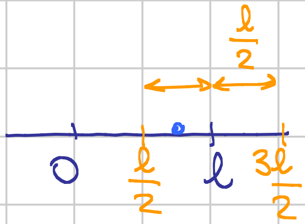
ANALISI 1 — LEZIONE 012

Note Title 05/10/2016

<u>Teorema</u> (permanenza del segno) Sia a_n una succ.
Supponiamo che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ con $\ell > 0$.
Allora

$$a_n > 0 \quad \text{definitivamente}$$

Dim. Uso la def. di lim. con $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$
e ho che



$$0 < \frac{\ell}{2} \leq a_n \leq \frac{3\ell}{2} \quad \text{definitiv.} \qquad \square$$

non serve

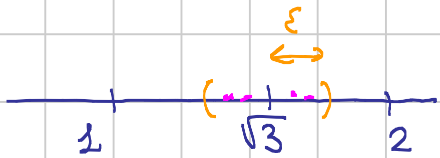
<u>Teorema</u> (analogo) Se $a_n \to +\infty$, allora $a_n > 0$ definitiv.

Dim. Uso la def. di $\boxed{2}$ con $M = 2016$. Allora

$$a_n \geq 2016 \quad \text{definitiv.}, \quad \text{quindi } a_n > 0 \text{ definit.}$$

<u>Tanti enunciati analoghi</u> Se $a_n \to \sqrt{3}$, allora $1 < a_n < 2$ definitiv.

Dim. Basta prendere ε abbastanza piccolo in modo tale che



$$1 < \sqrt{3} - \varepsilon \quad \text{e} \quad \sqrt{3} + \varepsilon < 2$$

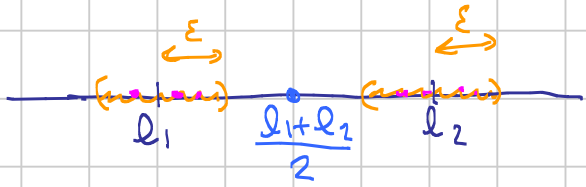
—o —o —

<u>Teorema</u> (unicità del limite) Una succ. a_n ha uno ed uno solo dei quattro comportamenti $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$.
Se inoltre è di tipo $\boxed{1}$, allora c'è un solo valore $\ell \in \mathbb{R}$ per cui $a_n \to \ell$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sarebbero tanti casi da dimostrare.

- Non può essere che $a_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $a_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$ con $\ell_1 \neq \ell_2$

WLOG (without loss of generality)
posso assumere $\ell_1 < \ell_2$



Per il teo. precedente e varianti

se $a_n \to \ell_1$, allora $a_n < \frac{\ell_1+\ell_2}{2}$ definitiv.
se $a_n \to \ell_2$, allora $a_n > \frac{\ell_1+\ell_2}{2}$ "
] incompatibili

- Non può essere che contemporaneamente $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e $a_n \to +\infty$

* Se $a_n \to \ell$, allora defin.
$\ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$ $\quad (\varepsilon = 1)$

* Se $a_n \to +\infty$, allora defin. $a_n \geq \ell + 2$ $\quad (M = \ell + 2)$

Le due richieste sono incompatibili.

— o — o —

$\boxed{\text{Strumenti per il calcolo dei limiti}}$

$\boxed{\text{Teorema di confronto a 2}}$ Sia a_n e b_n 2 succ.
Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitiv.}$$

Allora

- se $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$,
- se $b_n \to -\infty$, allora $a_n \to -\infty$.

Achtung! Ogni altra implicazione è abusiva.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$ (esiste per Hp)

Supponiamo che $a_n \to +\infty$. Allora, preso $M \in \mathbb{R}$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \geq M \quad \forall n \geq n_1$$

Ma allora $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$ si avrà che

$$b_n \underset{n \geq n_0}{\geq} a_n \underset{n \geq n_1}{\geq} M, \text{ quindi } b_n \geq M \text{ definitiv.}$$

L'altro caso è del tutto analogo.

—o—o—

$\boxed{\text{Teorema di confronto a 3}}$ (AKA teorema dei carabinieri)

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni. Supponiamo che

(i) $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente

(ii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ e $c_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (lo stesso ℓ)

Allora

$$b_n \to \ell \quad (\text{stesso } \ell)$$

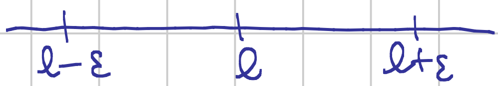
(questo dim. in particolare che b_n è di tipo $\boxed{1}$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Cosa devo dimostrare? Per ogni $\varepsilon > 0$ deve succedere che

$$\ell - \varepsilon \leq b_n \leq \ell + \varepsilon \text{ definitiv.}$$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad \boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$ 2

per Hp (i)



$\exists\, n_a \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_a \quad \boxed{\ell - \varepsilon \leq a_n} \leq \ell + \varepsilon$ 1

perché $a_n \to \ell$

$\exists\, n_c \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_c \quad \ell - \varepsilon \leq \boxed{c_n \leq \ell + \varepsilon}$ 3

perché $c_n \to \ell$

Ma allora $\forall n \geq \max\{n_0, n_a, n_c\}$ avremo che

$$\ell - \varepsilon \underset{①}{\leq} a_n \underset{②}{\leq} b_n \underset{②}{\leq} c_n \underset{③}{\leq} \ell + \varepsilon$$

e quindi a maggior ragione $\ell - \varepsilon \leq b_n \leq \ell + \varepsilon$. $\square$

Oss. Non ho usato davvero tutta l'ipotesi, ma solo 2 pezzi.

Esercizio Se $a_n \to \ell^+$ e $c_n \to \ell^+$, allora anche $b_n \to \ell^+$.

Esempio 1 $a_n = n^2$ È intuitivo che $a_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad n^2 \geq M$

Due casi

- se $M \leq 0$, allora basta prendere $n_0 = n$ perché $n^2 \geq M$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Se $M > 0$, voglio $n^2 \geq M$ e questo è vero $\forall n \geq \sqrt{M}$ e questa è vera definitivamente

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$. Voglio dim. che $a_n \to 0^+$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Mi serve che $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{0 <}_{\text{gratis}} \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ definitiv.

Vediamo quando $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ... con passaggi elementari ...

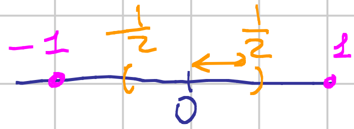
$n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, e questa è vera definitivamente.

Esempio 3 $a_n = (-1)^n$. Voglio dim. che non ha lim.

Dim. Non è vero che $a_n \to +\infty$, perché dovrebbe essere definitiv. positiva, e invece è freq. -1.
Non è vero che $a_n \to \ell > 0$ per lo stesso motivo (permanenza del segno)

Simmetricamente, non è vero che $a_n \to -\infty$ oppure $a_n \to l < 0$.

Resta da escludere che $a_n \to 0$, ma dovrebbe essere definitivamente in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



<u>Esempio 4</u> $a_n = 2^n$. Voglio dim. che $a_n \to +\infty$

<u>Dim.</u> Devo risolvere $2^n \geq M$
- banale se $M \leq 0$
- porta a $n \geq \log_2 M$ se $M > 0$, ma stiamo usando log...

<u>Dim. molto migliore</u>: $\underbrace{2^n}_{+\infty} \geq \underbrace{n}_{+\infty}$ (facile esercizio per induzione)

$n \to +\infty$ (ovvio), quindi per confronto a 2 anche $2^n \to +\infty$.

<u>Oss.</u> Partendo da $n^2 \geq n$, posso dim. che $n^2 \to +\infty$ senza mai scrivere una radice quadrata.