ANALISI 1 — LEZIONE 006

Note Title 28/09/2024

Esempio 1 Per quali $n \in \mathbb{N}$ vale che $5^n \geq 3^n + 4^n$

Esplorazione.
$n=0$ $1 \geq 2$ NO
$n=1$ $5 \geq 3+4$ NO
$n=2$ $25 \geq 9+16$ Ok
$n=3$ $125 \geq 27+64$ Ok

Idea è che vale per ogni $n \geq 2$

Passo base $n=2$ appena fatto

Passo induttivo Ipotesi: $5^n \geq 3^n + 4^n$
Tesi: $5^{n+1} \geq 3^{n+1} + 4^{n+1}$

Impostiamo la catena:

$$5^{n+1} \underset{\text{precorso}}{=} 5 \cdot 5^n \underset{\substack{\text{ipotesi}\\ \text{per } 5}}{\geq} 5(3^n + 4^n) \underset{\text{precorso}}{=} 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n$$

$$\geq 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n \underset{\text{propr. potenze}}{=} 3^{n+1} + 4^{n+1}$$

Esempio 2 Dimostrare che $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$ per ogni intero $n \geq 37$.

$n = 37$ come passo base conduce a numeri enormi.
Idea: non è che la cosa è vera già un po' prima di 37...

$n=1 \rightsquigarrow 2! \geq 2^1 \cdot 1^2$ Ok
$n=2 \rightsquigarrow 4! \geq 2^2 \cdot (2!)^2 \rightsquigarrow 24 \geq 2^2 \cdot 2^2$ Ok
$n=3 \rightsquigarrow 6! \geq 2^3 (3!)^2 \rightsquigarrow 720 \geq 8 \cdot 36$ Ok

Spero di riuscire a dimostrare che è vera per $n \geq 1$ e anzi per $n \geq 0$
e quindi anche per $n \geq 37$.

Passo induttivo Ipotesi: $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$

Tesi: $(2n+2)! \geq 2^{n+1} ((n+1)!)^2$

Impostiamo la catena di disuguaglianze

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$$

solo ultimi 2 fattori

$$\geq (2n+2)(2n+1) \cdot 2^n (n!)^2$$

ipotesi molt. per quello che serve

$$\geq 2^{n+1} ((n+1)!)^2$$

speranza

Controllo la speranza

$$(2n+2)(2n+1) \cdot 2^n \cdot (n!)^2 \overset{?}{\geq} 2^{n+1} ((n+1)!)^2$$

$$(2n+2)(2n+1) \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{(n!)^2} \overset{?}{\geq} 2 \cdot \cancel{2^n} \cdot (n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}$$

$2(n+1)(n+1)$

$$(\cancel{2n+2})(2n+1) \overset{?}{\geq} (\cancel{2n+2})(n+1)$$

$$2n+1 \overset{?}{\geq} n+1$$ e questo è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$

Riassunto: il meccanismo di caduta funziona sempre e per $n=0$ già casca $\rightsquigarrow$ vera per ogni $n \geq 0$.

Esempio 3 Dimostrare che

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 \qquad \forall n \geq 1$$

Passo base $n = 1 \rightsquigarrow 1 < 2$ Ok

Passo induttivo Ipotesi: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

Tesi: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} < 2$

<u>Dim.</u>

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} \overset{\text{isolo } k=m+1}{=} \frac{1}{(m+1)^2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$$

$$\underset{\text{uso ipotesi}}{<} \frac{1}{(m+1)^2} + 2 \underset{\text{speranza}}{\leq} 2$$

[Fatto generale: nella catena $A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_{2024}$, basta che una disug. sia stretta e possiamo concludere che $A_1 < A_{2024}$]

Purtroppo la speranza fallisce miseramente

Bisogna farsi venire un'idea, che in questo caso è dim. che

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{m+1}$$

in apparenza è più difficile da dimostrare perché il RHS è più piccolo

[LHS = left hand side RHS = right hand side]

In realtà

<u>Passo base</u> $m = 1 \rightsquigarrow 1 < 2 - \frac{1}{2}$ Ok!

<u>Passo induttivo</u> Ipotesi: $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{m+1}$

Tesi: $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{m+2}$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(m+1)^2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \qquad \text{(isolo } k=m+1\text{)}$$

$$< \frac{1}{(m+1)^2} + 2 - \frac{1}{m+1} \qquad \text{(uso ipotesi)}$$

$$= 2 + \frac{1-m-1}{(m+1)^2} = 2 - \frac{m}{(m+1)^2} \underset{\text{speranza}}{\leq} 2 - \frac{1}{(m+2)}$$

Controllo la speranza:

$$\cancel{2} - \frac{n}{(n+1)^2} \overset{?}{<} \cancel{2} - \frac{1}{(n+2)} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{n}{(n+1)^2} \overset{\substack{\text{molt. per } -1 \\ \text{e inverto}}}{>} \frac{1}{(n+2)}$$

$$\rightsquigarrow \quad n(n+2) \overset{?}{>} (n+1)^2 \quad \rightsquigarrow \quad n^2+2n > n^2+2n+1$$

C'eravamo quasi, accidenti! Devo spingere ancora di più:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad (< 2)$$

Passo base : $1 \leq 1$ giusto giusto!

Passo induttivo...

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1}$$

Nuova speranza: $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} - \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$n\cancel{(n+1)} \overset{?}{\leq} (n+1)^{\cancel{2}} \qquad n \overset{?}{\leq} n+1 \qquad \text{ok!}$$

— o — o —

Idea per farsi venire in mente la tesi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots$$

$$< 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots$$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{4}\right) + \dots$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n}$$