ANALISI 1 — LEZIONE 081

Note Title 07/03/2017

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Metodo sistematico per trovare una soluzione di un'eq. diff. lineare NON omogenea (funziona anche se i coeff. sono non costanti, MA a patto di avere una base di soluzioni dell'omogenea).

<u>Esempio 1</u> $\ddot{u} + 3\dot{u} - 4u = e^{2t}$

Sol. gen. omogenea: $u(t) = a e^{t} + b e^{-4t}$

Cerco una sol. della non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t) e^{t} + b(t) e^{-4t}$$

funzioni della t

Calcolo

$$\dot{u}(t) = \boxed{\dot{a}(t) e^{t}} + a(t) e^{t} + \boxed{\dot{b}(t) e^{-4t}} - 4 b(t) e^{-4t}$$

Impongo $\boxed{\dot{a}(t) e^{t} + \dot{b}(t) e^{-4t} = 0}$ 1ª equazione

Calcolo

$$\ddot{u}(t) = \dot{a}(t) e^{t} + a(t) e^{t} - 4\dot{b}(t) e^{-4t} + 16 b(t) e^{-4t}$$

(ho ignorato gli altri due termini)

Sostituisco nell' equazione di partenza

$$\dot{a} e^{t} + \cancel{a e^{t}} - 4\dot{b} e^{-4t} + 16 \cancel{b e^{-4t}}$$
$$+ \cancel{3a e^{t}} - 12 \cancel{b e^{-4t}}$$
$$- \cancel{4a e^{t}} - 4 \cancel{b e^{-4t}} = e^{2t}$$

$\ddot{u}$

$+3\dot{u}$

$-4u = e^{2t}$

DEVE succedere che i termini con a e b (senza la derivata) se ne vanno. Ciò che resta è

$$\boxed{\dot{a}(t)\, e^{t} - 4\dot{b}(t)\, e^{-4t} = e^{2t}}$$ 2ª equazione

Le due eq. ottenute le metto insieme e le penso come sistema lineare nelle incognite $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$

$$\begin{cases} \dot{a}(t)\, e^{t} + \dot{b}(t)\, e^{-4t} = 0 \\ \dot{a}(t)\, e^{t} - 4\dot{b}(t)\, e^{-4t} = e^{2t} \end{cases}$$

Risolvo: $1^a - 2^a \leadsto 5\dot{b}(t)\, e^{-4t} = -e^{2t} \leadsto \dot{b}(t) = -\frac{1}{5} e^{6t}$

$$\dot{a}(t) = -\dot{b}(t)\, e^{-4t} \cdot e^{-t} = \frac{1}{5} e^{6t} \cdot e^{-4t} \cdot e^{-t} = \frac{1}{5} e^{t}$$

Integrando trova $a(t)$ e $b(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{5} e^{t} \qquad b(t) = -\frac{1}{30} e^{6t}$$

$$\leadsto \quad u(t) = a(t)\, e^{t} + b(t)\, e^{-4t}$$

$$= \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{1}{30} e^{2t} = \frac{5}{30} e^{2t} = \frac{1}{6} e^{2t}$$

— o — o —

Se l'equazione fosse di ordine 3, avrei 3 costanti arbitrarie $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$, quindi servirebbero 3 equ ottenute annullando i termini con $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$ nel calcolo di $\dot{u}$ e $\ddot{u}$.

Si potrebbe dim. che il sistema finale ha sempre sol. unica.

— o — o —

EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE 1

$$\boxed{\dot{u} + a(t)u = b(t)}$$

Formula per la soluzione generale

$$\boxed{u(t) = e^{-A(t)} \left\{ c + \int b(s)e^{A(s)}\,ds \right\}}$$

dove c è il parametro libero, e $A(t)$ è una primitiva qualunque di $a(t)$, e l'integrale è una primitiva qualunque di $b(t)e^{A(t)}$.
La formula fornisce la soluz. sempre. Se in più so calcolare le primitive, la formula è esplicita.

$\boxed{\text{Dim 1}}$ (Verifica)

$$\dot{u}(t) = e^{-A(t)} (-\underset{\overset{\shortparallel}{a(t)}}{A'(t)}) \{ c + \int \dots \} + \cancel{e^{-A(t)}} \cdot b(t) \cancel{e^{A(t)}}$$

$$= -a(t)u(t) + b(t)$$

☺

$\boxed{\text{DIM 2}}$ $\boxed{\text{FATTORE INTEGRANTE}}$ Sia $A(t)$ una prim. di $a(t)$

Moltiplico l'eq. a dx e sx per $e^{A(t)}$ ← fatt. integrante

$$\underbrace{\dot{u}(t)e^{A(t)} + a(t)u(t)e^{A(t)}}_{} = b(t)e^{A(t)}$$

$$\left[u(t)e^{A(t)}\right]' \quad \text{da cui}$$

$$u(t)e^{A(t)} = \int b(s)e^{A(s)}\,ds + c.$$ Moltiplicando per $e^{-A(t)}$ ho la formula.

☺

$\boxed{\text{DIM 3}}$ (Via corta delle eq. lineari) $\dot{u} + a(t)\,u = b(t)$

Passo 1 : risolvo l'omogenea associata : $\dot{u} + a(t)\,u = 0$ pensandola a variabili sep.

$$\dot{u} = -a(t)\,u \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = -a(t)\,u \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)\,dt$$

$$\rightsquigarrow \log|u| = -A(t) + c \rightsquigarrow \boxed{u = c\,e^{-A(t)}}$$

primo pezzo della formula

Passo 2 : cerco soluz. speciale dell'eq. non omogenea e la cerco facendo variare la costante

$$u(t) = \underbrace{c(t)}_{\text{incognita}}\,e^{-A(t)} \qquad \dot{u}(t) = \dot{c}(t)\,e^{-A(t)} + c(t)\,e^{-A(t)}(-a(t))$$

Sostituisco nell'eq. e trovo

$$\dot{u} + a(t)\,u = \underbrace{\dot{c}(t)\,e^{-A(t)} - a(t)\,\cancel{c(t)\,e^{-A(t)}}}_{\dot{u}} + \underbrace{a(t)\,\cancel{c(t)\,e^{-A(t)}}}_{a(t)\,u} = b(t)$$

$$\rightsquigarrow \dot{c}(t) = e^{A(t)}\,b(t) \rightsquigarrow c(t) = \int e^{A(s)}\,b(s)\,ds$$

Quindi una sol. speciale è

$$\boxed{u(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(s)}\,b(s)\,ds}$$

secondo pezzo della formula

Esempio 1 $\qquad \dot{u} + \underbrace{2t}_{a(t)}\,u = t^3 \qquad A(t) = t^2$

Fattore integrante : $e^{t^2} \rightsquigarrow \underbrace{\dot{u}\,e^{t^2} + 2t\,u\,e^{t^2}}_{} = t^3 e^{t^2}$

$$(u\,e^{t^2})' = t^3 e^{t^2}$$

$$u e^{t^2} = \int t^3 e^{t^2}\, dt = \int \underbrace{t^2}_{F} \cdot \underbrace{t e^{t^2}}_{g}\, dt = \underset{F}{t^2} \cdot \underset{G}{\tfrac{1}{2} e^{t^2}} - \int \underset{f}{\cancel{2}t}\ \underset{G}{\tfrac{1}{\cancel{2}} e^{t^2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + c$$

da cui $\boxed{u(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} + c e^{-t^2}}$

Metodo alternativo: guardo l'omogenea $\dot u + 2tu = 0$

$$\dot u = -2t u \rightsquigarrow \log |u| = -t^2 + c \rightsquigarrow u(t) = c e^{-t^2}$$

Per la parte non omogenea spero in un tentativo polinomiale

$$u(t) = a + bt + ct^2 \qquad \dot u = b + 2ct$$

Sostituisco: $\dot u + 2tu = b + 2ct + 2at + 2bt^2 + 2ct^3 = t^3$

$2c = 1$	t^3	$c = \frac{1}{2}$ $a = -\frac{1}{2}$
$b = 0$	t^2	$b = 0$.
$2c + 2a = 0$	t	
$b = 0$	termine noto	

Esempio 2 $\quad \dot u + \frac{u}{t} = \sin t \qquad a(t) = \frac{1}{t} \rightsquigarrow A(t) = \log t$

Fatt. integrante $= e^{\log t} = t$

$$t \dot u + u = t \sin t$$

$$(tu)' = t \sin t \qquad tu = \int t \sin t = -t \cos t + \int \cos t$$

$$= -t \cos t + \sin t + c$$

$u(t) = -\cos t + \frac{\sin t}{t} + \frac{c}{t}$. Tutte le sol. hanno blow up in $t=0$ tranne quella con $c = 0$.

— o — o —