ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 24

Note Title 27/10/2023

Back to sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n-incognite.

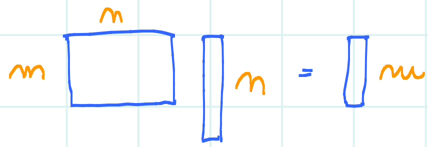
Possiamo scriverlo come

$$Ax = b$$

A: matrice $m \times n$

x: colonna lunga n di incognite

b: colonna lunga m di termini noti



Dette $c_1, \dots, c_n$ le colonne di A, possiamo scrivere il sistema come

$$\boxed{x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n = b}$$

Consideriamo anche l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da

$$x \longrightarrow Ax$$

Con queste notazioni si ha che

$$\boxed{\text{Il sistema ammette soluzione} \iff b \in \operatorname{Im}(A) \iff b \in \operatorname{Span}(c_1, \dots, c_n)}$$

$\Updownarrow$

b è comb. lin. di $c_1, \dots, c_n$

Struttura generale delle soluzioni di un sistema $Ax = b$

Se il sistema ha soluzione, allora tutte le soluzioni si scrivono come

$$\boxed{x = \hat{x} + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k}$$

$\hat{x}$: soluzione qualunque $A\hat{x} = b$

$v_1, \dots, v_k$ sono una base dell'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$

La dim. segue da due fatti:

① Se x_1 e x_2 sono due soluzioni, cioè $Ax_1 = b$ e $Ax_2 = b$, allora $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$

② Se x_1 risolve $Ax_1 = b$ e y_1 risolve $Ax = 0$, allora
$$A(x_1 + y_1) = b + 0 = b$$

Osserviamo che le soluzioni di $Ax = 0$ sono il $\ker(A)$, quindi i $v_1, \dots, v_k$ della formula di sopra sono una base di $\ker(A)$

Quindi il sistema ha soluzione unica quando
- $\ker(A) = 0$
- $C_1, \dots, C_n$ sono lin. indip.

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI}}$

Consideriamo un sistema $Ax = b$.
Costruiamo la matrice $\hat{A} = (A|b)$ (cioè aggiungiamo b come $(n+1)$-esima colonna.

Allora

① il sistema ammette soluzione $\Leftrightarrow$ rango(A) = rango$(\hat{A})$

② Se il sistema ha soluzione, allora la soluzione generale dipende da $k = \underset{\#\text{ incognite}}{n} - r$ ← rango comune di A e $\hat{A}$

$\boxed{\text{Idea}}$ Cosa possiamo dire di Rango(A) e Rango$(\hat{A})$. Ci sono solo 2 possibilità

- Rango$(\hat{A})$ = Rango(A). Questo avviene se e solo se b è comb. lin. delle colonne $C_1, \dots, C_n$. Ma questo avviene $\Leftrightarrow$ il sistema ha soluzione.
- Rango$(\hat{A})$ = Rango$(A)+1$. Questo avviene $\Leftrightarrow$ b NON è comb. lin. di $C_1, \dots, C_n$.

(stiamo usando rango = max # col. lin. indip.)

Se ci sono soluzioni, il numero di parametri liberi è $k = \dim \ker A$

Ma per R-N:

$$\underbrace{\dim(\ker(A))}_{k} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{\text{rango}(A) = r} = n$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u>

$$\begin{cases} 2x + ay - 3z = 2 \\ x + y - z = b \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Domanda: stabilire al variare di a e b, in quale situazione ci troviamo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right) = \hat{A}$$

A

Se rango $(A) = 3$, allora per forza rango $(\hat{A}) = 3$ (essendoci solo 3 righe, il rango al max è 3)

$\mathrm{Det}(A) = -a + 9 + 3 - 6 = -a + 6$

→ Se $a \neq 6$, allora il sistema ha soluzioni che dipendono da $n - r = 3 - 3 = 0$ parametri ⇝ sol. unica, qualunque sia b.

→ Se $a = 6$, allora rango $(A) = 2$ (infatti è facile trovare minori 2×2 con $\det \neq 0$). Quindi tutto dipende da Rango $(\hat{A})$.

$$\left(\begin{array}{c|cc|c|} 2 & 6 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$\mathrm{Det} = -30 + 9b - 6 + 15 = 9b - 21$

Se $b \neq \frac{7}{3}$, allora non ci sono soluzioni (i ranghi sono 2 e 3).

→ Se $a=6$ e $b=\frac{7}{3}$, allora mi piacerebbe dire che rango $(\hat{A})=2$.
Però per dirlo serve che tutti i minori 3×3 di $\hat{A}$ siano $=0$.
Essendo 4, ne dovrei fare altri 2.

In realtà non serve farli. Infatti

- C_2 e C_3 sono lin. indip.
- C_4 è comb. lin. di C_2 e C_3 (altrimenti l'ultimo Det $\neq 0$)
- C_1 è comb. lin. di C_2 e C_3 (altrimenti il primo Det $\neq 0$)

Ma allora

$$\text{Span}(C_1, C_2, C_3, \cancel{C_4}) = \text{Span}(\cancel{C_1}, C_2, C_3) = \underbrace{\text{Span}(C_2, C_3)}_{\text{ha dim } 2}$$

Conclusione: nel caso $a=6$ e $b=\frac{7}{3}$ il sistema ha ∞ soluzioni che dipendono da $n-r=1$ parametro (volendo si risolve banalmente).

[Provare a risolvere con Gauss e vedere cosa succede]

Esempio

$$\begin{cases} 2x + ay = 5 \\ ax + 3y = b \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a & 5 \\ a & 3 & b \end{array}\right) = \hat{A} \qquad \text{Det}(A) = 6-a^2$$

(con $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$)

→ Se $6-a^2 \neq 0$, cioè $a \neq \pm\sqrt{6}$, allora Rango (A) = Rango $(\hat{A}) = 2$
Quindi soluzione unica $(k = n-r = 2-2 = 0)$

→ Se $a = \pm\sqrt{6}$, allora entra in gioco b.

$$a=\sqrt{6} \qquad \left(\begin{array}{ccc} 2 & \sqrt{6} & 5 \\ \sqrt{6} & 3 & b \end{array}\right) \qquad \text{Det} = \sqrt{6}\,b - 15$$

→ Se $b \neq \frac{15}{\sqrt{6}}$, allora NO SOLUZIONI

→ Se $b = \frac{15}{\sqrt{6}}$, allora ∞ sol. (1 param.)

Idem se $a=-\sqrt{6}$

— o — o —