ANALISI 1 — LEZIONE 099

Note Title 28/03/2017

Caratterizzazione della chiusura con le successioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{x_0 \in \mathrm{Clos}(A) \iff \exists \{x_n\} \subseteq A \text{ t.c. } x_n \to x_0}$$

(Brutalmente: x_0 è aderente ad A se e solo se è il limite di una succ. di punti di A)

$\boxed{\text{Dim}}$ $\boxed{\Leftarrow}$ Sia $x_n \to x_0$ con $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dico che $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

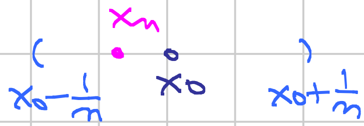
per def. di limite questo intervallo contiene x_n per n abbastanza grande, quindi contiene el. di A.

$\boxed{\Rightarrow}$ Per ipotesi $x_0 \in \mathrm{Clos}(A)$, cioè $\forall \varepsilon > 0$ $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Voglio trovare una succ. x_n in A con $x_n \to x_0$.

Mi gioco la def. con $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Ottengo un elemento



$$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A$$

È ovvio che $x_n \to x_0$ per i carabinieri.

Oss. Non è detto, ma non serve, che gli x_n siano tutti distinti.

Posso sostituire $\frac{1}{n}$ con una qualunque succ. che tende a 0.

Topologia relativa   Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme e sia $B \subseteq A$ un altro sottoinsieme

Def. (solo qualche caso)

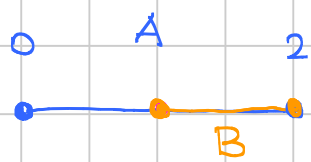
1 - Dico che $x_0 \in B$ è un p.to interno di B, $\boxed{\text{relativamente ad } A}$, se

$$\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \subseteq B}$$

Indico con $\text{Int}_A(B)$ l'insieme dei punti che sono interni a B relativamente ad A.

Brutalmente: le regole del gioco sono le stesse, ma le applico solo in A.

Esempio $A = [0,2]$ $B = [1,2]$



Allora $\text{Int}_A(B) = (1, 2]$

↑ compreso, basta prendere $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e lo sforamento fuori di A non conta.

4 - Dico che x_0 è isolato in B relativamente ad A se

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap B \underbrace{\cap A}_{\text{Inutile perché } B \subseteq A.} = \{x_0\}$$

Dim. a voce
↑
Oss. Gli insiemi $B \subseteq A$ che sono aperti in B relativamente ad A sono le intersezioni di A con i "veri aperti" di $\mathbb{R}$.

Nell'esempio $\underset{B}{\underset{\shortparallel}{(1,2]}}$ è aperto in $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{[0,2]}}$ e infatti $(1,2] = \underset{A}{\underset{\shortparallel}{[0,2]}} \cap \overset{\text{vero aperto}}{(1,3)}$

Quattro facce della continuità

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$.
Allora i seguenti 4 fatti sono equivalenti

(1) (Epsilon - delta)

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A}$$

(2) (Per successioni)

Per ogni succ. $x_n \to x_0$, con $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, vale $f(x_n) \to f(x_0)$

(3) (Con i limiti) x_0 è un p.to isolato oppure non lo è e

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

(4) (Topologica)

$\forall B \subseteq \mathbb{R}$ con $f(x_0) \in \text{Int}(B)$ vale che x_0 è p.to interno di $f^{-1}(B)$ relativamente ad A.

— o — o —

Analogamente possiamo dire che $f: A \to \mathbb{R}$ è continua su tutto A se è continua in ogni p.to di A, cioè

(1) $\forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(2) $\forall x_0 \in A \ \forall x_n \to x_0$ con $x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ vale $f(x_n) \to f(x_0)$

(3) $\forall x_0 \in A \setminus \text{Isol}(A)$ vale $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(4) $\forall B \subseteq \mathbb{R}$ aperto vale $f^{-1}(B)$ è aperto relativamente ad A

Dimostrazione dell'equivalenza tra (1) e (2)

(1) $\Rightarrow$ (2) Per ipotesi $f(x)$ è continua in x_0 alla ε/δ.
Voglio dim. che è continua per succ. cioè
$$A \ni x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

Prendo $\varepsilon > 0$, ottengo dall'ipotesi $\delta > 0$ t.c.

$$\forall x \in \underbrace{(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A}_{x_n \text{ sta qui definitivamente perché } x_n \to x_0} : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

quindi $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ definitivamente.

(2) $\Rightarrow$ (1) Per ipotesi $f(x)$ è continua per succ. in x_0
Voglio dim. che è continua ε/δ, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Lo faccio per assurdo. Neghiamo la tesi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Mi gioco il "$\forall \delta > 0$" ponendo $\delta = \frac{1}{n}$. La negazione mi procura

$$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A \quad \text{t.c.} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Ora $A \ni x_n \to x_0$ per i carabinieri, ma $f(x_n)$ se ne sta ben lontano da $f(x_0)$, e questo contraddice il fatto che dovrebbe essere $f(x_n) \to f(x_0)$.

—o—o—

Esercizio Verificare altre equivalenze.

$$B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Teorema Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione
Sia $g : B \to A$ una funzione

Supponiamo che

(i) g continua in $x_0 \in B$

(ii) f continua in $g(x_0) \in A$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0.

$\boxed{\text{Dim via 2}}$ Prendo $B \ni x_n \to x_0$. Voglio verificare che

$$f(g(x_n)) \to f(g(x_0)).$$

Per la continuità di g in x_0 vale che

$$A \ni g(x_n) \to g(x_0)$$

Per la continuità di f in $g(x_0)$ vale che

$$f(g(x_n)) \to f(g(x)).$$

—o—o—

Oss. Provare la dimostrazione via 1.
Provare la dimostrazione via 4.