https://t.me/botva_its6

# Подготовка к экзамену

## Математический анализ

Над файлом работали:
fiixii, pluttan

# 1 Определения и понятия

1. $\mathbb{N}$ - **Множество натуральных чисел**, состоит из чисел, возникающих при счёте.

2. $\mathbb{Z}$ - **множество целых чисел**, состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

3. $\mathbb{Q}$ - **множество рациональных чисел**, состоит из чисел, представимых в виде $\frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$.

4. $\mathbb{I}$ - **множество иррациональных чисел**, состоит из чисел, которые не представимы в виде $\frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$, такие как $e, \pi, \sqrt{3}$ и т.д..

5. $\mathbb{R}$ - **множество действительных чисел**, состоит из рациональных и иррациональных чисел.

6. $\overline{\mathbb{R}}$ - **расширенное множество действительных чисел**, состоит из действительных чисел с добавлением $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.

7. **Окрестностью** $U(x)$ **точки** $x$ называют любой интервал, содержащий эту точку.

8. **Проколотой окрестностью** $\overset{\circ}{U}(x)$ **точки** $x$ называют окрестность этой точки $U(x)$, за исключением самой точки $x$.

9. $\varepsilon$**-окрестностью точки** $x_0$ (при положительном $\varepsilon$) называют интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$.

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} :\ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$

10. **правой (правосторонней)** $\delta$**-окрестностью точки** $x_0$ называют полуинтервал $[x_0,\ x_0 + \delta),\ \delta > 0$.

$$U_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R} :\ x_0 \leqslant x < x_0 + \delta\},\ \delta > 0$$

11. **левой (левосторонней)** $\delta$**-окрестностью точки** $x_0$ называют полуинтервал $(x_0 - \delta,\ x_0],\ \delta > 0$.

$$U_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R} :\ x_0 - \delta < x \leqslant x_0\},\ \delta > 0$$

12. **Окрестностью точки** $+\infty$ называют интервал $(a, +\infty),\ a > 0$.

$$U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ x > a\},\ a > 0$$

13. **Окрестностью точки** $-\infty$ называют интервал $(-\infty, -a),\ a > 0$.

$$U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ x < -a\},\ a > 0$$

14. **Окрестностью** $\infty$ (бесконечности без знака) называют объединение двух интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty),\ a > 0.$

$$U(\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| > a\},\ a > 0$$

15. **Последовательностью** $\{X_n\}$ называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу $n$ при этом поставлено в соответствие число $x_n$, то это число называется $n$-м элементом последовательности; $n$ называют номером элемента $x_n$.

16. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **неубывающей**, если $x_{n+1} \geqslant x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

17. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **возрастающей**, если $x_{n+1} > x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

18. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **невозрастающей**, если $x_{n+1} \leqslant x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

19. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **убывающей**, если $x_{n+1} < x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

20. Неубывающие, невозрастающие, убывающие и возрастающие последовательности называют **монотонными**.

21. Последовательность называется **постоянной**, если $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n = c,\ c \in \mathbb{R}$.

22. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \leqslant M$.

23. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если $\exists M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \geqslant M$.

24. Последовательность, ограниченная и сверху и снизу, называют **ограниченной**: $\exists M > 0,\ M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ |x_n| \leqslant M$.

25. Число $a$ называется **пределом числовой последовательности** $\{X_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного $\varepsilon$ существует такой номер $N$, зависящий от $\varepsilon$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

26. Числовая последовательность называется **сходящейся**, если существует предел этой последовательности, и он конечен.

27. Последовательность $\{X_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

28. Число $a$ называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполняется

неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$ (определение по Коши).

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$$

29. Число $a$ называется **пределом функции** $f(x)$ при $x\to x_0$, если для любой последовательности $\{X_n\}$ точек из $\overset{\circ}{U}(x_0)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_n)\}=a$ (определение по Гейне).

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \iff \{\forall x_n\in \overset{\circ}{U}(x_0),\ n\in\mathbb{N}\}\cap \lim_{n\to\infty} x_n=x_0:\ \lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\}=a$$

30. Число $a$ называется **правым (правосторонним) пределом функции** f(x) при $x\to x_0+$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при любом $x\in \overset{\circ}{U}{}^+_\delta(x_0)$ $(..\ x_0<x<x_0+\delta)$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \overset{\circ}{U}{}^+_\delta(x_0)\Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$$

31. Число $a$ называется **левым (левосторонним) пределом функции** f(x) при $x\to x_0-$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при любом $x\in \overset{\circ}{U}{}^-_\delta(x_0)$, $(..\ x_0-\delta<x<x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in \overset{\circ}{U}{}^-_\delta(x_0)\Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$$

32. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной на множестве** $D$, если существует такое число $M>0$, что для любых $x\in D$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant M$.

33. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной** (на области определения $D_f$), если существует такое число $M>0$, что для любых $x\in D_f$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant M$.

34. Функцию $f(x)$ называют **локально ограниченной в окрестности точки** $a$, если существует такое число $M>0$ и такая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что для любых $x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant M$.

35. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой** при $x\to x_0,\ x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

36. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой** при $x\to x_0,\ x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$ **- первый замечательный предел**.

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **- второй замечательный предел**.

39. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **сравнимыми** бесконечно малыми при $x\to x_0$, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

40. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **несравнимыми** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения при $x \to x_0$.

41. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **бесконечно малыми одного порядка** при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = O(\beta(x))$, если существует отличный от нуля конечный предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0 \iff \exists \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

42. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0 \iff \exists \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

43. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более низкого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$, равен бесконечности.

44. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **эквивалентными** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если предел их отношения при $x \to x_0$ равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

45. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой $k$-ого порядка** малости относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, а число $k$ $(k > 0)$ - **порядком малости** $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если функции $\alpha(x)$ и $\beta^k(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

46. Функцию $u(x)$ называют **бесконечно большой $k$-ого порядка** роста относительно $w(x)$ при $x \to x_0$, а число $k$ $(k > 0)$ - **порядком роста** $u(x)$ относительно $w(x)$ при $x \to x_0$, если функции $u(x)$ и $w^k(x)$ являются бесконечно большими одного порядка при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{w^k(x)} = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

47. **Главная часть суммы бесконечно малых функций** - это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

48. **Приращением аргумента** в точке $x_0$ называется изменение аргумента функции от значения $x_0$ к другому значению x,

$$\Delta x = x - x_0$$

49. **Приращением функции** в точке $x_0$ называется $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

50. *(опр. 1)* Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0$, если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

51. *(опр. 2)* Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0$, если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 ($\Delta x \to 0$).

52. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0$ **справа**, если в этой точке существует конечный *правый* предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

53. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0$ **слева**, если в этой точке существует конечный левый предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

54. Функция $f(x)$ **непрерывна на интервале** $(a, b)$, если она непрерывна в каждой его точке.

55. Функция $f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале $(a, b)$, в точке $a$ - непрерывна справа, т.е. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$, в точке $b$ - непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

56. Если данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0$, то $x_0$ называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.

57. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

58. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).

59. Если $x_0$ — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или $f(x)$ не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку $x_0$ **- точкой устранимого разрыва первого рода**.

60. Если $x_0$ — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку $x_0$ **- точкой неустранимого разрыва первого рода**.

61. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется **производной функции** $f(x)$ **в точке** $x_0$ и обозначается $f'(x0)$.

62. Если $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки $x_0$ и если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **правой производной функции** $f(x)$ **в** $x_0$ и обозначается $f'_+(x)$.

63. Если $f(x)$ определена в левосторонней окрестности точки $x_0$, и если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **левой производной функции** $f(x)$ **в** $x_0$ и обозначается $f'_-(x)$.

64. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Функция называется **дифференцируемой в точке** $x_0$, если ее приращение $\Delta y$ в точке $x_0$ представимо в следующем виде: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $A$ - некоторое число, не зависящее от $\Delta x$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

65. **дифференциалом функции** $f(x)$ **в точке** $x_0$ называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента $\Delta x$.

66. **Дифференциалом** $n$**-го порядка** называется дифференциал от дифференциала $n-1$ порядка, т.е.
$$d^{\,n}y = d(d^{\,n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$$

67. **Производная** $n$**-ого порядка** от функции $y = f(x)$, есть производная от производной $n-1$ порядка, т.е.
$$f^{(n)} = (f^{n-1}(x))'$$

68. Функция $f(x)$ называется **возрастающей на интервале** $(a,b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

69. Функция $f(x)$ называется **невозрастающей на интервале** $(a,b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \leqslant f(x_1)$.

70. Функция $f(x)$ называется **убывающей на интервале** $(a,b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

71. Функция $f(x)$ называется **неубывающей на интервале** $(a,b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

72. Функция $f(x)$ называется **монотонной**, если она невозрастающая или неубывающая.

73. Функция $f(x)$ называется **строго монотонной**, если она возрастающая или убывающая.

74. Точка $x_0$ называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0):\ f(x_0) \leqslant f(x)$.

75. Точка $x_0$ называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0):\ f(x_0) \geqslant f(x)$.

76. Точка $x_0$ называется **точкой строгого локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ f(x_0) < f(x)$.

77. Точка $x_0$ называется **точкой строгого локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0): \ f(x_0) > f(x)$.

78. **Точками локального экстремума** называются точки локального максимума и строгого локального максимума, локального минимума и строгого локального минимума.

79. **Точками строгого локального экстремума** называются точки строгого локального максимума и минимума.

80. Точку $x_0$ из области определения функции $f(x)$ называют **критической**, если производная в ней равна 0 или не сущестует вовсе.

81. Точку $x_0$ из области определения функции $f(x)$ называют **стационарной**, если $f'(x_0) = 0$.

82. Прямая $Ax+By+C = 0$ называется **асимптотой** графика $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к 0 при бесконечном удалении точки $M$ от начала координат.

83. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+(-)} f(x) = \infty$

84. Прямая $y = kx + b$ называется **правой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

85. Прямая $y = kx + b$ называется **левой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to -\infty$.

86. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$. График функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a, b)$ **выпуклость вверх**, если он лежит не выше любой касательной к графику на (a, b).

87. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$. График функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a, b)$ **выпуклость вниз**, если он лежит не ниже любой касательной к графику на (a, b).

88. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке $x_0$ и если $\exists \delta > 0$ такое, что направления выпуклостей функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

# 2 Вопросы для подготовки к экзамену

## 2.1 *Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности)*

Если последовательность имеет предел, то этот предел - единственный.
*Доказательство (от противного)*
Пусть $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$, где $a$ и $b$ - пределы сходящейся последовательности $\{X_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = b,\ a \neq b$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Примем $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ и при $n > max(N_1,\ N_2)$ получим

$$|b-a| = |x_n - a + b - x_n| \leqslant |x_n - a| + |b - x_n| = |x_n - a| + |x_n - b| \Rightarrow |b-a| < 2\varepsilon$$

Или $|b-a| < 2 \cdot \frac{|b-a|}{3}$, т.е. $|b-a| < \frac{2}{3}|b-a|$, $\frac{1}{3}|b-a| < 0$, чего не может быть $\Rightarrow a \neq b$ - неверно, т.е. $a = b \Rightarrow$ предел единственный. Теорема доказана.

## 2.2 *Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности)*

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.
*Доказательство*
Пусть $\{X_n\}$ - сходящаяся последовательность. Тогда по определению, у нее существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon + a < x_n < \varepsilon + a$$

Обозначим через $A$ максимальное число среди $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|$, т.е.

$$A = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|)$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| < A, \Rightarrow$ последовательность ограничена. Теорема доказана.

## 2.3 *Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)*

Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$, то $f(x)$ локально ограничена.
*Доказательство*
По условию $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $|f(x)| - |a| \leqslant |f(x) - a| < 1$, а значит

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| < 1 + |A| = const \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$$

$f(x)$ является локально ограниченной в окрестности точки $x_0$. Теорема доказана.

## 2.4 *Теорема (о сохранении функцией знака своего предела)*

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, то $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ функция $f(x)$ сохраняет знак своего предела.

*Доказательство*

По условию $\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

- в случае $a > 0$ выбираем $\varepsilon = \frac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2}$$

$$-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$$

  Следовательно $f(x) > \frac{a}{2} > 0$, т.е. данная функция положительна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

- в случае $a < 0$ выбираем $\varepsilon = -\frac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{3a}{2} < f(x) < \frac{a}{2}$$

  Следовательно $f(x) < \frac{a}{2} < 0$, т.е. данная функция отрицательна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Теорема доказана.

## 2.5 *Теорема (о предельном переходе в неравенстве)*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки $x_0$, причем для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то $a \geqslant b$.

*Доказательство*

По условию $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0): \ f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0$, тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = a - b \geqslant 0, \Rightarrow a \geqslant b$$

Теорема доказана.

## 2.6 *Теорема (о пределе промежуточной функции)*

Пусть для всех $x$ из некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки $x_0$ выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, равные одному и тому же числу $a$. Тогда и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.
*Доказательство*
По условию $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, тогда по определению предела функции,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. }\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. }\ a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

Тогда при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0),\ \delta = min(\delta_1, \delta_2)$, выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$|g(x) - a| < \varepsilon$$

Таким образом, получаем

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x\to x_0} g(x) = a$$

Теорема доказана.

## 2.7 *Теорема (о пределе произведения функций)*

Если $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

*Доказательство*

По условию $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой имеем

$$f(x) = a + \alpha(x),\ \text{где } \alpha(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \to x_0$$

$$g(x) = b + \beta(x),\ \text{где } \beta(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \to x_0$$

Тогда

$$f(x)\cdot g(x) = (a+\alpha(x))\cdot(b+\beta(x)) = a\cdot b + a\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot b + \alpha(x)\cdot\beta(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0}(a\cdot b + \underbrace{a\cdot\beta(x)}_{..\ x\to x_0} + \underbrace{\alpha(x)\cdot b}_{..\ x\to x_0} + \underbrace{\alpha(x)\cdot\beta(x)}_{..\ x\to x_0}) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}(a\cdot b) = a\cdot b = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема доказана.

## 2.8 *Теорема (о пределе сложной функции)*

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ конечный предел, равный $b$, и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ этой точки, а функция $g(y)$ имеет в точке $b$ конечный предел $c$, то сложная функция $g(f(x))$ имеет $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.
*Доказательство*
По определению предела функции по Гейне имеем:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \iff \{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(a),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} x_n = a : \lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = b$$

$$\exists \lim_{y\to b} g(y) = c \iff \{\forall y_n \in \overset{\circ}{U}(b),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} y_n = b : \lim_{n\to\infty}\{g(y_n)\} = c$$

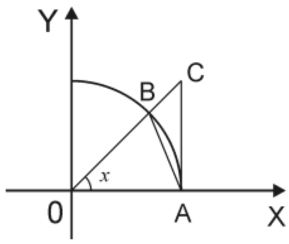
Пусть $\{X_n\}$ - произвольная последовательность, стремящаяся к точке $a$ и $x_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \{f(x_n)\} = b$, но $f(x_n) \neq b\ \forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $y_n = f(x_n)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \{y_n\} = b$ и $y_n \neq b\ \forall n \in \mathbb{N}$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \{g(y_n)\} = c$, т.е.

$$\{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(a),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} x_n = a : \lim_{n\to\infty}\{g(f(x_n))\} = c \iff \lim_{n\to\infty} g(f(x)) = c$$

Теорема доказана.

## 2.9 *Вывод первого замечательного предела*

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$$




Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса $R$ с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке $A$, и пусть угол $\angle AOB$ равен $x$ (радиан). Пусть, далее, $CA$ — перпендикуляр к этой оси, $C$ — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка $OB$ за точку $B$. Тогда

$$S_{\triangle OAB} < S_{\ OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2}R^2 sin(x) < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tg(x)$$

$$sin(x) < x < tg(x)$$

$$1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$$

$$1 > \frac{sin(x)}{x} > cos(x), \text{ при } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Рассмотрим $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, а значит справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{sin(\beta)}{\beta} > cos(\beta)$$

Вернемся к замене $\beta = -x$

$$1 > \frac{sin(-x)}{-x} > cos(-x)$$

$$1 > \frac{-sin(x)}{-x} > cos(x)$$

$$1 > \frac{sin(x)}{x} > cos(x) \text{ при } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} cos(x) = 1 \\ &\lim_{x\to 0} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ (по т. о пределе промежуточной функции) } \lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$$

## 2.10 *Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)*

Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ имеет место $\iff$ $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

*Доказательство*

($\Rightarrow$)

По условию $\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, тогда по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$. Тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, т.е. $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Но $\alpha(x) = f(x) - a \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

($\Leftarrow$)

По условию $f(x) = a + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, тогда по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Но по условию $f(x) = a + \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = f(x) - a$, отсюда имеем

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Теорема доказана.

## 2.11 *Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную)*

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, $f(x)$ - ограниченная функция, то $\alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$. *Доказательство*
По условию $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{U}_1(x_0) : \forall x \in \mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$$

$f(x)$ - ограниченная функция, тогда

$$|f(x)| < c, \text{ где } c = const, \ \forall x \in \mathring{U}_2(x_0)$$

Таким образом,

$$\forall x \in \mathring{U}(x_0) = \mathring{U}_1(x_0) \cap \mathring{U}_2(x_0) :$$

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c \Rightarrow$$

$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$
Теорема доказана.

## 2.12 *Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой)*

$\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$.
$f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

*Доказательство*

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки $x_0$. Выберем произвольное $E > 0$. Тогда

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{E} > 0 \;\; \exists \overset{\circ}{U}_1(x_0):\; \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_1(x_0) \Rightarrow 0 < |\alpha(x)| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{|\alpha(x)|} > E, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \frac{1}{\alpha(x)} \text{ - бесконечно большая функция при } x \to x_0$$

Пусть $f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\text{для } E = \frac{1}{\varepsilon} \;\; \exists \overset{\circ}{U}(x_0):\; \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > E, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{E} = \varepsilon, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)} \text{ - бесконечно малая функция при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

## 2.13 *Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)*

Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, и $f(x)$ - некоторая функция, определенная в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки $x_0$. Тогда:

- если существует предел при $x \to x_0$ произведения $\alpha(x) \cdot f(x)$, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \to x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$
- если существует предел при $x \to x_0$ частного $\frac{f(x)}{\alpha(x)}$ , то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \to x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$

*Доказательство*

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тогда по определению $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

- $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot f(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (\beta(x) \cdot f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} (\beta(x) \cdot f(x))$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x) \cdot f(x)}{\alpha(x) \cdot \beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)}$ Теорема доказана.

## 2.14 *Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых)*

Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ эквивалентны $\iff$ их разность имеет больший порядок малости при $x \to x_0$ по сравнению с каждой из них.

*Доказательство*

$(\Rightarrow)$

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тогда по определению $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \text{ при } x \to x_0$$

$(\Leftarrow)$

По условию $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$ при $x \to x_0,\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \to x_0$. Тогда

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

## 2.15 *Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков)*

Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ эквивалентна своей главной части.

*Доказательство*

Пусть $\alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ ...,\ \alpha_n(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to x_0$, и $\alpha_1(x)$ - главная часть суммы $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0, \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} = 0,\ ...,\ \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 0,$$

Тогда рассмотрим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1 + \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} + ... + \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$$

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x) \sim \alpha_1(x) \text{ при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

## 2.16 *Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)*

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то функции $f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$ (последнее при $g(x) \neq 0$) - также непрерывны в точке $x_0$.

*Доказательство*

По условию $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, тогда по определению

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

1. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0), \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} f(x) \pm g(x)$ - непрерывна в точке x = $x_0$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0), \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна в точке x = $x_0$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке x = $x_0$ при условии $g(x) \neq 0$.

Теорема доказана.

## 2.17 *Теорема (о непрерывности сложной функции)*

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

*Доказательство*

По условию функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, функция $g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\exists \lim_{y \to b} g(y) = g(b)$$

Тогда

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to b} g(y) = g(b) = g(f(a)), \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \text{функция } g(f(x)) \text{ непрерывна в точке } x = a$$

Теорема доказана.

## 2.18 *Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки $x_0$ функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

*Доказательство*

По условию $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$$

Тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки $x_0$, т.е.

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Так как $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$, то

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) :\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) :\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Теорема доказана.

### 2.19 *Функция, непрерывная в точке. Теорема о непрерывности элементарных функций.*

*(опр. 1)* Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0$, если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

*(опр. 2)* Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0$, если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 $(\Delta x \to 0)$.

*Теорема (о непрерывности элементарных функций)*

Все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

*Доказательство ( для $y = sin(x)$ и $y = cos(x)$ )*

$$y = sin(x)$$

Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = sin(x+\Delta x) - sin(x) =$$

$$= 2sin\Big(\frac{x+\Delta x - x}{2}\Big) \cdot cos\Big(\frac{x+\Delta x + x}{2}\Big) = 2sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot cos\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot cos\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big)\right) = 0,$$

Т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} y = sin(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

$$y = cos(x)$$

Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = cos(x+\Delta x) - cos(x) =$$

$$= 2sin\Big(\frac{x+\Delta x + x}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{x-\Delta x - x}{2}\Big) = -2sin\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-2sin\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big)\right) = 0,$$

Т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} y = cos(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

## 2.20 *свойства функций, непрерывных на отрезке*

1. *Первая теорема Вейерштрасса*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

2. *Вторая теорема Вейерштрасса*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение.

3. *Первая теорема Больцано-Коши*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой значение функции $f(c) = 0$.

4. *Вторая теорема Больцано-Коши*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(a) < f(c) < f(b)$.

5. *Теорема о непрерывности обратной функции*

   Если функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на $[a, b]$, то существует и определена на отрезке $[f(a), f(b)]$ обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и возрастающая (убывающая) на этом отрезке.

## 2.21 *Точки разрыва функции и их классификация. Примеры*

Если данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0$, то $x_0$ называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.

1. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

   Пример: $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$. Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to 0+} \frac{sin(x)}{x} = 1 \\ \exists \lim\limits_{x\to 0-} \frac{sin(x)}{x} = 1 \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ точка } x = 0 \text{ - точка разрыва первого рода.}$$

2. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).

   Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$. Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \exists \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ точка } x = 0 \text{ - точка разрыва второго рода.}$$

3. Если $x_0$ — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или $f(x)$ не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку $x_0$ **- точкой устранимого разрыва первого рода**.

   Пример: $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$:

   Из соображений выше, точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода функции $f(x)$. При этом, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{sin(x)}{x} = 1$, тогда по определению, точка $x = 0$ - точка устранимого разрыва первого рода.

   Если доопределить функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

   то функция $f(x)$ по определению будет непрерывной.

4. Если $x_0$ — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку $x_0$ **- точкой неустранимого разрыва первого рода**.

Пример: $f(x) = \begin{cases} x-1, \ x \leqslant 0 \\ x+1, \ x > 0 \end{cases}$. Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 \\ \exists \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1 \\ \exists f(0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка $x = 0$ - точка неустранимого разрыва первого рода по определению.

## 2.22 *Теорема (о необходимом и достаточном условии существования наклонной асимптоты)*

Прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$$

*Доказательство*

$(\Rightarrow)$

По условию прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика $y = f(x)$. Тогда по определению

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}},\ \text{при } x \to +(-)\infty$$

Отсюда $\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \to k,\ f(x) - kx = b + \alpha(x)$, при $x \to +(-)\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ \lim\limits_{x\to+(-)\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$

$(\Leftarrow)$

По условию существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$$

тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$f(x) - kx = b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}},\ \text{при } x \to +(-)\infty$$

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}},\ \text{при } x \to +(-)\infty$$

Таким образом, прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ по определению. Теорема доказана.

## 2.23 *Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)*

Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x_0$ тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$ в этой точке.

*Доказательство*

$(\Rightarrow)$.

По условию функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда по определению дифференцируемости:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

После деления на $\Delta x$ получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

Таким образом производная $f'(x_0)$ существует (и равна A) по определению.

$(\Leftarrow)$

По условию существует $f'(x_0)$. Тогда по определению производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

После умножения на $\Delta x$ получаем:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ по определению. Теорема доказана.

## 2.24 *Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности функции)*

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство*

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, тогда по определению

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \big(A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\big) = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} y = f(x) \text{ непрерывна в точке } x = x_0$$

Теорема доказана.

## 2.25 *Теорема (о производной произведения двух дифференцируемых функций)*

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x_0$, то функция $f(x)\cdot g(x)$ тоже дифференцируема в этой точке и $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

*Доказательство*

По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x = x_0, \Rightarrow$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0)$$

Вычислим $\big(f(x)\cdot g(x)\big)'$ :

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\big(f(x)\cdot g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)}_{g(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} f(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)} =$$

$$f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Теорема доказана.

## 2.26 *Теорема (о производной частного двух дифференцируемых функций)*

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x_0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ тоже дифференцируема в этой точке (при условии $g(x) \neq 0$) и $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

*Доказательство*

По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x = x_0, \Rightarrow$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0)$$

Вычислим $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x) - g(x+\Delta x)\cdot f(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - g(x+\Delta x)\cdot f(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x) - \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot f(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot f(x)\right)\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\right) =$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}g(x)}_{g(x)} - \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}f(x)}_{f(x)}\right)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}}_{g^{-2}(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Теорема доказана.

## 2.27 *Теорема (о производной сложной функции)*

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0$ и функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке $x_0$, и $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'_u \cdot g'_x$.

*Доказательство*

По условию * функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, тогда по определению существует конечный $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x_0)$ * функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = u_0$, тогда по определению существует конечный $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$

Функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0, \Rightarrow$ Функция $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0,$ т.е. $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Таким образом,

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta u \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$$

## 2.28 *Теорема (о производной обратной функции)*

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и дифференцируема в точке $x = x_0$, то обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y = f(x_0)$ и $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

*Доказательство*

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0, \Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0, \Rightarrow$ Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$ т.е. $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0.$

Тогда

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = x'_y \overset{\text{по опр.}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Теорема доказана.

## 2.29 *Теорема (свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка)*

Дифференциал функции $y = f(u)$ не зависит от того, является ли $u$ - независимой переменной, или функцией от другой независимой переменной.
*Доказательство*

1. Пусть $y = f(u)$, где $u$ - независимая переменная. Тогда

$$dy = f'(u) \cdot du$$

2. Пусть $y = f(u)$, где $u = g(x)$ - некоторая функция, имеющая производную. Тогда

$$dy = y'_x \cdot du = y'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx}_{du} = y'_u \cdot du = f'(u) \cdot du.$$

Теорема доказана.

## 2.30 *Теорема Ферма*

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, и точка $x_0$ - есть точка локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$
*Доказательство*
Пусть $x_0$ - точка локального максимума функции $y = f(x)$, тогда по определению

$$\exists U_\delta(x_0):\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$$

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0,\ \Rightarrow$ в точке $x = x_0$ существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$
Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0),\ x_0 + \Delta x \in U_\delta(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0$$

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0$$

По теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \leqslant 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geqslant 0$$

Таким образом, $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

## 2.31 *Теорема Ролля*

Пусть функция $y = f(x)$ :

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале $(a, b)$
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале $(a, b)$ существует по крайней мере одна точка $x_0$, в которой $f'(x_0) = 0$.

*Доказательство*

По условию $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $\Rightarrow$ по (второй) теореме Вейерштрасса функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения, обозначим

$$M = \underset{[a,b]}{max}\big(f(x)\big)$$

$$m = \underset{[a,b]}{min}\big(f(x)\big)$$

тогда $\forall x \in [a, b]: \ m \leqslant f(x) \leqslant M$

Если $m = M$, то $\forall x \in [a, b] \ \ m = M = f(x) = const \Rightarrow \forall x \in [a, b] \ \ f'(x) = 0$

Если $m \neq M$, то

- $f(a) = f(b) = m$. Тогда функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего значения внутри $[a, b]$, т.е. $a < x_0 < b$

  Таким образом, точка $x_0$ - точка локального максимума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$

- $f(a) = f(b) = M$. Тогда функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего значения внутри $[a, b]$, т.е. $a < x_0 < b$

  Таким образом, точка $x_0$ - точка локального минимума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$

- $y = f(x)$ достигает своего минимального и максимального значения внутри $[a, b]$ в точках $x_0$ и $x_1$.

Точки $x_0$ и $x_1$ - точки экстремума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точках $x_0$ и $x_1$. В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_1) = 0$.

Теорема доказана.

## 2.32 *Теорема Лагранжа*

Пусть функция $f(x)$: 1) Непрерывна на отрезке $[a, b]$ 2) Дифференцируема на интервале $(a, b)$
Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$
*Доказательство*
Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$, поскольку этими свойствами обладает $f(x)$.

1.
$$\left.\begin{aligned} F(a) = f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a - a) = f(a) \\ F(b) = f(b) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля $\Rightarrow$ существует точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$$

Теорема доказана.

## 2.33 *Теорема Коши*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале $(a, b)$
3. $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a, b)$

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство*

Сначала заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, т.к. если бы $g(b) - g(a) = 0$, то $g(a) = g(b)$ и функция $g(x)$, в результате, удовлетворяла бы условию теоремы Ролля, согласно которой $\exists c \in (a, b)$, такая, что $g'(c) = 0$, что противоречит условию 3 теоремы.

Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big(g(x) - g(a)\big)$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$, поскольку этими свойствами обладают $f(x)$ и $g(x)$.
2. $$\left.\begin{array}{l} F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \big(g(a) - g(a)\big) = f(a) \\ F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \big(g(b) - g(a)\big) = f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля $\Rightarrow$ существует точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Теорема доказана.

## 2.34 *теорема Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций*

Пусть $f(x)$ и $g(x)$: 1) Являются бесконечно малыми или бесконечно большими функциями при $x \to x_0$ 2) Дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 3) $g'(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 4) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

*Доказательство (для б.м.ф)*

По условию $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to x_0$, тогда по определению

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0+} g(x) = \lim_{x \to x_0-} g(x) = 0$$

По условию $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \iff \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Рассмотрим пределы при $x \to x_0+$ (для $x \to x_0-$ доказывается аналогично)

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = x_0$, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в $U^+(x_0)$. Рассмотрим отрезок $[x_0, x]$, где $x > x_0$.

По условию $g'(x) \neq 0$ в $(x_0, x)$.

Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию теоремы Коши, а значит, $\exists c \in (x_0, x)$, такая, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

1. Так как $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

2. Так как $x_0 < c < x$, то, если $x \to x_0+$, то и $c \to x_0+$

Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ т.е. } \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Аналогично $\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Таким образом, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема доказана.

## 2.35 *Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.*

1. Сравним рост показательной функции $y = a^x$ и степенной функции $y = x^n$ ($a > 1$, $n > 0$):

   Так как при $x \to +\infty$ функции $y = a^x$ и $y = x^n$ являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли $n$ раз:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(a) \cdot a^x}{n \cdot x^{n-1}} = ... = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln^n(a) \cdot a^x}{n!} = +\infty$$

   Таким образом, показательная функция $y = a^x$ растет быстрее степенной функции $y = x^n$.

2. Сравним рост логарифмической функции $y = log_a(x)$ и степенной функции $y = x^n(a > 1, n > 0)$:

   Так как при $x \to +\infty$ функции $y = log_a(x)$ и $y = x^n$ являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{log_a(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x*ln(a)}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot ln(a)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

   Таким образом, степенная функция $y = a^x$ растет быстрее логарифмической функции $y = x^n$.

   *Вывод*:

   Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная - быстрее логарифмической.

## 2.36 *Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0$ и имеет в этой окрестности производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Тогда для любого $x \in U(x_0)$ справедливо равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}},$$

где $\theta \in (0,1)$, $R_{n+1} -$ остаточный член в форме Лагранжа.

Пусть $x \in U(x_0)$, и пусть для определенности $x > x_0$. Рассмотрим на отрезке $[x0, x]$ две функции

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k$$

$$\psi(t) = (x-t)^{n+1}$$

Для этих функций имеем

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (x-x)^k = f(x) - f(x) = 0,$$

$$\varphi(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k,$$

$$\psi(x) = (x-x)^{n+1} = 0,$$

$$\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}.$$

Вычислим производные

$$\varphi'(t) = \left(f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k\right)' =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(f^{(k+1)}(t) \cdot (x-t)^k - k \cdot f^{(k)}(t) \cdot (x-t)^{k-1}\right) =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1}$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования $l = k-1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l = f'(t) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l$$

Следовательно

$$\varphi'(x) = -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + f'(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n,$$

Т.е.

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n$$

Далее, $\psi'(t) = -(n+1) \cdot (x-t)^n$ , и непосредственно видно, что производная $\psi'(t)$ на интервале $(x_0, x)$ отлична от нуля. К паре функций $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке $[x0, x]$ применим теорему Коши. Имеем

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{\psi'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}, \text{ где } \theta \in (0,1).$$

Таким образом, $0 < \theta < 1 \iff 0 < \theta(x - x_0) < x - x_0 \iff x_0 < x_0 + \theta(x - x_0) < x, \Rightarrow$ $c = x_0 + \theta(x - x_0) \in (x_0, x)$

Учитывая результаты проведенных вычислений, получаем отсюда:

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{n!} \cdot \big(x - x_0 - \theta(x - x_0)\big)^n \times$$

$$\times \frac{1}{-(n+1)\big(x - x_0 - \theta(x - x_0)\big)^n} = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!},$$

Т.е.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы при $x > x_0$. При $x < x_0$ рассуждения аналогичны; если $x = x_0$, то утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

## 2.37 *Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$ и имеет в этой точке производные всех порядков до $n$-го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big),\ x \to x_0$$

Равенство, которое требуется доказать, означает, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0$$

Мы имеем здесь дело с неопределенностью $\{\frac{0}{0}\}$. Чтобы раскрыть её, применим n - 1 раз правило Лопиталя-Бернулли

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} \cdot (x - x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = ... =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0,$$

т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} \left( \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} \right) = f^{(n)}(x_0)$. Теорема доказана.

## 2.38 *Формула Маклорена для функции* $y = e^x$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*

Найдем производные функции $y = e^x$ до $n$-го порядка:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = ... = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$$

Таким образом, получаем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}}_{\text{остаточный член}},\ \theta \in (0, 1)$$

## 2.39 *Формула Маклорена для функции* $y = sin(x)$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*

Найдем производные функции $y = sin(x)$ до $n$-го порядка:

$$f(x) = sin(x),\ f(0) = 0$$

$$f'(x) = cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -sin(x) = sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 0$$

$$f'''(x) = -cos(x) = sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = -1$$

$$\dots$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot cos(x),\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot sin(x),\ f^{(2n+2)}(0) = 0$$

Таким образом, получаем

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+ \underbrace{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot sin\left(\theta x + (2n+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{остаточный член}}$$

## 2.40 *Формула Маклорена для функции* $y = cos(x)$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*

Найдем производные функции $y = sin(x)$ до $n$-го порядка:

$$f(x) = cos(x),\ f(0) = 1$$
$$f'(x) = -sin(x) = sin(x + \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -sin(x) = sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 0$$
$$f'''(x) = -cos(x) = sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = -1$$
$$\ldots$$
$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot cos(x),\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$
$$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot sin(x),\ f^{(2n+2)}(0) = 0$$