Sistemi di eq. differenziali

Dall'equazione ad un sistema

Esempio $\dddot{u} - 3\ddot{u} + t^2\dot{u}^2 + \sin u = 0$

Pongo $v = \dot{u}$ $w = \ddot{u} = \dot{v}$

Allora l'equazione diventa il sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = w \\ \dot{w} = 3w - t^2v^2 - \sin u \end{cases}$$

$$\dddot{u} = 3\ddot{u} - t^2\dot{u}^2 - \sin u$$

Un'eq. di ordine 3 è diventa un sistema di 3 equ. di ordine 1 (tutto in forma normale)

Strumento di natura teorica: se so risolvere i sistemi di ordine 1, so risolvere le equ. di ordine qualunque.

Dal sistema ad un'equazione

In alcuni casi particolari è possibile trasformare un sistema in una equazione unica di ordine più alto.

Esempio
$$\begin{cases} \dot{u} = 3u + v \\ \dot{v} = 11u + 7v \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriv.} \\ 1^a \\ \text{equ}}}{\ddot{u}} = 3\dot{u} + \dot{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prendo} \\ \dot{v} \text{ dalla } 2^a \\ \text{equ.}}}{=} 3\dot{u} + 11u + 7v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dalla } 1^a \\ v = \dot{u} - 3u}}{=} 3\dot{u} + 11u + 7\dot{u} - 21u$$

$$= 10\dot{u} - 10u$$

Ho ottenuto $\ddot{u} - 10\dot{u} + 10u = 0$ e questa la posso risolvere

Esempio 2 $\quad \dot{u} = 3u + v$

$\qquad\qquad\quad \dot{v} = 2u + 4v$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 1^a \text{ deriv.}}}{\ddot{u}} = 3\dot{u} + \underset{\substack{\uparrow\\ 2^a}}{\dot{v}} = 3\dot{u} + 2u + \underset{\substack{\uparrow\\ v = \dot{u} - 3u}}{4v} = 3\dot{u} + 2u + 4\dot{u} - 12u \underset{\substack{\uparrow\\ \text{conto}}}{=} 7\dot{u} - 10u$$

$$\ddot{u} - 7\dot{u} + 10u = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) = 0$$

$$\boxed{u(t) = ae^{2t} + be^{5t}}$$

A questo punto dalla 1^a

$$v(t) = \dot{u}(t) - 3u(t) = 2ae^{2t} + 5be^{5t} - 3ae^{2t} - 3be^{5t}$$

$$\boxed{v(t) = -ae^{2t} + 2be^{5t}}$$

La soluzione del sistema dipende da 2 costanti arbitrarie a e b.
Il pbm. di Cauchy prevede di assegnare

$u(t_0) = u_0$ $\qquad$ (stesso t_0 sopra e sotto)

$v(t_0) = v_0$

A quel punto trovo a e b.

— o — o —

<u>Interpretazione di algebra lineare</u> Posso pensare che l'incognita sia un vettore

$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Allora posso scrivere il sistema nella forma

$U'(t) = A\,U(t)$ $\quad$ dove $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ora i numeri 2 e 5 sono gli autovalori della matrice (infatti somma = Tr A = 7, prod = Det = 10)

La soluzione si può scrivere come

autov.

$$v(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{5t} \\ -ae^{2t} + 2be^{5t} \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{autovett. di } 2} e^{2t} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{autovett. di } 5} e^{5t}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Delirio futuro Se l'equazione è $\dot{u} = at \rightsquigarrow u(t) = ce^{at}$

Se il sistema è $\dot{v} = Av$ la sol. è $v(t) = \underset{\text{vettore}}{c}\, e^{At}$ matrice

Come si definisce e^M con M matrice quadrata?

Taylor $e^M = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$

Come si calcola: diagonalizzo – faccio l'esponenziale degli el. sulla diagonale – torno indietro.

Un sistema in forma diagonale diventa $\dot{u} = \lambda_1 u$, $\dot{v} = \lambda_2 v$

Questo sistema è "disaccoppiato", cioè sono equazioni indip.

Interpretazione fisica

Ci sono "modi furbi" di mettere le variabili in cui il sistema diventa "più semplice", ad esempio diagonale.

Sistemi di succ. per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$$

a_0 e b_0 dati in partenza

Voglio la formula esplicita. Idea: 2 ricorrenze di ordine 1 $\rightsquigarrow$ 1 ricorrenza di ordine 2

$$a_{n+2} \underset{\uparrow}{=} 3a_{n+1} + b_{n+1} \underset{\uparrow}{=} 3a_{n+1} + 2a_n + 4\underset{\uparrow}{b_n}$$

1ª equ. con indici aumentati di 1

b_{n+1} dalla 2ª

b_n dalla 1ª

$$= 3a_{n+1} + 2a_n + 4a_{n+1} - 12a_n$$

$\rightsquigarrow$ $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$ $\rightsquigarrow$ si chiude.

Esempio 2

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + b_n + n^2 \\ b_{n+1} &= a_n + 3b_n + 3^n \end{aligned}$$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} + (n+1)^2 = 3a_{n+1} + a_n + 3b_n + 3^n + (n+1)^2$$

$$= 3a_{n+1} + a_n + 3a_{n+1} - 9a_n - 3n^2 + 3^n + (n+1)^2$$

$$= 6a_{n+1} - 8a_n + 3^n - 2n^2 + 2n + 1$$

$\rightsquigarrow$ $x^2 = 6x - 8$ $\rightsquigarrow$ $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$

La sol. gen. parte omogenea è $c_1 2^n + c_2 4^n$.

Ora cerco una sol. speciale del tipo $a_n = a3^n + b + cn + dn^2$ e trovo a, b, c, d.

Una volta trovato a_n ottengo b_n dalla 1ª equ.

Esempio 3 Quando le equ. sono 3

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n - c_n$$
$$b_{n+1} = -a_n + 7c_n$$
$$c_{n+1} = a_n + b_n - 3c_n$$

Voglio ottenere una ric. di ordine 3 per a_n

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 2b_{n+2} - c_{n+2} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 14c_{n+1} - a_{n+1} - b_{n+1} + 3c_{n+1}$$

shift di 2 sulla 1ª

shift di 1 su 2ª e 3ª

$$= a_{n+2} - 3a_{n+1} - b_{n+1} + 17c_{n+1}$$
$$= a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n - 7c_n + 17(a_n + b_n - 3c_n)$$

Ad un certo punto bisogna eliminare completamente una variabile.
Nella 1ª e nella 2ª posso eliminare c_n e cercare di ottenere un sistema nelle altre 2 variabili.

Soluzione (dopo video)

$$\boxed{\begin{aligned} b_{n+1} &= -a_n + 7c_n \\ c_{n+1} &= a_n + b_n - 3c_n \end{aligned}}$$

⇝ da queste ricavo c_n in funzione di $a_n, a_{n+1}, b_n, b_{n+1}$
⇝ poi sostituisco nelle prime 2 che diventano 2 equazioni per 2 successioni.

Alternativa standard: triangolarizzo la matrice ☺