Come calcolo $\int_a^b f(x)\,dx$?

Procedura operativa: supponiamo $f \in C^0([a,b])$. Cerco una funzione $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile almeno in (a,b) t.c.

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

A questo punto $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Notazione Si pone

$$\boxed{[F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)}$$

Def 1 (Primitiva – ANTIDERIVATIVE) Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, si dice primitiva di f UNA qualunque $F \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$ tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Oss. La primitiva, posto che esista, non è mai unica. Se $F(x)$ è una primitiva, anche $F(x) + 2016$ lo è

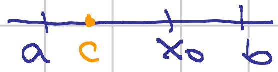
Prop. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, e siano F_1 ed F_2 due primitive. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_2(x) = F_1(x) + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

Dim Poniamo $G(x) := F_2(x) - F_1(x)$. Allora $G \in C^0([a,b])$ e $G \in C^1((a,b))$ e

$$G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

Ora uso Lagrange in ogni sottointervallo $[a, x_0]$



$$G(x_0) - G(a) = (x_0 - a)\underbrace{G'(c)}_{0} = 0$$

Questo mostra che $G(x_0) = \underbrace{G(a)}_{c}$ $\quad \forall x \in [a,b]$

$$G(x) \equiv c \quad \Rightarrow \quad F_2(x) = F_1(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$$

— o — o —

<u>Corollario</u> La procedura operativa <u>non</u> dipende dalla scelta della primitiva

$\boxed{\text{Dim.}}$ Siano F_1 ed F_2 due primitive. Per la prop. sappiamo che

$$F_2(x) = F_1(x) + c \quad \forall \ldots$$

e quindi

$$[F_2(x)]_a^b = F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + \cancel{c}) - (F_1(a) + \cancel{c})$$

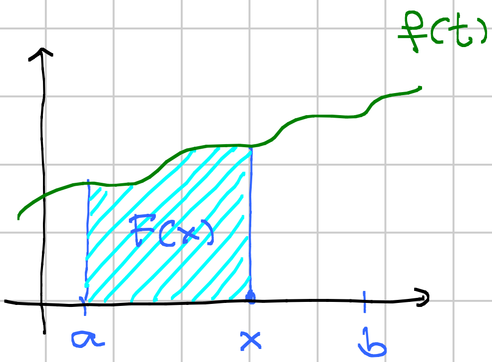
$$= F_1(b) - F_1(a) = [F_1(x)]_a^b$$

— o — o —

<u>Def. 2</u> (Funzione integrale) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (per ora non assumo continuità). Questo implica l'integrabilità nei sottointervalli.
Si dice <u>funzione integrale</u> la funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

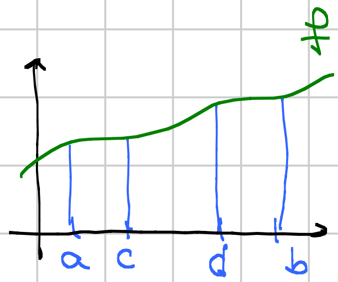
nome a caso ($\neq x$) per la variabile di integrazione (poteva essere y o z)



<u>Proprietà semplice</u> Per ogni sottointervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ vale

$$\int_c^d f(x)\,dx = [F(x)]_c^d = F(d) - F(c)$$

$$= \int_a^d f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$



<u>Dim.</u>: additività dell'integrale rispetto alla zona di integrazione.

Questo dimostra la procedura con la funzione integrale F al posto della primitiva.
Non resta che dimostrare che la funzione integrale è una primitiva.

<u>Teorema</u> (della media integrale) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)}$$

<u>Dim</u> Siano m ed M il min / max di f in $[a,b]$ (esistono per W.)
Si vede che

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

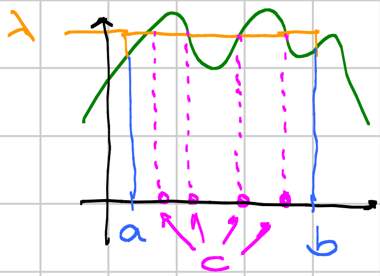
(basta osservare che $\varphi(x) \equiv m$ è una step. f sotto e $\psi(x) \equiv M$ è una step function sopra).
Dividendo ottengo

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{=\lambda} \leq M$$

C'è un p.to in cui f vale m. C'è un p.to in cui vale M.
Per il teo. valori intermedi esiste almeno un punto in cui f vale λ

— o — o —

Interpretazione geometrica: Il λ, e quindi $f(c)$, è l'altezza che deve avere un rettangolo di base $[a,b]$ affinché la sua area coincida con l'integrale

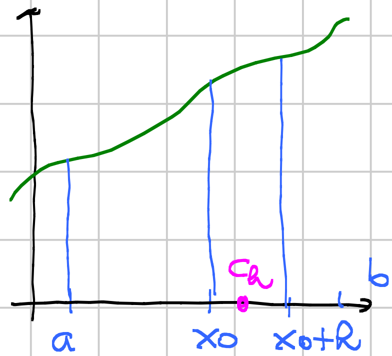


Area rettangolo = area sotto grafico

Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continua}}$. Sia $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale.
Allora F è una primitiva di f, cioè

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b).$$

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Sia $x_0 \in (a,b)$. Per $h > 0$ tale che $x_0 + h \leq b$ vale che



$$F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt$$

$$= \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

$$= F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \,, \quad \text{quindi}$$

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

Per il teo. della media integrale

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = h \cdot f(c_h)$$

lungh. zona integrazione

p.to misterioso in (x_0, x_0+h)

Quindi

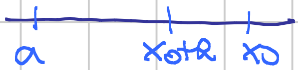
$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(c_h) \qquad \text{con} \quad x_0 < c_h < x_0+h$$

Quando $h \to 0^+$ si ha che $c_h \to x_0$ per i carabinieri, quindi $f(c_h) \to f(x_0)$, quindi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Dovrei fare la stessa cosa per $h \to 0^-$. Basta osservare che valgono le stesse formule per la convenzione sugli integrali ad estremi invertiti

$$\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$



$$= -\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt$$

Questo completa la dim. che $F'(x_0) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in (a,b)$

— o — o —

Cosa posso dire della funzione integrale $F(x)$ se $f(x)$ è solo integrabile (ma non nec. continua?)

È lipschitziana! E la sua costante di lip. è una qualunque limitazione per $|f(x)|$

<u>Dim.</u> Supponiamo $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$.
Allora per ogni x e y in $[a,b]$ vale (suppongo $y \geq x$)

$$|F(y)-F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \qquad \text{(proprietà int. e val. assoluto)}$$

$$\leq \int_x^y |f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_x^y M\,dt = M(y-x) = M|y-x|$$

— o — o —