Teoremoni sulle funzioni unif. continue

① HEINE – CANTOR
② ESTENSIONE

Teoremini

① Sublinearità
② Asintotica a U.C. $\Rightarrow$ U.C.

Teorema di HEINE-CANTOR

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che
(i) f continua in A,
(ii) A compatto.
Allora f è unif. cont. in A.

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (Per assurdo via cpt. per succ.)

Devo dim. che f è U.C., cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Supponiamo per assurdo che sia falsa, quindi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in A \ \exists y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$. Trovo x_n e y_n in A t.c.

$$x_n - \frac{1}{n} \le y_n \le x_n + \frac{1}{n} \qquad e \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_0$$

Poiché A è cpt. per successioni, x_n ha una s. succ. conv. in A, cioè

$$x_{n_k} \longrightarrow x_\infty \in A$$

Per i carabinieri $\quad x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \le y_{n_k} \le x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ anche

$-$ (corretto dopo video)

$$y_{n_k} \longrightarrow x_\infty \qquad \text{(lo stesso di sopra)}$$

Ora uso che f è continua (per succ.) in A

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon_0$$

$$0 = f(x_\infty) - f(x_\infty) \ge \varepsilon_0$$ e questo è assurdo.

— o — o —

<u>Lemma</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funz. unif. cont.
Sia $\{x_n\} \subseteq A$ una succ. di Cauchy.
Allora $\{f(x_n)\}$ è una succ. di Cauchy.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $\varepsilon > 0$ e voglio trovare $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f(x_n) - f(x_m)| \le \varepsilon \qquad \forall n \ge n_0 \quad \forall m \ge n_0 \qquad (*)$$

Dato l'ε, prendo il $\delta > 0$ corrispondente nella def. di u.c.

Poiché $\{x_n\}$ è di Cauchy, esisterà $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_n - x_m| \le \delta \qquad \forall n \ge n_0 \quad \forall m \ge n_0$$

A questo punto per unif. continuità vale la $(*)$. □

Oss. ① Le funzioni u.c. mandano succ. di Cauchy in succ. di C.

② Le funzioni continue in generale non mandano succ. di C. in succ. di Cauchy (esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$ continua in $(0, +\infty)$ $x_n = \frac{1}{n}$ è succ. di C., ma $f(x_n) = n$ non lo è)

③ Se una f continua manda succ. di C. in succ. di C., non è detto che sia u.c. (esempio $f(x) = x^2$)

④ Le funz. cont. mandano succ. conv. ad un limite nell'insieme di def. a succ. conv.

$\boxed{\text{Teorema di estensione}}$ Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funz. unif. cont. Allora è possibile estendere f alla chiusura, cioè esiste

$$\hat{f} : Clos(A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\hat{f}$ è unif. continua e $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$. Inoltre l'estensione è unica.

Corollario classico Se $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ è u.c., allora può essere estesa in modo unico ad una $\hat{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$, in modo che rimanga continua, anzi unif. cont.

$\boxed{\text{Dim}}$

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Definizione dell'estensione $\hat{f}: Clos(A) \to \mathbb{R}$.

Prendo un qualunque p.to $x_0 \in Clos(A)$. Per un lemma visto tante volte, esiste $\{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \to x_0$.
La succ. x_n è di Cauchy perché ha limite.
Poiché f è u.c., per il lemma precedente la succ. $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy, quindi ha un limite reale, diciamo

$$f(x_n) \longrightarrow y_0.$$

Pongo

$$\hat{f}(x_0) = y_0.$$

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Dimostro che la def. è ben posta, cioè che se uso due succ. diverse, ottengo comunque lo stesso y_0.

Quindi supponiamo che $\quad x_n \to x_0 \,, \qquad z_n \to x_0$

Sappiamo che $\quad f(x_n) \to y_0 \,, \qquad f(z_n) \to w_0$

Vorrei che $y_0 = w_0$.

Due modi per vederlo

→ <u>Modo elegante</u>: costruisco una nuova succ. che tende a x_0 alternando gli x_n e gli z_n, cioè $x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, z_3, \ldots$ quindi per il lemma prec.

$$f(x_1), f(z_1), f(x_2), f(z_2) \ldots \ldots$$

deve avere un limite, che quindi deve essere il valore comune di y_0 e w_0.

→ <u>Modo bovino</u>: fisso $\varepsilon > 0$ e voglio dimostrare che $|w_0 - y_0| \leq \varepsilon$.

Prendo il corr. δ nell'u.c. di f. Poiché $x_n \to x_0$ e $z_n \to x_0$ esisterà $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|x_n - z_n| \leq \delta \qquad \forall n \geq n_0$$

Ma allora per u.c.

$$|f(x_n) - f(z_n)| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

e passando al limite ottengo

$$|y_0 - w_0| \leq \varepsilon .$$

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Dimostro che $\hat{f}$ estende f, cioè

$$\hat{f}(x) = f(x) \qquad \forall x \in A$$

Se $x \in A$ posso usare la succ. approssimante $x_n \equiv x$, e quindi

$$\hat{f}(x) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\substack{\shortparallel \\ f(x) \ \forall n \in \mathbb{N}}} = f(x)$$

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Dimostro che $\hat f$ è u.c. in Clos(A).

Prendo $\varepsilon > 0$, prendo il $\delta > 0$ corrispondente nella u.c. di f in A, e prendo un qualunque $\hat\delta \in (0, \delta)$.
Dico che $\hat\delta$ va bene per l'u.c. di $\hat f$, cioè se x e y in Clos(A) verificano $|x-y| \le \hat\delta$, allora di siamo

$$|\hat f(x) - \hat f(y)| \le \varepsilon.$$

Prendo succ. approx $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Poiché $|x-y| \le \hat\delta$, allora definitivamente

$$|x_n - y_n| \le \delta$$

e quindi per u.c.

$$|\underset{\substack{\downarrow \\ \hat f(x)}}{f(x_n)} - \underset{\substack{\downarrow \\ \hat f(y)}}{f(y_n)}| \le \varepsilon$$

e passando al limite otteniamo $|\hat f(x) - \hat f(y)| \le \varepsilon$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim 2 di Heine - Cantor}}$ (Apparentemente diretta via cpt. per ricoprimenti)

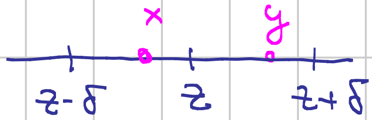
Ipotesi: A cpt. e f continua in A.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ogni $z \in A$ esiste $\delta > 0$, che però può dipendere da z, tale che

$$\forall w \in [z-\delta, z+\delta] \cap A \quad \text{vale} \quad |f(z) - f(w)| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Osservo che, se x e y stanno in $[z-\delta, z+\delta] \cap A$ vale

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



Quindi ok se x e y stanno nello stesso intornino di z.

Ora osservo che gli intervalli del tipo $(z-\delta(z), z+\delta(z))$ al variare di z in A ricoprono A.

<u>Vicolo cieco</u>: considerare un sottoricoprimento finito e prendere il + piccolo δ NON basta (capire perché: se prendo x e y con $|x-y| \le \delta$, non è detto che stiano nello stesso intervallino del sottoricopr.)

<u>Via d'uscita</u>: usare il RAGGIO MAGICO. Esiste $r>0$ tale che per ogni $z \in A$ l'intervallo $(z-r, z+r)$ sta in uno degli intervalli del ricoprimento.

Ora dico che questo $\frac{r}{2}$ fa funzionare l'u.c. Infatti se x e y verificano $|x-y| \le \frac{r}{2}$, allora $y \in [x-\frac{r}{2}, x+\frac{r}{2}]$, quindi x e y stanno nello stesso intervallo del ricoprimento originale, quindi

$$|f(x)-f(y)| \le \varepsilon.$$

—o—o—

<u>Oss.</u> In realtà l'esistenza del raggio magico si dimostra comunque per assurdo ☺.