ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 08

Note Title 03/10/2023

$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,1,1)$	$x+2y+3z=0$	1
$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,0,1)$	$x+2y+3z=0$	2
$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,1,0)$	$x+2y+3z=0$	3

Stabilire la mutua posizione dei 2 piani

1 1° modo. Passo il primo in cartesiana

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,-2,-3) \rightsquigarrow \boxed{(1,2,3)}$$

verifico che è $\perp$ a $(2,-1,0)$ e $(-5,1,1)$

$$\rightsquigarrow x+2y+3z=4$$

ho imposto il passaggio per $(1,0,1)$

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{nessuna int.} \Rightarrow \text{SONO PARALLELI}$$

Calcolo la distanza di $(1,0,1)$ da $x+2y+3z=0$ $\rightsquigarrow$ formula

1 2° modo. $(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,1,1)$

$(1+2t-5s, -t+s, 1+s)$

La inserisco nella cartesiana del secondo

$$1+2t-5s+2(-t+s)+3(1+s)=0$$

$$1+\cancel{2t}-5\cancel{s}-\cancel{2t}+2\cancel{s}+3+3\cancel{s}=0 \qquad 4=0 \;!$$

Nessuna soluzione!

2 2° modo $(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,0,1)$

$(1+2t-5s, -t, 1+s)$

Sostituisco nella cartesiana

$$\underbrace{1+\cancel{2t}-5s}_{x}\;\underbrace{-\cancel{2t}}_{+2y}+\underbrace{3+3s}_{+3z}=0 \rightsquigarrow -2s=-4 \rightsquigarrow s=2$$

Sostituisco $s = 2$ nella parametrica del piano

$$(1,0,1) + t(2,-1,0) + (-10,0,2)$$
$$= \boxed{(-9,0,3) + t(2,-1,0)}$$

↑
Parametrica della retta inters. tra i due piani

[Esercizio: fare nel 1° modo]

Se voglio l'angolo tra i due piani devo andare in cartesiana

A	B	C	D	E			
$(1,3,2)$	$(4,3,0)$	$(7,3,2)$	$(0,3,0)$	$(3,3,3)$			

Piano per (A, B, C) — retta per (D, E)

Piano in parametrica $\quad (1,3,2) + t(3,0,-2) + s(6,0,0)$

$(1,3,2) + t(3,0,-2) + s(1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,2,0) \rightsquigarrow (0,1,0) \rightsquigarrow \boxed{y = 3}$$

verifico che A, B, C soddisfano

Retta: $\quad (0,3,0) + t(3,0,3) \rightsquigarrow (0,3,0) + t(1,0,1)$

$(t, 3, t)$

Sostituisco nella cartesiana e viene $3 = 3$ quindi la retta è contenuta nel piano.

— o — o —

$(1,0,0)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$			①
$(-1,-2,3)$	$(1,3,0)$	$(0,0,0)$			②
$(0,0,0)$	$(2,-4,6)$	$(-1,2,-3)$			③
A	B	P			

Piano passante per P e $\perp$ alla retta AB

[Direzione retta = (a,b,c) del piano]

① $B-A = (-1,1,0) \rightsquigarrow -x+y = 0 \rightsquigarrow \boxed{x-y=0}$

sostituisco P

② $B-A = (2,5,-3) \rightsquigarrow 2x+5y-3z = 0$

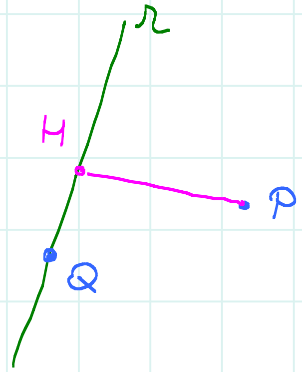
③ $B-A = (2,-4,6)$ ma posso usare $(1,-2,3) \rightsquigarrow \boxed{x-2y+3z=-14}$

Calcolare il p.to della retta AB più vicino a P

$A = (1,0,2)$

$B = (5,1,-1)$

$P = (1,1,0)$



1° modo Scrivo retta in parametrica

$$\underbrace{(1,0,2)}_{A} + \underbrace{t\,(4,1,-3)}_{+\,t\,(B-A)} = (1+4t,\, t,\, 2-3t) = Q$$

Cerco per quale valore di t si ha che $QP \perp$ direzione retta. Quello sarà il p.to H

$$Q-P = (1+4t,\, t,\, 2-3t) - (1,1,0) = (4t,\, t-1,\, 2-3t)$$

Impongo che sia $\perp$ alla direzione della retta $(4,1,-3)$

$$\underbrace{16t + t - 1 - 6 + 9t = 0}_{\langle Q-P,\ (4,1,-3)\rangle} \rightsquigarrow 26t = 7 \rightsquigarrow t = \frac{7}{26}$$

Per trovare H sostituisco t nella parametrica della retta

$$H = \boxed{\left(\frac{27}{13},\ \frac{7}{26},\ \frac{31}{26}\right)}$$ ← [Corretto dopo video]

Se serve, calcolo la distanza di P da H.

2° modo Considero il piano per P $\perp$ alla retta r e calcolo l'intersezione tra il piano e questa retta

$A = (1,0,2)$

$B = (5,1,-1)$

$P = (1,1,0)$

Piano per $P \perp$ alla retta AB

$$B - A = (4,1,-3) \rightsquigarrow 4x + y - 3z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{passaggio per } P}}{5}$$

$(1+4t,\ t,\ 2-3t) \rightsquigarrow$ parametrica retta AB

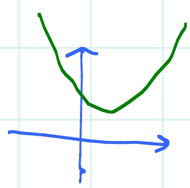
Sostituisco

$$\underbrace{4+16t}_{4x} + \underbrace{t}_{+y} \underbrace{-6+9t}_{-3z} = 5 \quad \rightsquigarrow \quad 26t = 7$$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Il generico p.to della retta è

$$Q = (1+4t,\ t,\ 2-3t)$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(P,Q)^2 = \|Q-P\|^2 &= \|(4t,\ t-1,\ 2-3t)\|^2 \\ &= 16t^2 + (t-1)^2 + (2-3t)^2 \\ &= 16t^2 + t^2 - 2t + 1 + 4 + 9t^2 - 12t \\ &= 26t^2 - 14t + 5 \end{aligned}$$



Per quale valore di t risulta minima? È una parabola, e il min. si ha quando $52t - 14 = 0$, cioè $t = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$

— o — o —