ANALISI 1 — LEZIONE 110

Note Title 10/05/2025

STUDIO QUALITATIVO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Obiettivo: capire come è fatta la soluzione di un'eq. diff. anche se non riusciamo a risolverla esplicitamente

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

Se volessi risolvere, potrei separare $\frac{du}{\arctan u} = dt$ ma la primitiva a sx non si sa esprimere con le solite funzioni elementari

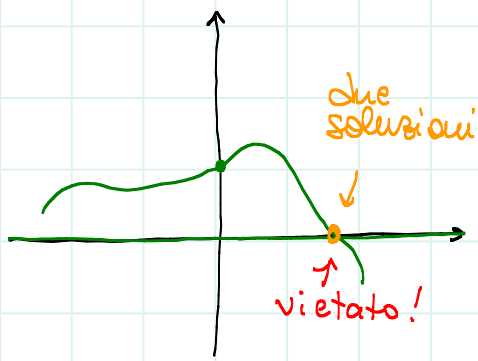
Fatto 1 L'equazione ammette un'unica soluzione, per lo meno locale

Solito teorema di esistenza e unicità

Fatto 2 $u(t) \equiv 0$ è una soluzione dell'eq. diff. (non rispetta la cond. iniziale, ma non importa.

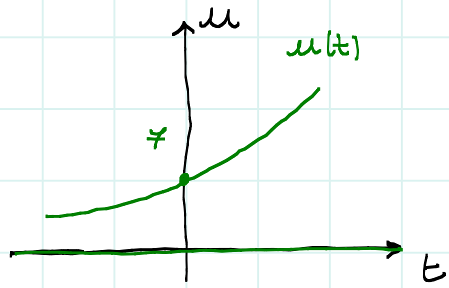
Conseguenza importante: la nostra soluzione, cioè quella con $u(0) = 7$, sarà sempre positiva !!

Se diventasse negativa o nulla, allora intersecherebbe $u(t) \equiv 0$, e in quel p.to di intersezione passerebbero due soluzioni, il che è vietato !!



Fatto 3 La nostra soluzione, fin quando esiste, è strettamente crescente.

Infatti $\quad u'(t) = \arctan \underbrace{u(t)}_{>0} > 0 \quad$ per ogni t per cui esiste



$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Può esserci blow-up per $t > 0$?

NO! Infatti sappiamo che

$$u'(t) = \arctan u(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ cresce meno di una retta con coeff. angolare $\frac{\pi}{2}$, cioè

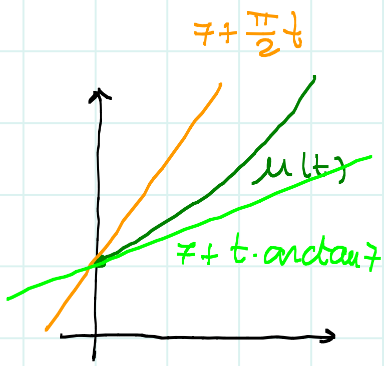
$$u(t) \leq 7 + \frac{\pi}{2} t$$

Sostanzialmente sto integrando la disug. di sopra tra 0 e t

$$\begin{array}{ccc} \int_0^t u'(s)\,ds & \leq & \int_0^t \frac{\pi}{2}\,ds \\ \| & & \| \\ u(t) - u(0) & \leq & \frac{\pi}{2} t \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ questo impedisce il blow-up. D'altra parte, anche break-down non può succedere perché $\arctan u$ è definita ovunque.

Quindi per $t \geq 0$ la soluzione è monotona crescente e ha esistenza globale, e sta sotto la retta $7 + \frac{\pi}{2} t$



$\boxed{\text{Fatto 5}}$ A cosa $u(t)$ per $t \to +\infty$?

È crescente, quindi ha un limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Noi sappiamo anche che

$$u'(t) = \arctan u(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } u(t) \geq 7}}{\geq} \arctan 7 \qquad \forall\, t \geq 0$$

Ma allora $\quad u(t) \geq \underbrace{7 + (\arctan 7)\cdot t}$

retta che passa per $(0,7)$

e ha coeff. angolare $\arctan t$

Quindi $\quad \lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Come è fatta $u(t)$ nel passato?

Esiste globalmente? Sì, perché dovendo essere $u(t)>0$ non può avere blow-up a $-\infty$

$\boxed{\text{Fatto 7}}$ A cosa tende $u(t)$ per $t\to-\infty$?

Vorrei tanto dire che tende a 0.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Se non tende a 0, allora tende ad un certo $\ell>0$ e in tal caso $\quad u'(t) = \arctan u(t) \geq \arctan \ell \quad \forall t \leq 0$

Brutalmente: se la derivata ha un minimo positivo, la funzione non può tendere ad una costante

Questo vorrebbe dire che $\quad u(t) \leq 7 + (\arctan \ell) t$

nel passato le disuguaglianze si invertono

Formalmente

$$u'(s) \geq \arctan \ell$$

Io vorrei integrare tra 0 e t, con t negativo:

$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s)\,ds = -\int_t^0 u'(s)\,ds$$

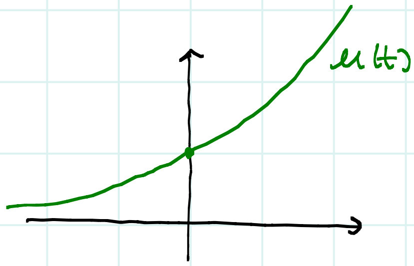
$$\leq -\int_t^0 \arctan \ell \, ds = +\arctan \ell \cdot t$$

Conseguenza $\quad u(t) \le u(0) + \arctan \ell \cdot t$

e quindi

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) \le \lim_{t \to -\infty} 7 + \underbrace{\arctan \ell}_{>0} \cdot t = -\infty$$

il che è assurdo.



$\boxed{\text{Fatto 8}}$ Sarà vero che $u(t)$ è convessa?

Sì! $\quad u''(t) = [u'(t)]' = [\arctan u(t)]'$

$$= \frac{1}{1+u(t)^2} \cdot u'(t)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+u(t)^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\arctan u(t)}_{>0} > 0$$

$\boxed{\text{Fatto 9}}$ Quanto fa $\displaystyle \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t}$?

Si tratta di $\frac{+\infty}{+\infty}$, quindi Hôpital

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

perché $u(t) \to +\infty$

$\boxed{\text{FATTO 10}}$ Come tende $u(t)$ a 0 per $t \to -\infty$?

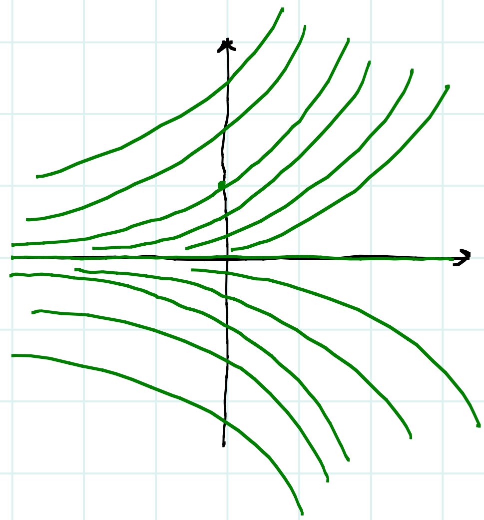
Brutale $\quad u'(t) = \arctan u(t) \sim u(t)$, quindi per tempi molto negativi è come se fosse $u'(t) = u(t)$.
Le soluzioni di questa sono $c \cdot e^t$, quindi per $t \ll 0$ vanno a 0 esponenzialmente

Calcoliamo $\displaystyle \lim_{t \to -\infty} \frac{\log(u(t))}{t}$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\log(u(t))}{t} \underset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\overset{}{=}} \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{u'(t)}{u(t)}}{1}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{\arctan u(t)}{u(t)} \underset{x=u(t)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$\boxed{\text{FATTO 11}}$ Tutte le altre soluz. sono fatte analogamente



— o — o —