EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI (e studio della soluzione)

$$\boxed{u' = f(t) \cdot g(u)}$$

$$\boxed{u(t_0) = u_0}$$

Algoritmo:
1. Separare
2. Integrare
3. Ricavare

} soluzione generale dell'eq. con un parametro libero c

4. Trovo c ⇝ usando la cond. iniziale
5. Verifica!
6. Studio della soluzione

Esempio
$$\begin{cases} u' = \cos t \cdot u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

1. Separare

$$\frac{du}{dt} = \cos t \cdot u^2$$

Tutte le u a sx, tutte le t a dx

$$\frac{du}{u^2} = \cos t \, dt$$

2. Integrare (a sx risp. a u, a dx risp. a t)

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \cos t \, dt \quad ; \quad -\frac{1}{u} = \sin t + c$$

↑ viene fuori dall' integr.

3. Ricavare (u in funzione di t)

$$\frac{1}{u} = -\sin t + c$$

↑ c o −c è lo stesso

$$u = \frac{1}{c - \sin t}$$

Posso dire che

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{c-\sin t}}$$

è la sol. gen. dell'eq. diff.

(4) <u>Ricavare c</u> (usando che $u(0) = 7$) $\quad u(0) = \frac{1}{c} = 7$

$$\rightsquigarrow c = \frac{1}{7} \quad \rightsquigarrow \quad u(t) = \frac{1}{\frac{1}{7} - \sin t} = \boxed{\frac{7}{1-7\sin t}}$$

è la soluzione del pbm. di Cauchy

(5) <u>Verifica</u> (dell'equazione e delle cond. iniziali)

Cond. iniz. : $\quad u(0) = 7$

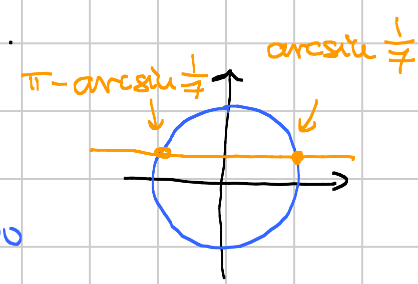
Equazione : $\quad u'(t) = -\frac{7}{(1-7\sin t)^2}(-7\cos t)$

$$= \cos t \cdot [u(t)]^2$$

(6) <u>Studio della soluzione</u> $\rightsquigarrow$ studio di funzione

<u>Def.</u> Sia $u(t)$ la sol. di un pbm. di Cauchy

- <u>Intervallo massimale di esistenza</u> : pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale.



Nell'esempio ho la cond. $\sin t \neq \frac{1}{7}$

A me serve l'intervallo che contiene il tempo iniziale $t=0$, quindi

$$\left(-\pi - \arcsin \frac{1}{7}, \arcsin \frac{1}{7}\right)$$

- tempo di vita (nel futuro): sup interv. massimale di esist.

Nell'esempio: $T = \arcsin \frac{1}{7}$

- "tipo di morte": ci sono due possibilità

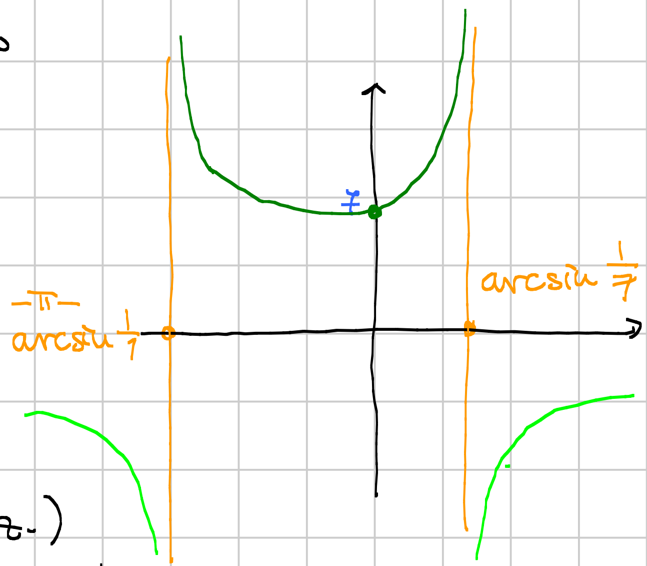
→ $\boxed{\text{BLOW UP}}$ se $\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$

→ $\boxed{\text{BREAK DOWN}}$ se "la soluzione esce dall'insieme di definizione dell'equazione".

Spesso, ma non sempre, questo si traduce in

$$\lim_{t \to T^-} \dot{u}(t) = \pm\infty$$

Nell'esempio: $u(t) = \dfrac{7}{1 - 7\sin t}$



In conclusione, possiamo dire che

→ nel futuro (risp. alla cond. iniz.) la sol. ha blow up per $T = \arcsin \frac{1}{7}$

→ nel passato, la sol. ha blow up per $T = -\pi - \arcsin \frac{1}{7}$.

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} \dot{u} = u^3 \cdot e^t \\ u(0) = -2 \end{cases}$

(1) $\dfrac{du}{dt} = u^3 \cdot e^t \rightsquigarrow \dfrac{du}{u^3} = e^t\, dt$

(2) $\displaystyle\int \frac{du}{u^3} = \int e^t\, dt \rightsquigarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = e^t + c \rightsquigarrow \frac{1}{u^2} = -2e^t + c$

(3) $u^2 = \dfrac{1}{-2e^t + c}$ $\qquad u(t) = -\sqrt{\dfrac{1}{c - 2e^t}}$ (ho scelto segno − guardando $u(0) = -2$)

(4) Trovo c: $-2 = -\sqrt{\frac{1}{c-2}}$; $4 = \frac{1}{c-2}$; $4c-8 = 1$

$c = \frac{9}{4}$ $\qquad u(t) = -\sqrt{\frac{1}{\frac{9}{4}-2e^t}}$

$$\boxed{u(t) = -2\sqrt{\frac{1}{9-8e^t}}}$$

Soluz. pbm. di Cauchy

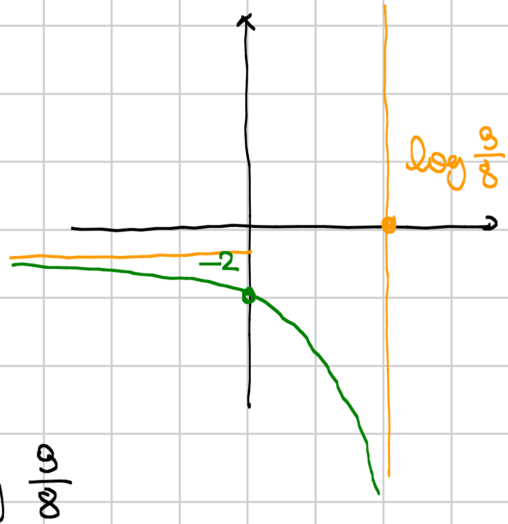
(5) Verifica $\quad u(0) = -2$

equ.: $\dot{u}(t) = -\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\cdots}}\left(+\frac{1}{(9-8e^t)^2}\right)(+8e^t)$

$$= e^t\cdot\left(-8\,\frac{1}{(9-8e^t)^{3/2}}\right) = e^t\cdot[u(t)]^{-3}$$

(6) Studio: definita dove $9-8e^t>0$, $8e^t<9$, $e^t<\frac{9}{8}$

$t<\log\frac{9}{8}$



Int. max. di esistenza: $\left(-\infty, \log\frac{9}{8}\right)$

→ nel passato ho esistenza globale con limite $-\frac{2}{3}$

→ nel futuro ho blow up per $T = \log\frac{9}{8}$

Esempio 3 $\begin{cases} \dot{u} = -\dfrac{t^4}{u} \\ u(1) = 7 \end{cases}$

(1) $\frac{du}{dt} = -\frac{t^4}{u} \quad \rightsquigarrow \quad u\,du = -t^4\,dt$

② $\int u\,du = \int -t^4\,dt \rightsquigarrow \frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{5}t^5 + c$

③ $u^2 = -\frac{2}{5}t^5 + c \rightsquigarrow u(t) = +\sqrt{c - \frac{2}{5}t^5}$

scelto per cond. iniz.

④ $u(1) = \sqrt{c - \frac{2}{5}} = 7 \rightsquigarrow c - \frac{2}{5} = 49 \rightsquigarrow c = \frac{247}{5}$

$$\boxed{u(t) = \sqrt{\frac{247 - 2t^5}{5}}}$$

Sol. pbm. di Cauchy

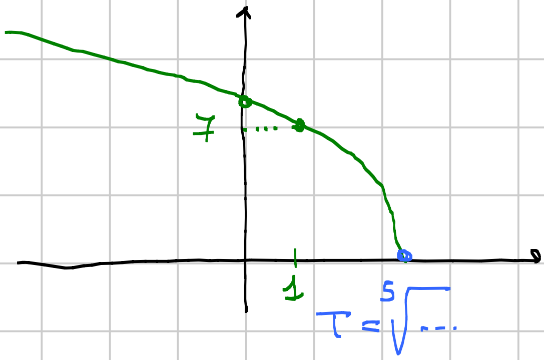
⑤ Verifica! Fare ☺

⑥ Serve $247 - 2t^5 \geq 0 \rightsquigarrow 2t^5 \leq 247 \rightsquigarrow t \leq \sqrt[5]{\frac{247}{2}}$

Int. max. di esistenza: $\left(-\infty, \sqrt[5]{\frac{247}{2}}\right)$

tempo di vita

La soluzione ha BREAK DOWN per $t = \sqrt[5]{\dots}$



Si vede che $u \to 0$, quindi "esce dalla zona di def. dell'equazione"

Si vede facilmente che

$$\lim_{t \to T^-} \dot{u}(t) = -\infty$$