ANALISI 1 - LEZIONE 011

Note Title 05/10/2016

Def. Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$.

(1) Si dice che $P(n)$ è vero $\boxed{\text{DEFINITIVAMENTE}}$ se è vero da un certo p.to in poi, cioè

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad P(n) \text{ è vera}}$$

(2) Si dice che $P(n)$ è vero $\boxed{\text{FREQUENTEMENTE}}$ se è vero per infiniti valori dell' indice n.
In alternativa equivale a dire

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq m \text{ t.c. } P(n) \text{ è vera}}$$

Oss. Se $P(n)$ è vera quando n è del tipo 2^{2^k}, è comunque vero frequentemente.

— o — o —

$\boxed{\text{SUCCESSIONE}}$

Def. ortodossa Una succ. è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Esempi $a_n = n^2 + 3$ $\qquad\qquad$ $b_n = \frac{1}{n+5}$

modo di indicare $a(n)$ $\qquad\qquad$ $b(n)$

Def. più elastica Non serve che $f(n)$ (o meglio f_n) sia definita per ogni $n \in \mathbb{N}$, basta che sia definita definitivamente, cioè che gli eventuali pbm siano un numero finito.

Esempio $a_n = \frac{1}{n}$ Ok per $n \geq 1$

$b_n = \frac{1}{n - 2016}$ Ok per $n \geq 2017$ (basta $n \neq 2016$)

$c_n = \sqrt{n - 2016}$ Ok per $n \geq 2016$

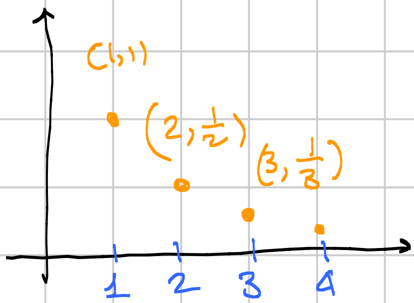
$d_n = \sqrt{2016^{2016} - n}$ NON è una succ., perché va male appena $n > 2016^{2016}$

Oss. NOT ($P(n)$ è vera definitivamente) = $P(n)$ è falsa frequent.

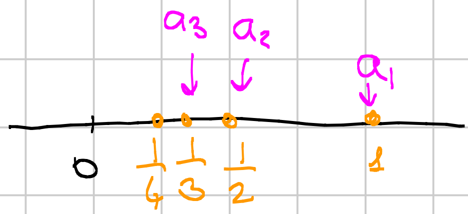
VISUALIZZAZIONE DI UNA SUCCESSIONE

1 Cartesiano Disegno nel piano i p.ti (n, a_n)

$a_n = \frac{1}{n}$



2 Sulla retta Disegno su una retta i p.ti a_n



3 Lampadine Pensiamo ad una retta, pensiamo al tempo che scorre, e ogni secondo si accende una lampadina in posizione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ e resta accesa un secondo.

Tra il secondo 2016 e 2017, resta accesa solo la lampadina in a_{2016}

LIMITI DI SUCCESSIONI

Sia a_n una successione (di numeri reali), nel senso classico.
Allora sono possibili 4 tipi di comportamento.

$\boxed{1}$ $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ (an tende ad ℓ)

$\boxed{2}$ $a_n \to +\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (an tende a $+\infty$)
diverge

$\boxed{3}$ $a_n \to -\infty$ $\qquad$ " $\qquad -\infty$

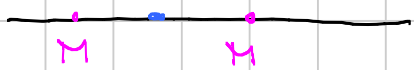
$\boxed{4}$ a_n è indeterminata $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ NON ESISTE

Def. di $\boxed{4}$ Nessuno dei precedenti

Def. di $\boxed{2}$ (an supera qualunque barriera definitivamente)

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \qquad a_n \geq M \quad \text{definitivamente}}$$

anche enorme



stessa cosa

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq M}$$

Oss. In generale n_0 dipende da M, e più M è grande più ci si aspetta che n_0 sia grande.

Def. $\boxed{3}$ (come prima con superamento a sx)

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \qquad a_n \leq M \quad \text{definitivamente}}$$

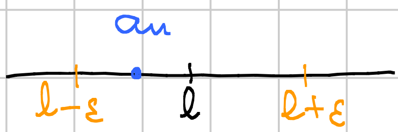
anche molto neg.

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq M}$$

Def. [1] Si dice che $a_n \to l \in \mathbb{R}$ se

(per tempi grandi le lampadine si accendono vicino ad l)

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon \le a_n \le l + \varepsilon \ \text{definitiv.}}$$



Oss. Moralmente, se ε è molto vicino a 0, è probabile che n_0 debba essere grande.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{|a_n - l|}_{\text{distanza tra } a_n \text{ ed } l} \le \varepsilon \ \text{definit.}}$$

Variante della [1] $\quad a_n \to l^+ \qquad a_n \to l^-$

$a_n \to l^+$ vuol dire $\quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad l < a_n \le l + \varepsilon \ \text{definitiv.}}$

DEVE ESSERE STRETTA $\qquad$ A SCELTA $\le$ opp. $<$

$a_n \to l^-$ vuol dire $\quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon \le a_n < l \ \text{definitiv.}}$

STRETTA

Esempi intuitivi

① $a_n = n^2 + 3 \qquad a_n \to +\infty$

(se $M = 10^6$, posso prendere $n_0 = 10^3$)
$\quad M = 10^{12} \qquad n_0 = 10^6$

② $b_n = \frac{1}{n} \qquad b_n \to 0$, anzi $b_n \to 0^+$

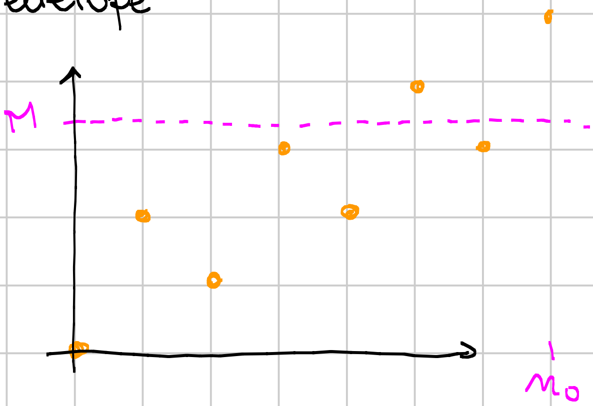
③ $c_n = (-1)^n \qquad c_n = 1, -1, 1, -1, \dots \qquad c_n$ NON HA LIMITE.

Leggende metropolitane

1. Se $a_n \to +\infty$, allora deve essere definitivamente crescente.

NO: $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6$

"Penelope"



2. Se $a_n \to 0$, allora $a_n \to 0^+$ oppure $a_n \to 0^-$

NO: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$ $\qquad \frac{(-1)^n}{n+1}$

3. Se $a_n \to 0^+$, allora a_n è definitivamente decrescente

NO: $\frac{1}{\text{penelope}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$

4. Se $\underbrace{\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{\text{insieme dei punti segnati nella rappr. sulla retta}} = +\infty$, allora $a_n \to +\infty$

NO: $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6 \ldots$

(questa NON ha limite)

Cosa è vero per questa

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq M$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ frequentemente

Non è vero che $\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \geq M$ definitivamente

— o — o —