ANALISI 1 — LEZIONE 130

Note Title 16/05/2017

Derivata funzione composta

$f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathrm{Int}(A)$

$y_0 = f(x_0) \in \mathrm{Int}(B)$

Ipotesi: (i) f derivabile in x_0

(ii) g derivabile in y_0

Tesi: $g \circ f$ è derivabile in x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Dim. brutale

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{k} + \overset{y_0}{f(x_0)}) - g(\overset{y_0}{f(x_0)})}{\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{k}} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{k \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{g(k+y_0) - g(y_0)}{k}}}_{g'(y_0)} \cdot \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} = g'(y_0) f'(x_0)$$

Problema: potremmo aver moltiplicato e diviso per 0 $(f(x_0+h) - f(x_0))$

Dim 1 (Passando attraverso definizione estesa di rapp. incrementale)

Definisco

$$R_g(k) := \begin{cases} \dfrac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} & \text{se } k \neq 0 \quad (\text{e abb. piccolo}) \\ g'(y_0) & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Osservo che $R_g(k)$ è una funzione $\boxed{\text{CONTINUA}}$ di k in un intorno dell'origine (continua in $k=0$).

Osservo anche che

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = R_g\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(vale come sopra se $f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0$, mentre se $f(x_0+h) - f(x_0) = 0$, allora LHS $=0$ perché num $=0$ e RHS $=0$ per il 2° termine)

A questo punto posso fare il limite del LHS per $h \to 0$

$$\underbrace{\boxed{R_g\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)}}_{\downarrow} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\downarrow} \to g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

$R_g(0) = g'(y_0)$ per composizione di funzioni continue

$f'(x_0)$

—o—o—

$\boxed{\text{DIM 2}}$ Uso il lemma della SOTTO-SOTTO

[Strategia generale: per dimostrare che $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \ell$ basta dimostrare che per ogni succ. $h_n \to 0$ esiste una sotto-succ. $h_{n_k} \to 0$ tale che

$$\varphi(h_{n_k}) \to \ell \quad (\text{stesso } \ell)\ ]$$

Applico la strategia alla funzione $\varphi(h) = \dfrac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$

Prendo una qualunque succ. $h_n \to 0$, e guardo cosa succede a $f(x_0+h_n) - f(x_0)$. Posso trovare una sottosucc. h_{n_k} tale che succede una di queste 2 possibilità

① $f(x_0+h_{n_k}) - f(x_0) \neq 0$ per ogni k. In questo caso va bene la dim. brutale e rapp. increm $\to g'(y_0) f'(x_0)$

② $f(x_0+h_{m_k})-f(x_0)=0$ per ogni k. In questo caso

$\varphi(h_{m_k})=0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$, quindi $\varphi(h_{m_k})\to 0$
Ma in tal caso

$$\varphi(h_{m_k}) \to 0 = g'(y_0) f'(x_0), \qquad f'(x_0)=0$$

$$f'(x_0)=\lim_{k\to+\infty}\frac{f(x_0+h_{m_k})-f(x_0)}{h_{m_k}}=0$$

In entrambi i casi $\varphi'(h_{n_k})\to g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ e quindi ok.

— o — o —

$\boxed{\text{MODULO DI CONTINUITÀ}}$

"Defn." Data $f: A\to\mathbb{R}$ e dato $r>0$ si pone

$$\boxed{\omega(r):=\sup\{|f(x)-f(y)| : x\in A, y\in A, |x-y|\le r\}}$$

Brutalmente: $\omega(r)$ è il "max" gap verticale se il gap orizz. è $\le r$

Conseguenza immediata: $|f(x)-f(y)|\le\omega(|x-y|) \quad \forall (x,y)\in A^2$

$\boxed{\text{Oss.}}$ ① La defn. è mal posta, cioè $\omega(r)$ potrebbe venire $+\infty$ per ogni $r>0$, e lo fa: pensiamo $f(x)=x^2$ in $\mathbb{R}$.

② Può venire $+\infty$ anche se f è unif. continua: pensiamo a $f(x)=x^2$ in $\mathbb{Z}$ e $r\ge 1$.

③ Se f è unif. cont., allora esiste $r_0>0$ t.c. $\omega(r)\in\mathbb{R}$ per ogni $r\in(0,r_0)$

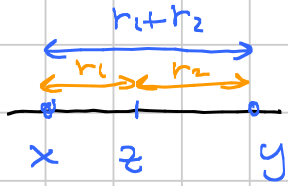
[Dim.: uso defn. di unif. cont. con $\varepsilon=2017$ e ottengo $\delta>0$ t.c. $|f(x)-f(y)|\le 2017$ per ogni $|x-y|\le\delta$
Questo mostra che
$$\omega(r)\le 2017 \qquad \forall r\le\delta=:r_0. \quad]$$

④ f è Lip. $\iff \omega(r)\le Lr$; f è α-Höld $\iff \omega(r)\le Hr^{\alpha}$

<u>Esercizio</u> Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (con insieme qualunque)

allora $\omega(r)$ è sub-additiva, cioè

$$\omega(r_1 + r_2) \le \omega(r_1) + \omega(r_2)$$



— o — o —

Stime di integrali con somme di Riemann

<u>Problema</u>: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Voglio approssimare l'integrale.

Scelgo una partizione P, la taggo T e calcolo

$$S_R(f, P, T) \qquad \text{(somma aree rettangoli)}$$

Voglio stimare

$$\left| S_R(f,P,T) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \qquad \text{(Errore)}$$

① Risposta teorica dell'integrale di Riemann

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \operatorname{diam}(P) \le \delta, \text{ allora } |\ldots| \le \varepsilon.}$$

② Se f è Lip. con costante L, allora

$$\boxed{\text{Errore} \le \operatorname{diam}(P)\, L\, (b-a)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. In ogni intervallino

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = (x_i - x_{i-1}) f(s_i) \qquad \text{(teo. media integrale)}$$

l'i-esimo termine della S_R è $(x_i - x_{i-1}) f(t_i)$

↑ tag nell'intervallo

Ma allora

$$\left| S_R(f,P,T) - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) - (x_i - x_{i-1}) f(s_i) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left| f(t_i) - f(s_i) \right| \qquad (\text{uso Lip})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, L \underbrace{|t_i - s_i|}$$

stanno su $[x_{i-1}, x_i]$, quindi
$|t_i - s_i| \leq (x_i - x_{i-1}) \leq \text{diam}(P)$

$$= L\,\text{diam}(P) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a} = L\,\text{diam}(P)\,(b-a)$$

3. Se f è Höld o più in generale ha modulo di cont $\omega(r)$ ottengo

$$\boxed{\text{Errore} \leq (b-a)\,\omega(\text{diam}(P))}$$

Oss. • Se nel caso lip. voglio dividere l'errore per 10 devo dividere il diametro per 10

• Nel caso $\frac{1}{2}$-Hölder devo dividere il diametro per 100.

— o — o —