ANALISI 1 — LEZIONE 004

Note Title 26/09/2016

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
Supponiamo che

(i) $P(0)$ è VERO (Passo base)

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ VERO $\Rightarrow$ $P(n+1)$ VERO (Passo induttivo)

Allora $P(n)$ è VERO $\forall n \in \mathbb{N}$.

Operativamente: (i) metto $n=0$ e controllo se è vero
(ii) Suppongo per ipotesi che per un certo $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ sia vero, ed usando questa ipotesi (più tutto il precorso) riesco a dimostrare che $P(n+1)$ è vero

Se (i) e (ii) riescono, allora $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Perché brutalmente funziona?
$P(0)$ è vera per (i)
Uso la (ii) con $n=0$. Deduco che $P(1)$ è vera.
Uso la (ii) con $n=1$. " " $P(2)$ è vera
E così via.

L'idea è la caduta delle tessere del domino

(i) cade la tessera 0-esima
(ii) se cade n, allora cade $n+1$

Variante: se sostituisco (i) con $P(2016)$ è vera, la tesi diventa $P(n)$ è vera per $n \geq 2016$.

Esempio 1 ① $\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \quad \forall a \neq +1$

$\boxed{\text{Dim. ②}}$ Passo base $n=0$: $0=0$ ☺

Passo induttivo $[n \Rightarrow n+1]$

Ipotesi: $0^2+1^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

quello di sopra con n+1 al posto di n

Tesi: $0^2+1^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+2+1)}{6}$

Dim. Punto alla CATENA DI UGUAGLIANZE

$$\underbrace{0^2+1^2+\dots+n^2}_{\text{so quanto fa}} + (n+1)^2 \underset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\frac{n(2n+1)+6n+6}{6}$$

$$= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Uguagliando 1° e ultimo abbiamo la tesi.

$\boxed{\text{Dim. di ③}}$ Passo base $n=0$: $1 = \frac{a-1}{a-1}$ ☺

$[n \Rightarrow n+1]$ Ipotesi $1+a+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Tesi $1+a+\dots+a^n+a^{n+1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. $\underbrace{1+a+\dots+a^n}_{\text{ipotesi}} + a^{n+1} \underset{\text{ipotesi}}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$

$$= \frac{\cancel{a^{n+1}}-1+a^{n+2}-\cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

Esempio 2 Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $3^n \geq n^2$.

$n=0 \quad 3^0 \geq 0$ ok

$n=1 \quad 3^1 \geq 1$ ok

$n=2 \quad 3^2 \geq 4$ ok

$n=3 \quad 3^3 \geq 9$ ok Congetturo che sia vero sempre.

$\boxed{\text{Dimostro per induzione}}$ Passo base: ☺

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $3^n \geq n^2$ Tesi: $3^{n+1} \geq (n+1)^2$

Dim.: catena di disuguaglianze

$$3^{n+1} \underset{\text{PCM}}{=} 3 \cdot 3^n \underset{\text{ipotesi} \cdot 3}{\geq} 3n^2 \underset{\text{spero}}{\geq} (n+1)^2$$

Controllo se ho sperato bene:

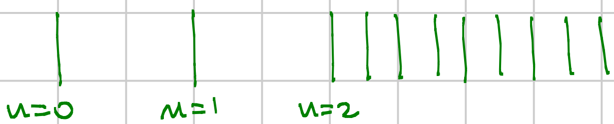
$$3n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$
$$3n^2 \overset{?}{\geq} n^2+2n+1$$
$$2n^2-2n-1 \overset{?}{\geq} 0$$

L'ultima è vera per valori esterni all'intervallo delle radici, cioè

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \qquad n \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Quindi da $n=2$ in poi è vera.

Il meccanismo di caduta è ok da $n=2$ in poi



Devo fare a mano $n=0, 1, 2$ e poi da $n=2$ in poi ci pensa l'induzione.

Esempio 3 Disuguaglianza di BERNOULLI

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > -1}$$

Dim per induzione

Passo base: $n=0$ $\qquad (1+x)^0 \geq 1$, $\quad 1 \geq 1$ ☺

[$n \Rightarrow n+1$] Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. $$(1+x)^{n+1} \underset{\text{PCM}}{=} (1+x)(1+x)^n \underset{\text{Hp}\cdot(1+x)}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

$$\underset{\text{PCM}}{=} 1+nx+x+nx^2 \underset{\text{PCM}}{=} 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

se in una somma elimino un termine ≥ 0, il risultato può solo scendere

—o —o —

Osservazione Ho usato che $x>-1$ quando ho moltiplicato l'ipotesi per $(1+x)$. Solo moltiplicando per quantità >0 si possono conservare i versi delle disuguaglianze.

—o —o —

Esercizio utile Provare a dim. che

$$(1+x)^n \geq nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq 0 \quad (o\ x>-1)$$

[Ovvia per Bernoulli ... ma provare a vedere che succede per ind.]

Esempio 4 Trovare per quali $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$2^n + 3^n + 4^n \le 5^n$$

$n=0$ $\quad 3 \le 1$ $\quad$ NO

$n=1$ $\quad 9 \le 5$ $\quad$ NO

$n=2$ $\quad 29 \le 25$ $\quad$ NO

$n=3$ $\quad 99 \le 125$ $\quad$ ☺ $\qquad$ Congettura: vera $\forall\, n \ge 3$.

Passo base $\quad n=3 \rightsquigarrow$ appena fatto

Passo induttivo $\quad$ Ipotesi: $\quad 2^n + 3^n + 4^n \le 5^n$

Tesi: $\quad 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1} \le 5^{n+1}$

Dim. Partiamo da destra

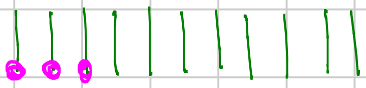
$$5^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PCM}}}{=} 5 \cdot 5^n \underset{\substack{\uparrow \\ 5\cdot\text{Hp}}}{\ge} 5\,(2^n + 3^n + 4^n)$$

$$= 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n$$

$$\ge 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n = 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1}$$

sacrifico un po' dei 5

Oss. Nel pass. induttivo non ho mai usato che $n \ge 3$



Le tessere sono vicine sempre, ma le tessere 0, 1, 2 non cadono

— o — o —

Utile: andare a vedere esempio finale del 2014-15.

— o — o —