ANALISI 1 - LEZIONE 134 (-2)

Note Title 19/05/2017

<u>Esercizio</u> Successione $a_n = \sin n$

Non si può dire che $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ N.E. quindi $\lim_{n \to +\infty} \sin n$ N.E.

(lo stesso ragionamento direbbe che $\lim_{n \to +\infty} \sin(2\pi n)$ N.E. e invece esiste e fa 0)

① $\sin n$ NON ha limite

② $\liminf_{n \to +\infty} \sin(n) = -1$ e $\limsup_{n \to +\infty} \sin(n) = 1$

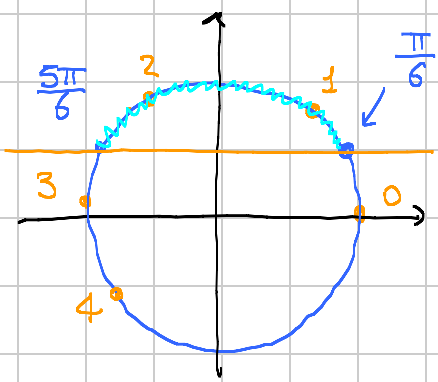
③ $\forall l \in [-1, 1]$ esiste $n_k \to +\infty$ succ. monotona di interi t.c.

$$\lim_{k \to +\infty} \sin(n_k) = l$$

<u>Oss.</u> La stessa cosa dovrebbe valere se al posto di n c'è un polinomio in n. Il problema dovrebbe essere aperto se c'è 2^n.

Problema è equiv. a vedere come si dispongono i naturali sulla circonferenza trigonometrica.

$\boxed{\text{DIM 1}}$ Consideriamo la parte di circ. trig. con $y \geq \frac{1}{2}$



Si tratta di una zona di lungh. $\frac{2\pi}{3} > 1$

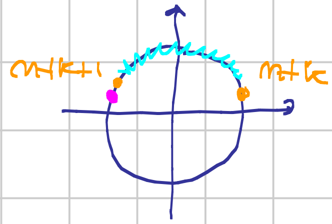
Essendo la zona più lunga di 1, dati 6 interi consecutivi almeno uno casca nella zona e quindi almeno una volta $\sin n \geq \frac{1}{2}$

Questo dice che frequentemente $\sin n \geq \frac{1}{2}$ (succede almeno una volta su 6).
Allo stesso modo si vede che $\sin n \leq -\frac{1}{2}$ frequentemente.
Questo impedice l'esistenza del limite.

Per dim. che una volta su 6 si casca nella zona, basta considerare 6 numeri consecutivi

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad n+3, \quad n+4, \quad n+5.$$

Prendiamo il più grande $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\quad n \geq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
Allora



- NON può essere $\quad n+5 \leq \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi$,
  perché altrimenti

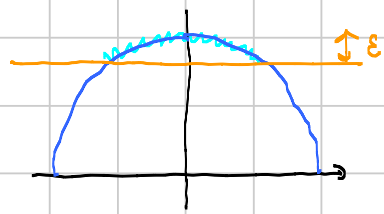
$$-n \leq -\frac{5\pi}{6} - 2k\pi$$
$$n+5 \leq \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi$$

e sommando verrebbe $\quad 5 \leq 2\pi - \frac{2}{3}\pi = 6,\text{poco} - 2\ldots < 5$

- Sia $n+k$ l'ultimo che sta prima di $\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$.
  Allora $n+k+1$ deve stare dentro perché altrimenti la lungh. dovrebbe essere minore di 1.

<u>Oss.</u> Una dim. analoga mostra che $\cos(n)$ non ha limite.

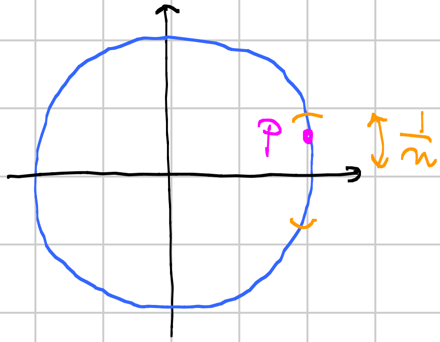
<u>Oss.</u> Con lo stesso sistema non si può dire che $\limsup = 1$



<u>Fatto misterioso</u> Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$
esiste una frazione $\frac{p}{q}$ tale che

$$0 < \left| 2\pi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$$

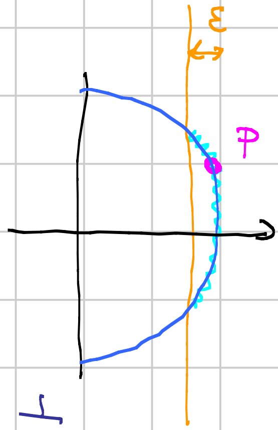
$\boxed{\text{DIM } ② \text{ e } ③}$ (Usando fatto misterioso)



Dal fatto misterioso segue che

$$|2\pi q - p| \leq \frac{1}{n}$$

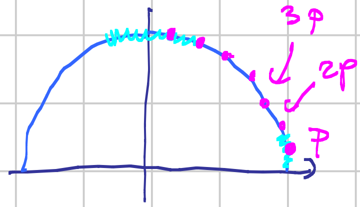
Questo dice che p si trova sulla circ. a distanza $\leq \frac{1}{n}$ dal punto (1,0)



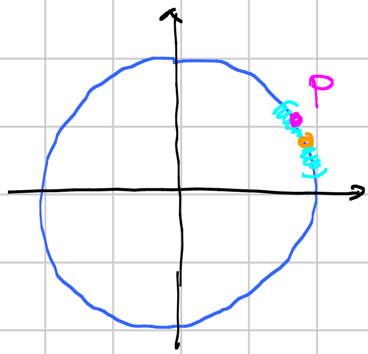
Questo solo fatto dice che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \cos n > 1 - \varepsilon$$

Se considero i multipli di p, cioè 2p, 3p, 4p, ...
allora questi distano l'uno dall'altro meno di $\frac{1}{n}$
cioè meno di un $\varepsilon > 0$ prefissato, quindi
cascano in una finestra piccola a piacere intorno a $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$



Allo stesso modo posso finire in una finestra intorno ad un p.to qualunque della circ., il che dimostra ③



Più in generale, abbiamo ottenuto che

$\forall$ punto (α, β) della circ. trigonometrica esiste $n_k \to +\infty$ t.c.

$$\cos(n_k) \to \alpha \qquad \sin(n_k) \to \beta.$$

Questo dice che i p.ti interi sono densi nella circ. trigonom.

FATTO MISTERIOSO Per ogni α irrazionale e per ogni $n \geq 1$ intero esiste frazione $\frac{p}{q}$ t.c.

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$$

Inoltre posso usare denominatori $q \leq n$, da cui come corollario

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

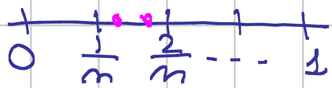
__Esempio__ π lo approx con $\frac{316}{100}$ commettendo un errore $\leq \frac{1}{100}$

Ma posso approx anche con $\frac{22}{7} = 3,142857\ldots$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Considero le parti frazionarie di $k\alpha$ per $k = 0, 1, \ldots, n$, cioè

$$0, \ \{\alpha\}, \ \{2\alpha\}, \ \ldots, \ \{n\alpha\}$$

Sono $n+1$ numeri in $[0,1]$.
Quindi ce ne sono almeno due che distano $\leq \frac{1}{n}$
Siano $\{k_1\alpha\}$ e $\{k_2\alpha\}$.
Quindi



$$0 \leq \{k_1\alpha\} - \{k_2\alpha\} \leq \frac{1}{n}$$

$$\{k_1\alpha\} = k_1\alpha - m_1 \qquad m_1 = \lfloor k_1\alpha \rfloor$$

$$\{k_2\alpha\} = k_2\alpha - m_2 \qquad m_2 = \lfloor k_2\alpha \rfloor$$

$$0 \leq k_1\alpha - m_1 - k_2\alpha + m_2 \leq \frac{1}{n}$$

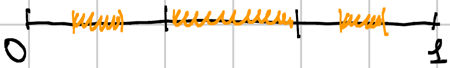
$$0 \leq \underbrace{(k_1 - k_2)}_{q}\alpha - \underbrace{(m_1 - m_2)}_{p} \leq \frac{1}{n}$$

(q è $\leq n$ perché diff. di k_1 e k_2)

Dividendo per q ottengo $\quad 0 \leq \alpha - \frac{p}{q} \leq \frac{1}{nq}$.

se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, questa è stretta

$\boxed{\text{Insiemi strani 1}}$ INSIEME DI CANTOR



→ Prendo $[0,1]$, divido in 3, butto il centrale (aperto), cioè $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

→ Prendo i 2 pezzi rimasti e ripeto

→ Prendo i 4 rimasti e ripeto ...

Itero ∞ volte e quello che resta è l'insieme di Cantor.

Quello che resta è un chiuso.

Quanto ho buttato?

$$\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot\frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\underbrace{\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots\right)}_{\text{geometrica di ragione } \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3 = 1$$

$\boxed{\text{FATTI}}$

→ Resta qualcosa...

→ Quello che resta è + che numerabile

→ La funzione caratt. è integrabile e ha integrale nullo

→ Quello che resta sono tutti e soli i numeri che in base 3 si scrivono senza usare la cifra 1.