Программа для подготовки к рубежному контролю № 2 по аналитической геометрии

ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ; 2017-2018 уч. год

Теоретические вопросы
(как они сформулированы в билетах рубежного контроля)

Часть А

1. Дать определение единичной, нулевой, верхней треугольной и нижней треугольной матрицы.
2. Дать определение равенства матриц.
3. Дать определение суммы матриц и произведения матрицы на число.
4. Дать определение операции транспонирования матриц.
5. Дать определение операции умножения матриц.
6. Сформулировать свойства ассоциативности умножения матриц и дистрибутивности умножения относительно сложения.
7. Привести пример, показывающий, что умножение матриц некоммутативно.
8. Дать определение обратной матрицы.
9. Записать формулы для нахождения обратной матрицы к произведению двух обратимых матриц и для транспонированной матрицы.
10. Сформулировать критерий существования обратной матрицы.
11. Дать определение присоединённой матрицы и записать формулу для вычисления обратной матрицы.
12. Перечислить элементарные преобразования матриц.
13. Записать формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.
14. Дать определение минора. Какие миноры называются окаймляющими для данного минора матрицы?
15. Дать определение базисного минора и ранга матрицы.
16. Сформулировать теорему о базисном миноре.
17. Сформулировать теорему об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях матрицы.
18. Перечислить различные формы записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Какая СЛАУ называется совместной?
19. Дать определение однородной и неоднородной СЛАУ.
20. Сформулировать критерий Кронекра-Капелли совместности СЛАУ.
21. Сформулировать теорему о свойствах решений однородной СЛАУ.
22. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ.
23. Сформулировать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ.

24. Сформулировать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.
25. Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Часть Б

1. Доказать свойства ассоциативности и дистрибутивности умножения матриц.
2. Доказать критерий существования обратной матрицы.
3. Вывести формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.
4. Доказать теорему о базисном миноре.
5. Доказать критерий Кронекера-Капелли совместности СЛАУ.
6. Доказать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ.
7. Доказать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.
8. Доказать теорему о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ и теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Примеры задач

Часть А

1. Вычислить $AB - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$.
2. Найти ранг и какой-нибудь базисный минор матрицы A:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение

$$\text{а) } X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Найти ФСР однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

6. Найти общее решение неоднородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Часть Б

1. Найти матрицу, обратную к матрице A размера 31×31, если

$$A = \begin{pmatrix} 66 & 65 & 65 & \cdots & 65 \\ 65 & 66 & 65 & \cdots & 65 \\ 65 & 65 & 66 & \cdots & 65 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 65 & 65 & 65 & \cdots & 66 \end{pmatrix}.$$

2. Показать, что система векторов $e_1 = (1, -1, 2, -2)^T$ и $e_2 = (2, 1, -2, -1)^T$ образует ФСР однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Выразить через эту ФСР частное решение $x^0 = (-1, -8, 16, -7)^T$.

3. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 - 9x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ 7x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$(-1 + c_1 + 2c_2,\ -3 + c_1 + 2c_2,\ c_1 + c_2,\ c_1 - 2c_2)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

Примерный вариант билета РК2

Часть А

необходимо сделать по крайней мере 5 пунктов, из них не менее 3 задач; оценка 24 балла

Теория

1. Дать определение обратной матрицы.
2. Записать формулы Крамера для решения СЛАУ.
3. Сформулировать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Задачи

4. Вычислить A^2, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -4 & -13 & -24 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Найти ФСР однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Найти общее решение СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить по крайней мере одну задачу; оценка 5–21 балл

Теория

8. Доказать теорему о существовании ФСР.

Задачи

9. Найти общее решение СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

10. Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & \lambda & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$