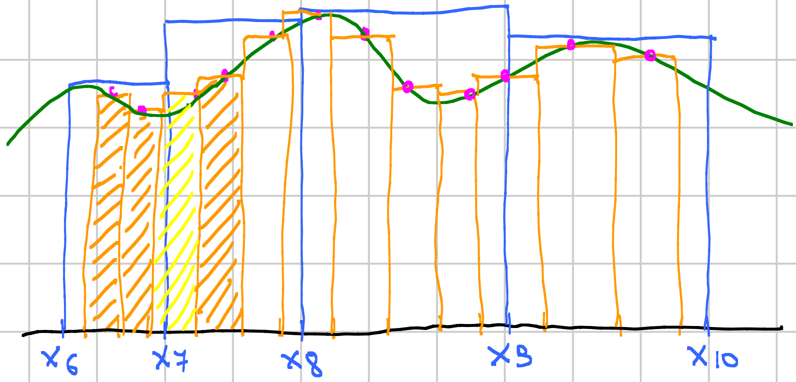
ANALISI 1 — LEZIONE 128

Note Title 12/05/2017



Integrabile rispetto D $\Rightarrow$ Integrabile rispetto Riemann

- Fisso $\varepsilon > 0$
- Per ipotesi esiste partiz. P_ε tale che

$$S_D^+(f, P_\varepsilon) \leq \overset{\text{integrale}}{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$S_D^-(f, P_\varepsilon) \geq I - \frac{\varepsilon}{2}$$

- Prendiamo $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{4(n_\varepsilon + 1) M}$

$n_\varepsilon + 1$: numero p.ti partizione P_ε; M: $|f(x)| \leq M$

- Tesi: per ogni partizione P (arancione in figura) con diam $(P) \leq \delta$ vale

$$I - \varepsilon \leq S_R(f, P, T) \leq I + \varepsilon$$

Idea quasi giusta:

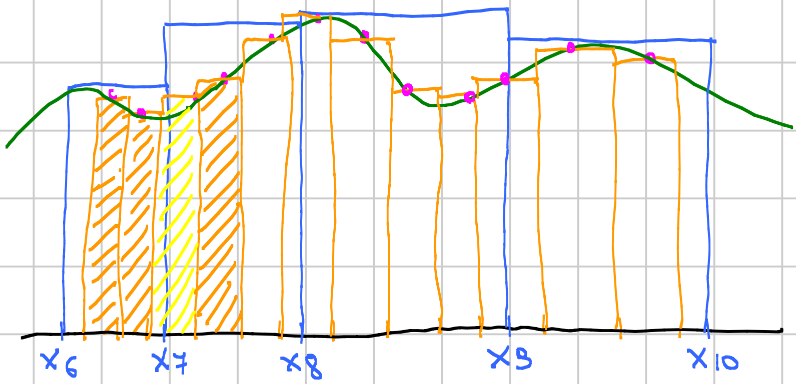
$$S_R(f, P, T) = \text{aree arancioni} + \text{aree gialle}$$
$$\leq S_D^+(f, P) + (n_\varepsilon + 1)\,\delta\, M$$

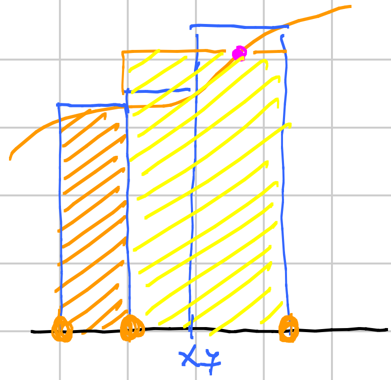
$(n_\varepsilon + 1)$: numero aree; δ: base max; M: altezza max

$$\leq I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = I + \varepsilon$$

Il problema è che aree arancioni $\leq$ aree blu funziona solo se tutte le altezze blu sono ≥ 0, altrimenti è la figura che inganna.

Come rimediare ?





Cambiamo la partizione P_ε, quella di $D.$, aggiungendo <u>anche</u> i p.ti arancioni. Chiamiamo

$$P \cup P_\varepsilon$$

la nuova partizione di $D.$ e osserviamo che

$$S_D^+(f, P\cup P_\varepsilon) \leq S_D^+(f, P_\varepsilon) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Rispetto a questa nuova partizione le aree arancioni sono nuove aree blu. Quindi

$$S_R(f, P, T) = \text{aree arancioni} + \underbrace{\text{aree gialle}}_{\leq (n_\varepsilon+1)\,\delta\, M}$$

↓

alcune delle nuove aree blu

Aree blu nuove = aree blu/arancioni + $\underbrace{\text{aree blu a cavallo}}$

si stimano al solito modo
→ sono al max $2(n_\varepsilon+1)$
→ le altezze sono al max M
→ le basi sono $\leq \delta$

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia f come al solito (f limitata e nulla fuori da un limitato).
Supponiamo che f sia integrabile alla R-D.
Allora $|f|$ è integrabile.

$\boxed{\text{Dim}}$ Più comodo lavorando alla Darboux unrestricted.

Ipotesi: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono 2 funzioni a gradino φ e ψ, ottenute a partire dalla stessa partizione, tali che

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\psi(x) - \varphi(x))\, dx \leq \varepsilon.$$

Tesi: per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $\hat{\varphi}$ e $\hat{\psi}$ step funct. t.c.

$$\hat{\varphi}(x) \leq |f(x)| \leq \hat{\psi}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x))\, dx \leq \varepsilon.$$

Come definisco $\hat{\varphi}$ e $\hat{\psi}$ a partire da φ e ψ?
La partizione sia

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

Prendo $[x_{i-1}, x_i]$. Ho 3 casi

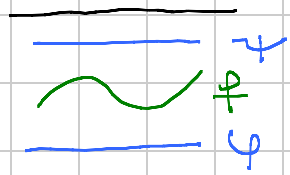
- Se $f(x) \geq 0$ in $[x_{i-1}, x_i]$ pongo $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\hat{\psi}(x) = \psi(x)$

  e la disug. funziona e

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi} - \hat{\varphi})\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi - \varphi)\, dx$$

- Se $f(x) \leq 0$ in $[x_{i-1}, x_i]$ pongo $\hat{\varphi}(x) = -\psi(x)$, $\hat{\psi}(x) = -\varphi(x)$

$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ diventa

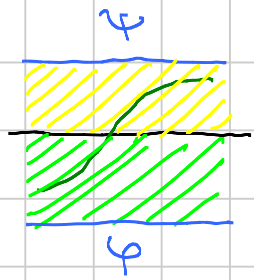


$$-\psi(x) \le -f(x) \le -\varphi(x)$$
$$\hat{\varphi}(x) \le |f(x)| \le \hat{\psi}(x)$$

e per gli integrali

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x))\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-\varphi(x) + \psi(x))\, dx$$

- Se $f(x)$ cambia segno in $[x_{i-1}, x_i]$ allora pongo



$$\hat{\psi}(x) := \max\{\psi(x), -\varphi(x)\}$$
$$\hat{\varphi}(x) := 0$$

Ancora una volta ho che

$$\hat{\varphi}(x) \le |f(x)| \le \hat{\psi}(x)$$

e

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x))\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \max\{\psi, -\varphi\}\, dx \quad \text{(max tra le 2 aree)}$$
$$\le \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi - \varphi)\, dx \quad \text{(somma di 2 Aree)}$$

In ogni intervallino abbiamo ottenuto

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi} - \hat{\varphi})\, dx \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi - \varphi)\, dx$$

Sommando su tutti gli intervalli abbiamo la tesi.

—o—o—

<u>Oss.</u> Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

<u>Dim</u> $\max\{f,g\} = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$, $\min\{f,g\} = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Siano f e g come al solito.
Supponiamo f e g integrabili.
Allora fg è integrabile

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Per ipotesi $\varphi_f \leq f \leq \psi_f$ con $\int(\psi_f - \varphi_f)$ piccolo a piacere

$\varphi_g \leq g \leq \psi_g$ con $\int(\psi_g - \varphi_g)$ " "

Posso supporle tutte relative alla stessa partizione

Se fosse $\varphi_f \varphi_g \leq fg \leq \psi_f \psi_g$ concluderei osservando che

$$\int(\psi_f \psi_g - \varphi_f \varphi_g)\,dx =$$

$$= \int(\psi_f \psi_g - \psi_f \varphi_g)\,dx + \int(\psi_f \varphi_g - \varphi_f \varphi_g)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\psi_f}_{\leq M_f}(\psi_g - \varphi_g)\,dx + \int \underbrace{\varphi_g}_{\leq M_g}(\psi_f - \varphi_f)$$

$$\leq M_f \underbrace{\int(\psi_g - \varphi_g)\,dx} + M_g \underbrace{\int(\psi_f - \varphi_f)}$$

$$\leq M_f \frac{\varepsilon}{2M_f} + M_g \frac{\varepsilon}{2M_g} \leq \varepsilon$$

In realtà la dim. funziona solo se f e g sono ≥ 0 perché in tal caso posso prendere $\varphi_f \geq 0$ e $\varphi_g \geq 0$.
Allora

- se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ sono ok
- se $f \leq 0$ e $g \leq 0$ sono ok a patto di cambiare i segni
- Se $f \geq 0$ e $g \leq 0$ raccolgo un segno $-$
- Se f e g cambiano segno le scrivo come

$$f = f_+ + f_- \qquad\qquad g = g_+ + g_-$$

dove $f_+ = \max\{f, 0\}$ $\quad f_- = \min\{f, 0\}$

$g_+ = \max\{g, 0\}$ $\quad g_- = \min\{g, 0\}$

e osservo che

$$fg = (f_+ + f_-)\cdot(g_+ + g_-)$$

e così ho la somma di 4 funzioni con il segno costante che sono integrabili per l'osservazione su max/min.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$

Basta dim. che i □ sono integrabili. Per questo osservo che

f integr $\Rightarrow$ $|f|$ integr $\Rightarrow$ $|f|^2 = f^2$ integr.
perché prodotto di due funzioni ≥ 0.