

**Вопросы и задачи для подготовки к рубежному контролю  
математический анализ, 2013, модуль 1  
все специальности ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9)**

*Теоретические вопросы*

(в квадратных скобках указаны номера лекций по календарному плану,  
см. Иванков П.Л. Конспект лекций по математическому анализу //   
электронный ресурс <http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/ma/MAall.pdf> )

*Определения*

- 1) Сформулируйте определение окрестности точки  $x \in \mathbb{R}$ . [Л. 2.]
- 2) Сформулируйте определение  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x \in \mathbb{R}$ . [Л. 2.]
- 3) Сформулируйте определение окрестности  $+\infty$ . [Л. 2.]
- 4) Сформулируйте определение окрестности  $-\infty$ . [Л. 2.]
- 5) Сформулируйте определение окрестности  $\infty$ . [Л. 2.]
- 6) Сформулируйте определение предела последовательности. [Л. 4.]
- 7) Сформулируйте определение сходящейся последовательности. [Л. 4.]
- 8) Сформулируйте определение ограниченной последовательности. [Л. 4.]
- 9) Сформулируйте определение монотонной последовательности. [Л. 3, 4.]
- 10) Сформулируйте определение возрастающей последовательности. [Л. 3, 4.]
- 11) Сформулируйте определение убывающей последовательности. [Л. 3, 4.]
- 12) Сформулируйте определение невозрастающей последовательности. [Л. 3, 4.]
- 13) Сформулируйте определение неубывающей последовательности. [Л. 3, 4.]
- 14) Сформулируйте определение фундаментальной последовательности. [Л. 4.]
- 15) Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности. [Л. 4.]
- 16) Сформулируйте определение по Гейне предела функции. [Л. 5.]
- 17) Сформулируйте определение бесконечно малой функции. [Л. 7.]
- 18) Сформулируйте определение бесконечно большой функции. [Л. 7.]
- 19) Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка. [Л. 8.]
- 20) Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций. [Л. 8.]
- 21) Сформулируйте определение эквивалентных бесконечно малых функций. [Л. 8.]
- 22) Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой. [Л. 8.]
- 23) Сформулируйте определение приращения функции. [Л. 9.]
- 24) Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое). [Л. 9.]
- 25) Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале. [Л. 9.]
- 26) Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке. [Л. 9.]
- 27) Сформулируйте определение точки разрыва. [Л. 9.]
- 28) Сформулируйте определение точки устранимого разрыва. [Л. 9.]
- 29) Сформулируйте определение точки разрыва I-го рода. [Л. 9.]
- 30) Сформулируйте определение точки разрыва II-го рода. [Л. 9.]

### Определение предела по Коши

(приводятся не все вопросы, остальные — по аналогии)

- 1) Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$ , где  $b \in \mathbb{R}$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). [Л. 5.]
- 2) Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). [Л. 5.]
- 3) Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). [Л. 5.]
- 4) Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). [Л. 6.]

### Формулировки теорем

- 1) Сформулируйте теорему об ограниченности сходящейся числовой последовательности. [Л. 4.]
- 2) Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [Л. 7.]
- 3) Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций. [Л. 7.]
- 4) Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию. [Л. 7.]
- 5) Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций. [Л. 7.]
- 6) Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [Л. 8.]
- 7) Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых разных порядков. [Л. 8.]

# Задачи для подготовки

## 1. Вычислить:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + 3x^2 - 4},$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9},$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}),$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+3)} - \sqrt{x^2+1}),$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x \operatorname{tg} x} - 1}{2x^2 - 1},$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\sqrt{4-x} - 2},$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2},$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x) \sin x},$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{2x^3 - 1},$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-1} \right)^{3x+2},$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \right)^{1/\sin x^2},$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\operatorname{tg} x^2},$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\ln(1+x) - \ln x),$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\lg(10+x^4)}.$$

**2. а)** Показать, что каждая из функций  $f(x)$  и  $g(x)$  является бесконечно малой или бесконечно большой при заданном стремлении аргумента; **б)** для каждой функции  $f(x)$  и  $g(x)$  записать главную часть (эквивалентную ей функцию вида  $C(x-x_0)^\alpha$  при  $x \rightarrow x_0$  или  $Cx^\alpha$  при  $x \rightarrow \infty$ ), указать их порядки малости (роста); **в)** сравнить  $f(x)$  и  $g(x)$ , если это возможно.

$$2.1. f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x} + x \cos x, \quad g(x) = x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty;$$

$$2.2. f(x) = x \ln(1+x), \quad g(x) = e^{2x} - e^x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$2.3. f(x) = 1 + \cos x, \quad g(x) = \frac{(x-\pi)^2}{x-3,14}, \quad x \rightarrow \pi.$$

**3.** Исследовать на непрерывность функцию, указать точки разрыва, их характер и построить график функции в окрестностях точек разрыва:

$$3.1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & |x| < \pi, \\ e^{1/(x^2-\pi^2)}, & |x| \geq \pi; \end{cases}$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\pi-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

*Образец билета рубежного контроля (теория)*

**Вариант 0.**

Математический анализ, модуль 1, РК (теория), 2013

1. Сформулируйте определение сходящейся последовательности. (2 балла)
2. Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией). (2 балла)
3. Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций. (2 балла)

Сумма баллов за задания	0–3	4	5	6
Оценка	неуд	удовл	хор	отл
Баллов к рейтингу	0	4	5	6

*Образцы билета рубежного контроля (задачи)*

**Вариант 0.**

Математический анализ, модуль 1, РК (задачи), 2013

1. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x^2 + 5x - 6}$ . (2 балла)
2. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$ . (2 балла)
3. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[3]{1-x^2} - 1) \arccos x}{(2^x - 1) \operatorname{arctg} x}$ . (2 балла)
4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin^2 x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ . (2 балла)
5. а) Показать, что каждая из функций  $f(x) = e^x - 2^x$  и  $g(x) = x \operatorname{tg} x$  является бесконечно малой или бесконечно большой при  $x \rightarrow 0$ ; б) для каждой функции  $f(x)$  и  $g(x)$  записать главную часть (эквивалентную ей функцию вида  $C(x - x_0)^\alpha$  при  $x \rightarrow x_0$  или  $Cx^\alpha$  при  $x \rightarrow \infty$ ), указать их порядки малости (роста); в) сравнить  $f(x)$  и  $g(x)$ , если это возможно. (3 балла)
6. Исследовать на непрерывность функцию  $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{\ln(x + 1/2)}, & x \geq 0, \end{cases}$   
указать точки разрыва, их характер и построить график функции в окрестностях точек разрыва. (3 балла)

Сумма баллов за задания	0–6	7–11	12–13	14
Оценка	неуд	удовл	хор	отл
Баллов к рейтингу	0	8	10	12