ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 20

Note Title 20/10/2023

Esempi di cambi di base

Spazio	$\mathcal{B}$	$\widehat{\mathcal{B}}$	① $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$	② $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{B}}$	③ $\widehat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (2,3)$ $v_2 = (1,5)$	$w_1 = (-3,4)$ $w_2 = (1,-3)$			

1° Metodo: bovino Prendo i vettori della base vecchia e li scrivo rispetto alla base nuova. Uso come colonne i coeff. che ottengo

①
$$(1,0) = a\,(2,3) + b\,(1,5)$$
$$(0,1) = c\,(2,3) + d\,(1,5) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

③
$$(-3,4) = A\,(2,3) + B\,(1,5)$$
$$(1,-3) = C\,(2,3) + D\,(1,5) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

2° metodo più astuto Calcolo la matrice $B \to$ Canonica

Questo è banale da calcolare!

$$(2,3) = a\,(1,0) + b\,(0,1)$$
$$(1,5) = c\,(1,0) + b\,(0,1) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

ho messo a colonna i vettori della base B

Chi sarà mai la matrice Canonica $\rightsquigarrow$ B ? L'inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \text{ risposta a } 1$$

INPUT: componenti risp. alla canonica

OUTPUT: componenti risp. alla base B

Prova: prendo $(3,-6)$ ⇝ rispetto alla canonica ha componenti $\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$. Rispetto alla $\mathcal{B}$ ha componenti

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}21\\-21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$$

Verifica: $3(2,3)-3(1,5) = (3,-6)$:)

② Con metodo astuto

Spazio	$\mathcal{B}$	$\widehat{\mathcal{B}}$	$\mathcal{C}\to\mathcal{B}$ (2)	$\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{B}}$	$\widehat{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ (3)
$\mathbb{R}^2$	$v_1=(2,3)$ $v_2=(1,5)$	$w_1=(-3,4)$ $w_2=(1,-3)$			

$\widehat{\mathcal{B}} \to$ Canonica $\begin{pmatrix}-3 & 1\\4 & -3\end{pmatrix}$

Canonica $\to \widehat{\mathcal{B}}$ $\begin{pmatrix}-3 & 1\\4 & -3\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -1\\-4 & -3\end{pmatrix}$

③ Con metodo astuto $\widehat{\mathcal{B}} \to$ Canonica $\to \mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\4 & -3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{pmatrix}^{-1}$$

In che ordine le devo moltiplicare? In ordine inverso risp. a quanto scritto sopra, cioè

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{pmatrix}^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}-3 & 1\\4 & -3\end{pmatrix}}$$

è la prima che va ad operare sul vettore che viene messo a destra

Facendo così deve venire fuori la matrice $\begin{pmatrix}A & C\\B & D\end{pmatrix}$ del metodo bovino iniziale!

— o — o —

$\mathbb{R}_{\le 2}[x]$	$v_1 = x^2$ $v_2 = x^2 + x$ $v_3 = x^2 + x + 1$	$w_1 = x^2 + x$ $w_2 = x^2 + x + 1$ $w_3 = x$			
	$\mathcal{B}$	$\hat{\mathcal{B}}$			$\hat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$

Se voglio $\hat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ faccio $\hat{\mathcal{B}} \to \underset{\{1, x, x^2\}}{\text{Canonica}} \to \mathcal{B}$

$\hat{\mathcal{B}} \to$ Canonica $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_1$

$\mathcal{B} \to$ Canonica $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_2$

$\hat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B} \quad M_2^{-1} M_1$

calcolo con Gauss

— o — o —

V	W	Applicazione	Base di V	Base di W
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x - y, y, y - x)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, -2, 0)$ $w_2 = (0, 2, 1)$ $w_3 = (1, 1, 1)$
			$\mathcal{B}_V$	$\mathcal{B}_W$

Esercizio: trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare tra le basi indicate

$f(x, y) = (x - y, y, y - x)$

Matrice di f tra le basi indicate

<u>Bovino</u>

$f(1,2) = (-1, 2, 1) = a w_1 + b w_2 + c w_3$

$f(1,3) = (-2, 3, 2) = d w_1 + e w_2 + f w_3$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} d \\ e \\ f \end{matrix}} \end{pmatrix} = A$$

A prende : → INPUT un vettore colonna lungo 2 che rappresenta le comp. di (x,y) risp. alla base v_1, v_2

→ OUTPUT : un vettore colonna lungo 3 che le comp. di $f(x,y)$ risp. alla base w_1, w_2, w_3.

$\boxed{\text{Non bovino}}$ So fare bene la matrice di f usando in partenza ed arrivo le basi canoniche

$f(x,y) = (x-y,\ y,\ y-x)$

$f(1,0) = (1, 0, -1)$

$f(0,1) = (-1, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Io voglio fare $\mathcal{B}_V \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} C_V \xrightarrow{B} C_W \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} \mathcal{B}_W$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$p(x+1)$	$v_1 = x^2$ $v_2 = x$ $v_3 = 1$	$w_1 = x^2 + 2x + 1$ $w_2 = x + 1$ $w_3 = 1$
			$\mathcal{B}_V$	$\mathcal{B}_W$

L'applicazione f prende in INPUT un polinomio $p(x)$ e restituisce in OUTPUT il polinomio $p(x+1)$

$p(x) = a + bx + cx^2$

$$p(x+1) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 = (a+b+c) + (b+2c)x + cx^2$$

Quindi è come se fosse $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a,b,c) = (a+b+c,\ b+2c,\ c)$$

Considerando la base canonica $\{1, x, x^2\}$ la matrice di f sarebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se voglio la matrice di f tra le basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ posso fare il bovino

$$f(v_1) = f(x^2) \longrightarrow (x+1)^2 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0\, w_3$$

$$f(v_2) = f(x) \longrightarrow x+1 = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$$

$$f(v_3) = f(1) \longrightarrow 1 = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— o — o —