3 Spazi vettoriali

3.1 Spazio n-dimensionale

Definizione 3.1.1. *Uno spazio **n-dimensionale** standard su **R** si rappresenta come:*

$$R^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometricamente uno spazio n-dimensionale con $n = 2$ sarà un punto sul piano cartesiano.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \iff Punto$$

3.2 Operazioni

Sugli spazi *n-dimensionali* si possono effettuare alcune operazioni:

- **Somma** $(x_1, x_2, x_3) + (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)$.
- **Moltiplicazione** $\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

Somma Moltiplicazione

3.3 Spazio vettoriale

Definizione 3.3.1 (Spazio vettoriale)**.** *Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V che ammette due tipi di operazioni:*

- *Somma: dati $v_1, v_2 \in V \implies v_1 + v_2 \in V$.*
- *Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: dato $v \in V \implies \lambda \cdot v \in V$.*

Per queste operazioni esistono anche una serie di assiomi che devono essere rispettati:

Assiomi Somma	Assiomi Moltiplicazione
$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$	$(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$
$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$	$\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$
$\nexists\, 0 \in V \ : \ 0 + v = v + 0 = v \ \forall v$	$(\lambda_1 \, \lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 \, v)$
$\forall \, v \nexists \, -v \in V \ : \ v + (-v) = (-v) + v = 0$	$(1 \cdot v) = v$

Table 1: Assiomi somma e moltiplicazioni vettori

Osservazione 3.3.1. R^n soddisfa tutti gli assiomi sopra scritti.

Esempio 3.3.1 (Matrici)**.** Consideriamo una matrice $n \times m$ elementi reali $M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \ : \ a_i \in \mathbb{R}, n \leq 0\}$

Somma: se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

Prodotto con $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

Esempio 3.3.2 (Polinomi)**.** Presi dei polinomi a coefficienti reali del tipo:

$$\mathbb{R}[x] = \{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0 | a_i \in \mathbb{R} \wedge n \geq 0\}$$

Possiamo eseguire entrambe le operazioni:

- *Somma*: $(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0) + (b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_0)$ con $m \geq n$ è uguale a $b_m \cdot x^m + \ldots + (a_n + b_n) \cdot x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$
- *Prodotto con* λ: $\lambda \cdot (a_n \cdot x^n + \ldots + a_0) = \lambda \cdot a_n \cdot x^n + \ldots + \lambda \cdot a_0)$

Esempio 3.3.3 (Funzioni)**.** Prendiamo due funzioni continue $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Possiamo effettuare le operazioni:

- *Somma*: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- *Prodotto con* λ: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

3.4 Sottospazio

Introduciamo ora il concetto di sottospazio vettoriale.

Definizione 3.4.1 (Sottospazio)**.** *Sia V uno spazio vettoriale. Un* ***sottospazio*** *$W \subset V$ è un sottoinsieme tale che:*

- $v_1, v_2 \in W \implies v_1 + v_2 \in W$.
- $v \in \mathbb{W} \implies \lambda v \in W \, \forall \, \lambda$.

Proposizione 3.4.1. *Un sottospazio $W \subset V$ è a sua volta uno spazio vettoriale.*

3.4.1 Interpretazione geometrica

Un sottospazio vettoriale è una retta che passa per l'origine o un piano che **passa per l'origine**.

Esempio 3.4.1. Dato uno spazio vettoriale:

$$V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} : t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendiamo un sottospazio vettoriale di V:

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : t_1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

Un elemento generale di questo sottospazio (sottospazio con $n = 2$) è: $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $(x_2 \in \mathbb{R})$

Se prendiamo $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \in W$ e $\lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \cdot x_2 \end{bmatrix} \in W$

Similmente se prendiamo $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ : \ t_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ vettori di forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ che è un sottospazio.

Se prendiamo invece $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ : \ t_1 = 1 \right\}$ questo non è un sottospazio perché se prendiamo il caso con $n = 2$ $\begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ che non è un sottospazio.

Prendiamo ora $\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : t_1 = t_2 \right\} \subset \mathbb{R}$ questo è un sottospazio perché: se facciamo $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2' \\ x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2' \\ x_2 + x_1' \end{bmatrix}$ e $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$ quindi è un sottospazio.

Esempio 3.4.2. Facciamo un esempio differente, prendiamo $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ a = 0 \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio. Ma nel caso ci ci fosse stato $a = 1$ non sarebbe stato un sottospazio, perché non sarebbe passato passato per (0,0).

Esempio 3.4.3. Facciamo alcuni esempi prendendo delle funzioni all'interno degli spazi vettoriali.

- Dato $\{f \in \mathbb{R}[x] : deg(f) \leq d\} \subset \mathbb{R}[x]$ con d fisso ≥ 0. Questo è un sottospazio perché:
  - Se $deg(f_1) \leq d$, $deg(f_2) \leq d \Longrightarrow deg(f_1 + f_2) \leq d$
  - Se $deg(f) \leq d \Longrightarrow deg(\lambda \cdot f) \leq d, \forall \lambda$
- $\{f \in \mathbb{R}[x] : deg(f) = d\} \subset \mathbb{R}[x]$ non è un sottospazio per diverse ragioni:
  - Se $d > 0$ allora $0 \notin W_d$
  - Se $d = 2$ abbiamo $f = x^2 + 3 \in W$, $g = -x^2 + x + 1 \in W$ ma $f + g = x + 4 \notin W$.
- $\{f \in \mathbb{R} \ : \ f(0) = d\} \subset \mathbb{R}[x]$ invece è un sottospazio perché $f(0) = 0$, $g(0) = 0 \Longrightarrow (f + g)(0) = 0$ e anche $(\lambda f)(0) = 0$.
- $\{f \in \mathbb{R} \ : \ f(0) = 1\}$ non è un sottospazio perché non contiene 0.
- $\{f \in \mathbb{R} \ : \ f(2022) = 0\}$ è un sottospazio.

Esempio 3.4.4. Dati $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fissi e dato il seguente insieme vettoriale

$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio. Perché preso $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \\ a_1y_1 + a_2y_2 \end{cases}$ vediamo che la somma $a_1(x_1+y_1)+a_2(x_2+y_2) = 0$ ed anche il prodotto con λ fa $a_1(\lambda x_1)+a_2(\lambda x_2) = 0$.

3.4.2 Generalizzazione

Possiamo dire che, dato $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ fissi:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ è un sottospazio.}$$

Vediamo dunque che le soluzioni di un equazioni lineari omogenee a n variabili definiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Possiamo generalizzare ulteriormente:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ Quindi è un sottospazio.}$$

Dunque che la soluzione di un sistema di questioni lineare omogenee definisce un sottospazio $\mathbb{R}^m$.

3.5 Combinazioni lineari

Definizione 3.5.1 (Combinazione lineare e banale)**.** *Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, \dots, v_m$ vettori in V. Una **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_m$ è una somma $\lambda v_1 + \lambda v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \in V$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. La combinazione lineare è detta **banale** se $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. In questo caso $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda v_m = 0$.*

Nota che una combinazione lineare può essere 0 ma non banale, per esempio:
$V = \mathbb{R}^2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, allora $-2v_1 + 1v_2 = 0$.

Definizione 3.5.2 (Sottospazio generato)**.** *Siano $v_1, \dots, v_m \in V$ vettori. Il **sottospazio generato** da $v_1, \dots, v_m$ è $Span(v_1, v_2, \dots, v_m) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}$. Questo rappresenta l'insieme delle combinazioni lineari.*

Proposizione 3.5.1. *$Span(v_1, \cdots, v_m) \subset V$ è un sottospazio.*

Dimostrazione 3.5.1. Bisogna verificare che $v, w \in span \Longrightarrow v + w \in span$ e $\lambda v \in span \; \forall \, \lambda$.

Esempio 3.5.1. Prendiamo $\mathbb{R}^2 = span\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}$. $span\Big\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big\}$ e $span\Big\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}$ sono due rette.
Se facciamo $span\Big\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big\} = \Big\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \Big\} = \mathbb{R}^2$

Esempio 3.5.2. Sia $W = \Bigg\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 = 0 \Bigg\}$ abbiamo allora che: $W = span\Bigg\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg\} \subset \mathbb{R}^3$
quindi: $\Bigg\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \, : \, x_1 = 0 \}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ma non è uguale a $\mathbb{R}^3$, ma è più piccolo essendo un piano attraverso l'origine.

3.6 Vettori lineamenti indipendenti

Definizione 3.6.1. *I vettori $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$ sono* ***linearmente indipendenti*** *se l'unico caso in cui $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ si ha quando $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.*

Questo vuol dire che se una combinazione lineare dei V è uguale a zero $\Longrightarrow$ la combinazione è banale.
Se $v_1, \cdots, v_n$ non sono indipendenti allora sono **linearmente dipendenti**.
$v_1, v_2, \cdots, v_m$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ non tutti uguali a 0 tale che $\lambda_1 v_1 + \lambda v_2 + \cdots + \lambda_2 v_2 = 0$.

Proposizione 3.6.1. *$v_1, v_2, \cdots, v_m$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ $\exists\, 1 \le i \le n$ tale che v_i è combinazione lineare dei v_j per $j \neq i$.*

Dimostrazione 3.6.1. Se $v_1, \cdots, v_m$ sono dipendenti allora $\exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ non tutti ugualia 0 tale che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_m = 0$. $\exists i : \lambda_i \neq 0$ che possiamo usare come dividendo: $\frac{\lambda_1}{\lambda_1} v_1 + \cdots + 1 v_i + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_m = 0$ (mando tutti a destra) $v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + -\frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_m$. Se $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_m v_m$ allora $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} - v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_m v_m = 0$

In pratica per vedere se m vettori $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti prendiamo innanzitutto m vettori:

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}, \text{ questi sono vettori di } \mathbb{R}^m.$$

Questi vettori sono linearmente indipendente, quindi l'equazione $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ vale, se e solo se $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ è soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{aligned}$$

Quindi $v_1, \cdots, v_m$ sono lin. indipendenti $\Longrightarrow$ il sistema sopra ammette solo la soluzione banale (0,...,0)

3.7 Interpretazioni geometrica

Facciamo un interpretazione geometrica di quello visto sopra ponendo $n = 2$. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti $v_1, v_2 \neq 0$ oppure $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \; : \; \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Ad esempio $\lambda \neq 0$, $v_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_2$ e se $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \setminus \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e corrisponde un punto della retta $x_2 = 0$.
In generale se $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, v_2 deve essere $\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$ quindi v_1, v_2 sono lin. dipendenti $\Longleftrightarrow$ i punti corrispondenti sono sulla tessa retta attraverso (0,0).

Esempio 3.7.1. Si decida se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Per faro dobbiamo cercare le soluzioni del sistema lineare omogeneo con la matrice associata.

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ &2x_1 + 2x_4 = 0 \\ &3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Algoritmo di gauss} \\ R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 3R_1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} R_3 = R_3 - R_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso ci sono 3 pivot, una variabile libera $\Longrightarrow \infty$ soluzioni

Quindi il sistema ammette soluzioni non banali $\Longrightarrow$ i vettori sono lim. dipendenti.
Se si guardasse solo v_1, v_2, v_3 quello che risulterebbe sarebbe una matrice 3×3 con 3 pivot, in questo caso allora ci sarebbe solo la soluzione banale ed allora v_1, v_2, v_3 sarebbero lin. indipendenti.

Proposizione 3.7.1. *Se $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ sono vettori tali che v_n è combinazione lineare di allora: $span(v_1, v_2, ..., v_n) = span(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1})$.*

3.8 Base di un sistema lineare

Definizione 3.8.1. *Un sistema $v_i, \cdots, v_n$ di vettori è una **base** di V se i vettori $v_i, \cdots, v_n$:*

- *Sono linearmente indipendenti.*
- *Lo $span(v_1, v_2, \cdots, v_n) = V$*

Corollario 3.8.0.1. *Se $span(v_1, \cdots, v_n))C$ si può scegliere una base di V fra i $v_1, \cdots, v_n$.*

Esempio 3.8.1. Vogliamo trovare la base standard di $\mathbb{R}^n$.

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Possiamo osservare che $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 \_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$

dunque $span(e_1, \cdots, e_n) = \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ma questa non è l'unica base, c'è ne sono tante, ad esempio se prendiamo $n = 2$.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base perché $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se e solo se $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Esempio 3.8.2. Troviamo la base standard di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si applica lo stesso ragionamento visto sopra con $\mathbb{R}^n$.

Esempio 3.8.3. Base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{f \in \mathbb{R}[x] : deg(x) \leq d\}$ sarebbe $1, x, x^2, \cdots, x^s$. Infatti, $a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_d \cdot x^d$ è il sistema indipendente

Esempio 3.8.4. Prendiamo $\mathbb{R}[x]$ che non ammette di base finita. Infatti $\nexists f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{R}[x]$: $span(f_1, \cdots, f_n = \mathbb{R}[x]$ perché se $f \in span(f_1, \cdots, f_n)$ allora $deg(f) \leq max(deg(f_1), \cdots, deg(f_n))$. (Comunque è vero: $span(1, x, x^2, x^2, \cdots) = \mathbb{R}[x]$ e ogni sottoinsieme finito di $1, x, x^2, \cdots$ è lin. indipendente)

Proposizione 3.8.1. *Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V, e $v \in V$ un vettore. Allora $\nexists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} | v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$. (Ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base)*

Dimostrazione 3.8.1. Scriviamo come $V = span(v_1, \ldots, v_n)$, l'esistenza degli α_i è chiaro. Se adesso $v = \alpha_1 \cdot v_i + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n$ allora $0 = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta) \cdot v_n$ allora $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_1 = \beta_n$ perché i v_i sono lin. indipendenti.

3.9 Dimensione spazio vettoriale

La dimensione di uno spazio vettoriale V sarà definita come il numero degli elementi di una sua base. Questo numero sarà lo stesso per ogni base.

Proposizione 3.9.1. *Sia V uno spazio vettoriale che ammette una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $r > n \implies v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione 3.9.1. Per $n = 2$, la prima osservazione è che se la proposizione vale per $r = 2$ vale per ogni $r > 2$. Infatti se $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ è una combinazione lineare non banale allora $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + \ldots + 0 \cdot v_r = 0$ è una combinazione non banale (perché λ_1, λ_2 o λ_3 è diverso da 0). Quindi siano $n = 2, r = 3$ e e_1, e_2 una base di V. Come $V = span(e_1, e_2)$, $v_1, v_2, v_3 \in span(e_1, e_2)$. Quindi:

$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$
$v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$
$v_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2$

Dobbiamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti $= 0$ tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Facciamo la sostituzione con il sistema a fianco.

$\lambda_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + \lambda_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) + \lambda_3(a_{31}e_1 + a_{32}e_2) = 0$ che diventa $(\lambda_1 a_{11} + \lambda_1 a_{12})e_2 + (\lambda_2 a_{21} + \lambda_2 a_{22})e_2 + (\lambda_3 a_{31} + \lambda_3 a_{32})e_2 = 0$. Ma e_1, e_2 sono linearmente indipendenti, quindi:

$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = 0$
$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = 0$

Questo è un sistema omogeneo di equazioni per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ con matrice di coefficienti $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$

Se facciamo l'algoritmo di Gauss, ottengo un numero di pivot minore o uguale a 2 (perché ci sono solo due righe), allora ci sarà ≥ 1 colonne senza pivot ed allora il sistema avrà ∞ soluzioni ed allora ci sarà una soluzione non banale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$. Ma se il sistema sopra ha una soluzione non banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$ allora anche $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ sarà una combinazione non banale e quindi ci siamo.

La dimostrazione per n, r generale è la stessa, infatti alla fine ottengo un sistema lineare di n equazioni in $r > n$ variabili ed allora c'è sempre una soluzione non banale. ■

Corollario 3.9.0.1. *Sia $e_1, \ldots, e_n$ una base di V. Se $v_1, \ldots, v_n$ è un sistema linearmente indipendente $\implies$ anche $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V.*

Dimostrazione 3.9.2. Dobbiamo dimostrare che $Span(v1, \ldots, v_n) = V$.
Sia $v \in V$. Per la proposizione 3.9.1, il sistema di $n+1$ vettori $v_1, \ldots, v_n, v$ è linearmente dipendente.
Quindi $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$ tali che $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n + \lambda_{n+1} \cdot v = 0$. (*)
Se $\lambda_{n+1} = 0$ allora $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ perché $v_1, \ldots, v_n$ sono **indipendenti** $\implies$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ non tutti $= 0$.
Quindi $\lambda_{n+1} \neq 0$. Ma allora (*) mi dà $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda n+1} + \ldots + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}) \cdot v_n \implies v \in Span(v_1, \ldots, v_n)$.
Questo vale per ogni $v \in V \implies V = Span(v_1, \ldots, v_n)$.

Corollario 3.9.0.2. *Se $v_1, \ldots, v_r$ ed $e_1, \ldots, e_n$ sono due basi di V allora $r = n$.*

Dimostrazione 3.9.3. Se $r > n$, $v_1, \ldots, v_r$ è linearmente dipendente se $e_1, \ldots, e_n$ è una base (proposizione 3.8.1), quindi $r \leq n$. Se $r < n$ e $v_1, \ldots, v_n$ è una base allora $e_1, \ldots, e_n$ è linearmente dipendete e questa è una contraddizione. Dunque $r = n$. ■

Definizione 3.9.1 (Dimensione di un V)**.** *Se V ammette una base $e_1, \ldots, e_n$ n è la dimensione di V. La dimensione di V si indica come $dimV = n$.*

Corollario 3.9.0.3. *Se la dimensione di V è n e $v_1, \ldots, v_m$ sono vettori lin. indipendenti con $m < n \implies \exists\, w_{m+1}, w_{m+2}, \cdots, w_n | v_1, \ldots, v_n, w_{m+1}, \cdots, w_n$ sono una base di V.*

Dimostrazione 3.9.4. Dobbiamo verificare che $span(v_1, \ldots, v_m) = V$. Sappiamo che $span(v_1, \ldots, v_m)$ non può essere V, allora $\exists v \in V$ tale che $v \notin span(v_1, \ldots, v_m)$. Ma allora basta vedere che $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti ed allora abbiamo una contraddizione.
Sia $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_m \cdot v_m + \lambda_0 \cdot v_0 = 0$ una combinazione lineare se $\lambda = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ perché $v_1, v_n \ldots, v_m$ lin. indipendenti allora $v_1, v_2, \ldots, v_m$ lin. indipendenti. Se prendiamo un $\lambda_{m+1} \neq 0$ possiamo fare $-\frac{\lambda_1}{\lambda \cdot} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \cdot v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n = V \in span(v_1, \ldots, v_n)$, ma questa è una contraddizione $v \notin span$. ■

Esempio 3.9.1. Decidiamo se $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono una base $\mathbb{R}^3$.

Per faro dobbiamo solo decidere se sono indipendenti o meno, e per farlo usiamo Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_3 - R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{Scambio} R_2, R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vediamo dunque che ci sono 3 pivot e quindi i vettori sono lineamenti indipendenti e di conseguenza abbiamo una base.

Esempio 3.9.2. Prendiamo $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Abbiamo visto che $1, x, x^2$ sono una base questo vuol dire allora che $\mathbb{R}[x]_{<2} = 2$. Vediamo se $1, 1+x, (1+x)^2$ forma una base. Per fare questo bisogna vedere se sono linearmente indipendenti. Supponiamo che: $\lambda_1 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(1+x)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + 2x\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)1 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_3 + x^2 = 0$.
Visto che $1, x, x^2$ sono lin. indipendenti allora $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$, $\lambda_3 = 0$ sostituendo viene che $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0$ allora $1, 1+x, (1+x)^2$ sono lin. indipendenti ed allora sono una base di $\mathbb{R}(x)_{<2}$.

Esempio 3.9.3. $W' = \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \ : \ f(1) = f(2) = 0\}$, $W' \subset W$ (per esempio visto prima) e $dim(W) = 3 \Longrightarrow dim(W') \leq 2$. Ci sono due vettori indipendenti in W, $(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2$ di gradi diversi $\Longrightarrow dim(W') = 2$.
$W' \subset W$ in base W' è $(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2$ e completiamo in una base di W $(x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2 \in W \setminus W'$ è una base di W, perché sono indipendenti:
$W \subset V$, $dim(V) = 4$, $dim(W) = 4$. $1, x-1, (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)^2$ è una base di $V \setminus W$.

Esempio 3.9.4. $V = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, la dimensione è $dim(V) = 9$. Mentre $W \subset \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$: la somma di ogni riga è $0\}$. Supponiamo $dim(W) < 9$ elementi linearmente indipendenti di W.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Essendo linearmente indipendente allora $dim(W) \geq 6$. Proviamo a dire che $dim(W) = 6$. L'idea:
$W_1 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima riga $= 0\}$,
$W_1 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) :$ la somma della prima e della seconda riga $= 0\}$.
$W \subset W_2 \subset W_1 \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, sapendo $dim(M_{3\times 3}(\mathbb{R})) = 9, dim(W_1) = 6, dim(W_2) = 7, dim(W) = 7$.

Esempio 3.9.5. Sappiamo già: $v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ che sono una base di $\mathbb{R}^3$. Troviamo le coordinate di $\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$ rispetto a queste basi. $\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$. Ed usiamo Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 2\\3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_2 - 2R_1\\R_3 - 3R_1\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0 & 2\\0 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_3 - R_2\\R_2 = \frac{1}{2}R_1\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} R_1 - R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -1$.

Esempio 3.9.6. Vedere se $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ è una base $\mathbb{R}^3$ e calcolare coordinate $\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}$ rispetto a base.
Per calcolare le coordinate dobbiamo risolvere il sistema lineare che si crea con le 3 matrici:

$$\begin{matrix}x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 4\end{matrix} \qquad \begin{matrix}x_3 = 0 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = -1\end{matrix}$$

Usiamo Gauss per verificare l'indipendenza perché se questi vettori sono indipendenti allora i coefficienti $4, -1, 0$ saranno le coordinate.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} R_3 - R_1 \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 1\\0 & -2 & -2\end{bmatrix} \text{Inverto } R_2, R_3 \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -2 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Torna $x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 0$, inoltre abbiamo una forma a scalini con 3 pivot allora i vettori sono indipendenti e quindi sono una base.

Proposizione 3.9.2. *Se abbiamo uno spazio vettoriale $dim(V) = n$ ed abbiamo $v_1, v_2, \cdots, v_m$ vettori linearmente indipendenti di V con $m < n$ allora $\exists\, w_{m+1}, w_{m+2}, \cdots, w_n \ : \ v_1, \cdots, v_m, w_{m+1}, \cdots, w_n$ sono una base di V.*

Dimostrazione 3.9.5. $Span(v_1 \ldots, v_m)$ non può essere V, perché se $span(v_1, \cdots, v_m) = V \Longrightarrow v_1, \cdots, v_m$ è una base ma $m < n$ è $dim(V) = n$ e questa è una contraddizione. Quindi $span(v_1, \cdots, v_m) \neq V \Longrightarrow \exists w_{m+1} \in V : w_{m+1} \notin span(v_1, \cdots, v_m)$. Ma allora $v_1, \cdots, v_m, w_{m+1}$ sono linearmente indipendenti tale che se $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} w_{m+1} = 0$, $\lambda_{m+1} = 0$ allora $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Se $\lambda_{m+1} \neq 0$ allora $v_{m+1} = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}})v_1 + \cdots + (\frac{-\lambda_m}{\lambda_{m+1}})w_m \in span(w_1, \cdots, v_m)$ che è una contraddizione.

Per ricapitolare se la $dim(V) = n$ e $v_1, \cdots, v_n$ sono vettori di V possiamo dire che:

- Se $m > n$ allora i vettori sono linearmente dipendenti.
- Se $m = n$ e i vettori sono indipendenti allora si forma una base.
- Se $m < n$ e i vettori sono indipendenti allora si completa in una base di V.

Esempio 3.9.7. Facciamo un esercizio che sarà suddiviso in due parti.

- Decidiamo se i vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. $dim(\mathbb{R}^3) \Longrightarrow$ se sono indipendenti sono allora una base. Usiamo gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} R_2 + R_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta avere 2 pivot e quindi i vettori sono dipendenti. I pivot però sono delle colonne 1 e 3 e quindi se escludiamo la colonna centrale abbiamo come risultato due vettori indipendenti che chiamiamo v_1, v_2.

- Ora come secondo punto dobbiamo completare v_1, v_2 in una base di $\mathbb{R}^3$. Per fare questo dobbiamo trovare un terzo vettore non contenente in $span(v_1, v_2)$.
L'idea qui è che so che $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è la base standard. So anche che almeno uno di questi 3 vettori non è contenuto in $span(v_1, v_2)$ perché se $e_1, e_2, e_3 \in span(v_1, v_2) \Longrightarrow span(e_1, e_2, e_3) \subset span(v_1, v_2)$ ma $span(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$ e quindi abbiamo una contraddizione. A questo punto devo trovare quale dei 3 vettori non è in $span(v_1, v_2)$. Lo facciamo provando i vari vettori e trovano quello che utilizzando Guass faccia venire 3 pivots.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} R_3 - 2R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato in questo caso è 3 pivot quindi i vettori sono linearmente indipendenti e quindi è una base di $\mathbb{R}^3$.

Proposizione 3.9.3. *Sia $W \subset V$ un sottospazio. Allora:*

1. *Abbiamo che $dim(W) \leq dim(v)$.*
2. *Se $W \neq V$ allora $dim(W) < dim(v)$.*

Dimostrazione 3.9.6. Per dimostrare questa proposizione bisogna andare a dimostrare i due punti separatamente.

1. Se $r = dim(W)$ e $w_1, \ldots, w_r$ è una base di W allora se $r > n$ per una proposizione vista precedentemente $w_1, \ldots, w_r$ sarebbero linearmente dipendenti e questa è una contraddizione quindi $r \leq n$.
2. Se $r = n$, $w_1, \ldots, w_r$ sono $n = r$ vettori lineamenti indipendenti di V ed allora sono una base di V quindi $span(w_1, \ldots, w_r) = V \Longrightarrow V = W$.

Esempio 3.9.8. Sia $V = M_{2\times2}(\mathbb{R}), W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \ : \ b = c\}$ (questa è definita anche matrice simmetrica).
Si calcoli da dimensione di W, $dim(W)$. Partiamo dal fatto che la $dim(M_{2\times2}(\mathbb{R})) = 4$ (basi standard). Mentre $V \neq M_{2\times2}(\mathbb{R}) \Longrightarrow dim(V) \leq 3$. Vediamo però che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sono linearmente indipendenti quindi devono essere una base di W e quindi dim(W) = 3

Esempio 3.9.9. Sia $W = \{f \in \mathbb{R}[x\ : deg(f) \leq 3, f(1) = 0\}$ sottospazio di $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Sappiamo che la $dim(V) = 4$ (1, x, x^2, x_3). La proposizione mi dice che $dim(W) \leq 3$ e se trovo 3 vettori indipendenti allora $dim(W) = 3$. Possiamo vedere che $x-1, x^2-1, x_3-1$ sono lin. indipendenti quindi concludiamo che $dim(W) = 3$.

Osservazione 3.9.1. Se V è un spazio, $V_1, V_2 \subset V$ sottospazi allora anche $V_1 \cup V_2$ è un sottospazio. Infatti se $v \in V_1 \cup V_2$ e $w \in V_1 \cap V_2 \implies v+wV_1 \cap V_2$ perché V_1 sottospazio ed allora $v+w \in V_1$ ed allora in modo simile per $V_2 \implies v+w \in V_2$ ed in modo simile $\lambda v \in V_1, \lambda v \in V_2 \implies \lambda v \in V_1 \cap V_2 \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio 3.9.10. Sia $W_i \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $E_i\ : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$. Allora $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_r$ è il sottospazio delle soluzioni comuni di $E_1, E_2, \cdots, E_r$.

3.10 Formula di Grassman

Definizione 3.10.1 (Somma fra sottospazi)**.** *Siano $V_1, V_2 \subset V$ due sottospazi. La loro somma di V_1, V_2 è definita come:*

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Osservazione 3.10.1. Si osservi che $V_1 + V_2 \subset V$ è un sottospazio a sua volta.

Dimostrazione 3.10.1. Questa definizione si somma fra sottospazi è vera perché se $v, w \in V_1 + V_2$ allora:

$$\left.\begin{array}{ll} v = v_1 + v_2 & \text{con } (v_i \in V_i) \\ w = w_1 + w_2 & \text{con } (w_i \in V_i) \end{array}\right\} \Rightarrow v+w = (v_1+w_1)+(v_2+w_2) \in V_1+V_2 \text{ perché } (v_1+w_1) \in V_1, (v_2+w_2) \in V_2$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \in V_1 + V_2$ con $\lambda v_1 \in V_1$ e $\lambda v_2 \in V_2$. ∎

Proposizione 3.10.1. *Se $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V_1 + V_2 \implies span(v_1, \ldots, v_n) \subset V_1 + V_2$.*

Dimostrazione 3.10.2. La dimostrazione è abbastanza veloce, infatti basta vedere che se $V_1 + V_2$ è un sottospazio che contiene $v_1, \cdots, v_n$ allora contiene le loro combinazioni. lineari.

Esempio 3.10.1. Dato un $V_1 = \{\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\ :\ a \in \mathbb{R}\}, V_2 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}\}\ :\ b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ sottospazi.
Allora $V_1 + V_2 = \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\ :\ a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

Esempio 3.10.2. Dati $V_1 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\ :\ a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}\ :\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
Allora $V_1 + V_2 = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\ :\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\cancel{3}}$ ma anche $V_1 \cap V_2 = \{\begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}\ :\ a_2 \in \mathbb{R}\}$

Teorema 3.10.1 (Formula di Grassman)**.** Sia $dim(V) < \infty$, $V_1, V_2 \subset V$ sottospazi allora:

$$dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2)$$

Dimostrazione 3.10.3. Per dimostrare questa formula sia $e_1, \cdots, e_4$ una base di $V_1 \cap V_2$. Si completa in una base $e_1, \cdots, e_r, v_{r+1}, \cdots, v_n$ di V_1 e $e_1, \cdots, e_r, w_{r+1}, \cdots, w_m$ di V_2.
Quindi abbiamo he $dim(V_1) = n, dim(V_2) = m$ e che $V_1 \cap V_2 = r$. A questo punto verifichiamo che $e_1, \cdots, e_r, v_{r+1}, \cdots, v_n, w_{r+1}, \cdots, w_m$ è una base di $V_1 + V_2$. Se fosse una base allora $dim(V_1 + V_2) = n + m - r$. Per verificare se è una base verifichiamo se è lin indipendente, sia:
$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_2 v_{r+1} + \cdots + \mu_{n-r} v_n + \nu_1 w_{r+1} + \cdots + \nu_{m-r} w_m = 0$. Tutti i coefficienti $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$, dobbiamo ora vedere se sono tutti uguali a 0.

$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_2 v_{r+1} + \cdots + \mu_{n-r} v_n = -\nu_1 w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m$. Vediamo che la parte $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_2 v_{r+1} + \cdots + \mu_{n-r} v_n \in V_1$ mentre $-\nu_1 w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m \in V_2$, quindi $-\nu_1 w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m \in V_1 \cap V_2 \implies$ come $e_1, \cdots, e_r$ è una base di $V_1 \cap V_2, \exists\ \alpha_1, \cdots, \alpha_r\ :$ $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r = -\nu w_{r+1} - \cdots - \nu_{m-r} w_m$.

Ma $e_1, \cdots, e_r, w_{r+1}, \cdots, w_m$ è base di V_2 ed allora è linearmente indipendente ed allora $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \nu_1 = \cdots = \nu_{m-r} = 0$, ma allora $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_1 v_{r+1} + \cdots + \nu_{n-r} v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_{n-r} = 0$ perché $e_1, \cdots, e_r, v_{r+1}, \cdots, v_n$ è una base di V_1.
Vediamo dunque che $span(e_1, \cdots, e_r, v_1, \cdots, v_{n-r}, w_1, \cdots, w_{m-r}) = V_1 + V_2$ se $v \in V_1 + V_2$, $v = v^1, v^2$: $v^1 \in V_1, v^2 \in V_2$. Ma allora $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R}$:
$v^2 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} v_1 + \cdots + \alpha_n v_{n-r}$ e $v_2 = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_r e_r + \beta_{r+1} w_1 + \cdots + \beta_m w_{m-r}$ perché $e_1, \cdots, e_r, v_1, \cdots, v_{n-r}$ è un base di V_1 e $e_1, \cdots, e_r, w_1, \cdots, w_{m-r}$ è una base di V_2.
Detto ciò allora abbiamo che $v_1 = v^1 + v^2 = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_r + \beta_r)e_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_{r+1} w_1 + \cdots + \beta_m w_m$. ■

Esempio 3.10.3. Consideriamo i due sottospazi in $\mathbb{R}^4$ seguenti:

$$V = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}, W = span\left(w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Calcoliamo $dim(V \cap W), dim(V + W)$. Sappiamo che $dim(W) = 2$ perché w_1 e w_2 sono **linearmente indipendenti**. Questo è ovvio in quanto abbiamo solo due vettori che non sono uno il multiplo dell'altro.
Bisogna dunque calcolare la $dim(V)$ tramite Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque x_3, x_4 come variabili libere che fa si che $x_1 = x_3 + 6x_4$ e $x_2 = -x_3 - 3x_4$, la soluzione generale è dunque:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $dim(V) = 2$ e v_1, v_2 è una base. Cerchiamo ora $dim(V + W)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 + R_1]{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Inverto } R_2, R_4} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + \frac{1}{3} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque 3 pivots ed allora le prime 3 colonne sono indipendenti ma v_1, v_2, w_1, w_2 sono dipendenti. Questo fa si che $dim(V + W)$ =3.
Utilizzando poi Grassman: $dim(V \cap W) = dim(V) + dim(W) - dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$

Esempio 3.10.4. Siano $V = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), W = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

Chiamiamo i due vettori in V v_1, v_2 mentre i due in W w_1, w_2. Trovare basi di $V + W, V \cap W$. Per $V + W$ facciamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} R_4 - R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque 3 pivtos ed allora $dim(V+W)=3$, perché v_1, v_2, w_2 sono lin. indipendenti e quindi sono una base. Utilizzando allora Grassmann: $dim(V \cap W) = dim(V) + dim(W) - dim(V+W) = 2+2-3 = 1$.
In uno spazio di $dim = 1$ ogni vettore diverso da 0 è base, per trovarlo facciamo:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ &-x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ &-x_4 = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che $x_4 = 0, x_3 =$ t sono variabili libere. Quindi $x_2 = -\frac{7}{2}, x_1 = -\frac{t}{2}$

La soluzione generale è dunque $(-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, t, 0)$ e con $t = 1$ abbiamo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0)$ che fa si abbiamo $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - w_1 = 0$. Dunque $w_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \in V \cap W$.
Quindi w_1 è una base di $V \cap W$ e questo perché so che questo spazio ha $dim = 1$ grazie a Grassman. Ogni volta che $V \cap W$ è della forma $t \cdot w_1$ allora ri dimostra che $dim(V \cap W) = 1$.

Esempio 3.10.5. Dati $V = M_{3\times3}(R)$, $V_1 = \{$matrici diagonali$\}$ e $V_2 = \{$matrici dove la 1° riga = 2° riga$\}$.

$$\text{Base di } V_1\text{: } \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow dim(V_1) = 3$$

$$\text{Base di } V_2\text{: } \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow dim(V_1) = 6$$

$$\text{Elemento generale di } V_1 \cap V_2\text{: } \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow dim(V_1 \cap V_2) = 1$$

Grassmann: $dim(V_1 + V_2) = 3 + 6 - 1 = 8$