Векторная алгебра

Вектор в декартовой системе координат

Определение. Вектором называется упорядоченная пара точек (начало вектора и его конец). Если $A=(x_1;y_1;z_1)$, $B=(x_2;y_2;z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$.

Вектор $\vec{a}$ в координатном пространстве Oxyz, может быть представлен в виде

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, где тройка $\{a_x,a_y,a_z\}$ называется координатами вектора. Векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы (орты), направленные в положительную сторону координатных осей Ox, Oy и Oz, соответственно. Длиной (модулем) вектора $\vec{a}$ называется число $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Линейные операции с векторами

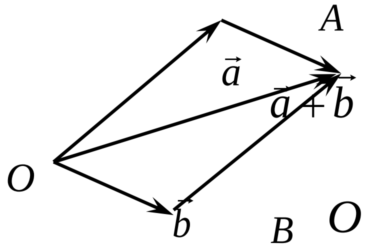


Рис. 1а

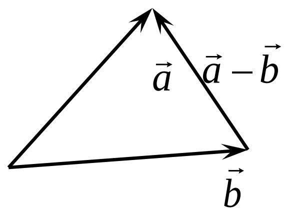


Рис. 1б

Сложение векторов определяется по правилу параллелограмма: вектор $\vec{a}+\vec{b}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.1а).

Разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, где $-\vec{b}$ – вектор той же длины, что и вектор $\vec{b}$, но противоположно направленный. Чтобы найти вектор-разность $\vec{a}-\vec{b}$ нужно отложить векторы

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ из общей точки, соединить концы векторов вектором, направленным от «вычитаемого» к «уменьшаемому» (то есть от $\vec{b}$ к $\vec{a}$) (рис.1б). Построенный вектор и будет искомой разностью.

При сложении нескольких векторов каждая координата суммы есть сумма соответствующих координат слагаемых векторов, при умножении вектора на данное число λ на это же число умножаются и координаты вектора:

а) $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$;

б) $\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$, где λ – скалярный множитель.

Несколько векторов называются коллинеарными (компланарными), если они параллельны одной и той же прямой (плоскости). Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ параллельны (коллинеарны), то есть соответствующие координаты этих векторов пропорциональны с одним и тем же коэффициентом пропорциональности: $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = \lambda$.

Базис на плоскости и в пространстве

Определение. Базисом на плоскости (в пространстве) называется упорядоченная пара (тройка) неколлинеарных (некомпланарных) векторов. Любой вектор однозначным образом раскладывается по базису. Коэффициенты разложения называются координатами этого вектора относительно данного базиса. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют базис в декартовом координатном пространстве Oxyz.

Пример 1.

Даны векторы $\vec{a} = \{1, 3\}, \vec{b} = \{-1, 2\}, \vec{c} = \{5, -5\}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости и найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе.

Решение. Если два вектора неколлинеарны ($\vec{a} \neq \lambda \vec{b}, \lambda \in R$), то они образуют базис на плоскости. Так как $\frac{1}{-1} \neq \frac{3}{2}\left(\frac{a_x}{a_y} \neq \frac{b_x}{b_y}\right)$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и, значит, образуют базис. Пусть в этом базисе вектор $\vec{c}$ имеет координаты $\vec{c} = \{\alpha, \beta\}$, тогда разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид $\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$, или в координатной форме

$$\begin{cases} \alpha a_x + \beta b_x = c_x, \\ \alpha a_y + \beta b_y = c_y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 5, \\ 3\alpha + 2\beta = -5. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений каким-либо образом, получим, что $\alpha = 1, \beta = -4$.

Значит $\vec{c} = \vec{a} - 4\vec{b}$. Таким образом, в базисе $\vec{a}, \vec{b}$ вектор $\vec{c}$ имеет координаты $\vec{c} = \{1, -4\}$.

Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ называется число, определяемое равенством:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Зная скалярное произведение, можно определить угол между двумя векторами по формуле: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Условие перпендикулярности ненулевых векторов (угол между ними равен 90°) имеет вид: $\cos\varphi = 0$, или $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$, а условие их коллинеарности: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, или $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$; 3) $(\alpha\,\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$; 4) $(\vec{a}\cdot\vec{a})\geq 0$, причем $(\vec{a}\cdot\vec{a})=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

Пример 2. Найти угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если $\vec{a}=\{1;-3;4\}$, $\vec{b}=\{5;3;1\}$, $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-6\vec{b}$.

Решение. Используем формулу $\cos\varphi=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$. Определим координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, учитывая, что при сложении векторов мы складываем одноименные координаты, а при умножении вектора на число – умножаем на это число каждую координату этого вектора, а: $\vec{p}=\{3\cdot1-5;\,3\cdot(-3)-3;\,3\cdot4-1\}=\{-2;-12;11\}$, $\vec{q}=\{2\cdot1-6\cdot5;\,2\cdot(-3)-6\cdot3;\,2\cdot4-6\cdot1\}=\{-28;-24;2\}$.

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и их длины. $\vec{p}\cdot\vec{q}=-2\cdot(-28)+(-12)\cdot(-24)+11\cdot2=366$, $|\vec{p}|=\sqrt{(-2)^2+(-12)^2+11^2}=\sqrt{269}$, $|\vec{q}|=\sqrt{(-28)^2+(-24)^2+2^2}=\sqrt{1364}$. Подставив в формулу, получим $\cos\varphi=\dfrac{366}{\sqrt{269}\cdot\sqrt{1364}}=\dfrac{183}{\sqrt{91729}}=0{,}604$. Отсюда $\varphi=\arccos 0{,}604$.

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ (другое обозначение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$), который:

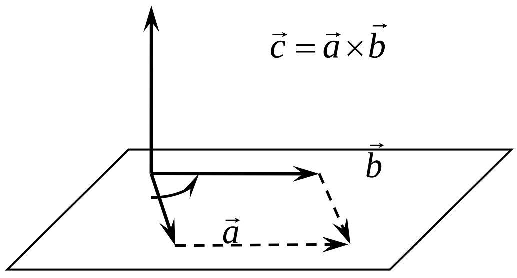
а) имеет длину $|\vec{c}|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$) (то есть, перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$);

в) направлен так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов, то есть из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки (рис.2).

Координаты векторного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ определяются по формуле:

$$\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$



Геометрический смысл векторного произведения: модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$; 2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

3) $(\alpha\,\vec{a})\times\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$; 4) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Пример 3. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, где $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, $\angle(\vec{p},\vec{q})=\pi/3$. Вычислить длину диагоналей этого параллелограмма, угол между диагоналями и площадь параллелограмма.

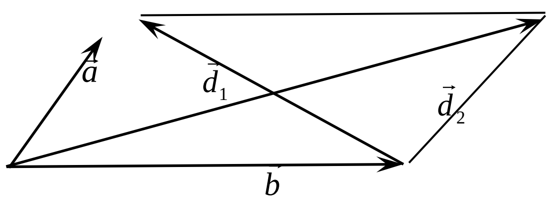


Рис. 3

Решение.

$$\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=(\vec{p}+3\vec{q})+(2\vec{p}-\vec{q})=3\,\vec{p}+2\vec{q},$$

$$\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=(\,\vec{p}+3\vec{q})-(2\vec{p}-\vec{q})=-\vec{p}+4\,\vec{q},$$

$$\left|\vec{d}_1\right| = \sqrt{\left(\vec{d}_1\right)^2} = \sqrt{(3\,\vec{p} + 2\vec{q})^2} = \sqrt{9\vec{p}^{\,2} + 12\,\vec{p}\cdot\vec{q} + 4\vec{q}^{\,2}} =$$
$$= \sqrt{9\cdot 9 + 12\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(\pi/3) + 4\cdot 4} = \sqrt{133}\,,$$

$$\left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{\left(\vec{d}_2\right)^2} = \sqrt{(-\,\vec{p} + 4\vec{q})^2} = \sqrt{(-\vec{p})^2 - 8\,\vec{p}\cdot\vec{q} + 16\,\vec{q}^{\,2}} = \sqrt{9 - 8\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(\pi/3) + 16\cdot 4} = \sqrt{49} = 7.$$

Угол между диагоналями обозначим буквой φ, тогда

$$\cos\varphi = \frac{\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2}{\left|\vec{d}_1\right|\cdot\left|\vec{d}_2\right|} = \frac{(3\,\vec{p} + 2\vec{q})\cdot(-\,\vec{p} + 4\,\vec{q})}{\sqrt{133}\cdot 7} = \frac{-\,3\,\vec{p}\cdot\vec{p} + 12\,\vec{p}\cdot\vec{q} - 2\vec{q}\cdot\vec{p} + 8\,\vec{q}\cdot\vec{q}}{7\sqrt{133}} =$$
$$= \frac{-\,3\cdot\vec{p}^{\,2} + 10\vec{p}\cdot\vec{q} + 8\,\vec{q}^{\,2}}{7\sqrt{133}} = \frac{-\,3\cdot 9 + 10\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(\pi/3) + 8\cdot 4}{7\sqrt{133}} = \frac{35}{7\sqrt{133}} = \frac{5}{\sqrt{133}} \approx 0{,}433.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\ 0{,}433$.

Используя свойства векторного произведения, вычислим площадь параллелограмма:

$$S_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\,(\vec{p} + 3\vec{q})\times(2\vec{p} - \vec{q})\right| = \left|2\,\vec{p}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{q} + 6\vec{q}\times\vec{p} - 3\vec{q}\times\vec{q}\right| =$$
$$= \left|2\cdot\vec{0} - \vec{p}\times\vec{q} - 6\,\vec{p}\times\vec{q} - 3\cdot\vec{0}\right| = \left|-\,7\,\vec{p}\times\vec{q}\right| = 7\cdot 3\cdot 2\cdot\sin(\pi/3) = 21\sqrt{3}\ (\textit{кв. ед.}).$$

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ на вектор $\vec{c}$:

$$\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Если $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\},\ \vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то смешанное произведение можно вычислить по формуле:

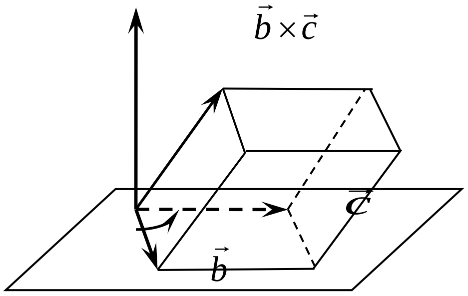
$$\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения:

1) При перестановке любых двух векторов смешанное произведение меняет знак;

2) $\left\langle\vec{a} + \vec{b},\vec{c},\vec{d}\right\rangle = \left\langle\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right\rangle + \left\langle\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right\rangle$; 3) $\left\langle\alpha\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle = \alpha\left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle$;

4) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \left\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\rangle = 0$.



Геометрический смысл смешанного произведения: объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис.4), а объем V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам $V_1 = \left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$, $V_2 = \frac{1}{6}\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$.

Пример 4. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{2; 7; -1\}$, $\vec{b} = \{4; -5; 1\}$, $\vec{c} = \{-2; -5; 2\}$?

Решение. Если векторы компланарны, то по свойству 4) их смешанное произведение равно нулю. Проверим это. Найдем смешанное произведение данных векторов, вычислив определитель:

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -20 - 14 + 20 - (-10 + 56 - 10) = -50 \neq 0 \Rightarrow$$

векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны.

Деление отрезка в данном отношении.

Пусть отрезок AB в пространстве Oxyz задан точками $A(a_1; a_2; a_3)$ и $B(b_1; b_2; b_3)$. Если он разделен точкой $C(c_1; c_2; c_3)$ в отношении γ, то координаты точки C следующие:

$$c_1 = \frac{a_1 + \gamma b_1}{1+\gamma}, \quad c_2 = \frac{a_2 + \gamma b_2}{1+\gamma}, \quad c_3 = \frac{a_3 + \gamma b_3}{1+\gamma}.$$

Пример 5. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении

$AC:CB=3:4$, если $A=(-1;-1)$, $B=(3;2)$.

Решение. Определим координаты точки C:

$c_1=\dfrac{-1+3\cdot 3/4}{1+3/4}=\dfrac{5}{7}$, $c_1=\dfrac{-1+2\cdot 3/4}{1+3/4}=\dfrac{2}{7}$. Таким образом, $C=\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{2}{7}\right)$.

Аналитическая геометрия.

Уравнение плоскости. Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$, где $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ – нормальный вектор плоскости (т.е. перпендикулярный плоскости), а коэффициент D пропорционален расстоянию от начала координат до плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A,B,C\}$, имеет вид

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Угол φ между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$, определяется как угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Пример 6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;-2;1)$, $B(2;3;-1)$, $C(0;2;2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2-1 & 3+2 & -1-1 \\ 0-1 & 2+2 & 2-1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad 13\cdot(x-1)-1\cdot(y+2)+9(z-1)=0,$$

или $13x - y + 9z - 24 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Уравнение прямой на плоскости. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид: $Ax + By + C = 0$, где $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ – нормальный вектор прямой (перпендикулярный прямой), а коэффициент C пропорционален расстоянию от начала координат до прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$, имеет вид

$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ или $y - y_1 = \kappa(x - x_1)$.

В другом виде $y = kx + b$, где $k = tg\,\alpha$ – тангенс угла, образованного прямой и положительным направлением оси Ox, называемый угловым коэффициентом, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Угол φ между двумя прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется формулой

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_1}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 7. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x + 2y - 5 = 0$, $3x + 2y - 16 = 0$ и уравнение его диагонали $9x + y - 9 = 0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.

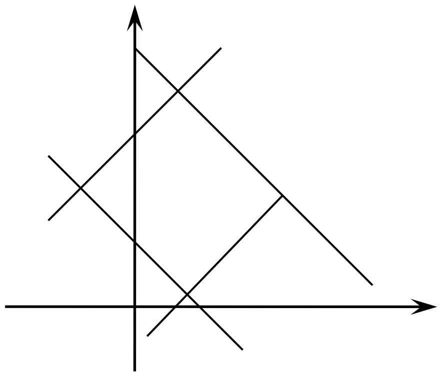


Рис. 6

Решение. Сделаем схематический чертеж (Рис.6). Перепишем данные уравнения в виде: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$, $y=-\frac{3}{2}x+8$, $y=-9x+9$. Так как угловые коэффициенты прямых, задающих стороны прямоугольника, одинаковы $\left(k=-\frac{3}{2}\right)$, то эти уравнения задают параллельные прямые, то есть стороны, на них лежащие, противоположны. Найдем точки пересечения данной диагонали с этими сторонами. Пусть это будут точки A и C. Для этого приравняем сначала 1 и 3, а затем 2 и 3 уравнения:

$-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}=-9x+9 \Rightarrow x=\frac{13}{15},\ y=\frac{6}{5}$; $-\frac{3}{2}x+8=-9x+9 \Rightarrow x=\frac{2}{15},\ y=\frac{39}{5}$. Таким образом, $A=\left(\frac{13}{15};\frac{6}{5}\right), C=\left(\frac{2}{15};\frac{39}{5}\right)$.

Неизвестные стороны параллельны между собой и перпендикулярны данным (так как это прямоугольник).

Замечание. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых y_1 и y_2 связаны соотношением $k_1=-1/k_2$.

Таким образом, уравнения неизвестных сторон прямоугольника таковы:

$y_{AB}=\frac{2}{3}x+b_{AB},\quad y_{CD}=\frac{2}{3}x+b_{CD}$. Подставив в первое уравнение координаты точки A, во второе – точки C, получим, что $b_{AB}=\frac{28}{45}, b_{CD}=\frac{347}{45}$ и, следовательно, $y_{AB}=\frac{2}{3}x+\frac{28}{45}$, $y_{CD}=\frac{2}{3}x+\frac{347}{45}$.

Найдем координаты точек B и D, приравняв уравнения соответствующих сторон:

$\frac{2}{3}x+\frac{28}{45}=-\frac{3}{2}x+8 \Rightarrow x=\frac{664}{195}\approx 3{,}4;\quad y=\frac{188}{65}\approx 2{,}9$, то есть $B=\left(\frac{664}{195},\frac{188}{65}\right)$;

$\frac{2}{3}x+\frac{347}{45}=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \Rightarrow x=-\frac{469}{195}\approx -2{,}4;\quad y=\frac{397}{65}\approx 6{,}1$, то есть $D=\left(-\frac{469}{195},\frac{397}{65}\right)$.

Уравнение диагонали BD получим как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки B и D:

$$\frac{x-\frac{664}{195}}{-\frac{469}{195}-\frac{664}{195}}=\frac{y-\frac{188}{65}}{\frac{397}{65}-\frac{188}{65}}$$ или $$\frac{-3x+\frac{664}{65}}{103}=\frac{y-\frac{188}{65}}{19}.$$

Уравнения прямой в пространстве. Прямая в пространстве Oxyz определяется как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (общие уравнения прямой в пространстве).

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p},$$

где $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – точка, через которую проходит прямая, а вектор $\vec{s}=\{m,n,p\}$, параллельный данной прямой, называется направляющим вектором прямой.

Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол φ между двумя прямыми с направляющими векторами

$\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Пример 8. Пирамида задана координатами своих вершин $A_1(2;-1;1), A_2(-4;2;4)$, $A_3(2;4;0)$, $A_4(-1;-3;4)$. Требуется найти:

1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани, содержащей вершины A_1, A_2, A_3; 4) объем пирамиды; 5) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3;

6) уравнение высоты A_4B, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$;

7) расстояние от вершины A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$; 8) угол между ребром A_1A_4 и гранью, содержащей вершины A_1, A_2, A_3.

Решение.1) Длины ребер A_1A_2 и A_1A_3 определим как модуль векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ по формулам $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-(-1))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$;

$$\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{(2-2)^2 + (4-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{26};$$

2) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-4-2)\vec{i} + (2-(-1))\vec{j} + (4-1)\vec{k} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = \{-6, 3, 3\};\ \overrightarrow{A_1A_4} = \{-3, -2, 3\}.$$

Длины этих векторов, т.е. длины ребер A_1A_2 и A_1A_4, таковы: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = 3\sqrt{6}$,

$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22}$. Косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 вычислим по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{(-6)\cdot(-3) + 3\cdot(-2) + 3\cdot 3}{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{22}} = \frac{21}{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{22}};\quad \varphi = \arccos\frac{7}{2\sqrt{33}};$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ (треугольника) равна половине площади

параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, т.е. половина модуля векторного произведения этих векторов, которое равно

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 3 & 3\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}=(-3-15)\,\vec{i}-(6-0)\,\vec{j}+(-30-0)\,\vec{k}=-18\vec{i}-6\vec{j}-30\vec{k}.$$

Тогда, $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-18)^2+(-6)^2+(-30)^2}=3\sqrt{35}\approx 17{,}75$ (кв. ед);

4) Объем пирамиды равен $V_{A_1A_2A_3A_4}=\dfrac{1}{6}\left\langle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}\right\rangle$.

$$\left\langle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}\right\rangle=\begin{vmatrix}-6 & 3 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ -3 & -2 & 3\end{vmatrix}=-24;\qquad V_{A_1A_2A_3A_4}=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4$$

(куб. ед);

5) Уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3 найдем как уравнения прямых, проходящих через две данные точки:

(A_1A_2): $\dfrac{x-2}{-4-2}=\dfrac{y+1}{2+1}=\dfrac{z-1}{4-1}$, $\quad\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{3}$,

(A_1A_3): $\dfrac{y+1}{4-(-1)}=\dfrac{z-1}{0-1}$, $\quad\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ (абсциссы точек A_1 и A_3 одинаковые);

6) Направляющим вектором высоты A_4B является нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$. Получим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-1\\ -4-2 & 2+1 & 4-1\\ 2-2 & 4+1 & 0-1\end{vmatrix}=0,\qquad\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-1\\ -6 & 3 & 3\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}=0,\qquad -18(x-2)-6(y+1)-30(z-1)=0,$$

$-3x-y-5z+10=0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$ имеет координаты $\vec{n}=\{-3,-1,-5\}$. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку A_4 параллельно вектору $\vec{n}$ имеет вид: $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-5}$;

7) Для вычисления расстояния от вершины A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ воспользуемся формулой $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. В нашем случае $-3x-y-5z+10=0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_4(-1;-3;4)$. Итак, $d=\dfrac{|-3\cdot(-1)-1\cdot(-3)-5\cdot 4+10|}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-5)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{35}}$;

8) Угол α между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ находят по формуле:

$\sin\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$, где $\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$. $\overrightarrow{A_1A_4}=\{-3;-2;3\}$ и (см. п.7) $\vec{n}=\{-3,-1,-5\}$. Таким образом, $\sin\alpha=\dfrac{|-3\cdot(-3)+(-1)\cdot(-2)-5\cdot 3|}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{22}}=\dfrac{4}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{22}}$,

$$\alpha=\arcsin\frac{4}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{22}}.$$

Кривые второго порядка

Определение. Параболой называется множество точек M плоскости (см. рис.7а), для каждой из которых расстояние до данной точки F (фокуса параболы) равно расстоянию до некоторой данной прямой d (директрисы). Расстояние p от фокуса параболы до директрисы называется параметром параболы. Парабола – симметричная кривая; точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется вершиной параболы.

Каноническое уравнение параболы в декартовой системе координат: $y^2=2px$.

Определение. Эллипс есть множество точек M плоскости (см. рис.7б), для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2

(фокусов) постоянна и равна $2a > F_1F_2$.

Отрезок F_1F_2 называется фокусным расстоянием и обозначается через $2c$. Середина F_1F_2 есть центр эллипса. Прямая, на которой лежат фокусы эллипса, называется первой осью эллипса. Прямая, проходящая через центр эллипса перпендикулярно его первой оси, называется второй осью эллипса. Оси эллипса являются его осями симметрии. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его вершинами. $2a$ – большая ось эллипса, $2b$ – малая ось.

Директрисой эллипса, соответствующей данному фокусу F, называется прямая d, перпендикулярная первой оси и отстоящая от центра эллипса на расстояние a/e, где $e = c/a < 1$ – эксцентриситет эллипса.

Каноническое уравнение эллипса в декартовой системе координат: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – большая и малая полуоси эллипса, соответственно.

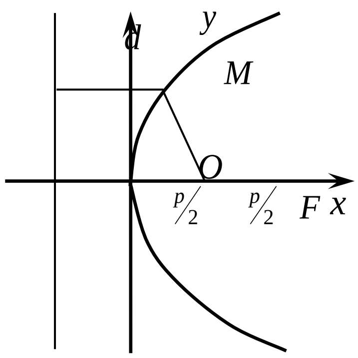


Рис. 7а

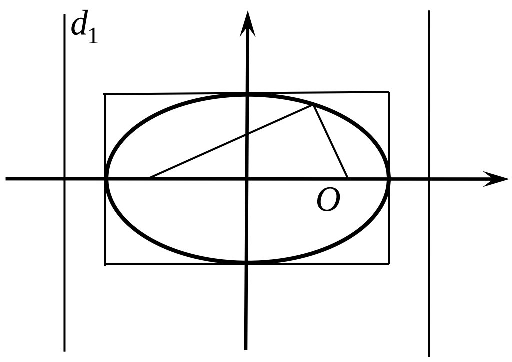


Рис. 7б

Определение. Гиперболой называется множество точек M плоскости (см. рис.8) , модуль разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов гиперболы) постоянен и равен $2a < F_1F_2$. Фокусное расстояние F_1F_2 обозначают через $2c$. Прямая, на которой лежат фокусы, называется действительной (или фокальной осью) гиперболы. Прямая, проходящая через центр гиперболы O, перпендикулярно к действительной оси, называется мнимой осью.

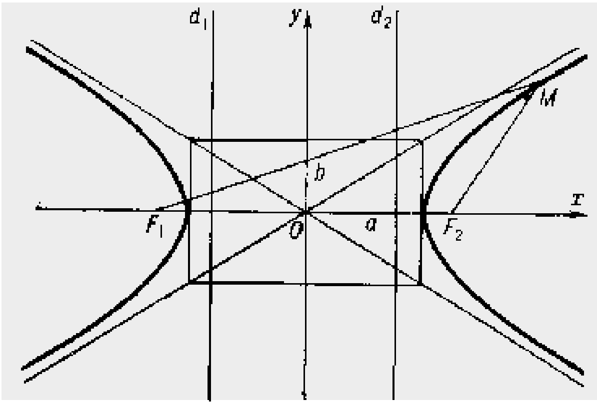


Рис. 8

Директрисой гиперболы, соответствующей данному фокусу F, называется прямая d, перпендикулярная к действительной оси, отстоящая от центра на расстояние a/e и лежащая от центра по одну сторону с фокусом, где $e = c/a < 1$ – эксцентриситет.

Гипербола имеет две асимптоты, заданные уравнениями $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Каноническое уравнение гиперболы в декартовой системе координат: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где a и b – половины сторон основного прямоугольника гиперболы.

Пример 9. Определить вид линии второго порядка, заданной уравнением

$$9x^2 - 16y^2 - 90x + 32y + 65 = 0.$$

Решение. Выделим полные квадраты по x и по y, получим:

$$9\left(x^2 - 10x + 25\right) - 16(y^2 - 2y + 1) + 65 - 9 \cdot 25 + 16 = 0,$$

$$9(x-5)^2 - 16(y-1)^2 = 144,$$

$$\frac{(x-5)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1,$$

т.е. имеем гиперболу, центр которой лежит в точке $C(5;1)$, $a=4, b=3$.

Полярные координаты. Для точки M в плоскости Oxy ее полярные координаты определяются парой чисел (φ, r), где r – длина вектора $\vec{OM}$, а φ – угол наклона вектора $\vec{OM}$ к полярной оси (положительного направления оси Ox), r – длина вектора $\vec{OM}$.

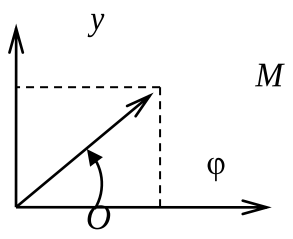


Рис. 9

Декартовые и полярные координаты связаны следующими соотношениями:

$$r^2=x^2+y^2,\ \cos\varphi=\frac{x}{r},\ \sin\varphi=\frac{y}{r}.$$