
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

О.Н. Агеев, А.В. Гласко, И.Л. Покровский

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Методические указания
к выполнению типового расчета

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2004

УДК 512.83
ББК 22.143
А23

Рецензент *Д.Н Брушлинский*

Агеев О.Н., Гласко А.В., Покровский И.Л.
А23 Матрицы и определители: Методические указания к выполнению типового расчета. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 68 с.: ил.

ISBN 5-7038-2542-3

Приведены сведения об алгебре матриц и сопутствующих понятиях: определителе квадратной матрицы, обратной матрице, матричных уравнениях. Даны упражнения для самостоятельной работы и варианты заданий типового расчета.

Для студентов первого курса всех факультетов, а также преподавателей.

Библиогр. 3 назв.

УДК 512.83
ББК 22.143

Олег Николаевич Агеев
Андрей Владленович Гласко
Илья Леонидович Покровский

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ
Методические указания

Редактор *Н.Г. Ковалевская*
Корректор *Л.И. Малютина*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 10.06.2004. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печ. л. 4,25. Усл. печ. л. 3,95, Уч.-изд. л. 3,54.
Тираж 300 экз. Изд. № 24. Заказ 133
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

ISBN 5-7038-2542-3

1. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1.1. Понятие матрицы

Определение 1.1. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Число строк m и число столбцов n матрицы называют ее *порядками* или *размерами*, при этом говорят, что матрица имеет размеры "m на n" (или порядки m и n) и пишут $m \times n$.

Определение 1.2. Если число строк и число столбцов матрицы совпадает, то матрицу называют **квадратной**.

Число $m = n$ называется порядком квадратной матрицы.

Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} -$$

это квадратные матрицы 2-го и 3-го порядков соответственно.

Определение 1.3. Совокупность всех элементов квадратной матрицы, для каждого из которых номер строки совпадает с номером столбца, называется **главной диагональю**. В матрице

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 2 \\ 4 & \mathbf{4} & 1 \\ -2 & 7 & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

главная диагональ выделена полужирным шрифтом.

Важнейшей характеристикой квадратной матрицы является ее определитель.

1.2. Определители матриц 2-го и 3-го порядков

Определение 1.4. Определителем квадратной матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель еще называют **детерминантом** матрицы A и обозначают $\det A$, или Δ, или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определение 1.5. Определителем квадратной матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

При вычислении детерминанта на основе определения удобно применять следующее геометрически наглядное правило **Саррюса**, указывающее местонахождение в матрице каждой тройки элементов, представленной в формуле.

Произведения в первых скобках — это произведение элементов главной диагонали матрицы и произведения элементов, соответствующих вершинам треугольников, изображенных внутри первой матрицы на схеме.

Произведения во вторых скобках соответствуют векторной матрице на схеме.

Пример 1.1. Найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (45 + 96 + 84) - (105 + 48 + 72) = 0.$$

1.3. Свойства определителя

1) Если каждую строку квадратной матрицы записать в виде столбца с тем же номером, то определитель матрицы не изменится.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

2) При перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы местами определитель меняет знак на противоположный.

В равенствах

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

мы последовательно переставили местами 1-ю и 3-ю строки, 2-й и 3-й столбцы.

3) Если элементы одной строки (столбца) матрицы равны соответствующим элементам другой строки (столбца) той же матрицы, то определитель равен нулю.

4) При умножении всех элементов строки (столбца) матрицы на любое число определитель матрицы умножается на это число.

Пример 1.2.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 6 & 9 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 75 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 150 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5) Если матрица имеет строку (столбец), состоящую (состоящий) из нулевых элементов, то определитель матрицы равен нулю.

6) Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то определитель равен нулю.

7) Если каждый элемент i-й строки (j-го столбца) матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель матрицы равен сумме определителей двух матриц, у которых все строки (столбцы), кроме i-й (j-го), прежние, а в i-й строке (j-м столбце) в первой матрице стоят первые слагаемые, а во второй — вторые.

Например, используя это свойство для первого столбца, получим тождество

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

8) Прибавление к элементам одной строки (столбца) матрицы элементов другой строки (столбца) той же матрицы, умноженных на одно и то же число, не изменяет определитель матрицы. (При

этом преобразовании может меняться только одна строка (столбец) матрицы.)

Пример 1.3. Не вычисляя определители, доказать тождество

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Прибавим сначала 2-й столбец к 1-му столбцу, а затем 1-й столбец, умноженный на $-1/2$, ко 2-му. Согласно свойству 8 имеем

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 x & c_1 \\ 2a_2 & a_2 - b_2 x & c_2 \\ 2a_3 & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2a_1 & -b_1 x & c_1 \\ 2a_2 & -b_2 x & c_2 \\ 2a_3 & -b_3 x & c_3 \end{vmatrix}.$$

Чтобы закончить решение примера, осталось вынести общие множители 2 и $-x$ из соответственно 1-го и 2-го столбцов последней матрицы, используя свойство 4.

Для формулировки последующих свойств определителя используем понятие алгебраического дополнения элемента матрицы.

Определение 1.6. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы A 2-го или 3-го порядка называют число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij},$$

где Δ_{ij} — определитель матрицы, полученной из A удалением i-й строки и j-го столбца. Здесь и далее удобно положить, что **определитель матрицы 1-го порядка**, т. е. матрицы, состоящей из одного элемента, есть сам этот элемент.

Например, для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

получим

$$A_{22} = \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12; A_{12} = -\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6.$$

9) Для любой i-й строки и любого j-го столбца матрицы A порядка $n = 2, 3$ верны следующие равенства:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

т. е. сумма произведений элементов любой строки (столбца) матрицы на их алгебраические дополнения равна определителю этой матрицы. Если для подсчета определителя было использовано свойство 9, то говорят, что определитель получен **разложением** по соответствующей i-й строке (j-му столбцу).

При вычислении определителя конкретной матрицы удобно выбирать для разложения ту строку (столбец), которая содержит наибольшее количество нулевых элементов. В следующем примере выбрано разложение по 2-му столбцу.

Пример 1.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 \\ 7 & \mathbf{0} & 7 \\ 3 & \mathbf{0} & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14.$$

10) Сумма элементов любой строки (столбца) матрицы A порядка $n = 2, 3$, предварительно умноженных на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой же матрицы, равна нулю, т. е.

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0;$$

$$a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,$$

если $i \neq j$.

1.4. Общее определение определителя

Предположим, что мы уже ввели понятие определителя для всех матриц $(n-1)$-го порядка. Используем вышеупомянутое определение алгебраических дополнений A_{ij} для матрицы n-го порядка. Тогда эти величины определяются через определители матриц $n-1$-го порядка.

Определение 1.7. Определителем квадратной матрицы A n-го порядка ($n > 3$) называется следующее число:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

т. е. сумма элементов первой строки матрицы, предварительно умноженных на их алгебраические дополнения.

Таким образом, понятие определителя матрицы A дается через уже введенные на предыдущем шаге определители квадратных матриц $(n-1)$-го порядка. Например, определитель матрицы 4-го порядка задается по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Аналогично, определитель матрицы 5-го порядка определяется через определители матриц 4-го порядка и т. д.

Заметим, что для матриц 2-го или 3-го порядка определитель так же может быть вычислен по формуле из определения 1.6, тогда говорят, что определитель получен разложением по первой строке.

Согласно сказанному, определение 1.6 может быть использовано в качестве основного и при $n = 2, 3$.

Все свойства определителей, перечисленные в § 1.3, справедливы и для определителей матриц порядка n при $n \geq 2$.

На практике при подсчете определителя матриц 4-го порядка и выше, на основе только определения, необходимо, как правило, проводить большой объем вычислений. Поэтому удобнее с помощью свойств 4 и 8 получить большое количество нулей в выделенной строке (столбце) и потом использовать разложение по этой строке (столбцу).

Пример 1.5. Найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала получим в четвертой строке три нулевых элемента, прибавив 1-й столбец, умноженный на -1, к каждому оставшемуся столбцу. Разложив определитель по 4-й строке, согласно свойству 3 запишем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнения для самостоятельной работы

В задачах 1 и 2 вычислить определители матриц 2-го порядка.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. **2.** $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

В задачах 3 и 4 тремя способами (разложением по строке или столбцу и с помощью правила Саррюса) вычислить определители матриц 3-го порядка и сравнить результаты.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **4.** $A = \begin{pmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{pmatrix}$.

5. Выяснить, при каком условии справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислить следующий определитель, не развертывая его:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \dfrac{x+z}{2} & \dfrac{x+y}{2} & \dfrac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислить определитель, разложив его по строке или столбцу,

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

2. ВИДЫ МАТРИЦ

Частными случаями матрицы являются вектор-строка и вектор-столбец.

Вектор-строка — это матрица размера $1 \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец — это матрица размера $n \times 1$:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частным случаем матрицы является также число. Действительно, число — это квадратная матрица 1-го порядка. Например,

$$A = (5).$$

Выделим несколько важных частных случаев квадратной матрицы.

Определение 2.1. Квадратная матрица называется **верхнетреугольной** или треугольной, если все ее элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали. Например, определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен $\det A = 1 \cdot 5 \cdot 1$ (в чем нетрудно убедиться, вычисляя определитель методом разложения по первому столбцу).

Частным случаем треугольной матрицы является диагональная матрица.

Определение 2.2. Квадратная матрица называется **диагональной**, если у нее отличны от нуля только элементы главной диагонали. Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что определитель диагональной матрицы также равен произведению элементов ее главной диагонали. Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 4 = -40.$$

(Проверьте!)

Определение 2.3. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали одинаковы, называется **скалярной**:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что определитель скалярной матрицы n-го порядка равен λ^n.

Определение 2.4. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется **единичной**:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Единичную матрицу любого порядка будем обозначать буквой E. Очевидно, что единичная матрица является частным случаем скалярной.

Определение 2.5. Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— нулевая.

3. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Определение 3.1. Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковые размеры и их *соответствующие* элементы совпадают:

$$A = B \Longleftrightarrow \{a_{ij} = b_{ij}\} \; \forall i, j.$$

Приведем контрпример. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не равны друг другу, так как ($c_{11} \neq a_{11}, c_{12} \neq a_{12}$).

3.1. Линейные операции над матрицами

К линейным операциям над матрицами относят сложение матриц и умножение матрицы на число. Рассмотрим эти операции.

Сложение матриц. Сложение матриц определено только для матриц одинакового размера.

Определение 3.2. Суммой матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

при любых i и j.

Так, сумма двух матриц второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

равна

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число.

Определение 3.3. Произведением матрицы A **на число** λ называется матрица B, все элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы A на число λ:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

для любых i и j.

Так, например,

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.2. Умножить матрицу на число:

$$5\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 10 & 15 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приведем пример композиции сложения матриц и умножения матрицы на число.

Пример 3.3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2. Умножение матриц

Произведение матриц определено только в том случае, если число столбцов матрицы, стоящей первой в произведении, совпадает с числом строк второй матрицы.

Определение 3.4. Произведением матрицы A размера $n \times m$ на матрицу B размера $m \times l$ называется матрица C размера $n \times l$, элементы которой определяются по следующему правилу:
элемент c_{ij} этой матрицы равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}bmj.$$

Пример 3.4. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить произведения AB и BA.

Решение. Вычислим произведение матрицы A на матрицу B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 5\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 5\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 & -1\cdot 2 + 0\cdot 4 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведение матрицы B на матрицу A:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -5 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из рассмотренного примера ясно, что умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, т. е. в общем случае

$$AB \neq BA.$$

Пример 3.5. Вычислить произведения AB и BA, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим произведение A на B:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы B на матрицу A

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

не определено, так как число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй.

Произведение матриц ассоциативно:

$$(AB)C = A(BC),$$

т. е. мы придем к одному и тому же результату, если сначала умножим А на В, а потом полученную матрицу на С, или сначала умножим В на С, а потом А умножим на полученную матрицу.

Пример 3.6. Найти произведение матриц ABC, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножив сначала A на B, а затем полученную матрицу на C, найдем:

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наоборот, умножив сначала B на C, а затем A на полученную матрицу, найдем:

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты, очевидно, совпадают.

Отметим еще одно свойство определителя квадратной матрицы: определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B.$$

(Проверьте справедливость этого утверждения для матриц A и B из последнего примера.)

Отметим важное свойство единичной матрицы. Какой бы ни была матрица A, при умножении ее слева или справа на единичную матрицу E соответствующего порядка матрица A не изменится:

$$EA = AE = A.$$

Пример 3.7. Найти произведения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 1 \\ 9 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

на единичную матрицу справа и слева.

Решение.

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 1 \\ 9 & 14 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 1 \\ 9 & 14 & 5 \end{pmatrix} = A,$$

$$AE = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 1 \\ 9 & 14 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 1 \\ 9 & 14 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

Из указанного свойства понятно, почему единичная матрица определена именно так, а ни как-нибудь иначе.

3.3. Вычисление матричного многочлена

Определение операции произведения матриц открывает путь к определению степени матрицы. Действительно, нетрудно видеть, что при умножении квадратной матрицы на саму себя получится квадратная матрица того же порядка,что и исходная. Естественно называть такую матрицу **квадратом** исходной.

Пример 3.8. Вычислить квадрат матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

В общем случае ***n*-й степенью** ($n \in N$) **квадратной матрицы** назовем n-кратное произведение этой матрицы на себя:

$$A^n = \underbrace{AA...A}_{n \ \text{сомножителей}}.$$

При $n = 0$ по определению положим:

$$A^0 = E,$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и A.

Отметим еще раз, что понятие степени определено только для квадратных матриц, так как только квадратную матрицу можно умножить на себя саму.

Введем теперь понятие матричного многочлена.

Определение 3.5. Сумма целых неотрицательных степеней квадратной матрицы с числовыми коэффициентами называется **матричным многочленом**:

$$P_n(A) = \lambda_0 E + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + ... + \lambda_n A^n,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — некоторые числа; A — квадратная матрица.

Часто при записи матричного многочлена единичную матрицу опускают:

$$P_n(A) = \lambda_0 + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + ... + \lambda_n A^n.$$

Пример 3.9. Вычислить значение матричного многочлена

$$f(A) = 2A^2 - 5A + 3$$

при

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Транспонирование матрицы

Пусть задана некоторая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Построим новую матрицу $A^{\text{т}}$, столбцами которой являются соответствующие строки матрицы A:

$$A^{\text{т}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $A^{\text{т}}$ называется **транспонированной** матрицей A. Операция преобразования матрицы A в матрицу $A^{\text{т}}$ называется **транспонированием** матрицы A.

Пример 3.10. Транспонировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -7 \\ 8 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования обладает следующими свойствами.

1) Если матрицу транспонировать дважды, то получится исходная матрица:

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$$

(это свойство очевидно из определения транспонирования).

2) Транспонированная сумма матриц равна сумме транспонированных матриц:

$$(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$$

(что также очевидно).

3) Транспонированное произведение матрицы A на матрицу B равно произведению транспонированной матрицы B на транспонированную матрицу A:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

(Проверьте это свойство на матрицах A и B примера 3.4.)

4) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:

$$\det A^{\mathrm{T}} = \det A.$$

(Это свойство является прямым следствием первого свойства определителя.)

3.5. Элементарные преобразования матриц

Определение 3.6. К **элементарным преобразованиям** матрицы относятся следующие преобразования над ее строками или столбцами:

1) умножение строки (столбца) матрицы на ненулевое число;

2) добавление к одной строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца) той же матрицы;

3) перестановка двух строк (столбцов) матрицы местами.

Определение 3.7. Матрицы A и B, которые можно получить друг из друга с помощью элементарных преобразований, называются **эквивалентными**: $A \sim B$.

Пример 3.11.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{III} \\ \\ \mathrm{I} \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 3\mathrm{I} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Римские цифры напротив строк и над столбцами матрицы указывают, какие именно элементарные преобразования проводятся на данном шаге.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Решить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

В задачах 2 — 5 найти произведения AB и BA.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 231 & 3116 & 0 & 0 \\ 2075 & 528 & 0 & 0 \\ 652 & 769 & 0 & 0 \\ 841 & 154 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 525 & 1421 & 114 & 85 \\ 41 & 154 & 716 & 895 \end{pmatrix}.$$

6. Перемножить матрицы A, B и C сначала в последовательности $(AB)C$, а затем в последовательности $A(BC)$ и убедиться, что результаты совпадают.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

8. Найти произведение $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить AB—BA, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$.

11. Найти $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

12. Найти значение многочлена $f(X) = X^2 - X - 1$ при

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Доказать, что каждая матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = 0$.

4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

4.1. Определение и существование обратной матрицы

Определение 4.1. Матрица B называется **обратной** к квадратной матрице A, если

$$AB = BA = E.$$

Матрица, обратная к A, обозначается A^{-1} и имеет тот же порядок, что и матрица A. Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрицу A называют **обратимой**. Если матрица A обратима, то матрица A^{-1} тоже обратима и ее обратная матрица есть A. Матрица может иметь не более одной обратной матрицы.

Теорема 4.1. Квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда она **не вырождена**, т. е. ее определитель отличен от нуля.

Пример 4.1. Показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

необратимая.

Решение. Действительно, ее определитель равен 0. Поэтому, согласно теореме 4.1, она не имеет обратной.

4.2. Способы вычисления обратной матрицы

Метод присоединенной матрицы

Определение 4.2. Матрица $\tilde{A}$ называется **присоединенной** к квадратной матрице A, если для любых номеров i и j

$$\tilde{a}_{ij} = A_{ji},$$

где $\tilde{a}_{ij}$ — элемент матрицы $\tilde{A}$, расположенный в ее i-й строке и j-м столбце; A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Таким образом, присоединенная матрица есть транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Алгоритм вычисления обратной матрицы основан на следующей теореме:

Теорема 4.2. Если матрица A является невырожденной, т. е. ее определитель отличен от нуля, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

Поэтому алгоритм состоит из следующих шагов:

а) вычисление определителя матрицы;

б) нахождение матрицы из алгебраических дополнений;

в) транспонирование матрицы, полученной на предыдущем шаге;

г) деление каждого элемента матрицы, полученной на предыдущем шаге, на число, равное определителю первоначальной матрицы.

Пример 4.2. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Учитывая, что $\det A = -1$, последовательно получим:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = (-1)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.3. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В этом случае, $\det A = -21$. Далее получим:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -4 & -1 & 6 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -6 & -1 & 4 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -6 & -1 & 4 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 4/21 & 5/21 \\ 2/7 & 1/21 & -4/21 \\ 2/7 & -2/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Метод элементарных преобразований

Здесь и далее будем записывать матрицу, полученную из матрицы A приписыванием справа матрицы B тех же размеров, в виде $(A|B)$.

Алгоритм вычисления основан на следующей теореме:

Теорема 4.3. Если матрица A является невырожденной, то с помощью элементарных преобразований строк матрицу $(A|E)$ можно преобразовать к виду $(E|B)$. При этом матрица B будет обратной матрице A.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

К квадратной матрице A приписываем справа единичную матрицу тех же размеров.

Находим в 1-м столбце матрицы $(A|E)$ ненулевой элемент и переставляем строки (если необходимо) так, чтобы этот элемент был в 1-й строке.

Добавляем к каждой строке (исключая первую) последовательно 1-ю строку, умноженную на такие числа, чтобы в полученных строках в 1-м столбце стояли нули.

Находим во 2-м столбце получившейся матрицы ненулевой элемент, который не находится в 1-й строке, и переставляем строки (если необходимо) так, чтобы этот элемент был во 2-й строке, а 1-я строка осталась на своем месте.

Добавляем к каждой строке (исключая вторую) последовательно 2-ю строку, умноженную на такие числа, чтобы в полученных строках во 2-м столбце стояли нули.

Находим в 3-м столбце получившейся матрицы ненулевой элемент, который не находится в 1-й и 2-й строках, и переставляем строки (если необходимо) так, чтобы этот элемент был в 3-й строке, а 1-я и 2-я строки остались на своем месте.

Добавляем к каждой строке (исключая третью) последовательно 3-ю строку, умноженную на такие числа, чтобы в полученных строках в 3-м столбце стояли нули.

Если $n > 3$, где n — порядок матрицы A, то проведем последовательно вышеуказанные шаги с 4-м, 5-м и т. д. до номера n включительно столбцами. В любом случае получим матрицу $(C|D)$, где C — диагональная матрица. Домножим каждую строку матрицы $(C|D)$ на соответствующее ненулевое число так, чтобы на месте матрицы C получилась единичная матрица.

Пример 4.4. Найти A^{-1} с помощью элементарных преобразований, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим матрицу $(A|E)$:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований добьемся того, чтобы два первых столбца этой матрицы образовывали единичную матрицу второго порядка:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mathrm{II} - 3\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} + 2\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.5. Найти A^{-1} с помощью элементарных преобразований, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В этом случае

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} + \frac{2}{3}\mathrm{II} \\ \\ \mathrm{III} - 2\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} + \frac{5}{21}\mathrm{III} \\ \mathrm{II} + \frac{4}{7}\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 4/21 & 5/21 \\ 0 & -3 & 0 & -6/7 & -1/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{3}\mathrm{II} \\ \frac{1}{7}\mathrm{III} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 4/21 & 5/21 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & 1/21 & -4/21 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -2/7 & 1/7 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 4/21 & 5/21 \\ 2/7 & 1/21 & -4/21 \\ 2/7 & -2/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что мы предварительно не проверяли невырожденность матриц, так как, если матрица — вырожденная, то вышеуказанный алгоритм даст сбой, более точно, на некотором шаге мы не сможем выбрать соответствующий ненулевой элемент.

Упражнения для самостоятельной работы

В задачах 1—3 найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **2.** $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти обратную матрицу A^{-1} методом элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Матричным уравнением называется уравнение, в котором неизвестным является матрица. Выделим три типа простейших матричных уравнений:

$$AX = B, \quad XA = B, \quad AXB = C.$$

Здесь A, B и C — заданные матрицы, а X — неизвестная матрица.

Под решением матричного уравнения понимается матрица X, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Рассмотрим по отдельности матричные уравнения перечисленных типов.

5.1. Уравнение вида $AX = B$

Здесь A и B — заданные матрицы, причем матрица A — квадратная, а X — неизвестная матрица.

Чтобы решить уравнение, домножим обе его части *слева* на матрицу A^{-1}, если конечно она существует:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

По определению обратной матрицы, $A^{-1}A = E$, и поскольку $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B.$$

Это и есть (единственное!) решение исходного уравнения.

Понятно, что если матрица A вырождена, т. е. если $\det A = 0$, то она не имеет обратной, и этим методом нельзя решить матричное уравнение. Поэтому решение уравнения следует начинать с вычисления определителя матрицы A.

Пример 5.1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 1 \\ 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 1 \\ 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Так как $\det A \neq 0$, то уравнение имеет решение. Найдем его:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -9 & 1 \\ 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность полученного результата. Подставляя матрицу X в исходное уравнение, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 1 \\ 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица X — действительно решение данного уравнения.

Замечание 5.1. Поскольку умножение матриц некоммутативно, важно, что на A^{-1} мы домножаем обе части уравнения именно *слева*, а не справа ($X \neq BA^{-1}$).

5.2. Уравнение вида $XA = B$

Здесь, по-прежнему, X — неизвестная матрица, а A и B — заданные, причем матрица A — квадратная. В отличие от предыдущего уравнения, для получения решения данного уравнения, обе его части следует домножить на матрицу A^{-1} *справа*. В результате получим:

$$X = BA^{-1}.$$

Очевидно, что для использования этой формулы опять же должно выполняться условие $\det A \neq 0$.

Пример 5.2. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначив

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

получим

$$\det A = -5 \neq 0.$$

следовательно, уравнение разрешимо. Далее,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$X = BA^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & -15 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если полученную матрицу X подставить в исходное уравнение, то можно убедиться в том , что она действительно является его решением.

5.3. Уравнение вида $AXB = C$

Здесь A, B и C — заданные матрицы, причем матрицы A и B квадратные, а X — неизвестная матрица.

Домножая обе части уравнения *слева* на A^{-1}, и *справа* на B^{-1}, имеем

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$$

или

$$EXE = A^{-1}CB^{-1},$$

т. е.

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Ясно, что эта формула применима только в том случае, если обе матрицы A и B невырождены: $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. По этой причине решение следует начинать с вычисления обоих определителей.

Пример 5.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 & 7 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 19 & 12 & 7 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det A = 1, \quad \det B = 1.$$

Оба определителя отличны от нуля, следовательно, уравнение разрешимо. Далее,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 12 & 7 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В результате непосредственной подстановки легко убедиться, что эта матрица действительно является решением исходного уравнения.

Упражнения для самостоятельной работы

В задачах 1—3 решить матричные уравнения.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

3. $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$

6. РАНГ МАТРИЦЫ

6.1. Определение ранга

Пусть дана матрица A размера $m \times n$.

Определение 6.1. Минором порядка k ($k \leq m$ и $k \leq n$) **матрицы** A называется определитель совокупности элементов этой матрицы, находящихся на пересечении произвольных ее k строк и k столбцов.

Понятно, что матрица имеет, вообще говоря, множество миноров. Например, к минорам 2-го порядка матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

относятся определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix},$$

составленные из элементов, находящихся на пересечении 2-й и 3-й строк и 2-го и 3-го столбцов, и на пересечении 2-й и 3-й строк и 3-го и 4-го столбцов соответственно, а к минорам 3-го порядка этой матрицы относятся определители

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

составленные из элементов, находящихся на пересечении 1, 2, 3-й строк и 1, 2, 3-го столбцов, и на пересечении 1, 2, 3-й строк и 1, 3, 4-го столбцов соответственно.

Отметим, что минор Δ_1 равен нулю (нулевой минор):

$$\Delta_1 = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Определение 6.2. Базисным минором матрицы A называется отличный от нуля минор этой матрицы максимального порядка.

Определение 6.3. Рангом матрицы A называется порядок ее базисного минора.

Таким образом, ранг — это максимальный порядок ненулевого минора матрицы.

Заметим, что матрица может иметь несколько базисных миноров, но ранг матрицы определен однозначно (все базисные миноры имеют один и тот же — максимальный — порядок).

Пример 6.1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы, т. е. единственный ее минор 3-го порядка, равен нулю. С другой стороны, матрица имеет отличные от нуля миноры 2-го порядка, например:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, эти миноры есть отличные от нуля миноры максимально возможного порядка, т. е. базисные миноры, а ранг матрицы A равен двум:

$$r(A) = 2.$$

(В дальнейшем для обозначения ранга мы будем использовать букву r.)

6.2. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров

Понятно, что нахождение ранга матрицы по определению требует вычисления очень большого числа определителей. Снизить трудоемкость процесса вычисления ранга позволяет **метод окаймляющих миноров**. Он состоит в следующем. Пусть мы нашли отличный от нуля минор k-го порядка Δ_k матрицы A. Значит, ранг этой матрицы $r \geq k$. Будем вычислять миноры $(k+1)$-го порядка, *окаймляющие* минор Δ_k, т. е. полученные присоединением к нему строки и столбца. Как только мы найдем ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, перейдем к вычислению окаймляющих его миноров. Если же все рассмотренные миноры $(k+1)$-го порядка окажутся нулевыми, то матрица A имеет ранг $r = k$.

Пример 6.2. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Очевидно, что данная матрица имеет ненулевые миноры 2-го порядка. К ним относится, например, минор, находящийся на пересечении двух первых строк и двух первых столбцов этой матрицы:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Поэтому ранг матрицы $r \geq 2$.

2) Будем теперь последовательно вычислять миноры 3-го порядка, окаймляющие минор Δ_2, пока не обнаружим ненулевой минор (если он, конечно, существует).

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3^{(5)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Итак, мы нашли минор 3-го порядка, отличный от нуля. Следовательно, $r \geq 3$.

3) Минор $\Delta_3^{(5)}$ окаймляют всего два минора 4-го порядка:

$$\Delta_4^{(1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_4^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку оба они равны нулю, ранг нашей матрицы $r = 3$.

6.3. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Хотя метод окаймляющих миноров позволяет найти ранг матрицы проще, чем непосредственно по определнию, все же он требует весьма громоздких вычислений. На практике гораздо удобней использовать для вычисления ранга **метод элементарных преобразований**, изложенный ниже (понятие элементарных преобразований матриц было введено в § 3.5).

Теорема 6.1. Ранг матрицы не меняется при выполнении элементарных преобразований.

Таким образом, эквивалентные матрицы имеют одинаковый ранг.

Определение 6.4. Понятие **ступенчатой матрицы** определим в два этапа.

1) Матрица, не имеющая нулевых строк, называется **ступенчатой**, если для любого k первый отличный от нуля элемент $(k+1)$-й строки этой матрицы имеет больший номер столбца (расположен правее), чем первый отличный от нуля элемент k-й строки.

2) Матрица, полученная из ступенчатой путем присоединения к ней снизу одной или нескольких нулевых строк, также называется **ступенчатой**.

Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

ступенчатые, а матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} -$$

не ступенчатые, так как в матрице C первый отличный от нуля элемент 3-й строки $c_{32} = -1$ имеет тот же номер столбца, что и первый отличный от нуля элемент 2-й строки: $c_{22} = 1$, а в матрице D

нулевая строка расположена посередине, а не добавлена снизу, ввиду чего нарушается ступенчатость матрицы.

Теорема 6.2. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк этой матрицы.

Например, ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен двум: $r(A) = 2$.

Теоремы 6.1, 6.2 позволяют сформулировать **метод вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований:**

путем элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду;

определим ранг ступенчатой матрицы, пересчитав число ее ненулевых строк (теорема 6.2);

в силу теоремы 6.1 этот ранг равен рангу исходной матрицы.

Пример 6.3. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \ 2\text{II} \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \ \text{III} - \text{II} \ \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{II} - \text{I} \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Полученная матрица A' — ступенчатая. Очевидно,

$$r(A') = 2,$$

так как она имеет две ненулевых строки (теорема 6.2).

Однако в силу теоремы 6.1

$$r(A) = r(A') = 2.$$

6.4. Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду. Пример вычисления ранга матрицы

В примере 6.3 мы выполняли элементарные преобразования последовательно: на каждом шаге по одному преобразованию. Вообще говоря, при таком подходе выкладки могут оказаться очень громоздкими, а, кроме того, содержать ненужные действия, увеличивающие число шагов для приведения матрицы к ступенчатому виду. По этой причине было бы удобно использовать алгоритм, в котором на каждом шаге выполняется сразу несколько элементарных преобразований и который позволяет привести матрицу к ступенчатому виду за минимально необходимое число шагов, т. е. алгоритм, *оптимизирующий* процесс приведения матрицы к ступенчатому виду.

Такой алгоритм существует и состоит в следующем.

На первом шаге мы добиваемся того, чтобы во 2-й, 3-й, ...,m-й строках матрицы первый ненулевой элемент был расположен правее, чем в 1-й строке. Для этого мы ищем первый (слева) столбец, в котором есть хотя бы один ненулевой элемент, расположенный ниже первого элемента этого столбца. Если при этом 1-й элемент столбца равен нулю, то переставляем строки так, чтобы он стал отличным от нуля. Затем, если в данном столбце остались еще ненулевые элементы, лежащие ниже первого, обращаем их в ноль, вычитая из соответствующих строк 1-ю строку, домноженную на то или иное число.

На втором шаге мы добиваемся того, чтобы в 3-й, 4-й, ...,m-й строках матрицы первый ненулевой элемент был расположен правее, чем во 2-й строке.

Для этого мы ищем первый (слева) столбец, в котором есть хотя бы один ненулевой элемент, расположенный ниже второго элемента этого столбца. Если при этом 2-й элемент столбца равен нулю, то переставляем строки так, чтобы он стал отличным от нуля. Затем, если в данном столбце остались еще ненулевые элементы, лежащие ниже второго, обращаем их в нуль, вычитая от соответствующих строк 2-ю строку, домноженную на то или иное число.

На $(m-1)$-м шаге мы добиваемся того, чтобы в m-й строке матрицы первый ненулевой элемент был расположен правее, чем в $(m-1)$-й. Для этого мы ищем первый (слева) столбец, в котором есть хотя бы один ненулевой элемент, расположенный ниже $(m-1)$-го элемента этого столбца. Если при этом $(m-1)$-й элемент столбца равен нулю, то переставляем строки так, чтобы он стал отличным от нуля. Затем, если в данном столбце остались еще ненулевые элементы, лежащие ниже $(m-1)$-го, то обращаем их в нуль, вычитая от соответствующих строк $(m-1)$-ю строку, домноженную на то или иное число.

Пример 6.4. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-3\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mathrm{IV}-\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 6.1. Теорема 6.1 подразумевает *последовательное* выполнение элементарных преобразований. Поэтому если не следовать четкому алгоритму, а объединять несколько элементарных

преобразований в группу произвольным образом, то легко ошибиться и получить неправильное значение ранга. Продемонстрируем это на примере.

Пример 6.5. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из 2-й строки 3-ю, а из 3-й — 2-ю, получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы $r(A') = 1$. Однако ранг исходной матрицы $r(A) = 2$. Действительно, $\det A = 0$, но существует отличный от нуля минор 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Таким образом,

$$r(A') \neq r(A)$$

и

$$A \not\sim A'.$$

Изменение ранга вызвано тем, что мы *одновременно* заменили 2-ю строку на разность 2-й и 3-й, а 3-ю — на разность 3-й и 2-й, неправильно использовав теорему 6.1.

Действительно, если бы мы выполняли те же самые преобразования последовательно, то получили бы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{III} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $r(A) = 2$.

Мы же, по существу, сначала вычли из 3-й строки 2-ю, а затем из 2-й строки *получившейся* матрицы 3-ю строку *исходной*, в результате просто подменив две разных строки одной.

6.5. Различные частные случаи. Примеры вычисления ранга матриц

В примере 6.4 элемент $a_{11} = 1$. Если единичный элемент находится в другом месте матрицы (не a_{11}), то для приведения матрицы к ступенчатому виду удобно сначала путем перестановки строк и столбцов местами переместить единичный элемент на позицию a_{11}.

Пример 6.6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 10 & 9 & 3 & -5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 10 & 9 & 3 & -5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 7 & 7 & 2 & -3 & 4 \\ 10 & 9 & 3 & -5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & 7 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & 10 & -5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$r(A) = 2.$$

Если единичный элемент в исходной матрице вообще отсутствует, то самый прямой, но отнюдь не самый легкий путь состоит в том, чтобы, разделив первую строку на a_{11}, сделать ее первый элемент равным единице.

Пример 6.7. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I}/2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-5\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-4\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1 & -1 \\ 0 & -3/2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{2}{3}\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & -3/2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}+3\mathrm{II}/2 \\ \mathrm{IV}+3\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$r(A) = 2.$$

Из приведенного примера понятно, почему мы назвали такой путь не самым легким: приходится оперировать дробями.

Гораздо проще поступить иначе. Покажем это на том же примере.

Пример 6.8. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2\text{II}-3\text{I} \\ 2\text{III}-5\text{I} \\ \text{IV}-2\text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III}-\text{II} \\ \text{IV}-\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$r(A) = 2.$$

В заключение этого раздела проведем вычисление ранга матрицы, зависящей от параметра при различных значениях этого параметра.

Пример 6.9. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

в зависимости от значения параметра λ.

Решение. $$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & \lambda^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III}-\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix} = A'.$$

а. Очевидно, что матрица A' является ступенчатой при $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -1$. При этом $r(A) = 3$.

б. При $\lambda = 1$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $r(A) = 1$.

в. При $\lambda = -1$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $r(A) = 2$.

Упражнения для самостоятельной работы

В задачах 1—3 найти ранг матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

В задачах 4—5 вычислить ранг матрицы в зависимости от значения параметра λ.

4. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$.

7. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Даны матрицы A, B, C и число k. Вычислить матрицу $F = C(A + kB)(A + kB)^{\text{т}}$. Матрицы B и C общие для всех вариантов:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

число k и матрица A даны в таблице.

Задача 2. Найти значение матричного многочлена.

Задача 3. Найти матрицу, обратную данной.

Задача 4. Решить матричное уравнение.

Таблица

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
1	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^3-C^2-C+E$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	2	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^2-C+8E$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
3	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=3C^3-C^2+2C-6E,$ $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ -5 & 18 \end{pmatrix}$	4	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2+4C+8E,$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 1 \\ -22 & 2 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
5	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^3+C^2-C+4E,$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}$	6	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=4C^2-2C-3E,$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
7	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^{-}7C+5E$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	8	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2+3C-7E$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -14 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
9	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^3-2C^2+C-E$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$	10	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2+4C-5E$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
11	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix}0&-1&2&-1\\0&1&0&3\\-2&-1&1&1\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=3C^3-C^2+7C+8E,$ $C=\begin{pmatrix}3&1\\4&0\end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&1\\1&-3&-1\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&-1\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-7\\2&3\end{pmatrix}$	12	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\0&-1&-3&0\\-1&-1&0&2\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2-2C+E,$ $C=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&0&1\\3&2&0\end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}0&3\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&-3\\-13&-2\end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
13	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix}-1&-1&0&2\\-2&0&-1&1\\3&0&-1&2\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^3-C^2-3C+E,$ $C=\begin{pmatrix}2&3\\4&0\end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}-3&1\\2&-1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0&1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&3\\6&-3\end{pmatrix}$	14	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\2&-2&0&1\\0&0&-3&-1\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=4C^2+2C+9E,$ $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-2\\6&-3\end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
15	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=3C^3-4C^2+2C+7E,$ $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$	16	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^3+2C^2-7C+E,$ $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -16 & 2 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
17	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2+3C+E,$ $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -13 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -39 & -38 \end{pmatrix}$	18	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^3+C^2+2C-E,$ $C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 13 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
19	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\0&2&1&1\\-3&0&-1&2\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2-4C+5E,$ $C=\begin{pmatrix}0&-1&3\\-1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix}6&15&2\\-1&2&8\\-1&2&3\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}0&3\\1&-2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39&57\\-18&-29\end{pmatrix}$	20	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix}0&-1&-3&0\\-1&0&1&2\\0&-2&-1&0\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^3-5C^2+3C-E,$ $C=\begin{pmatrix}4&1\\-1&0\end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix}2&-5&7\\8&1&2\\-5&1&6\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&5\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&26\\-5&-9\end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
21	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix}-2&0&1&-1\\0&3&0&0\\-1&0&2&1\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2+3C-2E,$ $C=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&-1\\3&1&1\end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix}15&7&-4\\3&2&-5\\1&2&5\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&24\\11&45\end{pmatrix}$	22	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix}-1&2&0&2\\0&-1&1&-3\\-2&1&-1&-1\end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^3+4C^2+C-E,$ $C=\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix}3&6&2\\-5&1&4\\-8&7&3\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}-3&-2\\-1&0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3&4\\5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-19\\1&-7\end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
23	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^2+C-E,$ $C=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix} -22 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 1 \\ -49 & -11 \end{pmatrix}$	24	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=4C^3+3C^2-2C-2E,$ $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 8 & -10 & 3 \\ 1 & 12 & -5 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 14 & 23 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
25	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=3C^2+C+2E,$ $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 17 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$	26	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=3C^3+4C^2-C-E,$ $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \\ -5 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 2 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$

Продолжение

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
27	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=4C^2+C-2E$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 6 & 7 & -8 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -34 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$	28	**1.** $k=-1,\ A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=3C^3+5C^2+7C+2E$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & 12 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -16 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$

Окончание

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
29	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=C^2-2C+3E$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $B=\begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ 5 & 1 & 2 \\ -8 & 15 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -23 & 37 \end{pmatrix}$	30	**1.** $k=1,\ A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **2.** $f(C)=2C^3+3C^2-C+5E$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $C=\begin{pmatrix} 12 & 5 & -7 \\ 11 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$

8. ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

К главе 1.

1.1. -1. **1.2.** 1. **1.3.** 27. **1.4.** $2x^3-(a+b+c)x+abc$. **1.5.** $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. **1.6.** -7. **1.7.** 0. **1.8.** $x^n+(-1)^{n+1}y^n$.

К главе 3.

3.1. $X=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}$, $\quad Y=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&-1\end{pmatrix}$.

3.2. $AB=-1$, $\quad BA=\begin{pmatrix}8&-12&0\\6&-9&0\\2&-3&0\end{pmatrix}$.

3.3. $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\quad BA=\begin{pmatrix}-4&6&0&2\\-3&2&-2&2\\4&-1&4&-3\\1&6&6&-2\end{pmatrix}$.

3.4. $AB=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\1\end{pmatrix}$, $\quad BA-\nexists$.

3.5. $AB=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

3.6. $ABC=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$.

3.7. $\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)&-\sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta)&\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$.

3.8. $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.

3.9. $AB-BA=\begin{pmatrix}-10&-4&-7\\6&14&4\\-7&5&-4\end{pmatrix}$.

3.10. $ABC=\begin{pmatrix}13&-14\\21&-22\end{pmatrix}$.

3.11. $\begin{pmatrix}\cos n\alpha&-\sin n\alpha\\\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}$.

3.12. $f(A)=\begin{pmatrix}5&1&3\\8&0&3\\-2&1&-2\end{pmatrix}$.

К главе 4.

4.1. $\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$. 4.2. $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$.

4.3. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$. 4.4. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

К главе 5.

5.1. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. 5.2. $\begin{pmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{pmatrix}$. 5.3. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

К главе 6.

6.1. 3. 6.2. 4. 6.3. 3. 6.4. $r=2$ при $\lambda=3$, $\quad r=3$ при $\lambda\neq3$.
6.5. $r=1$ при $\lambda=2$, $\quad r=2$ при $\lambda=-1$, $\quad r=3$ при $\lambda\neq-1;2$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
2. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
3. Сборник задач по линейной алгебре / Леванков В.И., Мирославлев Е.Н., Соболев С.К., Чуев В.Ю.; Под ред. С.К.Соболева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1991.

ОГЛАВЛЕНИЕ