ANALISI 1 - LEZIONE 007

Note Title 29/09/2016

FUNZIONI REALI Setting classico: $A \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme $\neq \emptyset$

$f : A \to \mathbb{R}$

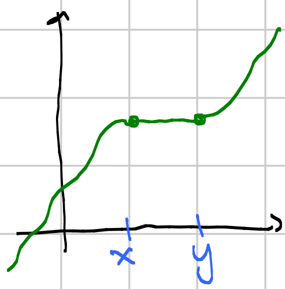
MONOTONIA Proprietà di monotonia = crescenza / decrescenza

<u>Def.</u> La funzione f si dice

Strett. crescente	$y > x$	$\Rightarrow f(y) > f(x)$
Debol. crescente	$y > x$	$\Rightarrow f(y) \geq f(x)$
Strett. decrescente	$y > x$	$\Rightarrow f(y) < f(x)$
Debol. decrescente	$y > x$	$\Rightarrow f(y) \leq f(x)$

<u>Oss.</u> ① Se f è strett. crescente, allora è pure debol. crescente

② Se f è debolm. cresc., ma non strettamente, vuol dire che il grafico ha dei tratti piatti, cioè // asse x



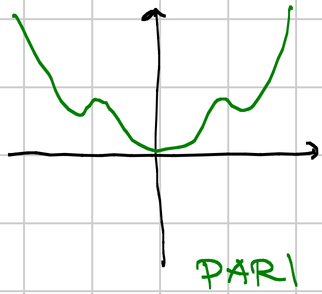
SIMMETRIA

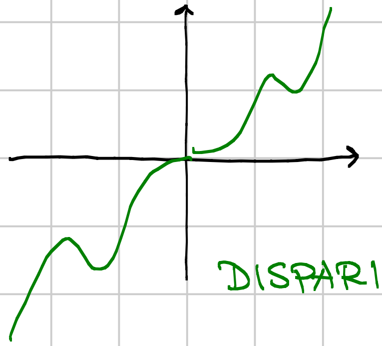
<u>Def.</u> La funzione f si dice

PARI	se	$f(-x) = f(x)$
DISPARI	se	$f(-x) = -f(x)$

In termini di grafico

- PARI $\Leftrightarrow$ grafico simm. risp. asse y
- DISPARI $\Leftrightarrow$ " " " origine





<u>Esercizio</u> Se f è dispari, allora $f(0) = 0$

[<u>Dim.</u> $f(-x) = -f(x)$. Metto $x=0$ e ottengo $f(0) = -f(0)$, cioè $2f(0) = 0$, cioè $f(0)=0$]

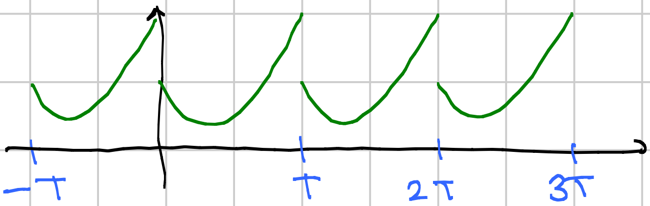
<u>Def.</u> La funzione f si dice PERIODICA se esiste almeno un $T>0$ tale che

$$f(x) = f(x+T) \qquad \forall x \in A$$

Ogni T che va bene si dice PERIODO di f.

$\boxed{\text{Se esiste}}$ un minimo $T>0$ che va bene, allora si chiama MINIMO PERIODO.

Graficamente vuol dire che il tratto tra 0 e T si ripete

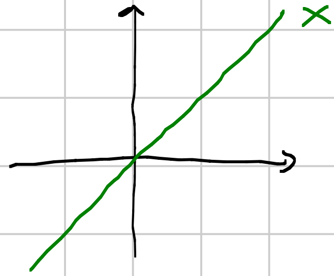


Esistono funzioni non costanti che non hanno periodo min., per es.

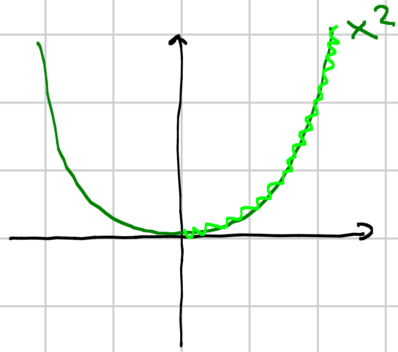
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ogni $T>0$ con $T \in \mathbb{Q}$ è un periodo

Presentazione funzioni elementari



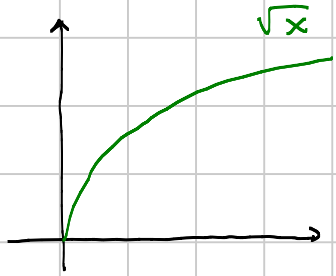
$\boxed{\text{IDENTITÀ}}$ $f(x) = x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari e strett. cresc.



$\boxed{\text{POTENZE}}$ $f(x) = x^k$ con k intero ≥ 2

- Caso $k=2$ (e idem per k pari) $f(x) = x^2$ è pari. Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né iniz., né surg.

Vista come $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva, quindi ammette inversa $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ che è



$$g(x) = \sqrt{x}$$ $\leftarrow$ Definizione

Fatto generale: Il grafico di una funzione e della sua inversa sono simm. risp. alla bisettrice $y = x$

Achtung! Le radici di indice pari prendono in INPUT valori $x \geq 0$ e restituiscono valori ≥ 0

Come dimostro che $f(x) = x^2$ è strett. cresc. per $x \geq 0$

Prendiamo $y > x$. Allora $y = x + a$ con $a > 0$. Allora

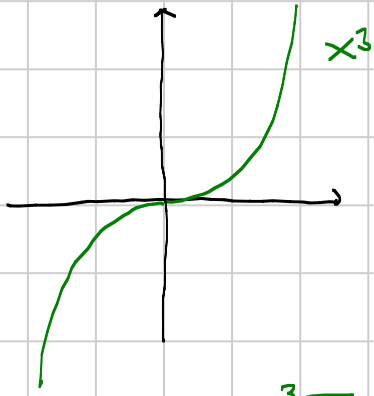
$$y^2 = (x+a)^2 = x^2 + \underbrace{2ax}_{\geq 0} + \underbrace{a^2}_{>0} > x^2$$

In alternativa posso usare che

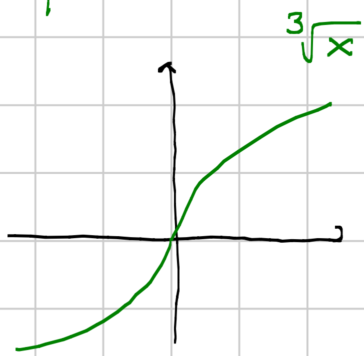
$$y^2 = y \cdot y > y \cdot x > x \cdot x = x^2$$

Essendo strett. cresc. è iniettiva.
La surgettività non è ovvia e andrebbe dimostrata.

- Caso $k=3$ (e analogo per tutti i dispari)

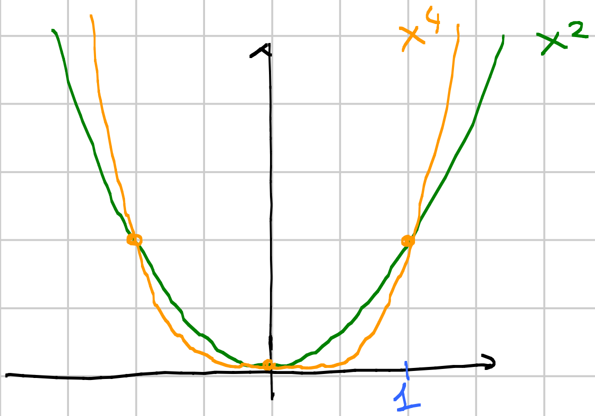


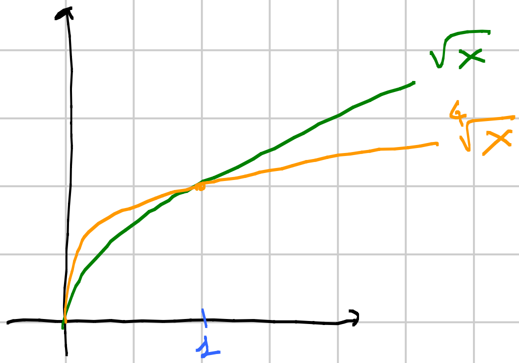
$f(x) = x^3$ è dispari e strett. cresc. su tutto $\mathbb{R}$.
Vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è
iniettiva (facile)
surgettiva (difficile)
quindi ammette inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

In partenza ho $x \in \mathbb{R}$ qualunque e in output pure (con lo stesso segno)





Idem per esponenti dispari