Занятие 9, часть 2

Главная часть суммы

(1) конечного числа б. м. ф.
Это слагаемое самого низкого порядка малости по сравнению с каждым из слагаемых.

Пример.

$\alpha(x) = 8x^3 + 7x^2 + \boxed{3x}$ при $x \to 0$

Возьмём $\beta(x) = 3x$. Тогда $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to 0$

$\left(\text{т.к. } \lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{8x^3+7x^2+3x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{8}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1\right) = \right.$

$\left. = \frac{8}{3}\cdot 0^2 + \frac{7}{3}\cdot 0 + 1 = 1\right)$. След., $\underbrace{\beta(x)}^{=3x}$ — гл. часть $\alpha(x)$ при $x \to 0$.

(2) конечного числа б. б. ф.
Это слагаемое самого высокого порядка роста по сравнению с каждым из слагаемых.

Пример.

$\alpha(x) = \boxed{8x^3} + 7x^2 + 3x$ при $x \to \infty$

Возьмём $\beta(x) = 8x^3$. Тогда $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to \infty$

$\left(\text{т.к. } \lim\limits_{x\to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{8x^3+7x^2+3x}{8x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{7}{8x} + \frac{3}{8x^2}\right) = \right.$

$\left. = 1\right)$. След., $\underbrace{\beta(x)}_{=8x^3}$ — гл. часть $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.

Сканировано с CamScanner

Нахождение порядка роста одной б.б.ф. относит. другой б.б.ф. Выделение главной части

№1.372

Определить порядок роста ф-ции $A(x)=x^3+150x+10$ относит. ф-ции $B(x)=x$ при $x\to\infty$. Найти главную часть $A(x)$ при $x\to 0$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+150x+10}{x}=\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x)$ – б.б.ф. более высокого порядка роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to 0$

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B^r(x)}=C\neq 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+150x+10}{x^r}=[r=3]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+150x+10}{x^3}=1$$

$\Rightarrow$ $r=3$ и $A(x)\sim B^3(x)$ при $x\to\infty$,

т.е. $x^3+150x+10\sim x^3$ при $x\to\infty$.

Главной частью б.б.ф. $A(x)$ явл. б.б.ф. $B^3(x)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $r=3$; Гл. часть $=x^3$ при $x\to\infty$.

Сканировано с CamScanner

№1.376.

$A(x) = \frac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$, $B(x)=x$; $x\to\infty$

Задание то же.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6}{x(3x^4+x^3+2)} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x)$ – б.б.ф. более высокого пор. роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to\infty$.

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B^r(x)} = C \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6}{x^r(3x^4+x^3+2)} = [r=2] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cancel{x^6}^{\,4}}{\cancel{x^2}(3x^4+x^3+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4}{3x^4+x^3+2} = \frac{5}{3} \neq 0$

$\Rightarrow r=2$ и $A(x) \sim \frac{5}{3}B^2(x)$ при $x\to\infty$,

т.е. $\frac{5x^6}{3x^4+x^3+2} \sim \frac{5}{3}x^2$ при $x\to\infty$.

Главной частью б.б.ф. $A(x)$ явл. б.б.ф. $\frac{5}{3}B^2(x)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $r=2$; гл. часть $= \frac{5}{3}x^2$ при $x\to\infty$

Сканировано с CamScanner

№ 1.374.

$A(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $B(x)=x$; $x\to\infty$

Задание то же.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{3/2}}}=\infty\Rightarrow$

$\Rightarrow A(x)$ – б.б.ф. более высокого пор. роста, чем б.б.ф. $B(x)$ при $x\to\infty$.

2) Найдём $r>0$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A(x)}{B^r(x)}=C\neq0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^r}=\left[r=\dfrac{1}{2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\sqrt{1}=1$

$\Rightarrow r=\dfrac{1}{2}$ и $A(x)\sim B^{\frac{1}{2}}(x)$ при $x\to\infty$,

т.е. $\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$ при $x\to\infty$

Гл. частью б.б.ф. $A(x)$ явл. б.б.ф. $B^{\frac{1}{2}}(x)$ при $x\to\infty$.

Ответ: $r=\dfrac{1}{2}$; гл. часть $=\sqrt{x}$ при $x\to\infty$.

$\boxed{\text{ДЗ IV. № 1.373, 1.375, 1.377.}}$

Сканировано с CamScanner

Док, что $f(x)=x^5\sin\frac{1}{x}+x^3$ б.б.ф. при $x\to\infty$. Найдите её пор. роста отн. ф-ции $g(x)=x$ и выделите главную часть.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^5\sin\frac{1}{x}+x^3\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^4\left(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{x^4}_{\text{б.б.ф.}}\Big(\underbrace{\underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\to 1 \text{ это I замечат. предел}}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}_{\text{эта ф-я имеет предел, равный 1}}\Big)=\infty$$

$\frac{1}{x}\to 0$

$\Rightarrow f(x)=x^5\sin\frac{1}{x}+x^3$ — б.б.ф. при $x\to\infty$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^r}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5\sin\frac{1}{x}+x^3}{x^r}=[r=4]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+0=1$$

След, $f(x)\sim x^4$ при $x\to\infty$;
имеет пор. роста $r=4$;
гл. часть $f(x)$ равна x^4 при $x\to\infty$.

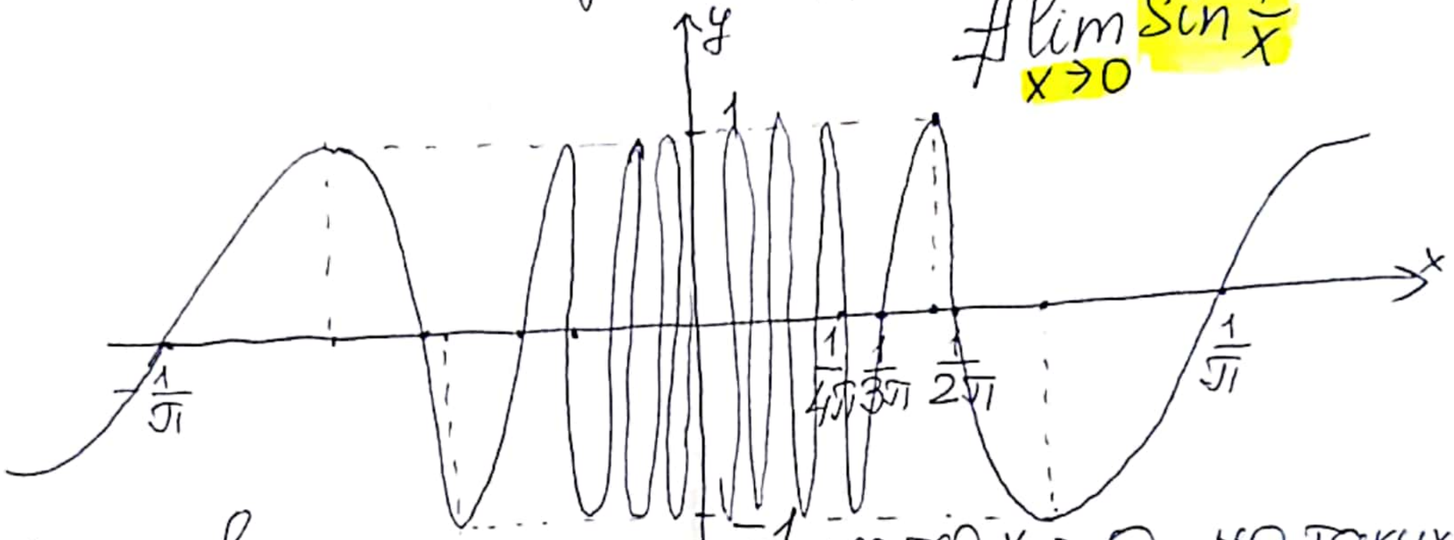
Ответ: $r=4$, гл. часть $=x^4$ при $x\to\infty$

Сканировано с CamScanner

Пример функции, не имеющей предел

$y = \sin\frac{1}{x}$

Док, что $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$



Предъявим несколько послед-тей $x_n \to 0$, но таких, что $f(x_n) \to$ разным числам.

$\sin\frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{x} = \pi n \Rightarrow x = \frac{1}{\pi n}$

$\sin\frac{1}{x} = 1$

$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ | $n=0 \Rightarrow x = \frac{2}{\pi}$; $n=1 \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi} = \frac{2}{5\pi}$

$\sin\frac{1}{x} = -1$

$\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ | $n=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\pi}$; $n=-1 \Rightarrow x = \frac{-2}{5\pi}$; $n=1 \Rightarrow x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Рас. послед. | $a_n = \frac{1}{\pi n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n \neq 0$; $f(a_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$, $b_n \neq 0$, $f(b_n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$c_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$, $c_n \neq 0$, $f(c_n) = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

След., $\Leftarrow$ $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

Сканировано с CamScanner

Опр. Пусть для

б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ | б.б.ф. $A(x)$ и $B(x)$ при $x \to x_0$ $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$

Тогда

б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ | б.б.ф. $A(x)$ и $B(x)$

наз. несравнимыми при $x \to x_0$

Примеры.

1) $\alpha(x) = x \overbrace{\sin\frac{1}{x}}^{\text{ограниченная ф-я}}$ – б.м.ф. при $x \to 0$

$\beta(x) = x$

Тогда $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$.

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Rightarrow$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимые б.м.ф. при $x \to 0$

2) $\alpha(x) = 8x^3 + 7x^2 + x\sin\frac{1}{x}$ – б.м.ф. при $x \to 0$

$\beta(x) = x$

Тогда $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \overbrace{8x^2 + 7x}^{\to 0} + \overbrace{\sin\frac{1}{x}}^{\nexists \lim\limits_{x\to 0}}$

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Rightarrow$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ тоже несравнимые б.м.ф. при $x \to 0$

Сканировано с CamScanner