2 $\boxed{\text{Completamento dei quadrati}}$ (SOS)

Fatto generale: ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni di primo grado linearmente indipendenti.

A questo:
- $\to$ n_+ = # espressioni con il segno +
- $\to$ n_- = # " " " −
- $\to$ n_0 = ciò che resta per differenza

Esempio 1 $\quad q(x,y) = x^2 + 3y^2 + 6xy$

$$q(x,y) = x^2 + 6xy + 3y^2 = (x+3y)^2 - 9y^2 + 3y^2$$

↑ doppio prodotto tra x e $3y$

$$= (x+3y)^2 - 6y^2 = (x+3y)^2 - (\sqrt{6}\,y)^2$$

In questo esempio $n_+ = 1$, $n_- = 1$, $n_0 = 0$

Segnatura = + − $\leadsto$ forma è INDEFINITA

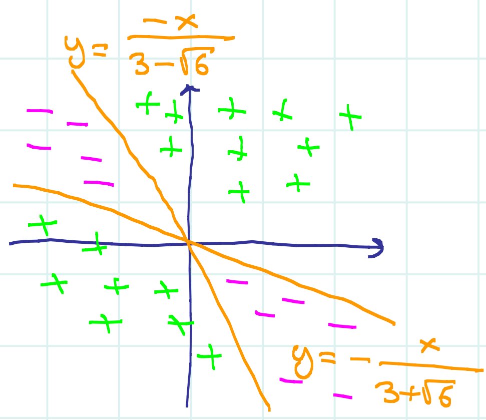
Potevo vederlo anche con la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Det = −6 $\leadsto$ Autovalori: + −

Dalla scrittura come SOS posso trovare esplicitamente la zona di + e la zona di −

$$q(x,y) = (x+3y)^2 - (\sqrt{6}\,y)^2$$
$$= (x+3y+\sqrt{6}\,y)(x+3y-\sqrt{6}\,y)$$

↑ ↑ equazioni di due rette che separano la zona + dalla zona −



Domanda soft: trovare l'equazione di una retta contenuta nella zona −

Impongo che faccia 0 il termine con il segno +, quindi

$x+3y=0 \qquad y=-\frac{1}{3}x \qquad V = \mathrm{Span}((3,-1))$

Esempio 2 $\quad q(x,y) = 3x^2+8y^2+10xy$

Domanda: trovare (x,y) t.c. $q(x,y)<0$.

Siamo sicuri che esista? Se la matrice avesse un autov. neg....

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det} = 24-25 = -1 \qquad$ Autov: $+ -$

Per trovarlo completiamo i quadrati

$$q(x,y) = 3x^2+10xy+8y^2$$
$$= \Big(\sqrt{3}x+\underbrace{\tfrac{5}{\sqrt{3}}y}_{\text{crea il doppio prodotto } 10xy}\Big)^2 \underbrace{-\tfrac{25}{3}y^2}_{\text{compensa il }\square\text{ di } \frac{5}{\sqrt{3}}y} + 8y^2$$

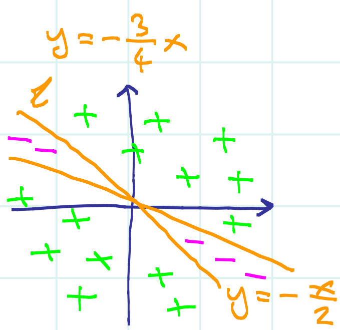
$$= \left(\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y\right)^2 - \frac{1}{3}y^2 = \left(\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)\left(\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)$$

Se voglio che $q(x,y)<0$ mi basta che $\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y=0$, cioè $3x+5y=0$, ad esempio $(x,y)=(5,-3)$

$q(5,-3) = 75+72-150 = 147-150 = -3$ ☺

Come sono fatte le zone di + e di −?

$$\underbrace{\left(\sqrt{3}x+\frac{6}{\sqrt{3}}y\right)}_{\frac{3x+6y}{\sqrt{3}}}\underbrace{\left(\sqrt{3}x+\frac{4}{\sqrt{3}}y\right)}_{\frac{3x+4y}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}(3x+6y)(3x+4y)$$



Piccola alternativa

$$q(x,y) = 3x^2 + 10xy + 8y^2$$
$$= 3\left(x^2 + \frac{10}{3}xy\right) + 8y^2$$
$$= 3\left\{\left(x + \frac{5}{3}y\right)^2 - \frac{25}{9}y^2\right\} + 8y^2$$
$$= 3\left(x + \frac{5}{3}y\right)^2 - \frac{1}{3}y^2$$ (stessa cosa senza radici)

<u>Esempio 3</u> $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz$

Completamento dei quadrati

$$q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 6xz + 2y^2 + 3z^2 + 5yz$$ (per primi i termini con la x)

$$= (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{crea} \\ 4xy}}{x + 2y} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{crea} \\ 6xz}}{3z})^2 \underbrace{- 4y^2 - 9z^2 - 12yz}_{\text{tolgo i termini creati dal } \square} + 2y^2 + 3z^2 + 5yz$$

$$= (x+2y+3z)^2 - 2y^2 - 7yz - 6z^2$$

$$= (x+2y+3z)^2 - 2\left\{y^2 + \frac{7}{2}yz + 3z^2\right\}$$

$$= (x+2y+3z)^2 - 2\left\{\left(y + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{crea } \frac{7}{2}yz}}{\frac{7}{4}z}\right)^2 - \frac{49}{16}z^2 + 3z^2\right\}$$

$$= (x+2y+3z)^2 - 2\left(y + \frac{7}{4}z\right)^2 + \frac{1}{8}z^2$$ [Verifica!]

Segnatura : $++-$

Stessa cosa con la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Det} = 6 + \cancel{15} + \cancel{15} - \cancel{18} - \cancel{12} - \frac{25}{4} = 6 - \frac{25}{4} = -\frac{1}{4}$$

Autovalori: $\nearrow$ $- - -$ $\rightsquigarrow$ NO BUONO perché $\mathrm{Tr} > 0$

$\searrow$ $\boxed{+ + -}$

Trovare un s.sp. di dim 2 su cui $q(x,y,z) > 0$

Basta imporre $y + \frac{7}{4} z = 0$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Span}((0,-7,4),(1,0,0))$

Trovare un s.sp. di dim 1 su cui $q(x,y,z) < 0$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \mathrm{Span}((2,-1,0))$$

Esempio 4 $\quad q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4xy + 2z^2$

$q(x,y,z) = (x+2y)^2 + 2z^2$ $\qquad$ Segnatura: $+ + 0$

Occhio a non fare: $q(x,y,z) = (x+2y)^2 + z^2 + z^2$ Segnatura: ~~+++~~

Ho usato 2 volte la stessa espressione: NON sono lin. indip. !!!

Chi? $\quad x+2y \quad z \quad z$

Esempio 5 $\quad q(x,y) = xy$

$$q(x,y) = xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

I quadrati "puri" se ne vanno, ma i doppi prodotti si sommano.

— o — o —