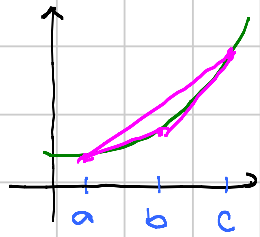
ANALISI 1 — LEZIONE 115

Note Title 26/04/2017

① f convessa $\Rightarrow$

$\forall\, a<b<c \qquad r(a,b) \le r(a,c) \le r(b,c)$



② $\forall\, a<c \qquad r(a,b) \le r(b,c) \Rightarrow f$ convessa

dove $\quad r(x,y) := \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Oss. Il rapporto incrementale è una funzione crescente dei due argomenti, cioè

- fissato y, la funzione $x \to r(x,y)$ è crescente in x (disug. dx)
- fissato x, la funzione $y \to r(x,y)$ è " in y (disug. sx)

Rapporti tra convessità e derivata prima (caso classico)

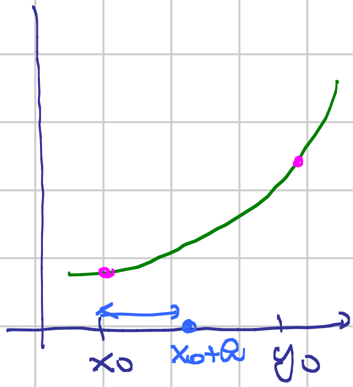
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ un convesso aperto. Sia $f: C \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.
Allora

- f è convessa in $C \iff f'$ è debolmente crescente in C
- f è strett. conv. in $C \iff f'$ è strett. cresc. in C

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Ipotesi: f è convessa
Tesi: se $x_0 < y_0$, allora $f'(x_0) \le f'(y_0)$

Per $h>0$ abbastanza piccolo vale che $x_0+h < y_0$, quindi vale che

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}$$

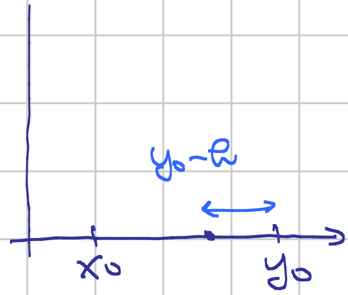


Passando al limite per $h \to 0^+$ ottengo

$$\boxed{f'(x_0) \leq \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}}$$

Per h abbastanza piccolo vale pure

$$x_0 < y_0 - h < y_0$$



da cui

$$\frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leq \frac{f(y_0)-f(y_0-h)}{h} = \frac{f(y_0-h)-f(y_0)}{-h}$$

Passando al limite per $h \to 0^+$ ottengo

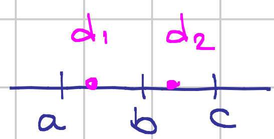
$$\boxed{\frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leq f'(y_0)}$$

Mettendo insieme le due disug. ho la tesi.

<u>Oss</u>. Abbiamo in realtà dimostrato che

$$\boxed{f'(x_0) \leq r(x_0,y_0) \leq f'(y_0)} \qquad \forall\, x_0 < y_0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ipotesi: $f'(x)$ debolm. cresc.
Tesi: f convessa



Basta dimostrare che $\quad r(a,b) \leq r(b,c) \quad \forall\, a<b<c$

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{=\,f'(d_1)} \overset{?}{\leq} \underbrace{\frac{f(c)-f(b)}{c-b}}_{=\,f'(d_2)} \qquad \text{Uso Lagrange}$$

e so che $f'(d_1) \leq f'(d_2)$, quindi ok.

Oss. Nel teorema precedente si suppone che f sia derivabile. Tuttavia f può essere convessa senza essere derivabile, ad esempio $f(x) = |x|$ in $\mathbb{R}$.

Rapporti tra convessità e derivata seconda (caso classico)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso aperto, sia $f: C \to \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte in C.

Allora

- f è convessa in $C \iff f'' \geq 0$ in C
- f è strett. conv. in $C \Leftarrow f'' > 0$ in C
  $\not\Rightarrow$

Esempio classico: $f(x) = x^4$ è strett. conv., ma $f''(x)$ si annulla per $x = 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ f è convessa in $C \iff f'$ è deboli. cresc. in C
$\iff f'' \geq 0$ in C
↑
teorema di monotonia applicato a f'

$f''(x) > 0$ in $C \Rightarrow f'(x)$ strett. cresc. in $C \iff f$ strett. conv. in C
↑
teo. monotonia applicato a f'

Ulteriore enunciato:

- $f''(x) \geq 0$ in C e $f''(x)$ NON si annulla in un intero intervallo,
  $\Rightarrow f$ strett. conv. in C

$\boxed{\text{Dim}}$ $f''(x) \geq 0$ in C + f'' ha annullamento sporadico
$\Rightarrow f'(x)$ strett. cresc. in C $\Rightarrow f$ strett. conv. in C
↑ Monotonia 3.

— o — o —

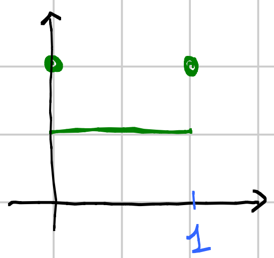
Oss. Valgono caratterizzazioni analoghe delle funzioni concave.

RAPPORTI TRA CONVESSITÀ e CONTINUITÀ

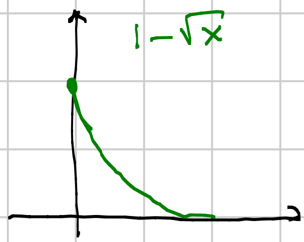
Domande: → convessa ⇒ continua? NO

→ convessa ⇒ lipschitziana (almeno sui limitati)? NO

Esempi classici $C = [0,1]$



convessa ma non continua

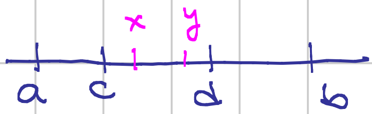


convessa e continua ma non lipschitziana

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

1. f è continua in $\mathrm{Int}(C)$
2. f è localmente lipschitziana in $\mathrm{Int}(C)$, cioè è Lip. in ogni intervallo con estremi (chiuso) contenuto in $\mathrm{Int}(C)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta dimostrare il 2. Mi posso sempre ricondurre a questa situazione



$a < c < d < b$ + f convessa in $[a,b]$

$\Rightarrow f$ lipschitziana in $[c,d]$

Prendo x e y in $[c,d]$ e assumo wlog che $x < y$. Allora

$$r(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monot.} \\ 2^a \text{ var.}}}{\leq} r(x,b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monot.} \\ 1^a \text{ var.}}}{\leq} r(d,b)$$

Dalla parte opposta

$$r(x,y) \geq r(a,y) \geq r(a,c)$$

Ho quindi dimostrato che

$$\boxed{r(a,c) \leq r(x,y) \leq r(d,b)}$$

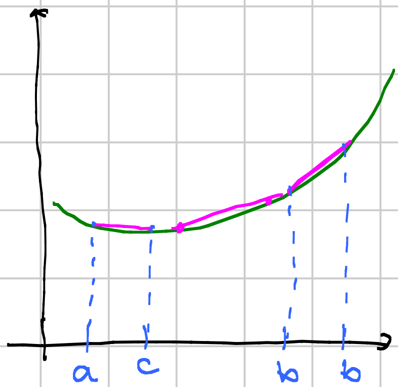
I due laterali non dipendono da x e y.

Da questa deduco che

$$|r(x,y)| \leq \max\{|r(a,c)|, |r(d,b)|\} =: L$$

(Ho usato che $A \leq x \leq B$, allora $|x| \leq \max\{|A|,|B|\}$)
precorso ... si distingue $x \geq 0$ e $x \leq 0$.

ho quindi $\dfrac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq L$, da cui la Lip.



<u>Esercizio</u> Sia $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni convesse su un certo insieme convesso C.
Definisco

$$g(x) := \sup\{f_i(x) : i \in I\} \qquad \forall x \in C$$

Dimostrare che $g(x)$ è convessa (purché sia ben definita)

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Per ogni $i \in I$, $x \in C$, $y \in C$, $\lambda \in [0,1]$ vale

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)$$

$$\le \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

Ora faccio il sup su $i \in I$ del LHS e ottengo la tesi

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Il sopragrafico di $g(x)$ è l'intersezione dei sopragrafici delle $f_i(x)$, e l'intersezione di insiemi convessi è convessa.

<u>Caso particolare</u>: il max tra 2 funzioni convesse è convessa.
Questo dimostra anche che

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{è convessa}$$

Non vale per il min.