ANALISI 1 — LEZIONE 003

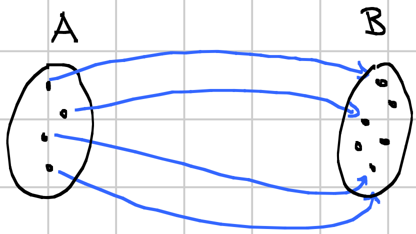
Note Title 26/09/2016

FUNZIONI TRA INSIEMI

Definizione operativa. Una funzione sono 3 cose:

- un insieme A, detto insieme di partenza
- " " B, detto insieme di arrivo
- una "legge" che ad ogni elemento $a \in A$ associa un UNICO elemento $b \in B$.

Notazione $f : A \to B$ $\quad$ $f(a)$ indica l'unico elemento di B che la legge associa ad $a \in A$.



Da ogni $a \in A$ parte una ed una sola freccia

Grafico di una funzione $\quad$ Data $f : A \to B$, definiamo

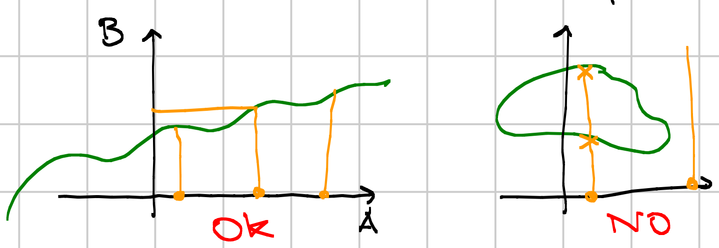
$$\text{Grafico}(f) = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$$ (def. per proprietà)

Definizione rigorosa di funzione (Una funzione è il suo grafico)

Una funzione da A in B è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ tale che

$$\boxed{\forall a \in A \;\; \exists!\, b \in B \;\; [\text{tale che}] \;\; (a,b) \in G}$$

A posteriori $f(a)$ si definisce come l'unico $b \in B$ che rispetta la relazione di sopra.

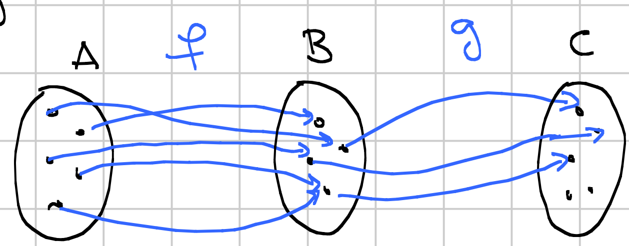


Composizione di funzioni

$f : A \to B\ , \quad g : B \to C$

stesso

La funzione composta $g \circ f : A \to C$ ottenuta facendo "prima f, poi g"



Quando scrivo $g(f(a))$ si intende che si calcola prima $f(a)=b$ e poi $g(b)$.

__Esercizio__ Definire la composizione a partire dalla definizione rigorosa di funzione.

— o — o —

FUNZIONI INIETTIVE E/O SURGETTIVE

__Def.__ Sia $f : A \to B$ una funzione.

- La funzione si dice INIETTIVA se (manda elementi distinti di A in elem. distinti di B, cioè non ci sono 2 frecce che arrivano nello stesso punto)

$$\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A \quad (\underbrace{a_1 \neq a_2}_{P} \underbrace{\Rightarrow}_{\Rightarrow} \underbrace{f(a_1) \neq f(a_2)}_{Q})$$

Equivalentemente:

$$\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A \quad (\underbrace{f(a_1) = f(a_2)}_{\text{NOT } Q} \underbrace{\Rightarrow}_{\Rightarrow} \underbrace{a_1 = a_2}_{\text{NOT } P})$$

- La funzione si dice SURGETTIVA se (tutti gli el. di B sono raggiunti dalle frecce)

$$\boxed{\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{t.c. } f(a) = b}$$

- ... BIGETTIVA se è iniettiva + surgettiva (cioè se in ogni elemento di B arriva una ed una sola freccia)

In questo caso la funzione risulta INVERTIBILE, cioè esiste

$$\boxed{g : B \to A}$$

tale che

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B \end{array}}$$

(Idea: g ha le stesse frecce percorse al contrario)

Esempio $f(x) = x^2$ Per stabilire iniett./surg. serve sapere "da dove a dove"

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO IN. NO SURG

$f(1)=f(-1)$ Nessuno va in -1

$f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ NO IN. SI SURG

$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ SI IN. NO SURG

$f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ SI SI

— o — o —

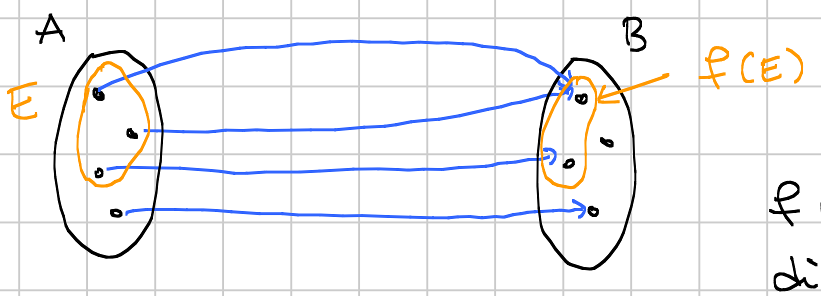
IMMAGINE E CONTROIMMAGINE (di sottoinsiemi)

Sia $f : A \to B$ una funzione.

Def. Dato $E \subseteq A$, si pone

$$\boxed{f(E) = \{ f(a) : a \in E \}} \subseteq B$$

(arrivi di tutte le frecce che partono da E)



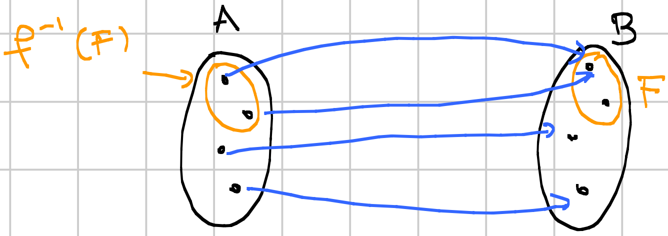
$f(E)$ si dice IMMAGINE di E

Def. Dato $F \subseteq B$, si pone

$$\boxed{f^{-1}(F) = \{a \in A : f(a) \in F\}} \subseteq A$$

(partenze delle frecce che arrivano in F)

si dice CONTROIMMAGINE di F



Esercizio Scrivi $f(E)$ per proprietà e non per elenco:

$$f(E) = \{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : \exists\, a \in E \text{ t.c. } b = f(a)\}$$

per elenco — per proprietà

Achtung! Il simbolo f^{-1} indica almeno 3 cose diverse

- la funzione inversa (cioè $g : B \to A$ quando esiste)
- la controimmagine
- il reciproco $\frac{1}{f(x)}$ quando ha senso

Def. Si def. IMMAGINE di una funzione l'insieme $f(A) \subseteq B$.
(tutti gli elementi di B raggiunti dalle frecce)

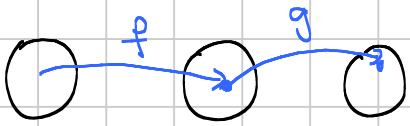
Oss. $f : A \to B$ è surgettiva $\iff f(A) = B$

Iniettività, surgettività e composizioni $f : A \to B$, $g : B \to C$

(1) Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva

$$\left[\; a_1 \neq a_2 \underset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} f(a_1) \neq f(a_2) \underset{g \text{ inj.}}{\Longrightarrow} g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \;\right]$$

② Se f e g sono surgettive, allora $g \circ f$ è surg.



③ Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva (g non è detto)

[Dim. per assurdo: se $a_1 \neq a_2$ e $f(a_1) = f(a_2)$, allora $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, quindi $g \circ f$ non è iniettiva]

④ Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva (f non è detto)

Esercizi: trovare esempi che mostrino che ③ e ④ sono ottimali.