ANALISI 1 — LEZIONE 093

Note Title 21/03/2017

<u>Esempio 1</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 tale che
$$\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\} = L < 1.$$
Consideriamo la succ. per ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad x_0 = \alpha$$

Allora $x_n \to \ell$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ed il limite ℓ non dipende da α

Passo 1 Brutal mode: il limite sarà soluzione di $\ell = f(\ell)$, quindi non sarebbe male che avesse soluz. unica.

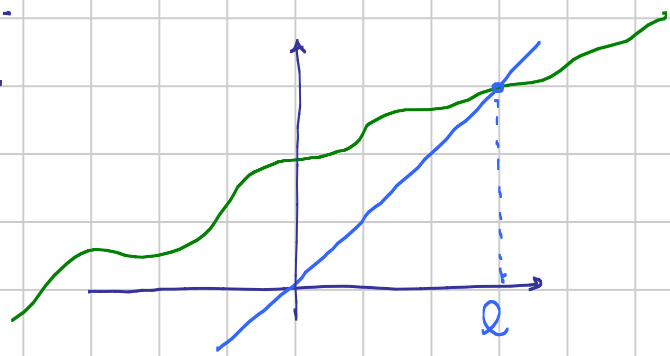
Dim. che l'equazione $f(x) = x$ ha un'unica soluzione.
Pongo $\varphi(x) = x - f(x)$ e osservo che

$$\varphi'(x) = 1 - f'(x) \geq 1 - L > 0$$

Quindi $\varphi(x)$ è crescente, quindi si annulla al max una volta.
Dico che
$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \underbrace{\varphi'(t)}_{\geq 1-L}\, dt \geq \underbrace{\varphi(0) + \underbrace{(1-L)}_{>0}\, x}_{\to +\infty}$$

Ragionamento analogo per $x \to -\infty$.
Quindi c'è almeno una soluzione.



$\boxed{\text{PASSO 2}}$ Piano con la distanza. Pongo $d_n := |x_n - \ell|$

(i) $d_{n+1} \leq L \, d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_n \leq L^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ → facile induzione

(iii) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to \ell$ → segue dal p.to (ii).

$$d_{n+1} \underset{\substack{\text{def}\\ d_{n+1}}}{=} |x_{n+1} - \ell| \underset{\substack{\text{ricorr.}\\ + \ \ell = f(\ell)}}{=} |f(x_n) - f(\ell)| \underset{\text{Lagrange}}{=} |f'(c)| \cdot |x_n - \ell|$$

$$\leq L \cdot d_n$$

— o — o —

<u>Variante</u> Dimostrare lo stesso risultato assumendo solo che f sia Lip. con costante $L < 1$.

(c'è da cambiare un minimo il passo 1)

— o — o —

<u>Esempio 2</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 e sia $\ell \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\ell = f(\ell)$$

Supponiamo che $|f'(\ell)| < 1$.

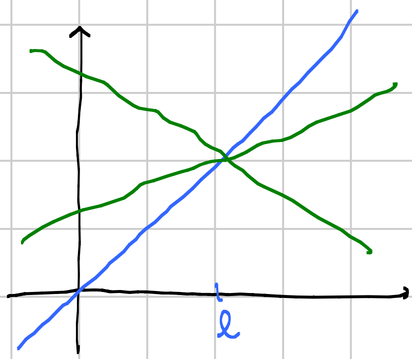
Allora esiste $r > 0$ tale la succ. per ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

tende ad ℓ per ogni partenza $x_0 \in (\ell - r, \ell + r)$

(Detto brutalmente: se parto vicino ad ℓ tendo ad ℓ)

Idea: scelgo r in maniera tale che

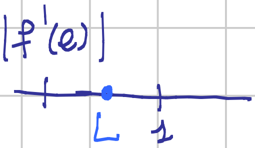


$$\sup \{ |f'(x)| : x \in (\ell - r, \ell + r) \} = L < 1$$

Posso trovare questo r per continuità di $f'(x)$.

Volendo posso scegliere

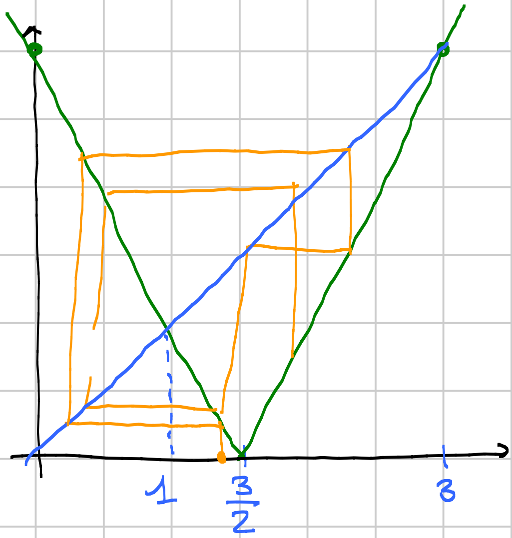
$$L = \frac{1 + |f'(\ell)|}{2}$$



A quel punto vale il solito piano con la distanza.

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = |2x_n - 3|$

$x_0 = \sqrt{2}$



Le soluzioni di $x = f(x)$ sono $\ell = 3$ e $\ell = 1$

Questi sono i possibili limiti reali della successione.

$\boxed{\text{PASSO 1}}$ $\quad 0 \le x_n \le 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Questo si dimostra per induzione dopo aver osservato che

$$f([0,3]) = [0,3]$$

$\boxed{\text{PASSO 2}}$ x_n è limitata, quindi SE ha limite può tendere solo a 1 oppure a 3

Può tendere a 3? NO: se $x_n \to 3$, allora definitivamente $x_n \ge \frac{3}{2}$, quindi definitivamente

$$x_{n+1} = 2x_n - 3$$

Pongo $d_n = 3 - x_n$ e osservo che

$$d_{n+1} = 3 - x_{n+1} = 3 + 3 - 2x_n = 6 - 2x_n = 2d_n$$

quindi

$$d_{n+1} \ge 2d_n \quad \text{definitivamente con } d_n \ge 0$$

quindi non può tendere a 0 a meno che non valga proprio 0.

Può tendere a 1? Idem: pongo $d_n := |x_n - 1|$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se} \\ x_n \le \frac{3}{2}}}{=} |3 - 2x_n - 1| = 2|x_n - 1| = 2d_n$$

Conclusione: x_n può tendere a 1 o a 3 solo se definitivamente vale 1 oppure 3.

$\boxed{\text{PASSO 3}}$ Se parto da $\sqrt{2}$ non posso mai arrivare in un numero razionale.
Si dimostra infatti per induzione che
$$x_n = a_n\sqrt{2} + b_n$$
con a_n e b_n interi e $a_n \neq 0$. (in realtà $a_n = 2^n$)

Conclusione: x_n non ha limite!

Oss. Cosa ha prodotto il caos? Il fatto che la derivata nei p.ti di intersezione ha valore assoluto >1, il che implica che quei p.ti funzionano da "respingenti"

Esempio 4 Equazione logistica $\quad x_{n+1} = a\, x_n(1-x_n)$

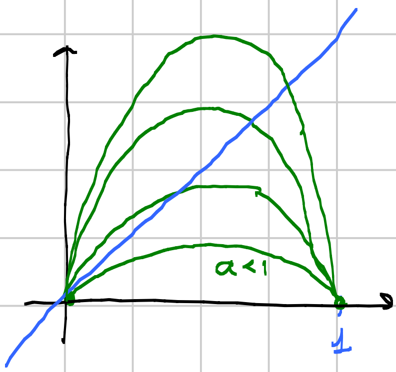
Se fosse $x_{n+1} = a x_n$ $\quad x_{n+1} = a(1-x_n)\,x_n$

esponenziale

parametro

$$f(x) = ax(1-x)$$

- $a \in [0,1]$ $\quad x_n \to 0$
- $a \in [1,2] \rightsquigarrow$ c'è intersezione nel ramo crescente della parabola e $x_n \to \ell$ sempre (tranne $x_0 \in \{0,1\}$)



- $a \in [2,3] \rightsquigarrow$ ℓ sta nel ramo decrescente e $f'(\ell) \in (-1,0)$
  tutte le $x_n \to \ell$ spiraleggiando
- $a \in [3,4] \rightsquigarrow$ ℓ sta nel ramo decr. con $f'(\ell) < -1$
  $\rightsquigarrow x_n \to \ell \iff x_n = \ell$ definitivamente.

$a > 4$ x_n può diventare negativa.