10 Sviluppi di Taylor

10.1 Fattoriale

Definizione 10.1.1 (Fattoriale)**.** *Dato un $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ definiamo un fattoriale come il prodotto dei primi n numeri naturali:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$$

Note 10.1.1. Nota che $0! = 1$ per definizione.

Esempio 10.1.1. $1! = 1$ $\quad 2! = 1 \cdot 2 = 2$ $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $\quad 4! = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$

Possiamo definire un uguaglianza per definire il fattoriale:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \text{ dove } (n+1)! = [1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n] \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

10.2 Sommatorie

Supponiamo di avere dei numeri naturali indicizzati con un numero naturale.

$$a_1, a_2, ..., a_n \text{ e } a_j \in \mathbb{R} \text{ con } j \in \mathbb{N}$$

Per esempio si potrebbe prendere $a_j = \frac{1}{j}$ quindi: $a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ecc. Oppure possiamo $a_j = \sqrt{j}$ quindi: $a_1 = \sqrt{1}$, $a_2 = \sqrt{2}$, ecc.

Definizione 10.2.1 (Sommatoria)**.** *Definisco sommatoria degli a_j per j che va da m ad n dove $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \leq n$, e si scrivere*[9]*:*

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n$$

Esempio 10.2.1. $\sum\limits_{j=1}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{5}$

Esempio 10.2.2. $\sum\limits_{j=0}^{3} j^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

10.3 Formula di Taylor

10.3.1 Taylor con resto di Peano

Supponiamo di avere una funzione f derivabile nel punto $x_0 \in (a, b)$, allora abbiamo visto che posso scrivere $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$. Abbiamo dunque un polinomi di grado 1 ungule a $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ed un resto $o(x - x_0)$, f quindi differisce dal polinomio per un resto che è infinitesimo rispetto a $x - x_0$ cioè $\lim\limits_{x \to x_0} = \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0$.

Posso precisare meglio la quantità di $o(x - x_0)$ ma f deve essere derivabile più volte nel punto x_0.

Definizione 10.3.1 (Formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Dato una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile n volte in x_0 ed almeno $n - 1$ volte nel resto dell'intervallo (a,b) (cioè in $(a, b) \setminus \{x_0\}$) allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ ed una funzione $R_n(x)$ tale che:*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \text{ e } R_n(x) = o(x - x_0)^n \text{ per } x \to x_0$$

Il polinomio $P_n(x)$ ha la seguente forma:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j$$

Scritto in maniera esplicita:

$$P_n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0)\frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Osservazione 10.3.1. Il grado massimo del polinomio è correlato all'ordine di infinitesimo del resto. Cioè P_n è di grado n e $R_n = o(x-x_0)^n$. Questo vuol dire che: $f(x)-P_n(x) = o((x-x_0)^n)$, $o((x-x_0)^n)$ è la differenza fra la funzione ed il polinomio che l'approssima.

[9] Usiamo j per convenzione ma è possibile utilizzare qualsiasi variabile

10.3.2 Taylor con resto di Lagrange

Definizione 10.3.2 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Dato una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ e f derivabili in $n+1$ volte in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ e n volte in x_0. Allora $f(x) = P_n + R_n(x)$ ed esiste z compreso tra x e x_0 tale che:*

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dico un punto compreso fra x e x_0 perché a priori non so quali dei due valori sta a destra e quale sta a sinistra, quindi parlo semplicemente di punto compreso.

10.3.3 Esempi di formula di Taylor

Esempio 10.3.1. $f(x) = e^x$ e $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ... $f^{(j)}(x) = e^x \; \forall j \in \mathbb{N}$. La calcolo in $x_0 = 0$ [10].
$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, ..., $f^j(0) = 1$. Quindi $e^x = (\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}) + o(x^n) = (\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot (x-0)^j) + o(x^n)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
Per esempio in ordine 2: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, se lo confrontiamo con il limite notevole $e^x = 1+x+o(x)$ vediamo che $o(x)$ (che è $R_1(x)$)in realtà è $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (che è $R_2(x)$).

Osservazione 10.3.2. $R_2(x)$ in particolare è un $o(x)$ perché se faccio $\frac{R_2(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x} = \frac{x}{2}+o(x) \to 0$ se $x \to 0$. Quella con il grado 2 è più precisa di quella con il grado 1.

Esempio 10.3.2. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$.
$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$. $\sin x = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{j!} \cdot x^j + R_n(x)$.
$\sin x = 0 + \frac{x}{1} + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!+o(x^3)} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ordine $n = 3$.
In questo caso $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ e $R_3(x) = o(x^3)$.
Proviamo con ordine 4: $\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 1\frac{x^3}{3!} + o \cdot \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
In questo caso invece $P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$ e $R_4(x) = o(x^4)$, vediamo che in questo caso $P_3(x) = P_4(x)$.

Ora confrontiamo:
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ordine 3 $\quad\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ ordine 4.
Possiamo vedere che sono vere entrambi ma la seconda è più precisa perché ha un resto più piccolo.
Allo stesso modo $\sin x = x + o(x)$ ma visto che sappiamo che la derivata seconda del seno calcolato in 0 è 0 possiamo scrivere in maniera più precisa $\sin x = x + o(x^2)$.

10.4 Taylor per le funzioni elementari

Possiamo dunque ora scrivere le varie formule di Taylo per delle funzioni ricorrenti.

Formula seno: $\sin x = (\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j+1)!}) + o(x^{2n+2})$

Esempio 10.4.1. Proviamo questa formula con $n = 2$.

$\frac{(-1)^0 \cdot x^{2 \cdot 0+1}}{(2 \cdot 0+1} + \frac{(-1)^1 \cdot x^{2 \cdot 1+1}}{(2 \cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 \cdot x^{2 \cdot 2 \cdot 1}}{(2 \cdot 2+1)!} + o(x^{2 \cdot 2+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$.

Formula coseno: $\cos x = (\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j)!}) + o(x^{2n+1})$

Esempio 10.4.2. Formula di Taylor di grado 7 per il coseno:
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$.

[10] Si dice che in questo caso si fa centrato in 0

Formula logaritmo: $\log(1+x) = (\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{x^j}{j}) + o(x^n)$

Esempio 10.4.3. Facciamo un esempio con $n = 4$ della formula del logaritmo:
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

Note 10.4.1. Nota che il coseno è una funzione peri ed il polinomio dalla funzione di Taylor contiene sempre potenze pari mentre il seno essendo dispari contiene solo dispari.

Formula tangente: per la tangente la formula è molto complicata quindi scriviamo semplicemente:
$\tan(x) = x + o(x^2)$ e $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Formula Arcotangente: $\arctan(x) = (\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{2j+1}) + o(x^{2n+2})$ Quindi sviluppata al settimo grado:
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$

Note 10.4.2. Nota che anche nell'arcotangente come nel logaritmo non c'è il fattoriale.

Formula Binomiale: dato $\alpha \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere:

$(1+\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n + o(x^n)$.

Esempio 10.4.4. Con $\alpha = \frac{1}{2}$ quindi $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.
$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}\cdot x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

Esempio 10.4.5. Con invece $\alpha = -1$ quindi con $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$.
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}\cdot x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}\cdot x^3 + o(x^3) = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{3!}{3!}\cdot x^3 + o(x^3) = 1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

Quindi se sostituiamo $x = -t$ abbiamo che:
$\frac{1}{1-t} = 1 - (-t) + (-t)^2 - (-t^3) + o(t^3) = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3)$, generalizzando possiamo scrivere:
$\frac{1}{1-t} = 1 - (-t) + (-t)^2 - (-t^3) + ... + t^n + o(t^n)$

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^2 n}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n\frac{x^{2x+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$

Table 8: Formule di taylor

10.5 Utilizzo di Taylor nei limiti

Esempio 10.5.1. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1}$. Si può utilizzare gli o-piccoli:
$\sin x = x + o(x^2) \qquad e^x = 1 + x + o(x) \qquad \log(1+x) = x + o(x)$

$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{x + o(x^2) - x}{1 + x + o(x) - (x + o(x)) - 1} = \frac{o(x^2)}{o(x)}$ ma anche questo è indeterminato.

Dobbiamo quindi andare un po' avanti negli sviluppi del numeratore e del denominatore.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} o(x^2)$

$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x - \frac{x^2}{2} + (x^2)) - 1} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{x}{6} + o(x^4)}{1 + o(x^2)} = \frac{0}{1} = 0$

Esempio 10.5.2. $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin x^2}{x^4}$
$\sin t = t + o(t^2) \qquad t = x^2$
$\sin x^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x^2) + (o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3) \quad \sin x^2 = x^2 + o(x^4)$

$\frac{(\sin x)^2 - \sin x^2}{x^4} = \frac{x^2 + o(x^3) - x^2 + o(x^4)}{x^4} = \frac{o(x^2)}{x^4} = \frac{o(x^2)}{x^3} \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$
Questa è una forma indeterminata perché $\frac{o(x^2)}{x^3} \to 0$ e $\frac{1}{x} \to \infty$. Quindi aumentiamo il grado dell'approssimazione andando a migliorare $(\sin x)^2$. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$(\sin x)^2 = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + (o(x^4))^2 - 2x \cdot \frac{x^2}{6} + 2x \cdot o(x^4) - 2 \cdot \frac{x^3}{6} \cdot o(x^4) = x^2 \frac{x^6}{36} + o(x^8) - \frac{x^4}{3} + o(x^5) + o(x^7) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$
$\frac{(\sin x)^2 - \sin x^2}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - x^2 + o(x^4)}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1} \to -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}$.
(Divido sopra e sotto per x^4)