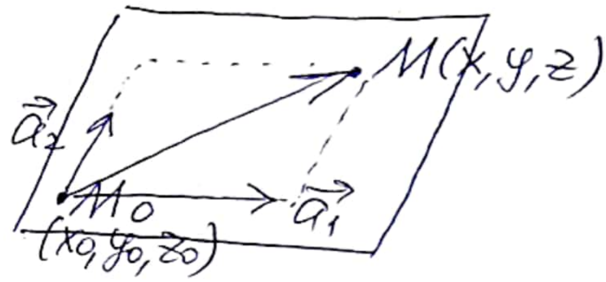
Семинар 7.

Уравнение плоскостей.

№2182(а) $\boxed{\text{ДЗ I № 2.182(б)}}$

Написать уравнение плоскости, проходящей через т. M_0 параллельно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, если $M_0(1,1,1)$, $\vec{a}_1\{0,1,2\}$, $\vec{a}_2\{-1,0,1\}$

Решение.



1) Параметрическое ур-е:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + a_2 v \\ y = y_0 + b_1 u + b_2 v \\ z = z_0 + c_1 u + c_2 v \end{cases}, \text{ где } u, v \in \mathbb{R}$$

$M \quad M_0 \quad \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 0u + (-1)v \\ y = 1 + 1u + 0v \\ z = 1 + 2u + 1v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - v \\ y = 1 + u \\ z = 1 + 2u + v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}$$

2) Общее ур-е $Ax+By+Cz+D=0$ получим из параметрического, посчитав определитель

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)1 - (y-1)2 + (z-1)1 = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y + z = 0}$$

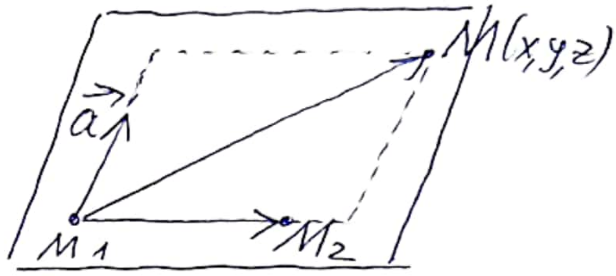
Ответ: ↑

В ОТВЕТАХ ВСЕГДА ОБЩЕЕ УР-Е.

№ 2.183(а) ДЗII № 2.183(б)

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\vec{a}$, если $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, $\vec{a}\{3,0,1\}$.

Решение.



1) Параметрическое ур-е:

$$\left\{\begin{array}{l} \underset{M}{\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}} = \underset{M_1}{\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}} + \underset{\overrightarrow{M_1M_2}}{\begin{matrix}(x_2-x_1)\\(y_2-y_1)\\(z_2-z_1)\end{matrix}} \begin{matrix}u\\u\\u\end{matrix} + \underset{\vec{a}}{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}} \begin{matrix}v\\v\\v\end{matrix} \end{array}\right., \text{ где } u,v\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + (2-1)u + 3v \\ y = 2 + (1-2)u + 0v \\ z = 0 + (1-0)u + 1v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + u + 3v \\ y = 2 - u \\ z = u + v \end{cases}, \ u,v\in\mathbb{R}$$

2) Общее ур-е $Ax+By+Cz+D=0$ получим из параметрического, посчитав определитель

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & a \\ y-y_1 & y_2-y_1 & b \\ z-z_1 & z_2-z_1 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 3 \\ y-2 & 1-2 & 0 \\ z-0 & 1-0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-1) - (y-2)(-2) + z\cdot 3 = 0$$

$$-x + 2y + 3z - 3 = 0$$

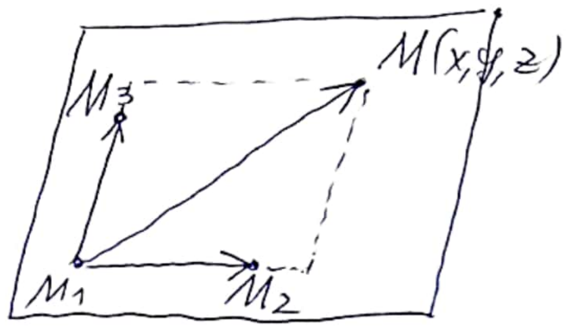
$$\boxed{x - 2y - 3z + 3 = 0} \leftarrow \text{Ответ:}$$

№ 2.184 (а) $\boxed{\text{ДЗ III № 2.184(б)}}$ $\boxed{3}$

Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2 и M_3, если $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, $M_3(3,0,1)$

Решение.

1) Параметрическое ур-е:



$$\underbrace{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}}_{M} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix}}_{M_1} + \underbrace{\begin{matrix} (x_2-x_1) \\ (y_2-y_1) \\ (z_2-z_1) \end{matrix}}_{\overrightarrow{M_1M_2}} \begin{matrix} u \\ u \\ u \end{matrix} + \underbrace{\begin{matrix} (x_3-x_1) \\ (y_3-y_1) \\ (z_3-z_1) \end{matrix}}_{\overrightarrow{M_1M_3}} \begin{matrix} v \\ v \\ v \end{matrix} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + (2-1)u + (3-1)v \\ y = 2 + (1-2)u + (0-2)v \\ z = 0 + (1-0)u + (1-0)v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + u + 2v \\ y = 2 - u - 2v \\ z = u + v \end{cases}, \ u, v \in \mathbb{R}$$

2) Общее ур-е $Ax+By+Cz+D=0$ получим из параметрического, посчитав определитель

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 3-1 \\ y-2 & 1-2 & 0-2 \\ z-0 & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)1 - (y-2)(-1) + z \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{x+y-3=0}$$

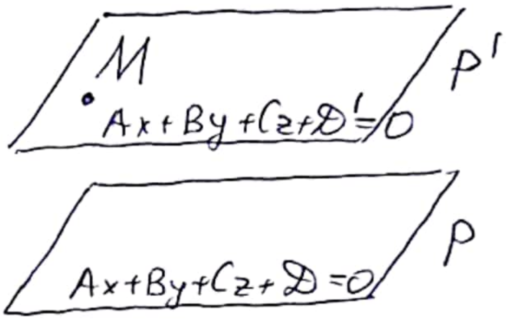
Ответ: $x+y-3=0$

Заданы плоскость P и точка M.

① Написать уравнение плоскости P', проходящей через M и параллельно P.

② Вычислить расстояние $\rho(P, P')$ между плоскостями P и P', если $P: -2x+y-z+1=0$, $M(1,1,1)$.

Решение.



①1) Ур-е плоскости

$P: -2x+y-z+1=0.$

Плоскость $P' \parallel P \Rightarrow$

$\Rightarrow$ будем искать её уравнение в виде

$-2x+y-z+D'=0.$

2) Найдём D'.

Точка $M \in P' \Rightarrow$ её координаты удовл. ур-ю плоскости P'. Подставим их в ур-е P':

$$-2\cdot 1+\cancel{1}-\cancel{1}+D'=0$$

$$D'=2$$

След. ур-е P': $\boxed{-2x+y-z+2=0}$

② Расстояние $\rho(P', P) = \rho(M, P) = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

где $M(x_0, y_0, z_0)$.

$$\Rightarrow \rho(P', P) = \frac{|-2\cdot 1+\cancel{1}-\cancel{1}+1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

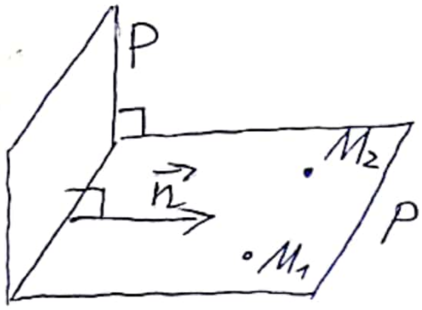
Ответ: $-2x+y-z+2=0$; $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

№2.181(а) $\boxed{\text{ДЗ } \overline{V} \text{ №2.181(б)}}$ $\boxed{5}$

Написать уравнение плоскости p', проходящей через заданные точки M_1 и M_2, и перпендикулярной заданной плоскости p, если $p: -x+y-1=0$

$\boxed{\text{сист. к-т прямоугольная}}$ $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$

Решение.



1) Общее ур-е плоскости p в прямоуг. системе координат из условия:

$-x+y-1=0$, т.е. $\underbrace{(-1)}_{A}x+\underbrace{1}_{B}\cdot y+\underbrace{0}_{C}\cdot z-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вектор $\vec{n}\{A,B,C\}=\{-1,1,0\} \perp$ плоскости p.

Т.к. по условию пл. $p \perp$ пл. p', то вектор $\vec{n}$ [illegible] плоскости p'.

След, для пл. p' известны вектор $\vec{n}$ и две точки M_1, M_2. Такую задачу мы уже решали (см. №2.183(а)).

Найдём (для краткости) сразу общее ур-е плоскости p':

из $\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & A \\ y-y_1 & y_2-y_1 & B \\ z-z_1 & z_2-z_1 & C \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & -1 \\ y-2 & 1-2 & 1 \\ z-0 & 1-0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$

$(x-1)(-1)-(y-2)1+z\cdot 0=0$

$x-y+3=0$

Ответ: $x-y+3=0$.