$$x_{n+2} = a\, x_{n+1} + b\, x_n \quad \rightsquigarrow \quad x^2 = ax+b$$

$$x_n = c_1 \lambda^n + c_2 \mu^n \qquad \text{se } \lambda \neq \mu$$
$$x_n = c_1 \lambda^n + c_2\, n\, \lambda^n \qquad \text{se } \lambda \text{ ha molt. } 2$$

$\boxed{\text{INTERPRETAZIONE 1}}$ Invece di considerare $x_n$ come incognita, considero la coppia $(x_n, x_{n+1})$ anzi considero il polinomio

$$p_n(x) = b\, x_n + x_{n+1}\, x \qquad (\text{pol. di } 1^\circ \text{ grado con coeff. } b x_n \text{ e } x_{n+1})$$

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= b\, x_{n+1} + x_{n+2}\, x \\ &= b\, x_{n+1} + a\, x_{n+1}\, x + b\, x_n\, x \\ &\equiv x\, p_n(x) \qquad (\text{mod } x^2 - ax - b) \end{aligned}$$

Verifica
$$\begin{aligned} x\, p_n(x) &= b\, x_n\, x + x_{n+1}\, x^2 \qquad \downarrow \; x^2 \equiv ax+b \\ &\equiv b\, x_n\, x + x_{n+1}(ax+b) \\ &= b\, x_n\, x + a\, x_{n+1}\, x + b\, x_{n+1} \end{aligned}$$
che è quello di sopra

Quindi $p_{n+1}(x) = x\, p_n(x)$, da cui

$$\begin{aligned} p_n(x) &= x^n p_0(x) \qquad (\text{mod } x^2 - ax - b) \\ &= x^n (b x_0 + x_1 x) \end{aligned}$$

Come determino la classe di $p_n(x)$ mod $x^2 - ax + b$ ?

$$x^n (b x_0 + x_1 x) = \underbrace{b\, x_{n+1}}_{\text{da trovare}} + \underbrace{x_n}_{} \, x + q_n(x)(x^2 - ax - b) \qquad (*)$$

Sostituendo $x = \lambda$ e $x = \mu$ trovo $x_{n+1}$ ed $x_n$

$$\lambda^n (b x_0 + x_1 \lambda) = b x_{n+1} + x_n \lambda$$
$$\mu^n (b x_0 + x_1 \mu) = b x_{n+1} + x_n \mu$$

$\rightsquigarrow$ risolvendo trovo $x_{n+1}$ e $x_n$

Se $\lambda$ ha molt. 2 sostituisco $\lambda$ nella ($*$) e nella sua derivata

— o — o —

$\boxed{\text{INTERPRETAZIONE 2}}$ Considero come incognita il vettore

$v_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$. Allora

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_{n+1} + b x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A v_n$$

da cui

$$v_n = A^n v_0$$

Per calcolare $A^n$ basta diagonalizzare

$$M^{-1} A M = D$$
$$M^{-1} A^n M = D^n$$
$$A^n = M D^n M^{-1}$$

Chi sono i tizi sulla diagonale? Gli autovalori di A

$$\begin{pmatrix} a-x & b \\ 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \text{Det}: (a-x)(-x) - b = 0$$
$$x^2 - ax - b = 0$$

☺

Nel caso in cui le radici sono doppie o davvero complesse
$\rightsquigarrow$ forma canonica di Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

— o — o —

**Conclusione** L'algoritmo descritto per l'ordine 2 funziona per ricorrenze lineari di ogni ordine.

**Esempio** (Fibonacci) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $\quad x_0 = 0 \quad x_1 = 1$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Soluz. generale

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Calcolo $c_1$ e $c_2$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \qquad c_2 = -c_1$$

$\rightsquigarrow c_1\sqrt{5} = 1$

$\rightsquigarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Quindi

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Oss. Anche se ci sono radici, queste poi si "devono" semplificare

**Esercizio 2** $x_{n+2} = 7x_{n+1} + 12x_n$ $\quad x_0 = 2016 \quad x_1 = 7024$

Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Pol. caratteristico: $x^2 - 7x - 12 = 0$ $\qquad \dfrac{7 \pm \sqrt{49+48}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{97}}{2}$

Sol. generale: $x_n = c_1 \left(\dfrac{7+\sqrt{97}}{2}\right)^n + c_2 \left(\dfrac{7-\sqrt{97}}{2}\right)^n$

termine che comanda

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{7+\sqrt{97}}{2}$$

(raccolgo sopra e sotto la sua potenza)

Tutto questo funziona se verifico che $c_1 \neq 0$.
Se per assurdo avessi che $c_1 = 0$, allora

$x_n = c_2 \left( \frac{7-\sqrt{97}}{2} \right)^n$, ma allora $\frac{x_1}{x_0} = \frac{7-\sqrt{97}}{2}$ e questo non è vero.

— o — o —

## Cosa succede se la ricorrenza non è omogenea

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 2n$$

Considero l'omogenea associata $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$\boxed{c_1 3^n + c_2 4^n}$ sol. gen. omogenea

Cerco una soluzione speciale della non omogenea di tipo polinomio di 1° grado

$x_n = an + b$ con $a$ e $b$ incogniti

$$\underbrace{a(n+2)+b}_{x_{n+2}} = \underbrace{7[a(n+1)+b]}_{7x_{n+1}} \underbrace{-12(an+b)}_{-12x_n} \underbrace{+2n}_{+2n}$$

$$an + 2a + b = 7an + 7a + 7b - 12an - 12b + 2n$$

$6an - 5a + 6b = 2n$

$6a = 2 \rightsquigarrow a = \frac{1}{3}$

$6b = 3a$

$b = \frac{6}{5}a = \frac{2}{5}$

Sol. gen. : $\boxed{x_n = \frac{1}{3}n + \frac{2}{5} + a\,3^n + b\,4^n}$

Conoscendo le cond. iniziali posso trovare $a$ e $b$.

$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 2^n \rightsquigarrow$ provo con $x_n = a\,2^n$

$$a\,2^{n+2} = 7a\,2^{n+1} - 12a\cdot 2^n + 2^n$$

$$4a = 14a - 12a + 1 \qquad 2a = 1 \qquad a = \frac{1}{2}$$

$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 3^n \rightsquigarrow$ provo con $x_n = a\,n\,3^n$

$$a(n+2)\cancel{3^{n+2}} = 7a(n+1)\cancel{3^{n+1}} - 12an\cancel{3^n} + \cancel{3^n}\,1$$

$$\cancel{9an} + 18a = \cancel{21an} + 21a - \cancel{12an} + 1 \rightsquigarrow a = -\frac{1}{3}$$

<u>Esercizio</u> $\quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad x_0 = 2017$

Domanda: esistono valori $x_1$ per cui la succ. è limitata?

Formula: $\quad x_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \underbrace{b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\to 0}$ perché $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$

La succ. è limitata $\Leftrightarrow a = 0$

Deve essere $\quad x_n = b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Imponendo $x_0 = 2017$ trovo $b = 2017$

Quindi l'unico valore $x_1$ per cui $x_n$ risulta limitata è

$$x_1 = 2017\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$