$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$

Due problemi: a 0 e a $+\infty$, quindi spezzo

$\displaystyle\int_{127}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ Segno costante ☺

$f(x) \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$ quindi converge perché $\frac{3}{2} > 1$

$\displaystyle\int_0^{127} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ Segno costante ☺

$f(x) \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ quindi converge perché $\frac{1}{2} < 1$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ converge

Segno costante $f(x) \sim e^{-x}$ quindi si comporta come $\int e^{-x}\,dx$ con problema a $+\infty$, e questo converge come si può vedere in 2 modi

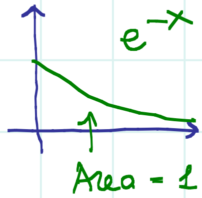
$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Confronto asintotico con $\frac{1}{x^{20}}$

$$\lim_{\underbrace{x\to+\infty}_{\text{problema}}} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^{20}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{20}}{e^x} = 0 \quad \text{caso limite!}$$

$\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^{20}}} \to 0$, quindi $e^{-x} \leq \frac{1}{x^{20}}$ per x grandi

$\int \frac{1}{x^{20}}\,dx$ con pbm. all' ∞ converge, quindi converge anche $\int e^{-x}\,dx$ con pbm. a $+\infty$

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x}\,dx$$



$$= \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-e^{-A}+1\right) = 1$$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

Ora c'è pure il problema in $x=0$, quindi spezzo $\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^{22} \dots + \int_{22}^{+\infty} \dots$

converge

Per il problema in $x=0$ osserviamo che

$\frac{1}{e^x-1} \sim \frac{1}{x}$ quindi l'integrale diverge perché l'esponente è 1.

Rigoroso: confr. asint. con $g(x) = \frac{1}{x}$ e mi riduco a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x-1} = 1 \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

problema

Esercizio 4 $$\int_0^{20} \frac{\sin x}{e^x-1}\,dx$$

Non è nemmeno un integrale improprio perché $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{e^x-1} = 1$, quindi la funzione è limitata!

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,dx$$ C'è un solo problema, MA il $\sin x$ fa variare il segno vicino al problema

Studio $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{e^x-1}\,dx$ e questo converge perché $\frac{|\sin x|}{e^x-1} \leq \frac{1}{e^x-1}$

e $\int \frac{1}{e^x-1}\,dx$ con problema all'infinito converge.

Quindi converge anche quello senza valore assoluto.

$\boxed{\text{Esempio 5}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$

Questo ha come problemi $+\infty$, $-\infty$, 0. Bisogna spezzare in 4 parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots = \int_{-\infty}^{-2} \ldots + \int_{-2}^{0} \ldots + \int_{0}^{4} \ldots + \int_{4}^{+\infty} \ldots$$

$\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ converge per confronto semplice con $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Idem per $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^4 \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ $\qquad \displaystyle\frac{|\cos x|}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ quindi diverge perché

perché $2 > 1$

Idem per $\displaystyle\int_{-2}^{0} \ldots$. Quindi globalmente DIVERGE a $+\infty$.

Esempio 6 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ Segno costante, problemi in 1 e $+\infty$

A $+\infty$ abbiamo $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge.

Vediamo in $x = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}}$$

COLPEVOLE DELL'IMPROPRIEZZA

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ che riportato in 0 diventa $\frac{1}{\sqrt{y}}$ e quindi converge perché $\frac{1}{2} < 1$.

Rigoroso: confr. asint. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Ci troviamo

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \begin{array}{l}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{array}$$

problema

Quindi l'integrale dato si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ con pbm. in $x=1$, il quale si comporta come (pongo $y = x-1$)

$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$ con problema in $y=0$, quindi converge

Esempio 7 $\int_1^2 \frac{1}{\log x}\,dx$ Problema in $x=1$

Poniamo $y = x-1$ per cui l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy$$

$f(y) \sim \frac{1}{y}$ quindi diverge!

Esempio 8

$\int_3^{+\infty} \frac{x}{x^a+3}\,dx$	$\int_3^{+\infty} \frac{x^a}{x^3+3}\,dx$	$\int_0^3 \frac{x^3+3}{x^a}\,dx$
Converge se e solo se $\alpha > 2$	se e solo se $\alpha < 2$	se e solo se $\alpha < 1$
		$\sim \frac{3}{x^\alpha}$