Fondamenti d'informatica

Realizzato da: Giuntoni Matteo

A.A 2022-2023

---

1 Insiemi

Gli insiemi sono definibili come delle correlazioni di elementi e saranno alla base del corso di FDI. [1]
Gli insiemi possono essere:

- **Finiti**: quando hanno un numero finito di elementi
- **Infiniti**: quando invece il numero di elementi è infinito

Esempio 1.0.1. Esempi insiemi finiti ed infiniti:

- Insieme finito: $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ [2]
- Insieme finito: $GS = \{lun, mar, mer, \ldots, dom\}$
- Insieme infinito: $A = \{\ldots, a_i - 1, a_i, a_i + 1, \ldots\}$

Esempio 1.0.2. Alcuni insiemi infiniti ricorrenti:
$\mathbb{N}$ = num. naturali $\mathbb{Z}$ = num. interi $\mathbb{Q}$ = num. razionali $\mathbb{R}$ = num. reali

1.1 Notazione

Elementi: Lettere piccole dell'alfabeto. E.g. a, b, c - a_1, a_2, a_3
Insiemi: Lettere maiuscole dell'alfabeto. E.g. A, B, C
Appartiene: $a \in A$ **Non Appartiene:** $a \notin A$ **Tale che:** $|$

1.2 Definire un insieme

Un insieme può essere scritto in due forme, quella estensionale e quella intensionale.

1.2.1 Estensionale

Detto anche per enumerazione, consiste nell'elencare esplicitamente tutti gli elementi.

Esempio 1.2.1. Esempi estensionale:
$ore = \{1, 2, 3, \ldots, 24\}$ - $vocali = \{a, e, i, o, u\}$
$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ - $\emptyset = \{\}$ (insieme vuoto)

1.2.2 Intensionale

Detto anche per proprietà, consiste nel descrivere implicitamente tutti gli elementi di un insieme A attraverso una *proprietà* P che li caratterizza.

$$X = \{x \in A \mid P(x)\} \tag{1}$$

Esempio 1.2.2. Esempi intensionale:
$ore_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1 \text{ and } n \leq 24\}$ $N^p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è divisibile per } 2\}$
$N^d = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ non è divisibile per } 2\}$ $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \text{ con } m \neq 0\}$

---

[1] Ricorda che all'interno di un insieme gli elementi possono essere ripetuti, in tal caso per le varie operazioni da fare questi elementi ripetuti andranno considerati come unici

[2] I tre puntini '...' si utilizzano quando non si è in grado di scrivere tutti gli elementi

1.3 Proprietà degli insiemi

1.3.1 Uguaglianza

Due insiemi A e B sono **uguali** ($A = B$) se hanno gli stessi elementi, altrimenti sono **diversi** ($A \neq B$).

Esempio 1.3.1. Dati tre insiemi
$V = \{a, e, i, o, u\}$
$V1 = \{a, i, e, o, u, e, i, a\}$
$B = \{x \mid x$ è una vocale della lingua italiana$\}$
possiamo dire che $V = V1 = B$

Domanda Con $A = \{a, e, b, c, o, u\}$ e $B = \{a, b, e, b, c, o, o, u\}$, $A = B$?
Se partiamo dalla definizione di insiemi uguali, cioè che $A = B$ quando A contiene gli stessi elementi di B e viceversa, possiamo concludere che **si** in questa casistica A e B sono uguali. Possiamo quindi definire:

Definizione 1.1 (Proprietà del confronto)**.** *$A = B$ equivale a dire che ogni elemento $a \in A$ vale che $a \in B$ e ogni elemento $b \in B$ vale $b \in A$.*

1.3.2 Inclusione

Prendiamo come esempio due insiemi A e B:

Definizione 1.2 (Sottoinsieme)**.** *A è un sottoinsieme di B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A appartiene anche a B. A e B possono essere uguali ma non è necessario. Ad esempio in figura [1] $A \subseteq B$, $A \subseteq \mathbf{U}$ e $B \subseteq \mathbf{U}$* [3]

Definizione 1.3 (Sottoinsieme stretto)**.** *A è un sottoinsieme di B ($A \subset B$) se ogni elemento di A appartiene anche a B. A e B non sono uguali. Ad esempio in figura [1] $A \subset B$.*

Definizione 1.4 (Insiemi disgiunti)**.** *Due insiemi A e B si dicono disgiunti se non hanno elementi in comune.*

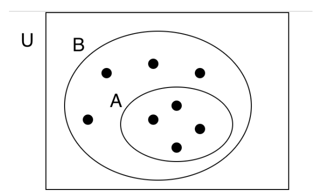


Figure 1: Contenuto uguale

1.3.3 Proprietà di uguaglianza ed inclusione

Per tutti gli insiemi A, B, C valgono le proprietà scritte in tabella 1.

Riflessiva	$A = A$	$A \subseteq A$
Transitiva	Se $A = B$ e $B = C \implies A = C$	Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \implies A \subseteq C$
Simmetrica	Se $A = B \implies B = A$	*Niente*
Antisimmetrica	*Niente*	Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \implies A = B$

Table 1: Proprietà Uguaglianza ed Inclusione

[3] con il simbolo "U", chiamato universo, si indicano tutti i possibili elementi che possiamo trovare in un insieme.

1.3.4 Paradosso di Russell

Sia $NV = \{X \mid X \neq \emptyset\}$.
Sia $CS = \{X \mid X \ \in X\}$ l'insieme degli insiemi che appartengono a se stessi.
Sia $NCS = \{X \mid X \notin X\}$ l'insieme degli insiemi che non appartengono a se stessi.
Abbiamo un paradosso in quanto se assumiamo che $NCS \in NCS$ allora $NCS \notin NCS$, mentre se assumiamo che $NCS \notin NCS$ allora $NCS \in NCS$.

1.4 Operazioni su insiemi

1.4.1 Cardinalità

Si rappresenta con n o $|A|$ ed è il numero di elementi dell'insieme. Valgono le seguenti proprietà:

- Se $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$
- Se $A = B \implies |A| = |B|$
- Se $A = \emptyset \implies |A| = 0$

Note 1.4.1. *Dati due insiemi* $V = \{a, e, i, o, u\}$ *e* $V1 = \{a, a, e, i, i, u, o, e\}$ *allora* $|V| = |V1| = |B|$

Esempio 1.4.1. Esempi cardinalità:

1.4.2 Unione

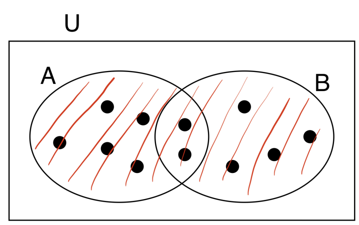


Figure 2: $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

1.4.3 Intersezione

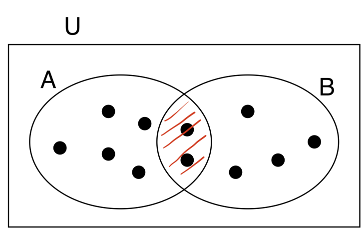


Figure 3: $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

1.4.4 Differenza

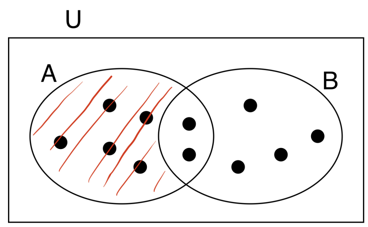


Figure 4: $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

1.4.5 Complemento

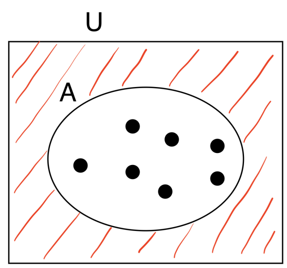


Figure 5: $\overline{A} = \{c \in U \mid x \notin A\}$

1.5 Tavola delle leggi

Per tutti gli insieme A, B, C (dell'universo U) valgono le uguaglianze nella tabella 2

Associazione	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Unita	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Indipendenza	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Assorbimento	$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Complemento	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Convoluzione	$\overline{(\overline{A})} = A$	
Assrbimento con $\cap$ e $\cup$	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Table 2: Tavola delle leggi

1.6 Algebra di Bool

L'algebra di bool sta alla base dell'informatica e si compone di solo 2 elementi che possono essere rappresentati in tanti modi: V - F, Vero - Falso, True - False, 1 - 0, Ø - U

Su questi elementi possono essere applicate una serie di operazioni che sono:
And, &&, $\wedge$ **Or**, ||, $\vee$ **Not**, $\sim$, $\neg$ **Implicazione:**[4] $A \implies B$, se A allora B
Conseguenza: $A \impliedby B$, A se B
Doppia implicazione: $A \iff B$, A se e solo se B

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \implies B$	$A \impliedby B$	$A \iff B$
Ø	Ø	Ø	Ø	U	U	U	U
Ø	U	Ø	U	U	U	Ø	Ø
U	Ø	Ø	U	Ø	Ø	U	Ø
U	U	U	U	Ø	U	U	U

Table 3: Operazioni con algebra booleana

Note 1.6.1. *Se nella tabella andiamo a sostituire lo Ø con 0 e U con 1 o con qualsiasi altro valore corrispondente nell'algebra di boole il risultato resta invariato.*

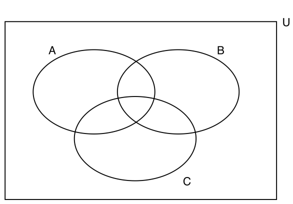
1.7 Dimostrazioni

Una **legge** è **valida** se vale per tutte le scelte dell'insieme che prendiamo in considerazione. Una **dimostrazione** indica la validità di una legge. Un **controesempio** mostra che la legge non è valida per almeno un caso (appunto il controesempio). Ci sono 3 tecniche di dimostrazione: **grafica** (diagramma di Eulero-Venn), **discorsiva** e tramite **sostituzione**.

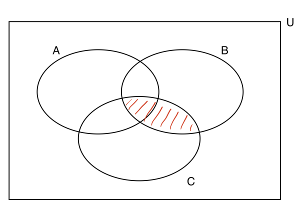
1.7.1 Grafica

Esempio 1.7.1. Dimostriamo la legge distributiva mediamente i diagrammi di Eulero-Venn.

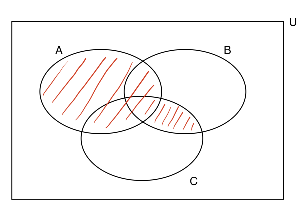
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2}$$



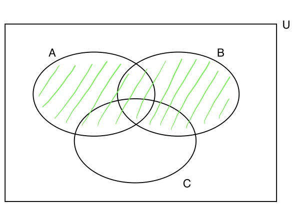
(a) Insiemi di partenza



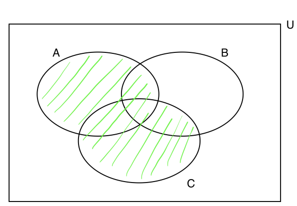
(b) Step 1 - $B \cap C$



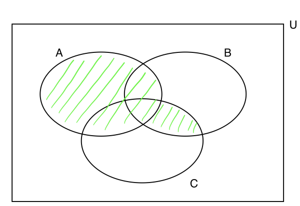
(c) Step 2 - $A \cup (B \cap C)$



(a) Step 3 - $A \cup B$



(b) Step 4 - $A \cup C$



(c) Step 5 - $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

[4]La parte a sinistra della freccia si chiama **premessa**, la parte a destra invece **conseguenza**

Possiamo vedere come lo step 2 (6b), che rappresenta ciò che dovrebbe essere $A \cup (B \cap C)$ con i diagrammi di eulero-venn, e lo step 5 (7b), cioè $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, siano uguali e quindi possiamo dire che la proprietà e dimostrata.

1.7.2 Sostituzione

Questo tipo di dimostrazione si basa sull'utilizzare leggi preesistenti per dimostrare un'affermazione, scomponendo tale affermazione in modo che si possa ricorrere ad un legge fondamentale.

Esempio 1.7.2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (C \cup B)$

1. **Commutativa**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$

L'ipotesi è vera per la proprietà *associativa*.

Esempio 1.7.3. $A \cup (\overline{A} \cap B)$

1. Usando la **Distributiva** possiamo dividere la prima parte: $(A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = (A \cup B)$
2. Usando la proprietà del **Complemento** $A \cup \overline{A}$ diventa U quindi perché un insieme unito con la sua negazione torna sempre l'universo: $U \cap (A \cup B) = (A \cup B)$
3. Per la proprietà dell'**Unità** un insieme A unito con l'universo U è uguale a l'insieme stesso quindi: $A \cup B = A \cup B$

L'ipotesi è così verificata.

1.7.3 Discorsiva

Esempio di dimostrazione della proprietà distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{3}$$

Teniamo conto che: $X = Y \iff (X \subseteq Y) \land (Y \subseteq X)$.
Andiamo a questo punto a sostituire X con la prima parte della proprietà distributiva, $A \cup (B \cap C)$ e Y con la seconda $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Applicando la considerazione scritta sopra otteniamo due condizione che devono entrambi essere vere per far si che la condizione di uguaglianza iniziale $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ sia vera e quindi la proprietà sia verificata. Queste due condizioni sono:

- $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - Dimostrazione 1°
- $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ - Dimostrazione 2°

Dimostrazione 1°: $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Ricordiamo che un insieme $W \subseteq Z$ per ogni $x \in W$ e $z \in Z$.
Sostituendo la W con la prima parte, $A \cup (B \cap C)$, e la Z con la seconda, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ possiamo scrivere che $y \in A \cup (B \cap C)$. Per la definizione di unione possiamo distinguere in 2 casi.

$$(1a)\ y \in A \qquad (1b)\ y \in (B \cap C)$$

Da qui il nostro obbiettivo è far valere per entrambi i casi che $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- **Caso 1a:** $y \in A$
  1. Per questo caso possiamo vedere come, per la definizione di unione, aggiungendo qualsiasi cosa all'insieme A l'appartenenza di y rimarrà invariata. Quindi $y \in A \cup B$, $y \in A \cup C$.
  2. Da qui per la definizione di intersezione[5] $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Caso dimostrato. ■

[5] *($y \in W \cap Z, \iff y \in W$ e $y \in Z$)*

- **Caso 1b:** $y \in (B \cap C)$
  1. Siccome $x \in B \cap C$, per definizione di intersezione si ha che $x \in B$ e che $x \in C$.
  2. Dato che $x \in B$, a sua volta ha che $x \in A \cup B$.
  3. Analogamente, dato che $x \in C$, per definizione di unione si ha che $x \in A \cup C$.
  4. Ma allora, visto che x appartiene a entrambi questi insiemi deve appartenere anche alla loro intersezione, ovvero $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Caso dimostrato. ■

Dimostrazione 2°: $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$
Come per la dimostrazione 1° andiamo a prendere qualsiasi elemento $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Da qui per la definizione di intersezione $y \in (A \cup B)$ e $y \in (A \cup B)$ che ci permette di conseguenza di distinguere 4 casi:

(1) $y \in A$ e $y \in A$ (2) $y \in A$ e $y \in B$ (3) $y \in C$ e $y \in A$ (4) $y \in B$ e $y \in C$

Però possiamo racchiudere le prime 3 con $y \in A$ e l'ultima come $y \notin A$. Quindi abbiamo due possibilità disgiunti fra loro.

(2a) $y \in A$ (2b) $y \notin A$

In entrambi i casi bisogna arrivare a dimostrare che $y \in A \cup (B \cap C)$.

- **Caso 2a:** $y \in A$
  1. Essendo che $y \in A$ allora per definizione di unione $y \in A \cup (B \cap C)$. Caso dimostrato. ■
- **Caso 2b:** $y \notin A$
  1. Dato che $y \in A \cup B$ ma $y \notin A$, allora necessariamente $y \in B$.
  2. Analogamente, data che $y \in A \cup C$ ma $y \notin A$, allora $y \in C$.
  3. Visto che y apparitene sia a B che a C deve per forza appartenere alla loro intersezione, quindi $y \in (B \cap C)$.
  4. A questo punto per definizione di unione $y \in A \cup (B \cap C)$. Caso dimostrato. ■

Non avendo nessun' altro caso da dimostrare abbiamo concluso la dimostrazione. ■

1.8 Prodotto Cartesiano

Prendendo 2 insiemi A, B il loro prodotto cartesiano si definisce come:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Note 1.8.1. *In un prodotto cartesiano* $|A \times B| = |A| * |B|$ *e* $A \times \emptyset = \emptyset$

Esempio 1.8.1. Esempio prodotto cartesiano:
$A = \{501234, 501227, 678980\}$ N. matricola $B = \{18, 19, 20, ..., 30L\}$ Voti
$A\ X\ B = \{(501234, 18), (501234, 19), ..., (678980, 30L)\}$

I sottoinsiemi che si vanno a creare con il prodotto cartesiano si indicano con le parentesi tonde "(...)" e possono essere di due tipi:

- **Coppia Ordinata:** si tiene conto dell'ordinamento degli elementi. E.g. $(a, b) \neq (b, a)$.
- **Coppia Non Ordinata:** non si tiene conto dell'ordinamento degli elementi. E.g. $(a, b) = (b, a)$.

1.9 Insiemi di insiemi

Definizione 1.5. *Un insieme di insiemi è quando uno o più elementi di un insieme è a sua volta un insieme.*

Note 1.9.1. *Preso* $A = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$*, si nota che* $a \notin A$ *mentre* $\{a\} \in A$.

Note 1.9.2. *Sapendo che* $\emptyset = \{\}$ *possiamo dedurre che* $|\{\{\}\}| = 1$.

Esempio 1.9.1. Esempi insiemi di insiemi:

- $X = \{a, \{a, b, c\}, \{a, \{b\}\}, \{\{c\}, d\}\}$
- $N = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}, \{\{\{\{\}\}\}\}, ...\} = \mathbb{N}$

1.9.1 Insieme delle parti

Definizione 1.6. *Dato un insieme* A*, l'insieme delle parti di* A *si indica come* $P(A)$ *e si definisce come tutti i possibili sottoinsiemi di* A.

$$P(A) = \{x \subseteq A\} \tag{4}$$

Note 1.9.3. *La* ***cardinalità*** *nell'insieme delle parti si calcola come:* $P(A) = 2^{|A|}$

Esempio 1.9.2. Con $A = \{a, b, c\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}\}$