ANALISI 1 — LEZIONE 102

Note Title 02/05/2025

Ricorrenze lineari omogenee di ordine superiore

Ordine 2 $\boxed{x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}}$ dipendenza lineare dai due termini precedenti

Formula generale $\boxed{x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n}$

dove λ_1 e λ_2 sono le due radici del polinomio

$$\boxed{\lambda^2 - a\lambda - b = 0}$$ polinomio caratteristico

Esempio 1 $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$

Polinomio caratteristico $x^2 - 5x + 6 = 0$ $(x-2)(x-3) = 0$

radici $x = 2$ e $x = 3$

Soluz. generale : $\boxed{x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n}$

se conosco x_0 e x_1, allora trovo c_1 e c_2

Perché funziona? Osservo che $x_n = 2^n$ è una soluzione perché

$$2^{n+1} \overset{?}{=} 5 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^{n-1}$$

$$2^2 \cdot \cancel{2^{n-1}} \overset{?}{=} 5 \cdot 2 \cdot \cancel{2^{n-1}} - 6 \cdot \cancel{2^{n-1}} \qquad 4 = 10 - 6 \quad ☺$$

Allo stesso modo osservo che $x_n = 3^n$ funziona (sostituire per crederci)

Domanda: quali sono i valori di λ per cui $x_n = \lambda^n$ funziona?

$$\lambda^{n+1} \overset{?}{=} 5\lambda^n - 6\lambda^{n-1}$$

$$\lambda^2 \cdot \cancel{\lambda^{n-1}} \overset{?}{=} 5\lambda \cdot \cancel{\lambda^{n-1}} - 6\cancel{\lambda^{n-1}} \rightsquigarrow \lambda^2 = 5\lambda - 6$$

<u>Fatto generale</u>: gli esponenziali che funzionano sono quelli che hanno come base le radici del polinomio caratteristico (vero per ogni ordine)

Se funzionano 2^n e 3^n, allora funzionano tutte le comb. lin.

$$x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

(conseguenza della linearità)

Ci sono altre soluzioni? No! Fissati x_0 e x_1 trovo c_1 e c_2 per cui $c_1 2^n + c_2 3^n$ risolve e verifica x_0 e x_1, quindi la soluzione è quella.

<u>Esempio 2</u> $\quad x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1}$

Pol. caratteristico $\quad \lambda^2 = 6\lambda - 9 \rightsquigarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \rightsquigarrow (\lambda-3)^2 = 0$

$\rightsquigarrow \lambda = 3$ radice di molt. due.

$$x_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 n \cdot 3^n$$

dovuta alla molteplicità

<u>Oss.</u> Funziona anche se le radici sono numeri complessi, nel qual caso posso ottenere una formula con soli numeri reali

Esempio 3 $\quad x_{n+1} = 4x_n - 13x_{n-1} \qquad x_0 = 1 \quad x_1 = 7$

I numeri saranno tutti interi!

Pol. caratt.: $\quad \lambda^2 = 4\lambda - 13 \rightsquigarrow \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$$\rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

Formula generale $\quad x_n = c_1 \cdot (2+3i)^n + c_2 \cdot (2-3i)^n$

$\rightsquigarrow$ usando i dati iniziali posso trovare c_1 e c_2 che saranno numeri complessi

Volendo, posso scrivere $\quad 2+3i = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora

$$x_n = c_1 \rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + c_2 \rho^n (\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

Dopo aver calcolato c_1 e c_2 si vede che le parti con la i se ne vanno.

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ (Successione di Fibonacci)

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad x_0 = 0 \quad x_1 = 1$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Trovare la formula generale e calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Pol. caratt.: $\quad \lambda^2 = \lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Calcolo c_1 e c_2

$\boxed{n=0}$ $\quad 0 = c_1 + c_2 \quad \rightsquigarrow \quad c_2 = -c_1$

$\boxed{n=1}$ $\quad 1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - c_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = c_1\sqrt{5} \rightsquigarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Con i dati iniziali:

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Nonostante la $\sqrt{5}$ è un numero intero!

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sia al numeratore sia al denominatore comanda il 1° termine perché il secondo ha base con val. ass. < 1

<u>Curiosità</u> Il rapporto tra due Fibonacci consecutivi tende quasi alla conversione miglia/km

<u>Esempio 5</u> $\quad x_{n+1} = x_n + x_{n-1} - 2n + 7^n$

La soluzione generale sarà fatta da 2 pezzi
- → il primo è la soluz. generale di Fibonacci (fine pag. precedente)
- → il secondo accontenta la parte non omogenea e sarà del tipo

$$x_n = an + b + c\,7^n$$

Facciamo il conto

$$\underbrace{a(n+1)+b+c\cdot 7^{n+1}}_{x_{n+1}} = \underbrace{an+b+c\cdot 7^{n}}_{x_n} + \underbrace{a(n-1)+b+c\cdot 7^{n-1}}_{x_{n-1}} - 2n + 7^n$$

$a = a + a - 2$ (coeff. n) $a = 2$

$a + b = b - a + b + 7$ (termine noto) $b = \dots$

$7c = c + \frac{1}{7}c + 1$ (coeff. 7^n) $c = \dots$

In questo caso quanto fa $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

Il limite è uguale a 7 perché nella formula comanda il termine con 7^n, che ha davanti un coeff. $c \neq 0$.

— o — o —