ANALISI 1 — LEZIONE 108

Note Title 09/05/2025

Achtung! I teoremi algebrici per liminf e limsup non sono così puliti

Esempio classico $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

È chiaro che $\limsup a_n = \limsup b_n = 1$

$\lim (a_n + b_n) = 1$

Quindi il limsup della somma non è la somma dei limsup

Stessa cosa per i liminf.

Si salvano però le disuguaglianze

$$\boxed{\begin{aligned} \limsup_{n \to +\infty} (a_n + b_n) &\leq \limsup_{n \to +\infty} a_n + \limsup_{n \to +\infty} b_n \\ \liminf_{n \to +\infty} (a_n + b_n) &\geq \liminf_{n \to +\infty} a_n + \liminf_{n \to +\infty} b_n \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{MAXLIM}}$ Sia a_n una successione, che può avere o non avere limite. Alcune sottosuccessioni di a_n possono però avere limite. Quanto può valere al massimo il limite di una s.succ. di a_n?

$\boxed{\text{MINLIM}}$ Quanto può valere come minimo il limite di una sottosucc. di a_n?

$\boxed{\text{"Def."}}$ Maxlim e minlim di a_n sono il massimo ed il minimo limite possibili per delle sottosucc. di a_n.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Misterioso)

$$\text{Maxlim}_{n\to+\infty}\ a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{Minlim}_{n\to+\infty}\ a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n$$

Tradotto : sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$ il $\limsup_{n\to+\infty} a_n$. Allora

① Ogni sottosuccessione che ha limite, ha un limite $\leq L$

(teorema delle sottosucc. visto prima)

② Esiste una sottosuccessione che tende esattamente a L.

Idem per il liminf. Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ il liminf di a_n. Allora

① Ogni s.succ. che ha limite, ha limite $\geq \ell$.

② Esiste una s.succ. che tende esattamente a ℓ.

$\boxed{\text{Conseguenza operativa}}$ Come dimostro che $\limsup_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$?

Con questa procedura

① Disuguaglianza dall'alto. Spero di trovare una succ. b_n t.c.

$$\boxed{a_n \leq b_n \text{ definitiv.}} \quad \text{e} \quad \boxed{b_n \to L}$$

[Questo ci dice che $\limsup a_n \leq \limsup b_n = \lim b_n = L$]

② Sottosuccessione dal basso Spero di trovare una s.succ. a_{k_n} t.c.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = L}$$

[Questo ci dice che $\text{Maxlim} \geq L$, ma dal teo. sappiamo che $\limsup = \text{Maxlim}$]

Analogamente, per dimostrare che $\liminf_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ servono due cose

① <u>Disug. dal basso</u> Cerco b_n t.c.

$$\boxed{b_n \leq a_n \text{ definit.}} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = l}$$

② <u>S. succ. dall'alto</u> Cerco a_{k_n} s. succ. t.c.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = l}$$

<u>Esempio 1</u> $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

Osservo che $-1 \leq a_n \leq 1$

quindi

bn dal basso   bn dall'alto

$$\limsup a_n \leq 1 \quad \text{e} \quad \liminf a_n \geq -1$$

Ora mi servono due s. succ. che vadano a $+1$ e -1

Per andare a $+1$ prendo $a_{6n} = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 6n\right) = \cos(2\pi n) \to 1$

Per andare a -1 prendo $a_{6n+3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}(6n+3)\right)$

$$= \cos(2\pi n + \pi) = \cos(\pi) \to -1$$

<u>Esempio 2</u> $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

La successione è sostanzialmente

$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad a_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_6 = 0 \quad a_7 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e così via periodicamente

Quindi $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Una s.succ. che tende a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è a_{6n+1} oppure a_{6n+2}

Una s.succ. che tende a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ è a_{6n+4} oppure a_{6n+5}

Esempio 3 $a_n = \frac{(-1)^n n+3}{8n+(-1)^n}$

Brutale: $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{8}$ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\frac{1}{8}$

Dim. del limsup

Disuguaglianza dall'alto

$$\frac{(-1)^n n+3}{8n+(-1)^n} \leq \boxed{\frac{n+3}{8n-1}} \to \frac{1}{8}$$

(num. + grande denom. + piccolo)

Sottosucc. dal basso

Basta prendere i pari

$$a_{2n} = \frac{2n+3}{16n+1} \to \frac{1}{8}$$

☺

Analogo per il liminf

Esempio 4 $a_n = \frac{(-1)^n n^2 + \sin n}{n+\sqrt{n}}$

Brutale: $\limsup = +\infty$ $\liminf = -\infty$ $a_n \sim (-1)^n n$

Per il limsup basta trovare la s.succ. che tende a $+\infty$
(automaticamente max lim = limsup = $+\infty$) $\rightsquigarrow$ basta a_{2n}

Per il liminf basta una s.succ. che tende a $-\infty$, ad esempio a_{2n+1}

Esempio 5 $\qquad \sqrt{n} \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right) + \alpha \sqrt{n}$

Brutale $\quad$ Il primo termine oscilla tra

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n} \qquad 0 \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n}$$

Se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ allora esiste il limite e fa $-\infty$

Se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ allora esiste il limite e fa $+\infty$

Se $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ allora liminf $= -\infty$ e limsup $= +\infty$

Domanda: cosa succede quando $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

— o — o —