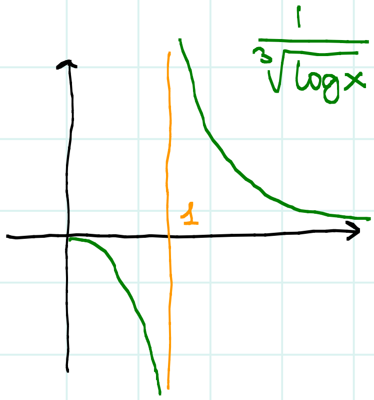
ANALISI 1 — LEZIONE 105

Note Title 03/05/2025

Esercizio 1 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx$



In 0 non ci sono problemi.
I problemi sono in 1 e $+\infty$

$$\int_0^4 \dots = \int_0^1 \dots + \int_1^4 \dots$$

Idea: portare il problema in 1 in 0.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx \underset{\substack{y = x-1 \\ dy = dx}}{=} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1+y)}}\,dy \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1+y)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

e questo converge per confronto asintotico con $g(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx \underset{\substack{y = 1-x \\ dy = -dx}}{=} -\int_1^0 \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1-y)}}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1-y)}}\,dy$$

Brutale: $\frac{1}{\sqrt[3]{\log(1-y)}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ quindi converge

Direttamente dall'inizio potevo scrivere

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\log x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1+\underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{quando } x\sim 1 \\ x-1\sim 0}})}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

e questo in 1 converge

Per il problema a $+\infty$ il $\log x$ è troppo debole per farlo convergere, quindi l'idea è che diverga a $+\infty$.

Confronto asintotico con $\frac{1}{x} = g(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{\log x}} = +\infty \quad \ldots \text{ caso limite}$$

quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ per x grandi, quindi $f(x) \geq g(x)$ per x grandi.

$\int g(x)\,dx$ con pbm a $+\infty$ diverge ...

Esempio 2 $\quad \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx$

$$\int_0^{\pi} \ldots = \int_0^{\pi/2} \ldots + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ldots$$

problema in $x=0$ $\qquad$ problema in $x=\pi$

$\boxed{x=0}$ $\quad \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x} \rightsquigarrow$ diverge

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sin(\pi-y)}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(\pi-y)}\,dy$$

$y = \pi - x$

$dy = -dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin y}\,dy$$

trigon.

abbiamo ottenuto quello che era evidente per simmetria

Esercizio 3 $\quad \displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^2-1}\,dx$

Converge alla grande perché $\quad \frac{\arctan(x^2)}{x^2-1} \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^2-1}$

Ora $\displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ volendo si calcola bene, ma in ogni caso converge per C.A. con $\frac{1}{x^2}$

$$\int_1^7 \frac{\arctan(x^2)}{x^2-1}\,dx$$

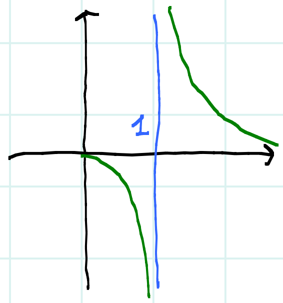
$$\frac{\arctan(x^2)}{(x+1)\underbrace{(x-1)}_{\substack{\uparrow\\ \text{colpevole}\\ \text{dell'impropriezza}}}} \sim \frac{1}{x-1}$$ che con problema in $x=1$ diverge

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x^2)}{x+1} = \frac{\pi}{8} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

quindi si comporta come $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x-1}\,dx$ che diverge $(y = x-1)$

$$\int_0^7 \frac{\arctan(x^2)}{x^2-1}\,dx$$



$$\int_0^7 \ldots = \underbrace{\int_0^1 \ldots}_{\substack{\uparrow\\ \text{Diverge}\\ a\ -\infty}} + \underbrace{\int_1^7 \ldots}_{\substack{\uparrow\\ \text{Diverge}\\ a\ +\infty}}$$

Quindi globalmente è indeterminato

Esercizio 4 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha\,dx$

Studiare al variare di α

Porto il problema in 0 con il cambio di variabili $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^\alpha dy$$

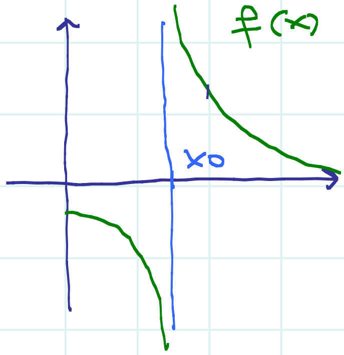
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^\alpha dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\tan y)^\alpha}\,dy$$

$\dfrac{1}{\tan y} \sim \dfrac{1}{y}$ per $y \sim 0$ $\rightsquigarrow$ converge $\iff \alpha < 1$

Esercizio 5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+7x-5}}\,dx$

Grosso problema: il denominatore si annulla da qualche parte
(in $x=0$ vale -5 e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$)

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Il denominatore si annulla in un unico p.to x_0
Infatti la derivata è $4x^3+7 \geq 7$ per $x \geq 0$, quindi è crescente strett., quindi si annulla una sola volta.
Però non riesco a trovare x_0



$\boxed{\text{Fatto 2}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^{x_0} \dots + \int_{x_0}^{x_0+4} \dots + \int_{x_0+4}^{+\infty} \dots$

$\displaystyle\int_{x_0+4}^{+\infty} \dots$ converge per C.A. con $\dfrac{1}{x^{4/3}}$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Per il problema in $x = x_0$ faccio il confronto asintotico con

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-x_0}}$$

Mi riduco a calcolare

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \sqrt[3]{\frac{x-x_0}{x^4+7x-5}}$$

Basta fare il limite dentro la radice, e quello è $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{x-x_0}{x^4+7x-5} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{4x^3+7} = \frac{1}{4x_0^3+7} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

quindi l'integrale si comporta come quello di $g(x)$ e quindi converge!

— o — o —