ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 52

Note Title 05/12/2023

AFFINITÀ Un'affinità è una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che si scrive nella forma

$$\underbrace{f(x)}_{\text{vettore } n \text{ dim}} = \underbrace{A}_{\text{matrice } n\times n}x + \underbrace{b}_{\text{vettore } n\text{-dim}}$$

ISOMETRIA È un'affinità in cui la matrice A è ortogonale

Teorema di struttura delle isometrie

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$\boxed{\operatorname{dist}(f(x), f(y)) = \operatorname{dist}(x,y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n}$$

funzione che conserva le distanze

Allora per forza $f(x) = Ax + b$ con A matrice ortogonale

Parte facile Se $f(x) = Ax + b$, con A ortogonale, allora f conserva le distanze

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(f(x), f(y))^2 &= \| f(x) - f(y) \|^2 \\
&= \| Ax + b - Ay - b \|^2 \\
&= \| Ax - Ay \|^2 \\
&= \| A(x-y) \|^2 \\
&\overset{?}{=} \| x - y \|^2
\end{aligned}$$

Si tratta di dimostrare che

$$\| Av \|^2 = \| v \|^2 \qquad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n$$

$$\| Av \|^2 = \langle Av, Av \rangle = (Av)^t Av = v^t \underbrace{A^t A}_{Id} v = v^t v = \langle v, v \rangle = \| v \|^2$$

☺

In $\mathbb{R}^2$ un'affinità dipende da 6 parametri

$$f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{b} = \begin{pmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio 1</u> Trovare l'affinità tale che

$f(1,0) = (-1,1)$ $\quad$ $f(1,2) = (1,3)$ $\quad$ $f(0,4) = (2,1)$

$\boxed{\text{BOVINO}}$ Devo trovare a, b, c, d, e, f

$$\begin{cases} a+e = -1 \\ c+f = 1 \end{cases} \quad f(1,0) = (-1,1)$$

$$\begin{cases} a+2b+e = 1 \\ c+2d+f = 3 \end{cases} \quad f(1,2) = (1,3)$$

$$\begin{cases} 4b+e = 2 \\ 4d+f = 1 \end{cases} \quad f(0,4) = (2,1)$$

Risolvo il sistema e trovo i parametri

(osservo che a, c, e compaiono nelle eq. $1, 3, 5$
b, d, f $\quad 2, 4, 6$)

$\boxed{\text{ALTERNATIVA PIÙ ASTUTA}}$

$f(\underbrace{1,0}_{v_1}) = (\underbrace{-1,1}_{w_1})$ $\quad$ $f(\underbrace{1,2}_{v_2}) = (\underbrace{1,3}_{w_2})$ $\quad$ $f(\underbrace{0,4}_{v_3}) = (\underbrace{2,1}_{w_3})$

Noi sappiamo che $f(x) = Ax+b$.

Allora

$$w_1 - w_3 = f(v_1) - f(v_3) = Av_1 + b - Av_3 - b = Av_1 - Av_3 = A(v_1 - v_3)$$

$$w_2 - w_3 = f(v_2) - f(v_3) = Av_2 + b - Av_3 - b = Av_2 - Av_3 = A(v_2 - v_3)$$

In conclusione

$$\left.\begin{aligned} A(v_1 - v_3) = w_1 - w_3 \qquad & A\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A(v_2 - v_3) = w_2 - w_3 \qquad & A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$ da qui trovo A con i soliti metodi

Una volta che conosco A, poi trovo b.

— o — o —

Esercizio 2

Consideriamo l'affinità

$$f(x,y) = (2x+3y-1,\ x-y+6)$$

Troviamo A e b

$$f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$$

1. Determinare l'immagine della retta $y = 2x-3$
2. Determinare la controimmagine della retta $y = 3x+4$

BOVINO PURO

1. Scelgo 2 p.ti a caso della retta, ad esempio $(0,-3)$ e $(2,1)$

Calcolo dove vanno a finire

$$f(0,-3) = (-10,9) \qquad f(2,1) = (6,7)$$

L'immagine sarà la retta che passa per le 2 immagini

$$(-10,9) + t(16,-2) \rightsquigarrow (-10,9)+t(8,-1) = (\underset{x}{-10+8t},\ \underset{y}{9-t})$$

$$t = 9-y \rightsquigarrow x = -10+8t = -10+72-8y$$

$$\boxed{x+8y = 62}$$

2. Scelgo 2 p.ti a caso della retta, ad esempio $(0,4)$ e $(-1,1)$.

Calcolo le loro controimmagini risolvendo

$$\begin{cases} 2x+3y-1 = 0 \\ x-y+6 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-1 = -1 \\ x-y+6 = 1 \end{cases}$$

Faccio la retta per i due p.ti trovati.

ASTUTA

SLOGAN

→ Le parametriche vanno bene avanti

→ Le cartesiane vanno bene indietro

① Scrivo $y = 2x - 3$ in parametrica

$$(x,y) = (0,-3) + t\,(1,2) = (t, -3+2t)$$

Sostituisco la parametrica nell'espressione dell'affinità

$$f(x,y) = (2x+3y-1,\ x-y+6)$$

$$f(t,-3+2t) = (2t-9+6t-1,\ t+3-2t+6)$$

$$= (8t-10,\ -t+9)$$

Questa è l'immagine che se voglio passo in cartesiana.

Oss. Questo funziona anche in $\mathbb{R}^n$.

Se $f(x) = Ax+b$, e la retta è $x_0 + tv$, allora l'immagine è

$$f(x_0+tv) = A(x_0+tv)+b$$

$$= Ax_0 + tAv + b = \underbrace{(Ax_0+b)}_{\text{nuovo p.to base}} + t\,\underbrace{Av}_{\text{nuova direzione}}$$

② Voglio fare la controimmagine di $y = 3x+4$

Ricordiamo che $f(x,y) = (\underbrace{2x+3y-1}_{\text{nuovo } x},\ \underbrace{x-y+6}_{\text{nuovo } y})$

Li sostituisco nella cartesiana

$$x-y+6 = 3(2x+3y-1)+4$$

Svolgo i calcoli

$$x-y+6 = 6x+9y-3+4 \rightsquigarrow 5x+10y-5=0$$

$$\rightsquigarrow x+2y-1=0$$

[Controllare che con il bovino venisse uguale].

— o — o —

$\boxed{\text{OMOTETIE}}$ Dilatazioni / Contrazioni

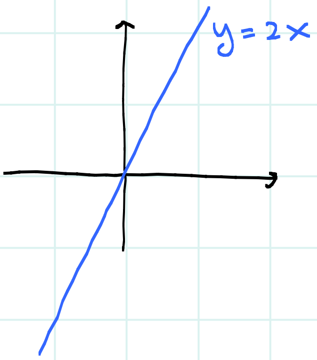
Sono particolari affinità in cui $A = \lambda\, Id$

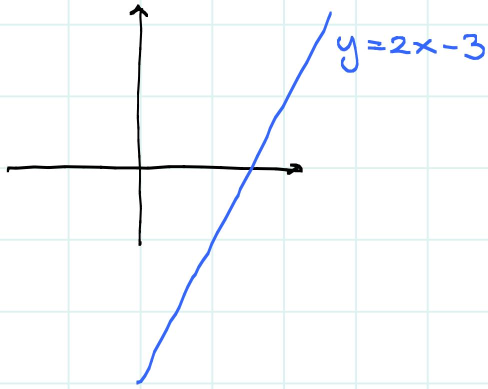
$$f(x) = \lambda x + b$$

<u>Esempio</u> Omotetia di fattore 3 rispetto all'origine

$f(x,y) = (3x, 3y)$

① Calcolare l'immagine delle rette $y = 2x$ $y = 2x - 3$





Le parametriche vanno bene avanti!

$y = 2x$

$(x,y) = (t, 2t)$

$y = 2x - 3$

$(x,y) = (0,-3) + t(1,2)$

$= (t, 2t-3)$

Applico $f(x,y)$

$(3t, 6t) = t(3,6)$

$= t(1,2)$

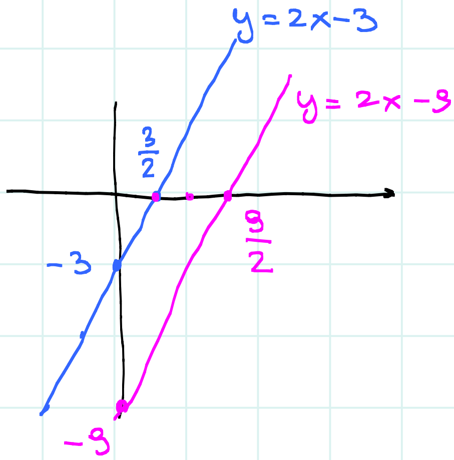
quindi è rimasta la stessa retta

$(3t, 6t-9) = (0,-9) + t(3,6)$

$= (0,-9) + t(1,2)$

$= (t, -9+2t)$

$y = 2x - 9$



— o — o —