Confronto tra definizione di integrale

Ingredienti : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

① $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f limitata)

② $\exists\, [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0 \quad \forall x \notin [a,b]$ (nulla fuori da un limitato)

Vogliamo definire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \quad \left[= \int_a^b f(x)\,dx \right]$

Tre possibili definizioni (anzi 3×2)

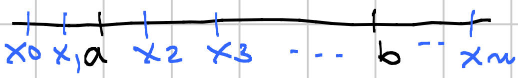
→ Integrale di DARBOUX unrestricted
→ Integrale di DARBOUX ortodosso
→ Integrale di RIEMANN

Def. Una partizione P è un insieme di numeri reali

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n \qquad (n \text{ può dipendere da } P)$$

Si dice che P "ingloba" un intervallo $[a,b]$ se $x_0 \leq a$ e $x_n \geq b$

Def. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa ① e ②, poniamo



$SF^+(f)$ = step functions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite a partire da una partizione P che ingloba $[a,b]$ e tali che
$$\varphi(x) \geq f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

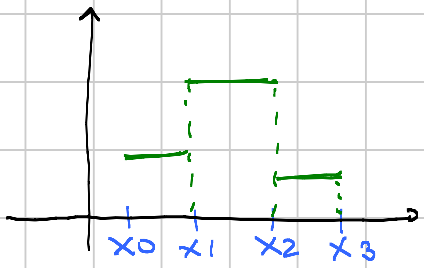
$SF^-(f)$ = come sopra richiedendo $\varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Una step function è una funzione tale che

$$\varphi(x) = \lambda_i \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

e

$$\varphi(x) = 0 \qquad \forall x \in (-\infty, x_0) \cup (x_m, +\infty)$$



DEF. DARBOUX UNRESTRICTED

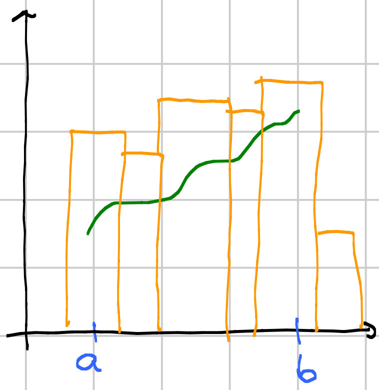
$$I_D^+(f) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \ : \ \varphi \in SF^+(f) \right\} = \text{int. superiore}$$

$$I_D^-(f) := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \ : \ \varphi \in SF^-(f) \right\} = \text{int. inferiore}$$

Vale sempre $I_D^+(f) \geq I_D^-(f)$. Se vale il segno di $=$, allora f è integrabile nel senso Darboux unrestricted.

Ovviamente $$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

DEF. DARBOUX ORTODOSSA



In ogni intervallino uso le step function con altezza uguale al sup e all'inf.

Data f come sempre, e data una partizione P, si pone

$$S_D^+(f,P) := \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \underbrace{\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{\text{+ piccola altezza utilizzabile}}$$

$$S_D^-(f,P) := \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Come prima si definisce

$$I^{+}_{D0}(f) := \inf \{ S_D^{+}(f,P) : P \text{ partizione che ingloba } [a,b] \}$$

corretto dopo video

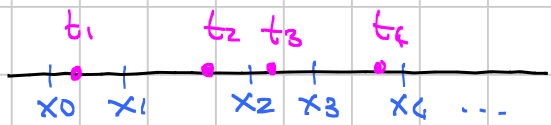
$$I^{-}_{D0}(f) := \sup \{ S_D^{-}(f,P) : P \ldots [a,b] \}$$

Vale sempre $I^{-}_{D0}(f) \leq I^{+}_{D0}(f)$ e se coincidono è fatta.

$\boxed{\text{DEF. DI RIEMANN}}$

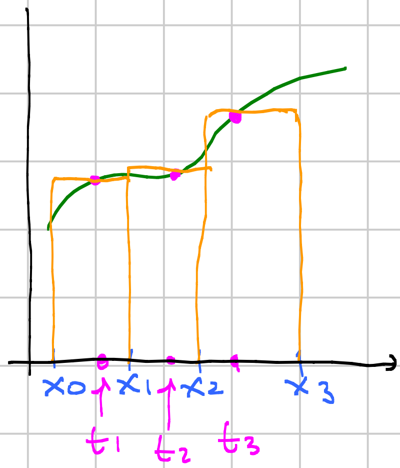
Def. Una partizione taggata (tagged partition) è una coppia (P,T) dove

- P è una partizione $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$
- $T = (t_1, \ldots, t_n)$ con $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$



Data una f come sempre, e data una partizione taggata (P,T), con P che ingloba $[a,b]$, si definisce

$$S_R(f,P,T) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \underbrace{f(t_i)}_{\text{altezza}}$$



Def. (diametro di una partizione)

Si definisce diametro di una partizione P la massima lunghezza degli intervalli che ne fanno parte, cioè

$$\text{diam}(P) := \max \{ (x_i - x_{i-1}) : i = 1, \ldots, n \}$$

Def. (Integrale di Riemann)
Una f con le solite proprietà si dice integrabile secondo Riemann se esiste un numero reale I (che poi sarà l'integrale) tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall (P,T) \text{ con } \operatorname{diam}(P) \leq \delta \text{ vale}$$
$$|I - S_R(f,P,T)| \leq \varepsilon$$

Oss ① Questa produce un integrale, ma non un integrale inferiore o superiore
(esercizio: provare a definire un integrale superiore alla Riemann)

② Non abbiamo mai usato la parola inf/sup, quindi tutto vale per funzioni a valori in uno sp. vettoriale.

TEOREMONE Sia f come al solito. Allora

f integrabile alla Darboux unrestricted $\Longleftrightarrow$
f " " " ortodosso $\Longleftrightarrow$
f " " Riemann
(e i valori degli integrali sono gli stessi).

Viene la stessa cosa anche se si usano partizioni con intervalli della stessa lunghezza.

— o — o —

Teorema Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Allora f è integrabile in $[a,b]$
(che è come dire che estesa a 0 fuori di $[a,b]$ risulta integrabile su $\mathbb{R}$).

Possiamo dimostrarlo alla Darboux ortodosso. Basta per ogni $\varepsilon>0$ trovare una partizione P tale che

$$\left| S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) \right| \le \varepsilon$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Parola magica: uniforme continuità (segue da Heine-Cantor)

Dato $\varepsilon>0$ scelgo $\delta>0$ che nell'unif. continuità corrisponde a $\frac{\varepsilon}{b-a}$, cioè

$$|x-y| \le \delta \implies |f(x)-f(y)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Scelgo una qualunque partizione con $x_0=a$, $x_n=b$ e diam $(P) \le \delta$ e dico che questa va bene.

$$S_D^+(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{M_i}$$

$$S_D^-(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\min\{\ldots\}}_{m_i}$$

Quindi

$$S_D^+(f,P) - S_D^-(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{(M_i - m_i)}_{\le \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

(sono i valori di f in due punti che distano $\le \delta$)

$$\le \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{\text{somma lunghezza}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$