12 Studio di funzione

12.1 Punti da seguire

Data una funzione $f(x)$ bisogna andare ad eseguire una serie di passi. $f(x)$ viene di solito assegnata senza specificare il dominio.

1. Determinare l'insieme di definizione di f.
2. Determinare l'insieme di continuità di f.
3. Determinare l'insieme di derivabilità di f.
4. Vedere eventuali asintoti orizzontali, verticali o obliqui.
5. Studiare la monotonia della funzione.
6. Trovare punti di massimo o di minimo locali.
7. Determinare massimo e minimo d f oppure estremo sup. ed inf.
8. Studiare la convessità di f (con eventuali punti di flesso).

12.2 Esempio studio di funzione

Esempio 12.2.1. Studiamo la funzione $f(x) = \log|x| - \frac{x^2-1}{4x}$.

1. $|x| > 0 \iff x \neq 0$ e $4x \neq 0 \longleftarrow x \neq 0$. **Insieme di definizione** è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. La f è **continua** in tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (composizione funzioni continue e prodotto e sottrazioni funzioni continue).
3. f **derivabile** in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (sempre perché tutte queste funzioni sono derivabili in tutto il loro insieme di definizione, il valore assoluto non è derivabile in 0 ma non lo si considera).
4. Per vedere gli **asintoti** dobbiamo fare i limiti ai bordo e sui punti non interi al dominio:
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log|x| - \frac{x^2-1}{4x} = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$ $\lim_{x\to-\infty} \log|-\infty| - \frac{-\infty}{4} + \frac{1}{4(-\infty)} = +\infty$.
   $\lim_{x\to0^-} \log|0^-| - \frac{0^-}{4} + \frac{1}{4(0^-)} = -\infty - 0 - \infty$. $\lim_{x\to0^+} \log|0^+| - \frac{0^+}{4} + \frac{1}{4(0^+)} = -\infty - 0 + \infty$
   $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(-\frac{x}{4}) + \lim_{x\to0^+} \log|x| + \frac{1}{4x} = 0 + \lim_{x\to0^+} \frac{4x\log|x|+1}{4x} = 0 + \frac{0+1}{4\cdot0^+} = +\infty$
   $\lim_{x\to+\infty} \log|+\infty| - \frac{\infty}{4} + \frac{1}{4\cdot\infty} = \infty - \infty + 0$
   $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\log|x|}{4} - \frac{1}{4}) + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x} = \infty(0 - \frac{1}{4}) + 0 = -\infty$. Abbiamo quindi un asintoto verticale di equazione $x = 0$ e non ci sono asintoti orizzontali. Vediamo se ci sono asintoti obliqui: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(\log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}) \cdot \frac{1}{x} = 0 - \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$, quindi $m = -\frac{1}{4}$
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4}\cdot x = \infty + 0 = \infty$.
   Non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e neanche a $x \to -\infty$ perché i conti sono uguali.
5. Studiamo ora la **monotonia** di f.
   $$\log|x| = \begin{cases} \log(x) & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad D(\log|x|) = \begin{cases} D(\log(x)) = \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ D(\log(-x)) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
   Quindi possiamo notare che $D(\log|x|) = \frac{1}{x}$.
   $f(x) = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$ $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{-x^2+4x-1}{4x^2}$ conferma che è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$.

   Il denominatore è > 0 in tutto il dominio, allora il segno di f' è lo sesso del numeratore. Per trovare il segno bisogna trovare dove si annulla il numeratore.
   $-x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x^2 - 4x + 1 = 0$ $x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$.
   f è decrescente in $(-\infty, 0)$, decrescente in $(0, 2-\sqrt{3}]$, crescente in $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$, decrescente in $[2+\sqrt{3}, +\infty)$. Questa separazione va fatta perché il teorema di Lagrange prevede intervalli e lo 0 interrompeva l'intervallo.

6. Vedendo la monotonia possiamo anche dire i punti di **massimo e minimo locali**.
   $x = 2 - \sqrt{3}$ è punti di minimo locale. $x = 2 + \sqrt{3}$ è punti di massimo locale.
   Per calcolare esattamente questi punti dove si collocano nel grafico basta sostituirli in $f(x)$.

7. Dal fatto che $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ otteniamo che $sup(f) = +\infty \implies f$ non ha **massimo**. Dal fatto che $\lim\limits_{x \to 0^-} = -\infty$ otteniamo che $inf(f) = -\infty \implies f$ non ah **minimo**.

8. Come ultima calcoliamo al derivata seconda e troviamo la **convessità**.
   $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{-2x+1}{2x^2}$
   Segno del numeratore $-2x + 1 > 0 \iff 1 > 2x \iff x < \frac{1}{2}$.
   Segno del denominatore $2x^3 > 0 \iff x > 0$.
   f è concava in $(-\infty, 0)$ convessa in $(0, \frac{1}{2}]$ concava in $[\frac{1}{2}, +\infty)$.
   Il punti di ascissa $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso visto che c'è un cambio di convessità.