ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 22

Note Title 24/10/2023

SOTTOMATRICI Si ottengono da una matrice eliminando un po' di righe e colonne

MINORI (di una matrice)

Sono i determinanti delle sottomatrici quadrate

Esempio
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Questa matrice ha 4 minori 3×3 (posso eliminare una qualunque delle 4 colonne.

→ La matrice ha 12 minori 1×1 (singoli elementi)

→ La matrice ha 18 minori 2×2: infatti
- devo eliminare una riga (e ce ne sono 3)
- devo eliminare 2 colonne (e le posso scegliere in 6 modi)

— o — o —

RANGO

INPUT: matrice qualunque (anche rettangolare)

OUTPUT: numero intero

Quel numero rappresenta 3 cose che coincidono:

→ R-rango: max numero righe lin. indip. (dim. span righe)

→ C-rango: " " colonne " " (dim. span colonne)

→ D-rango: max dimensione di un minore $\neq 0$.
(max r per cui esiste una sottomatrice $r \times r$ con Det $\neq 0$)

Oss. Volendo usare i Determinanti, se voglio dimostrare che una matrice ha rango r devo

→ Trovare $\boxed{\text{una}}$ sottomatrice $r \times r$ con Det $\neq 0$

→ Verificare che $\boxed{\text{TUTTE}}$ le sottomatrici $(r+1) \times (r+1)$ hanno Det $= 0$.

Esempio Calcolare rango di
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango non può essere 4 o più (perché le righe sono al max 3)

Fatto generale Se A è matrice $m \times n$, allora di sicuro
$$\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Se punto a rango $= 3$, basta trovare una sottomatrice 3×3 con Det $\neq 0$

Sarrus su quella indicata: $-8-1-8 = -17 \neq 0 \rightsquigarrow$ Rango $= 3$.

Da questo so che
$$\text{Span}\{(1,2,0,-1), (3,4,1,2), (5,-1,2,0)\}$$
è un s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3. [Questo grazie a R-rango]

Allo stesso modo so che
$$\text{Span}\{(1,3,5), (2,4,-1), (0,1,2), (-1,2,0)\} = \mathbb{R}^3$$
(è un s.sp. di $\mathbb{R}^3$ di dim. 3, quindi coincide con tutto $\mathbb{R}^3$)

— o — o —

__Esempio__ Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = (1,0,2) \qquad v_2 = (2,1,3) \qquad v_3 = (-1,-2,0)$$

Calcolare la dim. dello Span

$\boxed{\text{Antico}}$ $\quad a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$ e vedo che succede.

$\boxed{\text{Moderno}}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (a righe o colonne non cambia)

$\text{Det} = -8+2+6 = 0\,!$ Non sono lin. indip.

$\rightsquigarrow$ rango ≤ 2

Inoltre esiste un minore 2×2 t.c. Det $\neq 0 \rightsquigarrow$ Rango $= 2$

$\rightsquigarrow$ Span ha dimensione 2, quindi è un piano di $\mathbb{R}^3$

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2) \rightsquigarrow \text{Dim} = 2.$$

lin. indip. per 2 motivi

$\longrightarrow$ non sono multipli

$\longrightarrow$ grazie al minore $2\times 2 \neq 0$ nella matrice che li ha come righe

__Esempio__ $\quad \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ $\quad v_1 = x^3 - x^2$, $\; v_2 = x^2 - x$, $\; v_3 = x - x^3$ $\quad$ [Si vede che $v_1+v_2+v_3=0$]

Calcolare $\underbrace{\text{dim Span}}_{2}$.

$$\begin{array}{cccc} x^3 & x^2 & x & 1 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'è un 2×2 con Det $\neq 0$

$\rightsquigarrow$ Rango $= 2, 3$

Se voglio Rango $= 3$, devo trovare una sottomatrice 3×3 con Det $\neq 0$ e l'unica possibilità è eliminare C_4 (altrimenti è 0 per forza)

Sarrus: $1 - 1 = 0 \rightsquigarrow$ Rango $= 2$

Rassegna delle proprietà del Determinante

① $\mathrm{Det}(\mathrm{Id}) = 1$ (volendo segue da Laplace)

② $\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$ (vero ma non ovvio: teorema di BINET)

[Occhio: $\mathrm{Det}(A+B)$ NON è $\mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(B)$]

③ $$\mathrm{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{det}(A)}$$

[Segue dalle prime 2 proprietà:

$$\underset{①}{1 =} \mathrm{Det}(\mathrm{Id}) \underset{A \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}}{=} \mathrm{Det}(A \cdot A^{-1}) \underset{②}{=} \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(A^{-1})$$

ne ricavo $\mathrm{Det}(A^{-1})$]

④ $\mathrm{Det}(A^t) = \mathrm{Det}(A)$

[Laplace fatto sulla prima riga di A =
Laplace " " " colonna di A^t]

⑤ $\mathrm{Det}(\lambda A) = \lambda^n \cdot \mathrm{Det}(A)$

[Volendo segue per induzione da Laplace]

⑥ Se A è una matrice diagonale (sono tutti 0 al di fuori della diagonale principale), allora

$$\mathrm{Det}(A) = \text{prod. elementi sulla diagonale}$$

[Volendo segue da Laplace o anche da Gauss]

$\boxed{\text{6-bis}}$ Come nel ⑥, anche se A è triangolare inferiore o superiore

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ ← triangolare superiore: sola roba sulla diagonale o sopra

Det = 10

[Stessa dim. del caso precedente]

⑦ Se scambio due righe (o due colonne) tra di loro, allora Det cambia segno

[Volendo segue da Gauss]

⑧ Se moltiplico per λ una sola riga o colonna, allora Det si moltiplica per λ

[Segue da Laplace rispetto a quella riga/colonna].

— o — o —