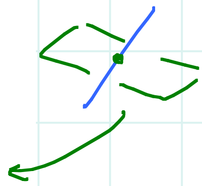
ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 27

Note Title 31/10/2023

	X	V	W	$\dim(V)$	$\dim(W)$	$\dim(V\cap W)$	$\dim(V+W)$
1	$\mathbb{R}^2$	$(1,0)$	$(1,1)$	1	1	0	2
2	$\mathbb{R}^2$	$(1,1)$	$(2,2)$ $(3,3)$	1	1	1	1
3	$\mathbb{R}^2$	$(1,2)$	$(3,4)$ $(5,6)$	1	2	1	2
4	$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(1,1,0)$ $(0,2,-1)$	1	2	0	3
5	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,1)$ $(1,1,1)$	2	2	1	3
6	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,-1)$ $(3,1,2)$	2	2	2	2
7	$\mathbb{R}^3$	$(-1,1,1)$ $(2,1,0)$ $(1,2,1)$	$(1,0,1)$ $(0,5,0)$ $(7,-6,7)$	2	2		



due piani coincidenti

$w_1 = v_1 - v_2$

$w_2 = v_1 + 2v_2$

$v_3 = v_1 + v_2$

$w_3 = 7w_1 - \frac{6}{5}w_2$

(4) $V+W = \text{Span}((1,2,3),(1,1,0),(0,2,-1)) = \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -1+6+2 \neq 0$$

$\text{Dim}(V+W) = 3 \leadsto \text{Dim}(V\cap W) = 0 \leadsto V\cap W = \{(0,0,0)\}$

(5) $V+W = \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -2 \neq 0 \Rightarrow \dim(V\cap W) = 1$$

$$\dim(V+W) = 3$$

Sappiamo anche che $V+W = \mathbb{R}^3$.

Sarebbe bello trovare una base di $V\cap W$.

Osserviamo a occhio che $v_1 + v_2 = 2w_2 - w_1$ e quindi

$V\cap W = \text{Span}((2,1,1))$:)

Alternative per trovare intersezione

① passo i piani in cartesiana e metto a sistema

② Risolvo $av_1 + bv_2 = cw_1 + dw_2$

Troverò che una soluzione $a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=-1$

Dalla relazione ho un vettore che sta in V e W.

⑦ $V = \text{Span}((-1,1,1),(2,1,0))$ Ho eliminato i terzi, e ho

$W = \text{Span}((1,0,1),(0,1,0))$ semplificato w_2

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det $3\times3 \neq 0 \Rightarrow$ rango 3

$\Rightarrow \text{Dim}(V+W) = 3 \Rightarrow V+W = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \text{Dim}(V\cap W) = 1 \Rightarrow V\cap W$ è una retta

Osservo che $\underset{(1,2,1)}{\underset{\shortparallel}{v_1+v_2}} = w_1 + 2w_2$ e quindi $V\cap W = \text{Span}((1,2,1))$

— o — o —

2. Spazio vettoriale $X = \mathbb{R}^4$.

(a) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w,\ x+z = y+w\}$,
$W = \text{Span}\{(1,0,0,-1),(1,2,3,4)\}$;

(b) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w\}$, $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+z = y+w\}$;

(c) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y,\ z = w\}$, $(1,1,0,0)$ $(0,0,1,1)$
$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0,\ x-y+z-w = 0\}$. $(1,0,-1,0)$ $(0,1,0,-1)$

$w_1 + w_2 = v_1 - v_2$

(a) $\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases}$

$w=t,\ z=s,\ y=s,\ x=z+w-y = s+t-s = t$

$(x,y,z,w) = (t,s,s,t) = t(1,0,0,1) + s(0,1,1,0)$

↑ ↑

verifico che stanno in V

So che $\dim(V) = 2$ e $V = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$

V e W sono s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dim 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = \text{Laplace } 1^a \text{ colonna}$$

$$= \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -2+3-(2-3) = 1+1 = 2 \neq 0$$

Quindi $V+W = \mathbb{R}^4$ e $V \cap W = \{(0,0,0,0)\}$

(b) $V \rightsquigarrow x+y = z+w$ $\qquad$ $W \rightsquigarrow x+z = y+w$

$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W) = 3$

$V = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,-1))$

$W = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1))$

Per $V+W$ li metto a colonna e vedo il rango

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Laplace } 1^a \text{ riga}$$

$$-\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi $V+W = \mathbb{R}^4$ e quindi $\dim(V \cap W) = 2$

Troviamo base di $V \cap W$

È ovvio che $(1,0,0,1) \in V \cap W$. Ne vediamo un altro?

Con un po' di occhio si vede che

$$v_2 + v_3 = w_2 + w_3 = (0,1,1,0)$$

Questo ci dice che

$$V \cap W = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$$

corretto dopo video

[Bovino: risolvo $av_1 + bv_2 + cv_3 = dw_1 + ew_2 + fw_3$]

Avrò 2 gradi di libertà.

— o — o —