ANALISI 1 — LEZIONE 055

Note Title 28/11/2016

$\boxed{\text{INTEGRALI}}$ → PROPRI
→ IMPROPRI

Road map → come si indicano
→ significato geometrico
→ come si definiscono
→ come si calcolano

1 Notazioni

$$\int_a^b \boxed{f(x)}\, dx$$

zona di integrazione $[a,b]$

variabile di integrazione

funzione integranda

simbolo di integrale (S modificata)

Ingredienti fond : ① $[a,b]$ è zona di integrazione limitata
② integranda $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, cioè
$\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \le M \quad \forall x \in [a,b]$.

L'integrale è proprio se ci sono le 2 limitatezze

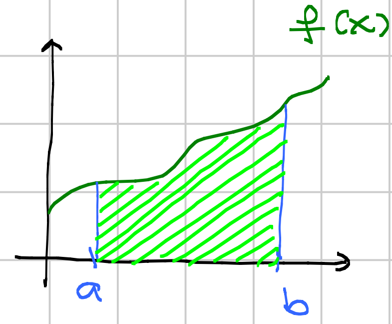
Notazione più estesa $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (estremi coincidenti)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$ (si intende $a<b$: estremi invertiti)

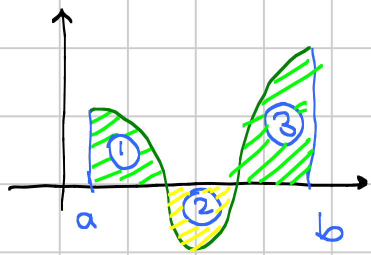
Le due sopra sono definizioni

— o — o —

② Significato geometrico



Se $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del sottografico



Se $f(x)$ ha segno variabile, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area con segno, cioè le aree sotto asse x contano con segno −

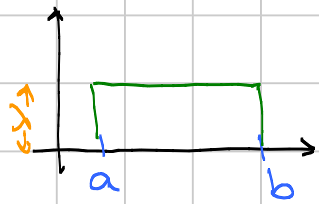
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area } ① + \text{Area } ③ - \text{Area } ②$$

③ Definizione Si chiama integrale di Riemann, ma ci sono...

Tre possibilità → DARBOUX estesa (integrale aurdiico)
equivalenti → DARBOUX ortodossa
→ RIEMANN

La definizione alla Darboux prevede 3 tappe

$\boxed{1^a \text{ tappa}}$ Caso banale : $f(x)$ costante su $[a,b]$, cioè



$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a,b]$$

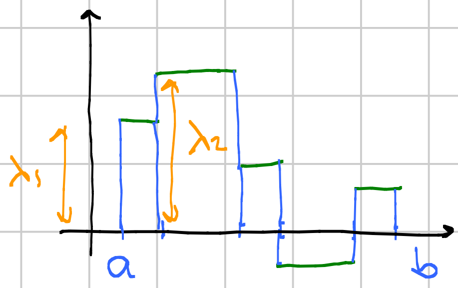
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lambda \cdot (b-a)$$

= area con segno del rettangolo

base

altezza con segno

$\boxed{2^a \text{ tappa}}$ Caso semibanale : $f(x)$ costante su sottointervalli, cioè esiste intero $n \geq 1$ e punti



$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

ed esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reali t.c.

$$f(x) = \lambda_i \quad \text{in } (x_{i-1}, x_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Come definisco f agli estremi dei sottointervalli non importa (volendo si può definire come a dx o come a sx)

<u>Oss.</u> Una funzione di questo tipo è combinazione lineare di $\underbrace{\text{funzioni caratteristiche}}$ di intervalli

vale 1 nell'intervalli e 0 altrove

Terminologia: queste funzioni si chiamano
→ funzioni semplici
→ funzioni a gradini
→ step functions

Per definizione l'integrale di una step function è

$$\int_a^b f(x)dx = \text{somma algebrica aree dei rettangoli}$$

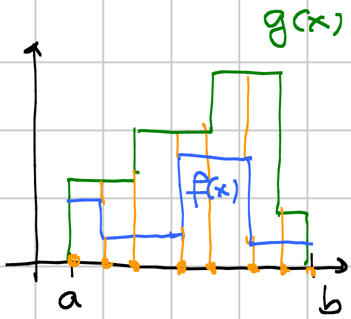
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base } i\text{-esima}}$$

altezza i-esima con segno

<u>Seccatura</u> ① Una stessa funzione a gradino si può scrivere in tanti modi come comb. lin. di caratteristiche. L'integrale definito sopra non dipende dalla scrittura (andrebbe dimostrato!)

② Se f e g sono 2 step functions e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

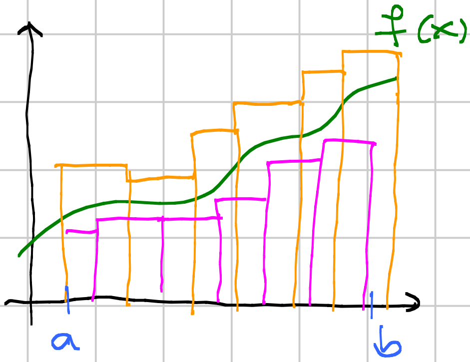
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$



<u>Lemma utile</u> Due funzioni a gradino si possono pensare definite sulla stessa suddivisione di $[a,b]$.

$\boxed{3^a \text{ tappa}}$ Caso generale $\quad f$ è una qualunque funzione limitata in $[a,b]$

Considero tutte le step functions $\geq f(x)$ e tutte quelle $\leq f(x)$ e pongo:



$$I^+(f,[a,b]) := \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \text{ è una step f e } \psi(x) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

int. superiore

= inf aree arancioni

$$I^-(f,[a,b]) := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \text{ è una step. f. e } \varphi(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

int. inferiore

= sup aree magenta

Prop. Per ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata vale

$$I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b])$$

Dim : segue dalla seccatura (2) precedente (l'insieme delle aree magenta sta a sx dell'insieme delle aree arancioni).

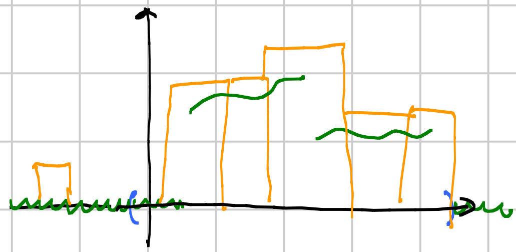
Def. Se succede che $I^-(f,[a,b]) = I^+(f,[a,b])$, allora si dice che f è integrabile (secondo Riemann, o secondo Darboux esteso) in $[a,b]$, e il valore comune si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Oss. (1) Dove ho usato che f è limitata? Per essere sicuro che esistono step f. sopra e sotto, quindi I^+ e I^- sono inf / sup di insiemi non vuoti

(2) Potevo ignorare l'intervallo $[a,b]$ e definire l'integrale su $\mathbb{R}$ per funzioni f che sono limitate e nulle fuori da un limitato.

La procedura è la stessa usando s.f. che sono anche loro nulle fuori da un intervallo



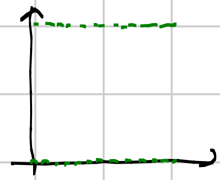
(3) Darboux ortodossa è più risparmiosa: si suddivide $[a,b]$ in n parti, non nec. uguali

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

e poi in ogni $[x_{i-1}, x_i]$ si definiscono φ e ψ usando come altezze inf e sup di $f(x)$ nell'intervallo

(4) Ci sono esempi in cui $I^- < I^+$. Basta pensare alla FUNZIONE DI DIRICHLET $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



È chiaro che le step f. $\psi \geq f$ sono in realtà ≥ 1, mentre le " " $\varphi \leq f$ sono in realtà ≤ 0, quindi

$$I^+(f, [0,1]) = 1 \qquad\qquad I^-(f, [0,1]) = 0$$

— o — o —