ANALISI 1 - LEZIONE 113

Note Title 16/05/2025

FORMULA DI STIRLING

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad\qquad n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \forall n \geq 1$$

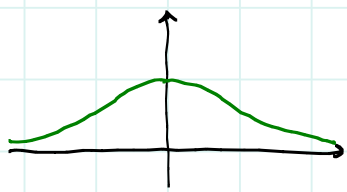
se divido il rapporto tende a 1

PRODOTTO DI WALLIS

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \; \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \; \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \; \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \; \ldots$$

INTEGRALE GAUSSIANO



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

INTEGRALI DI FRESNEL

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

FUNZIONE GAMMA DI EULERO

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$$

$\boxed{\text{Formula di Stirling}}$ $\quad n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Questo è equivalente a dimostrare che

$$S_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} \longrightarrow \sqrt{2\pi}$$

<u>Esercizio 1</u> Dimostriamo che S_n tende ad un limite $l \in (0, +\infty)$

Calcoliamo il rapporto

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\cancel{(n+1)}!\, e^{\cancel{n+1}}}{(n+1)^{n+\cancel{1}} \sqrt{n+1}} \cdot \frac{n^n \sqrt{n}}{\cancel{n!}\, \cancel{e^n}} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}} = R_n$$

Abbiamo scoperto che $\quad S_{n+1} = R_n \cdot S_n \quad \forall n \geq 1$
e da questa per induzione otteniamo che

$$S_2 = R_1 \cdot S_1, \quad S_3 = R_2 \cdot S_2 = R_2 \cdot R_1 \cdot S_1, \quad S_4 = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot S_1, \ldots$$

$$S_n = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} R_k$$

e quindi, passando al limite

$$S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} R_k$$

Quindi mi sono ridotto a dimostrare che la produttoria converge ad un limite $\in (0, +\infty)$.
Questo è equivalente a dire che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log R_k \qquad \text{converge}$$

Sub-esercizio

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \sqrt{\frac{k+1}{k}}}\right)}_{a_k} \quad \text{converge}$$

$$a_k = 1 - k\log\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= 1 - k\log\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} 1 - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2k}} - \frac{1}{3k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) - \cancel{\frac{1}{2k}} + \frac{1}{4k^2} = -\frac{1}{12}\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Conseguenza: la serie è a termini definitivamente negativi e converge per confronto asintotico con $\frac{1}{k^2}$

— o — o —

Da questo momento in poi sappiamo che $S_n \to S_\infty$ e di conseguenza

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\cdot S_\infty$$

Vogliamo prima o poi dimostrare che $S_\infty = 2\pi$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ Vogliamo dimostrare che il numero a_k di sopra è sempre negativo, cioè

$$k\log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{k+1}{k}\right) - 1 \geq 0 \qquad \forall k \geq 1$$

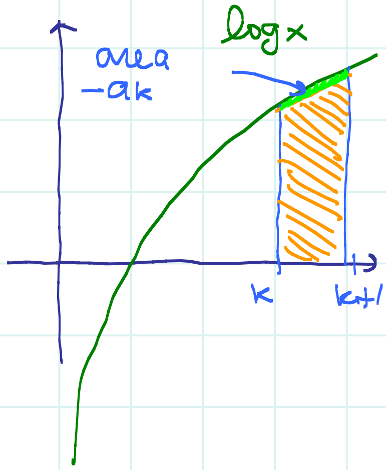
Consideriamo $\log x$ e integriamo tra k e $k+1$

$$\int_k^{k+1} \log x \, dx = \left[x \log x - x\right]_k^{k+1}$$

$$= (k+1)\log(k+1) - (\cancel{k}+1) - k\log k + \cancel{k}$$

$$= k\left[\log(k+1) - \log k\right] + \log(k+1) - 1$$

$$= k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \log(k+1) - 1$$



Area trapezio sotto il grafico

$$= \frac{1}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altezza}}}{1} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{base} \\ \text{minore}}}{\log(k)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base} \\ \text{maggiore}}}{\log(k+1)}\right]$$

Essendo $\log x$ concava, abbiamo integrale − area trapezio > 0
quindi

$$\underbrace{k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \log(k+1) - 1}_{\text{integrale}} - \underbrace{\frac{1}{2}\log k - \frac{1}{2}\log(k+1)}_{\text{area trapezio}}$$

$$= k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\log(k+1) - \frac{1}{2}\log k}_{\frac{1}{2}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)} - 1 = -a_k > 0$$

— o — o —

<u>Conseguenza</u> Ricordiamo che

$$a_k = \log \frac{S_{k+1}}{S_k}$$

$a_k < 0 \implies \frac{S_{k+1}}{S_k} \leq 1 \implies S_{k+1} \leq S_k \implies S_k$ decrescente

Quindi $S_k > S_\infty$ per ogni $k \geq 1$.

Ricordando che cosa era S_k deduciamo che

$$k! > \frac{k^k}{e^k}\sqrt{k}\, S_\infty$$

— o — o —

$\boxed{\text{PRODOTTO DI WALLIS}}$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ Il prodotto converge ad un numero reale $\in (1, +\infty)$

Questo è equivalente a dimostrare che il suo logaritmo converge ad un numero positivo, ma il log è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(\frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}\right)}_{b_k}$$

$$b_k = \underbrace{\log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)}_{>0} = \log\left(\frac{4k^2-1+1}{4k^2-1}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right)$$

perché sono frazioni > 1

$$\sim \frac{1}{4k^2-1}$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con $\frac{1}{k^2}$ e la somma è positiva perché tutti i b_k sono > 0

— o — o —

Ci resta da dimostrare che

- il prodotto tende a $\frac{\pi}{2}$
- $S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sqrt{2\pi}$

— o — o —