ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 48

Note Title 28/11/2023

2. Consideriamo i prodotti scalari in $\mathbb{R}^3$ rappresentati, rispetto alla base canonica, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}}_{B} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Per ciascuno di essi si richiede di

(a) verificare che è definito positivo,

(b) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base

$$\{(-1,2,0),(3,0,-2),(1,1,1)\},$$

(c) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1,1,3)$,

(d) determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio di equazione cartesiana $x = 3y - z$,

(e) determinare un vettore a coordinate intere ortogonale a $(1,0,0)$ e a $(0,1,1)$,

(f) determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio generato da $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$,

(g) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$,

(h) determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione sul sottospazio di equazione cartesiana $y + z = 0$.

(a) Dim. che è def. pos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sylvester 1-2-3: $\text{Det}_{1\times1} = 1$

$\text{Det}_{2\times2} = 1$

$\text{Det}_{3\times3} = 6+1+1-2-3-1 = 1$

Segnatura : $+++$

d'ufficio

$+ + + +$

P P P

(b) Matrice rispetto alla base $\underset{v_1}{(-1,2,0)}, \underset{v_2}{(3,0,-2)}, \underset{v_3}{(1,1,1)}$

Metodo bovino: calcolare 6 prodotti scalari

$\langle v_1, v_1\rangle_B \quad \langle v_2, v_2\rangle_B \quad \langle v_3, v_3\rangle_B$

$\langle v_1, v_2\rangle_B \quad \langle v_1, v_3\rangle_B \quad \langle v_2, v_3\rangle_B$

Metodo più astuto

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che venga uguale nei due casi

(c) Sottospazio ortogonale a $(-1\ 1\ 3)$

Basta imporre $\langle(-1,1,3),(x,y,z)\rangle_B = 0$

$$(-1\ \ 1\ \ 3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (3,4,9)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\boxed{3x+4y+9z=0}$$

(d) Sottospazio $x = 3y - z$

Vogliamo una base ortogonale

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Prendo un vettore qualunque del s.sp., ad esempio $(3,1,0)$. Questo è il primo elemento della base. Come cerco il secondo? Lo chiamo (x,y,z) e impongo che stia nel s.sp. e sia $\perp$ al precedente

$$(3\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (4\ \ 5\ \ 4)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3y+z=0 & \longrightarrow \text{stare nel sottospazio} \\ 4x+5y+4z=0 & \longrightarrow \text{essere } \perp \text{ a } (3,1,0) \end{cases}$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Prendo una base qualunque del s.sp., ad esempio

$v_1 = (3,1,0) \qquad v_2 = (1,0,-1)$

Ora applico GS rispetto al prodotto scalare definito da B

<u>Achtung!</u> GS si può fare rispetto ai prod. scalari DEF. POSITIVI (o def. neg.) per non rischiare di avere degli 0 al denominatore.

$\hat{v}_1 = v_1 = (3,1,0)$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1\rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1\rangle_B}\hat{v}_1 = \text{conto che si fa}$$

[Deve venire lo stesso nei due modi]

(e) determinare un vettore a coordinate intere ortogonale a $(1,0,0)$ e a $(0,1,1)$,

Rispetto al prodotto strano non c'è una formula misteriosa immediata

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Lo chiamo (x,y,z) e impongo le condizioni

$$(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \boxed{x+y+z=0}$$

$$(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (2\ 3\ 4)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \boxed{2x+3y+4z=0}$$

Non resta che risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \rightsquigarrow \text{perpendicolare a } (1,0,0) \\ 2x+3y+4z=0 & \rightsquigarrow \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (0,1,1) \end{cases}$$

Le soluzioni hanno un grado di libertà

Quella che si ottiene è la retta ortogonale (rispetto al nuovo prodotto scalare) al piano Span ((1,0,0), (0,1,1))

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Considero la base di $\mathbb{R}^3$

$(1,0,0)$ $(0,1,1)$ $(0,1,0)$ (verificare che siano una base)

Applico GS e la faccio diventare ortogonale.

A quel p.to il 3° è $\perp$ allo Span dei primi due.

(f) determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio generato da $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$,

Cosa vuol dire? Considero $W = \underbrace{\text{Span}((0,1,0),(0,0,1))}_{\text{piano}}$,

Considero $W^\perp \to$ retta Ovviamente $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^3$

$(1,0,0)$ si scrive in modo unico come $\underset{\text{in } W}{w_1} + \underset{\text{in } W^\perp}{w_2}$

La proiezione richiesta è w_1

Chiamiamo $w_1 = (0,1,0)$

$w_2 = (0,0,1)$

Sono una base di W

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Trovo w_3 ortogonale a w_1 e w_2 (sistema di 2 equ. come prima). A quel punto

$$W^\perp = \text{Span}(w_3)$$

Poi risolvo

$$(1,0,0) = \underbrace{a w_1 + b w_2}_{\text{proiezione su } W} + \underbrace{c w_3}_{\text{proiezione su } W^\perp} \quad \text{(solito sistema)}$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Applico GS a w_1 e w_2 e ottengo una base ortogonale, e se voglio anche ortonormale, di W

A quel p.to dovrei risolvere

$$(1,0,0) = a\hat{w}_1 + b\hat{w}_2 + c\hat{w}_3$$

Se ho a che fare con una base ortonormale, allora di sicuro so che

$$a = \langle (1,0,0), \hat{w}_1 \rangle_B$$

$$b = \langle (1,0,0), \hat{w}_2 \rangle_B$$

In tutto questo non serve nemmeno calcolare $\hat{w}_3$.

Quindi l'unica cosa da calcolare è $\hat{w}_2$.

(g) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$,

Parto da una base qualunque, ad esempio la canonica, e poi faccio G.S.
Questa base è la base Sylvesterizzante (la matrice diventa l'identità)

(h) determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione sul sottospazio di equazione cartesiana $y + z = 0$.

W — proiezione ortogonale

Osservo che $W = \text{Span}(\underset{w_1}{(1,0,0)}, \underset{w_2}{(0,1,-1)})$

Cerchiamo una base di $W^\perp$, cioè un vettore $\perp$ ad entrambi

$$(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad x+y+z=0$$

$$(0\ 1\ -1)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (0,1,-2)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \qquad z=1 \quad y=2 \quad x=-3$$

$\underset{w_3}{(-3,2,1)}$

Quindi stiamo cercando l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$w_1 \to w_1$
$w_2 \to w_2$
$w_3 \to 0$

e questa la sappiamo fare in tanti modi, ad esempio

$$\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$$