Eigenvalues and Eigenvectors 特征值和特征向量是什么?

在建立数学模型时，我们想要找到输入值x 和目标输出值y 之间的联系。但是有的时候我们的x非常复杂，例如有100+个属性作为输入，那么这个时候无论建立什么模型，计算量都会非常的大。

而特征向量的目的，就是用更少的维度来代表这些数据。特征向量和特征值的定义为：

$$Av = \lambda v$$

A是一个$n \times n$ 的矩阵，v是一个$n \times 1$ 的向量，λ 是一个常数。低纬度的v可以代表高维度的A，因此使用特征向量就可以减少了计算同时保留了原数据的特征。

一些应用：

- PCA (Principal component analysis)重要过程就是计算协方差矩阵的特征向量
- 在一些人脸识别技术例如EigenFaces里面也会用到

如何计算

对于任意一个方阵 A, 存在一个特征值λ和特征向量v，使得下列等式成立：

$$Av = \lambda v$$

接下来我们加入一个单位矩阵I

$$Av = \lambda I v$$

稍微换一下位置

$$Av - \lambda I v = 0$$

如果v不等于0 的话，我们可以用下面的式子求出λ

$$|A - \lambda I| = 0$$

我们用个例子来说明如何计算，比如下面这个矩阵

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

的$|A - \lambda I| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -6 - \lambda & 3 \\ 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

然后计算行列式：

$$(-6-\lambda)(5-\lambda)-3\times 4=0$$

$$\lambda=-7\ or\ 6$$

从这里可以知道，特征值有的时候不止一个

接下来我们来计算特征向量

首先

$$\begin{bmatrix}-6 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

相乘之后我们得到两个方程式：

$$\begin{gathered}-6x+3y=6x\\ 4+5y=6y\end{gathered}$$

化简一下：

$$\begin{gathered}-12x+6y=0\\ 4x-y=0\end{gathered}$$

两个式子其实都是$y=4x$ 因此特征向量是

$$\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$$

reference

What are Eigenvalues and Eigenvectors?

https://medium.com/fintechexplained/what-are-eigenvalues-and-eigenvectors-a-must-know-concept-for-machine-learning-80d0fd330e47

Math is fun

https://www.mathsisfun.com/algebra/eigenvalue.html