ANALISI 1 — LEZIONE 033

Note Title 02/11/2016

SERIE NUMERICHE Sia a_n una successione

Brutalmente: la serie di a_n, che si indica con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

indica la somma degli infiniti termini della successione.

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

SOMME PARZIALI

$$\boxed{S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k} \qquad S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Achtung! S_n è una sommatoria (somma di un numero finito di termini), ben diversa da una serie.

Def. Si dice serie, e si indica con il simbolo introdotto all'inizio, il

$$\lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Essendo un limite ha le solite 4 possibilità:

1. $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ⇝ la serie converge ad ℓ.
2. $S_n \to +\infty$ ⇝ " " diverge a $+\infty$
3. $S_n \to -\infty$ ⇝ " " " " $-\infty$
4. S_n non ha limite ⇝ la serie è indeterminata

— o — o —

Procedura: a_n ⇝ costruisco S_n ⇝ comportamento serie.

<u>Esempio banale 1</u> $\quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ $S_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$

<u>Esempio banale 2</u> $\quad a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_n := n+1$ (ci sono $n+1$ termini) $\rightsquigarrow$ $S_n \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

<u>Piccola variante</u> $\quad \sum_{n=15}^{+\infty} a_n$ si definisce analogamente, con

$$S_n := a_{15} + a_{16} + \dots + a_n = \underbrace{\sum_{k=15}^{n} a_k}_{\text{sommatoria finita}} \qquad \forall n \geq 15$$

<u>Oss. fondamentale</u> Siano a_n e b_n due succ. tali che

$$a_n = b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora le 2 serie corrispondenti hanno lo stesso tipo di comp. ①, ②, ③, ④. Nel caso ① le somme finali possono essere diversi.

$\boxed{\text{Idea della dim.}}$ Le somme parziali delle due serie definitivamente differiscono per una costante.

<u>Conseguenza</u> Se in una serie cambio un numero finito di termini, allora la tipologia ①, ②, ③, ④ non cambia.

— o — o —

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 (MENGOLI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5}$$

Esperimenti : $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

Congettura : $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Facile induzione ... passo base banale ... passo induttivo

$$S_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rel. fond.}}}{=} S_n + a_{n+1} = \underbrace{1 - \frac{1}{n+1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Hp ind.}}} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{= a_{n+1}} = \dots = 1 - \frac{1}{(n+2)}$$

$S_n \to 1$, quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} = +\infty$

$S_1 = \log \frac{2}{1}$; $S_2 = \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} = \log 3$

Congettura : $S_n = \log(n+1) \to +\infty \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

— o — o —

Back to esempio 1 Osservo che $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{a_2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}}_{a_3} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \dots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Back to esempio 2 Osservo che $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$

$$S_n = \underbrace{\cancel{\log 2} - \log 1}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}}_{a_2} + \underbrace{\log 4 - \cancel{\log 3}}_{a_3} + \dots + \underbrace{\log(n-1) - \log n}_{a_n}$$

Questo è l'effetto telescopico ...

— o — o —

SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$$

per convenzione

A suo tempo per induzione abbiamo dim.:

$$\boxed{S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \neq 1$ (se $a=1$ è banale che diverge a $+\infty$)

Qual è il limite di S_n? Dipende da a:

- per $a>1$, allora $S_n \to \frac{+\infty}{\text{roba} > 0} = +\infty \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

- per $a \in (-1,1)$, allora $|a^{n+1}| = |a|^{n+1} \to 0$, quindi $a^{n+1} \to 0$ quindi

$$S_n \to \frac{0-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$$

- per $a=-1$: al denom. c'è -2, al numeratore si alternano 0 e -2, quindi

$$S_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0$$ (sto sommando $1-1+1-1+1-1$

quindi la serie è indeterminata

- per $a<-1$, allora S_n non ha limite perché

$$S_{2n} = \frac{a^{2n+1} - 1}{a-1} \to \frac{-\infty}{\text{roba} < 0} = +\infty$$

$$S_{2n+1} = \frac{a^{2n+2} - 1}{a-1} \to \frac{+\infty}{\text{roba} < 0} = -\infty$$

quindi ancora una volta è indet.

$\boxed{\text{Conclusione}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1, 1) \\ \text{indeter.} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

—o—o—

$\boxed{\text{TEOREMI ALGEBRICI}}$ Siano a_n e b_n due successioni.

① $$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

tranne nei casi di $+\infty - \infty$ o quando una delle due a dx è indeterminata

② Se $\lambda \neq 0$, allora $$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Achtung! $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$ in generale

Non è vero nemmeno se a_n e b_n sono definitiv. nulli

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

Vengono fuori i prod. misti.

Dim di ① Pongo $c_n := a_n + b_n$

Chiamo S_n^a, S_n^b, S_n^c le somme parziali delle 3 serie.
Allora

$$S_n^c = S_n^a + S_n^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Andrebbe dim per induzione, ma brutalmente è una banalità

$$\begin{aligned} S_n^c &= c_0 + c_1 + \dots + c_n = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) + \dots + (a_n+b_n) \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= S_n^a + S_n^b \end{aligned}$$

A questo punto è il teo. sulla somma dei limiti

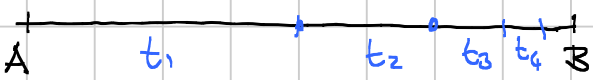
— o — o —

Dim. di ② : esercizio

— o — o —

Oss finale : Zenone e la sua freccia

La freccia deve fare infinite cose, quindi ci mette tempo infinito.



No: ci mette tempo $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, ma la somma può convergere

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)}_{\text{geometrica con } a = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

— o — o —