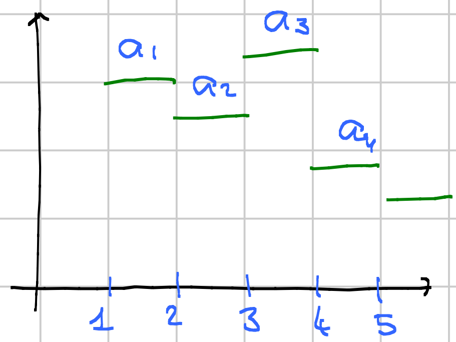
ANALISI 1 - LEZIONE 019

Note Title 13/10/2016

<u>Criterio successioni → funzioni</u> (i limiti di succ. aiutano i limiti di funzioni)



Sia $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione costante a tratti lunghi 1, cioè $f(x)$ assume lo stesso valore per ogni $x \in (n, n+1)$.
In altri termini, esiste una succ. a_n t.c.

$$f(x) = a_n \qquad \forall x \in (n, n+1)$$

Allora $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n}$

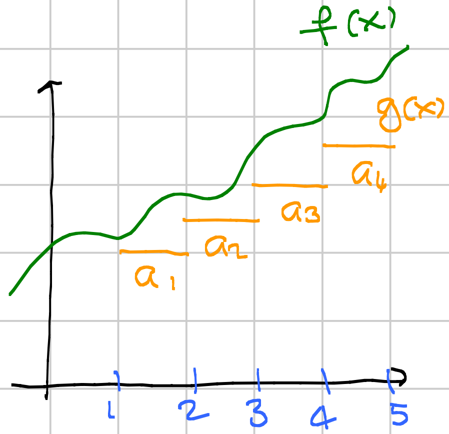
cioè i 2 limiti hanno lo stesso tipo di comportamento ①, ②, ③, ④

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^{17}} = +\infty$

Per ogni $x \in (n, n+1)$ si ha che

$$\underbrace{\frac{2^x}{x^{17}}}_{f(x)} \geq \underbrace{\frac{2^n}{(n+1)^{17}}}_{a_n}$$

Abbiamo dim. che $f(x) \geq g(x)$, dove $g(x)$ è la funzione costante a tratti con valori dati da a_n.



Ora

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

↑ succ. → funz. ↑ dim. prima con il rapporto

Quindi per confronto a 2 anche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim criterio}}$ Ovvia: quello che la succ. fa per ogni $n \geq n_0$, la funzione lo fa per ogni $x \geq n_0$.

— o — o —

Esempio 2 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}_{\downarrow\, e} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{\downarrow\, e} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\downarrow\, e} \qquad \text{per } x\in(n,n+1)$$

Devo dimostrare che i 2 laterali tendono ad e

DX : $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow\, e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1} \to e$$

SX : $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}}_{\downarrow\, e} : \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}}_{\downarrow\, 1} \to \frac{e}{1} = e$$

Oss. Se $a_n \to l$, allora anche $a_{n+1} \to l$

— o — o —

Dimostriamo che $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$

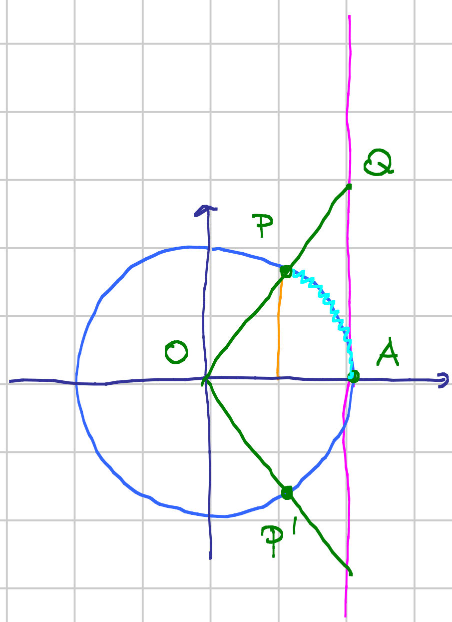
La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è PARI, quindi basta fare il limite per $x\to 0^+$.

Supponiamo di sapere che

$$\boxed{\sin x \le x \le \tan x \qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$$

Divido tutto per $\sin x$:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{\downarrow\, 1} \le \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\downarrow\, 1} \le \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{\downarrow\, 1}$$



Quindi basta passare al reciproco

Bisogna dim. la disuguaglianza

Ora $PP' = 2\sin x$ e $\overset{\frown}{PP'} = 2x$. Se diamo per buono che
segm.   arco

arco $\geq$ segmento, abbiamo
$x \geq \sin x$

Per dim. che $\tan x \geq x$ consideriamo le aree

Area triangolo $OQA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x$

Area settore OAP : Area cerchio $= \overset{\frown}{AP}$: lungh. circ.

$$\text{Area settore} = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2} \leq \text{Area triangolo} = \tan x \cdot \frac{1}{2}$$

— o — o —

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}}_{1} \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}}_{\frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}$$

— o — o —

$$\frac{\tan x}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}_{1} \to 1 \qquad (\text{per } x \to 0)$$

$$\frac{\arctan x}{x}$$

Pongo $y = \arctan x$, quindi $x = \tan y$
Quando $x \to 0$ abbiamo che anche $y \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Stesso metodo per $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

— o — o —

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Pongo $y=-x$. Quando $x\to-\infty$ abbiamo che $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = e$$

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}}_{\to e}\ \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}}_{\to 1}$$

(sostituzione $z=y-1$)

Osserviamo ora che $\log x$ è una funzione continua, per il teorema non dimostrato. Quindi se

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, allora facendo il log a dx e sx

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log e = 1$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Ora pongo, in entrambi i casi, $y=\frac{1}{x}$.

$$\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{\log(1+y)}{y} = 1}_{\text{da lim } x\to+\infty} \qquad \underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{\log(1+y)}{y} = 1}_{\text{da lim per } x\to-\infty}$$

Dove ho usato la continuità?

Se $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, allora $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f(\ell)$

Sto ponendo $y = g(x)$ e trasformando

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = \lim_{y\to\ell} f(y) \underset{\text{continuità}}{=} f(\ell)$$

— o — o —

$$\frac{e^x-1}{x}$$

Pongo $y = e^x-1$. Quando $x\to 0$ abbiamo che $y\to 0$.

Ricavo x: $y = e^x - 1 \iff y+1 = e^x \iff x = \log(y+1)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

— o — o —

Limite dimenticato $\lim_{x\to 0} x\cdot\log x \;=\; \lim_{x\to 0^+} x\log x$

$\log x$ è definito solo per $x\to 0^+$

Pongo $y = \frac{1}{x}$, quindi $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\log\frac{1}{y} \underset{\text{precorso}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log y}{y} \underset{\text{log vs potenza}}{=} 0$$

— o — o —

Più in generale $\lim_{x\to 0^+} x^a\cdot|\log x|^b = 0$ per ogni $a>0$ e ogni $b>0$

Fatto il solito cambio $y = \frac{1}{x}$ ci riduciamo a

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^a}\left|\log\frac{1}{y}\right|^b = \lim_{y\to+\infty} \frac{|\log y|^b}{y^a} \underset{\text{log vs potenza}}{=} 0$$

($z = \log y$ e mi riduco all'esponenz.)