ANALISI 1 — LEZIONE 111

Note Title 10/05/2025

$\boxed{\text{TEOREMA DELL'ASINTOTO}}$ (Versione a $+\infty$, quella a $-\infty$ è analoga)

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (definita su una semiretta destra)

Supponiamo che

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R} \qquad \text{(cioè } f \text{ ha asintoto orizz.)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} f'(t) = m \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{(cioè la derivata ha limite)}$$

Allora $m = 0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per Lagrange abbiamo che

$$f(n+1) - f(n) = \underbrace{1}_{(n+1)-n} \cdot f'(\underbrace{c_n}_{\text{p.to tra } n \text{ ed } n+1})$$

Osservo che $c_n \geq n$, quindi $c_n \to +\infty$, quindi $f'(c_n) \to m$
(qui ho usato che la derivata ha limite)
A sx invece $f(n+1) \to \ell$ e $f(n) \to \ell$. Quindi

$$\begin{array}{ccc} f(n+1) - f(n) & = & f'(c_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = \ell - \ell & = & m \end{array}$$

Quindi $m = 0$

Oss. Se non metto come ipotesi che esiste $\lim_{t \to +\infty} f'(t)$, come tesi ottengo solo che

$$\underbrace{\liminf_{t \to +\infty}}_{\text{MINLIM}} f'(t) \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \underbrace{\limsup_{t \to +\infty}}_{\text{MAXLIM}} f'(t) \geq 0$$

<u>Oss.</u> Può succedere che ci sia asintoto orizz, ma la derivata non ha limite.

Basta prendere $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$. Allora $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \sin(x^2)$$

$$= 2\cos(x^2) - \frac{1}{x^2} \sin(x^2)$$

Quindi $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ non esiste. Inoltre

$$\limsup_{x \to +\infty} f'(x) = 2 \quad \text{e} \quad \liminf_{x \to +\infty} f'(x) = -2$$

— o — o —

<u>Back to lezione precedente</u>

Dimostriamo che $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$

Per monotonia sappiamo che $u(t) \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Se per assurdo fosse $l \in \mathbb{R}$, allora dall'eq. avremmo che

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) = \arctan l = m$$

Ma allora per il teo. asintoto deve essere $m = 0$, cioè $\arctan l = 0$, cioè $l = 0$, il che non è possibile perché $u(0) = 7$ e poi cresce.

Dimostriamo che $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$

Per monotonia e positività sappiamo che $u(t) \to l \in [0, +\infty)$.
Ma allora $u'(t) \to \arctan l$. Per il teo. dell'asintoto
$\arctan l = 0$ e quindi $l = 0$. ☺

Esempio $\begin{cases} u'(t) = \sin u(t) \\ u(0) = 4 \end{cases}$ ← ma in realtà studiamo tutte le soluzioni

Fatto 1 La soluzione esiste unica e $\boxed{\text{globale}}$ nel passato e nel futuro

FATTO GENERALE $u'(t) = \text{MOSTRO}$

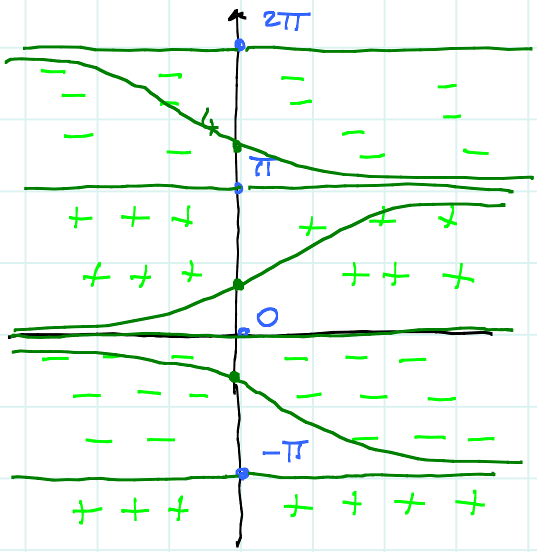
Se mostro è definito ovunque non ci può essere break-down

Se mostro è limitato, la soluzione $u(t)$ è compresa tra due rette, quindi non può avere blow-up in tempo finito.

Se sono verificate entrambe, allora gratis c'è esistenza globale

FATTO 2 Ci sono tutte le soluzioni costanti

$$u(t) \equiv k\pi \quad , \text{ con } k \text{ intero}$$



Quindi la soluzione con $u(0) = 4$ sta sempre tra π e 2π

FATTO 3 La nostra soluz. è strett. decr.

Infatti $u'(t) = \sin u(t) < 0$ quando $\pi < u(t) < 2\pi$

FATTO 4 $\lim_{t \to +\infty} u(t) = \pi$ e $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 2\pi$

Vediamo a $+\infty$. Sappiamo che $u(t) \to \ell \in [\pi, 2\pi]$ per monotonia

Ma allora

$$u'(t) = \sin u(t) \to \sin \ell$$

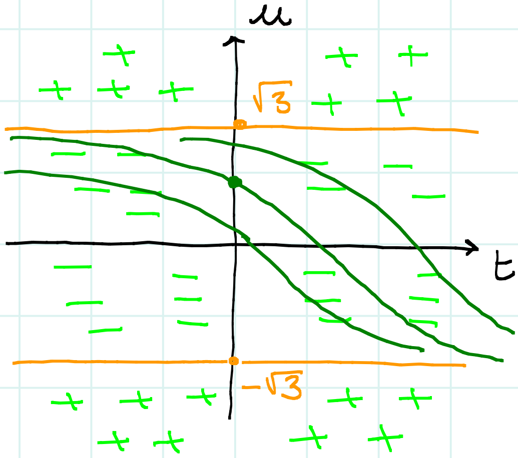
Per teo. asintoto $\sin \ell = 0$, cioè $\ell = \pi$ oppure $\underline{\ell = 2\pi}$

NO perché $u(0) = 4$ e poi ↓

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 - 3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Questa volendo si integra, ma faccio finta di non saperlo

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Vediamo dove u' è + o −



La situazione è quella in figura

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ C'è esistenza globale nel passato e nel futuro

NO Break down perché u^2-3 è definita ovunque

NO BLOW UP perché $-\sqrt{3} \leq u(t) \leq \sqrt{3}$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $u(t)$ è strett. decrescente con

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = \sqrt{3}$$

Facciamo a $-\infty$. Sappiamo che $u(t) \to \ell \in [1, \sqrt{3}]$ per monotonia e limitatezza.

Ma allora $u'(t) \to \ell^2 - 3 \rightsquigarrow \ell^2 = 3 \rightsquigarrow \ell = \pm\sqrt{3}$

e l'unico compatibile è $\sqrt{3}$.

Stessa cosa a $+\infty$.

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Vediamo la convessità.

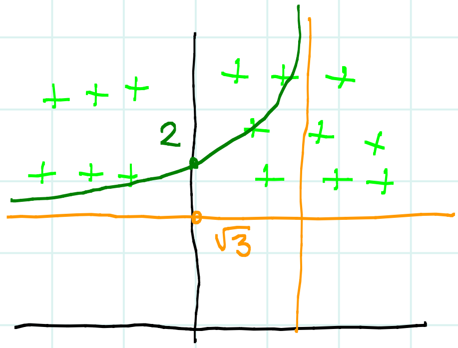
$$u''(t) = [u'(t)]' = [u^2(t) - 3]' = 2u(t)\,u'(t) = 2u(t)\underbrace{[u(t)^2 - 3]}_{<0}$$

dipende dal segno di $u(t)$

Dove $u(t) > 0 \rightsquigarrow u''(t) < 0$

Dove $u(t) < 0 \rightsquigarrow u''(t) > 0$

Cosa succede se partiamo con $u(0) = 2$



Nel passato: esistenza globale con

$u(t) \to \sqrt{3}$

Nel futuro: blow-up per colpa

dell' esponente 2

— o — o —