ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 44

Note Title 25/11/2023

FORME QUADRATICHE

$\boxed{d=2}$ $q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$

coeff.

$\boxed{d=3}$ $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2d\,xy + 2e\,yz + 2f\,xz$

e così via con un maggior numero di variabili

Matrice associata ad una forma quadratica

$\boxed{d=2}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array} & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Matrice simmetrica

$$q(x,y) = (x\ y)\underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} ax+cy \\ cx+by \end{pmatrix} = ax^2 + cxy + cyx + by^2$$

$$= ax^2 + by^2 + 2cxy$$

$\boxed{d=3}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} & \end{array}$$

$$q(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

matrice $n \times n$ simmetrica

In generale una forma quadratica si presenta come $q(v) = v^t A v$

CLASSIFICAZIONE DELLE FORME QUADR. SECONDO IL SEGNO

Defn. Sia $q(v)$ una forma quadratica in n variabili.
Questa si dice

→ $\boxed{\text{DEFINITA POSITIVA}}$ se $q(v) > 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

→ $\boxed{\text{DEFINITA NEGATIVA}}$ " $q(v) < 0$ "

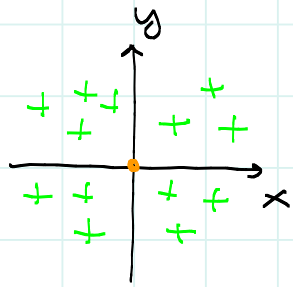
→ $\boxed{\text{SEMIDEFINITA POSITIVA}}$ se $q(v) \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$

→ $\boxed{\text{SEMIDEFINITA NEGATIVA}}$ $q(v) \leq 0$ "

→ $\boxed{\text{INDEFINITA}}$ se non rientra in nessuna delle categorie precedenti,
cioè $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(v) > 0$ ed
$\exists\, w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(w) < 0$

Oss. Una forma definita positiva è anche semidef. positiva
" negativa " negativa

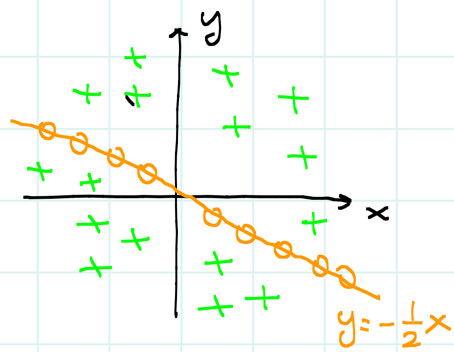
Esempio 1 $q(x,y) = x^2 + 3y^2$ è definita positiva
(si annulla solo se $(x,y) = (0,0)$)
[è anche semidef. pos.]



Esempio 2 $q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$
$= (x+2y)^2 \geq 0$

e si annulla sulla retta $y = -\frac{1}{2}x$

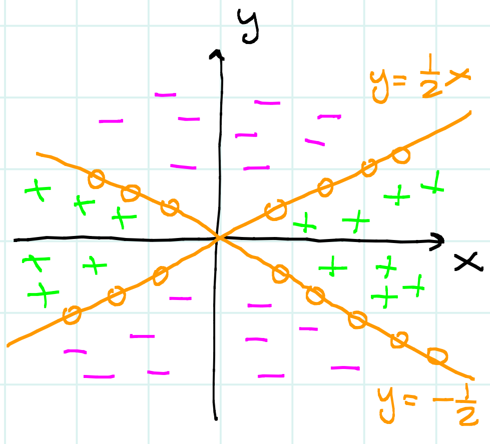
È semidef. pos. ma non def. positiva



Esempio 3 $q(x,y) = x^2 - 4y^2$
Questa è indefinita

$q(1,0) = 1 > 0$
$q(0,1) = -4 < 0$
} questo basta per dire che è indefinita

$q(x,y) = (x+2y)(x-2y)$



SEGNATURA DI UNA FORMA QUADRATICA

Ad ogni forma quadratica è associata una terna di interi ≥ 0

$$\boxed{n_+, n_-, n_0}$$

con la proprietà che

$$\boxed{n_+ + n_- + n_0 = n}$$

dimensione dello spazio

Come sono definiti?

→ n_+ = massima dimensione di un s.spazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ su cui q è definita positiva (cioè $q(v) > 0$ per ogni $v \in V \setminus \{0\}$)

→ n_- = ... q è def. negativa (...)

→ n_0 è definito per differenza

Back to esempi precedenti

Esempio 1

$n_+ = 2$ (ci sono dei + su tutto il piano)

$n_- = 0$ (non ci sono −)

$n_0 = 0$ (la somma deve fare 2)

Esempio 2

$n_+ = 1$ (qualunque retta per l'origine che non sia quella $y = -\frac{1}{2}x$ va bene, ma tutto il piano non va bene)

$n_- = 0$ (non ci sono segni −)

$n_0 = 1$ (per differenza)

Esempio 3

$n_+ = 1$ (vanno bene tutte le rette nella zona +)

$n_- = 1$ (" " " −)

$n_0 = 0$ (per differenza)

Oss. Occhio che n_0 non è la max dim. di un s.sp. in cui $q(v) = 0$ (vedi esempio 3)

METODI PER CALCOLARE LA SEGNATURA

1. Segno autovalori
2. Somma di quadrati (SOS in inglese)
3. SYLVESTER
4. CARTESIO

1 Segno degli autovalori

La matrice associata a q è simmetrica, quindi in particolare ha n autovalori reali, se contati con la loro molteplicità.

In tal caso

$n_+ = \#$ autovalori > 0

$n_- = \#$ autovalori < 0

$n_0 = \#$ autovalori $= 0$

(Teoricamente tutto facile, ma bisogna trovare le radici dei polinomi)

Soliti esempi di prima

Esempio 1 $\quad q(x,y) = x^2+3y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Autovalori: 1, 3 quindi $++$

Esempio 2 $\quad q(x,y) = x^2+4y^2+4xy \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$Tr = 5 \quad Det = 0 \qquad$ Autovalori: $\lambda = 0$ e $\lambda = 5 \qquad +0$

Esempio 3 $\quad q(x,y) = x^2-4y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad +-$

Esempio 4 $\quad q(x,y) = 3x^2+8y^2-4xy \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

$Tr = 11 \quad Det = 20 \qquad Det > 0$ $\nearrow$ $++ \Leftarrow$ Def. pos.

$\searrow$ $--$ (impossibile perché $Tr > 0$)

$-0 \quad -0 \quad -$