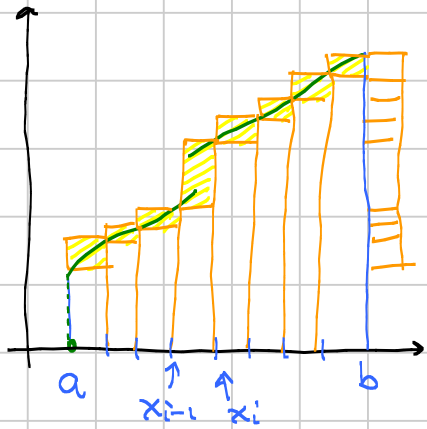
ANALISI 1 — LEZIONE 058

Note Title 30/11/2016

Teorema (Integrabilità delle funzioni monotone)
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona (debolmente).
Allora f è integrabile.



$\boxed{\text{Dim.}}$ Per la caratterizzazione devo per ogni $\varepsilon > 0$, trovare step f

$$\varphi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x)$$

t.c.

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x))\,dx \le \varepsilon$$

(Posso supporre WLOG che f è crescente)
Suddivido la base $[a,b]$ in n parti uguali di lungh. $\frac{b-a}{n}$.
Detti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

gli estremi della suddivisione, poniamo

$$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$
$$\psi(x) = f(x_i) \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

Ora
$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x))\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\substack{\text{base} \\ \text{(tutte uguali)}}} \underbrace{[f(x_i) - f(x_{i-1})]}_{\text{altezza}}$$

$$= \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]}_{\text{Telescopica}}$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)]}_{\text{pur di prendere } n \text{ grande, questo va sotto } \varepsilon.}$$

Oss (futurista) Una funzione può essere monotona ma essere discontinua su tutto $\mathbb{Q}$.

— o — o —

$\boxed{\text{Tecniche di integrazione}}$ Data $f(x)$, come trovo una primitiva $F(x)$?

→ Primitive elementari
→ Integrazione per parti
→ " " sostituzione
→ " funzioni razionali
→ Sostituzioni razionalizzanti

Primitive elementari : leggo al contrario la tabellina delle derivate

f	F		f	F
c	cx		e^x	e^x
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$	$\cos x$	$\sin x$
			$\sin x$	$-\cos x$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	$\cosh x$	$\sinh x$
			$\sinh x$	$\cosh x$
$\frac{1}{x}$	$\log x$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$		a^x	$\frac{1}{\log a}a^x$

Notazione $\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{integrale senza estremi}}$ = una qualunque primitiva di $f(x)$

$\int \sin x\,dx = -\cos x$

$\boxed{\text{Il famigerato } +c}$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

- Se devo calcolare l'integrale con estremi, il "+c" si semplifica, dunque è inutile

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x + c\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cancel{c} - (\underbrace{-\cos 0}_{1} + \cancel{c}) = 1$$

- Posso mettere +c per descrivere l'insieme di TUTTE le primitive di $f(x)$.

<u>Esempio</u> $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definita per $x \neq 0$.

Come sono fatte tutte le $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tali che

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \forall x \neq 0 \quad ?$$

Risposta: $F(x) = -\frac{1}{x} + c$ NO!!!!

Risposta corretta: posso usare 2 c diversi per $x > 0$ e $x < 0$, quindi

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + c_1 & \text{per } x < 0 \\ -\frac{1}{x} + c_2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Detto brutalmente: tutte le volte che l'insieme di def. di $f(x)$ è fatto da più pezzi, posso usare c diversi su pezzi diversi.

Quindi mettere +c "meccanico" non assicura di descrivere tutte le primitive

Esempio 1 $\int (x^2+2x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2} + x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$

Esempio 2 $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5} e^{5x}$ $\qquad \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

Esempio 3 $\int \sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)$

Esempio 4 $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$ per $x>0$

Ha senso cercare $F: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ t.c.

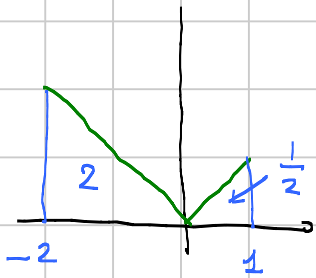
$$F'(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

$F(x) = \log|x|$. Sui $x>0$ è banale

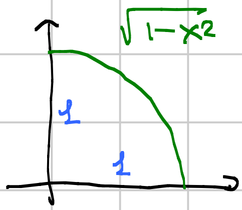
Per $x<0$ si ha $F(x) = \log(-x)$

$$F'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Esempio 5 $\int_{-2}^{1} |x|\,dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

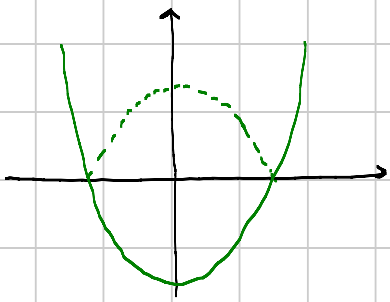


$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$



Esempio 6 $\int_0^2 |x^2-2|\,dx$

$\boxed{\text{SO CHE DEVE VENIRE} > 0}$

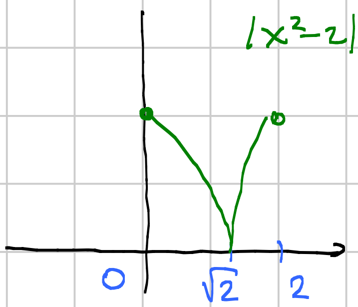


$$= \int_0^{\sqrt{2}} |x^2-2|\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} |x^2-2|\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} (x^2-2)\,dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3} - 4 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = \dots$$



——— o ——— o ———