Московский государственный технический университет

имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

С.Н. Ефремова, А.В. Косова, Т.А. Ласковая

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методические указания к выполнению домашнего задания

Москва

УДК 514.742

С.Н. Ефремова, А.В. Косова, Т.А. Ласковая

Прямая и плоскость в пространстве. Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу Аналитическая геометрия. - М. : Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2016. - 37 с.

Кратко изложен теоретический материал по теме «Прямая и плоскость в пространстве», рассмотрены основные понятия, даны алгоритмы решения типовых задач и пояснения к характеру основных действий при выполнении этого алгоритма. Приведено большое количество задач с подробными решениями, которые помогут как в решении домашнего задания, так и при подготовке к экзамену.

Методические указания составлены в соответствии с учебной программой для бакалавров факультетов ИУ, РЛ и БМТ 1-го курса.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Ефремова Светлана Николаевна

Косова Анна Владимировна

Ласковая Татьяна Алексеевна

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа написана в помощь студентам первого курса и имеет своей целью дать подробное объяснение основных понятий курса «Аналитическая геометрия» и умение применять их для решения задач, используя необходимый математический аппарат, а также сделать учебный материал более доступным и структурированным.

Тема «Прямая и плоскость в пространстве» сложна в первую очередь огромным разнообразием задач. Поскольку изложение материала опирается на важные понятия аналитической геометрии, изученные ранее, в работе упомянуты основные определения, понятия и теоремы курса, наиболее часто используемые при решении задач.

Целью работы является разъяснение сущности аналитического метода и применение его в различных ситуациях, а не слепое запоминание формул. Для этого при решении задач сделан акцент на подробное объяснение того, каким образом используются свойства векторов, а также скалярного, векторного и смешанного произведений.

После освоения темы студенты должны знать и уметь применять методы векторной алгебры и аналитической геометрии в решении задач, а также приобрести навыки практического применения базовых понятий курса для решения более сложных и интересных задач.

Работа содержит большое количество задач как базового уровня, так и более сложные примеры. Методические указания призваны помочь студентам в решении задач типового расчета и подготовке к рубежному контролю и экзамену.

1. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Большинство задач, рассматриваемых в данной работе, решены с использованием методов векторной алгебры. Поэтому, напомним основные определения и теоремы, на которые мы будем наиболее часто ссылаться и использовать в дальнейшем.

Прежде всего, отметим, что в курсе аналитической геометрии рассматриваются так называемые ***свободные векторы***. Под свободным вектором понимается множество направленных отрезков, расположенных на параллельных прямых и имеющих одинаковую длину и направление. При таком подходе все множество направленных отрезков в пространстве разбивается на множество классов равных направленных отрезков. Любой направленный отрезок $\overline{AB} = \bar{a}$ может быть представителем вектора $\bar{a}$. Таким образом, для любого вектора точка приложения может быть выбрана произвольно.

Коллинеарными называются векторы, лежащие на одной или на параллельных прямых.

Компланарными называются векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Отметим несколько важных теорем, необходимых нам в дальнейшем.

Теорема 1. (критерий ортогональности векторов) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$ равно нулю.

Теорема 2. (1-й критерий коллинеарности векторов) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

Теорема 3. (2-й критерий коллинеарности векторов) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ равно нулю.

Теорема 4. (критерий компланарности векторов) Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ равно нулю.

Перейдем к понятию плоскости.

Теорема 5. Всякая плоскость в пространстве R^3 в прямоугольной системе координат задается уравнением первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ и наоборот, всякое уравнение первой степени задает плоскость.

Любой ненулевой вектор, ортогональный плоскости называется ***нормальным вектором плоскости***.

Возьмем на плоскости точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и вектор $\bar{n}=\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ - нормальный вектор плоскости. Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка. Она принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0 M}$ принадлежит плоскости и, следовательно, ортогонален вектору $\bar{n}=\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ (рис.1). Следовательно, согласно критерию ортогональности (Теорема 1), скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю: $\left(\overline{M_0 M}, \bar{n}\right)=0$.

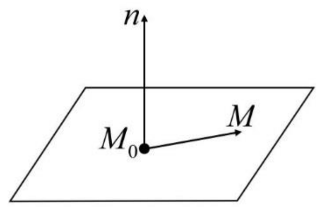

Рис.1

Переходя к вычислению скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе, получим: $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$. Раскроем скобки и приведем подобные:

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

где $D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)$.

Это общее уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и имеющей нормальный вектор $\bar{n}=\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$.

Задача 1. Точка $P(2;-1;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

Решение: Пусть точка $M(x, y, z)$- произвольная точка плоскости, уравнение которой необходимо написать. Поскольку плоскость проходит через точку P, то вектор $\overline{PM}$ также принадлежит плоскости и, следовательно, ортогонален вектору нормали. Для решения задачи остается только найти его координаты.

Из условия задачи следует, что это вектор $\overline{OP}=\{2;-1;-1\}$. Запишем скалярное произведение этих векторов и приравняем его нулю: $\left(\overline{PM},\bar{n}\right)=0$. Получим $2(x-2)-1(y+1)-1(z+1)=0$. Раскроем скобки и приведем подобные, чтобы записать общее уравнение плоскости: $2x-y-z-6=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;4;-5)$ параллельно векторам $\bar{a}\{3;1;-1\}$ и $\bar{b}\{1;-2;1\}$.

Решение: Поскольку плоскость параллельна векторам $\bar{a}\{3;1;-1\}$ и $\bar{b}\{1;-2;1\}$, то ее нормальный вектор перпендикулярен этим векторам. Поэтому, для нахождения нормального вектора плоскости необходимо найти какой-либо ненулевой вектор, перпендикулярный двум заданным. В качестве такого вектора можно взять вектор, коллинеарный векторному произведению векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Пользуясь выражением векторного произведения в координатах, вычислим $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\{-1;-4;-7\}$. Возьмем в качестве вектора нормали вектор $\bar{n}\{1;4;7\}$. Условие ортогональности произвольного вектора плоскости $\overline{M_0M}$ и $\bar{n}$ будет иметь вид $\left(\overline{PM},\bar{n}\right)=0$. Вычислив скалярное произведение, получим уравнение плоскости:

$$1(x-3)+4(y-4)+7(z+5)=0 \quad \text{или} \quad x+4y+7z+16=0.$$

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\bar{a}\{3;-1;4\}$.

Решение: Найдем нормальный вектор плоскости. Так как точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ принадлежат плоскости, то вектор $\overline{M_1M_2}$ принадлежит плоскости. Следовательно, он перпендикулярен

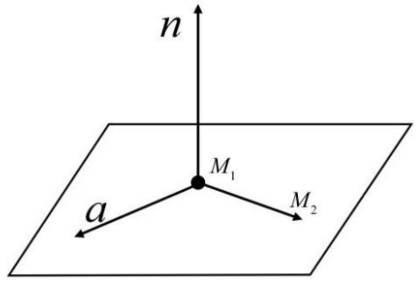

Рис.2

нормальному вектору плоскости, также как и вектор $\bar{a}\{3;-1;4\}$ (рис.2).

Вычислим векторное произведение этих векторов $\bar{a}\times\overline{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\{-7;7;7\}$. В качестве вектора нормали можно взять вектор $\bar{n}\{1;-1;-1\}$, коллинеарный полученному. Запишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(2;-1;3)$ перпендикулярно найденному вектору $\bar{n}\{1;-1;-1\}$: $1(x-2)-(y+1)-(z-3)=0$. Получим общее уравнение плоскости $x-y-z=0$.

1.1 Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки

Кроме того, можно вывести уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой. Поскольку данные три точки не лежат на одной прямой, векторы $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ и $\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$ не коллинеарны, а поэтому произвольная точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$ принадлежат одной плоскости, т.е. компланарны (рис. 3).

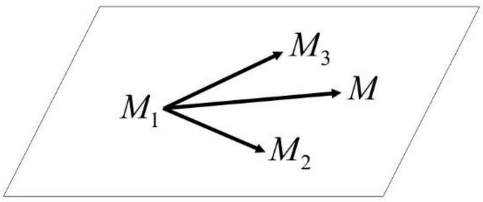

Рис.3

Согласно критерию компланарности (Теорема 4), их смешанное произведение равно нулю: $\left(\overline{M_1M},\overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3}\right)=0$.

Используя формулу для вычисления смешанного произведения в ортонормированном базисе, получим:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Раскрывая определитель и приводя подобные, можно получить общее уравнение плоскости.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3;-1;2), M_2(4;-1;-1), M_3(2;0;2)$.

Решение: Эту задачу можно решить двумя способами. Можно найти нормальный вектор плоскости (аналогично тому, как мы сделали в задачах 2 и 3) для того, чтобы воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно найденному вектору. В этом случае в качестве вектора нормали можно взять векторное произведение векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$, поскольку $\overline{M_1M_2} \subset P \Rightarrow \overline{M_1M_2} \perp \bar{n}$, $\overline{M_1M_3} \subset P \Rightarrow \overline{M_1M_3} \perp \bar{n}$, а следовательно $\bar{n} \parallel \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$.

Имеем $\bar{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{3;3;1\}$. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;-1;2)$, перпендикулярно найденному вектору $\bar{n}\{3;3;1\}$: $3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0$. Получим общее уравнение плоскости $3x+3y+z-8=0$.

Но для решения этой задачи гораздо удобнее воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через три точки. Найдем координаты векторов $\overline{M_1M_2}=\{1,0,-3\}$, $\overline{M_1M_3}=\{-1,1,0\}$, $\overline{MM_1}=\{x-3,y+1,z-2\}$ и приравняем нулю их смешанное произведение. Получим $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Раскрывая определитель по первой строке, имеем $3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0$ или $3x+3y+z-8=0$.

Задача 5. Проверить, можно ли провести плоскость через точки $A(3;1;0), B(0;7;2), C(-1;0;-5), D(4;1;5)$.

Решение: Точки принадлежат одной плоскости, если векторы $\overline{AB}\{-3,6,2\}$, $\overline{AC}\{-4,-1,-5\}$ и $\overline{AD}\{1,0,5\}$ компланарны. В этом случае смешанное произведение этих векторов равно нулю. Вычислим его.

$\begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-30+2)+5(3+24) = -28+135 = 107 \neq 0$. Следовательно, векторы не компланарны, а точки не принадлежат одной плоскости.

1.2. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями.

Угол φ между плоскостями определяется как угол между их нормальными векторами $\bar{n}_1\{\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1\}$ и $\bar{n}_2\{\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2\}$. Это определение дает не один, а два угла (острый и тупой), дополняющие друг друга до π. Вычисляется он с помощью формулы скалярного произведения $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = |\bar{n}_1||\bar{n}_2|\cos\varphi$. Получаем $\cos\left(\widehat{P_1, \mathrm{P}_2}\right) = \cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$. Если угол между плоскостями острый, то его косинус неотрицателен.

Если плоскости перпендикулярны, то и их нормальные векторы $\bar{n}_1\{\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1\}$ и $\bar{n}_2\{\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2\}$ ортогональны, следовательно их скалярное произведение равно нулю, то есть $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$. Если же $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают.

Задача 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;2;-7)$, параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

Решение: Поскольку плоскости параллельны, их нормальные векторы можно считать равными. Запишем уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{n}\{5;-3;2\}$, проходящей через точку $M(3;2;-7)$: $5(x-3) - 3(y-2) + 2(z+7) = 0 \Rightarrow 5x - 3y + 2z + 4 = 0$.

Задача 7: Выяснить взаимное расположение плоскостей $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ и $2x + y + 2z - 1 = 0$. Если плоскости пересекаются – найти острый двугранный угол между ними.

Решение: Нормальные векторы плоскостей: $\bar{n}_1\{4;2;-4\}$ и $\bar{n}_2\{2;1;2\}$. Так как $\dfrac{4}{2} = \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-4}{2} \neq \dfrac{5}{-1}$, то плоскости не параллельны и не совпадают. Остается единственный вариант – плоскости пересекаются. Найдем острый угол между ними. Для этого сразу возьмем модуль соответствующего выражения:

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{|8 + 2 - 8|}{\sqrt{16+4+16} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{9}.$$

1.3. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле: $\rho = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Задача 8. На оси OX найти точку, равноудаленную от плоскостей: $x + 4y - 3z - 2 = 0$ и $5x + z + 8 = 0$.

Решение: Точка лежит на оси OX, следовательно, ее координаты $(x_0;0;0)$. Найдем расстояния от нее до плоскостей и приравняем их: $\dfrac{|x_0 - 2|}{\sqrt{1+16+9}} = \dfrac{|5x_0 + 8|}{\sqrt{25+1}} \Rightarrow x_0 - 2 = \pm(5x_0 + 8) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -2,5 \end{array}\right.$. Условию задачи удовлетворяют две точки: $(-1;0;0)$ и $(-2,5;0;0)$.

1.4. Уравнение плоскости «в отрезках»

Если в уравнении плоскости (1) $Ax + By + Cz + D = 0$ все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение плоскости называется ***полным*** и может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (2)$$

называемому уравнением плоскости ***«в отрезках»***.

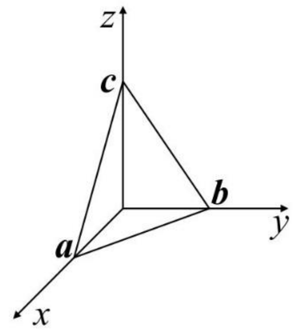

Рис.4

В самом деле, так как все коэффициенты отличны от нуля, перепишем уравнение плоскости в виде:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1,$$

а затем положим $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$.

Заметим, что в уравнении «в отрезках» (2) числа a, b и c имеют простой геометрический смысл: они равны абсциссе, ординате и аппликате точек пересечения плоскости с координатными осями (рис. 4).

Задача 9. Найти точки пересечения плоскости $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ с осями координат.

Решение: Запишем уравнение плоскости в отрезках: $2x - 3y - 4z = 24 \Rightarrow \dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{-8} + \dfrac{z}{-6} = 1.$ Здесь $a = 12, b = -8, c = -6$ - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат. Поэтому $A(12,0,0)$, $B(0,-8,0)$, $C(0,0,-6)$ - точки пересечения с осями координат.

Задача 10. Плоскость проходит через точки $M_1(1;2;-1)$ и $M_2(-3;2;1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b=3$. Составить для этой плоскости уравнение в отрезках.

Решение: Поскольку точка $B(0;3;0)$- точка пересечения плоскости с осью *Ox*, то она принадлежит искомой плоскости. Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2 и *B*. Для этого приравняем нулю смешанное произведение векторов $\overline{BM}$, $\overline{M_1B}$ и $\overline{M_2B}$:

$$\left(\overline{BM}, \overline{M_1B}, \overline{M_2B}\right) = \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Поэтому}$$

$$-2x + 2(y-3) - 4z = 0 \Rightarrow x - y + 2z = -3 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3/2} = 1.$$

Задача 11. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(-1;4;-1)$, $M_2(-13;2;-10)$ и отсекает на осях абсцисс и аппликат отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

Решение: Возможны два случая: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$ (I) или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{-a} = 1$ (II). Умножив обе части уравнений на *ab*, получим: $bx + ay + bz - ab = 0$ (I) и $bx + ay - bz - ab = 0$ (II).

Подставим в уравнение (I) координаты точек M_1 и M_2 для нахождения a и b: $\begin{cases} -b + 4a - b - ab = 0 \\ -13b + 2a - 10b - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4a}{2+a} \\ \dfrac{-92a + 4 + 2a^2 - 4a^2}{2+a} = 0 \end{cases}$. Продолжим решение системы: $\begin{cases} b = \dfrac{4a}{2+a} \\ a^2 + 44a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -44 \\ b = \dfrac{88}{21} \end{cases}$. Тогда уравнение первой плоскости, удовлетворяющей условию задачи: $2x - 21y + 2z + 88 = 0$.

Аналогично, подставив координаты точек в уравнение (II), получим: $\begin{cases} -b + 4a + b - ab = 0 \\ -13b + 2a + 10b - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -6 \end{cases}$. Следовательно, уравнение второй плоскости, удовлетворяющей условию задачи: $2x - 3y - 2z + 12 = 0$.

2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Любую прямую линию в пространстве можно задать как линию пересечения двух различных и не параллельных плоскостей. Предположим, что две различные плоскости, уравнения которых известны, пересекаются по прямой *L*. Следовательно, ее можно задать системой двух уравнений этих плоскостей:

$$L \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Два уравнения системы совместно определяют прямую в том и только в том случае, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 одного из них не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 другого.

Для решения многих задач более удобным является специальный вид уравнений прямой. Пусть дана некоторая прямая. Любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется ***направляющим вектором этой прямой***. Обозначим этот вектор $\bar{s} = \{l, m, n\}$ и зададим точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащую этой прямой. Пусть точка $M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой. Тогда, вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\bar{s} = \{l, m, n\}$. Следовательно, их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (4)$$

Этим соотношениям удовлетворяют координаты любой точки *M*, лежащей на прямой. Эти уравнения принято называть ***каноническими уравнениями прямой***. Заметим, что в канонических уравнениях (4) одно или два из чисел могут оказаться равными нулю (обращение в ноль одного из знаменателей означает обращение в ноль и соответствующего числителя).

Параметрические уравнения прямой легко получаются из канонических уравнений (4). Для этого нужно принять за параметр t каждое из отношений (4), и затем выразить из полученных соотношений *x, y, z*. Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}. \qquad (5)$$

При изменении *t* от -∞ до +∞ точка *M* «пробегает» всю прямую. Параметрические уравнения прямой удобно применять в тех случаях, когда нужно найти точку пересечения прямой с плоскостью.

Задача 12. Составить канонические уравнения прямой, параллельной оси OY, проходящей через точку $M(2;0;-1)$.

Решение: Поскольку прямая параллельна оси OY, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять орт оси OY $\bar{s}=\bar{j}=\{0;1;0\}$. Запишем канонические уравнения: $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$.

Если известны две точки, лежащие на прямой $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то можно легко получить канонические уравнения прямой, проходящей через две различные точки. Направляющим вектором этой прямой будет вектор $\overline{M_1M_2}$. Поэтому уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Задача 13. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;2;-4)$ параллельно прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$.

Решение: Так как прямые параллельны, их направляющие векторы равны. Следовательно, $\bar{s}\{3;1;-2\}$. Запишем параметрические уравнения прямой:
$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t+2 \\ z=-2t-4 \end{cases}.$$

Задача 14. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;0;-1)$ и $M_2(-6;6;-5)$.

Решение: Найдем вектор $\overline{M_1M_2}=\{-6-2,6-0,-5+1\}=\{-8,6,-4\}$. Поскольку в качестве направляющего вектора прямой можно взять любой вектор, коллинеарный данному, возьмем $\bar{s}=\{4;-3;2\}$. Теперь запишем условия коллинеарности произвольного вектора прямой $\overline{M_1M}$ и вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{2}.$$

Рассмотрим, как составить канонические уравнения прямой (4) в том случае, если прямая задана пересечением двух плоскостей, т.е. системой уравнений (3).

Задача 15. Найти канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x-10y+2z+14=0 \\ 3x-2y-z+3=0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Решение: Для того, чтобы записать канонические уравнения, нужно найти направляющий вектор этой прямой и хотя бы одну точку M_0, лежащую на ней. Поскольку линия пересечения плоскостей принадлежит обеим плоскостям, то ее направляющий вектор $\bar{s}$ ортогонален каждому из нормальных векторов $\bar{n}_1\{1;-10;2\}$ и $\bar{n}_2\{3;-2;-1\}$ плоскостей. Поэтому в качестве вектора $\bar{s}$ можно взять любой вектор, ортогональный векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, например их векторное произведение (рис.5).

Имеем $\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -10 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}=14\bar{i}+7\bar{j}+28\bar{k}$.

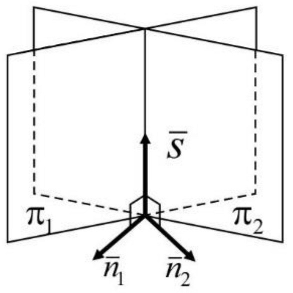

Рис.5

Поскольку все координаты векторного произведения кратны 7, можно в качестве направляющего вектора взять вектор $\bar{s}=\{2,1,4\}$.

Теперь найдем точку M_0, принадлежащую прямой. Положим x=0 в системе уравнений (3.1). Получим систему $\begin{cases}10y+2z+14=0\\ -2y-z+3=0\end{cases}$. Поскольку в данной системе определитель $\begin{vmatrix}10 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\neq 0$, определим соответствующие значения $y=\frac{10}{7}$ и $z=-\frac{1}{7}$. Таким образом, имеем точку $M_0\left(0,\frac{10}{7},-\frac{1}{7}\right)$, принадлежащую прямой. Записав условия коллинеарности векторов $\overline{M_0M}=\left\{x,y-\frac{10}{7},z+\frac{1}{7}\right\}$ и $\bar{s}=\{2,1,4\}$, получим канонические уравнения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{10}{7}}{1}=\frac{z+\frac{1}{7}}{4}$.

Параметрические уравнения прямой будут иметь вид: $\begin{cases}x=2t\\ y=t+\frac{10}{7}\\ z=4t-\frac{1}{7}\end{cases}$.

Задача 16. Составить канонические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось OX и точку $E(3;2;-5)$.

Решение: Для начала составим уравнение второй плоскости. Поскольку плоскость проходит через ось OX и точку $E(3;2;-5)$, то она содержит векторы $\bar{i}\{1;0;0\}$ и $\overline{OE}\{3;2;-5\}$. В качестве нормального вектора плоскости возьмем векторное произведение этих векторов: $\overline{n_2} = \overline{i} \times \overrightarrow{OE} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \{0;5;2\}$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку O (или E) перпендикулярно вектору $\overline{n_2}\{0;5;2\}$ будет иметь вид: $5y+2z=0$. Теперь запишем общие уравнения прямой: $\begin{cases} 3x-y-7z+9=0 \\ 5y+2z=0 \end{cases}$.

Для того, чтобы записать канонические уравнения прямой, необходимо найти ее направляющий вектор. Так как прямая принадлежит обеим плоскостям, ее направляющий вектор ортогонален нормальным векторам этих плоскостей. Следовательно, $\overline{s} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \{33;-6;15\}$. Найдем точку на прямой: пусть $y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow M(-3;0;0)$. Запишем канонические уравнения прямой: $\frac{x+3}{33} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{15}$.

2.1 Угол между прямыми.

Угол между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, n_2\}$. Пользуясь формулой $\cos\alpha = \frac{(\overline{s_1}, \overline{s_2})}{|\overline{s_1}| \cdot |\overline{s_2}|}$, имеем

$$\cos\left(L_1 \hat{,} L_2\right) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Если прямые параллельны, то из условия коллинеарности направляющих векторов, получим условие параллельности двух прямых:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Если же прямые ортогональны, то из условия ортогональности направляющих векторов, получим условие ортогональности двух прямых:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Задача 17. Найти угол α между прямыми: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Решение: Запишем направляющие векторы прямых: $\overline{s}_1\{3;2;-2\}$, $\overline{s}_2\{3;2;1\}$. Тогда $\cos\left(L_1 \hat{,} L_2\right) = \cos\left(\overline{s}_1 \hat{,} \overline{s}_2\right) = \frac{9+4-2}{\sqrt{9+4+4}\sqrt{9+4+1}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{14}} = \frac{11\sqrt{238}}{238}$. Следовательно $\alpha = \arccos\frac{11\sqrt{238}}{238}$.

2.2 Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется как угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Это определение дает не один, а два угла, дополняющие друг друга до π, причем каждый из этих углов заключен между 0 и π. В зависимости от выбора направляющего вектора прямой и нормального вектора к плоскости имеем всего четыре угла, образующие две пары вертикальных углов. Чтобы его найти, заметим, что искомый угол φ является дополнительным к углу ψ между направляющим вектором $\overline{s} = \{l, m, n\}$ прямой и нормальным вектором плоскости $\overline{n} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ (рис. 6). Поскольку $0 \le \varphi \le \pi$, то из равенства $\sin\varphi = |\cos\psi|$, получим для определения угла между прямой и плоскостью следующую формулу:

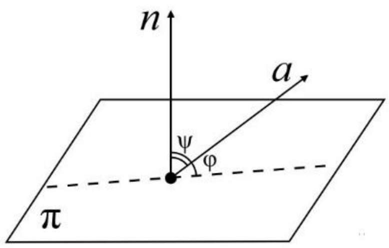

Рис.6

$$\sin\varphi = \sin\left(L \hat{,} P\right) = \left|\cos\left(\overline{s} \hat{,} \overline{n}\right)\right| = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \quad (6)$$

Если прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ параллельна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, то направляющий вектор прямой $\overline{s} = \{l;m;n\}$ и нормальный вектор плоскости $\overline{n} = \{A,B,C\}$ перпендикулярны , следовательно их скалярное произведение равно нулю. Таким образом, условие параллельности прямой и плоскости имеет вид: $Al+Bm+Cn=0$.

Если же прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ перпендикулярна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, то векторы $\overline{s} = \{l;m;n\}$ и $\overline{n} = \{A,B,C\}$ параллельны, следовательно их координаты пропорциональны. Таким образом, условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

Задача 18. Найти угол α между прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-6}$ и плоскостью $2x+3y+z-1=0$.

Решение: Направляющий вектор прямой $\bar{s}=\{1;-2;-6\}$, а вектор нормали $\bar{n}=\{2,3,1\}$. Теперь воспользуемся формулой (6):

$$\sin\left(L\hat{,}P\right)=\left|\cos\left(\bar{s}\hat{,}\bar{n}\right)\right|=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{|2-6-6|}{\sqrt{1+4+36}\sqrt{4+9+1}}=\frac{5\sqrt{574}}{267}.$$

Следовательно $\alpha=\arcsin\frac{5\sqrt{574}}{267}$.

3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Две прямые $L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ могут лежать или не лежать в одной плоскости. Если две прямые в пространстве лежат в одной плоскости, то они могут либо **пересекаться**, либо быть **параллельными**. В противном случае (когда они не лежат в одной плоскости) они **скрещиваются**.

Установим условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

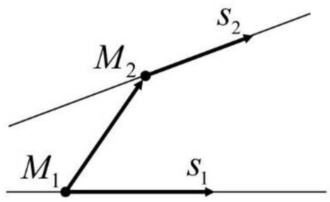

Рис.7

Чтобы две прямые принадлежали одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\overline{M_1M_2}\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$ были компланарны (рис. 7). А для этого необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение этих векторов было равно нулю $\left(\overline{M_1M_2},\bar{s}_1,\bar{s}_2\right)=0$. Записывая это условие в координатах, получим условие принадлежности двух прямых одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

Следовательно, прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда равенство (7) не выполнено.

Задача 19. Выяснить взаимное расположение прямых: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$. Если они пересекаются, найти точку их пересечения. Если они скрещиваются или параллельны, то найти расстояние между ними.

Решение: Из уравнений этих прямых, найдем два направляющих вектора: $\overline{s}_1\{2;-3;4\}$ и $\overline{s}_2\{3;2;-2\}$. Зная координаты двух точек $M_1(1,-2,5)$ и $M_2(7,2,1)$, лежащих на этих прямых, найдем вектор $\overline{M_1M_2}\{6;4;-4\}$. Выясним взаимное расположение прямых, для чего вычислим смешанное произведение этих векторов $\left(\overline{M_1M_2},\overline{s_1},\overline{s_2}\right)$. Определитель $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & -4\end{vmatrix}=0$, следовательно, прямые принадлежат одной плоскости (либо параллельны, либо пересекаются). Поскольку $\frac{2}{3}\neq\frac{-3}{2}\neq\frac{4}{-2}$, то направляющие векторы этих прямых не коллинеарны и, следовательно, прямые пересекаются. Для нахождения точки пересечения запишем параметрические уравнения первой прямой: $\begin{cases}x=2t+1\\ y=-3t-2\\ z=4t+5\end{cases}$.

Подставим эти значения в уравнения второй прямой и найдем значение параметра t, соответствующее точке пересечения: $\frac{2t-6}{3}=\frac{-3t-4}{2}=\frac{4t+4}{-2}\Rightarrow\begin{cases}4t-12=-9t-12\\ 6t+8=8t+8\end{cases}\Rightarrow t=0$. Подставим найденное значение в параметрические уравнения первой прямой: $x=1;\ y=-2;\ z=5\ \Rightarrow\ M(1;-2;5)$.

Задача 20. Выяснить взаимное расположение прямых: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-3}{4}$. Если прямые лежат в одной плоскости – составить уравнение этой плоскости, если при этом прямые параллельны - найти расстояние между ними.

Решение: Из уравнений этих прямых, найдем два направляющих вектора: $\overline{s}_1(3;4;2)$ и $\overline{s}_2(6;8;4)$. Поскольку $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$, то эти векторы коллинеарны и прямые параллельны, следовательно, принадлежат одной плоскости. Составим уравнение этой плоскости. Зная координаты двух точек $M_1(2,-1,0)$ и $M_2(7,1,3)$, лежащих на этих прямых, найдем вектор $\overline{M_1M_2}(5;2;3)$. Найдем нормальный вектор искомой плоскости: $\overline{n}=\overline{s}_1\times\overline{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}=\{8;1;-14\}$.

Теперь запишем уравнение плоскости из условия $\left(\overline{M_1M},\bar{n}\right)=0$. Получим $8(x-2)+(y+1)-14z=0$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид $8x+y-14z-15=0$.

Чтобы найти расстояние между двумя прямыми, построим параллелограмм на векторах $\bar{s}$ и $\overline{M_1M_2}$ (рис. 8). Высота h этого параллелограмма, опущенная на сторону $\bar{s}$, будет равна расстоянию между этими прямыми. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов $\bar{s}$ и $\overline{M_1M_2}$. Тогда $h=\frac{S}{|\bar{s}|}=\frac{\left|\bar{s}\times\overline{M_1M_2}\right|}{|\bar{s}|}=\frac{|\bar{n}|}{|\bar{s}|}=\frac{\sqrt{64+1+196}}{\sqrt{9+16+4}}=\frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}}=3$.

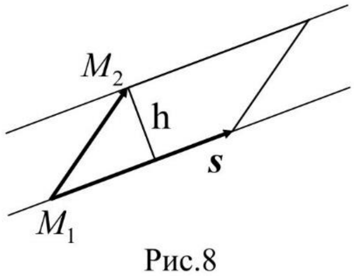

Рис.8

Задача 21. Убедиться, что прямые $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y-9}{4}=\frac{z+2}{-3}$ и $L_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{9}$ скрещиваются. Найти расстояние между ними. Написать уравнение общего перпендикуляра к этим прямым.

Решение: Если прямые скрещиваются, то $\left(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\overline{M_1M_2}\right)\neq 0$. Проверим: $\left(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\overline{M_1M_2}\right)=\begin{vmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & -2 & 9\\ 2 & -9 & -5\end{vmatrix}=245\neq 0$. Заметим, что поскольку векторы $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ некомпланарны, то на них можно построить параллелепипед. Длина высоты этого параллелепипеда, опущенная на грань, образованную векторами $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$, будет равна расстоянию между скрещивающимися прямыми (рис. 9). Найдем ее по формуле $\rho=h=\frac{V_{пар-да}}{S_{\square}}$.

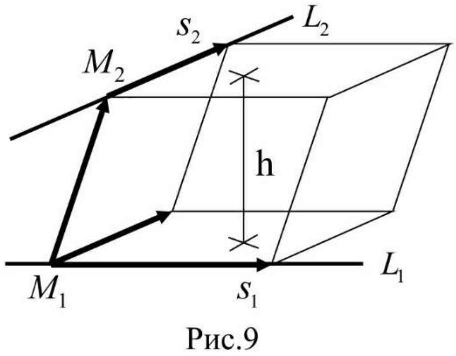

Рис.9

Поскольку $V_{пар-да}=\left|\left(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\overline{M_1M_2}\right)\right|=245$, а $S_{\square}=|\bar{s}_1\times\bar{s}_2|$, найдем $\bar{s}_1\times\bar{s}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 2 & -2 & 9\end{vmatrix}=(30;-15;-10)\Rightarrow|\bar{s}_1\times\bar{s}_2|=\sqrt{900+225+100}=35$. Тогда $\rho=\frac{V_{пар-да}}{S_{\square}}=\frac{\left|\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2\cdot\overline{M_1M_2}\right|}{|\bar{s}_1\times\bar{s}_2|}=\frac{245}{35}=7$.

Прямая L, являющаяся общим перпендикуляром к прямым L_1 и L_2, должна быть перпендикулярна каждой из них, следовательно, в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ этой прямой можно взять вектор, коллинеарный векторному произведению направляющих векторов $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$:

$$\bar{s} \parallel \bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} = (30;-15;-10) \Rightarrow \bar{s} = \{6;-3;-2\}.$$

Кроме того, прямая L должна пересекать и первую, и вторую прямую. Вместо того, чтобы искать эти точки, используя дополнительные выкладки, используем способ задания прямой как линии пересечения двух плоскостей P_1 и P_2 (рис. 10).

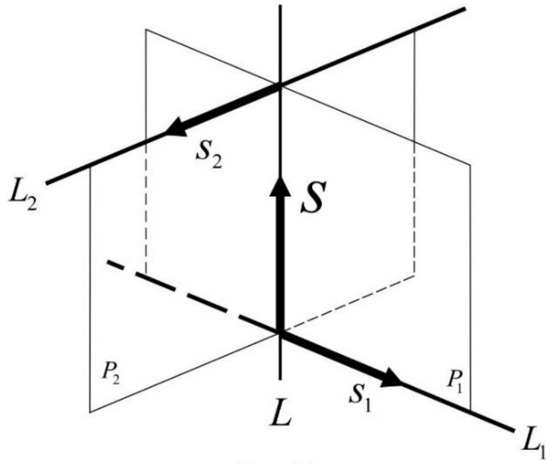

Рис.10

Проведем плоскость P_1, которая содержит прямую L_1 и вектор $\bar{s}$. Ее уравнение получим из условия компланарности векторов $\overline{M_1M}$, $\bar{s}$ и $\bar{s}_1$:

$$\left(\overline{M_1M},\ \bar{s},\bar{s}_1\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-9 & z+2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 17x + 16(\mathrm{y}-9) + 27(\mathrm{z}+2) = 0.$$

Уравнение плоскости P_1 имеет вид $17x + 16y + 27z - 90 = 0$.

Плоскость P_2 содержит прямую L_2 и вектор $\bar{s}$. Ее уравнение получим из условия компланарности векторов $\overline{M_2M}$, $\bar{s}$ и $\bar{s}_2$:

$$\left(\overline{M_2M},\ \bar{s},\bar{s}_2\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z+7 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -31(x-2) - 58\mathrm{y} - 6(\mathrm{z}+7) = 0.$$

Уравнение плоскости P_2 имеет вид $31x + 58y + 6z - 20 = 0$.

Очевидно, что обе плоскости пересекутся по общему перпендикуляру – прямой L.

Тогда уравнение общего перпендикуляра будет иметь вид:

$$\begin{cases} 17x + 16y + 27z - 90 = 0 \\ 31x + 58y + 6z - 20 = 0 \end{cases} \qquad (L)$$

Задача 22. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и точку $M(1;2;-3)$.

Решение: Из канонических уравнений прямой находим направляющий вектор прямой $\bar{s}=\{3,2,-2\}$ и координаты точки M_1, лежащей на этой прямой $M_1=(2,-1,3)$. Поскольку искомая плоскость содержит и прямую, и точку М, то нормальный вектор плоскости ортогонален и вектору $\bar{s}$, и вектору $\overline{M_1M}$ (рис. 11). Поэтому в качестве вектора нормали можно взять векторное произведение этих векторов:

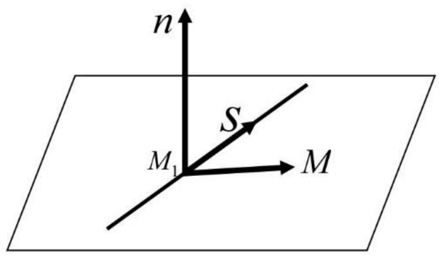

Рис.11

$\bar{n}=\bar{s}\times\overline{M_1M}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & -2\\ -1 & 3 & -6\end{vmatrix}=\{-6;20;11\}$. Тогда запишем уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M(1;2;-3)$ и имеющей нормальный вектор $\bar{n}=\{-6,20,11\}$:

$$-6(x-1)+20(y-2)+11(z+3)=0\Rightarrow 6x-20y-11z+1=0.$$

Задача 23. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;-3)$ перпендикулярно прямой L: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$. Найти проекцию точки $M(1;2;-3)$ на данную прямую и расстояние от точки до прямой.

Решение: Поскольку прямая перпендикулярна плоскости, то направляющий вектор прямой является нормальным вектором плоскости. Тогда можно записать уравнение искомой плоскости:

$3(x-1)+2(y-2)-2(z+3)=0\Rightarrow 3x+2y-2z-13=0$. Проекция точки M на прямую будет совпадать с точкой пересечения H этой плоскости и прямой L. Точка пересечения H принадлежит и прямой, и плоскости. Следовательно, чтобы найти ее координаты, удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой и подобрать такое значение параметра t, при котором координаты точки на прямой будут удовлетворять уравнению плоскости. Для этого решим систему, содержащую параметрические уравнения прямой и уравнение плоскости:

$$\begin{cases} x=3t+2 \\ y=2t-1 \\ z=-2t+3 \\ 3x+2y-2z-13=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t+2 \\ y=2t-1 \\ z=-2t+3 \\ 9t+6+4t-2+4t-6-13=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{15}{17} \\ x=3t+2 \\ y=2t-1 \\ z=-2t+3 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{79}{17};\frac{13}{17};\frac{21}{17}\right).$$

Точка H - проекция точки M на прямую L. Следовательно, расстояние от точки M до прямой L - длина вектора $\left|\overline{MH}\right| = \left|\left(\frac{62}{17};-\frac{21}{17};\frac{72}{17}\right)\right| = \frac{1}{17}\sqrt{9469}$.

Задача 24. Найти точку G, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Решение: Для начала составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку P. В качестве направляющего вектора прямой возьмем нормальный вектор плоскости $\bar{n}=\{3,1,-2\}$. Имеем $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}$.

Затем, чтобы получить проекцию точки точки P на заданную плоскость, найдем точку пересечения Q этой прямой и плоскости (рис. 12):

$$Q=\begin{cases} 3x+y-2z=0 \\ x=3t+1 \\ y=t+3 \\ z=-2t-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9t+3+t+3+4t+8=0 \\ x=3t+1 \\ y=t+3 \\ z=-2t-4 \end{cases} \Rightarrow Q(-2;2;-2).$$

Эта точка Q является серединой отрезка GP и ее координаты равны полусуммам соответствующих координат точек P и G:

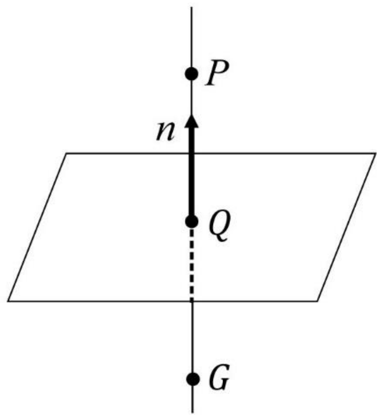

Рис.12

$$\begin{cases} x_Q=\dfrac{x_P+x_G}{2} \\ y_Q=\dfrac{y_P+y_G}{2} \\ z_Q=\dfrac{z_P+z_G}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G=2x_Q-x_P=-4-1=-5 \\ y_G=2y_Q-y_P=4-3=1 \\ z_G=2z_Q-z_P=-4+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G=-4-1=-5 \\ y_G=4-3=1 \\ z_G=-4+4=0 \end{cases}$$

Тогда $G(-5;1;0)$.

Задача 25. Через точку $M(4;0;-1)$ провести прямую так, чтобы она пересекала прямые: L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$ и L_2: $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

Решение: Для начала отметим, что точка М не лежит на прямых L_1 и L_2, поскольку ее координаты не удовлетворяют уравнениям этих прямых. После этого выясним взаимное расположение этих прямых. Поскольку $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 176 \neq 0$, то прямые скрещиваются. Следовательно, задача имеет единственное решение.

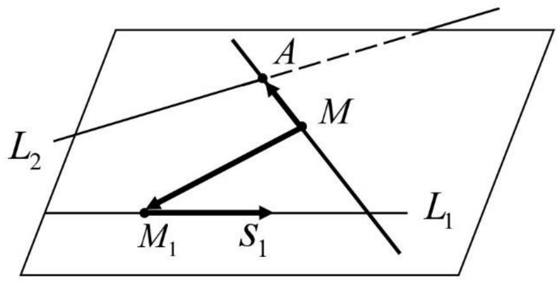

Рис.13

Теперь проведем плоскость через прямую L_1 и точку M (рис. 13). Нормальный вектор этой плоскости будет ортогонален векторам $\bar{s}_1$ и $\overline{MM_1}$. Поэтому

$\bar{n} \parallel \bar{s}_1 \times \overline{MM_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (33;-21;6) \Rightarrow \bar{n} = \{11;-7;2\}$. Запишем уравнение плоскости, имеющей нормальный вектор $\bar{n} = \{11;-7;2\}$ и проходящей через точку M: $11(x-4)-7y+2(z+1)=0 \Rightarrow 11x-7y+2z-42=0$.

После этого найдем точку A пересечения этой плоскости и прямой L_2:

$$\begin{cases} 11x-7y+2z-42=0 \\ x=5t \\ y=-t+2 \\ z=2t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 55t+7t-14+4t-2-42=0 \\ x=5t \\ y=-t+2 \\ z=2t-1 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{145}{33};\frac{37}{33};\frac{25}{33}\right).$$

Прямая, проходящая через точки А и М, и будет являться искомой прямой (рис.13). Найдем ее направляющий вектор $\overline{AM}$.

$$\overline{AM}\left(-\frac{13}{33};-\frac{37}{33};-\frac{58}{33}\right) \Rightarrow \bar{s} = \{13;37;58\}.$$

Следовательно, уравнения искомой прямой имеют вид: $\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}$.

Задача 26. На прямой $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ найти точку M, равноудаленную от точек $A(3,11,4)$ и $B(-5,-13,-2)$.

Решение: Множество точек пространства, равноудаленных от А и В, будут образовывать плоскость ***P***, проходящую через середину отрезка $[AB]$, перпендикулярно ему. Найдем уравнение этой плоскости. Нормальным вектором $\bar{n}$ плоскости ***P*** будет любой вектор, коллинеарный $\overline{AB}$. Поскольку

$\overline{AB} = (-8,-24,-6)$, в качестве нормали возьмем вектор $\bar{n} = (4,12,3)$. Теперь найдем координаты точки O – середины отрезка $[AB]$:

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = -1; \quad y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = -1; \quad z_O = \frac{z_A + z_B}{2} = 1.$$

Запишем уравнение плоскости ***P*** из условия $\left(\overline{AB}, \overline{OM}\right) = 0$:

$$4(x+1) + 12(y+1) + 3(z-1) = 0$$
$$4x + 12y + 3z + 13 = 0$$

Поскольку, по условию, точка M, равноудаленная от точек A и B, должна лежать на данной прямой, она будет являться точкой пересечения этой прямой и найденной плоскости. Следовательно, ее координаты будут удовлетворять системе трех уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x - y + 4z = 29 \\ 4x + 12y + 3z = -13 \end{cases}.$$

Решим систему с помощью формул Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 29 & -1 & 4 \\ -13 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 29 & 4 \\ 4 & -13 & 3 \end{vmatrix} = -9; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 29 \\ 4 & 12 & -13 \end{vmatrix} = 15.$$

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 2; \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = -3; \quad z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = 5.$ Получим координаты точки $M(2,-3,5)$.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПОВОГО ВАРИАНТА ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ»

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны координаты четырех вершин: $A(0,3,2), B(-1,4,2), D(0,1,2), A_1(1,2,0)$.

1. Написать уравнения плоскостей:

а) P, проходящей через точки A, B, D;

б) P_1, проходящей через точку A и прямую A_1B_1 ;

в) P_2, проходящей через точку A_1 параллельно плоскости P ;

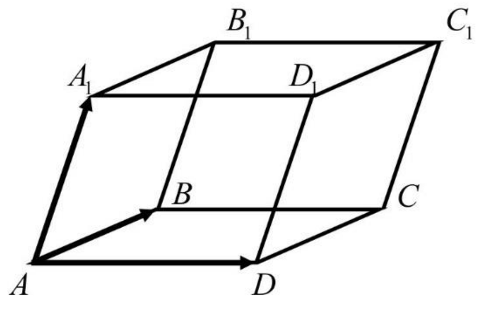

Рис.14

г) P_3, содержащей прямые AD и AA_1 ;

д) P_4, проходящей через точки A и C_1, перпендикулярно плоскости P.

2. Найти расстояние между прямыми, на которых лежат ребра AB и CC_1; написать канонические и параметрические уравнения общего к ним перпендикуляра.

3. Найти точку A_2, симметричную точке A_1 относительно плоскости основания ABCD (плоскости P).

4. Найти угол между прямой, на которой лежит диагональ A_1C и плоскостью основания ABCD (плоскостью P).

5. Найти острый угол между плоскостями P и P_1.

Решение:

1а). Напишем уравнение плоскости P, проходящей через точки A, B, D (см. задачу 4).

Пусть точка $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости. Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки, приравняв нулю смешанное произведение векторов $\overline{AM}=\{x,y-3,z-2\}$, $\overline{AB}=\{-1,1,0\}$ и $\overline{AD}=\{0,-2,0\}$.

Имеем: $\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{AD}\right)=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x & y-3 & z-2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=0$. Уравнение плоскости $P: z-2=0$

1б). Напишем уравнение плоскости P_1, проходящей через точку A и прямую A_1B_1 (см. задачу 22).

Поскольку ребра AB и A_1B_1 параллелепипеда параллельны, то $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$. Нормальный вектор плоскости $\overline{n}_1$ будет коллинеарен векторному произведению $\overline{AA_1}\times\overline{AB}$. Имеем $\overline{AA_1}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\overline{i}+2\overline{j}\Rightarrow\overline{n}_1=\{1,1,0\}$.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0,3,2)$, перпендикулярно вектору $\overline{n}_1=\{1,1,0\}$:

$1(x-0)+1(y-3)=0$. Уравнение плоскости $P_1:\ x+y-3=0$

1в). Напишем уравнение плоскости P_2, проходящей через точку A_1 параллельно плоскости P (см. задачу 6).

Так как $P_2 \parallel P$, то $\overline{n}_2=\overline{n}=\{0,0,1\}$. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $A_1(1,2,0)$, перпендикулярно вектору $\overline{n}_2=\{0,0,1\}$. Получим уравнение плоскости $P_2: z=0$

1г). Напишем уравнение плоскости P_3, содержащей прямые AD и AA_1 (см. задачу 2). Найдем нормальный вектор плоскости:

$\bar{n}_3 \parallel \overline{AD} \times \overline{AA_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 2\bar{k} \Rightarrow \bar{n}_3 = \{2,0,1\}$. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0,3,2)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}_3 = \{2,0,1\}$:

$2x + 1(z-2) = 0$. Уравнение плоскости $P_3: 2x + z - 2 = 0$.

1д). Напишем уравнение плоскости P_4, проходящей через точки A и C_1, перпендикулярно плоскости P.

Найдем вектор $\overline{AC_1} \in P_4$:

$\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1} = (-1,1,0) + (0,-2,0) + (1,-1,-2) = (0,-2,-2)$. Поскольку плоскости P и P_4 перпендикулярны, то вектор $\bar{n}_4$ ортогонален вектору $\bar{n}$. Таким образом, имеем два вектора $\overline{AC_1}$ и $\bar{n}$, ортогональные $\bar{n}_4$. Поэтому $\bar{n}_4 \parallel \overline{AC_1} \times \bar{n}$. Имеем:

$\overline{AC_1} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} \Rightarrow \bar{n}_4 = (1,0,0)$. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0,3,2)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}_4 = \{1,0,0\}$:

$P_4: x = 0$.

2. Поскольку прямые, на которых лежат ребра AB и CC_1, скрещиваются можно воспользоваться решением аналогичной задачи 21. Получим:

$$\rho(AB, CC_1) = \frac{\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{CC_1}\right)\right|}{\left|\overline{AB} \times \overline{CC_1}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix} \right\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Уравнение общего перпендикуляра также ищем по алгоритму, описанному в задаче 21. Найдем направляющий вектор $\bar{s}$ общего перпендикуляра:

$$\bar{s} \parallel \overline{AB} \times \overline{CC_1} = \overline{AB} \times \overline{AA_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - 2\bar{j} \Rightarrow \bar{s} = \{1,1,0\}.$$

Теперь запишем уравнения плоскости P_1, содержащей прямую AB и вектор $\bar{s}$: $P_1 : \overline{AB} \subset P_1; \bar{n} \subset P \Rightarrow \left(\overline{AM}, \overline{AB}, \bar{n}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(z-2) = 0$. Получим уравнение плоскости $P_1 : z - 2 = 0$.

Чтобы записать уравнение плоскости P_2, содержащей прямую CC_1 и вектор $\bar{s}$, найдем координаты точки C:

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \{-1,1,0\} + \{0,-2,0\} = \{-1,-1,0\}$.

$\overline{AC} = \overline{R_C} - \overline{R_A} \Rightarrow \overline{R_C} = \overline{AC} + \overline{R_A} = \{-1,-1,0\} + \{0,3,2\} = \{-1,2,2\} \Rightarrow C(-1,2,2)$.

$$P_2 : \overline{CC_1} \subset P_2; \bar{n} \subset P \Rightarrow \left(\overline{CM}, \overline{CC_1}, \bar{n}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(\mathrm{x}+1) - 2(\mathrm{y}-2) + 2(\mathrm{z}-2) = 0$$

Получим уравнение плоскости $P_2 : \mathrm{x} - \mathrm{y} + z + 1 = 0$.

Тогда уравнение общего перпендикуляра имеет вид:

$$L = P_1 \cap P_2 \Rightarrow L : \begin{cases} z - 2 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Перейдем к каноническим уравнениям прямой L. Направляющий вектор $\bar{s} = \{1,1,0\}$. $M_0(x,0,z) \in L \Rightarrow \begin{cases} z - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(-3,0,2)$.

Тогда $L : \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 3, \\ y = t, \\ z = 2. \end{cases}$

3. Найдем точку A_2, симметричную точке A_1 относительно плоскости основания ABCD (плоскости P) (см. задачу 24).

Проведем прямую, перпендикулярную плоскости P, проходящую через точку A_1:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}.$$

Найдем точку O – точку пересечения этой прямой и плоскости P:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = t, \\ z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow O(1,2,2).$$

Поскольку $\overline{A_1A_2} = 2\overline{A_1O} = \{0,0,4\} \Rightarrow A_2(1,2,4)$.

4. Найдем угол между прямой, на которой лежит диагональ A_1C и плоскостью основания ABCD (плоскостью P) (см. задачу 18).

$\overline{A_1C} = \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AA_1} = \{-2,0,2\}$.

$$\sin\varphi = |\cos\phi| = \frac{\left|\left(\overline{A_1C}, \overline{n}\right)\right|}{\left|\overline{A_1C}\right| \cdot |\overline{n}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

5. Найдем острый угол между плоскостями P и P_1 (см. задачу 7).

Из решения задачи 1 имеем: $\overline{n} = (0,0,1), \overline{n}_1 = (1,1,0) \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\left|(\overline{n}, \overline{n}_1)\right|}{|\overline{n}| \cdot |\overline{n}_1|} = \dfrac{0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии были рассмотрены геометрические объекты, определяемые линейными уравнениями, а именно плоскости и прямые линии в пространстве. Основными методами при решения типовых задач по этой теме являются методы векторной алгебры, которые представляет собой наиболее подходящий инструмент при исследовании взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Дальнейшее изучение геометрических объектов приводит нас к понятию кривых и поверхностей второго порядка, которые определяются в декартовых координатах алгебраическими уравнениями второй степени. Мы рассмотрим их подробнее в следующей части методических указаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2014. – 408с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.:Физматлит, 2008. – 312с.
3. Беклемишева Л.А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие – М., издательская группа URSS, 2016. – 384с.

Дополнительная литература

4. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Справочное пособие к решению задач – Минск: НТООО «ТетраСистемс», 2001. – 288с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учебное пособие для втузов / Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.:Наука, 1993. – 478с.
6. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии: Учебное пособие для ВУЗов,- М.:Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 356с.