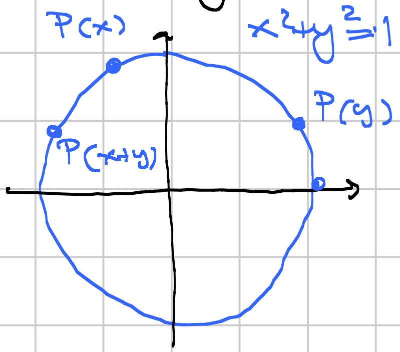
ANALISI 1 - LEZIONE 010

Note Title 03/10/2016

Idea di come si potrebbe provare a definire le funzioni trigonom.



Sia T l'insieme dei punti della circ. trigo.
Allora esiste un'unica funzione

$$P: \mathbb{R} \to T$$

tale che

(i) $P(0) = (1,0)$ partenza

(ii) $P(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$

(iii) $\operatorname{dist}(P(x+y), P(x)) = \operatorname{dist}(P(y), P(0)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$
distanza tra p.ti del piano

(iv) qualcos'altro a scelta tra un po' di opzioni, ad esempio continuità o un po' di monotonia.

$\boxed{\text{TEOREMONE}}$ Esiste un'unica funzione $P(x)$ con le proprietà enunciate.

A quel punto posso porre $P(x) = (\cos x, \sin x)$

$\boxed{\text{Esercizio}}$ Definito $P(x)$ come sopra, provare ad imporre la (iii) e vedere cosa viene fuori
[Risposta: formule di addizione]

Oss. In realtà prima bisognerebbe definire π.

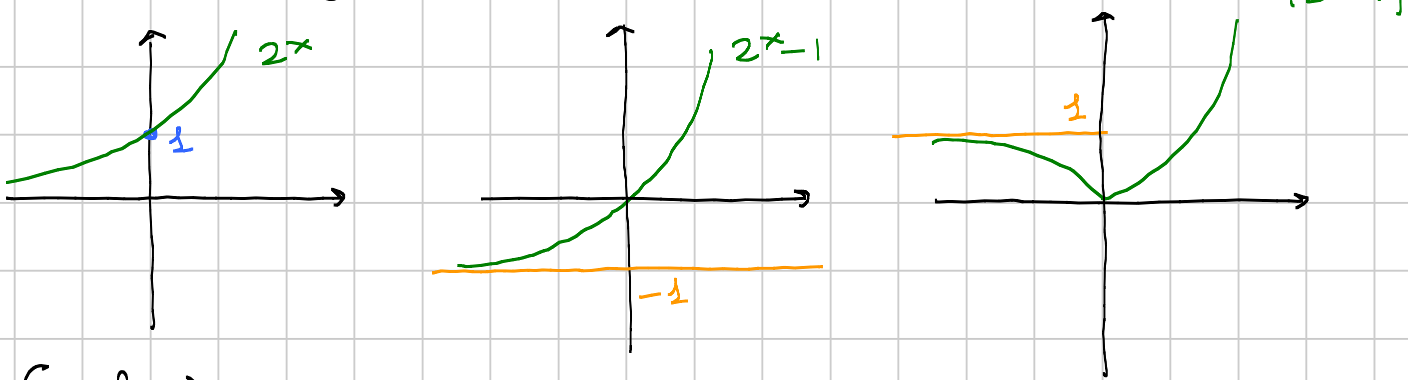
— o — o —

Esercizio 1 Studiare, al variare del parametro λ, il numero di soluzioni dell'eq.

$$\underbrace{|2^x - 1|}_{f(x)} = \lambda$$

Strategia:

- disegno grafico di $f(x)$
- interseco con rette // asse x

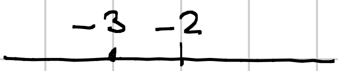


Conclusione

- 0 soluzioni per $\lambda \in (-\infty, 0)$
- 1 soluzione per $\lambda \in \{0\} \cup [1, +\infty)$
- 2 soluzioni per $\lambda \in (0, 1)$

— o — o —

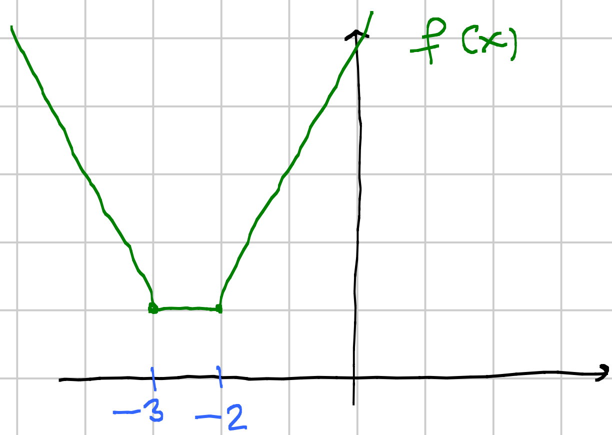
Esercizio 2 $$\underbrace{|x+2| + |x+3|}_{f(x)} = \lambda$$



Zone: → per $x \leq -3$ si ha $f(x) = -x-2-x-3 = -5-2x$

→ per $-3 \leq x \leq -2$ $f(x) = -x-2+x+3 = 1$

→ per $x \geq -2$ $f(x) = x+2+x+3 = 5+2x$



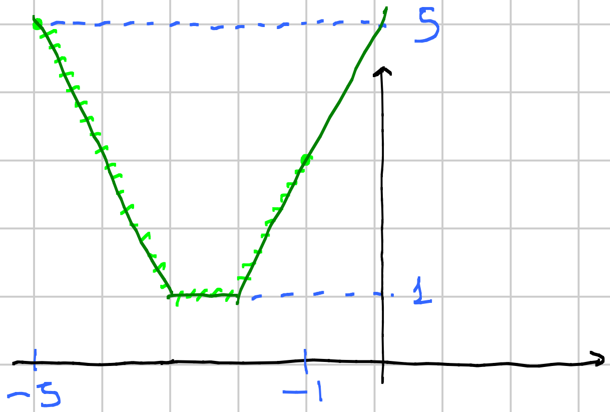
Conclusione

- 0 soluzioni $\lambda \in (-\infty, 1)$
- 2 soluzioni $\lambda \in (1, +\infty)$
- ∞ soluz. $\lambda \in \{1\}$

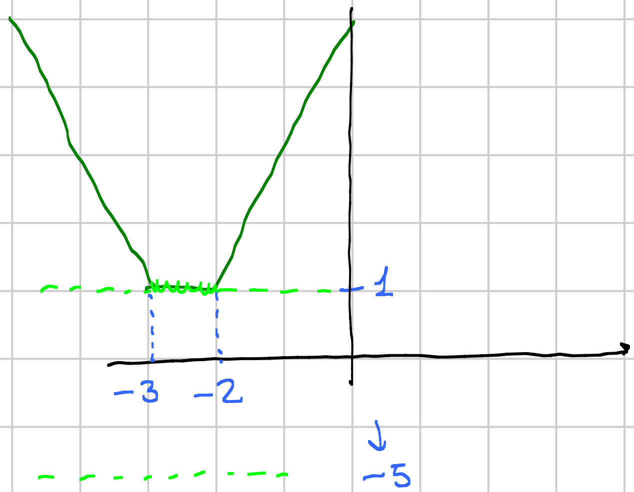
— o — o —

Esercizio 3 $f(x)$ come prima. Calcolare $f([-5,-1])$ e $f^{-1}([-5,1])$

$f([-5,-1]) = [1,5]$



$f^{-1}([-5,1]) = [-3,-2]$

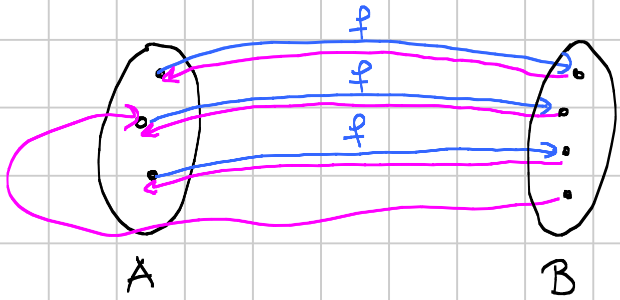


— o — o —

Esercizio 4 Trovare $f: A \to B$ NON invertibile per cui esiste $g: B \to A$ t.c.

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$ (una sola delle richieste per avere l'inversa)

Vediamo subito che la + interna, cioè f, deve essere iniettiva



f è iniettiva, ma non surg.
g è surg., ma non iniett.
La composizione $g \circ f$ è bigettiva mentre $f \circ g$ non è né I né S.

Altro esempio con $A = B = \mathbb{N}$

$f(n) = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad g(f(n)) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \geq 1 \\ 2016 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

<u>Esercizio 5</u> Risolvere l'equazione

$$\arccos(3x+1) = \arccos(2x+3)$$

"Posso" togliere l'arccos perché è iniettivo : $3x+1 = 2x+3$

a patto di controllare DOPO che $3x+1$ e $2x+3$ siano in $[-1,1]$

$x = 2$ ⇝ NON va bene perché $3x+1 = 7$

Fosse stato $\cancel{\log_{11}}(3x+1) = \cancel{\log_{11}}(2x+3)$

a patto di controllare che $3x+1 = 2x+3 > 0$

$(x=2 \text{ OK})$

Fosse stato $\arctan(3x+1) = \arctan(2x+3)$ OK gratis, perché $\arctan x$ è iniettiva e definita $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Esercizio 6</u> $f(x) = \cos(\sin x)$ è periodica di periodo (non nec. minimo) 2π e PARI

<u>Fatto generale</u> Se $f(x)$ è T-periodica, allora $g(f(x))$ è T-periodica (ma potrebbe avere periodo minimo + piccolo)

<u>Dim.</u> $g(f(x+T)) = g(f(x))$.

Nell'esempio il periodo è π $\left[\cos(\sin(x+\pi)) \overset{\text{PCM}}{=} \cos(-\sin x) \overset{\cos \text{ è pari}}{=} \cos(\sin x)\right]$

Dim. che $f(x)$ è PARI: $f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x)$
$= \cos(\sin x) = f(x)$

<u>Fatti generali</u> se $f(x)$ è pari, allora Mostro $(f(x))$ è PARI

Se f e g sono dispari, allora $g(f(x))$ è dispari.

— o — o —