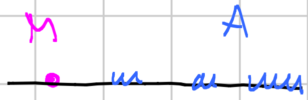
ANALISI 1 — LEZIONE 006

Note Title 28/09/2016

$\boxed{\text{INF-SUP-MAX-MIN}}$ Raffica di definizioni.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.



Def. Si dice che

- A è LIMITATO INFERIORMENTE se

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } M \le a \quad \forall a \in A}$$

Si dicono minoranti di A tutti gli M per cui vale la precedente

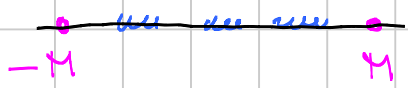
- A è LIMITATO SUPERIORMENTE se

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } M \ge a \quad \forall a \in A}$$

Tutti gli M che vanno bene si dicono maggioranti di A

- A è LIMITATO se è contemporaneamente lim. sup. e inf.

Oss. A è limitato se e solo se



$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underbrace{|a| \le M}_{} \quad \forall a \in A}$$

$$-M \le a \le M$$

Def. (Massimo e minimo di un insieme) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.
Si dice che M è il massimo di A, e si scrive

$$M = \max A$$

se

(i) $M \ge a \quad \forall a \in A$ ← dice solo che M è maggiorante

(ii) $M \in A$ ← sta nell'insieme

Analogamente, $m = \min A$ se
(i) $m \leq a \quad \forall a \in A$
(ii) $m \in A$.

<u>Oss.</u> ① Max e min non sono obbligati ad esistere
② Quando max / min esistono, sono unici (dimostrarlo!)
③ I maggioranti non sono obbligati ad esistere, anzi esistono se e solo se A è limit. sup.
④ Se i maggioranti esistono, non sono mai unici.
Idem per i minoranti.

<u>Esempi</u>
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ È limitato inferiormente e i minoranti sono tutti i numeri $M \leq 0$.
Non è limitato superiormente.
- $[0,1)$ È limitato inf. e sup.
I minoranti sono tutti i numeri $M \leq 0$
Il minimo è 0.
I maggioranti sono tutti i numeri $M \geq 1$
Il massimo non esiste

<u>Def.</u> (Estremo superiore) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.
- Si dice che $\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiorm.
- Si dice che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se A è lim. super. e L è il minimo dei maggioranti di A.

<u>Def.</u> (Estremo inferiore) ...
- ... $\inf A = -\infty$ se A non è lim. infer.
- ... $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se A è lim. infer. e l è il massimo dei minoranti.

— o — o —

Teorema (Esistenza del sup)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ e A limitato superiormente.
Allora esiste il minimo dei maggioranti.

Dim. Sia B l'insieme dei maggioranti di A.
B non è $\emptyset$ perché A è lim. sup.
L'insieme A sta tutto a sx di B per def. di maggiorante
Per l'assioma di continuità esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$
tale che

$a \leq c \quad \forall a \in A$ (c è maggiorante, cioè $c \in B$)
$c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è $\leq$ di tutti i maggioranti)

Questo dimostra che c è il minimo dei maggioranti. □

Esercizio Enunciare e dimostrare l'esistenza dell'inf.

Conseguenza: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Allora
- $\sup A$ e $\inf A$ esistono per forza (eventualmente $+\infty, -\infty$)
- sono sempre unici
- se esiste $\max A$, allora è anche $\sup A$. Anzi,
  esiste $\max A \iff \sup A \in A$

  Stesso discorso per l'inf.

Achtung! sup e inf di $\emptyset$. Ci sono 2 possibilità

- dire che non esistono, il che costringe sempre a controllare che $A \neq \emptyset$ quando si scrive $\sup A$ o $\inf A$.

- dire che $\left.\begin{array}{l}\sup \emptyset = -\infty \\ \inf \emptyset = +\infty\end{array}\right\}$ pensando a chi sono maggioranti e minoranti

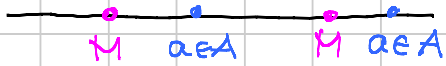
  Ma allora $\sup < \inf$, il che non è buono.

— o — o —

CARATTERIZZAZIONE DI SUP E INF

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$

① Si ha che $\sup A = +\infty$ se



$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \geq M}$$

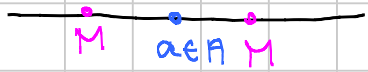
gli M interessanti sono quelli enormi

$\sup A = +\infty \iff$ NOT (esiste maggiorante)

NOT $(\exists M \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ \ a \leq M)$ $<$

$\iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A \ \ a > M$ $\geq$

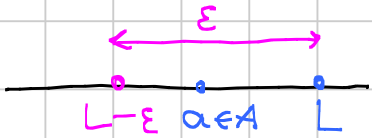
② Si ha che $\inf A = -\infty$ se



$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \leq M}$$

gli M interessanti sono quelli enormemente negativi

③ si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

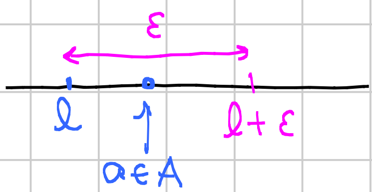


(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $L - \varepsilon \leq a$

(se non esistesse a come sopra, allora $L-\varepsilon$ sarebbe un maggiorante, dunque L non sarebbe il min dei maggioranti).

④ si ha che $\inf A = \ell \in \mathbb{R}$ se



(i) $\ell \leq a \quad \forall a \in A$

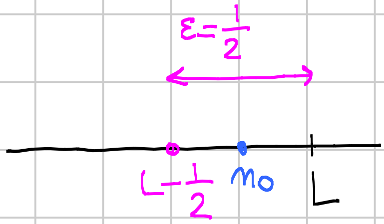
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$

<u>Oss.</u> La (i) dice che ℓ è un minorante

La (ii) dice che ℓ è il più piccolo minorante, cioè non esistono minoranti $> \ell$.

GRANDE: aggiunto dopo video

Prop.: $\sup \mathbb{N} = +\infty$



Dim. Supponiamo $\sup \mathbb{N} = L \in \mathbb{R}$.

Uso la caratterizzazione con $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n_0 \geq L - \frac{1}{2}$$

Ora $\quad n_0 + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{OS})}}{\geq} L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2}$

D'altra parte dovrebbe essere $\quad n_0 + 1 \leq L$. Ma allora

$$L + \frac{1}{2} \leq L$$

il che è assurdo (aggiungo $-L$ a dx e sx e ottengo $\frac{1}{2} \leq 0$)

Oss. Ci sarebbe da dim. che $\frac{1}{2} > 0$ ... ma questo è un bell'esercizio !!!

— o — o —