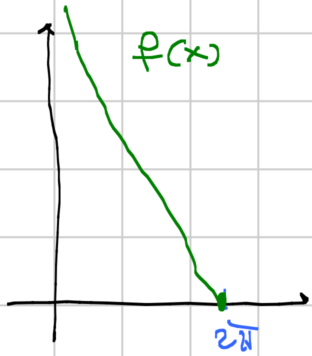
ANALISI 1 — LEZIONE 051

Note Title 23/11/2016

Esercizio 1 $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x - \sin x}$

Dim. che $\forall \lambda > 0 \ \exists! x \in (0, 2\pi)$ t.c. $f(x) = \lambda$

Dimostriamo che $f : (0, 2\pi) \to (0, +\infty)$ è bigettiva



1° fatto: continua in $(0, 2\pi)$ e $f(2\pi) = 0$. Va osservato che denom $\neq 0$ perché

$$\sin x < x \qquad \forall x > 0$$

(è continua pure in $(0, +\infty)$)

2° fatto $f(x) > 0$ in $(0, 2\pi)$ perché num e denom > 0.

3° fatto
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \underset{\text{Taylor}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = +\infty$$

4° fatto spero che $f(x)$ sia decrescente.

$$f'(x) = \frac{\sin x (x - \sin x) - (1 - \cos x)^2}{(x - \sin x)^2}$$

Il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di

$$x \sin x - \sin^2 x - 1 - \cos^2 x + 2\cos x = x \sin x - 2 + 2\cos x = g(x)$$

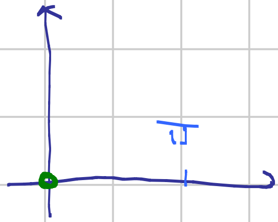
Spero che $g(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 2\pi)$

$$g(x) = \underbrace{x \sin x}_{\substack{\leq 0 \\ \text{in } [\pi, 2\pi]}} + \underbrace{2(\cos x - 1)}_{< 0}$$

quindi $g(x) < 0$ in $[\pi, 2\pi)$

Resta da studiare g in $[0, \pi]$

$g'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$



Vorrei che $g'(x) \le 0$ per $x \in [0,\pi]$

Questo è banale se $x \in [\frac{\pi}{2},\pi]$. Rimane $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$g''(x) = \cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x} < 0 \quad \text{in } (0,\tfrac{\pi}{2})$$

$$g'(0)=0 \;+\; g''(x)<0 \text{ in } (0,\tfrac{\pi}{2}) \Rightarrow g'(x)<0 \text{ in } (0,\tfrac{\pi}{2})$$

$$g(0)=0 \;+\; g'(x)<0 \text{ in } (0,\pi) \Rightarrow g(x)<0 \text{ in } (0,\pi).$$

— o — o —

Esercizio 2 Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ di

$$(x-\sin x)\sin x - (1-\cos x)^2 = \left(\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right) - \left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2$$

$$= \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^5)$$

funzione pari (oppure vedo che il termine dopo è x^6)

— o — o —

Esercizio 3 Dimostrare che esiste una costante $\boxed{m>0}$ tale che

$$\underbrace{\cos^6 x + \sin^{22} x}_{f(x)} \ge m \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Oss. Se fosse ≥ 0 è gratis.

Dim sbagliata: $f(x) \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f(x) \ne 0$ sempre perché altrimenti deve succedere che $\sin x = \cos x = 0$. Quindi $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, FINE.

Oss. Lo stesso discorso mostrerebbe che $\frac{1}{1+x^2} \geq m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dim. Per W. esteso alle funzioni periodiche $\boxed{\text{esiste il minimo}}$, quindi esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0)}_{= m} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio 4 Esiste $m > 0$ t.c. $\underbrace{\cos x + 3 \sin^3 x}_{f(x)} \geq m \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Come prima in $[0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione ammette minimo, quindi

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0)}_{= m} > 0$$ (somma di 2 quantità ≥ 0 che non sono entrambe nulle)

Oss. 1 – negli altri quadranti $f(x)$ può diventare negativa

2 – nello stesso modo si vede che $\frac{1}{\cos x + 3 \sin^3 x}$ è ben definita in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e limitata super.

— o — o —

Esempio 5 Dimostrare che $\sinh x \leq x + \frac{x^3}{3}$ per ogni $x \in [0,1]$

Oss. 1 – È banale che $\sinh x \geq x + \frac{x^3}{6}$ per ogni $x \geq 0$ (Taylor – Lagrange)

2 – È banale che $\sinh x \leq x + \frac{x^3}{3}$ non può essere vera $\forall x \geq 0$.

(a sinistra c'è un esponenziale, a dx un polinomio)

Pongo $f(x) = x + \frac{x^3}{3} - \sinh x$ e spero che $f(x) \geq 0$ in $[0,1]$

Osservo che $f(0) = 0$ e spero che sia crescente in $[0,1]$

$f'(x) = 1 + x^2 - \cos x$, $f''(x) = 2x - \sin x$, $f'''(x) = 2 - \cos x$

Ora $f'''(x) \geq 0$ in $[0,1]$ perché $f'''(x) \geq \underset{\uparrow}{2 - \cos 1} \geq 0$

$\cos 1 \overset{?}{\leq} 2$

$\frac{e + \frac{1}{e}}{2} \overset{?}{\leq} 2$ ok

Visto che $f'''(x) > 0$ in $[0,1]$ e
$f'(0) = f''(0) = 0$, allora
$f''(x) \geq 0$ in $[0,1]$
$f'(x) \geq 0$ in $[0,1]$
$f(x) \geq 0$ in $[0,1]$

Oss. Abbiamo dimostrato strada facendo che

$$\sin x \leq 2x \qquad \forall x \in [0,1]$$
$$\cos x \leq 1 + x^2 \qquad \forall x \in [0,1]$$

—o —o —

Esercizio 6 Dimostrare che $f(x) = \sin(x^5) - \cos(x^3)$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è bigettiva.

La surgettività segue dai limiti per $x \to \pm\infty$ (qui comanda $\sin(x^5)$)

Per l'iniettività guardo la derivata:

$$f'(x) = 5x^4 \cos(x^5) - 3x^2 \sin(x^3) = x^2 \left(5x^2 \cos(x^5) - 3 \sin(x^3)\right)$$

Spero che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e anzi $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.
Ora
- per $x < 0$ è ovvio che $f'(x) > 0$
- per $x \geq 1$ è semplice che $f'(x) > 0$. Infatti

$$\underbrace{5x^4}_{\geq x^2} \underbrace{\cos(x^5)}_{\geq \cos(x^3)} \geq 5x^2 \cos(x^3) \geq 5x^2 \sin(x^3) > 3x^2 \sin(x^3)$$

- Resta il caso con $x \in (0,1)$. Qui uso che

$$5x^2 \cosh(x^5) \underset{\uparrow}{\geq} 5x^2 \geq 3\left(x^3 + \frac{x^9}{3}\right) \underset{\uparrow}{\geq} 3\sinh(x^3)$$

$\cosh \geq 1$

uso esercizio precedente + $x^3 \in [0,1]$

La disug. centrale è $5x^2 \geq 3x^3 + x^9$ e questa è vera in $[0,1]$ perché

$$x^2 \geq x^3 \qquad x^2 \geq x^9$$

— o — o —