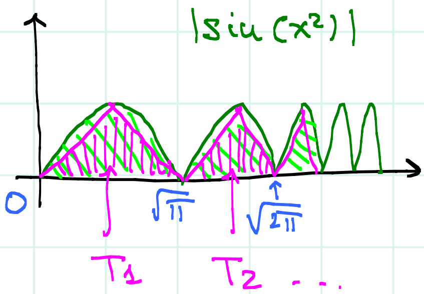
ANALISI 1 - LEZIONE 82

Note Title 22/03/2025

METODO DEI TRIANGOLINI (RETTANGOLINI) (Le serie aiutano gli integrali)



Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$

Voglio dimostrare che diverge, ma non so fare la primitiva.
Uso che

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

dove $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ sono i triangoli in figura

Osservo che il triangolo T_n ha altezza $= 1$ e come base l'intervallo $[\sqrt{(n-1)\pi}, \sqrt{n\pi}]$, quindi la lungh. della base è

$$\sqrt{\pi}\,(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Quindi $\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}\,(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ e quindi

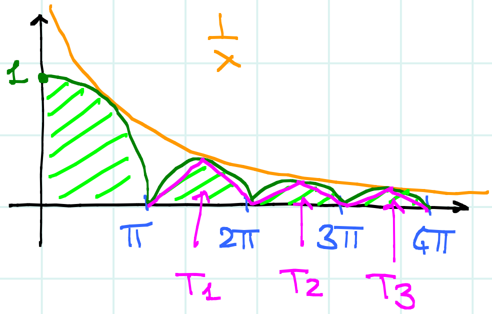
$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\,\frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$, quindi la serie diverge

Visto che la serie diverge, allora diverge pure l'integrale.

Oss. La serie è pure telescopica.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$



Anche in questo caso voglio dimostrare che diverge

Piazzo dei triangolini sotto il grafico. Il triangolo T_n ha

→ come base l'intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$, quindi base $= \pi$

→ come altezza il valore della funzione nel p.to medio della base, quindi in $n\pi + \frac{\pi}{2}$, dove $|\sin| = 1$, quindi

$$\text{altezza} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

→ Quindi $\text{area}(T_n) = \frac{1}{2}\,\text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$

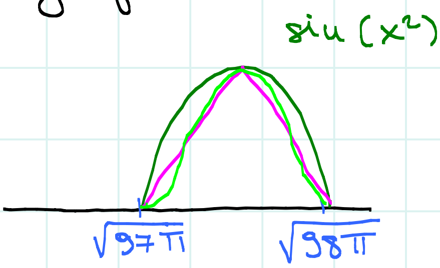
Ma allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = +\infty$

Oss. Sappiamo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge e $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx = +\infty$

Quindi geometricamente la somma delle aree sotto il grafico diverge, ma se le prendo a segno alterno converge per "effetto Leibnitz".

Oss. Nel metodo dei triangolini c'è del losco.

Non abbiamo mai dimostrato per bene che il triangolo sta sotto il grafico.

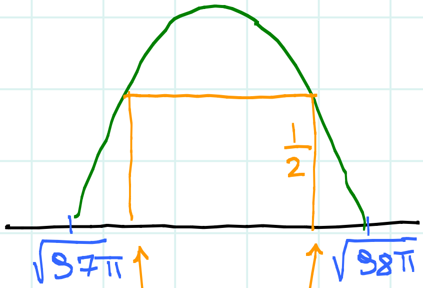


Come si aggiusta? O con uno studio di funzione (auguri!) oppure mettendo sotto un rettangolino, cioè mi chiedo dove è vero che $\sin(x^2) \geq \frac{1}{2}$

In questo caso nell'intervallo $x \in [\sqrt{97\pi}, \sqrt{98\pi}]$ avremo che

$\sin(x^2) \geq \frac{1}{2}$ se e solo se $x \in \left[\sqrt{97\pi + \frac{\pi}{6}}, \sqrt{98\pi - \frac{\pi}{6}}\right]$

e quindi piazzo sotto il grafico un rettangolo di altezza $\frac{1}{2}$



sono quelli che ho appena trovato

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}\,(R_n)$$

rettangolo n-esimo con altezza $\frac{1}{2}$ e base nota

Stessa cosa nell'altro esempio

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ $\int_0^{+\infty} \cos(x^a)\,dx$ Per quali valori di a converge?

→ Per $a = 2$ lo abbiamo visto alla lezione precedente

→ Per $a = 1$ è indeterminato. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \cos x\,dx = \lim_{A \to +\infty} [\sin x]_0^A$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \sin A \quad \text{e questo non esiste.}$$

→ Per $a > 1$ va sempre bene. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^a)\,dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{a x^{a-1} \cos(x^a)}_{\substack{\text{Funzione che ha} \\ \text{come primitiva} \\ \sin(x^a) \\ \text{che è limitata}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a x^{a-1}}}_{\substack{\text{se } a>1 \text{ è una} \\ \text{funzione } C^1 \text{ decrescente} \\ \text{che tende a } 0}}\,dx$$

Quindi ok per Dirichlet.

→ Per $a<1$ va sempre male, nel senso che è indeterminato

Proviamo per $a=\frac{1}{2}$

$$\int_0^A \cos(\sqrt{x})\,dx$$

↑ oscillazioni sempre più lente

$$= \int_0^A \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})}_{f}\cdot\underbrace{2\sqrt{x}}_{G}\,dx = \left[\sin\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

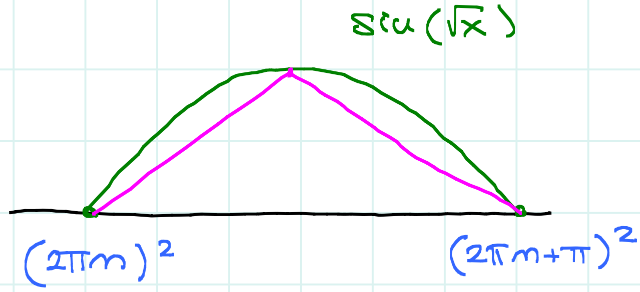
$$= 2\sqrt{A}\cdot\sin\sqrt{A} + \left[2\cos(\sqrt{x})\right]_0^A$$

$$= 2\sqrt{A}\cdot\sin\sqrt{A} + 2\cos(\sqrt{A}) - 2$$

Ora quando $A\to+\infty$ il limite non esiste (basta considerare le due sottosuccessioni $A_n=(n\pi)^2 \leadsto \sin\sqrt{A_n}=0$

$A_n=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2 \leadsto \sin\sqrt{A_n}=1$)

Oss. La non convergenza si poteva dimostrare anche con i triangolini o rettangolini



[Estremi corretti dopo video]

Se l'integrale convergesse, allora $\int_{(2\pi n)^2}^{(2\pi n+\pi)^2} \sin(\sqrt{x})\,dx \to 0$

Ma l'integrale è $\geq$ area del triangolo che ha altezza 1 e base che tende a $+\infty$ come n.

$$\int_{(2\pi n)^2}^{(2\pi n+\pi)^2} \dots = \underset{\substack{\downarrow\\ \ell}}{\int_0^{(2\pi n+\pi)^2} \dots} - \underset{\substack{\downarrow\\ \ell}}{\int_0^{(2\pi n)^2} \dots} \to \ell - \ell = 0$$