ANALISI 1 — LEZIONE 73

Note Title 07/03/2025

Decomposizione nel caso generale

Se nella fattorizz. del denom. ci sono fattori con molt. >1, allora ci sono due possibili strade

→ decomposizione in fratti semplici

→ decomposizione di HERMITE

Fratti semplici $Q(x) = (x-3)(x+1)^3(x^2+4)^2$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+4} + \frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}$$

Regola: ogni fattore di primo o secondo grado con molt $= m$ produce m frazioni i cui denominatori hanno le potenze da 1 ad m

Al numeratore usiamo costanti o polinomi di 1° grado a seconda del tipo di fattore al denominatore

Accade sempre che Numero incognite = grado denominatore

Decomposizione di Hermite $Q(x) = (x-3)(x+1)^3(x^2+4)^2$

Numeratore che ha grado 1 in meno del denominatore

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}}_{\text{come se le molteplicità fossero tutte 1}} + \frac{d}{dx}\,\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{\boxed{(x+1)^2(x^2+4)}}$$

stessi fattori di $Q(x)$ con molteplicità diminuita di uno

Vantaggio di Hermite: è banale alla fine fare la primitiva di una derivata

Esempio $\int \frac{x^3+1}{x^5+2x^4}\,dx$

Divisione non serve. Fattorizzazione: $x^5+2x^4 = x^4(x+2)$

Fratti semplici: $\frac{x^3+1}{x^4(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4}$

Hermite: $\frac{x^3+1}{x^4(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{d}{dx}\,\frac{Cx^2+Dx+E}{x^3}$

grado 2

grado 3

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x^3}\right)$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2} - \frac{2D}{x^3} - \frac{3E}{x^4}$$

Alla fine il conto è molto simile...

4 Integrazione Se abbiamo lavorato alla Hermite, alla fine ci ritroviamo da integrare cose di questo tipo

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx \qquad \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Non ulteriormente scomponibile

Ora

$$\boxed{\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\log|ax+b|}$$

I fattori di 2° grado si aggiustano con log e arctan

Esempio 1 $\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\underbrace{(x^2+1)}_{} + 2\arctan x$$

sempre >0, quindi non serve il valore assoluto

Esempio 2 $\int \frac{x-3}{1+2x^2}\,dx$

$$\int \frac{x}{1+2x^2}\,dx - \int \frac{3}{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{1+2x^2}\,dx - 3\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\log(1+2x^2) - 3\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\log(1+2x^2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)$$

Esempio 3 $\int \frac{x-3}{2+x^2}\,dx$

$$\int \frac{x}{2+x^2}\,dx - \int \frac{3}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2+x^2}\,dx - 3\int \frac{1}{2+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(2+x^2) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(2+x^2) - \frac{3}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Da ricordare: $\boxed{\int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}$ $\boxed{\text{se } a>0}$

$$\int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

Esempio 4 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$

"Se punto al log, cosa vorrei come numeratore?"
Vorrei $2x+2$, quindi cerco di farlo comparire

$$\frac{x+3}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+6}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2+4}{x^2+2x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + 2\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)$$

Fatto di precorso: ogni polinomio di secondo grado che non ha radici reali (diciamo sempre positivo) lo posso scrivere come

$$\underbrace{a}_{\text{numero positivo}} + \underbrace{(bx+c)^2}_{\text{quadrato}}$$

Esempio 5 $\displaystyle\int \frac{x}{\underbrace{x^2+x+1}_{\Delta<0}}\,dx$

Per il log ci vuole sopra $2x+1$, quindi me lo procuro.

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1-1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)$$

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{positivo}}}{\frac{3}{4}} + \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{\substack{\uparrow\\ \text{quadrato}}}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \text{caso con } a=\frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

con $a=\frac{3}{4}$

— o — o —