ANALISI 1 — LEZIONE 103

Note Title 02/05/2025

Esempio 1

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} a_0 = 1 \\ b_0 = -3 \end{matrix}$$

Nel sistema il valore di ogni successione dipende dai valori al passo precedente di entrambe

$$\boxed{\text{SLOGAN: due successioni del 1° ordine = una succ. di ordine 2}}$$

$$a_{n+2} \underset{\substack{\uparrow \\ 1^a \text{ shiftata}}}{=} 4a_{n+1} - b_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mi procuro} \\ b_{n+1} \text{ dalla } 2^a}}{=} 4a_{n+1} - (2a_n + b_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mi procuro} \\ -b_n \text{ dalla prima}}}{=} 4a_{n+1} - 2a_n - b_n$$

$$= 4a_{n+1} - 2a_n + a_{n+1} - 4a_n$$

$$= 5a_{n+1} - 6a_n$$

Conclusione:

$$\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n}$$

Risolvo questa: $\lambda^2 = 5\lambda - 6 \rightsquigarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

Per trovare c_1 e c_2 uso che $a_0 = 1$ e $a_1 = 7$ ← ottenuto dalla 1^a eq. con $n=0$

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 7 = 2c_1 + 3c_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} c_1 = -4 \\ c_2 = 5 \end{matrix} \rightsquigarrow \boxed{a_n = -4 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$$

Come trovo b_n? $b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dalla } 1^a \\ \text{equazione}}}{=} 4a_n - a_{n+1} = -16 \cdot 2^n + 20 \cdot 3^n + 4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^{n+1}$

$$= -16 \cdot 2^n + 20 \cdot 3^n + 8 \cdot 2^n - 15 \cdot 3^n$$

$$\boxed{b_n = -8 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$$

$\boxed{\text{Oss.}}$ Il sistema era

$$a_{n+1} = 4a_n - b_n \qquad \text{cioè} \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$
$$b_{n+1} = 2a_n + b_n$$

cioè del tipo $\quad v_{n+1} = A v_n \quad$ da cui $\quad \boxed{v_n = A^n v_0}$

$\text{Tr} A = 5 \quad \text{Det} A = 6 \quad \rightsquigarrow$ autovalori : $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$.

Morale : se il sistema fosse $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 3b_n \end{cases}$

lo sapremmo risolvere

<u>Esempio 2</u> $\quad \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 15b_n \\ b_{n+1} = a_n + 7b_n \end{cases}$

Formula generale

$$a_{n+2} \underset{\substack{\uparrow \\ 1^a \text{ shiftata}}}{=} 5a_{n+1} + 15b_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ b_{n+1} \text{ dalla } 2^a}}{=} 5a_{n+1} + 15a_n + 7 \cdot 15 b_n$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 15 b_n \text{ dalla } 1^a}}{=} 5a_{n+1} + 15a_n + 7(a_{n+1} - 5a_n)$$

$$= 12a_{n+1} - 20a_n$$

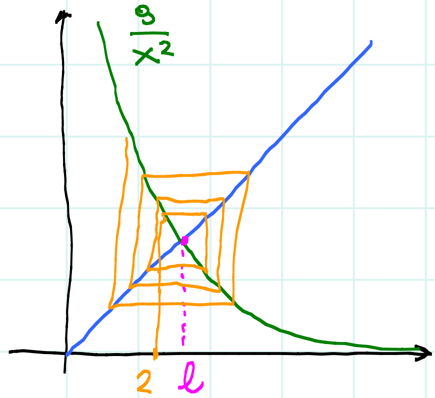
$$a_{n+2} = 12a_{n+1} - 20a_n \quad \rightsquigarrow \quad \lambda^2 = 12\lambda - 20 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 10) = 0$$

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 10^n}$$

Usando di nuovo la 1^a trovo b_n.

— o — o —

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = \frac{9}{x_n^2} \qquad x_0 = 2$



Dove si incontrano?

$$\ell = \frac{9}{\ell^2} \rightsquigarrow \ell^3 = 9 \rightsquigarrow \ell = 3^{\frac{2}{3}}$$

$3^{\frac{2}{3}} \overset{?}{<} 2 \quad$ elevo al cubo: $\quad 3^2 \overset{?}{<} 2^3, \quad 9 \overset{?}{<} 8 \quad$ No!

Idea: spiraleggiamento uscente, cioè

→ sui pari decresce e tende a 0 (cioè $a_{2n} \to 0$)

→ sui dispari cresce e tende a $+\infty$ (cioè $a_{2n+1} \to +\infty$)

Come me ne accorgo? $\quad x_0 = 2, \; x_1 = \frac{9}{4}$ (che è $> \ell$), $\; x_2 = \frac{9}{\frac{81}{16}} = \frac{16}{9}$

Quindi di sicuro $\quad x_2 < x_0 < \ell$

Applico $f(x) = \frac{9}{x^2} \quad x_3 > x_1 > \ell$

" $\quad x_4 < x_2 < \ell$

" $\quad x_5 > x_3 > \ell$

Questo ci dice che $\quad x_{2n}$ decresce (e ovviamente è ≥ 0)

x_{2n+1} cresce

Quindi

$$x_{2n} \to m \in \mathbb{R}$$

$$x_{2n+1} \to \overline{m} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Se fosse $\overline{m} \in \mathbb{R}$, allora $\quad m = \frac{9}{\overline{m}^2} \quad$ e $\quad \overline{m} = \frac{9}{m^2}$

per il solito motivo, da cui

$$m\,\overline{m}^2 = \overline{m}\,m^2$$

sono entrambi 9

Se fossero anche diversi da 0, allora semplificando $m = \overline{m} = \ell$

il che è incompatibile con le disuguaglianze.

L'unica opzione che resta è $\quad m = 0 \quad$ e $\quad \overline{m} = +\infty$

Ci sono due modi per rendere rigoroso il discorso

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Dimostrare per induzione che

$x_{2m+2} \leq x_{2m} \leq \ell$ (sui pari scende)

$x_{2m+3} \geq x_{2m+1} \geq \ell$ (sui dispari sale)

Il passo base si fa a mano calcolando x_0, x_1, x_2, x_3.

Nel passo induttivo, prendo il secondo pezzo dell'ipotesi

applico f $\rightsquigarrow$ $x_{2m+4} \leq x_{2m+2} \leq \ell$ (1° pezzo della tesi)

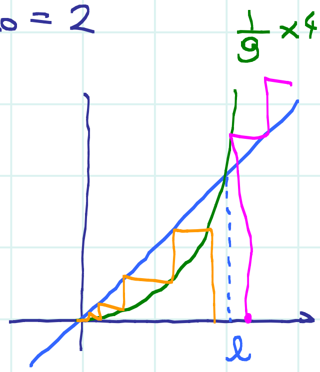
applico f $\rightsquigarrow$ $x_{2m+5} \geq x_{2m+3} \geq \ell$ (2° " " ")

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Pongo $y_m = x_{2m}$ (la sottosucc. dei pari)

Che cosa risolve y_m?

$$y_{m+1} = x_{2m+2} = \frac{9}{x_{2m+1}^2} = \frac{9}{\left(\frac{9}{x_{2m}^2}\right)^2} = \frac{x_{2m}^4}{9} = \frac{y_m^4}{9}$$

Quindi y_m risolve $y_{m+1} = \frac{1}{9} y_m^4$ con $y_0 = x_0 = 2$



È evidente e facile da dimostrare che $y_m \to 0$

(piano con la monotonia)

Analogamente $z_m = x_{2m+1}$ risolve

$$z_{m+1} = \frac{1}{9} z_m^4 \quad \text{con} \quad z_0 = x_1 = \frac{9}{4} > \ell$$

da cui facilmente $z_m \to +\infty$.

Da ricordare: può essere utile fare due passi di iterazione!

— o — o —