

Copyright pluttan&fiixii

Привет! Это Трубусы и Уточка, мы создаем свою ботву, этот файл малая ее часть.
Пользоваться и распространять файлы конечно же можно. Если вы нашли ошибку в файле, можете
исправить ее в исходном коде и подать на слияние или просто написать в issue.
Так же вы можете купить распечатанную версию данного файла в виде книжки.

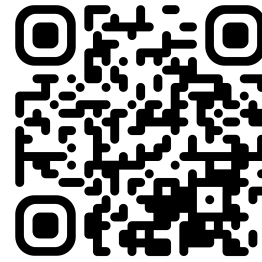
По всем вопросам писать в ВК.

Приятного бота)

GitHub: <https://github.com/pluttan>

VK: <https://vk.com/pluttan>

VK: https://vk.com/f_i_i_x_i_i



https://t.me/botva_its6

Подготовка к РК2

Аналитическая геометрия

Над файлом работали:
pluttan & fiixii

1 Базовые теоретические вопросы

1.1 Дать определение единичной, нулевой, верхней треугольной и нижней треугольной матрицы.

Единичная матрица - квадратная матрица, для элементов которой выполняется следующее

$$\text{условие: } a_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

т.е. элементы главной диагонали равны 1, остальные 0.

Обозначение $[E]$

Нулевая матрица - матрица, все элементы которой равны 0, т.е. $a_{ij} = 0, \forall i, j$

Обозначение $[\Theta]$

Верхняя треугольная матрица - квадратная матрица, все элементы под главной диагональю которой равны 0.

Нижняя треугольная матрица - квадратная матрица, все элементы над главной диагональю которой равны 0.

1.2 Дать определение равенства матриц.

Матрицы называются **равными**, если:

- 1) они имеют одинаковый тип,
- 2) У них совпадают все соответствующие элементы.

$$\begin{aligned} &\text{Для } A = (a_{ij}) \text{ и } B = (b_{ij}) \\ A = B &\iff A, B \in M_{mn}(\mathbb{R}) \text{ и } a_{ij} = b_{ij} \forall ij \end{aligned}$$

1.3 Дать определение суммы матриц и произведения матрицы на число.

Сумма матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного типа $m \times n$ - матрица $C = (c_{ij})$ того же типа $m \times n$ с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведение матрицы $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ - матрица $C = (c_{ij})$ того же типа $m \times n$ с элементами $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

1.4 Дать определение операции транспонирования матриц.

Для матрицы $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ ее **транспонированной матрицей** называется матрица $A^T = (c_{ij})$ типа $n \times m$ с элементами $c_{ij} = a_{ji}$

При транспонировании матрицы ее строки (столбцы) становятся столбцами (строками) с теми же номерами.

1.5 Дать определение операции умножения матриц.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ и матрицы $B = (b_{ij})$ типа $n \times p$ называется матрица $C = (c_{ij})$ типа $m \times p$ с элементами $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \dots & \mathbf{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b}_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b}_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \mathbf{b}_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & \mathbf{c}_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$ (как правило).

1.6 Дать определение обратной матрицы.

Пусть A - квадратная матрица порядка n . Матрица B называется **обратной** к матрице A , если:

1. Она того же порядка n ,
2. $AB = BA = E$, где E - единичная матрица.

1.7 Дать определение минора. Какие миноры называются окаймляющими для данного минора матрицы?

Минором порядка k матрицы A типа $m \times n$ называется определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.

Обозначение: минор $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ составлен из элементов, расположенных на пересечении строк i_1, \dots, i_k и столбцов j_1, \dots, j_k , причем $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_k$.

Минор M' матрицы A называется **окаймляющим** для минора M , если он получается из M добавлением одной новой строки и одного нового столбца, причем эти строка и столбец входят в матрицу A и не входят в минор M .

1.8 Дать определение базисного минора и ранга матрицы.

Ранг матрицы - число, равное максимальному порядку среди ее ненулевых миноров.

Минор M матрицы A называется **базисным**, если

- 1) он не равен нулю,
- 2) его порядок равен RgA .

У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Элементарные преобразования матриц

СЛАУ называется совместной (несовместной), если она имеет (не имеет) решение.

1.16 Привести пример, показывающий, что умножение матриц некоммукативно.

Некоммутативность произведения матриц: $AB \neq BA$ (как правило, но бывают исключения)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} : AB = (11), BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

1.17 Сформулировать свойства ассоциативности умножения матриц и дистрибутивности умножения относительно сложения.

Свойства умножения матриц:

- 1) Ассоциативность $(AB)C = A(BC)$.
- 2) Дистрибутивность $(A + B)C = AC + BC$.

1.18 Сформулировать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.

Система $AX = B$ совместна \iff ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы, т.е.

$$Rg(A|B) = RgA$$

1.19 Сформулировать теорему о базисном миноре.

Теорема о базисном миноре:

1. Базисные строки (столбцы) матрицы A , соответствующие любому базисному минору M , линейно независимы.
2. Любые строки (столбцы) матрицы A , не входящие в базисный минор M , являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

1.20 Сформулировать теорему о свойствах решений однородной СЛАУ.

Если $X^{(1)}, \dots, X^{(s)}$ - решения однородной СЛАУ, то любая их линейная комбинация $X = \alpha_1 X^{(1)} + \dots + \alpha_s X^{(s)}, \alpha_i \in \mathbb{R}$, тоже является решением.

1.21 Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$,

$X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ - ФСР соответствующей однородной СЛАУ $AX = \Theta$.

Тогда любое решение X неоднородной СЛАУ $AX = B$ можно представить в виде:

$$X = X^0 + c_1 X^{(1)} + \dots + c_k X^{(k)},$$

где $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$.

1.22 Сформулировать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Пусть $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ - любая ФСР однородной СЛАУ $AX = \Theta$.

Тогда любое решение X этой системы можно представить как линейную комбинацию ФСР:

$$X = c_1 X^{(1)} + \dots + c_k X^{(k)}, \text{ где } c_i \in \mathbb{R}$$

1.23 Сформулировать теорему об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях матрицы.

При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

1.24 Сформулировать критерий существования обратной матрицы.

Для квадратной матрицы A \exists обратная матрица $A^{-1} \iff \det A \neq 0$ (т.е. когда A - невырожденная матрица).

2 Теоретические вопросы повышенной сложности

2.1 Доказать теорему о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ и теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Теорема (о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ).

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$, тогда:

X - решение этой же СЛАУ $\iff X = X^0 + Y$, где Y - некоторое решение соответствующей однородной СЛАУ $AX = \Theta$.

Доказательство

(\Rightarrow)

Пусть X^0, X - решения неоднородной СЛАУ $AX = B$. Рассмотрим $Y = X - X^0$ и найдем AY :

$AY = A(X - X^0) = AX - AX^0 = B - B = \Theta$, т.е. $AY = \Theta$, а значит, Y - решение однородной СЛАУ $AX = \Theta$ и $X = X^0 + Y$.

(\Leftarrow)

Пусть X^0 - решение неоднородной СЛАУ $AX = B$ (т.е. $AX^0 = B$),

а Y - решение однородной СЛАУ $AX = \Theta$ (т.е. $AY = \Theta$).

Рассмотрим $X = X^0 + Y$ и найдем AX :

$AX = A(X^0 + Y) = AX^0 + AY = B + \Theta = B$, т.е. X - решение неоднородной СЛАУ $AX = B$.

ЧТД

Теорема (о структуре общего решения неоднородной СЛАУ).

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$,

$X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ - ФСР (фундаментальная система решений) соответствующей однородной СЛАУ $AX = \Theta$.

Тогда любое решение X неоднородной СЛАУ $AX = B$ можно представить в виде:

$$X = X^0 + c_1 X^{(1)} + \dots + c_k X^{(k)}, \text{ где } c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k.$$

Доказательство

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX = B$, X - любое решение той же системы.

Тогда по теореме о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ: $X = X^0 + Y$, где Y - некоторое решение соответствующей однородной СЛАУ.

По теореме о структуре общего решения однородной СЛАУ:

$Y = c_1 X^{(1)} + \dots + c_k X^{(k)}$, где $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ - ФСР однородной СЛАУ, $c_i \in \mathbb{R}$. Следовательно $X = X^0 + c_1 X^{(1)} + \dots + c_k X^{(k)}$.

ЧТД

2.2 Доказать свойства ассоциативности и дистрибутивности умножения матриц.

Свойство ассоциативности умножения матриц: $(AB)C = A(BC)$

Доказательство

$$\underbrace{(AB)C}_D = \underbrace{A(BC)}_F$$

Докажем, что матрицы X и Y :

- 1) имеют одинаковый тип,
- 2) их соответствующие элементы равны: $x_{ij} = y_{ij}$

матрицы	типа
$A = (a_{ij})$	$m \times n$
$B = (b_{ij})$	$n \times k$
$D = (d_{ij})$	$m \times k$
$C = (c_{ij})$	$k \times l$
$F = (f_{ij})$	$n \times l$
$X = (x_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{l}$
$Y = (y_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{l}$

$$x_{ij} = \sum_{r=1}^k d_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sr} \right) c_{rj} = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sr} c_{rj} \right),$$

$$y_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} f_{sj} = \sum_{s=1}^n \left(a_{is} \left(\sum_{r=1}^k b_{sr} c_{rj} \right) \right) = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^k a_{is} b_{sr} c_{rj} \right) = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sr} c_{rj} \right), \text{ т.е. } x_{ij} = y_{ij}.$$

ЧТД

Свойство дистрибутивности умножения матриц: $(A + B)C = AC + BC$

Доказательство

$$\underbrace{(A+B)C}_X = \underbrace{(AC)}_Z + \underbrace{(BC)}_W$$

Докажем, что матрицы Y и $Z + W$:

- 1) имеют одинаковый тип,
- 2) их соответствующие элементы равны: $y_{ij} = z_{ij} + w_{ij}$

матрицы	типа
$A = (a_{ij})$	$m \times n$
$B = (b_{ij})$	$m \times n$
$X = (x_{ij})$	$m \times n$
$C = (c_{ij})$	$n \times k$
$Y = (y_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{k}$
$Z = (z_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{k}$
$W = (w_{ij})$	$\mathbf{m} \times \mathbf{k}$

$$y_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^n (a_{ir} + b_{ir}) c_{rj} = \sum_{r=1}^n (a_{ir} c_{rj} + b_{ir} c_{rj}) = \sum_{r=1}^n a_{ir} c_{rj} + \sum_{r=1}^n b_{ir} c_{rj} = z_{ij} + w_{ij}.$$

ЧТД

2.3 Доказать теорему о базисном миноре.

Теорема о базисном миноре

1. Базисные строки (столбцы) матрицы A , соответствующие любому базисному минору M , линейно независимы.
2. Любые строки (столбцы) матрицы A , не входящие в базисный минор M , являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

Доказательство (для строк)

Пусть матрица $A = (a_{ij})$ имеет тип $m \times n$, пусть $Rg A = r$ и пусть M - базисный минор матрицы A .

Рассмотрим строки, на которых построен M . Это базисные строки матрицы A .

1. Докажем, что базисные строки линейно независимы.

Пусть от противного они линейно зависимы $\xRightarrow{\text{по критерию}}$ хотя бы одна строка из них в матрице A является линейной комбинацией остальных \Rightarrow в миноре M хотя бы одна строка является линейной комбинацией остальных $\xRightarrow{\text{по св-ву } \det} \det M = 0$,

Противоречие, т.к. M - базисный минор.

2. Докажем, что любая строка матрицы A , не входящая в базисный минор M , является линейной комбинацией базисных строк.

Пусть базисный минор M расположен в верхнем левом углу матрицы A :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

Добавим к M любую i -ю **не базисную** строку и любой j -й столбец (возможно даже базисный):

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}$$

Порядок Δ_j равен $r + 1$, следовательно $\Delta_j = 0$.

Разложим Δ_j по последнему столбцу:

$\Delta_j = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$, где A_{kj} - это алгебраические дополнения элементов a_{kj} в Δ_j .

Заметим, что

- 1) эти алгебраические дополнения A_{kj} не зависят от номера j , т.к. при их вычислении j -й столбец вычеркивается.
- 2) $A_{ij} = (-1)^{(r+1)+(r+1)}M = (-1)^{2(r+1)}M = M \neq 0$,

Выразим элемент a_{ij} :

$$a_{ij} = \underbrace{\frac{-A_{1j}}{M}}_{b_1} a_{1j} - \dots - \underbrace{\frac{-A_{rj}}{M}}_{b_r} a_{rj}, \text{ т.е.}$$

$$a_{ij} = b_1 a_{1j} + \dots + b_r a_{rj}, \text{ где } b_1, \dots, b_r \text{ не зависят от номера } j.$$

Если поставить на место j -го столбца в Δ_j его 1-й столбец, то получим

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r1} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{i1} \end{pmatrix}$$

$$\text{и } \Delta_1 = a_{11}A_{11} + \dots + a_{r1}A_{r1} + a_{i1}A_{i1},$$

выразим элемент a_{i1} :

$$a_{i1} = \underbrace{\frac{-A_{1j}}{M}}_{b_1} a_{11} - \dots - \underbrace{\frac{-A_{rj}}{M}}_{b_r} a_{r1}, \text{ т.е.}$$

$$a_{i1} = b_1 a_{11} + \dots + b_r a_{r1}, \text{ (с теми же коэффициентами } b_1, \dots, b_r).$$

Аналогично ставим на место j -го столбца в Δ остальные столбцы по очереди и будем получать аналогичные равенства, в частности,

$$a_{ir} = b_1 a_{1r} + \dots + b_r a_{rr}.$$

Следовательно, вся i -я строка матрицы A является линейной комбинацией ее первых r строк (базисных) с коэффициентами b_1, \dots, b_r .

2.4 Доказать критерий существования обратной матрицы.

критерий существования обратной матрицы

Для квадратной матрицы A \exists обратная матрица $A^{-1} \iff \det A \neq 0$ (т.е. когда A - невырожденная матрица).

Доказательство

(\Rightarrow)

Пусть $\exists A^{-1}$. Докажем, что $\det A \neq 0$.

По определению обратной матрицы,

$$AA^{-1} = E.$$

Возьмем \det от левой и правой части:

$$\det(AA^{-1}) = \det E$$

По свойствам \det :

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1,$$

произведение чисел равно 1 $\rightarrow \det A \neq 0, \det(A^{-1}) \neq 0$.

(\Leftarrow)

Пусть $\det A \neq 0$.

1. Построим матрицу A^{-1} :

1) Найдем \forall алгебраические дополнения A_{ij} и составим из них матрицу (A_{ij}) .

2) Транспонируем матрицу (A_{ij}) :

$$(A_{ji}) = (A_{ij})^T$$

3) Рассмотрим матрицу $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$, т.е. $B = \frac{1}{\det A}(A_{ji})$

2. Проверим, что построенная матрица B и будет A^{-1} .

В самом деле, B - квадратная и осталось проверить, что $AB = E$ (и $BA = E$).

Обозначим AB через $C = (c_{ik})$

$$\text{Найдем } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{A_{kj}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

$$\text{т.к. } \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \det A, i = k \\ 0, i \neq k \text{ (по т. о "фальшивом" разложении определителя*)} \end{cases}$$

Следовательно, $C = E$, и $AB = E$. Аналогично показывается, что $BA = E$. Из 1, 2 $\Rightarrow B$ является A^{-1} для A .

2.5 Доказать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.

Критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ

Система $AX = B$ совместна \iff ранг расширенной матрицы = рангу матрицы, т.е. $Rg(A|B) = RgA$

Доказательство

(\Rightarrow)

Пусть система $AX = B$ совместна. Докажем, что $Rg(A|B) = RgA$.

1) Столбцы матрицы A являются столбцами матрицы $(A|B) \Rightarrow RgA \leq Rg(A|B)$

2) Докажем, что $RgA \geq Rg(A|B)$

Т.к. система $AX = B$ совместна, то \exists ее решение x_1, \dots, x_n :

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ - базисные столбцы в матрице $A \Rightarrow$ по теореме о базисном миноре, столбцы $\vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n$ выражаются через столбцы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \Rightarrow$ столбец \vec{b} выражается через $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ - базисные столбцы в матрице $(A|B)$.

Это означает, что число базисных столбцов в матрице $(A|B)$ не может быть больше числа базисных столбцов в матрице $A \Rightarrow Rg(A|B) \leq RgA$.

Из 1), 2) $\Rightarrow Rg(A|B) = RgA$.

(\Leftarrow)

Пусть $Rg(A|B) = RgA$.

Докажем, что система $AX = B$ совместна.

Пусть M - базисный минор в A ($M \neq 0$ и максимального порядка) $\Rightarrow M$ будет базисным минором в $(A|B)$.

Пусть M расположен в столбцах $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ в $A \Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$, будут базисными столбцами и в A и в $(A|B)$.

Выразим через них столбец \vec{b} (это можно сделать по теореме о базисном миноре):

$$x_1^0 \vec{a}_1 + \dots + x_k^0 \vec{a}_k = \vec{b} \text{ (с какими-то } x_1^0, \dots, x_k^0)$$

Дополним это равенство:

$$x_1^0 \vec{a}_1 + \dots + x_k^0 \vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + \dots + 0\vec{a}_n = \vec{b}$$

Эта запись является векторной записью СЛАУ $AX = B$;

Она означает, что $x_1 = x_1^0, \dots, x_k = x_k^0, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0$ является решением СЛАУ $AX = B$, т.е. система совместна.

ЧТД

2.6 Доказать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ.

Теорема (о существовании ФСР однородной СЛАУ)

Пусть дана однородная СЛАУ $AX = \Theta$ с n неизвестными x_1, \dots, x_n , и пусть $RgA = r < n$.

Тогда для нее \exists ФСР (т.е. \exists набор из $k = n - r$ линейно независимых решений $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$)

Доказательство

(1) Построение ФСР

1) Дана система $AX = \Theta$ с n неизвестными x_1, \dots, x_n , и, $RgA = r < n$.

Можно считать, что базисным минором порядка r является $M_{1..r}^{1..r}$

\Downarrow по т. о базисном миноре

Строки $(r + 1)$ -я, ..., n -я матрицы A являются линейными комбинациями базисных строк 1-й, ..., r -й \Rightarrow уравнения $(r + 1)$ -е, ..., n -е можно отбросить.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

2) Переменные x_1, \dots, x_r - базисные,

x_{r+1}, \dots, x_n - свободные.

Выразим базисные через свободные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

\forall набора x_{r+1}, \dots, x_n получим СЛАУ из r уравнений с r неизвестными x_1, \dots, x_r , \det системы $= M_{1..r}^{1..r} \neq 0 \Rightarrow$ по теореме Крамера эта система имеет единственное решение.

3) Будем придавать свободным переменным различные значения:

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0;$$

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \quad \dots, \quad x_n = 0;$$

\vdots

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad \dots, \quad x_n = 1.$$

Для каждого набора значений свободных переменных найдем базисные, получим решение системы:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_r^{(k)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Обозначим их } X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}, k = n - r.$$

(2) Покажем, что мы построили именно ФСР

$X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ - решения (по построению), их $k = n - r$.

Осталось доказать, что $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ - линейно независимы.

Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_1 X^{(1)} + \dots + \alpha_k X^{(k)} = \Theta$. Из последних строк имеем:

Из $(r + 1)$ -й строки: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Из $(r + 2)$ -й строки: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

...

Из (n) -й строки: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$,

Следовательно $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ линейно независимы. Мы построили ФСР.

ЧТД

2.7 Вывести формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратной матрицей.

Теорема

СЛАУ $AX = B$, где A - квадратная и $\det A \neq 0$, имеет единственное решение, причем $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \Delta = \det A$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Доказательство

СЛАУ $AX = B$, где $A - (n \times n), X - (n \times 1), B - (n \times 1)$ является частным случаем матричного уравнения. По условию $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$ решение матричного уравнения однозначно находится $X = A^{-1}B$

Распишем нахождение решения X более подробно: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\Delta} (A_{ji})$, где A^* - присоединенная матрица.

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 & A_{21}b_2 & \dots & A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 & A_{22}b_2 & \dots & A_{n2}b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}b_1 & A_{2n}b_2 & \dots & A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}}{\Delta} = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ и т.д., } x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

ЧТД

2.8 Доказать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

теорема (о структуре общего решения однородной СЛАУ)

Пусть $X_1^{(1)}, \dots, X_k^{(k)}$ - любая ФСР однородной СЛАУ $AX = \Theta$

Тогда любое решение X этой системы можно представить как линейную комбинацию ФСР:

$X = c_1 X^{(1)} + \dots + c_k X^{(k)}$, где $c_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство

Рассмотрим матрицу B , состоящую из столбцов X и $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$:

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r & \dots & x_r^{(1)} & \dots & x_r^{(k)} \\ x_{r+1} & \dots & x_{r+1}^{(1)} & \dots & x_{r+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & \dots & x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Напомним, что в системе $AX = \Theta$, $RgA = r : x_1, \dots, x_r$ - базисные неизвестные, x_{r+1}, \dots, x_n - свободные

Докажем, что $RgB = k$.

Тогда, т.к. столбцы $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ по определению ФСР линейно независимы и их k штук, по следствию 2 из теоремы о базисном миноре (ранг матрицы равен максимальному количеству ее линейно независимых столбцов(строк)) столбцы $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ являются базисными. Следовательно, по п2 теоремы о базисном миноре, столбец X является их линейной комбинацией.

1) $RgB \geq k$, т.к. RgB равен максимальному количеству линейно независимых столбцов(строк) матрицы, а мы знаем, что r столбцов матрицы B линейно независимы.

2) Докажем, что $RgB \leq k$.

Для этого с помощью элементарных преобразований получим из B матрицу B' вида

$$B \sim B' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & \dots & * \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} B' \leq k$$

Как получить матрицу B' ?

Базисные неизвестные (первые r штук) однозначно выражаются через свободные (последние $n - r = k$ штук). Следовательно в матрице B вся первая строка является линейной комбинацией последних k строк. Вычтем из первой строки линейную комбинацию k последних строк. Получим нулевую строку. Аналогично в матрице B вся вторая строка является линейной комбинацией k последних строк. Вычтем из второй строки линейную комбинацию k последних. Получим нулевую строку. И т.д. до r -ой строки матрицы B . Получили B' .

Из 1), 2) $\Rightarrow \operatorname{Rg} B = k$.

ЧТД