Homework 10 近似算法

教材习题：10.1，10.3，10.5

> 喻勃洋 2000011483

10.1

其近似性能较差。考虑一个最坏情况，即图中所有边共用一个顶点，另一个定点各不相同，那么最小覆盖集的最优解为1，而该算法的近似解可能为每次选中的都是不公用的顶点，因此当总共n个点，得到了n-1的近似解。
此时近似比为n-1，因此由于n的任意性，该算法不具有常数近似比。
同时由于该算法不可能给出n的解，因为总存在最后一个点其所有边都已经被排除过了，总有一点不会被选中，所有至多选中n-1个点，上述实例是一个紧实例，算法的近似比为n-1。

10.3

问题等价于证明对于任何实例I有最优最小箱数 $OPT = s$ ，FF算法都不可能打开第 $2s$ 个箱子。
反证法，假设FF算法的运行中某个 w_i 重的物体使得第 $2s$ 个箱子被打开了。则说明前 $2s-1$ 个箱子里所有的空余空间都小于 w_i ，也就是说其被占用的重量大于 $B-w_i$ 。

- 若 $w_i \le \frac{B}{2}$ ，则说明前 $2s-1$ 个箱子的总占用

  $$f_{occured} > (B-w_i)*(2s-1)$$

  则已出现物品的总重量是

  $$w_{总} = f_{occured} + w_i > (B-w_i)*(2s-1) + w_i = (2s-1)B - (2s-2)w_i \ge sB$$

  这说明总重量大于 sB ，因而不可能在s个箱子内全部装下，与 $OPT = s$ 矛盾。
- 若 $w_i > \frac{B}{2}$ ，同上文，总物品体积不能超过 sB ，则说明前 $2s-1$ 个箱子中每个箱子的占用都小于 $\frac{B}{2}$ ，空余都大于 $\frac{B}{2}$ ，而因此其中的物品重量都小于 $\frac{B}{2}$，因此这些处在较大序号箱子的物品应当是可以装入更小序号的箱子的空余中的，这与算法的描述不符，矛盾。

综上两种情况，说明FF算法都不可能打开第 $2s$ 个箱子，因此对于任何实例I有最优最小箱数 $OPT(I)$ ，都有

$$FF(I) < 2OPT(I)$$

10.5

MCUT算法的终止情况是两个集中的所有点都满足其关联的割边数量大于等于非割边数量，因此将所有点的割边数量和非割边数量分别加起来，应该分别为割边和非割边数量的两倍（每条边都被两端的点各统计了一

次），应有

$$2num(e \in (V_1, V_2)) \geq 2num(e \notin (V_1, V_2))$$

也即

$$num(e \in (V_1, V_2)) \geq num(e \notin (V_1, V_2))$$

而

$$num(e \in (V_1, V_2)) + num(e \notin (V_1, V_2)) = |E|$$

因此

$$num(e \in (V_1, V_2)) \geq \frac{|E|}{2}$$

也即

$$|E| \leq 2num(e \in (V_1, V_2))$$

而显然真正的最大割数量

$$OPT(I) \leq |E|$$

因此

$$OPT(I) \leq 2num(e \in (V_1, V_2))$$

也即

$$OPT(I) \leq 2MCUT(I)$$