ANALISI 1 — LEZIONE 100

Note Title 29/03/2017

FIL ROUGE DI ANALISI 1

$$
\begin{tikzcd}
\text{Assiomi di } \mathbb{R} \arrow[r, Rightarrow] & \dots \arrow[r, Rightarrow] & W \arrow[r, Rightarrow] & R \arrow[r, Rightarrow] & C \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & L \arrow[d, Rightarrow, "\leftarrow \text{già visto}"] \\
& \uparrow \text{compattezza} & & & H \arrow[d, Rightarrow] & M \\
& & & & T &
\end{tikzcd}
$$

W : WEIERSTRASS

R : ROLLE

C : CAUCHY

L : LAGRANGE

H : De L'HÔPITAL

T : TAYLOR

M : monotonia

Teorema di Weierstrass (edulcorata)

$$f : \underbrace{[a,b]}_{\text{con estremi}} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{continua}$$

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$
$$\min \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$

Dove si trovano i p.ti di max / min ?

In una delle 3 categorie

1 – Stazionari interni : $\{ x \in (a,b) : f'(x) = 0 \}$

2 – Singolari interni : $\{ x \in (a,b) : f'(x) \text{ N.E.} \}$

3 – Bordo : $\{a, b\}$

Lemma Sia $\underbrace{f:(a,b)\to\mathbb{R}}_{\text{nessuna ipotesi}}$ e sia $x_0\in(a,b)$

Supponiamo che

(i) $f'(x_0)$ esiste

(ii) x_0 p.to di min. di $f(x)$ in (a,b) (cioè $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in(a,b)$)

Allora

$$f'(x_0)=0.$$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (Via monotonia 1) Supponiamo per assurdo che $f'(x_0)\neq 0$.

- Se $f'(x_0)>0$, allora $f(x)<f(x_0)$ un po' a sx di x_0 (detto meglio: $\exists\,\delta>0$ t.c. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ vale $f(x)<f(x_0)$) il che contraddice che x_0 è p.to di min.
- Se $f'(x_0)<0$, allora $f(x)<f(x_0)$ un po' a dx di x_0.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (Diretta, senza assurdo). Considero il rapp. increm.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Per $h>0$ abbiamo Denom >0 e Num ≥ 0, quindi fraz. ≥ 0, quindi

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$$

- Per $h<0$ abbiamo Denom <0 e Num ≥ 0, quindi fraz ≤ 0, quindi

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$$

L'unica possibilità è che sia $f'(x_0)=0$.

— o — o —

Esercizi → rifare il tutto per x_0 p.to di max

→ cosa si può dire di $f'(a)$ nelle ipotesi in cui $\max\{f(x): x\in[a,b]\}=f(a)$.

— o — o —

TEOREMA DI ROLLE Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

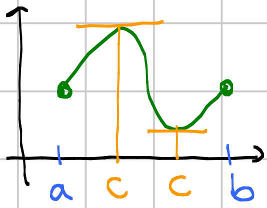
(i) f continua in $[a,b]$ (estremi compresi)

(ii) f derivabile in (a,b) (estremi non compresi, ma se lo sono meglio ancora)

(iii) $f(a) = f(b)$

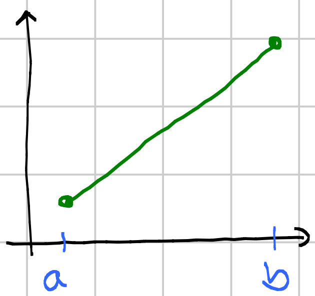
Allora

$$\exists\, c \in \underbrace{(a,b)}_{\text{aperto}} \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

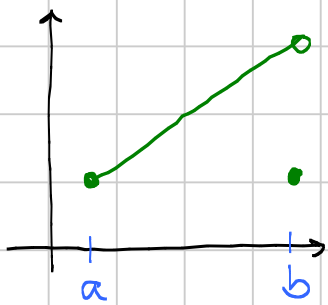


Oss. 1 – c non è nec. unico

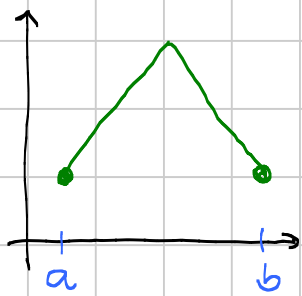
2 – le ipotesi servono tutte



Manca (iii)



Manca (i) in un solo p.to $(x=b)$



Manca (ii) in un solo p.to

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per (i) + W esistono max e min di $f(x)$ in $[a,b]$.

Due casi

- Se almeno uno tra max/min viene assunto in un p.to $x_0 \in (a,b)$, allora per il lemma $f'(x_0) = 0$ (sappiamo che $f'(x_0)$ esiste per la (ii)), quindi $c = x_0$.

- Se sia il max sia il min sono assunti al bordo, allora per la (iii) la funzione è costante.
  A questo punto posso prendere un qualunque $c \in (a,b)$.

— o — o —

TEOREMA DI CAUCHY Siano $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f e g continue in $[a,b]$ (con estremi)

(ii) f e g derivabili in (a,b) (se lo sono in $[a,b]$, ancora meglio)

Allora

1ª tesi

$$\boxed{\exists\, c\in(a,b) \text{ t.c. } \quad (f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c)}$$

Se inoltre vale la terza ipotesi

(iii) $g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in(a,b)$

allora

$$\boxed{g(b)\neq g(a) \text{ e } \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

2ª tesi

Dim. Considero la seguente funzione

$$\varphi(x) := \underbrace{(f(b)-f(a))}_{\text{numero}}\,g(x) - \underbrace{(g(b)-g(a))}_{\text{numero}}\,f(x)$$

(= comb. lineare di $f(x)$ e $g(x)$).

Accade che

(i) φ è continua in $[a,b]$

(ii) φ è derivabile in (a,b)

(iii) $\varphi(a)=\varphi(b)$ (contaccio da fare)

Allora posso applicare Rolle e ottenere $c\in(a,b)$ t.c. $\varphi'(c)=0$

$$\varphi'(x) = (f(b)-f(a))\,g'(x) - (g(b)-g(a))\,f'(x)$$

Ora $\varphi'(c)=0$ è equivalente alla 1ª tesi.

Supponiamo che valga (iii). Allora $g(b)\neq g(a)$ perché se fosse $g(b)=g(a)$ per Rolle esisterebbe un p.to in cui $g'(x)=0$.

A quel p.to posso dividere e ho la 2ª tesi.

— o — o —

Oss. Senza l'ipotesi (iii) non è detto che valga la 2ª tesi, nemmeno se assumo che $g(b) \neq g(a)$

Esempio classico: $f(x) = x^2$ $g(x) = x^3$ $[a,b] = [-1,1]$

È vero che $g(b) \neq g(a)$, ma $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{0}{2} = 0$

e 0 non lo posso scrivere come $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{2c}{3c^2} = \dfrac{2}{3c}$

per nessun valore $c \in (-1,1)$. La prima tesi invece vale con $c=0$

— o — o —

TEOREMA DI LAGRANGE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b).

$\}$ soliti commenti

Allora

$$\boxed{\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

Dim 1 Applico Cauchy con $g(x) = x$.
Le ipotesi (i) + (ii) + (iii) di Cauchy sono verificate, quindi

$$\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}_{b-a} = \underbrace{\frac{f'(c)}{g'(c)}}_{1}$$

Moltiplico e ho la tesi.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ (Via Rolle)

Considero la funzione

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x$$

Allora $\varphi(x)$ verifica le ipotesi di Rolle (controllare $\varphi(a)=\varphi(b)$)
Ma allora

$$\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } \varphi'(c) = 0, \text{ cioè } f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

che è equivalente alla tesi.

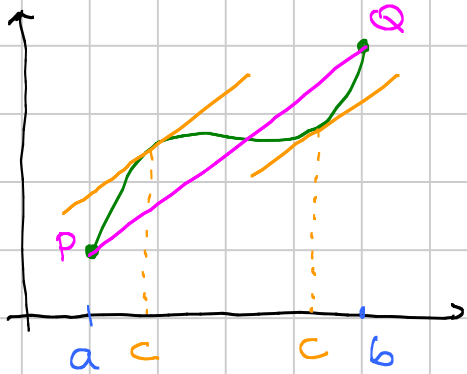
Oss. La dim 2 è equivalente a rifare la dim. di Cauchy con $g(x) = x$.

Oss. Significato geometrico di Lagrange e della seconda dim.

$$f'(c) = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$\shortparallel$
coeff. angolare retta PQ

coeff. ang. retta tangente in $(c, f(c))$



Lagrange: esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.

$\boxed{\text{retta tangente parallela retta PQ}}$

In un certo senso Lagrange è un Rolle "storto"
La DIM 2 "raddrizza il disegno".
[Vedere finale lezione corrisp. di AM1_15]