

Copyright botva

Привет! Это BOTVA ИУ6, точнее малая ее часть.

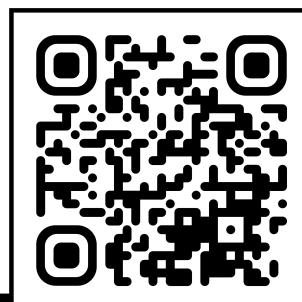
Пользоваться и распространять файлы конечно же можно. Если вы нашли ошибку в файле, можете исправить ее в исходном коде и подать на слияние или просто написать в issue.

Так же вы можете купить распечатанную версию данного файла в виде книжки.

Если возникнут вопросы, пишите в комментарии под постом файла в tg.

Приятного бота)

[GitHub](#)



[https://t.me/botva\\_its6](https://t.me/botva_its6)

## Подготовка к экзамену

## Математический анализ

Над файлом работали:

fīixii, pluttan

## Оглавление

<b>Определения и понятия</b>	<b>4</b>
<b>Вопросы для подготовки к экзамену</b>	<b>11</b>
1. Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности) . . . . .	11
2. Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности) . . . . .	12
3. Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел) . . . . .	13
4. Теорема (о сохранении функцией знака своего предела) . . . . .	14
5. Теорема (о предельном переходе в неравенстве) . . . . .	15
6. Теорема (о пределе промежуточной функции) . . . . .	16
7. Теорема (о пределе произведения функций) . . . . .	17
8. Теорема (о пределе сложной функции) . . . . .	18
9. Вывод первого замечательного предела . . . . .	19
10. Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой) . . . . .	21
11. Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную) . . . . .	22
12. Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой) . . . . .	23
13. Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела) . . . . .	24
14. Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых) . . . . .	25
15. Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков) . . . . .	26
16. Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций) . . . . .	27
17. Теорема (о непрерывности сложной функции) . . . . .	28
18. Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки) . . . . .	29
19. Функция, непрерывная в точке. Теорема о непрерывности элементарных функций. . . . .	30
20. Свойства функций, непрерывных на отрезке . . . . .	31
21. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры . . . . .	32
22. Теорема (о необходимом и достаточном условии существования наклонной асимптоты) . . . . .	34
23. Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции) . . . . .	35
24. Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности функции) . . . . .	36
25. Теорема (о производной произведения двух дифференцируемых функций) . . . . .	37
26. Теорема (о производной частного двух дифференцируемых функций) . . . . .	38
27. Теорема (о производной сложной функции) . . . . .	39
28. Теорема (о производной обратной функции) . . . . .	40
29. Теорема (свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка) . . . . .	41
30. Теорема Ферма . . . . .	42
31. Теорема Ролля . . . . .	43
32. Теорема Лагранжа . . . . .	44
33. Теорема Коши . . . . .	45

34. Теорема Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций . . . . .	46
35. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. . . . .	47
36. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа . . . . .	48
37. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано . . . . .	50
38. Формула Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа	51
39. Формула Маклорена для функции $y = \sin(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа . . . . .	52
40. Формула Маклорена для функции $y = \cos(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа . . . . .	53
41. Формула Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа . . . . .	54
42. Формула Маклорена для функции $y = (1 + x)^a$ с остаточным членом в форме Лагранжа . . . . .	55
43. Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции . .	56
44. Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции	57
45. Первое достаточное условие экстремума (по первой производной) . . . . .	58
46. Второе достаточное условие экстремума (по второй производной) . . . . .	59
47. Достаточное условие выпуклости функции . . . . .	60
48. Необходимое условие точки перегиба . . . . .	61
49. Достаточное условие точки перегиба . . . . .	62

## Определения и понятия

1.  $\mathbb{N}$  - **множество натуральных чисел**, состоит из чисел, возникающих при счёте.
2.  $\mathbb{Z}$  - **множество целых чисел**, состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.
3.  $\mathbb{Q}$  - **множество рациональных чисел**, состоит из чисел, представимых в виде  $\frac{z}{n}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $\mathbb{I}$  - **множество иррациональных чисел**, состоит из чисел, которые не представимы в виде  $\frac{z}{n}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , такие как  $e$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{3}$  и т.д..
5.  $\mathbb{R}$  - **множество действительных чисел**, состоит из рациональных и иррациональных чисел.
6.  $\overline{\mathbb{R}}$  - **расширенное множество действительных чисел**, состоит из действительных чисел с добавлением  $\{+\infty\}$  и  $\{-\infty\}$ .
7. **Окрестностью**  $U(x)$  **точки**  $x$  называют любой интервал, содержащий эту точку.
8. **Проколотой окрестностью**  $\overset{\circ}{U}(x)$  **точки**  $x$  называют окрестность этой точки  $U(x)$ , за исключением самой точки  $x$ .
9.  $\varepsilon$ -**окрестностью точки**  $x_0$  (при положительном  $\varepsilon$ ) называют интервал  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$

10. **Правой (правосторонней)  $\delta$ -окрестностью точки**  $x_0$  называют полуинтервал  $[x_0, x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ .

$$U_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x < x_0 + \delta\}, \delta > 0$$

11. **Левой (левосторонней)  $\delta$ -окрестностью точки**  $x_0$  называют полуинтервал  $(x_0 - \delta, x_0]$ ,  $\delta > 0$ .

$$U_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x \leq x_0\}, \delta > 0$$

12. **Окрестностью точки**  $+\infty$  называют интервал  $(a, +\infty)$ ,  $a > 0$ .

$$U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, a > 0$$

13. **Окрестностью точки**  $-\infty$  называют интервал  $(-\infty, -a)$ ,  $a > 0$ .

$$U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < -a\}, a > 0$$

14. **Окрестностью**  $\infty$  (бесконечности без знака) называют объединение двух интервалов  $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ ,  $a > 0$ .

$$U(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > a\}, a > 0$$

15. **Последовательностью**  $\{X_n\}$  называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу  $n$  при этом поставлено в соответствие число  $x_n$ , то это число называется  $n$ -м элементом последовательности;  $n$  называют номером элемента  $x_n$ .
16. Последовательность чисел  $\{X_n\}$  называется **неубывающей**, если  $x_{n+1} \geq x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
17. Последовательность чисел  $\{X_n\}$  называется **возрастающей**, если  $x_{n+1} > x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
18. Последовательность чисел  $\{X_n\}$  называется **невозрастающей**, если  $x_{n+1} \leq x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
19. Последовательность чисел  $\{X_n\}$  называется **убывающей**, если  $x_{n+1} < x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
20. Неубывающие, невозрастающие, убывающие и возрастающие последовательности называют **монотонными**.
21. Последовательность  $\{X_n\}$  называется **постоянной**, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .
22. Последовательность  $\{X_n\}$  называется **ограниченной сверху**, если  $\exists M \in \mathbb{R}$ , такое, что  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$ .
23. Последовательность  $\{X_n\}$  называется **ограниченной снизу**, если  $\exists M \in \mathbb{R}$ , такое, что  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$ .
24. Последовательность  $\{X_n\}$ , ограниченная и сверху и снизу, называют **ограниченной**:  $\exists M > 0$ ,  $M \in \mathbb{R}$ , такое, что  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$ .
25. Число  $a$  называется **пределом числовой последовательности**  $\{X_n\}$ , если для любого, сколь угодно малого положительного  $\varepsilon$  существует такой номер  $N$ , зависящий от  $\varepsilon$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

26. Числовая последовательность называется **сходящейся**, если существует предел этой последовательности, и он конечен.
27. Последовательность  $\{X_n\}$  называется **фундаментальной**, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N = N(\varepsilon)$  такой, что при любых  $m \geq N$  и  $n \geq N$  выполняется неравенство  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .
28. (определение по Коши) Число  $a$  называется **пределом функции**  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует положительное число  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такое, что для любого  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  выполняется неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

29. (определение по Гейне) Число  $a$  называется **пределом функции**  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любой последовательности  $\{X_n\}$  точек из  $\overset{\circ}{U}(x_0)$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = a$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = a$$

30. Число  $a$  называется **правым (правосторонним) пределом функции**  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0+$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что при любом  $x \in U_\delta^+(x_0)$  (т.е.  $x_0 < x < x_0 + \delta$ ), выполняется неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta^+(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

31. Число  $a$  называется **левым (левосторонним) пределом функции**  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0-$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что при любом  $x \in U_\delta^-(x_0)$ , (т.е.  $x_0 - \delta < x < x_0$ ) выполняется неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta^-(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

32. Функцию  $f(x)$  называют **ограниченной на множестве**  $D$ , если существует такое число  $M > 0$ , что для любых  $x \in D$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ .
33. Функцию  $f(x)$  называют **ограниченной** (на области определения  $D_f$ ), если существует такое число  $M > 0$ , что для любых  $x \in D_f$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ .
34. Функцию  $f(x)$  называют **локально ограниченной в окрестности точки**  $a$ , если существует такое число  $M > 0$  и такая окрестность  $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ , что для любых  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ .
35. Функцию  $f(x)$  называют **бесконечно малой** при  $x \rightarrow x_0$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .
36. Функцию  $f(x)$  называют **бесконечно большой** при  $x \rightarrow x_0$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  - **первый замечательный предел**.

38.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  - **второй замечательный предел**.

39. Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называют **сравнимыми** бесконечно малыми при  $x \rightarrow x_0$ , если существует хотя бы один из пределов  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ .
40. Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называют **несравнимыми** бесконечно малыми при  $x \rightarrow x_0$ , если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения при  $x \rightarrow x_0$ .
41. Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называют **бесконечно малыми одного порядка** при  $x \rightarrow x_0$  и записывают  $\alpha(x) = O(\beta(x))$ , если существует отличный от нуля конечный предел отношения  $\alpha(x)/\beta(x)$ , при  $x \rightarrow x_0$ .

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0 \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

42. Функцию  $\alpha(x)$  называют **бесконечно малой более высокого порядка** малости по сравнению с  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  и записывают  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ , если существует и равен нулю предел отношения  $\alpha(x)/\beta(x)$ , при  $x \rightarrow x_0$ .

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0 \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

43. Функцию  $\alpha(x)$  называют **бесконечно малой более низкого порядка** малости по сравнению с  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если предел отношения  $\alpha(x)/\beta(x)$ , при  $x \rightarrow x_0$ , равен бесконечности.
44. Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называют **эквивалентными** бесконечно малыми при  $x \rightarrow x_0$ , если предел их отношения при  $x \rightarrow x_0$  равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

45. Функцию  $\alpha(x)$  называют **бесконечно малой  $k$ -ого порядка** малости относительно  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , а число  $k$  ( $k > 0$ ) - **порядком малости**  $\alpha(x)$  относительно  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если функции  $\alpha(x)$  и  $\beta^k(x)$  являются бесконечно малыми одного порядка при  $x \rightarrow x_0$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

46. Функцию  $u(x)$  называют **бесконечно большой  $k$ -ого порядка** роста относительно  $w(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , а число  $k$  ( $k > 0$ ) - **порядком роста**  $u(x)$  относительно  $w(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если функции  $u(x)$  и  $w^k(x)$  являются бесконечно большими одного порядка при  $x \rightarrow x_0$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{w^k(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

47. **Главная часть суммы бесконечно малых функций** - это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых.
48. **Приращением аргумента** в точке  $x_0$  называется изменение аргумента функции от значения  $x_0$  к другому значению  $x$ ,

$$\Delta x = x - x_0$$

49. **Приращением функции** в точке  $x_0$  называется  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

50. (опр. 1) Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

51. (опр. 2) Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 ( $\Delta x \rightarrow 0$ ).
52. Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$  **справа**, если в этой точке существует конечный *правый* предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ .
53. Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$  **слева**, если в этой точке существует конечный левый предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$ .
54. Функция  $f(x)$  **непрерывна на интервале**  $(a, b)$ , если она непрерывна в каждой его точке.
55. Функция  $f(x)$  **непрерывна на отрезке**  $[a, b]$ , если она непрерывна на интервале  $(a, b)$ , в точке  $a$  - непрерывна справа, т.е.  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ , в точке  $b$  - непрерывна слева, т.е.  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$ .
56. Если данная функция  $f(x)$  не является непрерывной в точке  $x_0$ , то  $x_0$  называется **точкой разрыва** функции  $f(x)$ .
57. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.
58. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).
59. Если  $x_0$  — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или  $f(x)$  не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку  $x_0$  - **точкой устранимого разрыва первого рода**.
60. Если  $x_0$  — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку  $x_0$  - **точкой неустранимого разрыва первого рода**.
61. Если существует конечный предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , то он называется **производной функции**  $f(x)$  **в точке**  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0)$ .
62. Если  $f(x)$  определена в правосторонней окрестности точки  $x_0$  и если  $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , то этот предел называется **правой производной функции**  $f(x)$  **в**  $x_0$  и обозначается  $f'_+(x_0)$ .
63. Если  $f(x)$  определена в левосторонней окрестности точки  $x_0$ , и если  $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , то этот предел называется **левой производной функции**  $f(x)$  **в**  $x_0$  и обозначается  $f'_-(x_0)$ .



64. Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Функция называется **дифференцируемой в точке  $x_0$** , если ее приращение  $\Delta y$  в точке  $x_0$  представимо в следующем виде:  $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ , где  $A$  - некоторое число, не зависящее от  $\Delta x$ , а  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ .

65. **Дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$**  называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента  $\Delta x$ .

66. **Дифференциалом  $n$ -го порядка** называется дифференциал от дифференциала  $n - 1$  порядка, т.е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) dx^n$$

67. **Производная  $n$ -ого порядка** от функции  $y = f(x)$ , есть производная от производной  $n - 1$  порядка, т.е.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$$

68. Функция  $f(x)$  называется **возрастающей на интервале  $(a, b)$** , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , таких что  $x_2 > x_1$ , выполняется неравенство  $f(x_2) > f(x_1)$ .

69. Функция  $f(x)$  называется **невозрастающей на интервале  $(a, b)$** , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , таких что  $x_2 > x_1$ , выполняется неравенство  $f(x_2) \leq f(x_1)$ .

70. Функция  $f(x)$  называется **убывающей на интервале  $(a, b)$** , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , таких что  $x_2 > x_1$ , выполняется неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ .

71. Функция  $f(x)$  называется **неубывающей на интервале  $(a, b)$** , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , таких что  $x_2 > x_1$ , выполняется неравенство  $f(x_2) \geq f(x_1)$ .

72. Неубывающие, невозрастающие, убывающие и возрастающие функции называют **монотонными**.

73. Функция  $f(x)$  называется **строго монотонной**, если она возрастающая или убывающая.

74. Точка  $x_0$  называется **точкой локального минимума** функции  $f(x)$ , если  $\exists U_\delta(x_0)$ , такая что  $\forall x \in U_\delta(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$ .

75. Точка  $x_0$  называется **точкой локального максимума** функции  $f(x)$ , если  $\exists U_\delta(x_0)$ , такая что  $\forall x \in U_\delta(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$ .

76. Точка  $x_0$  называется **точкой строгого локального минимума** функции  $f(x)$ , если  $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ , такая что  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x_0) < f(x)$ .

77. Точка  $x_0$  называется **точкой строгого локального максимума** функции  $f(x)$ , если  $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ , такая что  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x_0) > f(x)$ .

78. **Точками локального экстремума** называются точки локального максимума и строгого локального максимума, локального минимума и строгого локального минимума.

79. **Точками строгого локального экстремума** называются точки строгого локального максимума и минимума.

80. Точку  $x_0$  из области определения функции  $f(x)$  называют **критической**, если производная в ней равна 0 или не существует вовсе.
81. Точку  $x_0$  из области определения функции  $f(x)$  называют **стационарной**, если  $f'(x_0) = 0$ .
82. Прямая  $Ax + By + C = 0$  называется **асимптотой** графика  $y = f(x)$ , если расстояние от точки  $M(x, f(x))$  графика функции до этой прямой стремится к 0 при бесконечном удалении точки  $M$  от начала координат.
83. Прямая  $x = a$  называется **вертикальной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы один из пределов  $\lim_{x \rightarrow a+(-)} f(x) = \infty$
84. Прямая  $y = kx + b$  называется **правой наклонной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если эту функцию можно представить в виде  $f(x) = kx + b + \alpha(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , где  $k, b \in \mathbb{R}$  и  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция.
85. Прямая  $y = kx + b$  называется **левой наклонной асимптотой** графика функции  $y = f(x)$ , если эту функцию можно представить в виде  $f(x) = kx + b + \alpha(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ , где  $k, b \in \mathbb{R}$  и  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция.
86. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . График функции  $y = f(x)$  имеет на интервале  $(a, b)$  **выпуклость вверх**, если он лежит не выше любой касательной к графику на  $(a, b)$ .
87. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . График функции  $y = f(x)$  имеет на интервале  $(a, b)$  **выпуклость вниз**, если он лежит не ниже любой касательной к графику на  $(a, b)$ .
88. Точка  $x_0 \in (a, b)$  называется **точкой перегиба** функции  $f(x)$ , если эта функция непрерывна в точке  $x_0$  и если  $\exists \delta > 0$  такое, что направления выпуклостей функции  $f(x)$  на интервалах  $(x_0 - \delta; x_0)$  и  $(x_0; x_0 + \delta)$  различны.

## Вопросы для подготовки к экзамену

### 1. Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности)

Используются определения 15, 25, 26 из списка

Если последовательность имеет предел, то этот предел - единственный.

*Доказательство (от противного)*

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ , где  $a$  и  $b$  - пределы сходящейся последовательности  $\{X_n\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad a \neq b$$

По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Примем  $\varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$  и при  $n > \max(N_1, N_2)$  получим

$$|b - a| = |x_n - a + b - x_n| \leq |x_n - a| + |b - x_n| = |x_n - a| + |x_n - b| \Rightarrow |b - a| < 2\varepsilon$$

Или  $|b - a| < 2 \cdot \frac{|b - a|}{3}$ , т.е.  $|b - a| < \frac{2}{3}|b - a|$ ,  $\frac{1}{3}|b - a| < 0$ , чего не может быть  $\Rightarrow a \neq b$  - неверно, т.е.  $a = b \Rightarrow$  предел единственный.

Теорема доказана.

## 2. Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности)

Используются определения 15, 24, 25, 26 из списка

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

*Доказательство*

Пусть  $\{x_n\}$  - сходящаяся последовательность. Тогда по определению, у нее существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon + a < x_n < \varepsilon + a, \forall n > N$$

Обозначим через  $A$  максимальное число среди  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|$ , т.е.

$$A = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|)$$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполняется  $|x_n| < A$ ,  $\Rightarrow$  последовательность ограничена.

Теорема доказана.

**3. Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)**

Используются определения 28, 34 из списка

Если функция  $f(x)$  имеет конечный предел при  $x \rightarrow x_0$ , то  $f(x)$  локально ограничена.

*Доказательство*

По условию  $\exists$  конечный предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда  $|f(x)| - |a| \leq |f(x) - a| < 1$ , а значит

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| < 1 + |a| = \text{const} \xrightarrow{\text{по опр.}}$$

$f(x)$  является локально ограниченной в окрестности точки  $x_0$ .

Теорема доказана.

#### 4. Теорема (о сохранении функцией знака своего предела)

Используются определения 28 из списка

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$ , то  $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  функция  $f(x)$  сохраняет знак своего предела.

*Доказательство*

По условию  $\exists$  конечный  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0 \xRightarrow{\text{по опр.}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

- в случае  $a > 0$  выбираем  $\varepsilon = \frac{a}{2}$ , тогда

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2}$$

$$-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$$

Следовательно  $f(x) > \frac{a}{2} > 0$ , т.е. данная функция положительна при  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ .

- в случае  $a < 0$  выбираем  $\varepsilon = -\frac{a}{2}$ , тогда

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{3a}{2} < f(x) < \frac{a}{2}$$

Следовательно  $f(x) < \frac{a}{2} < 0$ , т.е. данная функция отрицательна при  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ .

Теорема доказана.

**5. Теорема (о предельном переходе в неравенстве)**

Используются определения 28 из списка

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в проколотой окрестности  $\mathring{U}(x_0)$  точки  $x_0$ , причем для любого  $x \in \mathring{U}(x_0)$  выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x)$ . Тогда, если эти функции имеют пределы  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , то  $a \geq b$ .

*Доказательство*

По условию  $\forall x \in \mathring{U}(x_0) : f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ , тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a - b \geq 0, \Rightarrow a \geq b$$

Теорема доказана.

## 6. Теорема (о пределе промежуточной функции)

Используются определения 28 из списка

Пусть для всех  $x$  из некоторой проколотой окрестности  $\overset{\circ}{U}(x_0)$  точки  $x_0$  выполняется двойное неравенство  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , и пусть существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ , равные одному и тому же числу  $a$ . Тогда и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .

### Доказательство

По условию  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ , тогда по определению предела функции,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

Тогда при  $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ ,  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$|g(x) - a| < \varepsilon$$

Таким образом, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$$

Теорема доказана.



## 7. Теорема (о пределе произведения функций)

Используются определения 28, 35 из списка

Если  $\exists$  конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

*Доказательство*

По условию  $\exists$  конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой имеем

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \rightarrow x_0$$

$$g(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \rightarrow x_0$$

Тогда

$$f(x) \cdot g(x) = (a + \alpha(x)) \cdot (b + \beta(x)) = a \cdot b + a \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot b + \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot b + \underbrace{a \cdot \beta(x)}_{\text{б.м. при } x \rightarrow x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot b}_{\text{б.м. при } x \rightarrow x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\text{б.м. при } x \rightarrow x_0}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot b) = a \cdot b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

## 8. Теорема (о пределе сложной функции)

Используются определения 25, 29 из списка

Если функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x = a$  конечный предел, равный  $b$ , и  $f(x) \neq b$  в некоторой проколотой окрестности  $\mathring{U}(a)$  этой точки, а функция  $g(y)$  имеет в точке  $b$  конечный предел  $c$ , то сложная функция  $g(f(x))$  имеет  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$ .

### Доказательство

По определению предела функции по Гейне имеем:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \{\forall x_n \in \mathring{U}(a), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a : \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = b$$

$$\exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \iff \{\forall y_n \in \mathring{U}(b), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b : \lim_{n \rightarrow \infty} \{g(y_n)\} = c$$

Пусть  $\{x_n\}$  - произвольная последовательность, стремящаяся к точке  $a$  и  $x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = b$ , но  $f(x_n) \neq b \forall n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $y_n = f(x_n)$ . Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} = b$  и  $y_n \neq b \forall n \in \mathbb{N}$ , имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{g(y_n)\} = c$ , т.е.

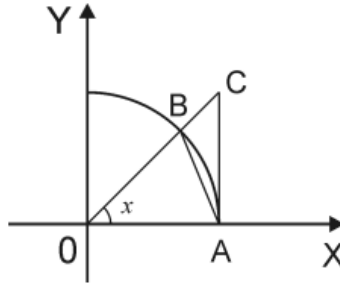
$$\{\forall x_n \in \mathring{U}(a), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a : \lim_{n \rightarrow \infty} \{g(f(x_n))\} = c \iff \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = c$$

Теорема доказана.

## 9. Вывод первого замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Пусть  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Рассмотрим окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке  $A$ , и пусть угол  $\angle AOB$  равен  $x$  (радиан). Пусть, далее,  $CA$  — перпендикуляр к этой оси,  $C$  — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка  $OB$  за точку  $B$ . Тогда



$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектор } OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2}R^2 \sin(x) < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg}(x)$$

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x)$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x), \text{ при } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Рассмотрим  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ . Сделаем замену  $\beta = -x$ , таким образом  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , а значит справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{\sin(\beta)}{\beta} > \cos(\beta)$$

Вернемся к замене  $\beta = -x$

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x)$$

$$1 > \frac{-\sin(x)}{-x} > \cos(x)$$

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x) \text{ при } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ . Перейдем к пределу при  $x \rightarrow 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(по т. о пределе промежуточной функции)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

## 10. Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)

Используются определения 28, 35 из списка

Равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  имеет место  $\iff f(x) = a + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство*

( $\Rightarrow$ )

По условию  $\exists$  конечный  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначим  $f(x) - a = \alpha(x)$ . Тогда  $|\alpha(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \xRightarrow{\text{по опр.}} \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , т.е.  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

Но  $\alpha(x) = f(x) - a \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

( $\Leftarrow$ )

По условию  $f(x) = a + \alpha(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Но по условию  $f(x) = a + \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = f(x) - a$ , откуда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \xRightarrow{\text{по опр.}} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Теорема доказана.

### 11. Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную)

Используются определения 34, 35 из списка

Если  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ ,  $f(x)$  - ограниченная функция, то  $\alpha(x) \cdot f(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство*

По условию  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{U}_1(x_0) : \forall x \in \mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$$

$f(x)$  - ограниченная функция, тогда

$$|f(x)| < c, \text{ где } c = \text{const}, \forall x \in \mathring{U}_2(x_0)$$

Таким образом,

$$\forall x \in \mathring{U}(x_0) = \mathring{U}_1(x_0) \cap \mathring{U}_2(x_0) :$$

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c \Rightarrow$$

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \alpha(x) \cdot f(x) \text{ - бесконечно малая функция при } x \rightarrow x_0$$

Теорема доказана.

## 12. Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой)

Используются определения 28, 35, 36 из списка

$\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ , отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha(x)}$  - бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

$f(x)$  - бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

### Доказательство

Пусть  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ , отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности  $\mathring{U}(x_0)$  точки  $x_0$ . Выберем произвольное  $E > 0$ . Тогда

для  $\varepsilon = \frac{1}{E} > 0 \exists \mathring{U}_1(x_0) : \forall x \in \mathring{U}(x_0) \cap \mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow 0 < |\alpha(x)| < \varepsilon$ , т.е.

$\frac{1}{|\alpha(x)|} > E$ , по опр.  $\frac{1}{\alpha(x)}$  - бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$

Пусть  $f(x)$  - бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$ . Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда

для  $E = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \exists \mathring{U}(x_0) : \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > E$ , т.е.

$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{E} = \varepsilon$ , по опр.  $\frac{1}{f(x)}$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$

Теорема доказана.

### 13. Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)

Используются определения 35, 44 из списка

Пусть  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , и  $f(x)$  - некоторая функция, определенная в проколотой окрестности  $\overset{\circ}{U}(x_0)$  точки  $x_0$ . Тогда:

- если существует предел при  $x \rightarrow x_0$  произведения  $\alpha(x) \cdot f(x)$ , то он не изменится при замене  $\alpha(x)$  на эквивалентную при  $x \rightarrow x_0$  бесконечно малую функцию  $\beta(x)$
- если существует предел при  $x \rightarrow x_0$  частного  $\frac{f(x)}{\alpha(x)}$ , то он не изменится при замене  $\alpha(x)$  на эквивалентную при  $x \rightarrow x_0$  бесконечно малую функцию  $\beta(x)$

#### Доказательство

По условию  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , тогда по определению  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ . Таким образом,

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot f(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (\beta(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\beta(x) \cdot f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x) \cdot f(x)}{\alpha(x) \cdot \beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)}$ .

Теорема доказана.



**14. Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых)**

Используются определения 35, 42, 44 из списка

Две бесконечно малые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  эквивалентны  $\iff$  их разность имеет больший порядок малости при  $x \rightarrow x_0$  по сравнению с каждой из них.

*Доказательство*

( $\Rightarrow$ )

По условию  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , тогда по определению  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

( $\Leftarrow$ )

По условию  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Теорема доказана.

**15. Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков)**

Используются определения 35, 44 из списка

Сумма конечного числа бесконечно малых функций при  $x \rightarrow x_0$  эквивалентна своей главной части.

*Доказательство*

Пусть  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$ , ...,  $\alpha_n(x)$  - бесконечно малые функции при  $x \rightarrow x_0$ , и  $\alpha_1(x)$  - главная часть суммы  $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} = 0, \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 0,$$

Тогда рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \xrightarrow{\text{по опр.}}$$

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x) \sim \alpha_1(x) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Теорема доказана.

## 16. Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)

Используются определения 50 из списка

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то функции  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (последнее при  $g(x) \neq 0$ ) - также непрерывны в точке  $x_0$ .

*Доказательство*

По условию  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , тогда по определению

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$ ,  $\xRightarrow{\text{по опр.}} f(x) \pm g(x)$  - непрерывна в точке  $x = x_0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$ ,  $\xRightarrow{\text{по опр.}} f(x) \cdot g(x)$  - непрерывна в точке  $x = x_0$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ ,  $\xRightarrow{\text{по опр.}} \frac{f(x)}{g(x)}$  - непрерывна в точке  $x = x_0$  при условии  $g(x) \neq 0$ .

Теорема доказана.

**17. Теорема (о непрерывности сложной функции)**

Используются определения 50 из списка

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ , а функция  $g(y)$  непрерывна в соответствующей точке  $b = f(a)$ , то сложная функция  $g(f(x))$  непрерывна в точке  $x = a$ .

*Доказательство*

По условию функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ , функция  $g(y)$  непрерывна в точке  $b = f(a)$ . Тогда по определению

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b$$

$$\exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b) = g(f(a)), \stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \text{функция } g(f(x)) \text{ непрерывна в точке } x = a$$

Теорема доказана.

### 18. Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)

Используются определения 50 из списка

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , и  $f(x_0) \neq 0$ . Тогда в некоторой окрестности  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$  функция  $f(x)$  имеет знак числа  $f(x_0)$ .

*Доказательство*

По условию  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0$ . Тогда по определению

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$$

Тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела функция  $f(x)$  имеет знак числа  $f(x_0)$  в некоторой проколотой окрестности  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  точки  $x_0$ , т.е.

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Так как  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ , то

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Теорема доказана.

### 19. Функция, непрерывная в точке. Теорема о непрерывности элементарных функций.

(опр. 1) Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(опр. 2) Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x_0$ , если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 ( $\Delta x \rightarrow 0$ ).

*Теорема (о непрерывности элементарных функций)*

Все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

*Доказательство (для  $y = \sin(x)$  и  $y = \cos(x)$ )*

Рассмотрим  $y = \sin(x)$ :

Найдем приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = \\ &= 2\sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right) = 0,$$

Т.е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \xrightarrow{\text{по опр.}} y = \sin(x)$  непрерывна на всей числовой прямой.

Рассмотрим  $y = \cos(x)$ :

Найдем приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos(x) = \\ &= 2\sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - \Delta x - x}{2}\right) = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \right) = 0,$$

Т.е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \xrightarrow{\text{по опр.}} y = \cos(x)$  непрерывна на всей числовой прямой.

## 20. Свойства функций, непрерывных на отрезке

### 1. Первая теорема Вейерштрасса

Если функция  $y = f(x)$  является непрерывной на  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

### 2. Вторая теорема Вейерштрасса

Если функция  $y = f(x)$  является непрерывной на  $[a, b]$ , то она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение.

### 3. Первая теорема Больцано-Коши

Если функция  $y = f(x)$  является непрерывной на  $[a, b]$  и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то существует хотя бы одна точка  $c \in (a, b)$ , в которой значение функции  $f(c) = 0$ .

### 4. Вторая теорема Больцано-Коши

Если функция  $y = f(x)$  является непрерывной на  $[a, b]$  и  $f(a) \neq f(b)$ , то существует такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $f(a) < f(c) < f(b)$ .

### 5. Теорема о непрерывности обратной функции

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на  $[a, b]$ , то существует и определена на отрезке  $[f(a), f(b)]$  обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , непрерывная и возрастающая (убывающая) на этом отрезке.

## 21. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры

Если данная функция  $f(x)$  не является непрерывной в точке  $x_0$ , то  $x_0$  называется **точкой разрыва** функции  $f(x)$ .

1. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

Пример:  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{точка } x = 0 - \text{точка разрыва первого рода.}$$

2. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).

Пример:  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке  $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{точка } x = 0 - \text{точка разрыва второго рода.}$$

3. Если  $x_0$  — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или  $f(x)$  не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку  $x_0$  — **точкой устранимого разрыва первого рода**.

Пример:  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ :

Из соображений выше, точка  $x = 0$  является точкой разрыва первого рода функции  $f(x)$ .

При этом,  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq f(0)$ , тогда по определению, точка  $x = 0$  — точка устранимого разрыва первого рода.

Если доопределить функцию  $f(x)$  следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$



то функция  $f(x)$  по определению будет непрерывной в точке  $x = 0$ .

4. Если  $x_0$  — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку  $x_0$  - **точкой неустранимого разрыва первого рода**.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1 \\ \exists f(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  точка  $x = 0$  - точка неустранимого разрыва первого рода по определению.

## 22. Теорема (о необходимом и достаточном условии существования наклонной асимптоты)

Используются определения 35, 84, 85 из списка

Прямая  $y = kx + b$  является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции  $y = f(x) \iff$  существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} (f(x) - kx) = b$$

*Доказательство*

( $\Rightarrow$ )

По условию прямая  $y = kx + b$  является правой (левой) наклонной асимптотой графика  $y = f(x)$ . Тогда по определению

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}}, \text{ при } x \rightarrow +(-)\infty$$

Отсюда  $\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$ ,  $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ , при  $x \rightarrow +(-)\infty$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +(-)\infty} (f(x) - kx) = b$$

( $\Leftarrow$ )

По условию существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} (f(x) - kx) = b$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$f(x) - kx = b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}}, \text{ при } x \rightarrow +(-)\infty$$

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}}, \text{ при } x \rightarrow +(-)\infty$$

Таким образом, прямая  $y = kx + b$  является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции  $f(x)$  по определению.

Теорема доказана.

**23. Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)**

Используются определения 61, 64 из списка

Функция  $f(x)$  дифференцируема в некоторой точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда существует конечная производная  $f'(x_0)$  в этой точке.

*Доказательство*

$(\Rightarrow)$ .

По условию функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда по определению дифференцируемости:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

После деления на  $\Delta x$  получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

Таким образом производная  $f'(x_0)$  существует (и равна  $A$ ) по определению.

$(\Leftarrow)$

По условию существует  $f'(x_0)$ . Тогда по определению производной:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

После умножения на  $\Delta x$  получаем:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Таким образом, функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  по определению.

Теорема доказана.

**24. Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности функции)**

Используются определения 51, 64 из списка

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в некоторой точке  $x = x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство*

По условию  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_0$ , тогда по определению

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

$\Downarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} y = f(x) \text{ непрерывна в точке } x = x_0$$

Теорема доказана.

## 25. Теорема (о производной произведения двух дифференцируемых функций)

Используются определения 61, 64 из списка

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то функция  $f(x) \cdot g(x)$  тоже дифференцируема в этой точке и  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

*Доказательство*

По условию функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ ,  $\Rightarrow$  существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0)$$

Вычислим  $(f(x) \cdot g(x))'$ :

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x) \cdot g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x)}_{g(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)} = \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

## 26. Теорема (о производной частного двух дифференцируемых функций)

Используются определения 61, 64 из списка

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  тоже дифференцируема в этой точке (при условии  $g(x) \neq 0$ ) и  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ .

*Доказательство*

По условию функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ ,  $\Rightarrow$  существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x)$$

Вычислим  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta x} \cdot \left( \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta x} \cdot \left( \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - g(x + \Delta x) \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta x} \cdot \left( \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - g(x + \Delta x) \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x) \right) \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) = \\ &= \left( \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x)}_{g(x)} - \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)}_{f(x)} \right) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}}_{g^{-2}(x)} = \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**27. Теорема (о производной сложной функции)**

Используются определения 51, 61, 64 из списка

Если функция  $y = f(u)$  дифференцируема в точке  $u_0$  и функция  $u = g(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $u_0 = g(x_0)$ , то сложная функция  $y = f(g(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$ , и  $\left(f(g(x))\right)' = f'_u \cdot g'_x$ .

*Доказательство*

По условию

- функция  $u = g(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , тогда по определению существует конечный  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x)$
- функция  $y = f(u)$  дифференцируема в точке  $u$ , тогда по определению существует конечный  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$
- функция  $u = g(x)$  дифференцируема в точке  $x$ ,  $\Rightarrow$  Функция  $u = g(x)$  непрерывна в точке  $x$  по опр.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ , т.е.  $\Delta u \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Таким образом,

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta u \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x)$$

Теорема доказана.

**28. Теорема (о производной обратной функции)**

Используются определения 51, 61 из списка

Если функция  $y = f(x)$  строго монотонна и дифференцируема в точке  $x = x_0$ , то обратная ей функция  $x = f^{-1}(y)$  дифференцируема в точке  $y = f(x_0)$  и  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

*Доказательство*

По условию функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_0$ ,  $\Rightarrow$  существует конечный

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_0$ ,  $\Rightarrow$  Функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0$   $\stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , т.е.  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Тогда

$$(f^{-1}(y))' = x'_y \stackrel{\text{по опр.}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Теорема доказана.



**29. Теорема (свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка)**

Используются определения 65 из списка

Дифференциал функции  $y = f(u)$  не зависит от того, является ли  $u$  - независимой переменной, или функцией от другой независимой переменной.

*Доказательство*

1. Пусть  $y = f(u)$ , где  $u$  - независимая переменная. Тогда

$$dy = f'(u) \cdot du$$

2. Пусть  $y = f(u)$ , где  $u = g(x)$  - некоторая функция, имеющая производную. Тогда

$$dy = y'_x \cdot dx = y'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx}_{du} = y'_u \cdot du = f'(u) \cdot du.$$

Теорема доказана.

### 30. Теорема Ферма

Используются определения 61, 62, 63, 64, 75 из списка

Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , и точка  $x_0$  - есть точка локального экстремума, то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство*

Пусть  $x_0$  - точка локального максимума функции  $y = f(x)$ , тогда по определению

$$\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

По условию  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_0$ ,  $\Rightarrow$  в точке  $x = x_0$  существует конечная производная  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0), \quad x_0 + \Delta x \in U_\delta(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

По теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \geq 0$$

Таким образом,  $f'(x_0) = 0$ .

Теорема доказана.

### 31. Теорема Ролля

Используются определения 55, 64, 74, 75 из списка

Пусть функция  $y = f(x)$  :

1. Непрерывна на отрезке  $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале  $(a, b)$
3.  $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале  $(a, b)$  существует по крайней мере одна точка  $x_0$ , в которой  $f'(x_0) = 0$ .

#### Доказательство

По условию  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $\Rightarrow$  по (второй) теореме Вейерштрасса функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  достигает своего наибольшего и наименьшего значения, обозначим

$$M = \max_{[a,b]}(f(x))$$

$$m = \min_{[a,b]}(f(x))$$

тогда  $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$

Если  $m = M$ , то  $\forall x \in [a, b] \quad m = M = f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad f'(x) = 0$

Если  $m \neq M$ , то

- $f(a) = f(b) = m$ . Тогда функция  $y = f(x)$  достигает своего наибольшего значения внутри  $[a, b]$ , т.е.  $a < x_0 < b$

Таким образом, точка  $x_0$  - точка локального максимума. Также по условию,  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b) \Rightarrow f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . В итоге, по теореме Ферма,  $f'(x_0) = 0$

- $f(a) = f(b) = M$ . Тогда функция  $y = f(x)$  достигает своего наименьшего значения внутри  $[a, b]$ , т.е.  $a < x_0 < b$

Таким образом, точка  $x_0$  - точка локального минимума. Также по условию,  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b) \Rightarrow f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . В итоге, по теореме Ферма,  $f'(x_0) = 0$

- $y = f(x)$  достигает своего минимального и максимального значения внутри  $[a, b]$  в точках  $x_0$  и  $x_1$ .

Точки  $x_0$  и  $x_1$  - точки экстремума. Также по условию,  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b) \Rightarrow f(x)$  дифференцируема в точках  $x_0$  и  $x_1$ . В итоге, по теореме Ферма,  $f'(x_0) = 0$ ,  $f'(x_1) = 0$ .

Теорема доказана.

### 32. Теорема Лагранжа

Используются определения 55, 64 из списка

Пусть функция  $f(x)$ :

1. Непрерывна на отрезке  $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале  $(a, b)$

Тогда существует хотя бы одна точка  $c \in (a, b)$ , такая, что  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$

*Доказательство*

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , поскольку этими свойствами обладает  $f(x)$ .
- 2.

$$\left. \begin{aligned} F(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a) \\ F(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для  $F(x)$  выполнены все условия теоремы Ролля  $\Rightarrow$  существует точка  $c \in (a, b)$ , для которой  $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(c) \cdot (b - a) &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### 33. Теорема Коши

Используются определения 55, 64 из списка

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$ :

1. Непрерывны на отрезке  $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале  $(a, b)$
3.  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

Тогда существует хотя бы одна точка  $c \in (a, b)$ , такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

#### Доказательство

Сначала заметим, что  $g(b) - g(a) \neq 0$ , т.к. если бы  $g(b) - g(a) = 0$ , то  $g(a) = g(b)$  и функция  $g(x)$ , в результате, удовлетворяла бы условию теоремы Ролля, согласно которой  $\exists c \in (a, b)$ , такая, что  $g'(c) = 0$ , что противоречит 3 условию теоремы.

Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , поскольку этими свойствами обладают  $f(x)$  и  $g(x)$ .

2.

$$\left. \begin{aligned} F(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(a) - g(a)) = f(a) \\ F(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = f(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для  $F(x)$  выполнены все условия теоремы Ролля  $\Rightarrow$  существует точка  $c \in (a, b)$ , для которой  $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Теорема доказана.

### 34. Теорема Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций

Используются определения 35, 36, 64 из списка

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$ :

1. Являются бесконечно малыми или бесконечно большими функциями при  $x \rightarrow x_0$
2. Дифференцируемы в  $\overset{\circ}{U}(x_0)$
3.  $g'(x) \neq 0$  в  $\overset{\circ}{U}(x_0)$
4.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

*Доказательство (для б.м.ф)*

По условию  $f(x)$  и  $g(x)$  являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow x_0$ , тогда по определению

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} g(x) = 0$$

По условию  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Рассмотрим пределы при  $x \rightarrow x_0+$  (для  $x \rightarrow x_0-$  доказывается аналогично)

Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x = x_0$ , полагая  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Тогда  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и непрерывны в  $U^+(x_0)$ . Рассмотрим отрезок  $[x_0, x]$ , где  $x > x_0$ .

По условию  $g'(x) \neq 0$  в  $(x_0, x)$ .

Тогда функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условию теоремы Коши, а значит,  $\exists c \in (x_0, x)$ ,

такая, что  $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$$1. \text{ Так как } f(x_0) = g(x_0) = 0, \text{ то } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$2. \text{ Так как } x_0 < c < x, \text{ то, если } x \rightarrow x_0+, \text{ то и } c \rightarrow x_0+$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{Аналогично } \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{Таким образом, } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

### 35. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.

Используются определения 36 из списка

1. Сравним рост показательной функции  $y = a^x$  и степенной функции  $y = x^n$  ( $a > 1$ ,  $n > 0$ ):

Так как при  $x \rightarrow +\infty$  функции  $y = a^x$  и  $y = x^n$  являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли  $n$  раз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a) \cdot a^x}{n \cdot x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n(a) \cdot a^x}{n!} = +\infty$$

Таким образом, показательная функция  $y = a^x$  растет быстрее степенной функции  $y = x^n$ .

2. Сравним рост логарифмической функции  $y = \log_a(x)$  и степенной функции  $y = x^n$  ( $a > 1$ ,  $n > 0$ ):

Так как при  $x \rightarrow +\infty$  функции  $y = \log_a(x)$  и  $y = x^n$  являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln(a)}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \ln(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Таким образом, степенная функция  $y = x^n$  растет быстрее логарифмической функции  $y = \log_a(x)$ .

**Вывод:**

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная - быстрее логарифмической.

### 36. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть функция  $f(x)$  определена в окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$  и имеет в этой окрестности производные всех порядков до  $(n + 1)$ -го включительно. Тогда для любого  $x \in U(x_0)$  справедливо равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}},$$

где  $\theta \in (0, 1)$ ,  $R_{n+1}$  — остаточный член в форме Лагранжа.

Пусть  $x \in U(x_0)$ , и пусть для определенности  $x > x_0$ . Рассмотрим на отрезке  $[x_0, x]$  две функции

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x - t)^k \\ \psi(t) &= (x - t)^{n+1}\end{aligned}$$

Для этих функций имеем

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (x - x)^k = f(x) - f(x) = 0, \\ \varphi(x_0) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k, \\ \psi(x) &= (x - x)^{n+1} = 0, \\ \psi(x_0) &= (x - x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

Вычислим производные

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \left( f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x - t)^k \right)' = \\ &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left( f^{(k+1)}(t) \cdot (x - t)^k - k \cdot f^{(k)}(t) \cdot (x - t)^{k-1} \right) = \\ &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x - t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x - t)^{k-1}\end{aligned}$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования  $l = k - 1$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x - t)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x - t)^l = f'(t) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x - t)^l$$

Следовательно



$$\begin{aligned}\varphi'(x) = & -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + f'(t) + \\ & + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n,\end{aligned}$$

Т.е.

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n$$

Далее,  $\psi'(t) = -(n+1) \cdot (x-t)^n$ , и непосредственно видно, что производная  $\psi'(t)$  на интервале  $(x_0, x)$  отлична от нуля. К паре функций  $\psi(t)$  и  $\varphi(t)$  на отрезке  $[x_0, x]$  применим теорему Коши. Имеем

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta(x - x_0))}{\psi'(x_0 + \theta(x - x_0))}, \text{ где } \theta \in (0, 1).$$

Таким образом,  $0 < \theta < 1 \iff 0 < \theta(x - x_0) < x - x_0 \iff x_0 < x_0 + \theta(x - x_0) < x, \Rightarrow c = x_0 + \theta(x - x_0) \in (x_0, x)$

Учитывая результаты проведенных вычислений, получаем отсюда:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = & \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} \cdot (x - x_0 - \theta(x - x_0))^n \times \\ & \times \frac{1}{-(n+1)(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!},\end{aligned}$$

Т.е.

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы при  $x > x_0$ . При  $x < x_0$  рассуждения аналогичны; если  $x = x_0$ , то утверждение теоремы очевидно.

Теорема доказана.

### 37. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть функция  $f(x)$  определена в окрестности точки  $x_0$  и имеет в этой точке производные всех порядков до  $n$ -го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{R_{n+1}}, \quad x \rightarrow x_0, \text{ где}$$

$R_{n+1}$  — остаточный член в форме Пеано

Равенство, которое требуется доказать, означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0$$

Мы имеем здесь дело с неопределенностью  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ . Чтобы раскрыть её, применим  $n - 1$  раз правило Лопиталья-Бернулли

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} \cdot (x - x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} \right) = f^{(n)}(x_0).$$

Теорема доказана.

**38. Формула Маклорена для функции  $y = e^x$  с остаточным членом в форме Лагранжа**

Найдем производные функции  $y = e^x$  до  $n$ -го порядка:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

Таким образом, получаем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}}_{\text{остаточный член}}, \theta \in (0, 1)$$

### 39. Формула Маклорена для функции $y = \sin(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

Найдем производные функции  $y = \sin(x)$  до  $(2n + 2)$ -го порядка:

$$f(x) = \sin(x), \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin(x) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1$$

...

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot \cos(x), \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \sin(x), \quad f^{(2n+2)}(0) = 0$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \sin(x) = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \\ & + \underbrace{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \sin\left(\theta x + (2n+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{остаточный член}}, \quad \theta \in (0, 1) \end{aligned}$$

**40. Формула Маклорена для функции  $y = \cos(x)$  с остаточным членом в форме Лагранжа**

Найдем производные функции  $y = \cos(x)$  до  $(2n + 1)$ -го порядка:

$$f(x) = \cos(x), \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin(x) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = 0$$

...

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot \cos(x), \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \sin(x), \quad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \cos(x) = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \\ & + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \cos\left(\theta x + (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{остаточный член}}, \quad \theta \in (0, 1) \end{aligned}$$

**41. Формула Маклорена для функции  $y = \ln(1+x)$  с остаточным членом в форме Лагранжа**

Найдем производные функции  $y = \ln(1+x)$  до  $(n+1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1 \\
 f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1 = -1! \\
 f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2 = 2! \\
 f^{IV}(x) &= \frac{-3 \cdot 2}{(1+x)^4}, \quad f^{IV}(0) = -3 \cdot 2 = -3! \\
 &\dots \\
 f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \cdot (-1)^{n-1}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \\
 f^{(n+1)}(x) &= \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \cdot (-1)^n, \quad f^{(n+1)}(0) = (-1)^n \cdot n!
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}}_{\text{остаточный член}},$$

$$\theta \in (0, 1)$$

**42. Формула Маклорена для функции  $y = (1 + x)^a$  с остаточным членом в форме Лагранжа**

Найдем производные функции  $y = (1 + x)^a$  до  $n$ -го порядка:

$$f(x) = (1 + x)^a, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = a \cdot (1 + x)^{a-1}, \quad f'(0) = a$$

$$f''(x) = a \cdot (a - 1) \cdot (1 + x)^{a-2}, \quad f''(0) = a \cdot (a - 1)$$

...

$$f^{(n)}(x) = a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot (a - (n - 1)) \cdot (1 + x)^{a-n},$$

$$f^{(n)}(0) = a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot (a - (n - 1))$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} (1+x)^a = & 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \dots \\ & + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))}{n!}x^n + \underbrace{\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\theta x)^{a-(n+1)} \cdot x^{n+1}}_{\text{остаточный член}}, \end{aligned}$$

$$\theta \in (0, 1)$$

### 43. Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции

Используются определения 64, 71 из списка

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Для того, чтобы эта функция была неубывающей на интервале  $(a, b)$ , необходимо и достаточно, чтобы производная  $f'(x)$  была неотрицательна  $\forall x \in (a, b)$ .

*Доказательство*

$(\Rightarrow)$

По условию  $f(x)$  не убывает на интервале  $(a, b)$ . Тогда в точке  $x \in (a, b)$ , в которой функция  $f(x)$  дифференцируема, имеем

$$\begin{aligned} \bullet \Delta x > 0 &\Rightarrow f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \\ \bullet \Delta x < 0 &\Rightarrow f(x) \geq f(x + \Delta x) \Rightarrow f'(x) = f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \end{aligned}$$

Таким образом,  $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ .

$(\Leftarrow)$

По условию во всех точках интервала  $(a, b)$ , в которых  $f(x)$  дифференцируема, выполняется неравенство  $f'(x) \geq 0$ . Пусть  $x_1$  и  $x_2$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ , — произвольные точки этого промежутка. Тогда функция  $y = f(x)$  удовлетворяет теореме Лагранжа,  $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$ , такая, что  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

Т.к.  $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , и  $x_2 > x_1$ , то  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \iff f(x_2) \geq f(x_1)$

А значит, функция  $y = f(x)$  - неубывающая на  $(a, b)$  по определению.

Теорема доказана.



#### 44. Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции

Используются определения 64, 69 из списка

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Для того, чтобы эта функция была невозрастающей на интервале  $(a, b)$ , необходимо и достаточно, чтобы производная  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .

*Доказательство*

$(\Rightarrow)$

По условию  $f(x)$  не возрастает на интервале  $(a, b)$ . Тогда в точке  $x \in (a, b)$ , в которой функция  $f(x)$  дифференцируема, имеем

$$\begin{aligned} \bullet \Delta x > 0 &\Rightarrow f(x + \Delta x) \leq f(x) \Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \\ \bullet \Delta x < 0 &\Rightarrow f(x) \leq f(x + \Delta x) \Rightarrow f'(x) = f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \end{aligned}$$

Таким образом,  $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \leq 0$ .

$(\Leftarrow)$

По условию во всех точках интервала  $(a, b)$ , в которых  $f(x)$  дифференцируема, выполняется неравенство  $f'(x) \leq 0$ . Пусть  $x_1$  и  $x_2$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ , — произвольные точки этого промежутка. Тогда функция  $y = f(x)$  удовлетворяет теореме Лагранжа,  $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$ , такая, что  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

Т.к.  $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \leq 0$ , и  $x_2 > x_1$ , то  $f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \iff f(x_2) \leq f(x_1)$

А значит, функция  $y = f(x)$  - неубывающая на  $(a, b)$  по определению.

Теорема доказана.

**45. Первое достаточное условие экстремума (по первой производной)**

Используются определения 54, 64, 76, 77 из списка

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна в  $U_\delta(x_0)$  и дифференцируема в  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Тогда, если  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$ , то в этой точке функция  $f(x)$  имеет строгий локальный минимум, а если  $f'(x)$  меняет знак с плюса на минус при переходе через  $x_0$ , то функция  $f(x)$  имеет в этой точке строгий локальный максимум. Если же  $f'(x)$  сохраняет знак в проколотой окрестности точки  $x_0$ , то экстремума в этой точке нет.

*Доказательство*

Рассмотрим первое утверждение теоремы. Если  $f'(x) < 0$  при всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , то на полуинтервале  $(x_0 - \delta, x_0]$  функция  $f(x)$  убывает, и для любого  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  имеем  $f(x) > f(x_0)$ . На полуинтервале  $[x_0, x_0 + \delta)$  функция  $f(x)$  возрастает, и  $f(x_0) < f(x)$  для всех  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Мы видим, что  $x_0$  и в самом деле есть точка строгого локального минимума. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы. В случае последнего утверждения функция  $f(x)$  либо возрастает, либо убывает на интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  в зависимости от знака производной  $f'(x)$ ; экстремума в точке  $x_0$  в обоих случаях нет.

Теорема доказана.

**46. Второе достаточное условие экстремума (по второй производной)**

Используются определения 64, 74, 75, 81 из списка

Если точка  $x = x_0$  - стационарная точка функции  $y = f(x)$ , а функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема в  $x = x_0$  и  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ), тогда точка  $x = x_0$  - точка локального минимума (максимума).

*Доказательство*

По условию  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$  функция  $f'(x)$  является возрастающей в  $U(x_0)$

По условию  $x_0$  - стационарная точка функции  $y = f(x) \xrightarrow{\text{по опр.}} f'(x_0) = 0$  Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ при } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{по первому достаточному условию экстремума}$$

$x_0$  — точка локального минимума

Для  $f''(x_0) < 0$  аналогично.

Теорема доказана.

#### 47. Достаточное условие выпуклости функции

Используются определения 64, 86, 87 из списка

Пусть функция  $f(x)$  дважды дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , причем в каждой точке  $x \in (a, b)$  выполняется неравенство  $f''(x) > 0$ . Тогда функция  $f(x)$  выпукла вниз на указанном интервале. Если же во всех точках интервала  $(a, b)$  вторая производная  $f''(x)$  отрицательна, то функция  $f(x)$  выпукла вверх на этом интервале.

##### Доказательство

Докажем лишь первое утверждение теоремы (второе доказывается аналогично). Рассмотрим касательную к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ ,  $x_0 \in (a, b)$ . Уравнение такой касательной имеет вид  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Пусть для определенности  $x_0 < x < b$ . Тогда разность ординат точки касательной  $(x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$  и точки графика  $(x, f(x))$  равна  $\Delta y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$ . По теореме Лагранжа  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ . Поэтому  $\Delta y = (f'(x_0) - f'(c)) \cdot (x - x_0)$ ,  $c \in (x_0, x)$ . Применим еще раз теорему Лагранжа:  $\Delta y = -f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$ ,  $c_1 \in (x_0, c)$ . Здесь  $f''(c_1) > 0$ ,  $c - x_0 > 0$ ,  $x - x_0 > 0$ , поэтому  $\Delta y < 0$ , и точка касательной лежит ниже соответствующей точки графика функции. Аналогично можно доказать это утверждение и в случае  $a < x < x_0$ . Таким образом, точки касательной лежат ниже соответствующих точек графика функции, и функция  $f(x)$  выпукла вниз на интервале  $(a, b)$ . Теорема доказана.

**48. Необходимое условие точки перегиба**

Используются определения 64, 88 из списка

Пусть функция  $f(x)$  дважды дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ , причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если  $x_0$  - точка перегиба графика функции  $y = f(x)$ , то  $f''(x_0) = 0$ .

*Доказательство*

Предположим,  $f''(x_0) \neq 0$ , и пусть для определенности  $f''(x_0) > 0$ . Тогда в силу непрерывности  $f''(x)$  в точке  $x_0$  существует окрестность  $U_\delta(x_0)$  этой точки такая, что  $f''(x) > 0$  во всех точках этой окрестности по теореме о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. Тогда на обоих интервалах  $(x_0 - \delta, x_0)$  и  $(x_0, x_0 + \delta)$  функция  $f(x)$  выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке  $x_0$ . Поэтому предположение  $f''(x_0) \neq 0$  неверное,  $\Rightarrow f''(x_0) = 0$ .

Теорема доказана.

**49. Достаточное условие точки перегиба**

Используются определения 50, 88 из списка

Пусть функция  $f(x)$  определена в окрестности  $U_\delta(x_0)$  точки  $x_0$  и непрерывна в указанной точке. Тогда, если в соответствующей проколотой окрестности  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  функция  $f(x)$  имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то точка  $x_0$  есть точка перегиба функции  $y = f(x)$ .

*Доказательство*

Пусть для определенности вторая производная  $f''(x)$  положительна при  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  и отрицательна при  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Тогда на  $(x_0 - \delta, x_0)$  функция  $f(x)$  выпукла вниз, а на  $(x_0, x_0 + \delta)$  выпукла вверх, т.е. при переходе через точку  $x_0$  направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что  $x_0$  - точка перегиба функции  $f(x)$ .

Теорема доказана.