# Homework 9 NP问题

教材习题：9.5，9.10，9.15, 9.17

## 9.5

### 1

从独立集到团的变换：
对于独立集的实例图G=(V,E)，构造图G'=(V,E')，其中E'为G中所有边的补集，即所有G中有的边G'中都没有，G'中没有的边G中都有。这样，G中的独立集中所有点都不相连，则对应G‘中的点的边都相连。故G中的最大独立集,就是G'中的最大团。
显然构造的G'是多项式时间内可构造的，因此变换是多项式时间内可构造的。

### 2

从VC到团的变换：
对于VC的实例图G=(V,E)，构造图G'=(V,E')，其中E'为G中所有边的补集。这样G的最小点覆盖集的点补集，该点补集内的所有点都不相连，则对应G'中的点的边都相连。故G中的最小点覆盖集的点补集,就是G'中的最大团。
显然变换在多项式时间内可构造。

### 3

从HC到子图同构的变换：
对于HC的实例图G=(V,E)，构造两个图,第一个G1=G,第二个G2与G中点相同，G2中的边为这些点构成的顺序连接，即构成一个圈。则G中如果有哈密顿回路，则哈密顿回路形成的子图就同构于G2，也就是G'中的子图同构。构成变换。
显然变换在多项式时间内可构造。

### 4

从团到0-1整数规划的变换：
首先题中对0-1整数规划的描述等价于在m个线性约束下，试求一个目标线性函数能否大于D
对于团的实例图G=(V,E)，问是否存在大于m的团：构造0-1整数规划的实例，目标函数要求为$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq m$，约束条件为对于所有G中不存在边的两点$x_i, x_j$，应有$x_i + x_j \leq 1$，。则G

中的m最大团的可能性问题就是这个0-1整数规划的解。
显然变换在多项式时间内可构造。

# 9.10

由于$\Pi'$是NP完全的，则其也是NP难的，则由于$\Pi' \leq_p \Pi$,则$\Pi$也是NP难的。又由于$\Pi \in NP$，则$\Pi$是NP完全的。

# 9.15

似乎接下来两道题的意思都是证明某个问题是NP完全的。
证明子图同构问题是NP完全的：
首先根据9.5中的变换，团问题可以多项式时间内变换为子图同构问题，即团问题$\leq_p$子图同构问题。又由于团问题是NP完全的，所以子图同构问题是NP难的。
下面要验证子图同构是否属于NP，即对于子图同构问题的一个实例的解，能在多项式时间内验证。
但这里需要明确，子图同构问题的解应当包含的是确切的子图到第二张图的映射，则只需要照着点的映射，检查所有边的存在与否是否都正确的映射到了第二张图的边上，即可在多项式时间($n^2$)内验证。
因此这个问题是NP完全的。
PS.
如果解只给出了子图而没有给映射，则存在问题，即是否能在多项式时间内判断两个图是否同构。
查了一下，似乎这个问题并没有被证明是NPC的，也没有被证明是P的，因此任意图不一定能在多项式时间内判断是否同构。

# 9.17

首先哈密顿通路问题是NP完全的。
则一个哈密顿通路问题的实例图G=(V,E)，可以简单的转换为一个最长通路问题，即在G中找到边数不少于|V|-1的通路。因为哈密顿通路问题是NP完全的，而哈密顿通路问题可以多项式时间内转换为最长通路问题，则这个问题是NP难的。
同时对于任何给出的解，验证解即验证给出的通路是否满足条件，即显然可以在K时间内验证，所以这个问题是属于NP的。综上最长通路问题是NP完全的。