## Le funzioni convesse sono derivabili?

NO (basta pensare a $|x|$), ma QUASI.

**Def.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \text{Int}(A)$, sia $f : A \to \mathbb{R}$.
Si definiscono derivata destra e sinistra i limiti (posto che esistano in $\mathbb{R}$)

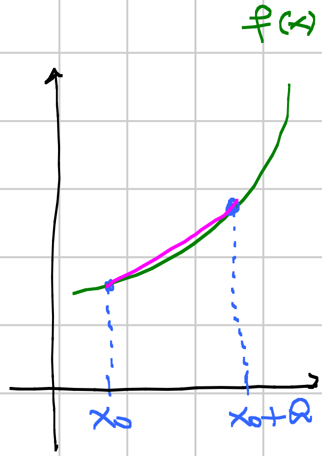
$$\boxed{\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ f'_-(x_0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}}$$

**Oss.** Con un cambio di variabili $h = -k$ possiamo scrivere

$$f'_-(x_0) = \lim_{k \to 0^+} \frac{f(x_0-k) - f(x_0)}{-k} = \lim_{k \to 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0-k)}{k}$$

**Teorema** Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, sia $x_0 \in \text{Int}(C)$.
Allora esistono per forza

$$f'_+(x_0) \qquad \text{e} \qquad f'_-(x_0)$$




$\boxed{\text{Dim.}}$ Vediamo $f'_+(x_0)$. È il limite di

$R(x_0, x_0+h)$, ma questa quantità è monotona in $h$, cioè

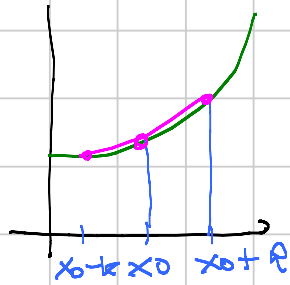
$h \to R(x_0, x_0+h)$ è debolm. crescente

Questo dice che $\lim\limits_{h \to 0^+} r(x_0, x_0+h)$ esiste in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Devo solo escludere che sia $-\infty$, ma questo segue dal fatto che

$$r(x_0, x_0+h) \geq r(x_0-k, x_0) \quad \text{per ogni } k>0$$

per il lemma dei 3 rapporti incrementali.




Stesso discorso a sx.

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Proprietà delle derivate destra e sinistra)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Allora

(1) $\forall x_0 \in \operatorname{Int}(C)$ vale $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$

(2) se $x_0$ e $y_0$ sono in $\operatorname{Int}(C)$ e $x_0 < y_0$, allora

$$f'_-(x_0) \underset{(1)}{\leq} f'_+(x_0) \leq f'_-(y_0) \underset{(1)}{\leq} f'_+(y_0)$$

(3) La derivata destra è continua a destra, cioè

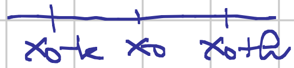
$$\lim_{x \to x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0) \qquad \forall x_0 \in \operatorname{Int}(C)$$

e analogamente la der. sx è continua a sx, cioè

$$\lim_{x \to x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0) \qquad \forall x_0 \in \operatorname{Int}(C).$$

$\boxed{\text{Dim (1)}}$ Per ogni $h > 0$ e $k > 0$ piccoli a sufficienza vale

$$r(x_0 - k, x_0) \leq r(x_0, x_0 + h) \qquad (\text{lemma 2 rapporti})$$




Facendo il limite per $h \to 0^+$ ottengo

$$r(x_0 - k, x_0) \leq f'_+(x_0)$$

Facendo ora il limite per $k \to 0^+$ ottengo

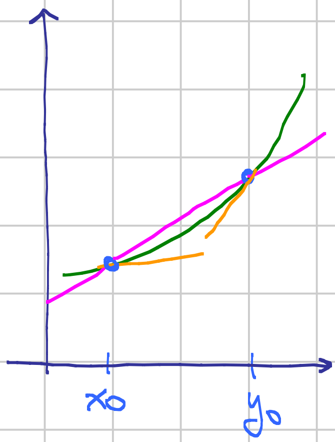
$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

che è quello che volevo.

$\boxed{\text{Dim (2)}}$ Tesi: $x_0 < y_0 \implies f'_+(x_0) \leq f'_-(y_0)$

Dimostriamo di +, cioè che

$$\boxed{f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0)}$$




Per $h > 0$ abbastanza piccolo vale

$$r(x_0, x_0 + h) \leq r(x_0, y_0) \qquad \text{basta } x_0 + h < y_0$$

Passando al lim. per $h \to 0^+$ ottengo $f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0)$

Analogamente per $k > 0$ abb. piccolo vale

$$r(x_0, y_0) \leq r(y_0 - k, y_0) \qquad \text{basta } y_0 - k > x_0$$

Per $k \to 0^+$ ottengo $\quad r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0)$.

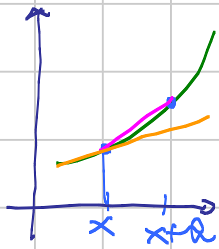
$\boxed{\text{Dim (3)}}$ Devo dimostrare che $f'_+(x)$ è continua a destra.

Disug. facile $\quad f'_+(x_0) \leq f'_+(x) \quad$ per ogni $x \geq x_0$

Quindi $\quad \boxed{f'_+(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0^+} f'_+(x)}$

Disug. "difficile" Per ogni $x \in \text{Int}(C)$ e per ogni $h > 0$ vale

$$f'_+(x) \leq r(x, x+h)$$




Facendo il limite per $x \to x_0^+$ otteniamo

$$\limsup_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq \limsup_{x \to x_0^+} r(x, x+h)$$

$$= \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è un} \\ \text{limite}}}{=} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= r(x_0, x_0+h)$$

Abbiamo scoperto che

$$\limsup_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq r(x_0, x_0+h)$$ per ogni $h > 0$ abbastanza piccolo

Passando al lim per $h \to 0^+$ abbiamo

$$\boxed{\limsup_{x \to x_0^+} f'_+(x) \leq f'_+(x_0)}$$

Mettendo insieme le 2 disug. abbiamo la tesi

Esercizio Rifare la dim. per quanto riguarda la deriv. sx.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, sia $x_0 \in \text{Int}(C)$, sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa.

Allora sono fatti equivalenti

(1) $f'(x_0)$ esiste

(2) $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

(3) $f'_+(x)$ è continua a sx in $x_0$

(4) $f'_-(x)$ è continua a dx in $x_0$.

$\boxed{\text{Dim}}$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) è praticamente ovvio

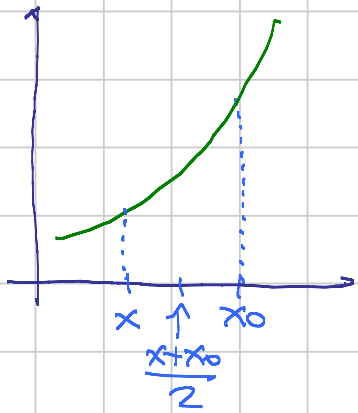
(3) $\Rightarrow$ (1), oppure equivalentemente (3) $\Rightarrow$ (2)

<u>Ipotesi</u> $f'_+$ continua a sx in $x_0$

<u>Tesi</u> $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (basta il $\le$ che è quello non ovvio)

Per ogni $x < x_0$ vale che

$$f'_+(x) \le f'_-\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$




Passo al limite per $x \to x_0^-$.

Il LHS $\to f'_+(x_0)$ per ipotesi

Il RHS $\to f'_-(x_0)$ perché la derivata sx è sempre continua a sx

Quindi: $f'_+(x_0) \le f'_-(x_0)$ che è la disug. voluta.

Ancora meglio: per ogni $x < x_0$ vale $f'_+(x) \le f'_-(x_0)$

per ipotesi $\longrightarrow \downarrow \qquad \downarrow$

$f'_+(x_0) \le f'_-(x_0)$

Resta da dim. che (1) ⇒ (3)

Ipotesi: $f$ è derivabile in $x_0$

Tesi: $f_+'(x_0)$ è continua a sx in $x_0$.

Vale un fatto più generale: senza ulteriori ipotesi è sempre vero che

$$\lim_{x \to x_0^-} f_+'(x) = f_-'(x_0)$$

Infatti, per ogni $x < x_0$ vale

$$\underset{\substack{\downarrow \\ f_-'(x_0)}}{\boxed{f_-'(x)}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ f_-'(x_0)}}{f_+'(x)} \le \underset{\substack{\downarrow \\ f_-'(x_0)}}{\boxed{f_-'(x_0)}}$$

lim. sx di der sx

In particolare, se $f'(x_0)$ esiste, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f_+'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sempre}}}{=} f_-'(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } f \text{ è derivabile in } x_0.}}{=} f_+'(x_0)$$

— o — o —