ANALISI 1 — LEZIONE 013

Note Title 10/10/2024

Esercizio 1 Dimostrare che, per ogni $x \geq 0$ reale, vale la relazione

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proviamo per induzione

$\boxed{n=0}$ $\quad 1 \geq 0$:)

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Passo induttivo

Hp: $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$

Th: $(1+x)^{n+1} \geq \frac{(n+1)n}{2} x^2$

Impostiamo la solita catena

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \underset{\text{Hp}\cdot\underbrace{(1+x)}_{\geq 0}}{\geq} (1+x)\cdot \frac{n(n-1)}{2} x^2 \underset{\text{spero sia vera}}{\geq} \frac{(n+1)n}{2} x^2$$

Controllo la speranza

$$(1+x) \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}} \cancel{x^2} \overset{?}{\geq} \frac{(n+1)\cancel{n}}{\cancel{2}} \cancel{x^2} \rightsquigarrow (1+x)(n-1) \overset{?}{\geq} n+1$$

$$\rightsquigarrow \cancel{n} - 1 + nx - x \overset{?}{\geq} \cancel{n} + 1 \rightsquigarrow (n-1)x \overset{?}{\geq} 2 \rightsquigarrow x \overset{?}{\geq} \frac{2}{n-1}$$

Quindi: la speranza è vera se e solo se $x \geq \frac{2}{n-1}$ e questo è un GUAIO perché noi sappiamo solo che $x \geq 0$.

Quindi il meccanismo di caduta NON FUNZIONA :(

Esercizio 2 Dimostrare che, per ogni $x \geq 0$, vale

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

(se è vero questo, allora è vero anche il precedente!)

Questo si riesce a fare per induzione.
Arriviamo al passo induttivo

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n$$

Hp

$$\geq (1+x)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right)$$

spero

$$\geq 1+(n+1)x+\frac{(n+1)n}{2}x^2$$

Controlliamo la speranza:

$$(1+x)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x+\frac{(n+1)n}{2}x^2$$

$$\cancel{1}+n\cancel{x}+\cancel{\frac{n(n-1)}{2}x^2}+\cancel{x}+\cancel{nx^2}+\frac{n(n-1)}{2}x^3 \overset{?}{\geq} \cancel{1}+\cancel{(n+1)x}+\cancel{\frac{(n+1)n}{2}x^2}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^3 \overset{?}{\geq} 0$$ e questo è vero $\forall x \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$:)

<u>Oss.</u> Classico esempio di cosa più difficile che si riesce a dimostrare, mentre quella più facile non veniva.

<u>Oss.</u> Come fa a venire in mente la disug. dell'esercizio 2?

Binomio di Newton!

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Se lo facciamo con $a=1$ e $b=x$ e prendiamo i termini con $k=0,1,2$ otteniamo

termini successivi

$$(1+x)^n = \underbrace{\binom{n}{0}1^n\cdot x^0}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}1^{n-1}x^1}_{x} + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots$$

$$1 + x + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

La prima disug. diventa

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \rightsquigarrow \text{ Bernoulli } \quad (\text{per } x > -1)$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

Dopo verrebbe

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}_{\binom{n}{3}}x^3$$

— o — o —

Esercizio 3 Calcolare la somma dei numeri della riga n-esima del triangolo di Tartaglia (altrove triangolo di PASCAL)

La somma della riga n-esima viene 2^n

1						1				
2					1		1			
4				1		2		1		
8			1		3		3		1	
16		1		4		6		4		1

Spiegazione algebrica

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Mettendo $a=b=1$ viene

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}$$

↑ numeri che compaiono nella riga n-esima

Spiegazione combinatoria Ricordiamo che

$\binom{n}{k}$ = sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n studenti

$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$ = tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme di n studenti

↑ stiamo contando tutti i sottoinsiemi

Ora un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi perché ogni elemento può essere messo oppure non messo.

<u>Esempio 4</u> Quanti sono gli anagrammi di MATEMATICA ?

Abbiamo 10 lettere. SE fossero tutte diverse sarebbero $10!$

Ma qui abbiamo 2 M, 3 A, 2 T e allora viene

$$\frac{10!}{2!\,3!\,2!}$$

Come spiegare il denominatore? Consideriamo gli anagrammi di

MATEMATICA

Questi sono davvero $10!$ Ma quanti diventano lo stesso?

Le M le posso permutare in $2!$ modi

Le T " "

Le A " $3!$ "

<u>Esempio 5</u> Interpretare in modo combinatorio la relazione

$$\underbrace{\binom{n+1}{k+1}}_{\substack{\text{sottoinsiemi di } k+1 \text{ elementi}\\ \text{in un insieme con } n+1 \text{ elementi}}} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(relazione del triangolo di Tartaglia)

Prendo gli $n+1$ elementi e ne isolo uno

$$\underbrace{A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n} \quad A_{n+1}$$

Come posso costruire un sottoinsieme con $k+1$ elementi?

Ci sono due modi

(1) Posso prendere $(k+1)$ elementi tra i primi n $\rightsquigarrow$ $\binom{n}{k+1}$ modi

(2) Posso prendere k elementi tra i primi n e poi aggiungere l'ultimo $\rightsquigarrow$ $\binom{n}{k}$ modi

— o — o —

<u>Estensione</u> $(a+b+c)^{2024} = \dots + \dots \underset{\uparrow}{} a^{1000}\, b^{500}\, c^{524} + \dots$

$$\frac{2024!}{1000!\,500!\,524!}$$