \leq m(x_0 - x), \text{ da cui}$$

$$f(x_0) - m(x_0-x) \leq f(x)$$
$$f(x_0) + m(x-x_0) \leq f(x) \quad \text{che è quello che volevo.}$$

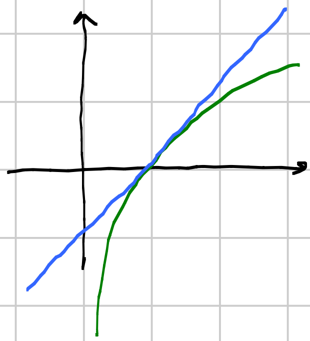
— o — o —

<u>Esempi classici</u>

(1) e^x, $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ $e^x \geq \underbrace{1}_{f(x_0)} + \underbrace{x}_{f'(x_0)(x-x_0)}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\log x$ è concava in $(0,+\infty)$, quindi sta sotto le rette tang.

$x_0 = 1$: $\quad f(x) \leq \underbrace{f(x_0)}_{0} + \underbrace{f'(x_0)}_{1}(x-x_0)$



$$\log x \leq x - 1 \qquad \forall x > 0$$

Con cambio di variabile diventa

$$\log(1+x) \leq x \qquad \forall x > -1$$

③ $f(x) = x^\alpha$ è convessa in $x \geq 0$ se $\alpha \geq 1$ (α reale)
(basta pensare che $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$)

Prendendo $x_0 = 1$ otteniamo $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & \geq & f(x_0) & + & f'(x_0) & (x-x_0) \\ \| & & \| & & \| & \\ x^\alpha & \geq & 1 & + & \alpha & (x-1) \end{array}$$

cioè $\quad x^\alpha \geq 1 + \alpha(x-1) \quad \forall x \geq 0.$

Facendo il cambio di variabili $x-1=y$ otteniamo

$$\boxed{(1+y)^\alpha \geq 1+\alpha y \qquad \forall y \geq -1}$$

Bernoulli con α reale (serve ≥ 1)

—o—o—

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa, sia $n \geq 2$ intero
Siano $x_1, \dots, x_n$ elementi di C
Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri reali ≥ 0 tali che $\boxed{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1}$
Allora

$$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}_{\text{comb. convessa di } x_1, \dots, x_n} \in C$$

e vale

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Mostriamo che $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C$.
Sia M il max e sia m il min di $x_1, \dots, x_n$. Allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \leq \lambda_1 M + \dots + \lambda_n M = M(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = M$$
$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geq \dots \qquad = m$$

Per convessità di C concludo perché $[m, M] \subseteq C$.

$\boxed{\text{Dim 1 di Jensen}}$ Induzione su n.

$\boxed{\text{Passo base } n=2}$ È la def. di funzione convessa

$$f(\lambda_1 x_1 + \underbrace{\lambda_2}_{(1-\lambda_1)} x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \underbrace{\lambda_2}_{(1-\lambda_1)} f(x_2)$$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Abbiamo $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$

Almeno un coeff. è diverso da 1, diciamo $\lambda_{n+1} \neq 1$ (<1)

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) =$$

$$= f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \underbrace{\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}}_{y}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{def. di } f \\ \text{convessa}}}{\leq} \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\Bigg(\overbrace{\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n}}^{y}\Bigg)$$

comb. convessa di $x_1, \dots, x_n$ in quanto la somma dei coeff. fa 1:

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

$$\underset{\substack{\text{ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{\leq} \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \cancel{(1-\lambda_{n+1})} \left\{ \frac{\lambda_1}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}} f(x_n) \right\}$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim 2 di Jensen}}$ Dati $x_1, \dots, x_n$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Pongo $x_0 := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Prendo $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Per la proprietà delle rette tangenti vale

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \qquad \forall x \in C$$

Ma allora

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)}_{\text{RHS di Jensen}} \underset{\text{uso che } \lambda_k \geq 0}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k f(x_0) + m \lambda_k (x_k - x_0) \right)$$

$$= f(x_0) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}_{=1} + m \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - m x_0 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}_{=1}$$

$$f(x_0) \quad + \quad m x_0 \quad - \quad m(x_0)$$

$$= f(x_0) = \underbrace{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k)}_{\text{LHS di Jensen.}}$$

— o — o —

Caso speciale Se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ otteniamo

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}}$$

Esercizio Provare a dimostrarla per induzione su n e vedere che succede.

Oss. Per le funzioni concave vale tutto al contrario.

$\boxed{\text{Disuguaglianza di YOUNG a 2}}$

$$ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \rightsquigarrow \text{precorso}$$

$$\boxed{ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad \forall a \ge 0 \ \forall b \ge 0 \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ $f(x) = \log x$ è concava in $(0, +\infty)$, quindi

$$\log(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 \log x_1 + \lambda_2 \log x_2$$

La applico con $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ (so che $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ☺)

$x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$

Ottengo

$$\cancel{\log}\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \ge \frac{1}{\cancel{p}} \log a^{\cancel{p}} + \frac{1}{\cancel{q}} \log b^{\cancel{q}}$$

$$= \log a + \log b = \cancel{\log}(ab)$$

Essendo $\log x$ monotona posso semplificare il log.

<u>Esercizio</u> (YOUNG a 3)

$$abc \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q + \frac{1}{r}c^r$$ se $a, b, c \ge 0$ e

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1$$