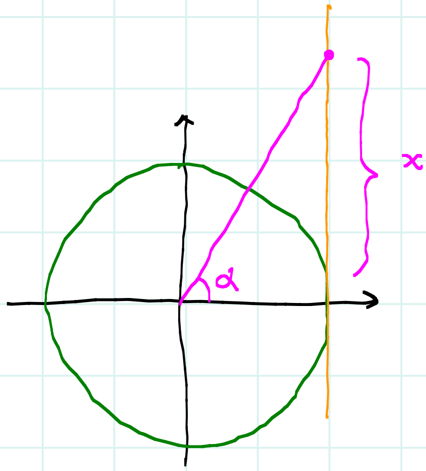
ANALISI 1 — LEZIONE 014

Note Title 10/10/2024



Esercizio 1 Dimostrare che per ogni $x > 0$ vale

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$$

Sia $\alpha = \arctan x$. Poiché $x > 0$ si ha che

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Questo vuol dire che $\tan \alpha = x$. Ma allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{x}$$

(Proprietà della tangente: passando da α a $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sin e cos si scambiano)

Ancora una volta

$$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

La relazione di sopra dice che $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

In maniera analoga si dimostra che

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad \forall x < 0}$$

Altra formula analoga

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]}$$

$$\alpha = \arcsin x \rightsquigarrow \sin \alpha = x \rightsquigarrow \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{= \sin \alpha} = x$$

$$\rightsquigarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$$

— o — o —

GRANDI TENTAZIONI

Sia $f: A \to B$ una funzione invertibile (iniettiva e surg.)
Sia $g: B \to A$ la funzione inversa.
Allora

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A \qquad\qquad f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Veniamo ai casi pratici.

La radice quadrata è l'inversa del quadrato quindi

$$\boxed{\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \geq 0} \qquad\qquad \boxed{(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \geq 0}$$

nemmeno ha senso per $x < 0$

$$f(x) = x^2 \qquad f: \boxed{\mathbb{R}_{\geq 0}} \to \boxed{\mathbb{R}_{\geq 0}}$$
$$g(x) = \sqrt{x} \qquad g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

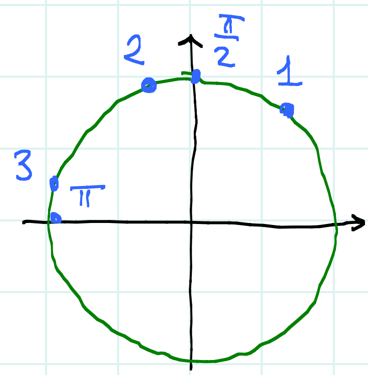
per $x \geq 0$ è la def. di funzione inversa
per $x < 0$ basta osservare che LHS e RHS sono funzioni PARI

<u>Versione trigonometrica</u>

$$f(x) = \sin x \qquad f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$g(x) = \arcsin x \qquad g: [-1, 1] \to \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{\text{Radianti}}$$

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Quindi non sono vere per ogni x !!!



$$\arcsin(\sin 1) = 1 \qquad \text{perché} \quad 1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

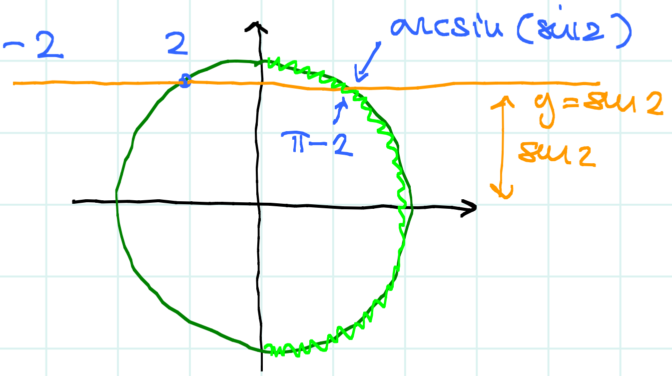
1 radianti

$\arcsin(\sin 2) = 2$ IMPOSSIBILE perché arcsin non può dare in output valori $\geq \frac{\pi}{2}$!!!

$\arcsin(\sin 2)$ ha senso? Sì, perché $\sin 2 \in [-1, 1]$ e quindi posso calcolarne arcsin!

Quanto fa $\arcsin(\sin 2) = 1{,}14\ldots$ come mai?

$= \pi - 2$

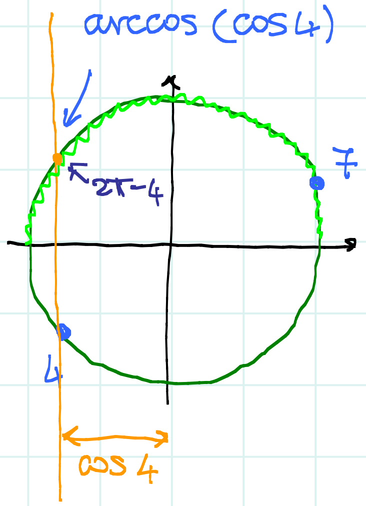


Stesso esercizio con arccos

$\left.\begin{aligned} \arccos(\cos 1) &= 1 \\ \arccos(\cos 2) &= 2 \\ \arccos(\cos 3) &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

qui era la restrizione del cos che definiva arccos

$\arccos(\cos 4) =$ NON può essere 4 perché $\arccos(\ldots) \in [0, \pi]$



$\arccos(\cos 4) =$ simmetrico di 4 rispetto all'asse x $= 2\pi - 4$

(la media tra lui e 4 deve fare π)

(percorro 2π e poi torno indietro di 4)

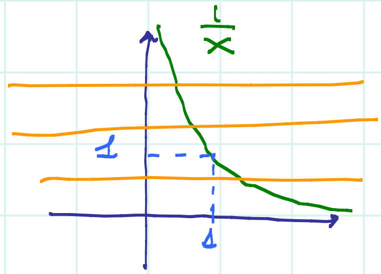
$\arccos(\cos 7) = 7 - 2\pi$

Dire se sono iniettive e/o surgettive $\quad$ P = porcheria

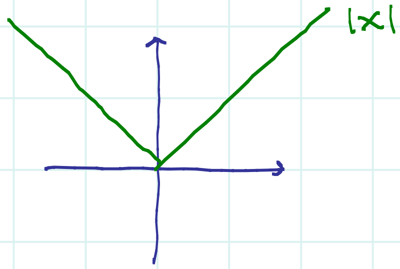
$2x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	IS	$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$	I	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	I
x^2	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	/	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	S	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$	I
x^2	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$[0,1] \to [0,1]$	IS	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I
x^2	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$	P	$[-1,1] \to [-1,1]$	/
x^3	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	IS	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	I
x^3	$[-1,1] \to [-1,1]$	IS	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	I	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I

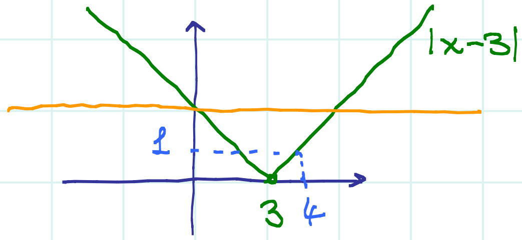
x^{-1}	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	P	$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$	IS	$(0,1) \to (1,+\infty)$	IS
$\|x-3\|$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	/	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	S	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I

$\frac{1}{x}$ non è definita per $x = 0$



$f(x) = |x-3|$





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Perché non è iniettiva? Perché $f(0) = f(6)$

Perché è surgettiva? Ogni retta interseca almeno una volta

$f: [3, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad$ IS

$f: [4, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad$ I (ma non S perché non prende tutti i valori ≥ 0)

$f: [4, +\infty) \to [1, +\infty)$ $\quad$ IS

— o — o —