ANALISI 1 – LEZIONE 19

→ Teorema successioni monotone

→ Il numero e

Def. Sia $\{a_n\}$ una succ. di numeri reali. Si dice che a_n è
- strett. crescente se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- debol. crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ "

} sempre più a dx

- strett. decrescente se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- debol. decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$ "

} sempre più a sx

Oss Se a_n è strett. cresc., allora a_n è anche debolm. cresc.
" decresc " decresc.

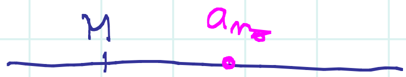
Oss. La stessa definizione si può enunciare dicendo che a_n è
- strett. crescente se $a_m > a_n \quad \forall m > n$
- debolm " $a_m \geq a_n \quad \forall m > n$
- strett. decr. $a_m < a_n \quad \forall m > n$
- debolm. decr $a_m \leq a_n \quad \forall m > n$

In tutti questi casi la succ. si dice MONOTONA.

$\boxed{\text{Teorema successioni monotone}}$ $\boxed{\text{Caso crescente}}$

Sia a_n una succ. debolm. crescente (se lo è strett., ancora meglio)
Allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (solo 2 casi su 4)
Inoltre $\ell = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

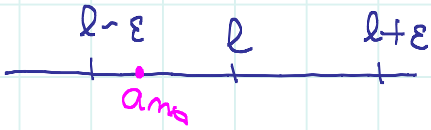
Versione decrescente: sia a_n una succ. debolm. decrescente.
Allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Inoltre $\ell = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$



$\boxed{\text{Dim. caso crescente}}$ Ci sono due casi

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. Devo dim. che $a_n \to +\infty$.
  Mi viene dato $M \in \mathbb{R}$. Per caratt. di sup $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
  $a_{n_0} \geq M$. Per la debole crescenza $a_n \geq M$ per ogni $n \geq n_0$,
  quindi definitivamente

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \ell \in \mathbb{R}$. Devo dimostrare che $a_n \to \ell$, cioè
  $\forall \varepsilon > 0 \qquad \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente
  Per caratterizzazione di sup, $a_n \leq \ell$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi
  la disug. di dx è gratis.
  Inoltre, sempre per caratt. di sup.,
  esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq \ell - \varepsilon$.
  Ma allora $a_n \geq \ell - \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$ grazie alla debole
  crescenza.



— o — o —

Esercizio Capire la dimostrazione e riscriverla nel caso decrescente.

— o — o —

IL NUMERO e (NUMERO DI NEPERO)

$\boxed{\text{Teorema}}$ La successione

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è debolmente crescente e compresa tra 2 e 3.
Per il teorema delle succ. monotone ha un limite, che si indica con la lettera e, compreso tra 2 e 3

$$e = 2{,}718\ldots$$

$\boxed{\text{Dim. che } e_n \geq 2 \quad \forall n \geq 1}$

$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad x = \frac{1}{n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$$

$\boxed{\text{Dim. che } e_n \text{ è debolm. crescente}}$ Dim. che $\boxed{e_n \geq e_{n-1}}$ ← più facile che $e_{n+1} \geq e_n$

$$e_n \geq e_{n-1} \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \qquad \left[\cdot\ \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right]$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \underbrace{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}\ \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\iff \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$ con $x = -\frac{1}{n^2}$ (serviva $x > -1$ e qui lo è, almeno per $n \geq 2$)

$\boxed{\text{Dimostrazione che } e_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

↑ binomio di Newton

Cerchiamo di stimare ogni termine

$\boxed{k=1}$ $\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$

$\boxed{k=2}$ $\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} = \frac{\boxed{n(n-1)}}{2!}\frac{1}{\boxed{n^2}} \leq \frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2}$

≤ 1 denom. $\geq$ numeratore

$\boxed{k=3}$ $\quad \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} \qquad \le 1 \qquad \le \frac{1}{3!} \le \frac{1}{4}$

⋮ in generale

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ termini}}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

Le disuguaglianze di destra seguono dal fatto che $\boxed{k! \ge 2^{k-1}}$, cosa che è un facile esercizio per induzione.

MORALE: $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ per ogni $k=1,\ldots,n$.

Quindi

$$e_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$\le 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

l'esponente di 2 va da 0 a $n-1$

SHIFT degli indici

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

uso che $\sum_{k=0}^{i} a^k = \frac{a^{i+1}-1}{a-1}$ (dimostrato a suo tempo per induzione)

$$= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\le 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$$

— o — o —

Oss. La disug. usata precedentemente è

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \text{per ogni } k=1,\ldots,n$$

Questa volendo si dimostra a parte per induzione.