ANALISI 1 — LEZIONE 107

Note Title 09/05/2025

LIMINF E LIMSUP DI SUCCESSIONI

Brutalmente : $a_n = (-1)^n \rightsquigarrow \limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$

$a_n = \arctan(n + (-1)^n n^2) \rightsquigarrow \limsup_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$, $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\frac{\pi}{2}$

Def. (limsup) Sia a_n una successione

(i) Se a_n NON è limitata superiormente diciamo che $\boxed{\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$

(ii) Se a_n è limitata superiormente, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ possiamo definire

$$S_m := \sup\{a_k : k \geq m\}$$

[Nota bene : $S_m \leq M$, quindi $S_m \in \mathbb{R}$, e inoltre $S_{m+1} \leq S_m$ perché è il sup su meno roba, quindi $\{S_m\}$ è debolm. decr.]

Allora si pone

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{m\to+\infty} S_m}$$

questo esiste per forza e sta in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

<u>Def.</u> (liminf) Sia a_n una successione

(i) Se a_n NON è limitata inferiormente, allora $\boxed{\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$

(ii) Se a_n è limitata inferiormente, allora si pone

$$I_n := \inf\{a_k : k \geq n\} \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e infine

$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} I_n}$$

questo limite esiste perché I_n è debolm. cresc.
Questo limite sta in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

BUONE NOTIZIE ① liminf e limsup esistono sempre finiti o $\pm\infty$.
② Vale sempre la disuguaglianza

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

③ Vale il segno di $=$ se e solo se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$, che in questo caso coincide con i due

<u>Esempio facile 1</u> $a_n = (-1)^n$
Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

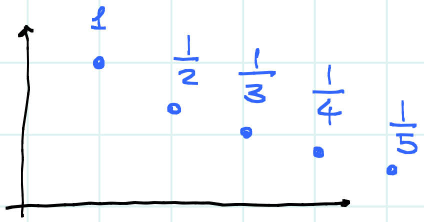
$$S_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = -1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi

$$S_n \to 1 \qquad\qquad I_n \to -1$$

limsup   liminf

Esempio facile 2 $\quad a_n = \frac{1}{n}$



$S_n = \sup\left\{ \frac{1}{k} : k \geq n \right\} = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

il 1° è il + grande

$I_n = \inf\left\{ \frac{1}{k} : k \geq n \right\} = 0 \quad \forall n \geq 1$

Quindi $\quad S_n \to 0 \quad$ limsup $\qquad I_n \to 0 \quad$ liminf

$\boxed{\text{Caratterizzazione del limsup}}$

Una volta: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ definitivamente

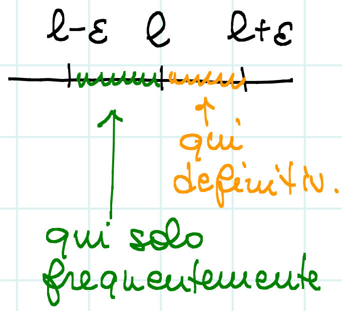
Adesso: $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ frequentemente

cioè infinite volte

Una volta: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente

Adesso: $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$



$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \qquad a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente

$\qquad\qquad\qquad\quad a_n \geq \ell - \varepsilon$ frequentemente

Una volta: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M$ definitivamente

Adesso è la stessa cosa perché dire $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ è la

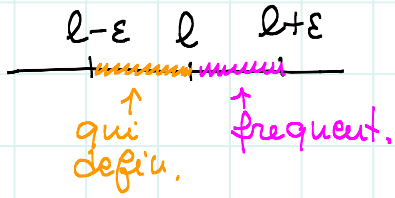
stessa cosa che dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Caratterizzazione del liminf

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \le M$ frequentemente

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \rightsquigarrow$ è lo stesso che dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$



$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon \le a_n$ definitiv.

$a_n \le \ell + \varepsilon$ frequentemente.

$\boxed{\text{Utilità}}$ Tutti i teoremi sui limiti di successioni si enunciano con molte meno storie usando liminf e limsup

① **Teorema del confronto a 2** Sia $a_n \le b_n$ definitiv.

Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{n\to+\infty} b_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n \le \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

② **Teorema dei carabinieri** Sia $a_n \le b_n \le c_n$ definitiv.

Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto a due}}}{\le} \liminf_{n\to+\infty} b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ovvietà}}}{\le} \limsup_{n\to+\infty} b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto a due}}}{\le} \limsup_{n\to+\infty} c_n$$

In particolare, se a_n e c_n hanno lo stesso limite, allora i due termini ai lati sono uguali, ma allora sono uguali anche i due centrali, quindi esiste il limite di b_n perché il suo liminf e limsup coincidono

③ Teorema delle sottosuccessioni Se a_n è una succ. e a_{k_n} è una sua sottosuccessione, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} a_{k_n} \underset{\text{ovvia}}{\leq} \limsup_{n\to+\infty} a_{k_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

Come prima, se a_n ha limite (in $\mathbb{R}$ oppure $\pm\infty$), allora i due laterali coincidono, ma allora coincidono i due centrali, quindi la sottosucc. ha lo stesso limite della succ.

— o — o —