ANALISI 1 — LEZIONE 015

Note Title 10/10/2024

Esercizio 1 $x\sin(x^2)$ $x^2\sin x$ $x^3\sin(x^5)$

Pari o dispari? D D P

$f(x) = x\sin(x^2)$ $f(-x) = -x\cdot\sin((-x)^2) = -x\sin(x^2) = -f(x)$

$f(x) = x^2\sin x \rightsquigarrow f(-x) = (-x)^2\sin(-x) = x^2(-\sin x) =$
$-x^2\sin x = -f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) = x^3\sin(x^5) \rightsquigarrow f(-x) &= (-x)^3\sin((-x)^5) \\ &= -x^3\sin(-x^5) \\ &= -x^3(-\sin x^5) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$x\cos(x^2)$ $x^2\cos x$ $x^3\cos(x^5)$

D P D

$$\begin{aligned} f(x) = x^3\cos(x^5) \rightsquigarrow f(-x) &= (-x)^3\cos((-x)^5) \\ &= -x^3\cos(-x^5) \\ &= -x^3\cos(x^5) \\ &= -f(x) \rightsquigarrow \text{Dispari} \end{aligned}$$

cos è pari

$\arctan(\cos x)\cdot\sin(x^5)$ $\cos(\arctan x)\cdot\sin^5 x$

D D

$g(x) = \cos(\arctan x)\cdot\sin^5 x$

$$\begin{aligned} g(-x) &= \cos(\arctan(-x))\cdot[\sin(-x)]^5 && \text{uso arctan e sin D} \\ &= \cos(-\arctan x)\,[-\sin(x)]^5 && \text{uso cos P} \\ &= \cos(\arctan x)\cdot[-(\sin(x))^5] \\ &= -\cos(\arctan x)\cdot\sin^5 x = -g(x) \end{aligned}$$

$x^{10}+x^{8}$	$x^{10}+x^{9}$	$x^{11}+x^{9}$
Pari	niente	Dispari

$$f(1)=2$$
$$f(-1)=0$$

Esercizio 2

$\sin x$	$2^{\sin x}$	$\lvert\cos x\rvert$
Dispari	No PD	Pari
2π-periodica	2π-periodica	π-periodica

$2^{\sin x}$ non è pari/dispari. Basta trovare una violazione

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ che non è ± 2

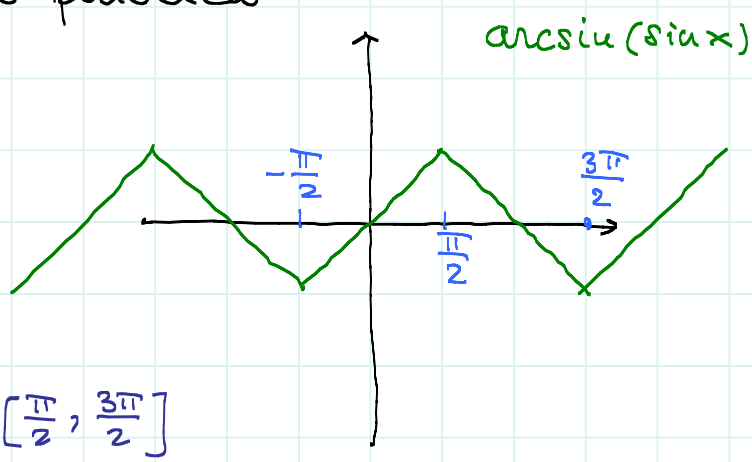
Perché $|\cos x|$ è π-periodica?

$$|\cos(x+\pi)| \underset{\text{precorso}}{=} |-\cos x| = |\cos x|$$

$\arcsin(\sin x)$ Dispari e 2π-periodica

Fatto generale: se è periodica la funzione dentro, allora la composizione è periodica

$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Per i ragionamenti della lez. precedente

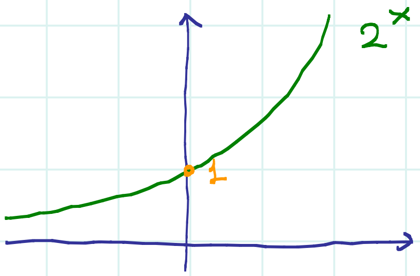
$\arcsin(\sin x) = \pi - x \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

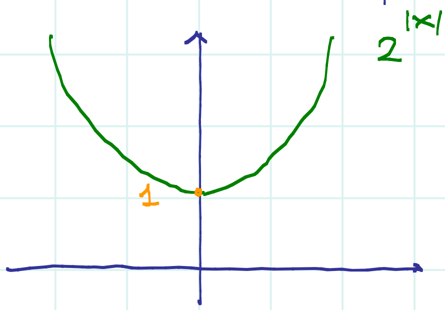
e poi è periodica, quindi se la conosco in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, allora la conosco ovunque.

Esercizio 3 Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni di

$$2^{|x-1|} = \lambda$$

Disegno il grafico di $2^{|x-1|}$, arrivandoci per tappe





coincide con 2^x per $x \geq 0$ ed è pari

- se $\lambda < 1 \leadsto$ 0 soluzioni
- se $\lambda = 1 \leadsto$ 1 soluzione
- se $\lambda > 1 \leadsto$ 2 soluzioni

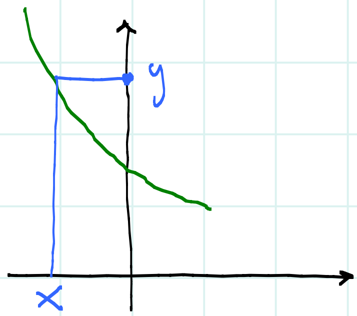
La funzione $f(x) = 2^{|x-1|}$, vista come $f: (-\infty, 1] \to [1, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile.
chi è la sua inversa?

$$2^{|x-1|} = y$$

Dato $\boxed{y \geq 1}$ (spazio di arrivo), devo trovare l'unico $\boxed{x \leq 1}$ (spazio di partenza) che risolve l'equazione

$$2^{|x-1|} = y \leadsto 2^{1-x} = y$$

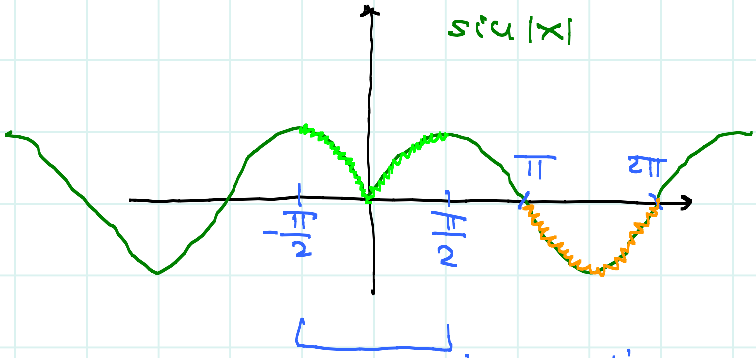
$x \leq 1$, quindi $|x-1| = 1-x$



$$\leadsto 1-x = \log_2 y \leadsto x = 1 - \log_2 y$$

Risposta: l'inversa è $g(x) = 1 - \log_2 x$

Esercizio 4 $\sin|x|$



Coincide con $\sin x$ per $x \geq 0$
e poi è pari

Non è una funzione periodica

vale 1 in due punti
a distanza π
l'uno dall'altro, e
questo succede solo in
questo caso

Chiamata f la funzione,
calcolare

$f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [0,1]$ (quando x varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$,
y assume tutti e soli i valori in $[0,1]$)

$\sup\{\sin|x| : x \in [\pi, 2\pi]\} = 0$ (1) $\inf = -1$

$\sup\{x \in \mathbb{R} : \sin|x| = \frac{1}{7}\} = +\infty$ (2) $\inf = -\infty$

(1) Mondo y : fai variare x in $[\pi, 2\pi]$ e trova il valore più
alto che ti viene

(2) Mondo x : trova tutti gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\sin|x| = \frac{1}{7}$ e prendi
il loro sup