Travaux Pratiques n^o 3 – Mercredi 7 décembre 2016
EF P1 conformes – Conditions aux limites de type Robin

1 Problème EF avec conditions aux limites de Robin

Fichiers nécessaires : `DOM2.amdba`.

Dans cet exercice, on souhaite mettre en œuvre la méthode des éléments finis sur le problème de Poisson mais avec des conditions aux limites de Robin :

$$-\nabla \cdot (\kappa(.)\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\kappa(.)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(u - u_a) = g \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \tag{2}$$

avec $\alpha > 0$, $u_a \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $g \in L^2(\Gamma)$. En multipliant (1) par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, puis en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \kappa(.)\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma (\alpha(u - u_a) - g)\, v\, d\sigma = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

On obtient ainsi un système abstrait

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V = H^1(\Omega)$$

avec

$$a(u, v) = \int_\Omega \kappa(.)\nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Gamma \alpha u v\, d\sigma$$

et

$$\ell(v) = \int_\Omega f v\, dx + \int_\Gamma (g + \alpha u_a) v\, d\sigma.$$

Mettre en œuvre la méthode des éléments finis P1 conformes sur cet exemple :

1) Reprendre la fonction `assemb_A(kappa,mesh)` pour l'étendre et prendre en compte le terme de bord dans $a(.,.)$ ci-dessus. Renommer la fonction en

`assemb_A_Robin(kappa,alpha,mesh)`.

De la même façon, reprendre la fonction `assemb_f(fun,mesh)`, la renommer ici

`assemb_f_Robin(f,alpha,ua,g,mesh)`

pour prendre en compte le terme de bord dans $\ell(v)$ ci-dessus.

2) Application. Considérer $\alpha = 1$, $f(x, y) = -1$, $g(x, y) = 0$, $u_a(S) = 0$ si zone(S)=1, $u_a(S) = 2$ si zone(S)=2 et $u_a(S) = -1$ si zone(S)=3.

3) Pénalisation. Que se passe-t-il à votre avis quand $\alpha \to +\infty$? Étudier la solution numérique pour $\alpha = 10^8$ (on gardera les valeurs de la question précédente pour les quantités autres que α).