

Copyright botva

Привет! Это BOTVA ИУ6, точнее малая ее часть.

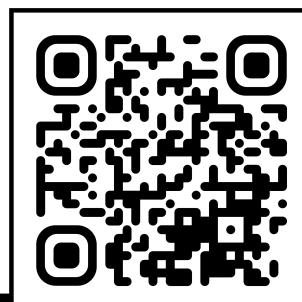
Пользоваться и распространять файлы конечно же можно. Если вы нашли ошибку в файле, можете исправить ее в исходном коде и подать на слияние или просто написать в issue.

Так же вы можете купить распечатанную версию данного файла в виде книжки.

Если возникнут вопросы, пишите в комментарии под постом файла в tg.

Приятного бота)

[GitHub](#)



https://t.me/botva_its6

Подготовка к экзамену

Математический анализ

Над файлом работали:

fīixii, pluttan

Оглавление

Определения и понятия	4
Вопросы для подготовки к экзамену	11
1. Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности)	11
2. Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности)	12
3. Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)	13
4. Теорема (о сохранении функцией знака своего предела)	14
5. Теорема (о предельном переходе в неравенстве)	15
6. Теорема (о пределе промежуточной функции)	16
7. Теорема (о пределе произведения функций)	17
8. Теорема (о пределе сложной функции)	18
9. Вывод первого замечательного предела	19
10. Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)	21
11. Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную)	22
12. Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой)	23
13. Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)	24
14. Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых)	25
15. Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков)	26
16. Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)	27
17. Теорема (о непрерывности сложной функции)	28
18. Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)	29
19. Функция, непрерывная в точке. Теорема о непрерывности элементарных функций.	30
20. Свойства функций, непрерывных на отрезке	31
21. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры	32
22. Теорема (о необходимом и достаточном условии существования наклонной асимптоты)	34
23. Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)	35
24. Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности функции)	36
25. Теорема (о производной произведения двух дифференцируемых функций)	37
26. Теорема (о производной частного двух дифференцируемых функций)	38
27. Теорема (о производной сложной функции)	39
28. Теорема (о производной обратной функции)	40
29. Теорема (свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка)	41
30. Теорема Ферма	42
31. Теорема Ролля	43
32. Теорема Лагранжа	44
33. Теорема Коши	45

34. Теорема Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций	46
35. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.	47
36. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа	48
37. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	50
38. Формула Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа	51
39. Формула Маклорена для функции $y = \sin(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа	52
40. Формула Маклорена для функции $y = \cos(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа	53
41. Формула Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа	54
42. Формула Маклорена для функции $y = (1 + x)^a$ с остаточным членом в форме Лагранжа	55
43. Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции . .	56
44. Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции	57
45. Первое достаточное условие экстремума (по первой производной)	58
46. Второе достаточное условие экстремума (по второй производной)	59
47. Достаточное условие выпуклости функции	60
48. Необходимое условие точки перегиба	61
49. Достаточное условие точки перегиба	62

Определения и понятия

1. \mathbb{N} - **множество натуральных чисел**, состоит из чисел, возникающих при счёте.
2. \mathbb{Z} - **множество целых чисел**, состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.
3. \mathbb{Q} - **множество рациональных чисел**, состоит из чисел, представимых в виде $\frac{z}{n}$, $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. \mathbb{I} - **множество иррациональных чисел**, состоит из чисел, которые не представимы в виде $\frac{z}{n}$, $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, такие как e , π , $\sqrt{3}$ и т.д..
5. \mathbb{R} - **множество действительных чисел**, состоит из рациональных и иррациональных чисел.
6. $\overline{\mathbb{R}}$ - **расширенное множество действительных чисел**, состоит из действительных чисел с добавлением $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.
7. **Окрестностью** $U(x)$ **точки** x называют любой интервал, содержащий эту точку.
8. **Проколотой окрестностью** $\overset{\circ}{U}(x)$ **точки** x называют окрестность этой точки $U(x)$, за исключением самой точки x .
9. ε -**окрестностью точки** x_0 (при положительном ε) называют интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$

10. **Правой (правосторонней) δ -окрестностью точки** x_0 называют полуинтервал $[x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$.

$$U_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 \leq x < x_0 + \delta\}, \delta > 0$$

11. **Левой (левосторонней) δ -окрестностью точки** x_0 называют полуинтервал $(x_0 - \delta, x_0]$, $\delta > 0$.

$$U_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x \leq x_0\}, \delta > 0$$

12. **Окрестностью точки** $+\infty$ называют интервал $(a, +\infty)$, $a > 0$.

$$U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, a > 0$$

13. **Окрестностью точки** $-\infty$ называют интервал $(-\infty, -a)$, $a > 0$.

$$U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < -a\}, a > 0$$

14. **Окрестностью** ∞ (бесконечности без знака) называют объединение двух интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, $a > 0$.

$$U(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > a\}, a > 0$$

15. **Последовательностью** $\{X_n\}$ называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу n при этом поставлено в соответствие число x_n , то это число называется n -м элементом последовательности; n называют номером элемента x_n .
16. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **неубывающей**, если $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
17. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **возрастающей**, если $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
18. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **невозрастающей**, если $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
19. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **убывающей**, если $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
20. Неубывающие, невозрастающие, убывающие и возрастающие последовательности называют **монотонными**.
21. Последовательность $\{X_n\}$ называется **постоянной**, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = c$, $c \in \mathbb{R}$.
22. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$.
23. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если $\exists M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$.
24. Последовательность $\{X_n\}$, ограниченная и сверху и снизу, называют **ограниченной**: $\exists M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$.
25. Число a называется **пределом числовой последовательности** $\{X_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного ε существует такой номер N , зависящий от ε , что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

26. Числовая последовательность называется **сходящейся**, если существует предел этой последовательности, и он конечен.
27. Последовательность $\{X_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $m \geq N$ и $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
28. (определение по Коши) Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

29. (определение по Гейне) Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности $\{X_n\}$ точек из $\overset{\circ}{U}(x_0)$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = a$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = a$$

30. Число a называется **правым (правосторонним) пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow x_0+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x \in U_\delta^+(x_0)$ (т.е. $x_0 < x < x_0 + \delta$), выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta^+(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

31. Число a называется **левым (левосторонним) пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow x_0-$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x \in U_\delta^-(x_0)$, (т.е. $x_0 - \delta < x < x_0$) выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta^-(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

32. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной на множестве** D , если существует такое число $M > 0$, что для любых $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.
33. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной** (на области определения D_f), если существует такое число $M > 0$, что для любых $x \in D_f$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.
34. Функцию $f(x)$ называют **локально ограниченной в окрестности точки** a , если существует такое число $M > 0$ и такая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что для любых $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.
35. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
36. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой** при $x \rightarrow x_0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ - **первый замечательный предел**.

38. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ - **второй замечательный предел**.

39. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **сравнимыми** бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$, если существует хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.
40. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **несравнимыми** бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения при $x \rightarrow x_0$.
41. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **бесконечно малыми одного порядка** при $x \rightarrow x_0$ и записывают $\alpha(x) = O(\beta(x))$, если существует отличный от нуля конечный предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$.

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0 \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

42. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$.

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0 \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

43. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более низкого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$, равен бесконечности.
44. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **эквивалентными** бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$, если предел их отношения при $x \rightarrow x_0$ равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

45. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой k -ого порядка** малости относительно $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, а число k ($k > 0$) - **порядком малости** $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если функции $\alpha(x)$ и $\beta^k(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow x_0$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

46. Функцию $u(x)$ называют **бесконечно большой k -ого порядка** роста относительно $w(x)$ при $x \rightarrow x_0$, а число k ($k > 0$) - **порядком роста** $u(x)$ относительно $w(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если функции $u(x)$ и $w^k(x)$ являются бесконечно большими одного порядка при $x \rightarrow x_0$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{w^k(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

47. **Главная часть суммы бесконечно малых функций** - это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых.
48. **Приращением аргумента** в точке x_0 называется изменение аргумента функции от значения x_0 к другому значению x ,

$$\Delta x = x - x_0$$

49. **Приращением функции** в точке x_0 называется $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

50. (опр. 1) Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

51. (опр. 2) Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 ($\Delta x \rightarrow 0$).
52. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 **справа**, если в этой точке существует конечный *правый* предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$.
53. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 **слева**, если в этой точке существует конечный левый предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.
54. Функция $f(x)$ **непрерывна на интервале** (a, b) , если она непрерывна в каждой его точке.
55. Функция $f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) , в точке a - непрерывна справа, т.е. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$, в точке b - непрерывна слева, т.е. $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$.
56. Если данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0 , то x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.
57. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.
58. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).
59. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или $f(x)$ не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку x_0 - **точкой устранимого разрыва первого рода**.
60. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку x_0 - **точкой неустранимого разрыва первого рода**.
61. Если существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется **производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0 и обозначается $f'(x_0)$.
62. Если $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки x_0 и если $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **правой производной функции** $f(x)$ **в** x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$.
63. Если $f(x)$ определена в левосторонней окрестности точки x_0 , и если $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **левой производной функции** $f(x)$ **в** x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$.

64. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Функция называется **дифференцируемой в точке x_0** , если ее приращение Δy в точке x_0 представимо в следующем виде: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где A - некоторое число, не зависящее от Δx , а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

65. **Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0** называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента Δx .

66. **Дифференциалом n -го порядка** называется дифференциал от дифференциала $n - 1$ порядка, т.е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) dx^n$$

67. **Производная n -ого порядка** от функции $y = f(x)$, есть производная от производной $n - 1$ порядка, т.е.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$$

68. Функция $f(x)$ называется **возрастающей на интервале (a, b)** , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

69. Функция $f(x)$ называется **невозрастающей на интервале (a, b)** , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \leq f(x_1)$.

70. Функция $f(x)$ называется **убывающей на интервале (a, b)** , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

71. Функция $f(x)$ называется **неубывающей на интервале (a, b)** , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$.

72. Неубывающие, невозрастающие, убывающие и возрастающие функции называют **монотонными**.

73. Функция $f(x)$ называется **строго монотонной**, если она возрастающая или убывающая.

74. Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$.

75. Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$.

76. Точка x_0 называется **точкой строгого локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x_0) < f(x)$.

77. Точка x_0 называется **точкой строгого локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x_0) > f(x)$.

78. **Точками локального экстремума** называются точки локального максимума и строгого локального максимума, локального минимума и строгого локального минимума.

79. **Точками строгого локального экстремума** называются точки строгого локального максимума и минимума.

80. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **критической**, если производная в ней равна 0 или не существует вовсе.
81. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **стационарной**, если $f'(x_0) = 0$.
82. Прямая $Ax + By + C = 0$ называется **асимптотой** графика $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к 0 при бесконечном удалении точки M от начала координат.
83. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a+(-)} f(x) = \infty$
84. Прямая $y = kx + b$ называется **правой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция.
85. Прямая $y = kx + b$ называется **левой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция.
86. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость вверх**, если он лежит не выше любой касательной к графику на (a, b) .
87. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость вниз**, если он лежит не ниже любой касательной к графику на (a, b) .
88. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется **точкой перегиба** функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если $\exists \delta > 0$ такое, что направления выпуклостей функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности)

Используются определения 15, 25, 26 из списка

Если последовательность имеет предел, то этот предел - единственный.

Доказательство (от противного)

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, где a и b - пределы сходящейся последовательности $\{X_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad a \neq b$$

По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Примем $\varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$ и при $n > \max(N_1, N_2)$ получим

$$|b - a| = |x_n - a + b - x_n| \leq |x_n - a| + |b - x_n| = |x_n - a| + |x_n - b| \Rightarrow |b - a| < 2\varepsilon$$

Или $|b - a| < 2 \cdot \frac{|b - a|}{3}$, т.е. $|b - a| < \frac{2}{3}|b - a|$, $\frac{1}{3}|b - a| < 0$, чего не может быть $\Rightarrow a \neq b$ - неверно, т.е. $a = b \Rightarrow$ предел единственный.

Теорема доказана.

2. Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности)

Используются определения 15, 24, 25, 26 из списка

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Доказательство

Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность. Тогда по определению, у нее существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon + a < x_n < \varepsilon + a, \forall n > N$$

Обозначим через A максимальное число среди $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|$, т.е.

$$A = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|)$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| < A$, \Rightarrow последовательность ограничена.

Теорема доказана.

3. Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)

Используются определения 28, 34 из списка

Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow x_0$, то $f(x)$ локально ограничена.

Доказательство

По условию \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $|f(x)| - |a| \leq |f(x) - a| < 1$, а значит

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| < 1 + |a| = \text{const} \xrightarrow{\text{по опр.}}$$

$f(x)$ является локально ограниченной в окрестности точки x_0 .

Теорема доказана.

4. Теорема (о сохранении функцией знака своего предела)

Используются определения 28 из списка

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, то $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ функция $f(x)$ сохраняет знак своего предела.

Доказательство

По условию \exists конечный $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0 \xRightarrow{\text{по опр.}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

- в случае $a > 0$ выбираем $\varepsilon = \frac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2}$$

$$-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$$

Следовательно $f(x) > \frac{a}{2} > 0$, т.е. данная функция положительна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

- в случае $a < 0$ выбираем $\varepsilon = -\frac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{3a}{2} < f(x) < \frac{a}{2}$$

Следовательно $f(x) < \frac{a}{2} < 0$, т.е. данная функция отрицательна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Теорема доказана.

5. Теорема (о предельном переходе в неравенстве)

Используются определения 28 из списка

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 , причем для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то $a \geq b$.

Доказательство

По условию $\forall x \in \mathring{U}(x_0) : f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$, тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a - b \geq 0, \Rightarrow a \geq b$$

Теорема доказана.

6. Теорема (о пределе промежуточной функции)

Используются определения 28 из списка

Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 выполняется двойное неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, и пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, равные одному и тому же числу a . Тогда и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Доказательство

По условию $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, тогда по определению предела функции,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

Тогда при $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$|g(x) - a| < \varepsilon$$

Таким образом, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$$

Теорема доказана.

7. Теорема (о пределе произведения функций)

Используются определения 28, 35 из списка

Если \exists конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Доказательство

По условию \exists конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой имеем

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \rightarrow x_0$$

$$g(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \rightarrow x_0$$

Тогда

$$f(x) \cdot g(x) = (a + \alpha(x)) \cdot (b + \beta(x)) = a \cdot b + a \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot b + \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot b + \underbrace{a \cdot \beta(x)}_{\text{б.м. при } x \rightarrow x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot b}_{\text{б.м. при } x \rightarrow x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\text{б.м. при } x \rightarrow x_0}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot b) = a \cdot b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

8. Теорема (о пределе сложной функции)

Используются определения 25, 29 из списка

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ конечный предел, равный b , и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ этой точки, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c , то сложная функция $g(f(x))$ имеет $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Доказательство

По определению предела функции по Гейне имеем:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \{\forall x_n \in \mathring{U}(a), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a : \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = b$$

$$\exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \iff \{\forall y_n \in \mathring{U}(b), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b : \lim_{n \rightarrow \infty} \{g(y_n)\} = c$$

Пусть $\{X_n\}$ - произвольная последовательность, стремящаяся к точке a и $x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = b$, но $f(x_n) \neq b \forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $y_n = f(x_n)$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} = b$ и $y_n \neq b \forall n \in \mathbb{N}$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \{g(y_n)\} = c$, т.е.

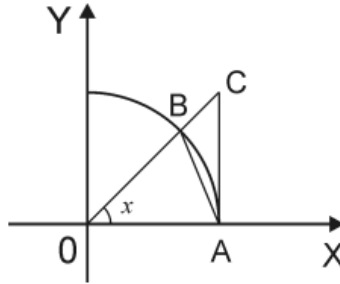
$$\{\forall x_n \in \mathring{U}(a), n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a : \lim_{n \rightarrow \infty} \{g(f(x_n))\} = c \iff \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x)) = c$$

Теорема доказана.

9. Вывод первого замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A , и пусть угол $\angle AOB$ равен x (радиан). Пусть, далее, CA — перпендикуляр к этой оси, C — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B . Тогда



$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектор } OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2}R^2 \sin(x) < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg}(x)$$

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x)$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x), \text{ при } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Рассмотрим $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, а значит справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{\sin(\beta)}{\beta} > \cos(\beta)$$

Вернемся к замене $\beta = -x$

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x)$$

$$1 > \frac{-\sin(x)}{-x} > \cos(x)$$

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x) \text{ при } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(по т. о пределе промежуточной функции)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

10. Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)

Используются определения 28, 35 из списка

Равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ имеет место $\iff f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство

(\Rightarrow)

По условию \exists конечный $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$. Тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \xRightarrow{\text{по опр.}} \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, т.е. $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Но $\alpha(x) = f(x) - a \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

(\Leftarrow)

По условию $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Но по условию $f(x) = a + \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = f(x) - a$, откуда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \xRightarrow{\text{по опр.}} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Теорема доказана.

11. Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную)

Используются определения 34, 35 из списка

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, $f(x)$ - ограниченная функция, то $\alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство

По условию $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}_1(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$$

$f(x)$ - ограниченная функция, тогда

$$|f(x)| < c, \text{ где } c = \text{const}, \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(x_0)$$

Таким образом,

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) = \overset{\circ}{U}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_2(x_0) :$$

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c \Rightarrow$$

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \alpha(x) \cdot f(x) \text{ - бесконечно малая функция при } x \rightarrow x_0$$

Теорема доказана.

12. Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой)

Используются определения 28, 35, 36 из списка

$\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$.

$f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 . Выберем произвольное $E > 0$. Тогда

для $\varepsilon = \frac{1}{E} > 0 \exists \mathring{U}_1(x_0) : \forall x \in \mathring{U}(x_0) \cap \mathring{U}_1(x_0) \Rightarrow 0 < |\alpha(x)| < \varepsilon$, т.е.

$\frac{1}{|\alpha(x)|} > E$, по опр. $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$

Пусть $f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

для $E = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \exists \mathring{U}(x_0) : \forall x \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > E$, т.е.

$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{E} = \varepsilon$, по опр. $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$

Теорема доказана.

13. Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)

Используются определения 35, 44 из списка

Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, и $f(x)$ - некоторая функция, определенная в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 . Тогда:

- если существует предел при $x \rightarrow x_0$ произведения $\alpha(x) \cdot f(x)$, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \rightarrow x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$
- если существует предел при $x \rightarrow x_0$ частного $\frac{f(x)}{\alpha(x)}$, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \rightarrow x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$

Доказательство

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, тогда по определению $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot f(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (\beta(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\beta(x) \cdot f(x))$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x) \cdot f(x)}{\alpha(x) \cdot \beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)}$.

Теорема доказана.

14. Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых)

Используются определения 35, 42, 44 из списка

Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ эквивалентны \iff их разность имеет больший порядок малости при $x \rightarrow x_0$ по сравнению с каждой из них.

Доказательство

(\Rightarrow)

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, тогда по определению $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0, \stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

(\Leftarrow)

По условию $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$, $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Теорема доказана.

15. Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков)

Используются определения 35, 44 из списка

Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$ эквивалентна своей главной части.

Доказательство

Пусть $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ - бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, и $\alpha_1(x)$ - главная часть суммы $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} = 0, \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 0,$$

Тогда рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \xrightarrow{\text{по опр.}}$$

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x) \sim \alpha_1(x) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Теорема доказана.

16. Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)

Используются определения 50 из списка

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (последнее при $g(x) \neq 0$) - также непрерывны в точке x_0 .

Доказательство

По условию $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , тогда по определению

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$, $\xRightarrow{\text{по опр.}} f(x) \pm g(x)$ - непрерывна в точке $x = x_0$.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$, $\xRightarrow{\text{по опр.}} f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна в точке $x = x_0$.

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, $\xRightarrow{\text{по опр.}} \frac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке $x = x_0$ при условии $g(x) \neq 0$.

Теорема доказана.

17. Теорема (о непрерывности сложной функции)

Используются определения 50 из списка

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Доказательство

По условию функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, функция $g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b$$

$$\exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b) = g(f(a)), \xRightarrow{\text{по опр.}} \text{функция } g(f(x)) \text{ непрерывна в точке } x = a$$

Теорема доказана.

18. Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)

Используются определения 50 из списка

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Доказательство

По условию $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$$

Тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 , т.е.

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Так как $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, то

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Теорема доказана.

19. Функция, непрерывная в точке. Теорема о непрерывности элементарных функций.

(опр. 1) Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(опр. 2) Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 ($\Delta x \rightarrow 0$).

Теорема (о непрерывности элементарных функций)

Все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

Доказательство (для $y = \sin(x)$ и $y = \cos(x)$)

Рассмотрим $y = \sin(x)$:

Найдем приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = \\ &= 2\sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right) = 0,$$

Т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \xrightarrow{\text{по опр.}} y = \sin(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

Рассмотрим $y = \cos(x)$:

Найдем приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos(x) = \\ &= 2\sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - \Delta x - x}{2}\right) = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \right) = 0,$$

Т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \xrightarrow{\text{по опр.}} y = \cos(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

20. Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Первая теорема Вейерштрасса

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

2. Вторая теорема Вейерштрасса

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение.

3. Первая теорема Больцано-Коши

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой значение функции $f(c) = 0$.

4. Вторая теорема Больцано-Коши

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(a) < f(c) < f(b)$.

5. Теорема о непрерывности обратной функции

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на $[a, b]$, то существует и определена на отрезке $[f(a), f(b)]$ обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и возрастающая (убывающая) на этом отрезке.

21. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры

Если данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0 , то x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.

1. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

Пример: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{точка } x = 0 - \text{точка разрыва первого рода.}$$

2. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).

Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$. Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{точка } x = 0 - \text{точка разрыва второго рода.}$$

3. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или $f(x)$ не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку x_0 — **точкой устранимого разрыва первого рода**.

Пример: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$:

Из соображений выше, точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода функции $f(x)$.

При этом, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq f(0)$, тогда по определению, точка $x = 0$ — точка устранимого разрыва первого рода.

Если доопределить функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

то функция $f(x)$ по определению будет непрерывной в точке $x = 0$.

4. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку x_0 - **точкой неустранимого разрыва первого рода**.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= 1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= -1 \\ \exists f(0) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow точка $x = 0$ - точка неустранимого разрыва первого рода по определению.

22. Теорема (о необходимом и достаточном условии существования наклонной асимптоты)

Используются определения 35, 84, 85 из списка

Прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} (f(x) - kx) = b$$

Доказательство

(\Rightarrow)

По условию прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика $y = f(x)$. Тогда по определению

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}}, \text{ при } x \rightarrow +(-)\infty$$

Отсюда $\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$, $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, при $x \rightarrow +(-)\infty$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +(-)\infty} (f(x) - kx) = b$$

(\Leftarrow)

По условию существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} (f(x) - kx) = b$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$f(x) - kx = b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}}, \text{ при } x \rightarrow +(-)\infty$$

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}}, \text{ при } x \rightarrow +(-)\infty$$

Таким образом, прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ по определению.

Теорема доказана.

23. Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)

Используются определения 61, 64 из списка

Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$ в этой точке.

Доказательство

(\Rightarrow) .

По условию функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда по определению дифференцируемости:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

После деления на Δx получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

Таким образом производная $f'(x_0)$ существует (и равна A) по определению.

(\Leftarrow)

По условию существует $f'(x_0)$. Тогда по определению производной:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

После умножения на Δx получаем:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 по определению.

Теорема доказана.

24. Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности функции)

Используются определения 51, 64 из списка

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, тогда по определению

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

\Downarrow

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = 0, \xRightarrow{\text{по опр.}} y = f(x) \text{ непрерывна в точке } x = x_0$$

Теорема доказана.

25. Теорема (о производной произведения двух дифференцируемых функций)

Используются определения 61, 64 из списка

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то функция $f(x) \cdot g(x)$ тоже дифференцируема в этой точке и $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Доказательство

По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x , \Rightarrow существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0)$$

Вычислим $(f(x) \cdot g(x))'$:

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x) \cdot g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x)}_{g(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)} = \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

26. Теорема (о производной частного двух дифференцируемых функций)

Используются определения 61, 64 из списка

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ тоже дифференцируема в этой точке (при условии $g(x) \neq 0$) и $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство

По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x , \Rightarrow существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x)$$

Вычислим $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - g(x + \Delta x) \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - g(x + \Delta x) \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x) \right) \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} \right) = \\ &= \left(\underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x)}_{g(x)} - \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)}_{f(x)} \right) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}}_{g^{-2}(x)} = \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

27. Теорема (о производной сложной функции)

Используются определения 51, 61, 64 из списка

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0 и функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0 , $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 , и $\left(f(g(x))\right)' = f'_u \cdot g'_x$.

Доказательство

По условию

- функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x , тогда по определению существует конечный $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x)$
- функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u , тогда по определению существует конечный $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$
- функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x , \Rightarrow Функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x по опр. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$, т.е. $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta u \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x)$$

Теорема доказана.

28. Теорема (о производной обратной функции)

Используются определения 51, 61 из списка

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и дифференцируема в точке $x = x_0$, то обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y = f(x_0)$ и $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Доказательство

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, \Rightarrow существует конечный

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, \Rightarrow Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ $\overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, т.е. $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Тогда

$$(f^{-1}(y))' = x'_y \overset{\text{по опр.}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Теорема доказана.

29. Теорема (свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка)

Используются определения 65 из списка

Дифференциал функции $y = f(u)$ не зависит от того, является ли u - независимой переменной, или функцией от другой независимой переменной.

Доказательство

1. Пусть $y = f(u)$, где u - независимая переменная. Тогда

$$dy = f'(u) \cdot du$$

2. Пусть $y = f(u)$, где $u = g(x)$ - некоторая функция, имеющая производную. Тогда

$$dy = y'_x \cdot du = y'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx}_{du} = y'_u \cdot du = f'(u) \cdot du.$$

Теорема доказана.

30. Теорема Ферма

Используются определения 61, 62, 63, 64, 75 из списка

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , и точка x_0 - есть точка локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

Пусть x_0 - точка локального максимума функции $y = f(x)$, тогда по определению

$$\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, \Rightarrow в точке $x = x_0$ существует конечная производная $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0), \quad x_0 + \Delta x \in U_\delta(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

По теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \geq 0$$

Таким образом, $f'(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

31. Теорема Ролля

Используются определения 55, 64, 74, 75 из списка

Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

По условию $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, \Rightarrow по (второй) теореме Вейерштрасса функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения, обозначим

$$M = \max_{[a,b]}(f(x))$$

$$m = \min_{[a,b]}(f(x))$$

тогда $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$

Если $m = M$, то $\forall x \in [a, b] \quad m = M = f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad f'(x) = 0$

Если $m \neq M$, то

- $f(a) = f(b) = m$. Тогда функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего значения внутри $[a, b]$, т.е. $a < x_0 < b$

Таким образом, точка x_0 - точка локального максимума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$

- $f(a) = f(b) = M$. Тогда функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего значения внутри $[a, b]$, т.е. $a < x_0 < b$

Таким образом, точка x_0 - точка локального минимума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$

- $y = f(x)$ достигает своего минимального и максимального значения внутри $[a, b]$ в точках x_0 и x_1 .

Точки x_0 и x_1 - точки экстремума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точках x_0 и x_1 . В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_1) = 0$.

Теорема доказана.

32. Теорема Лагранжа

Используются определения 55, 64 из списка

Пусть функция $f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , поскольку этими свойствами обладает $f(x)$.
- 2.

$$\left. \begin{aligned} F(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a) \\ F(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля \Rightarrow существует точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(c) \cdot (b - a) &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

33. Теорема Коши

Используются определения 55, 64 из списка

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале (a, b)
3. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство

Сначала заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, т.к. если бы $g(b) - g(a) = 0$, то $g(a) = g(b)$ и функция $g(x)$, в результате, удовлетворяла бы условию теоремы Ролля, согласно которой $\exists c \in (a, b)$, такая, что $g'(c) = 0$, что противоречит 3 условию теоремы.

Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , поскольку этими свойствами обладают $f(x)$ и $g(x)$.

2.

$$\left. \begin{aligned} F(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(a) - g(a)) = f(a) \\ F(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = f(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля \Rightarrow существует точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Теорема доказана.

34. Теорема Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций

Используются определения 35, 36, 64 из списка

Пусть $f(x)$ и $g(x)$:

1. Являются бесконечно малыми или бесконечно большими функциями при $x \rightarrow x_0$
2. Дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
3. $g'(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
4. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство (для б.м.ф)

По условию $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$, тогда по определению

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} g(x) = 0$$

По условию $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Рассмотрим пределы при $x \rightarrow x_0+$ (для $x \rightarrow x_0-$ доказывается аналогично)

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = x_0$, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в $U^+(x_0)$. Рассмотрим отрезок $[x_0, x]$, где $x > x_0$.

По условию $g'(x) \neq 0$ в (x_0, x) .

Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию теоремы Коши, а значит, $\exists c \in (x_0, x)$,

такая, что $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$$1. \text{ Так как } f(x_0) = g(x_0) = 0, \text{ то } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$2. \text{ Так как } x_0 < c < x, \text{ то, если } x \rightarrow x_0+, \text{ то и } c \rightarrow x_0+$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{Аналогично } \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{Таким образом, } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

35. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.

Используются определения 36 из списка

1. Сравним рост показательной функции $y = a^x$ и степенной функции $y = x^n$ ($a > 1$, $n > 0$):

Так как при $x \rightarrow +\infty$ функции $y = a^x$ и $y = x^n$ являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли n раз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a) \cdot a^x}{n \cdot x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n(a) \cdot a^x}{n!} = +\infty$$

Таким образом, показательная функция $y = a^x$ растет быстрее степенной функции $y = x^n$.

2. Сравним рост логарифмической функции $y = \log_a(x)$ и степенной функции $y = x^n$ ($a > 1$, $n > 0$):

Так как при $x \rightarrow +\infty$ функции $y = \log_a(x)$ и $y = x^n$ являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln(a)}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \ln(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Таким образом, степенная функция $y = x^n$ растет быстрее логарифмической функции $y = \log_a(x)$.

Вывод:

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная - быстрее логарифмической.

36. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет в этой окрестности производные всех порядков до $(n + 1)$ -го включительно. Тогда для любого $x \in U(x_0)$ справедливо равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}},$$

где $\theta \in (0, 1)$, R_{n+1} — остаточный член в форме Лагранжа.

Пусть $x \in U(x_0)$, и пусть для определенности $x > x_0$. Рассмотрим на отрезке $[x_0, x]$ две функции

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x - t)^k \\ \psi(t) &= (x - t)^{n+1}\end{aligned}$$

Для этих функций имеем

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (x - x)^k = f(x) - f(x) = 0, \\ \varphi(x_0) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k, \\ \psi(x) &= (x - x)^{n+1} = 0, \\ \psi(x_0) &= (x - x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

Вычислим производные

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \left(f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x - t)^k \right)' = \\ &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(f^{(k+1)}(t) \cdot (x - t)^k - k \cdot f^{(k)}(t) \cdot (x - t)^{k-1} \right) = \\ &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x - t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x - t)^{k-1}\end{aligned}$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования $l = k - 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x - t)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x - t)^l = f'(t) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x - t)^l$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = & -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + f'(t) + \\ & + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n,\end{aligned}$$

Т.е.

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n$$

Далее, $\psi'(t) = -(n+1) \cdot (x-t)^n$, и непосредственно видно, что производная $\psi'(t)$ на интервале (x_0, x) отлична от нуля. К паре функций $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке $[x_0, x]$ применим теорему Коши. Имеем

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta(x - x_0))}{\psi'(x_0 + \theta(x - x_0))}, \text{ где } \theta \in (0, 1).$$

Таким образом, $0 < \theta < 1 \iff 0 < \theta(x - x_0) < x - x_0 \iff x_0 < x_0 + \theta(x - x_0) < x, \Rightarrow c = x_0 + \theta(x - x_0) \in (x_0, x)$

Учитывая результаты проведенных вычислений, получаем отсюда:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = & \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} \cdot (x - x_0 - \theta(x - x_0))^n \times \\ & \times \frac{1}{-(n+1)(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!},\end{aligned}$$

Т.е.

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы при $x > x_0$. При $x < x_0$ рассуждения аналогичны; если $x = x_0$, то утверждение теоремы очевидно.

Теорема доказана.

37. Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков до n -го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{R_{n+1}}, \quad x \rightarrow x_0, \text{ где}$$

R_{n+1} — остаточный член в форме Пеано

Равенство, которое требуется доказать, означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0$$

Мы имеем здесь дело с неопределенностью $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Чтобы раскрыть её, применим $n - 1$ раз правило Лопиталья-Бернулли

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} \cdot (x - x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} \right) = f^{(n)}(x_0).$$

Теорема доказана.

38. Формула Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа

Найдем производные функции $y = e^x$ до n -го порядка:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

Таким образом, получаем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}}_{\text{остаточный член}}, \theta \in (0, 1)$$

39. Формула Маклорена для функции $y = \sin(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

Найдем производные функции $y = \sin(x)$ до $(2n + 2)$ -го порядка:

$$f(x) = \sin(x), \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin(x) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1$$

...

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot \cos(x), \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \sin(x), \quad f^{(2n+2)}(0) = 0$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \sin(x) = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \\ & + \underbrace{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \sin\left(\theta x + (2n+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{остаточный член}}, \quad \theta \in (0, 1) \end{aligned}$$

40. Формула Маклорена для функции $y = \cos(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

Найдем производные функции $y = \cos(x)$ до $(2n + 1)$ -го порядка:

$$f(x) = \cos(x), \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin(x) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = 0$$

...

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot \cos(x), \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \sin(x), \quad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \cos(x) = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \\ & + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \cos\left(\theta x + (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{остаточный член}}, \quad \theta \in (0, 1) \end{aligned}$$

41. Формула Маклорена для функции $y = \ln(1+x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

Найдем производные функции $y = \ln(1+x)$ до $(n+1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1 \\
 f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1 = -1! \\
 f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2 = 2! \\
 f^{IV}(x) &= \frac{-3 \cdot 2}{(1+x)^4}, \quad f^{IV}(0) = -3 \cdot 2 = -3! \\
 &\dots \\
 f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \cdot (-1)^{n-1}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \\
 f^{(n+1)}(x) &= \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \cdot (-1)^n, \quad f^{(n+1)}(0) = (-1)^n \cdot n!
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}}_{\text{остаточный член}},$$

$$\theta \in (0, 1)$$

42. Формула Маклорена для функции $y = (1 + x)^a$ с остаточным членом в форме Лагранжа

Найдем производные функции $y = (1 + x)^a$ до n -го порядка:

$$f(x) = (1 + x)^a, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = a \cdot (1 + x)^{a-1}, \quad f'(0) = a$$

$$f''(x) = a \cdot (a - 1) \cdot (1 + x)^{a-2}, \quad f''(0) = a \cdot (a - 1)$$

...

$$f^{(n)}(x) = a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot (a - (n - 1)) \cdot (1 + x)^{a-n},$$

$$f^{(n)}(0) = a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot (a - (n - 1))$$

Таким образом, получаем

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))}{n!}x^n + \underbrace{\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\theta x)^{a-(n+1)} \cdot x^{n+1}}_{\text{остаточный член}},$$

$$\theta \in (0, 1)$$

43. Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции

Используются определения 64, 71 из списка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Для того, чтобы эта функция была неубывающей на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна $\forall x \in (a, b)$.

Доказательство

(\Rightarrow)

По условию $f(x)$ не убывает на интервале (a, b) . Тогда в точке $x \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем

$$\begin{aligned} \bullet \Delta x > 0 &\Rightarrow f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \\ \bullet \Delta x < 0 &\Rightarrow f(x) \geq f(x + \Delta x) \Rightarrow f'(x) = f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \end{aligned}$$

Таким образом, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \geq 0$.

(\Leftarrow)

По условию во всех точках интервала (a, b) , в которых $f(x)$ дифференцируема, выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$. Пусть x_1 и x_2 , $a < x_1 < x_2 < b$, — произвольные точки этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Лагранжа, $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$, такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

Т.к. $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, и $x_2 > x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \iff f(x_2) \geq f(x_1)$

А значит, функция $y = f(x)$ - неубывающая на (a, b) по определению.

Теорема доказана.

44. Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции

Используются определения 64, 69 из списка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Для того, чтобы эта функция была невозрастающей на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Доказательство

(\Rightarrow)

По условию $f(x)$ не возрастает на интервале (a, b) . Тогда в точке $x \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем

$$\begin{aligned} \bullet \Delta x > 0 &\Rightarrow f(x + \Delta x) \leq f(x) \Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \\ \bullet \Delta x < 0 &\Rightarrow f(x) \leq f(x + \Delta x) \Rightarrow f'(x) = f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \end{aligned}$$

Таким образом, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \leq 0$.

(\Leftarrow)

По условию во всех точках интервала (a, b) , в которых $f(x)$ дифференцируема, выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$. Пусть x_1 и x_2 , $a < x_1 < x_2 < b$, — произвольные точки этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Лагранжа, $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$, такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

Т.к. $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, и $x_2 > x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \iff f(x_2) \leq f(x_1)$

А значит, функция $y = f(x)$ - неубывающая на (a, b) по определению.

Теорема доказана.

45. Первое достаточное условие экстремума (по первой производной)

Используются определения 54, 64, 76, 77 из списка

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 , то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, а если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через x_0 , то функция $f(x)$ имеет в этой точке строгий локальный максимум. Если же $f'(x)$ сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0 , то экстремума в этой точке нет.

Доказательство

Рассмотрим первое утверждение теоремы. Если $f'(x) < 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ функция $f(x)$ убывает, и для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ имеем $f(x) > f(x_0)$. На полуинтервале $[x_0, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Мы видим, что x_0 и в самом деле есть точка строгого локального минимума. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы. В случае последнего утверждения функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ в зависимости от знака производной $f'(x)$; экстремума в точке x_0 в обоих случаях нет.

Теорема доказана.

46. Второе достаточное условие экстремума (по второй производной)

Используются определения 64, 74, 75, 81 из списка

Если точка $x = x_0$ - стационарная точка функции $y = f(x)$, а функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в $x = x_0$ и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), тогда точка $x = x_0$ - точка локального минимума (максимума).

Доказательство

По условию $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ функция $f'(x)$ является возрастающей в $U(x_0)$

По условию x_0 - стационарная точка функции $y = f(x) \xrightarrow{\text{по опр.}} f'(x_0) = 0$ Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ при } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{по первому достаточному условию экстремума}$$

x_0 — точка локального минимума

Для $f''(x_0) < 0$ аналогично.

Теорема доказана.

47. Достаточное условие выпуклости функции

Используются определения 64, 86, 87 из списка

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) , причем в каждой точке $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ выпукла вниз на указанном интервале. Если же во всех точках интервала (a, b) вторая производная $f''(x)$ отрицательна, то функция $f(x)$ выпукла вверх на этом интервале.

Доказательство

Докажем лишь первое утверждение теоремы (второе доказывается аналогично). Рассмотрим касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Уравнение такой касательной имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Пусть для определенности $x_0 < x < b$. Тогда разность ординат точки касательной $(x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ и точки графика $(x, f(x))$ равна $\Delta y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Поэтому $\Delta y = (f'(x_0) - f'(c)) \cdot (x - x_0)$, $c \in (x_0, x)$. Применим еще раз теорему Лагранжа: $\Delta y = -f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $c_1 \in (x_0, c)$. Здесь $f''(c_1) > 0$, $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$, поэтому $\Delta y < 0$, и точка касательной лежит ниже соответствующей точки графика функции. Аналогично можно доказать это утверждение и в случае $a < x < x_0$. Таким образом, точки касательной лежат ниже соответствующих точек графика функции, и функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) . Теорема доказана.

48. Необходимое условие точки перегиба

Используются определения 64, 88 из списка

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 , причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если x_0 - точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство

Предположим, $f''(x_0) \neq 0$, и пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 существует окрестность $U_\delta(x_0)$ этой точки такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности по теореме о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. Тогда на обоих интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке x_0 . Поэтому предположение $f''(x_0) \neq 0$ неверное, $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

49. Достаточное условие точки перегиба

Используются определения 50, 88 из списка

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и непрерывна в указанной точке. Тогда, если в соответствующей проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку x_0 , то точка x_0 есть точка перегиба функции $y = f(x)$.

Доказательство

Пусть для определенности вторая производная $f''(x)$ положительна при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и отрицательна при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда на $(x_0 - \delta, x_0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x_0, x_0 + \delta)$ выпукла вверх, т.е. при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что x_0 - точка перегиба функции $f(x)$.

Теорема доказана.