Ответы к РК "Матрицы и СЛАУ"для всех факультетов. Комплект VM6-T2 .
РК "Матрицы и СЛАУ"для всех факультетов
Комплект VM6-T2, Вариант 0.
1. Определения: (а) минора матрицы; (б) ранга матрицы. Теорема о базисном миноре и её следствия. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

2. $x = 1 - 5\sqrt{-y^2 - 10y - 24}$
Эллипс $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{1} = 1$ левая половина.
3. $f(x) = -2x^2+x-2, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -1 \\ 8 & -4 & -18 \\ 6 & 13 & -17 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \\ -4 & -7 & 9 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 17 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$ Ответ
$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 20 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 15 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -14 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$

Вариант 1.
1. Гипербола: определение, уравнение со смещенным центром (два случая: фокусы располагаются горизонтально или вертикально). Эксцентриситет, координаты фокусов (два случая), уравнения асимптот смещенной кривой. Свойство касательных к гиперболе и его оптическая интерпретация.

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & \lambda & -1 \\ 4 & 8 & -7 & -9 \end{pmatrix} rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 9 \\ 4, & \lambda \neq 9 \end{cases}$
4. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 5 \\ -25 & 21 & -13 \\ -14 & 9 & -5 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -2 & -5 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_3 - 4x_4 = -10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -14 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Вариант 2.
1. Однородная СЛАУ. Условие её совместности, критерий существования ненулевого решения:(а) произвольной однородной СЛАУ (в терминах ранга); (б) однородной СЛАУ с квадратной матрицей(в терминах определителя).

2. $x = 4 - \sqrt{y^2 - 8y + 25}$
Гипербола $\frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ левая ветвь.

3. $\begin{pmatrix} 4 & \lambda & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -8 & -3 \\ -2 & -7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 5 \\ 3, & \lambda \neq 5 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 19 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -29 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 26 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -30 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Вариант 3.

1. Однородная СЛАУ: Свойство частных решений однородной СЛАУ. Размерность пространства решений однородной СЛАУ. Определение фундаментальной системы решения однородной СЛАУ, структура общего решения однородной СЛАУ

2. $x = 2 + 2\sqrt{-y+2}$

Парабола $(x-2)^2 = -4(y-2)$ правая половина.

3. $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 9 & \lambda & 10 & -8 \\ -4 & -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 12 \\ 4, & \lambda \neq 12 \end{cases}$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & -3 \\ -2 & -5 & -6 \\ -7 & -20 & -13 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 11 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -23 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -10 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Вариант 4.

1. Метод Гаусса решения произвольной СЛАУ. Свойство частных решений неоднородной СЛАУ. Структура общего решения неоднородной СЛАУ.

2. $x = -6 - 5\sqrt{y^2 + 12y + 35}$

Гипербола $-\frac{(x+6)^2}{25} + \frac{(y+6)^2}{1} = 1$ левая половина.

3. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 4 \\ -8 & -1 & -9 & \lambda \\ -3 & -2 & -5 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 11 \\ 3, & \lambda \neq 11 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -20 & -30 \end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 28 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -26 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 3x_4 = -30 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

Вариант 5.

1. Определение: (а) обратной матрицы; (б) алгебраического дополнения элемента квадратной матрицы. Критерий существования обратной матрицы. Нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений. Свойство матрицы, обратной к произведению двух матриц.

2. $y = 3 - \frac{4}{5}\sqrt{x^2 - 8x + 41}$
Гипербола $-\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ нижняя ветвь.

3. $f(x) = x^2 - 3x - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -7 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} -17 & -6 & 8 \\ 14 & -8 & 7 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ -7 & -10 & 28 \\ -5 & -2 & 12 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} \lambda & -3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \; rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 8 \\ 4, & \lambda \neq 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 17 \\ -3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 26 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -15 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 19 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Вариант 6.

1. Определение произведения двух матриц, условие его существования и свойства. Свойство определителя произведения двух квадратных матриц. Определение операции транспонирования, её свойства.

2. $x = -2 + \frac{3}{4}\sqrt{y^2 - 2y + 17}$
Гипербола $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ правая ветвь.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ -8 & -5 & -7 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \; rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = -11 \\ 3, & \lambda \neq -11 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 13 & 13 \\ 5 & -24 & -26 \\ -13 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ -12 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -9 \\ 7x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Вариант 7.

1. Определение: обратной матрицы, критерий её существования. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Свойство матрицы, обратной к транспонированной матрице. Формулы для решения матричных уравнений $AX = C$, $XB = C$ и $AXB = C$ для невырожденных матриц A и B.

2. $x = 6 + \frac{3}{4}\sqrt{y^2 - 12y + 52}$
Гипербола $\frac{(x-6)^2}{9} - \frac{(y-6)^2}{16} = 1$ правая ветвь.

3. $f(x)=-2x^2+x+3,\quad A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\8&-2&-2\\3&1&-2\end{pmatrix}\quad f(A)=\begin{pmatrix}-6&2&1\\4&-3&-2\\-19&9&3\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}6&-1&-1\\2&2&0\\11&-4&-1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1&-1&-2&4\\1&-2&-1&2\\1&\lambda&-3&7\\2&-2&-3&5\end{pmatrix}\ rk(A)=\begin{cases}3,&\lambda=-1\\4,&\lambda\neq-1\end{cases}$

5. $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+3x_4=20\\-x_1+x_2+2x_3-9x_4=-17\\x_1-x_2-x_3+7x_4=18\\x_1-x_2+5x_3-5x_4=24\end{cases}\quad x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-5\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-10\\5\\2\end{pmatrix}$

Вариант 8.

1. Эллипс: определение, уравнение со смещенным центром. Эксцентриситет, координаты фокусов смещенной кривой (два случая: фокусы располагаются горизонтально или вертикально). Свойство касательных к эллипсу и его оптическая интерпретация.

2. $f(x)=x^3-4x^2-2x+3,\quad A=\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}\quad f(A)=\begin{pmatrix}12&-14\\2&2\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}-3&7\\-1&2\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}-6&-8&\lambda&-5\\-1&3&3&-2\\1&1&3&1\\2&1&4&2\end{pmatrix}\ rk(A)=\begin{cases}3,&\lambda=-20\\4,&\lambda\neq-20\end{cases}$

4. $X\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&1\\-2&-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-4&1\\2&-2&-8\\5&5&5\end{pmatrix}$ Ответ $X=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\-5&5&4\\-5&0&-5\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5&1&-2\\4&0&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$

5. $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-7x_4=-16\\2x_1+2x_2+x_3=10\\-x_1-x_2-3x_3-5x_4=-20\\-x_1-x_2-2x_3-3x_4=-14\end{cases}\quad x=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\-2\\4\end{pmatrix}$

Вариант 9.

1. Определение элементарных преобразований матрицы. Определение эквивалентных матриц. Определение ступенчатой матрицы. Алгоритм приведения квадратной невырожденной матрицы к единичной с помощью элементарных преобразований строк.

2. $x=3+\frac{5}{2}\sqrt{y^2-8y+20}$
Гипербола $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-4)^2}{4}=1$ правая ветвь.

3. $f(x)=x^2-x+2,\quad A=\begin{pmatrix}-3&2&-6\\0&-5&7\\1&-4&6\end{pmatrix}\quad f(A)=\begin{pmatrix}8&6&2\\7&4&0\\2&2&-2\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}3&8&-4\\7&-3&7\\3&-2&2\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}-2&-1\\1&3\end{pmatrix}*X*\begin{pmatrix}5&4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&-10\\-2&5\end{pmatrix}$ Ответ

$X=\begin{pmatrix}1&1\\1&-4\end{pmatrix}\quad A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1\\-1&-2\end{pmatrix}\quad B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-4\\-2&5\end{pmatrix}$

5. $\begin{cases}9x_1+9x_2+x_3+10x_4=0\\-8x_1-8x_2+x_3-7x_4=0\\-3x_1-3x_2+x_3-2x_4=0\\-x_1-x_2-x_4=0\end{cases}\quad x=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Вариант 10.

1. Определения: (а) минора произвольной матрицы; (б) ранга матрицы. Влияние элементарных преобразований: на ранг матрицы, на определитель квадратной матрицы. Ранг ступенчатой матрицы. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

2. $x = -4 - \frac{1}{3}\sqrt{y^2 + 2y - 8}$

Гипербола $-\frac{(x+4)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ левая половина.

3. $f(x) = -x^3 - x^2 - 3x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 17 & 8 & -3 \\ 7 & 6 & -3 \\ 28 & 16 & -8 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 8x_4 = -19 \\ -5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -11 \end{cases} \quad x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Вариант 11.

1. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): координатная и матричная формы записи. Определение совместной СЛАУ. Матричный способ решения СЛАУ с квадратной матрицей. Формулы Крамера и условия их применимости.

2. $x = 1 + \sqrt{y^2 + 4y - 21}$

Гипербола $-\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ правая половина.

3. $\begin{pmatrix} -5 & \lambda & 7 & -2 \\ 2 & -9 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 13 \\ 3, & \lambda \neq 13 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = -5 \\ -5x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3 \\ 5x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -12 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -4 \end{cases} \quad x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$

Вариант 12.

1. Определение суммы двух матриц и произведения матрицы и числа. Определение произведения двух матриц, условие его существования. Свойства этих операций. Определение степени матрицы с натуральным показателем, её свойства.

2. $y = 1 - \sqrt{-7x + 7}$

Парабола $(y-1)^2 = -7(x-1)$ нижняя половина.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ -4 & -5 & -8 & \lambda \\ 1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = -11 \\ 4, & \lambda \neq -11 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix}3 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18 & -7\\ -10 & -5\end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix}-2 & 5\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ $B^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 4\\ 5x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 25\\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 19\\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -21 \end{cases}$ $x = c_1\begin{pmatrix}-3\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\ -3\\ 7\\ 2\end{pmatrix}$

Вариант 13.

1. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): координатная матричная и векторная формы записи. Сформулировать критерии: (а) совместности СЛАУ; (б) единственности решения совместной СЛАУ.

2. $x = -6 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 14y + 65}$

Гипербола $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{(y+7)^2}{16} = 1$ левая ветвь.

3. $\begin{pmatrix}-2 & \lambda & 6 & 3\\ -1 & 2 & 3 & 1\\ -1 & -4 & 4 & 7\\ 1 & 3 & -4 & -6\end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 3\\ 4, & \lambda \neq 3\end{cases}$

4. $\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix}-3 & -1\\ 7 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-28 & -10\\ -17 & -5\end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -5\end{pmatrix}$ $B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -7 & -3\end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -10\\ -6x_1 - 6x_2 + x_3 + 6x_4 = 28\\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -5\\ -4x_1 - 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 16 \end{cases}$ $x = c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ -4\\ -8\\ 1\end{pmatrix}$

Вариант 14.

1. Парабола: определение, уравнение со смещенной вершиной (два случая: вертикальная или горизонтальная ось симметрии). Эксцентриситет параболы. Координаты фокуса, уравнение директрисы смещенной кривой (два случая). Свойство касательных к параболе и его оптическая интерпретация.

2. $f(x) = x^2 - x - 1,\quad A = \begin{pmatrix}4 & 9 & 4\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$ $f(A) = \begin{pmatrix}1 & 16 & 4\\ 0 & -7 & -8\\ -6 & -6 & 13\end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix}6 & 25 & 8\\ -2 & -9 & -8\\ -4 & -2 & 12\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ -2 & \lambda & -3 & -1\\ 3 & -8 & 4 & 2\end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 5\\ 3, & \lambda \neq 5\end{cases}$

4. $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 7 & -3\end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 10\\ 4 & -16\end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -7 & -3\end{pmatrix}$ $B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -9\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 = -12 \end{cases}$ $x = c_1\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}5\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

Вариант 15.

1. Определение элементарных преобразований матрицы. Определение эквивалентных матриц. Определение ступенчатой матрицы. Алгоритм приведения произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

2. $x = -2 - \sqrt{y+6}$
Парабола $(x+2)^2 = y+6$ левая половина.

3. $f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 3 \\ 5 & -9 & -3 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -4 \\ 3 & -10 & -3 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 17 & -18 & -13 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$ Ответ
$X = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1 + 5x_3 - 3x_4 = 10 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = -28 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -9 \end{cases} \quad x = c_1\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Вариант 16.

1. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): координатная и матричная формы записи. Определение совместной СЛАУ. Матричный способ решения СЛАУ с квадратной матрицей. Формулы Крамера и условия их применимости.

2. $y = -2 + \frac{5}{3}\sqrt{x^2 + 12x + 45}$
Гипербола $-\frac{(x+6)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ верхняя ветвь.

3. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & -2 \\ -7 & -6 & 7 & -4 \\ \lambda & 8 & -9 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 13 \\ 4, & \lambda \neq 13 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & -7 \\ -7 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 12 & -27 & 22 \\ 7 & -11 & 11 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -9 \\ -9 & -20 & 43 \\ -4 & -10 & 23 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 15 \\ -4x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -28 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -21 \\ 5x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 6x_4 = 25 \end{cases} \quad x = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Вариант 17.

1. Эллипс: определение, уравнение со смещенным центром. Эксцентриситет, координаты фокусов смещенной кривой (два случая: фокусы располагаются горизонтально или вертикально). Свойство касательных к эллипсу и его оптическая интерпретация.

2. $f(x) = -2x^3 - x^2 - x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} 6 & -14 \\ -7 & -8 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & \lambda & -6 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 1 \\ 4, & \lambda \neq 1 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & -12 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \\ -9 & -22 & -5 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -x_1 - x_3 + x_4 = 13 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -15 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 10 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Вариант 18.

1. Определение: обратной матрицы, критерий её существования. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Свойство матрицы, обратной к транспонированной матрице. Формулы для решения матричных уравнений $AX = C$, $XB = C$ и $AXB = C$ для невырожденных матриц A и B.

2. $y = 5 - \frac{3}{5}\sqrt{x^2 - 14x + 74}$

Гипербола $-\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$ нижняя ветвь.

3. $f(x) = 3x^3 + x^2 - x + 3,\quad A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $f(A) = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ -2 & 8 & -3 & -5 \\ \lambda & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = -3 \\ 3, & \lambda \neq -3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 5x_3 - 5x_4 = 6 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Вариант 19.

1. Определение произведения двух матриц, условие его существования и свойства. Свойство определителя произведения двух квадратных матриц. Определение операции транспонирования, её свойства.

2. $y = 6 + \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 - 4x + 12}$

Эллипс $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$ верхняя половина.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 5 & -8 \\ -3 & \lambda & -4 & 5 \\ -3 & 9 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 6 \\ 4, & \lambda \neq 6 \end{cases}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 25 & -23 \end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -4 \\ -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 12 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 21 \\ -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 20 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

Вариант 20.

1. Определение элементарных преобразований матрицы. Определение эквивалентных матриц. Определение ступенчатой матрицы. Алгоритм приведения квадратной невырожденной матрицы к единичной с помощью элементарных преобразований строк.

2. $x = -7 - \frac{4}{3}\sqrt{y^2 - 10y + 16}$

Гипербола $-\frac{(x+7)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$ левая половина.

3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 3$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $f(A) = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -32 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 19 & 10 & -10 \\ 10 & 7 & -4 \\ 27 & 7 & -19 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -29 & 32 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 18 & -19 & -6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -9x_1 - 9x_2 - 2x_3 = 4 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -28 \\ -5x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = -8 \\ -7x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$ $x = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Вариант 21.

1. Определение: (а) обратной матрицы; (б) алгебраического дополнения элемента квадратной матрицы. Критерий существования обратной матрицы. Нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений. Свойство матрицы, обратной к произведению двух матриц.

2. $x = 3 + \sqrt{-2y + 4}$

Парабола $(x-3)^2 = -2(y-2)$ правая половина.

3. $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $f(A) = \begin{pmatrix} -12 & -20 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & -1 \\ -5 & 7 & -3 & 1 \\ -7 & 9 & -5 & 1 \\ 3 & \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = -5 \\ 3, & \lambda \neq -5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -7 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -8x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 19 \end{cases}$ $x = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$

Вариант 22.

1. Определение элементарных преобразований матрицы. Определение эквивалентных матриц. Определение ступенчатой матрицы. Алгоритм приведения произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

2. $y = -2 - \sqrt{-7x + 21}$

Парабола $(y+2)^2 = -7(x-3)$ нижняя половина.

3. $f(x) = -x^2 - 3x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -15 & -9 & 0 \\ -20 & -15 & 6 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 15 & 13 & -9 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -30 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$ Ответ

$X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -7 \\ 2x_1 + x_3 - 5x_4 = 23 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 9 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$

Вариант 23.

1. Парабола: определение, уравнение со смещенной вершиной (два случая: вертикальная или горизонтальная ось симметрии). Эксцентриситет параболы. Координаты фокуса, уравнение директрисы смещенной кривой (два случая). Свойство касательных к параболе и его оптическая интерпретация.

2. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 12 & -13 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 & 1 \\ \lambda & -2 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = -5 \\ 3, & \lambda \neq -5 \end{cases}$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 7 & -7 & -2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -5 \\ -13 & 19 & 5 \\ 12 & -15 & -4 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 12 & -21 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -13 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -16 \\ -7x_1 + 7x_2 + 4x_3 - x_4 = -11 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

Вариант 24.

1. Однородная СЛАУ. Условие её совместности, критерий существования ненулевого решения:(а) произвольной однородной СЛАУ (в терминах ранга); (б) однородной СЛАУ с квадратной матрицей(в терминах определителя).

2. $y = 1 - \frac{5}{2}\sqrt{x^2 + 10x + 29}$

Гипербола $-\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ нижняя ветвь.

3. $\begin{pmatrix} -6 & -1 & -5 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & \lambda & 8 \end{pmatrix} \quad rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = -3 \\ 3, & \lambda \neq -3 \end{cases}$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & -20 & -7 \\ 25 & 1 & 18 \\ -22 & -2 & -16 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & -11 & -14 \\ -7 & 5 & 6 \\ -17 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -3x_1+3x_2-2x_3-x_4=-4\\ -7x_1+7x_2-3x_3-9x_4=19\\ -6x_1+6x_2-5x_3+2x_4=-25\\ -x_1+x_2-3x_4=10 \end{cases}$ $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\0\\4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\-6\\5\\-3\end{pmatrix}$

Вариант 25.

1. Определение суммы двух матриц и произведения матрицы и числа. Определение произведения двух матриц, условие его существования. Свойства этих операций. Определение степени матрицы с натуральным показателем, её свойства.

2. $y=-4-\frac{2}{3}\sqrt{x^2+2x-8}$

Гипербола $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{4}=1$ нижняя половина.

3. $\begin{pmatrix}5&-1&10&4\\ \lambda&-7&1&5\\ -1&-1&-8&-2\\ 8&-5&-1&3\end{pmatrix}$ $rk(A)=\begin{cases}2, & \lambda=12\\ 3, & \lambda\neq 12\end{cases}$

4. $\begin{pmatrix}-1&-3&0\\-3&-7&-2\\1&3&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6&-3&-9\\24&-15&-29\\-11&6&14\end{pmatrix}$ Ответ $X=\begin{pmatrix}0&3&-3\\-2&0&4\\-5&3&5\end{pmatrix}$ $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3&6\\1&-1&-2\\-2&0&-2\end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1-x_2+x_4=-18\\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=11\\ -x_1+x_2-x_3-4x_4=25\\ x_1-x_2-2x_3-5x_4=-4 \end{cases}$ $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\7\\8\\-5\end{pmatrix}$

Вариант 26.

1. Метод Гаусса решения произвольной СЛАУ. Свойство частных решений неоднородной СЛАУ. Структура общего решения неоднородной СЛАУ.

2. $x=3+\frac{1}{4}\sqrt{y^2+10y+41}$

Гипербола $\frac{(x-3)^2}{1}-\frac{(y+5)^2}{16}=1$ правая ветвь.

3. $\begin{pmatrix}-5&1&7&-5\\ 2&-1&-4&3\\ -8&-2&\lambda&-3\\ -1&1&2&-2\end{pmatrix}$ $rk(A)=\begin{cases}3, & \lambda=7\\ 4, & \lambda\neq 7\end{cases}$

4. $X\cdot\begin{pmatrix}3&-4&-2\\0&3&-2\\2&-4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1&-11\\-11&6&12\\-2&5&-3\end{pmatrix}$ Ответ $X=\begin{pmatrix}3&3&-1\\-5&-2&2\\-4&3&5\end{pmatrix}$ $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-11&4&14\\-4&1&6\\-6&4&9\end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1-x_2+x_4=1\\ 2x_1-2x_2+3x_3+5x_4=-19\\ -2x_1+2x_2-x_3-3x_4=5\\ -4x_1+4x_2-3x_3-7x_4=17 \end{cases}$ $x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-7\\-1\\-6\end{pmatrix}$

Вариант 27.

1. Определения: (а) минора произвольной матрицы; (б) ранга матрицы. Влияние элементарных преобразований: на ранг матрицы, на определитель квадратной матрицы. Ранг ступенчатой матрицы. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

2. $x=-5-3\sqrt{-y^2+2y}$

Эллипс $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$ левая половина.

3. $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 2 & 12 & 2 \\ 5 & -19 & -18 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -10 & -13 & 11 \\ 2 & 3 & -1 \\ -6 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 7 \\ -3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 - x_4 = 15 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Вариант 28.

1. Однородная СЛАУ: Свойство частных решений однородной СЛАУ. Размерность пространства решений однородной СЛАУ. Определение фундаментальной системы решения однородной СЛАУ, структура общего решения однородной СЛАУ

2. $y = -\frac{5}{2}\sqrt{x^2 - 4x + 8}$
Гипербола $-\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ нижняя ветвь.

3. $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & -1 \\ 4 & \lambda & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = -10 \\ 4, & \lambda \neq -10 \end{cases}$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 4 & -7 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -11 & 2 \\ 9 & 3 & 12 \\ 1 & -18 & -15 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 & -12 & -9 \\ 14 & -9 & -8 \\ -15 & 10 & 10 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 10x_1 - 10x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 24 \\ 8x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 21 \\ 5x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 10 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

Вариант 29.

1. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): координатная матричная и векторная формы записи. Сформулировать критерии: (а) совместности СЛАУ; (б) единственности решения совместной СЛАУ.

2. $x = 5 - \sqrt{-y^2 - 4y}$
Окружность $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ левая половина.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ -5 & \lambda & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad rk(A) = \begin{cases} 3, & \lambda = 15 \\ 4, & \lambda \neq 15 \end{cases}$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 7 & -10 \\ -3 & -1 & 0 \\ -14 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -9 & -9 & -3 \\ -9 & -11 & -4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Вариант 30.
1. Определения: (а) минора матрицы; (б) ранга матрицы. Теорема о базисном миноре и её следствия. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

2. $x = \sqrt{-y^2 + 4y + 21}$
Окружность $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ правая половина.
3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $f(A) = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$
$A^3 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -4 & 14 & 12 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ Ответ $X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Вариант 31.
1. Гипербола: определение, уравнение со смещенным центром (два случая: фокусы располагаются горизонтально или вертикально). Эксцентриситет, координаты фокусов (два случая), уравнения асимптот смещенной кривой. Свойство касательных к гиперболе и его оптическая интерпретация.

2. $f(x) = 2x^2 + x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $f(A) = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 14 \\ -1 & 16 & 4 \\ -13 & -15 & 4 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -12 & 6 \\ -1 & 10 & 2 \\ -6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -7 & -4 & -6 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \\ \lambda & 5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ $rk(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 9 \\ 3, & \lambda \neq 9 \end{cases}$
4. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$ Ответ
$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 9 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 12 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$ $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$