Занятие 20.

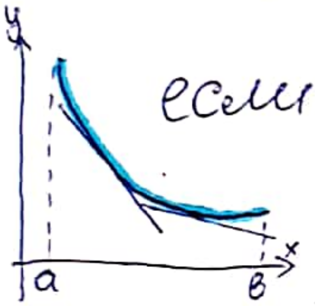
Интервалы выпуклости, точки перегиба.

График дифференцируемой ф-ции $f(x)$ наз.

выпуклым вниз | выпуклым вверх

на интервале (a,b),

если дуга кривой на этом промежутке расположена



выше | ниже

любой касательной, проведённой к графику $f(x)$ в любой точке $x \in (a,b)$.

Достаточное условие выпуклости $f(x)$ на (a,b)

Пусть $f(x)$ дважды дифф. на (a,b)

Если

$f''(x)>0$ | $f''(x)<0$

$\forall x \in (a,b)$,

то график $f(x)$ на (a,b) явл.

выпуклым вниз | выпуклым вверх.

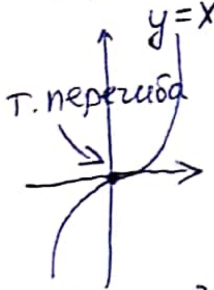
Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой направление выпуклости графика функции меняется на противоположное, наз. точкой перегиба графика функции; при этом т. x_0 наз. точкой перегиба функции.

Необходимое условие т. перегиба

Если x_0 – т. перегиба ф-ции $f(x)$, то $f''(x_0)=0$ или равна ∞ или $\nexists$.

Зам. Обратно неверно.

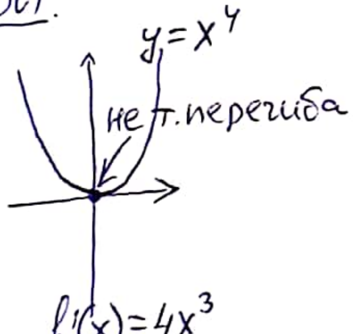
Примеры.



$f'(x)=3x^2$

$f''(x)=6x$

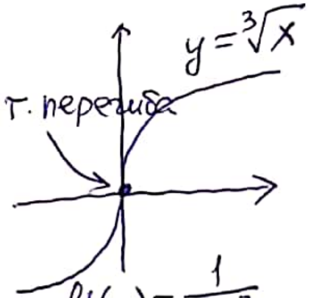
$f''(0)=0$



$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2$

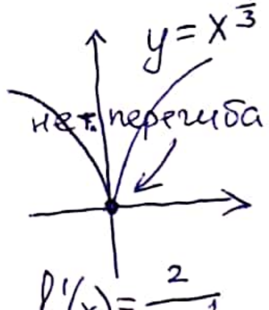
$f''(0)=0$



$f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$f''(x)=-\frac{2}{9x^{5/3}}$

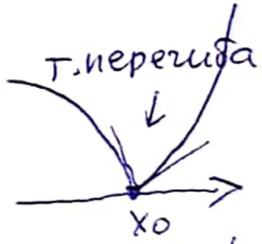
$f''(0)=\infty$

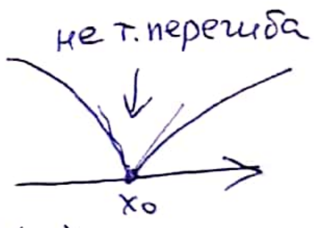


$f'(x)=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

$f''(x)=\frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}$

$f''(0)=\infty$





$\nexists f'(x_0)$

$\Downarrow$

$\nexists f''(x_0)$

Достаточные условия т. перегиба

Пусть $f(x)$ непрерывна в $U(x_0)$ и дважды дифф. в $\overset{\circ}{U}(x_0)$

Если в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через т. x_0,

то x_0 – т. перегиба функции.

№ 5.444.

Найти интервалы выпуклости графика ф-ции $f(x)$, точки перегиба и угловые коэф-ты касательных в точках перегиба: $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Решение.

1. $D(y) = \mathbb{R}$

2. $y'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$

Крит. точки $y'(x)$:

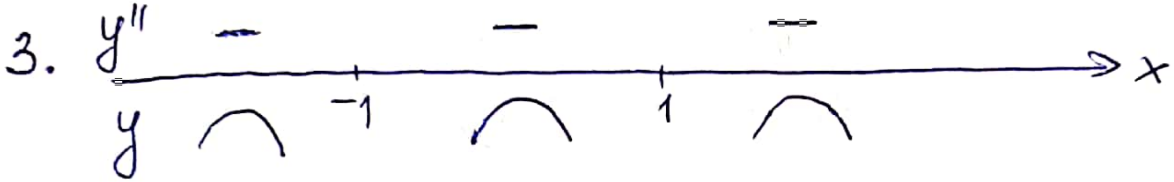
1) $y''(x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\right) = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}^{4}}\right)$

2) $D(y'')$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty) \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$ крит. т. $y'(x)$

3) $y'' = 0$

$$\frac{\sqrt[3]{x-1}^{4}+\sqrt[3]{x+1}^{4}}{\sqrt[3]{x+1}^{4}\sqrt[3]{x-1}^{4}}=0$$ нет решений (⇒ Нет ~~крит~~ стац. точек $y'(x)$.)

3.



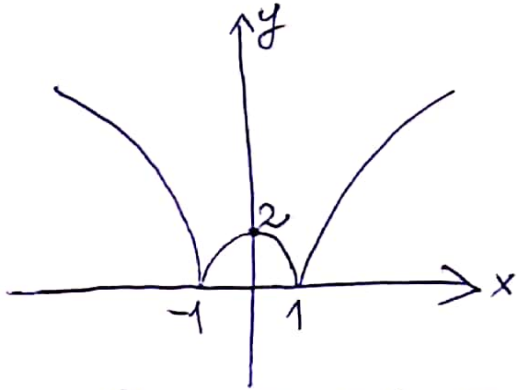
4. Интервалы выпуклости:

$y(x)$ выпукла вверх на $(-\infty;-1)$; $(-1;1)$; $(1;+\infty)$

5. Точки перегиба – нет

Подробно:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	−	∞	−	∞	−
y	∩	$\sqrt[3]{4}$	∩	$\sqrt[3]{4}$	∩



Ф-я чётная, т.к.

$$y(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}=$$
$$=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=y(x)$$

№ 5.446.

$y = x\ln|x|$ Задание то же.

Решение.

1. $D(y)$: $x \neq 0$, т.е. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. $y' = x'\ln|x| + x\cdot(\ln|x|)' = \ln|x| + x\cdot\frac{1}{x} = \ln|x| + 1$

Критич. точки $y'(x)$:

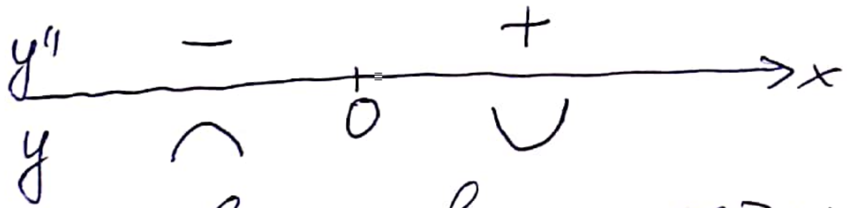
1) $y'' = \frac{1}{x}$

2) $D(y'') = D(y)$

3) $y'' = 0$ нет решений

Нет крит. точек $y'(x)$

3.



4. Интервалы выпуклости:

y выпукла вверх на $(-\infty; 0)$

вниз на $(0; +\infty)$

5. Т. перегиба нет (т.к. $0 \notin D(y)$).

Подробно:

$$\lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0} x\ln|x| \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0} x = 0 \Big\} \Rightarrow$$

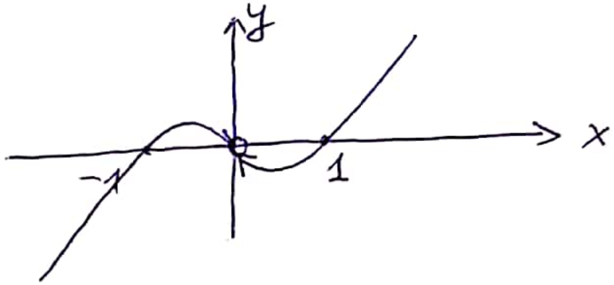
$0 \notin D(y)$

$\Rightarrow x=0$ – т. разрыва I рода (устранимая).

Ф-я нечётная,

т.к. $y(-x) = -x\ln|-x| =$

$= -x\ln|x| = -y(x)$



x	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$
y''	−	+
y	⌒	⌣

Д/З I. № 5.442, 5.445

№5.466.

Построить график функции $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$

Решение. $y = \dfrac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \dfrac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)}$

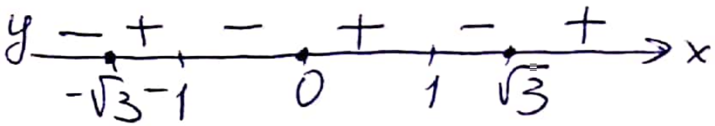
1. $D(y)$: $x \neq \pm 1$, т.е. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

2. $y(x)$ непрерывна на $D(y)$; $x = \pm 1$ – т. разрыва II рода.

3. Чётность нечётность периодичность:
$y(-x) = \dfrac{(-x)^3) - 3(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = -y(x) \Rightarrow$ нечётная, непериодич.

4. Точки пересеч. с осями к-т:
   1) с Ox: $y = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$
   2) с Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 0$.

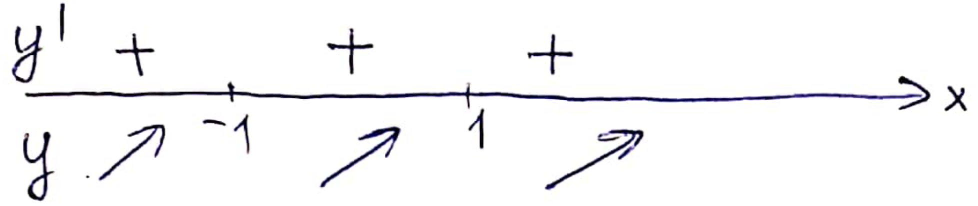
5. Промежутки знакопостоянства функции:



6. Крит. точки $y(x)$:
   1) $y' = \left(\dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}\right)^2 = \dfrac{(3x^2-3)(x^2-1) - (x^3-3x)2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3(x^2-1)^2 - 2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} =$
   $= \dfrac{3(x^4 - \cancel{2x^2} + 1) - 2x^4 + \cancel{6x^2}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 + 3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4+3}{(x-1)^2(x+1)^2}$
   2) $D(y') = D(y)$ 3) $y' = 0$ $\begin{cases} x^4 + 3 = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$ нет реш.

$\Rightarrow$ нет крит. точек ф-ции

7.



8. Интервалы монотонности:

$y(x)$ ↗ на $(-\infty;-1);(-1;1);(1;+\infty)$

9. Точки экстремума и экстремумы — нет.

Крит. точки $y'(x)$:

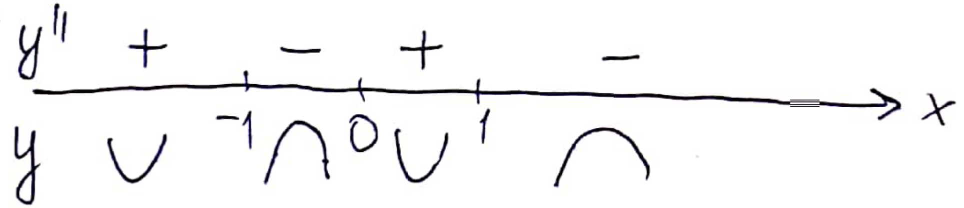
10. 1) $$y''=\frac{4x^3(x^2-1)^2-(x^4+3)2\cdot(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{\cancel{(x^2-1)}(4x^3(x^2-1)-4x(x^4+3))}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

2) $D(y'')=D(y')$

3) $y''=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ - крит. точка $y'(x)$.

11.



12. Интервалы выпуклости:

$y(x)$ выпукла вниз на $(-\infty;-1);(0;1)$
вверх на $(-1;0);(1;+\infty)$

13.

Т. перегиба ф-ции	Т. перегиба графика ф-ции
$x_{перегиба}=0$	$y_{перегиба}(0)=0 \Rightarrow \boxed{(0;0)}$.

14. Асимптоты:

1) Вертикальные: $x=\pm1$, т.к. $\lim\limits_{x\to\pm1} y(x)=\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{x^3-3x}{x^2-1}=\infty$

2) Наклонные: $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x}{x(x^2-1)}=1$$

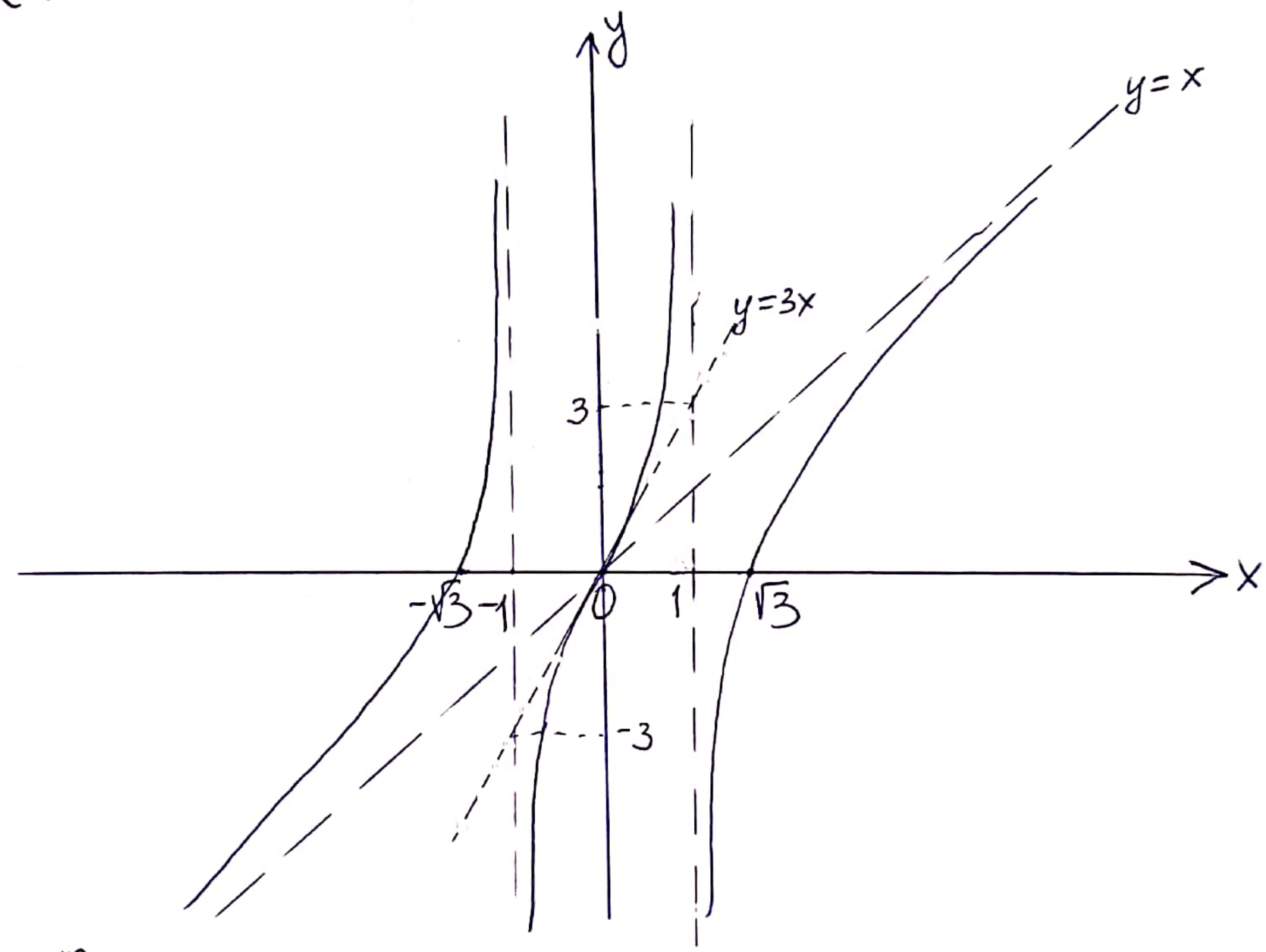
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x}{x^2-1}\overset{x^2-1}{-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-3x\cancel{-x^3}+x}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2-1}=0 \quad\Rightarrow\quad y=x \text{ наклонная асимптота.}$$

15. Касат. в точке перегиба: $y=y'(0)(x-0)+0$

$y=3x$

16. График:



17. $E(y)=\mathbb{R}$.

ДЗ II. № 5.472.

Подробно:

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
y'	+	+	+
y	↗	↗	↗

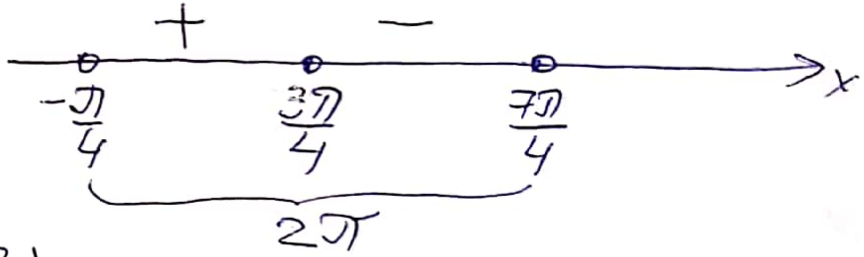
x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	+	−	0	+	−
y	∪	∩	0	∪	∩

№5.496.

$y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$ Задание то же.

Решение. $y=\frac{1}{\sin x+\cos x}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}$

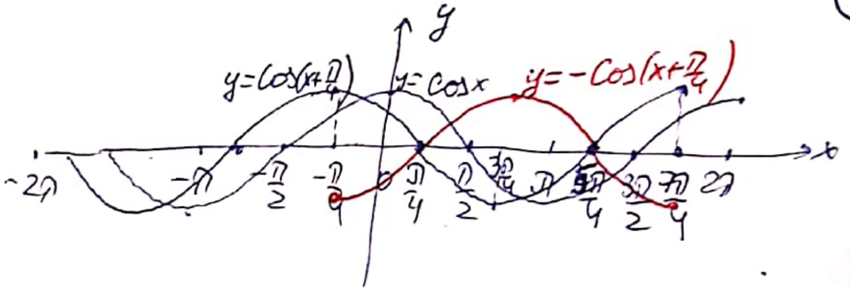
1. $D(y)$: $\sin(x+\frac{\pi}{4})\neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{4} \neq \pi n$, $x\neq -\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$
2. Ф-я непр. на $D(y)$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$ — точки разрыва II рода.
3. Периодич. $T=2\pi$; общего вида
4. Т. пересеч. с осями к-т:
   1) с Ox; $y=0$ нет реш.
   2) с Oy: $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0;1)$
5. Промежутки знакопостоянства ф-ции



6. Крит. точки $y(x)$:
   1) $y'=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})}\cdot\cos(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})}$
   2) $D(y')=D(y)$
   3) $y'=0$ $\cos(x+\frac{\pi}{4})=0$, $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\ \text{крит.т.}\ y(x).}$

7.

y'		$-$		$+$		$+$		$-$	
y	$-\frac{\pi}{4}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{3\pi}{4}$	↗	$\frac{5\pi}{4}$	↘	$\frac{7\pi}{4}$



8. Интервалы монотонности:

$y(x)\nearrow \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right);\ \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$

$y(x)\searrow \left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right);\ \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right.$

9.

Точки экстремума	экстремумы
$x_{min}=\frac{\pi}{4}+2\pi n$	$y_{min}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$X_{max}=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$	$y_{max}\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

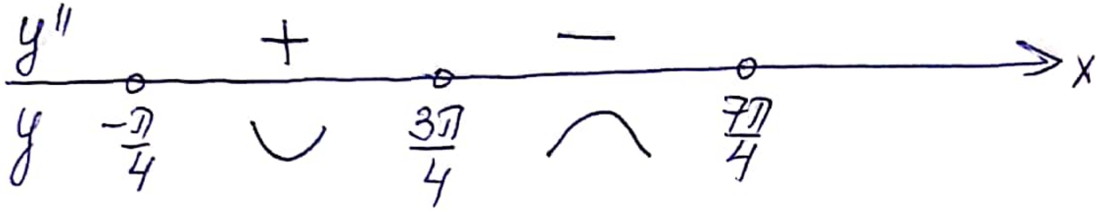
Крит. точки $y'(x)$:

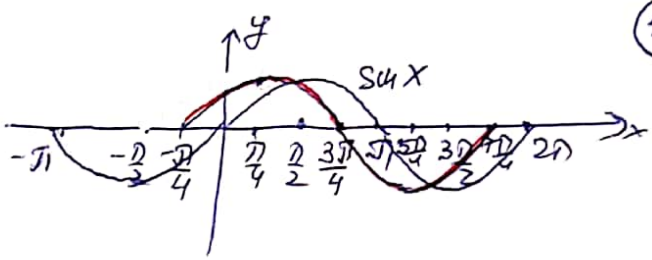
10. 1) $$y''=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{-\sin(x+\frac{\pi}{4})\cdot\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\cos(x+\frac{\pi}{4})\cdot 2\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin^4(x+\frac{\pi}{4})}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})+2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})}{\sin^3(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1+\cos^2(x+\frac{\pi}{4})}{\sin^3(x+\frac{\pi}{4})}$$

2) $D(y'')=D(y')=D(y)$ 3) $y''=0$ нет реш. Нет крит. точек $y'(x)$.

11.



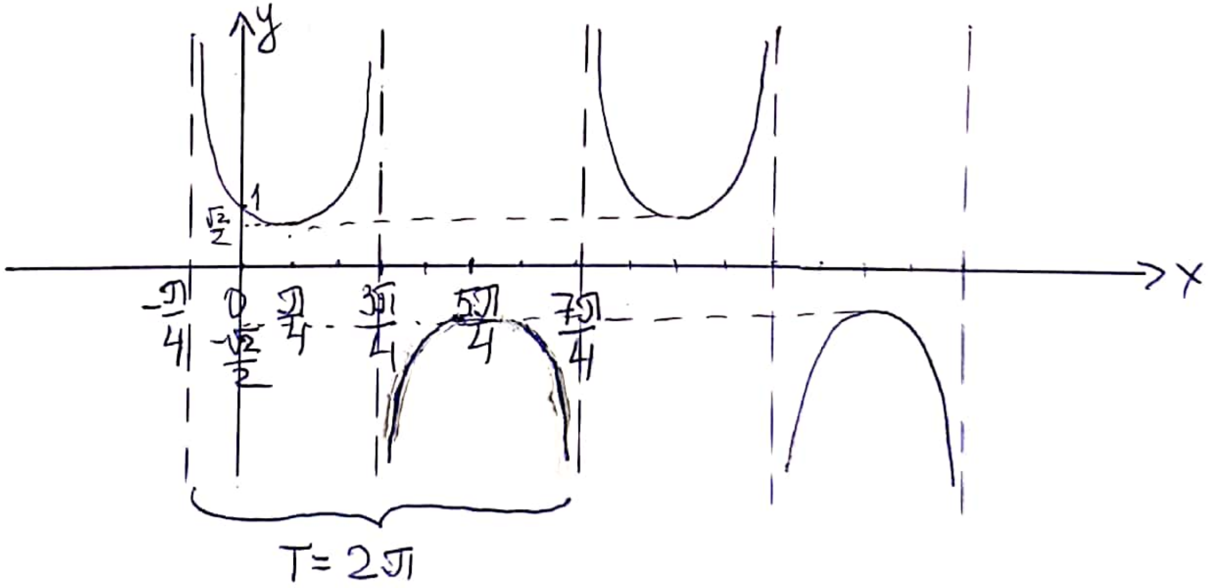


12. Интервалы выпуклости:
y(x) выпукла вниз на $(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n)$
y(x) выпукла вверх на $(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$.

13. Т. перегиба нет

14. Асимптоты:
вертикальные: $x = -\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

15. График:



16. E(y) =
$= (-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$

Подробно: $\boxed{T=2\pi}$

x	$\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right)$	$\frac{5\pi}{4}$	$\left(\frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘

x	$\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right)$
y''	$+$	$-$
y	∪	∩

ДЗ III № 5.497.

№ 5.516.

$$y = \frac{x^2}{\ln|x|}$$

Решение.

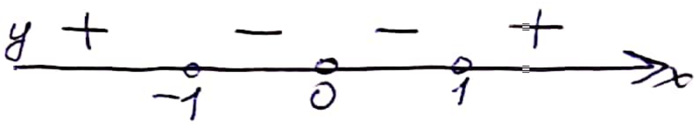
1. $D(y): \begin{cases} |x| \neq 1 \\ |x| \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$

2. Ф-я непр. на $D(y)$; $x = \pm 1$ – т. разрыва II рода $\left(\lim\limits_{x \to \pm 1} \overset{\text{т.к.}}{y(x)} = \infty\right)$
$x = 0$ – т. разрыва I рода (устранимая)
(т.к. $\exists \lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$, но $0 \notin D(y)$)

3. Чётная, т.к. $y(-x) = \frac{(-x)^2}{\ln|x|} = \frac{x^2}{\ln|x|} = y(x)$; непериодическая.

4. Т. ∩ с осями к-т:
1) с Ox: $y = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$; 2) с Oy: $x = 0 \notin D(y)$

5. Промежутки знакопостоянства ф-ции



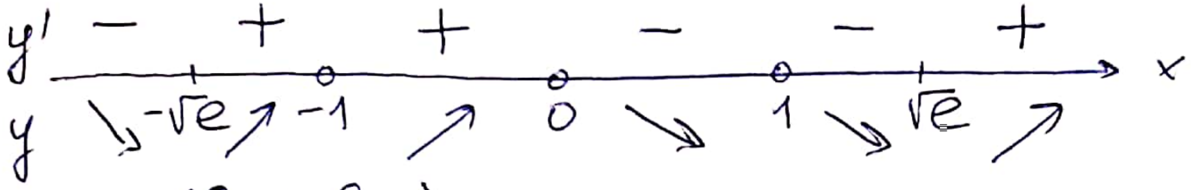
6. Критич. точки $y(x)$:

1) $y' = \frac{2x \ln|x| - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln|x|)^2} = \frac{2x \ln|x| - x}{(\ln|x|)^2} = \frac{x(\ln x^2 - [illegible])}{(\ln|x|)^2} = \frac{x(\ln x^2 - \ln e)}{(\ln|x|)^2}$

2) $D(y') = D(y)$

3) $y' = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin D(y) \\ x^2 = e \end{array}\right. \qquad \boxed{x = \pm\sqrt{e}}$

7.



$y' = \dfrac{x(\ln x^2 - \ln e)}{\ln^2|x|}$. числитель по знакам ведёт себя как $x(x^2-e) = x(x-\sqrt{e})(x+\sqrt{e})$. знам. > 0.

8. Интервалы монотонности:

$y(x) \nearrow$ на $(-\sqrt{e}; -1)$; $(-1; 0)$; $(\sqrt{e}; +\infty)$

$y(x) \searrow$ на $(-\infty; -\sqrt{e})$; $(0; 1)$; $(1; \sqrt{e})$

9.

Точки экстремума	Экстремумы
$x_{min} = \pm\sqrt{e}$	$y_{min}(\pm\sqrt{e}) = \dfrac{(\pm\sqrt{e})^2}{\ln\lvert\pm\sqrt{e}\rvert} = \dfrac{e}{\frac{1}{2}\ln e} = 2e$

Крит. точки $y'(x)$:

10. 1) $$y'' = \frac{[x(\ln x^2-1)]'\ln^2|x| - x(\ln x^2-1)(\ln^2|x|)'}{\ln^4|x|} =$$

$$= \frac{[(\ln x^2-1)+\cancel{x}(\cancel{\frac{2x}{x^2}})]\ln^{\cancel{2}}|x| - \cancel{x}(\ln x^2-1)2\cancel{\ln}|x|\cdot\cancel{\frac{1}{x}}}{\ln^{\cancel{4}\,3}|x|} =$$

$$= \frac{[\ln x^2+1]\ln|x| - 2(\ln x^2-1)}{\ln^3|x|} = \frac{(2\ln|x|+1)\ln|x|-2(2\ln|x|-1)}{\ln^3|x|} =$$

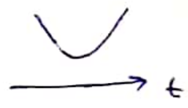
$$= \frac{2\ln^2|x|+\ln|x|-4\ln|x|+2}{\ln^3|x|} = \frac{2\ln^2|x|-3\ln|x|+2}{\ln^3|x|}$$

2) $D(y'') = D(y')$

3) $y''=0$ $\begin{cases} 2\ln^2|x|-3\ln|x|+2=0 & (1) \\ \ln^3|x| \neq 0 \end{cases}$

Нет решений

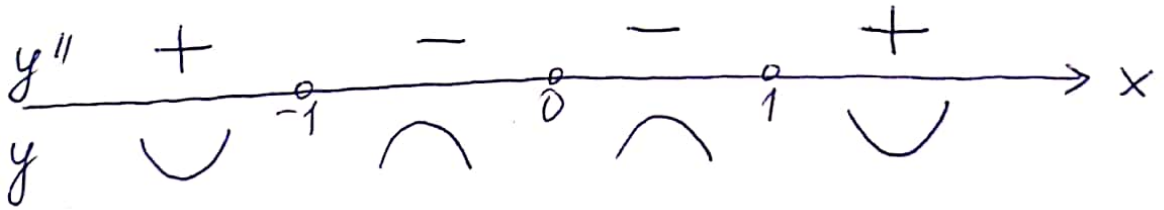
Рас. (1): $t=\ln|x| \Rightarrow$



$\Rightarrow 2t^2-3t+2>0$

т.к. $D = 9-4\cdot2\cdot2<0$ и ветви вверх

11.



Знаки y'' такие же как у $\ln|x|$

12. Интервалы выпуклости:

$y(x)$ выпукла вниз на $(-\infty; -1); (1; +\infty)$

выпукла вверх на $(-1; 0); (0; 1)$

13. Точки перегиба – нет

14. Асимптоты:

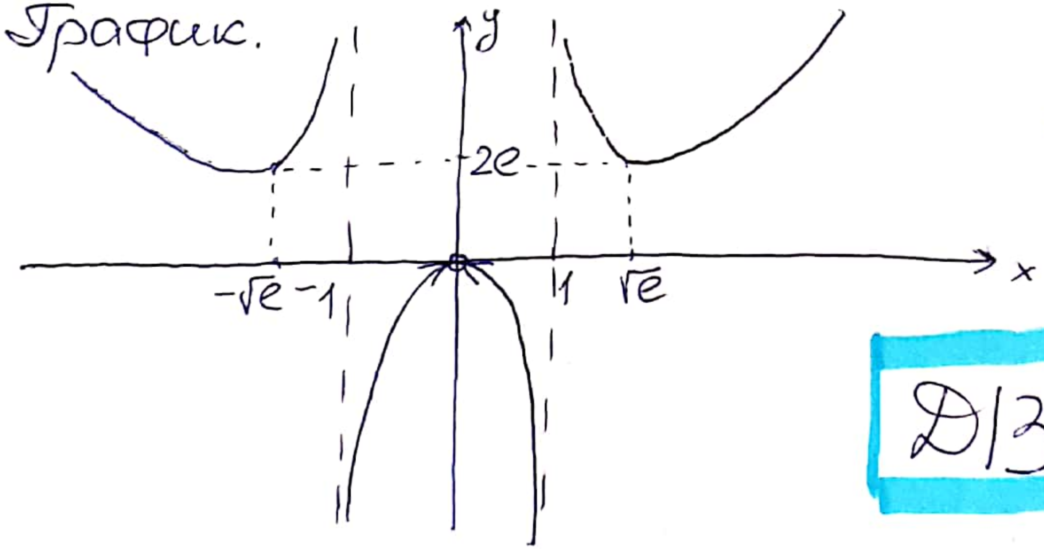
1) вертикальные : $x = \pm 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to\pm1} y(x) = \infty$

2) наклонные: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\ln|x|} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln|x|} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$$

⇒ нет накл. асимптот.

15. График.



$$\lim_{x\to0} y(x) = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\ln|x|} = 0$$

16. $E(y) = (-\infty; 0) \cup [2e; +\infty)$

Д/З IV №5.517