ANALISI 1 — LEZIONE 32

Note Title 09/11/2024

Regole di derivazione

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$[a f(x)]' = a f'(x)$$

La derivata è un'applic. lineare (da dove a dove?)

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{g(x)^2}$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivate delle funzioni elementari

$[\text{costante}]' = 0 \qquad [x^n]' = n x^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$

$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$[e^x]' = e^x \qquad [\log x]' = \frac{1}{x} \qquad [a^x]' = a^x \cdot \log a \quad a > 0$

$[\sin x]' = \cos x \qquad [\cos x]' = -\sin x \qquad [\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2} \qquad [\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivata della somma

Siano $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in D$ un p.to interno.

Poniamo $s: D \to \mathbb{R}$ definita da $s(x) = f(x) + g(x)$.

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0

Allora s è derivabile in x_0 e $s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Dim. via rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\downarrow \; f'(x_0)} + \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}}_{\downarrow \; g'(x_0)} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dim. via differenziale

Per ipotesi sappiamo che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

per $h \to 0$

Sommando ottengo

$$\underbrace{f(x_0+h) + g(x_0+h)}_{s(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{s(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]}_{\text{per forza è } s'(x_0)} h + o(h)$$

uso che $o(h) + o(h) = o(h)$

Derivata del prodotto

Convenendo come sopra ... $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

Allora $p'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Dim. via rapp. increm.

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(x_0+h) - p(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h}$$

[aggiungo e tolgo sopra un qualunque termine misto]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{\boxed{f(x_0+h)}}_{\downarrow\, f(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, g'(x_0)} + \underbrace{\boxed{g(x_0)}}_{\downarrow\, g(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \right]$$

per la continuità della f, lez. 30

$$= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

Dim. via diff. Per ipotesi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

Le moltiplico tra di loro:

$$\underbrace{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h)}_{p(x_0+h)} = f(x_0) \cdot g(x_0) \quad \rightsquigarrow p(x_0)$$

$$+ [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)]h \quad \rightsquigarrow p'(x_0) \cdot h$$

$$+ \boxed{o(h)}$$

↑ tutti gli altri 6 termini del prodotto sono $o(h)$ [scriverli e convincersene con calma]

Derivata del reciproco $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ Serve che il denominatore sia $\neq 0$

Dim. via rapp. incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}}}_{\downarrow\, -f'(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{1}{f(x_0) \cdot f(x_0+h)}}}_{\downarrow\, \frac{1}{f(x_0)^2}}$$

Quoziente Anche qui serve denom. $\neq 0$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]'$$ uso regola del prodotto

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}\right]'$$ uso su $g(x)$ la regola del reciproco

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\left[-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right]$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Differenza e prodotto per una costante $\rightsquigarrow$ esercizio.

Composizione Vediamo cosa succede con i rapp. increm.

Non dimostrazione

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}}}_{g'(f(x_0))}\;\underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)}$$

Nel primo osservo che il denominatore tende a 0, quindi pongo

$$k = f(x_0+h) - f(x_0)$$

Ma allora $f(x_0+h) = f(x_0)+k$ e quindi la prima frazione diventa

$$\frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k}$$

Quando $k\to 0$, questa tende a $g'(f(x_0))$.

Oss. Il problema nella dim. è che potrei aver moltiplicato e diviso per 0.