ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 50

Note Title 01/12/2023

Esercizio 1 $q(x,y,z) = 2xy + 3xz + 4yz$

$\boxed{1}$ Calcolare la segnatura

Matrice associata $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} = A$ Non c'è modo di partire con Sylvester :(

$\operatorname{Det} A = 3 + 3 = 6 > 0$ Quindi ci sono due possibilità

$+++$ ⇝ Se fosse così, allora $\operatorname{Tr}(A) > 0$ e non è vero

$\boxed{+--}$ ← quella buona

Border dice: considero la forma quadratica ristretta a

$\operatorname{Span}((1,0,0),(0,1,0))$ ← piano $z=0$

Questa forma ha come matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Questa ha $\operatorname{Det} = -1$, quindi segnatura $+-$

Quindi esistono

→ una retta su cui è $+$ (Def. pos.)

→ una retta su cui è $-$ (Def. neg.)

} rette contenute nel piano $z=0$

Questo ci dice che la forma su tutto $\mathbb{R}^3$ ha $n_+ \geq 1$ e $n_- \geq 1$, il che basta per escludere che sia $+++$

$\boxed{2}$ Trovare un s.sp. di dim 2 su cui è def. negativa

Sarebbe bello completare i quadrati

$$2xy + 3xz + 4yz = (x + ay + bz)^2 - (x - ay + cz)^2$$

$$= \cancel{x^2} + \cancel{a^2y^2} + \cancel{b^2z^2} + \cancel{2axy} + \cancel{2bxz} + 2abyz$$

$$- \cancel{x^2} - \cancel{a^2y^2} - \cancel{c^2z^2} + \cancel{2axy} - \cancel{2cxz} + 2acyz$$

$$= (b^2-c^2)z^2 + 4a\,xy + 2(b-c)xz + 2a(b+c)yz$$

Ora scegliamo

$a = \frac{1}{2}$ così sistemiamo xy e poi imponiamo $\begin{cases} b-c = \frac{3}{2} & \rightsquigarrow xz \\ b+c = 4 & \rightsquigarrow yz \end{cases}$

$\rightsquigarrow \; 2b = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2} \;\rightsquigarrow\; b = \frac{11}{4} \;\rightsquigarrow\; c = 4 - b = \frac{5}{4}$

Quindi $\quad 2xy + 3xz + 4yz = \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{11}{4}z\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}z\right)^2 - 6z^2$

Un s.sp. di dim 2 su cui è def. negativa è il piano

$x + \frac{1}{2}y + \frac{11}{4}z = 0$ cioè $\operatorname{Span}((1,-2,0),(11,0,-4))$

$\boxed{3}$ Sylvesterizzare la matrice A, cioè trovare M matrice 3×3 invertibile tale che

$$M^t A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le colonne di M siano v_1, v_2, v_3.

Come v_3 posso usare $(1,-2,0)$

Come v_2 uso $(11,0,-4)$ corretto con GS, cioè

$$v_2 = (11,0,-4) - \frac{\langle (11,0,-4),(1,-2,0)\rangle_A}{\langle (1,-2,0),(1,-2,0)\rangle_A}(1,-2,0)$$

Infine v_1 lo cerco bovinamente imponendo

$$\begin{cases} \langle v_1, v_2\rangle_A = 0 \\ \langle v_1, v_3\rangle_A = 0 \end{cases}$$

Così v_1, v_2, v_3 sono A-ortogonali fra di loro.

A quel p.to basta dividerli per la cosa giusta.

— o — o —

<u>Esercizio 2</u> $\quad x^2 + ay^2 + 4yz + 6xz$

(a) definita positiva,

(b) indefinita,

(c) indefinita, ma definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 2,

(d) nulla su almeno un sottospazio di dimensione 2,

Per quali valori di a succedono queste cose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) La forma quadratica non è mai definita positiva

Basta osservare che $q(0,0,1) = 0$ per colpa dello 0 in fondo

(b) Deve esserci almeno un + e almeno un −.

Cerchiamo di capire la segnatura al variare di a

Sylvester 1 − 3 − 2

$\mathrm{Det}_{1\times1} = 1$

$\mathrm{Det}_{2\times2} = -9$

$\mathrm{Det}_{3\times3} = -9a-4$

- Se $-9a-4>0$, cioè $a<-\frac{4}{9}$, allora $\underset{P}{+}\underset{V}{+}\underset{V}{-}+$ ⇝ segn. $+--$

- Se $-9a-4<0$, cioè $a>-\frac{4}{9}$, allora $\underset{P}{+}\underset{V}{+}\underset{P}{-}-$ ⇝ segn. $++-$

- Se $a = -\frac{4}{9}$, allora $\mathrm{Det} = 0$ $\mathrm{Tr} = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, quindi le possibilità sono $++0$ oppure $+-0$.

  Basta però osservare che

  $$q(0,1,0) = -\frac{4}{9}$$

  quindi una retta di negatività c'è, quindi $+-0$

Conclusione: la forma è sempre indefinita.

(c) Deve essere $--+$, quindi $a<-\frac{4}{9}$

(d) Nulla su almeno un s.sp. di dim 2.

Nei casi $++-$ e $+--$ questo non può succedere!

Consideriamo il caso $++-$. Qui esiste un s.sp. di dim 2 su cui è definita positiva. Chiamiamolo W_1.

Supponiamo ora che esista W_2 di dim 2 su cui $q \equiv 0$.

Ora W_1 e W_2 si intersecano per forza (per GRASSMANN) e sull'intersezione q deve essere nello stesso tempo $=0$ e >0.

Quindi l'unico caso in cui è possibile è quando $a = -\frac{4}{9}$.

In quel caso si trova esplicitamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{4}{9} & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per esercizio completiamo i quadrati

$$x^2 - \frac{4}{9}y^2 + 6xz + 4yz = x^2 + 6xz - \frac{4}{9}y^2 + 4yz$$

$$= (x+3z)^2 - 9z^2 - \frac{4}{9}y^2 + 4yz$$

$$= (x+3z)^2 - \left(3z + \frac{2}{3}y\right)^2$$

Cerchiamo un elemento del $\ker = \mathrm{Span}\left(\left(3, -\frac{9}{2}, -1\right)\right)$

$$= \mathrm{Span}\left((+6, -9, -2)\right)$$

Il sottospazio cercato è $x + 3z = 3z + \frac{2}{3}y$ oppure

$$x + 3z = -3z - \frac{2}{3}y$$

(Il Ker non serviva).

— o — o —