ANALISI 1 — LEZIONE 118

Note Title 02/05/2017

Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz rivisitata

Siano $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ due vettori di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\boxed{|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}} \quad \text{(C.S.)}$$

Talvolta si scrive anche elevando al quadrato

$$\boxed{(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)}$$

Indicando con A e B i due vettori, la disug. diventa

$$|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \|A\| = \langle A, A \rangle^{1/2}$$

Dim. stile algebra lineare Per ogni $t \in \mathbb{R}$ considero

$$p(t) = \|A + tB\|^2 = t^2 \|B\|^2 + 2t \langle A, B \rangle + \|A\|^2 \geq 0$$

Essendo sempre ≥ 0, il Δ deve essere ≤ 0!

aggiunti dopo video

$$\langle A, B \rangle^2 - \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \leq 0, \quad \text{cioè} \quad \langle A, B \rangle^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.$$

— o — o —

Dim via convessità Passi fondamentali.

Step 1 Se $\|A\| = 0$ oppure $\|B\| = 0$, allora è banale

Step 2 La disuguaglianza è OMOGENEA. Se moltiplico le componenti di A per λ e quelle di B per μ, ottengo una nuova disug. che vale $\Longleftrightarrow$ vale quella prec. (cioè λ e μ si semplificano)

Conseguenza: posso supporre WLOG che $\|A\| = \|B\| = 1$, cioè

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1 \qquad e \qquad b_1^2 + \dots + b_n^2 = 1.$$

(altrimenti considero i nuovi vettori $\frac{A}{\|A\|}$ e $\frac{B}{\|B\|}$)

Step 3 Conclusione. Uso $\boxed{xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}$

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \dots + \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}b_n^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(a_1^2 + \dots + a_n^2)}_{1} + \frac{1}{2}\underbrace{(b_1^2 + \dots + b_n^2)}_{1}$$

$$= 1 = (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

Se ho il val. assoluto al LHS uso la triangolare

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq |a_1b_1| + \dots + |a_nb_n|$$
$$= |a_1| \cdot |b_1| + \dots + |a_n| \cdot |b_n|$$
$$\leq \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \dots \quad \text{come prima.}$$

— o — o —

DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER A 2 (C.S. con esponenti diversi)

Siano $(a_1, \dots, a_n)$ e $(b_1, \dots, b_n)$ vettori con componenti ≥ 0.
Siano p e q esponenti > 1 tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Allora vale

$$\boxed{a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

Dim Come prima è banale se $\|A\| = 0$ oppure $\|B\| = 0$.
Altrimenti posso sempre supporre che

$$a_1^p + \dots + a_n^p = b_1^q + \dots + b_n^q = 1.$$

In questo caso uso la disug. di YOUNG $\boxed{xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q}$ e ottengo

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \le \frac{1}{p}a_1^p + \frac{1}{q}b_1^q + \dots + \frac{1}{p}a_n^p + \frac{1}{q}b_n^q$$

$$= \frac{1}{p}(a_1^p + \dots + a_n^p) + \frac{1}{q}(b_1^q + \dots + b_n^q)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

— o — o —

Analogamente si può fare una Hölder a più specie, ad esempio 3

$$\boxed{a_1b_1c_1 + \dots + a_nb_nc_n \le (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}(c_1^r + \dots + c_n^r)^{\frac{1}{r}}}$$

purché a_i, b_i, c_i sono ≥ 0 e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$\boxed{\text{Dim}}$ Omogenea + YOUNG a 3 $\quad xyz \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q + \frac{1}{r}z^r$

— o — o —

Altra variante

$$\left[(a_1b_1)^r + \dots + (a_nb_n)^r\right]^{\frac{1}{r}} \le (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

è vera se $a_i \ge 0$, $b_i \ge 0$ $\quad \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}}$

$\boxed{\text{Dim}}$ Volendo si usa la solita strategia partendo da una Young opportuna
In alternativa cambio variabili ponendo

$$A_i = a_i^r \qquad B_i = b_i^r \qquad \text{e} \qquad \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1 \qquad \left(\frac{r}{p} = \frac{1}{p_1}\right)$$

Scrivo la Hölder a 2 con esponenti p_1 e q_1.

Disuguaglianza tra le medie p-esime

Dati $a_1, \dots, a_n$ numeri reali POSITIVI, si pone

$$\boxed{M_p(a_1, \dots, a_n) := \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Casi speciali: $\boxed{p=1}$ Media aritmetica

$\boxed{p=2}$ Media quadratica

$\boxed{p=-1}$ Media armonica

$\boxed{p=0}$ Media geometrica $:= (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$

Teorema Dati $(a_1, \dots, a_n)$, la funzione $p \to M_p(a_1, \dots, a_n)$ è crescente (strettamente se gli a_i non sono tutti uguali).

Inoltre

$$\lim_{p \to +\infty} M_p = \max\{a_1, \dots, a_n\} \qquad \lim_{p \to -\infty} M_p = \min\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\lim_{p \to 0} M_p = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$ Corretto dopo video

Dim. I limiti a $\pm\infty$ sono un esercizio (farlo!)

Il limite per $p \to 0$ è un esercizio sui limiti notevoli che parte con

$$a_i^p = e^{p \log a_i} = 1 + p \log a_i + o(p)$$ (ascoltare AUDIO)

Monotonia Basta dimostrare 2 casi (convincersene)

Caso 1 geometrica $\leq$ aritmetica

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

Facciamo log a dx e sx (possiamo perché ...)

$$\frac{1}{n}(\log a_1 + \ldots + \log a_n) \le \log\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)$$

$$\underbrace{\frac{f(a_1) + \ldots + f(a_n)}{n} \le f\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)}_{\text{Jensen per la funzione concava } \log x = f(x)} \quad \text{con } f(x) = \log x$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ aritmetica $\le M_p$ con $p > 1$, cioè

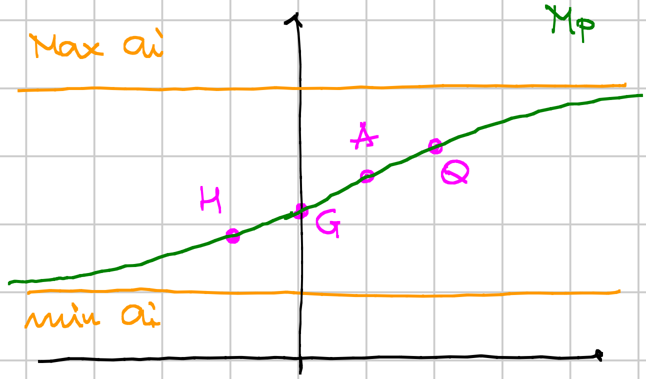
$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \le \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$ elevo alla p e ottengo

$$\underbrace{\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^p \le \frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}}$$

Jensen dalla parte giusta per la funzione $f(x) = x^p$ che è convessa per $p > 1$ (anche per $p = 1$)

— o — o —

Perché sono bastati 2 casi?



- $M_{-1} \le M_0$
  (basta osservare che

$$M_{-1}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{M_1\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)}$$

$$M_0(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{M_0\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)}$$ (basta passare ai reciproci)

- $M_p \ge M_0$ per ogni $p > 0$ (cambio variabili $a_1^p, \ldots, a_n^p$)

- Stessa cosa per fare $M_p \le M_q$ se $p < q$ e diventa $M_1 \le M_{\frac{q}{p}}$