ANALISI 1 - LEZIONE 010

Note Title 05/10/2024

FUNZIONI REALI $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o più in generale $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Grafico}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}}$$

Proprietà di simmetria

Def. Una $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

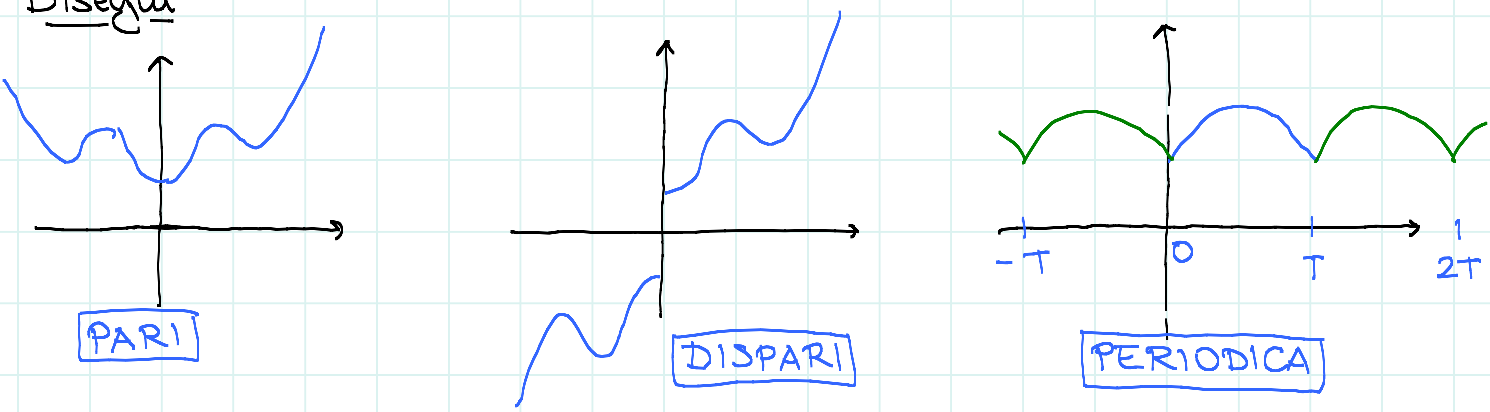
- **PARI** se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

  (grafico simmetrico risp. asse y)
- **DISPARI** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

  (grafico simmetrico risp. all'origine)
- **PERIODICA** se esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

  (il tratto di grafico tra 0 e T si ripete poi in $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, e così via e stessa cosa sui negativi)

Disegni



Conseguenze

→ se f è pari o dispari, basta conoscere il grafico per $x \geq 0$ e automaticamente lo conosco sempre

→ se f è periodica, basta sapere il grafico in un interv. lungo T.

Proprietà di MONOTONIA

<u>Def</u> Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

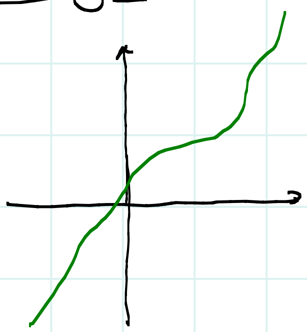
- <u>strett. crescente</u> se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- <u>debolm. crescente</u> se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
- <u>strett. decrescente</u> se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
- <u>debolm. decrescente</u> se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

In tutti i 4 casi f si dice MONOTONA (strett. monotona)

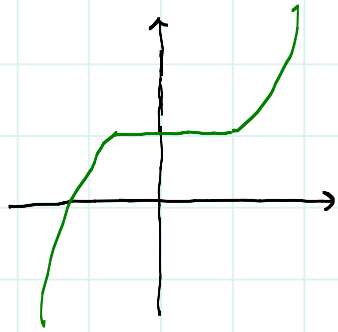
<u>Achtung!</u> ① Mai usare le parole crescente o decrescente senza precisare ~~debolmente~~ debolmente o strettamente

② Strett. crescente $\Rightarrow$ debolmente crescente

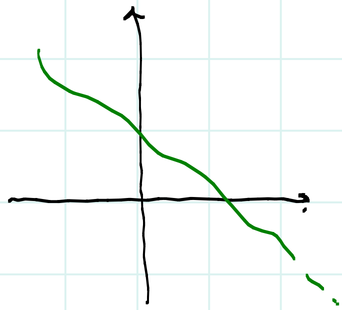
<u>Disegni</u>



strett. cresc.
debolm. cresc.



debolm. cresc.
NO strett. cresc.



strett. decresc.
debolm. decresc.

MONOTONIA VS INIETTIVITÀ

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se f è strett. crescente, allora di sicuro f è iniettiva

[Dim.: siano $a_1 \neq a_2$ in partenza
WLOG (without loss of generality) $a_1 < a_2$
Per la stretta crescenza $f(a_1) < f(a_2)$
Quindi $f(a_1) \neq f(a_2)$]

Stessa cosa, con dim. analoga, se f è strett. decrescente

STRETTA MONOTONIA $\Rightarrow$ INIETTIVITÀ

SIMMETRIE VS INIETTIVITÀ

- Se f è pari, di sicuro non è iniettiva ($f(7) = f(-7)$)
- Se f è periodica, di sicuro non è iniettiva

In entrambi i casi di sicuro f non è strett. monotona (se lo fosse, sarebbe iniettiva)

- Le f dispari possono essere iniettive oppure no.

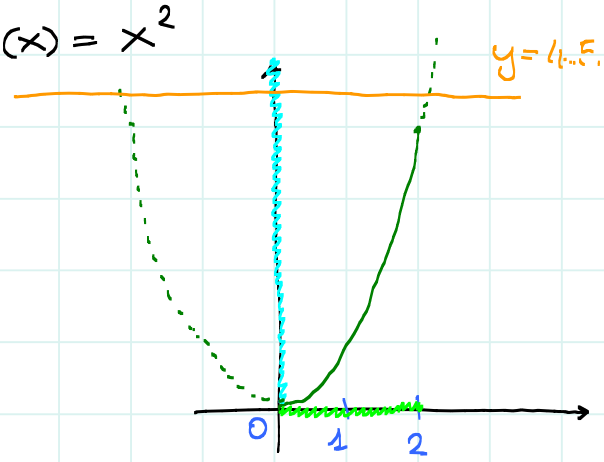
INIETTIVITÀ E SURGETTIVITÀ VS GRAFICO

Sia $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.}$

1. f è iniettiva se ogni retta $y = \lambda$ (parallela all'asse x) incontra il grafico al massimo una volta
2. f è surgettiva se .... almeno una volta.
3. f è bigettiva .... esattamente una volta

Più in generale, se consideriamo $f : A \to B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ allora dobbiamo considerare solo rette $y = \lambda$ con $\lambda \in B$ e prendere solo le intersezioni con $x \in A$.

Esempio $f : \underset{A}{[0,2]} \to \underset{B}{[0,5]}$ con $f(x) = x^2$



→ Non è vero che ogni retta $y = \lambda$ con $\lambda \in [0,5]$ interseca il grafico (le rette con $\lambda \in (4,5]$ non intersecano) ⇝ NO SURG.

→ È vero che ogni retta con $\lambda \in [0,5]$ interseca al max una volta (le intersezioni buone sono quelle con $x \in [0,2]$)

$\boxed{\text{GRANDI TENTAZIONI}}$

Equazioni $\quad \cancel{f}(2x+1) = \cancel{f}(3x+4) \rightsquigarrow 2x+1 = 3x+4 \rightsquigarrow x=-3$

Posso "eliminare la f" se so che $\boxed{f \text{ è INIETTIVA}}$

Disequazioni $\quad f(2x+1) > f(3x+4) \rightsquigarrow 2x+1 > 3x+4 \rightsquigarrow x < -3$

Questo si può fare se so che $\boxed{f \text{ è STRETT. CRESCENTE}}$

Se so che f è strett. decrescente, posso eliminare f, ma devo "girare il verso della disequazione".

— o — o —