ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO
PROIEZIONI ORTOGONALI

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio

Si definisce

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \}$$

= i vettori che sono $\perp$ ad ogni vettore di V

Allora si verifica che $V^\perp$ è un s.sp. di $\mathbb{R}^n$ e

$$V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$$

A questo punto ogni vettore $x \in \mathbb{R}^d$ si scrive in modo unico come

$$x = v + w \qquad \text{con } v \in V \text{ e } w \in V^\perp$$

v: proiezione ortogonale di x su v

w: proiezione ortogonale di x su $V^\perp$

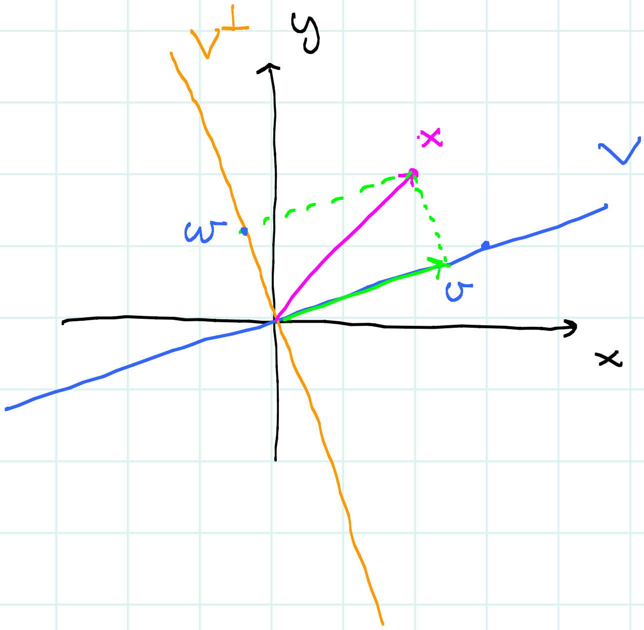
<u>Esempio 1</u> $\mathbb{R}^2$ e consideriamo $V = \text{Span}((3,1))$

Chi è $V^\perp$ e chi sono le proiezioni

V = retta $y = \frac{x}{3}$

$V^\perp$ = retta $y = -3x$

$= \text{Span}((-1,3))$



Domanda: dato $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, come trovo le sue componenti rispetto a V e $V^\perp$?

$\boxed{\text{Bovino}}$ $$(x,y) = \underbrace{a(3,1)}_{\substack{\uparrow \\ V}} + \underbrace{b(-1,3)}_{\substack{\uparrow \\ V^\perp}}$$

In realtà, essendo $(3,1)$ e $(-1,3)$ una base ortogonale, già sappiamo che

$$a = \frac{\langle (x,y),(3,1)\rangle}{\langle (3,1),(3,1)\rangle} = \frac{3x+y}{10} \qquad b = \frac{-x+3y}{10}$$

La componente rispetto a V è data dalla formula

$$\frac{3x+y}{10}(3,1) = \left(\frac{9x+3y}{10}, \frac{3x+y}{10}\right)$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su V

Quella su $V^\perp$ la posso ricavare o allo stesso modo, o imponendo che la somma sia l'identità, quindi diventa

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \leftarrow \text{proiezione ortogonale su } V^\perp$$

<u>Esempio nell'esempio</u> Prendiamo $(x,y) = (2,-5)$

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{10} \\ -\frac{51}{10} \end{pmatrix}$$

Cosa succede? La somma dei 2 è $(2,-5)$

Il primo sta in V

Il secondo sta in $V^\perp$

<u>Oss.</u> Se prendiamo la prima matrice $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

abbiamo che $\underbrace{\text{Im} = \text{Span}((3,1))}_{\text{``} V}$ e $\underbrace{\ker = \text{Span}((-1,3))}_{\text{``} V^{\perp}}$

Discorso opposto per l'altra matrice.

<u>Esempio 2</u> $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 4z = 0\}$
Trovare $V^{\perp}$ e le matrici di proiezione ortogonale

$V = \text{Span}((1,1,0),(4,0,-1))$ PIANO
$V^{\perp} = \text{Span}((1,-1,4))$ RETTA
↑ vettore ⊥ ai due precedenti

Ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è somma (in modo unico) di un $v \in V$ e di un $w \in V^{\perp}$. Come li trovo?

In teoria, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dovrei risolvere

$$(x,y,z) = \underbrace{a(1,1,0) + b(4,0,-1)}_{\in V} + \underbrace{c(1,-1,4)}_{\in V^{\perp}}$$

Se la base fosse ortogonale, sarebbe + comodo risolvere!
Conviene usare base ortogonale di V. Come me la procuro?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$: GS a partire da $(1,1,0)$ e $(4,0,-1)$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$: ex-misteriosa a partire da $(1,1,0)$ e $(1,-1,4)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (4,-4,-2) \rightsquigarrow (2,-2,-1)$$

e quindi ora risolviamo

$$(x,y,z) = a(1,1,0) + b(2,-2,-1) + c(1,-1,4)$$

Se voglio la proiezione su $V^\perp$ mi basta calcolare c

$$c = \frac{x-y+4z}{18}$$

e quindi $pr_{V^\perp}(x,y,z) = \frac{1}{18}(x-y+4z, -x+y-4z, 4x-4y+16z)$

La matrice è $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 16 \end{pmatrix} = pr_{V^\perp}$

La pr_V è la matrice che sommata a questa fa venire Id.

<u>Esempio 3</u> $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{x+y = z-w = 0}_{\text{Vuol dire}}\}$

Vuol dire

$x+y=0$
$z-w=0$

$\dim(V) = 2$ $\quad V = \mathrm{Span}((1,-1,0,0), (0,0,1,1))$

base ortogonale di V

$\dim(V^\perp) = 2$ per Grassmann. Serve una base.

$V^\perp = \mathrm{Span}((1,1,0,0), (0,0,1,-1))$ ← se non si vede ad occhio basta imporre prod. scalare nullo con la base scelta di V

Matrice di proiezione su V

$(x,y,z,w) = \underbrace{a(1,-1,0,0) + b(0,0,1,1)}_{\text{proiezione su } V} + c\ldots + d\ldots$

Essendo una base ortogonale

$a = \frac{x-y}{2}$ $\quad b = \frac{z+w}{2}$

Quindi

Proiezione su $V = \frac{1}{2}(x-y, -x+y, z+w, z+w)$

e quindi la matrice è
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{proiezione su } V$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{proiezione su } V^\perp$$

Se dò in pasto alle matrici un qualunque vettore (x, y, z, w) ottengo due vettori, uno in V e uno in $V^\perp$, che sommati danno (x, y, z, w).

— o — o —