ANALISI 1 — LEZIONE 024

Note Title 19/10/2016

$\boxed{\text{SVILUPPINI}}$ Per $x \to 0$ valgono i seguenti

$$\sin x = x + o(x)$$
$$\tan x = x + o(x)$$
$$\arctan x = x + o(x)$$
$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$
$$e^x = 1 + x + o(x)$$
$$\cos x = 1 + o(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

vale per α reale, anche negativo

Vanno interpretati nel senso che $\sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$ ...

$\boxed{\text{Caso di } \sin x}$ $\sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$ Divido per x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

Analogamente si fanno quelli della colonna sx

$\boxed{\text{Caso di } e^x}$ Devo dim. che $e^x - 1 - x = o(x)$ per $x \to 0$ ...

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} - 1 = 0$$

$\boxed{\text{Caso di } \cos x}$ Devo dim. che $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2)$ per $x \to 0$

Divido e ottengo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$\boxed{\text{L'altro con } \cos x}$ Si può dimostrare analogamente (esercizio ...) ma si può ottenere anche più elegantemente

$$\cos x = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{o(x)} + \underbrace{o(x^2)}_{o(x)} = 1 + o(x) + o(x) = 1 + o(x)$$

Vediamo i 2 fatti usati:

$\boxed{1}$ $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$ $\qquad x^2 = x \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x}$

$\boxed{2}$ Se $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$, allora $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$

(f batte x^2, x^2 batte x, quindi f batte x)

$$f(x) = x^2 \omega(x) = x \cdot \underbrace{x\,\omega(x)}_{\omega_1(x) \to 0}$$

— o — o —

Esempio 0 $\qquad x \sin\frac{1}{x} = o\left(\sin\frac{1}{x}\right)$ per $x \to 0$

ma qui non lo posso vedere con il 2° modo

— o — o —

Esempio 1
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x) + e^{2x} - 1}{\arctan x + \sin(3x)} = \frac{5}{4}$$

Modo classico

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \; \frac{\frac{\tan(3x)}{3x}\,3 + \frac{e^{2x}-1}{2x}\,2}{\frac{\arctan x}{x} + \frac{\sin(3x)}{3x}\,3} \longrightarrow \frac{3+2}{1+3} = \frac{5}{4}$$

Metodo o picedo: sviluppo tutto con gli sviluppini

$\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$e^{2x} - 1 = 1 + 2x + o(2x) - 1 = 2x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$

$\sin(3x) = 3x + o(x)$

Numeratore $= 3x + o(x) + 2x + o(x) = 5x + o(x)$

Denominatore $= 4x + o(x)$

Frazione $= \dfrac{5x + o(x)}{4x + o(x)} = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \dfrac{5 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}^{\to 0}}{4 + \underbrace{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}_{\to 0}} \to \dfrac{5}{4}$

Fatto generale: $\lim_{x \to 0} \dfrac{o(x^k)}{x^k} = 0$

Dim. $\dfrac{o(x^k)}{x^k} = \dfrac{\cancel{x^k}\,\omega(x)}{\cancel{x^k}} \to 0.$

Esempio 2 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x) + \arctan(x^2)}{\log(1+7x) + \sin^2 x} = \dfrac{3}{7}$

Uso gli sviluppini:

$\sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$\arctan(x^2) = x^2 + o(x^2) = o(x) + o(x) = o(x)$

$\log(1+7x) = 7x + o(x)$

$\sin^2 x = (x + o(x))^2$

$= x^2 + o(x)^2 + 2x\,o(x)$

$= o(x)$

Se uno ha fifa, usa la definizione:

$[o(x)]^2 = [x\,\omega(x)]^2 = x^2\omega^2(x) = x \cdot \underbrace{x\,\omega^2(x)}_{\to 0}$

$x\,o(x) = x \cdot \overbrace{x \cdot \omega(x)}^{\to 0}$

Frazione $= \dfrac{3x+o(x)}{7x+o(x)}$ = solito finale $= \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \dfrac{3+\frac{o(x)}{x}}{7+\frac{o(x)}{x}} \to \dfrac{3}{7}$

Composizioni Per $x \to 0$

$e^{\sin x}$ $\qquad e^{x} = 1+x+o(x)$

$$e^{\sin x} = 1+\sin x + o(\sin x)$$
$$= 1+x+o(x)+o(\sin x)$$
$$= 1+x+o(x)+o(x) = 1+x+o(x)$$

Se uno ha fifa $\quad o(\sin x) = \sin x \cdot \omega(x) = x \boxed{\frac{\sin x}{x}\,\omega(x)}$

$\omega_1(x) \to 1\cdot 0 = 0$

Via alternativa: $e^{\sin x} = e^{x+o(x)} = e^{x}\cdot e^{o(x)}$

$$= \underbrace{(1+x+o(x))(1+o(x))}_{\text{svolgo e trovo } 1+x+o(x)}$$

ho usato che

$$e^{o(x)} = 1+o(x)$$

Perché è vero?

$$e^{o(x)} = 1+o(x)+o(o(x)) = 1+o(x)$$
$$e^{t} = 1+t+o(t)$$

Esempio (n+1) $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} + \log(1+\arctan(2x)) - \cos(7x)}{\arcsin(x^2) + 3\tan(5x)} = \frac{1}{5}$

$e^{\sin x} = 1+x+o(x)$

$\cos(7x) = 1+o(x)$

$\log(1+\arctan(2x)) = 2x+o(x)$

$\tan(5x) = 5x+o(x)$

$\arcsin(x^2) = o(x)$

Frazione $= \dfrac{3x+o(x)}{15x+o(x)} \to \dfrac{1}{5}$

$$\log(1+\arctan(2x)) = \arctan(2x) + \overbrace{o(\arctan(2x))}^{o(2x)=o(x)} = 2x+o(x)$$

Sviluppini in versione equiv. asintotica

Per $x \to 0$

$\sin x \sim x$ $\qquad$ $e^x \sim 1+x$

$\tan x \sim x$ $\qquad$ $\log(1+x) \sim x$

$\arctan x \sim x$ $\qquad$ $\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}$

$\arcsin x \sim x$

$(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x$

Usare queste è PERICOLOSISSIMO (vedi tra qualche lezione)

$$\boxed{\frac{e^{\sin x}+\log(1+\arctan(2x))-\cos(7x)}{\arcsin(x^2)+3\tan(5x)} = \frac{e^x+\log(1+2x)-1+\frac{49x^2}{2}}{x^2+15x} = \frac{\cancel{1}+x+2x-1+\frac{49x^2}{2}}{15x+x^2} \to \frac{3}{15}}$$

MOLTO PERICOLOSO

Esempio finale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(3x)) + \overbrace{\arctan(\arcsin(9x))}^{9x+o(x)}}{\underbrace{e^{\sin(\tan x)}-1}_{x+o(x)}} = 9$$

$\log(\cos(3x)) = \log(1+o(x))$ $\qquad$ $\cos(x) = 1+o(x)$

$= o(x) + o(o(x)) = o(x)$

$\log(1+t) = t+o(t)$

— o — o —