Подготовка к экзамену

Интегралы и дифференциальные уравнения

Над файлом работали:
fiixii, pluttan

Оглавление

Определения и понятия

1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, на некотором интервале, если для любого x из этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

2. Множество всех первообразных функций $f(x)$ на $(a; b)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале.

   Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$

3. Если в рациональной дроби $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ степень числителя меньше степени знаменателя ($m < n$), то дробь - **правильная**. В противном случае ($m \geq n$), дробь - **неправильная**.

4. **Простейшими** дробями 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов называют правильные рациональные дроби следующего типа:

   1) $\frac{A}{x-a}$
   2) $\frac{A}{(x-a)^k}, \; k \in \mathbb{Z}, \; k > 1$
   3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \; D = p^2 - 4q < 0$
   4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \; D = p^2 - 4q < 0, \; k \in \mathbb{Z}, \; k > 1$

5. **Определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы, при условии, что n (число отрезков разбиения) неограниченно растет, а максимальная из длин отрезков разбиения $\max\limits_k \Delta x_k \to 0$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

6. Функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на отрезке $[a; b]$, если существует предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и $\max\limits_k \Delta x_k \to 0$.

7. Функция $Y(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом**, где $[a, x] \subset [a, b]$.

8. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, +\infty)$. Тогда предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ называют **несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом (несобственный интеграл 1-го рода)** и обозачают:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

9. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл 1 рода называется **сходящимся**. Если этот предел не существует или равен ∞, то несобственный интеграл 1 рода называется **расходящимся**.

10. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. **Несобственным интегралом 2-го рода** от функции, имеющей разрыв:

    (a) в правом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

    $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

    (b) в левом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

    $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

    (c) внутри отрезка $\big($в точке $c\in(a,b)\big)$, называется сумма пределов определенных интегралов:

    $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

    и обозначается как:

    $$\int\limits_a^b f(x)dx$$

11. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. Несобственный интеграл 2-го рода от функции, имеющий разрыв в правом (левом) конце отрезка называется **сходящимся**, если существует и конечен предел

    $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad - \text{ (разрыв в правом конце отрезка)}$$

    $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad - \text{ (разрыв в левом конце отрезка)}$$

    Несобственный интеграл 2-го рода от функции, имеющий разрыв в точке $c\in(a,b)$ (внутри отрезка $[a,b]$) называется **сходящимся**, если существуют и конечны пределы

    $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

12. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если несобственный интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ схо-

дится.

13. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а несобственный интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится.

14. **Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка** называется уравнение, зависящие от одной независимой переменной x, неизвестной функции $y = f(x)$ и ее производных $y',\ y'',\ ...,\ y^{(n)}$ до n-го порядка включительно.

$$F(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n)}) = 0$$

15. **Порядком дифференциального уравнения** называется максимальный порядок производной, входящей в это *ДУ*.

16. **Решением (любым)** *ДУ* называется функция $y = \varphi(x)$ такая, что после подстановки ее и ее производных: $\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ ...,\ \varphi^{(n)}(x)$ в *ДУ*, получается верное тождество, т.е.

$$F\Big(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ ...,\ \varphi^{(n)}(x)\Big) = 0$$

17. Нахождение решения *ДУ* называется **интегрированием ДУ**.

18. График решения *ДУ* называется **интегральной кривой**.

19. **Задачей Коши** называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $F(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

20. **Общим решением** *ДУ* n-го порядка называется функция $y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n)$, такая что:

    (a) При любых допустимых значениях постоянных $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$ функция

    $$y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n)$$

    является решением *ДУ*;

    (b) Каковы бы ни были начальные условия, можно единственным образом так подобрать значения постоянных $C_1^0,\ C_2^0,\ ...,\ C_n^0$, чтобы решение

    $$y = \varphi(x,\ C_1^0,\ C_2^0,\ ...,\ C_n^0)$$

    удовлетворяла начальным условиям.

21. **Частным решением** *ДУ* называется решение, получаемое из общего решения при каких-либо конкретных значениях постоянных.

22. **ДУ с разделяющимися переменными** называется *ДУ* 1-го порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \text{ или}$$

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

где функции $f(x),\ f_{1,2}(x)$ зависят только от x, а функции $g(y),\ g_{1,2}(y)$ - только от y.

23. Функция $f(x, y)$ называется **однородной** функцией степени n относительно переменных x и y, если $\forall t$ справедливо равенство:

$$f(tx,\ ty) = t^n f(x,\ y)$$

24. *ДУ* $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ называется **однородным**, если функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ являются однородными функциями одинаковой степени однородности.

25. *ДУ* вида

$$y' + p(x)y = q(x)$$

где $p(x),\ q(x)$ - непрерывные функции, называют **линейным ДУ 1-го порядка**.

Если $q(x) = 0$, то *ЛДУ* называют **однородным**. В противном случае $\big(q(x) \neq 0\big)$ *ЛДУ* называют **неоднородным**.

26. *ДУ* вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,\ n \neq 0,\ n \neq 1$$

называется *уравнением Бернулли*.

27. **Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка** называется уравнение, являющееся линейным относительно неизвестной функции y и всех ее производных, то есть *ДУ* вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = g(x),$$

где $a_0(x),\ a_1(x),\ ...,\ a_n(x),\ g(x)$ - заданные на некотором интервале функции.

Если $g(x) = 0$, то *ЛДУ* называют **однородным** (*ЛОДУ n-го порядка*). В противном случае $\big(g(x) \neq 0\big)$ *ЛДУ* называют **неоднородным** (*ЛНДУ n-го порядка*).

28. **Дифференциальным оператором** $L[y]$ называется выражение вида:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y$$

29. Система функций $y_1(x),\ ...,\ y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на $[a; b]$, если $\exists \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n$, не все равные 0, такие, что на $[a; b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0$$

30. Система функций $y_1(x),\ ...,\ y_n(x)$ называется **линейно независимой** на $[a;b]$, если на $[a;b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0$$

только когда $\forall \alpha_i = 0$.

31. **Определитель Вронского** функций $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ называет определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

32. Совокупность любых n линейно независимых частных решений *ЛОДУ n-го порядка* называют его **фундаментальной системой решений (ФСР)**.

33. *ДУ* вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0,$$

где $\forall a_i = const$, называется **ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами**.

34. **Квазимногочленом** называется сумма нескольких слагаемых вида

$$e^{\alpha x}\Big(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\Big) \qquad (\star)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределенного интеграла.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, на некотором интервале, если для любого x из этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Свойства первообразной

Теорема 1
Если $F(x)$ - есть первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, то функция $F(x)+C$, где $C = const$, также является первообразной для этой функции на $(a;b)$.

Доказательство
По условию $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$ $\overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$ $\forall x \in (a;b)\ \ F'(x) = f(x)$
$\big(F(x)+C\big)' = F'(x) + C' = f(x) \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} F(x)+C$ - первообразная $f(x)$ на $(a;b)$.
Теорема доказана

Теорема 2
Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, и $\forall x \in (a;b) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$, то эта функция - константа на $(a;b)$.

Доказательство
Пусть d - некоторая фиксированная точка интервала $(a;b)$, а x - любая точка этого интервала. Тогда отрезок $[x,d]$ или соответственно $[d,x]$ целиком принадлежит интервалу $(a;b)$, поэтому функция $\varphi(x)$ дифференцируема (а следовательно, и непрерывна) на этом отрезке. Применим теорему Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(d) = \varphi'(\varepsilon)(x-d),\ \varepsilon \in (x;d)$$

$\Rightarrow \varepsilon \in (a;b)$, но по условию теоремы $\forall x \in (a;b)\ \ \varphi'(x) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi'(\varepsilon) = 0$.
Тогда $\varphi(x) - \varphi(d) = 0 \ \Rightarrow\ \forall x \in (a;b)\ \ \varphi(x) = \varphi(d)$.
Теорема доказана

Теорема 3 (основная теорема о первообразной)

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - любые первообразные функции $f(x)$ на некотором интервале $(a;b)$, то $\forall x \in (a;b)$ выполняется $F_1(x) - F_2(x) = C = const$.

Доказательство
Обозначим $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$.
$F_1(x), F_2(x)$ - первообразные функции $f(x)$ $\Rightarrow$ они дифференцируемы на интервале $(a;b)$ по условию $\Rightarrow$ функция $\Phi(x)$ также дифференцируема на $(a;b)$ $\Rightarrow$ $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) =$

$f(x) - f(x) = 0.$
Имеем: $\forall x \in (a;b)\ \ \Phi'(x) = 0 \overset{\text{по Th.2}}{\Rightarrow}\ \Phi(x)$ - константа.
Теорема доказана

Множество всех первообразных функций $f(x)$ на $(a;b)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале.
Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$,
$f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла

Теорема 1
Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = f(x)$$

Доказательство

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' \overset{\text{по опр.}}{=} \big(F(x) + C\big)' = F'(x) \overset{\text{по опр.}}{=} f(x)$$

Теорема доказана

Теорема 2
Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\Big(\int f(x)dx\Big) = f(x)dx$$

Доказательство

$$d\Big(\int f(x)dx\Big) = \Big(\int f(x)dx\Big)'dx \overset{\text{по Th.1}}{=} f(x)dx$$

Теорема доказана

Теорема 3
Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной $C = const$.

$$\int dF(x) = F(x) + C,\ C = const$$

Доказательство

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx \overset{\text{по опр.}}{=} F(x) + C$$

Теорема доказана

Теорема 4

Неопределенный интеграл алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых.

$$\int \big(f_1(x) \pm ... \pm f_n(x)\big)dx = \int f_1(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx$$

Доказательство

Возьмем дифференциал от правой части:

$$d\big(\int f_1(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx\big) = d\int f_1(x)dx \pm ... \pm d\int f_n(x)dx =$$

$$= f_1(x)dx \pm ... \pm f_n(x)dx = \big(f_1(x) \pm ... \pm f_n(x)\big)dx$$

т.е.

$$d\big(\int f_1(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx\big) = \big(f_1(x) \pm ... \pm f_n(x)\big)dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей полученного равенства:

$$\int d\Big(\int f_1(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx\Big) = \int \big(f_1(x) \pm ... \pm f_n(x)\big)dx$$

$$\int f_1(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx = \int \big(f_1(x) \pm ... \pm f_n(x)\big)dx$$

Теорема доказана

Теорема 5

Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла:

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$$

Доказательство

Возьмем дифференциал от правой части:

$$d\Big(k\int f(x)dx\Big) = k \cdot d\Big(\int f(x)dx\Big) = k \cdot f(x)dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей полученного равенства:

$$k \int f(x)dx = \int k \cdot f(x)dx$$

Теорема доказана

Теорема 6 (об инвариантности неопределенного интеграла)
Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ - произвольная функция, дифференцируемая на интервале $(a; b)$, то:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Доказательство
По условию $\int f(x)dx = F(x) + C$.
Тогда $\forall x \in (a; b) \ : \ F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$, и по св-ву инвариантности формы 1-го дифференциала $dF(u) = f(u)du$, где $u = \varphi(x)$ - любая дифференцируемая функция на $(a; b)$.
Возьмем интеграл от обеих частей $dF(u) = f(u)du$:

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$$

Теорема доказана

2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

Простейшими дробями 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов называют правильные рациональные дроби следующего типа:

$$1.\frac{A}{x-a}$$

$$2.\frac{A}{(x-a)^k},\ \ k\in\mathbb{Z},\ k>1$$

$$3.\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \ D=p^2-4q<0$$

$$4.\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\ \ D=p^2-4q<0,\ k\in\mathbb{Z},\ k>1$$

Интегрирование простейших дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\cdot\int\frac{1}{x-a}dx = A\cdot\ln|x-a|+C$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\cdot\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}dx = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$. В числителе выделяем производную знаменателя и полученный интеграл представляем в виде суммы 2-х интегралов

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{2x+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{(2x+p)+(\frac{2N}{M}-p)}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx+$$

$$+\frac{M}{2}\cdot\int\frac{(\frac{2N}{M}-p)}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+(N-\frac{pM}{2})\cdot\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\ln|x^2+px+q|+(N-\frac{pM}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^k}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\int\frac{(2x+p)+(\frac{2N}{M}-p)}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}+$$

$$+\frac{2N-pM}{2}\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^k} = \frac{M}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+$$

$$+\frac{2N-pM}{2}\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^k}$$

$$I_k=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^k}=\Big|\;t=x+\frac{p}{2},\;dx=dt,\;a=q-\frac{p^2}{4}\;\Big|=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t^2+a\right)^k}=\frac{1}{a}\int\frac{(a+t^2)-t^2}{\left(t^2+a\right)^k}dt=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\left(t^2+a\right)^{k-1}}-\frac{1}{a}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a\right)^k}=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot I_{k-1}-\frac{1}{a}\int\frac{\frac{t}{2}\cdot d(t^2+a)}{\left(t^2+a\right)^k}=\frac{1}{a}\cdot I_{k-1}-\frac{1}{a}\int\frac{t}{2(-k+1)}\frac{(-k+1)}{\left(t^2+a\right)^k}d(t^2+a)=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot I_{k-1}-\frac{1}{a\cdot 2(-k+1)}\int t\cdot d\left(\frac{1}{(t^2+a)^{k-1}}\right)=$$

$$=\left|u=t,\;du=dt;\;dv=d\left(\frac{1}{(t^2+a)^{k-1}}\right),\;v=\frac{1}{(t^2+a)^{k-1}}\right|=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot I_{k-1}-\frac{1}{2a(1-k)}\cdot\left(\frac{t}{(t^2+a)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+a)^{k-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot I_{k-1}-\frac{t}{2a(1-k)(t^2+a)^{k-1}}+\frac{I_{k-1}}{2a(1-k)}=$$

$$=I_{k-1}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2a(1-k)}\right)+\frac{t}{2a(k-1)(t^2+a)^{k-1}}$$

Получили реккурентную формулу для I_k, причем при $k=1$ получим:

$$\int\frac{dt}{t^2+a}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{a}}+C$$

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших)
Правильная рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},\ (m<n)$, где $P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}...(x-x_s)^{k_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$ может быть единственным образом представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{1}{a_0}\Bigg(\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+...+\frac{B_1}{(x-x_s)}+\frac{B_2}{(x-x_s)^2}+$$

$$+...+\frac{B_{k_s}}{(x-x_s)^{k_s}}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+$$

$$+...+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_tx+q_t)}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_tx+q_t)^2}+\frac{M_{l_t}x+N_{l_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}\Bigg)$$

где $A_1,...,A_{k_1},B_1,...,B_{k_s},C_1,...,C_{l_1},D_1,...,D_{l_1},M_1,...,M_{l_t},...,N_1,...,N_{l_t}$ - неизвестные коэффициенты, которые требуется найти.

3, 4, 5, 6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции (теорема 6). Доказать теорему об оценке определенного интеграла (теорема 9). Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла (теорема 8). Доказать теорему о среднем для определенного интеграла (теорема 11).

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм при $n \to \infty$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, и обозначается:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_k$$

Свойства определенного интеграла

Теорема 1

$$\int\limits_a^b \Big(f_1(x) \pm ... \pm f_m(x)\Big)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm ... \pm \int\limits_a^b f_m(x)dx$$

Доказательство

$$\int\limits_a^b \Big(f_1(x) \pm ... \pm f_m(x)\Big)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Big(f_1(\xi_i) \pm ... \pm f_m(\xi_i)\Big)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm ... \pm \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_m(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm ... \pm \int\limits_a^b f_m(x)dx$$

Теорема доказана

Теорема 2

$$\int\limits_a^b c\, f(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$$

Доказательство

$$\int\limits_a^b c\, f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Big(c\, f(\xi_i)\Big)\Delta x_i = c \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i)\Big)\Delta x_i = c\int\limits_a^b f(x)dx$$

Теорема доказана

Теорема 3

$$\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Доказательство

$$\int\limits_a^b c\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$$

Теорема доказана

Теорема 4

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Доказательство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = -\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_{i-1} - x_i) = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Теорема доказана

Теорема 5
Для любых a, b, c, расположенных в интервале интегрирования функции $f(x)$,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

Если все эти три интеграла существуют.

[3] Теорема 6 (о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции)
Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $f(x) \geq 0 \ \big(f(x) \leq 0\big)$ на этом отрезке, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0 \ \ (\leq 0)$

Доказательство

Так как функция $f(x)$ интегрируема, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$$

Пусть по условию:

$$f(\xi_i) \geq 0,\ \Delta x_i > 0 \ \Rightarrow f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i \geq 0 \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по теореме о сохранении функцией знака своего предела:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i \geq 0$$

При $f(x) \leq 0$ аналогично.
Теорема доказана

Теорема 7
Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и на этом отрезке выполняется $f(x) \geq \varphi(x)$ $\big(f(x) \leq \varphi(x)\big)$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)dx \ \ (\leq)$$

[5] Теорема 8 (об оценке модуля определенного интеграла)
Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|dx$$

Доказательство
По условию функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда по теореме Вейерштрасса

$$\forall x \in [a;b] \quad -\big|f(x)\big| \leq f(x) \leq \big|f(x)\big|$$

По предыдущей теореме

$$-\int\limits_a^b \big|f(x)\big|dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|dx$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b \big|f(x)\big|dx$$

Теорема доказана

[4] Теорема 9 (об оценке определенного интеграла)

Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$, интегрируемой на $[a;b]$, то выполняется неравенство:

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Доказательство

По условию:

$$\forall x \in [a,b]\ :\ m \le f(x) \le M,$$

где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x),\ M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

$f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, следовательно:

$$\int\limits_a^b m dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b M dx$$

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Теорема доказана

Теорема 10

Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$, интегрируемой на $[a;b]$, и функция $\varphi(x) \ge 0$ - интегрируема на $[a;b]$, то

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx \le M\int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

[6] Теорема 11 (о среднем)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a;b]$, то $\exists c \in (a;b)$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

Доказательство

По условию функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ $\Rightarrow$ по Th Вейерштрасса $\forall x \in [a;b]$ $m \leq f(x) \leq M$, где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x),\ M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x) \ \Big(\varphi(x) > 0\Big)$$

По теореме 10:

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b \varphi(x)dx > 0 \Rightarrow$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Коши $\exists c \in (a;b)$ такая, что

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} \Rightarrow$$

$$f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

Теорема доказана

7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.

Функция $Y(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом**, где $[a, x] \subset [a, b]$.

Теорема (о производной от интеграла по его верхнему пределу)
Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой точке x этого отрезка. Тогда функция

$$Y(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $Y' = f(x)$.

Доказательство
По определению:
$Y(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$
$Y(x + \Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt, \;\; x + \Delta x \in [a, b]$
Тогда приращение $\Delta Y = Y(x+\Delta x) - Y(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^a f(t)dt + \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$
По условию теоремы $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ (по теореме о среднем) $\Delta Y = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x$, где $c \in (x, \; x + \Delta x)$.
По определению производной:

$$Y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x),$$

так как $\Delta x \to 0$ и $x < c < x + \Delta x$, то $c \to x$.
Теорема доказана

8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.

Свойства определенного интеграла см. в 3, 4, 5, 6

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Доказательство
Одной из первообразных функции $f(x)$ является

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Две первообразные функции $f(x)$ различаются, самое большее, на константу, т.е.

$$\Phi(x) - F(x) = \Phi(x) - \int\limits_a^x f(t)dt = C$$

Подставляя сюда $x = a$, получаем, что $C = \Phi(a)$. Поэтому

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$$

При $x = b$ получим:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

*не важно, какой буквой обозначается переменная, поэтому можно заменить t на x, чтобы получить в точности доказываемое выражение.
Теорема доказана

9. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определённого интеграла.

Теорема (об интегрировании подстановкой для определённого интеграла)
Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, функции $x = \varphi(t),\ \ \varphi'(t),\ f\big(\varphi(t)\big)$ - непрерывны на $[\alpha;\beta]$, где $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

Доказательство
Пусть $F(x)$ - какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$. Р/м сложную функцию $\Phi(t) = F\big(\varphi(t)\big)$. Найдем ее производную:

$$\Phi'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$$

Отсюда следует, что $\Phi(t)$ является первообразной функции $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$.

$$\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Теорема доказана

10. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла.

Теорема (об интегрировании по частям для определённого интеграла)

Если функции $U(x)$ и $V(x)$ непрерывно дифференцируемы на $(a;b)$, то $\int\limits_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU$

Доказательство

$$d(UV) = UdV + VdU \Rightarrow UdV = d(UV) - VdU$$

$U(x)$ и $V(x)$ непрерывны на $[a;b]$, $\Rightarrow$ $\exists$ определенный интеграл от функций:

$$\int\limits_a^b UdV = \int\limits_a^b d(UV) - \int\limits_a^b VdU$$

Теорема доказана

11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Свойства определенного интеграла см. в 3, 4, 5, 6

Интегрирование периодических функций:
Если $f(x)$ - периодическая функция, непрерывная на $[a; a+T]$, где T - ее период, то $\forall a \in \mathbb{R}$ и $T > 0$:

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$$

Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат:
Пусть $f(x)$ - четная функция на $[-a; a]$, т.е. $\forall x \in [-a; a]: \quad f(x) = f(-x)$. Тогда:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx = \begin{vmatrix} x = -t & dx = -dt \\ t_1 = a & x_1 = -a \\ x_2 = 0 & t_2 = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_a^0 f(-t)(-dt) + \int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_0^a f(t)dt + \int\limits_0^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$$

Пусть $f(x)$ - нечетная функция на $[-a; a]$, т.е. $\forall x \in [-a; a]: \quad -f(x) = f(-x)$. Тогда:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx = \begin{vmatrix} x = -t & dx = -dt \\ x_1 = -a & t_1 = a \\ x_2 = 0 & t_2 = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_a^0 f(-t)(-dt) + \int\limits_0^a f(x)dx = -\int\limits_0^a f(t)dt + \int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_0^a f(x)dx - \int\limits_0^a f(x)dx = 0$$

12,13,14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, +\infty)$. Тогда предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ называют **несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом (несобственный интеграл 1-го рода)** и обозачают:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

*аналогично определение несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом.

[12] признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, тогда:

1. если сходится $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$
2. если расходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$

Доказательство
1) По условию $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\Rightarrow$ по определению $\exists$ конечный $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b g(x)dx = M$, а значит:

$$\forall b > a : \int\limits_a^b g(x)dx \le M$$

По условию, $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство: $0 \le f(x) \le g(x)$
По теореме об интегрировании неравенства:

$$0 \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx \le M$$

Таким образом:

$$0 \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{b\to\infty} 0 \le \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx \le \lim_{b\to\infty} M$$

$$0 \le \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le M,$$

из полученного выше следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

2) По условию $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Предположим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, вопреки теореме. Но в таком случае, по доказанному выше, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится. Это противоречит условию теоремы, а значит, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Теорема доказана

[13] предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

Если функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

По условию существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то есть по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon) > 0 :\ \forall x > M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon \quad | \cdot g(x) > 0$$

$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \qquad (1)$$

Пусть $a > M$. Подберем ε так, чтобы $\lambda - \varepsilon > 0$

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда, т.к. из (1) $\Rightarrow$ $(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x)$, можно применить признак сходимости по неравенству:
$\int\limits_a^{+\infty} (\lambda - \varepsilon)g(x)dx$ - сходится. Тогда и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится (по свойству линейности).

2) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда по свойству линейности будет сходиться $\int\limits_a^{+\infty} (\lambda + \varepsilon)g(x)dx$.

Из (1) $\Rightarrow$ $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$, тогда по признаку сходимости по неравенству, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится.

3) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда, т.к. из (1) $\Rightarrow$ $f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$, можно применить признак сходимости по неравенству:

$\int\limits_a^{+\infty} (\lambda + \varepsilon) g(x) dx$ - расходится, а значит и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ - расходится.

4) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда по свойству линейности будет расходиться $\int\limits_a^{+\infty} (\lambda - \varepsilon)g(x)dx$.

Из (1) $\Rightarrow$ $(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x)$, тогда по признаку сходимости по неравенству, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - расходится.

Теорема доказана

[14] признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и знакопеременная в $[a, +\infty)$, и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (последний интеграл называют абсолютно сходящимся).

Доказательство

По условию $f(x)$ непрерывна в $[a, +\infty) \Rightarrow \forall x \in [a, +\infty) : \ f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$

По условию $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится $\Rightarrow 2\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ тоже сходится $\Rightarrow$ (по признаку сходимости по неравенству) $\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)dx$ сходится $\Rightarrow$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)dx}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx}_{\text{сходится}}$$

Таким образом, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится.

Теорема доказана

15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. **Несобственным интегралом 2-го рода** от функции, имеющей разрыв:

1. в правом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

2. в левом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

3. внутри отрезка $\big($в точке $c\in(a,b)\big)$, называется сумма пределов определенных интегралов:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

и обозначается как:

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

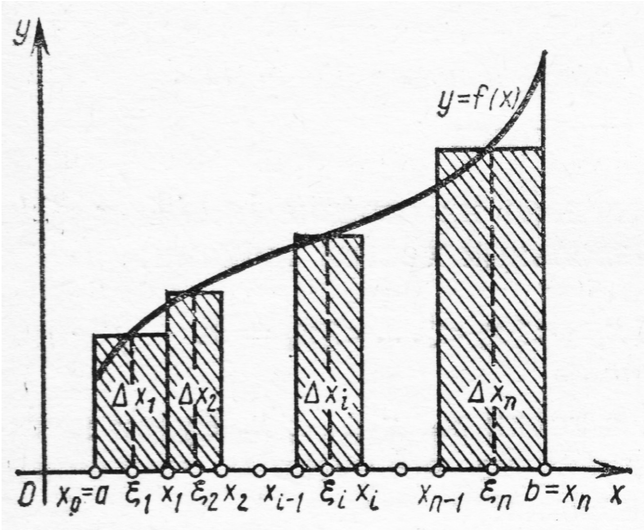
признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода
(*они аналогичны признакам сходимости несобственных интегралов 1-го рода*)

Теорема 1
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b)$ и $\forall x\in[a,b)$ выполняется неравенство $0\leq f(x)\leq g(x)$, тогда:

1. если сходится $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$
2. если расходится $\int\limits_a^b f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_a^b g(x)dx$

Теорема 2
Если функции $f(x)>0$ и $g(x)>0$ непрерывны на $[a,b)$ и $f(b)=\infty,\ g(b)=\infty$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda>0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.



Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную $y = f(x),\ x = a,\ x = b$, и осью Ox. разобьем основание на n частичных отрезков точками:

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2, ...,\ x_n = b,\ \text{где}$$

$$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$$

Проведем прямые через эти точки, перпендикулярно оси абсцисс.
Внутри каждого отрезка зафиксируем $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$
Тогда $S_k = f(\xi_k)\Delta x_k$ - площадь k-го прямоугольника с высотой $f(\xi_k)$ и шириной Δx_k. Эта площадь, при условии $\Delta x_k \to 0$, будет приблизительно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной $y = f(x),\ x = x_{k-1},\ x = x_k$, и осью Ox.
Составим интегральную сумму - сумму вида:

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,\ \text{где}\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Эта сумма приблизительно равна искомой площади криволинейной трапеции, причем это приближение становится более точным, если n будет неограниченно расти, а длины отрезков разбиения Δx_k, соответственно, уменьшаться. Предел интегральной суммы при перечисленных выше условиях будет равен, по определению, определенному интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$, и будет равен, исходя из всех рассуждений выше, искомой площади криволинейной трапеции. Таким образом,

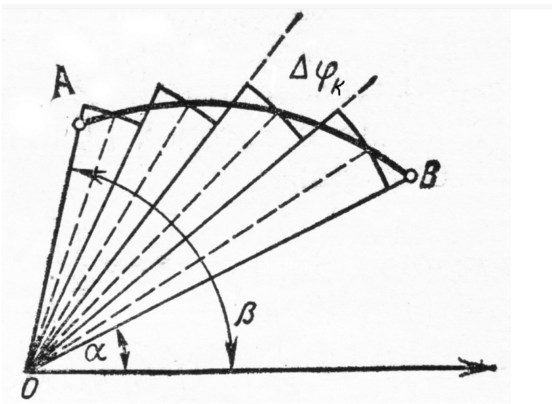
$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ - полярные координаты точки, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.

Пусть криволинейный сектор ограничен отрезками лучей $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ - функция, непрерывная на отрезке $[\alpha; \beta]$. Тогда площадь этого криволинейного сектора:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Вывод



Разобьем криволинейный сектор лучами на n частичных криволинейных секторов

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta,\ \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$$

В каждом частичном веткоре возьмем: $\tilde{\varphi_k} \in \Delta\varphi_k,\ k = 1, 2, ..., n$
При малых $\Delta\varphi_k$ справедливо $S_{\text{крив. сектора}} \approx S_{\text{кругового сектора}}$
В свою очередь,

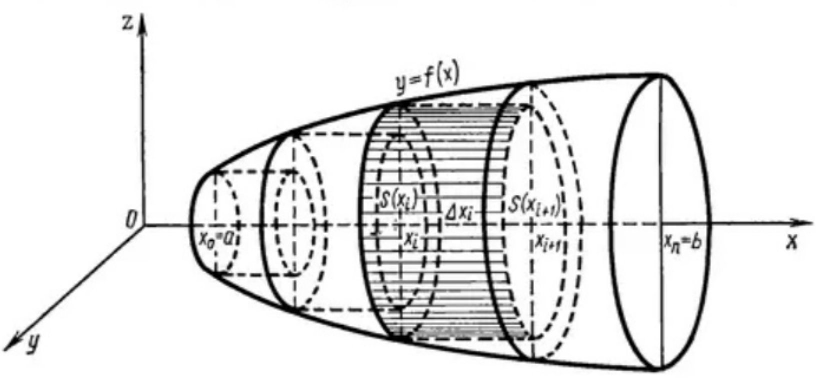
$$S_{\text{круг. сектора}} = \frac{1}{2}\rho_k^2 \cdot \Delta\varphi_k = S_k$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\tilde{\varphi_k}) \cdot \Delta\varphi_k$$

Получили интегральную сумму для функции $\rho^2(\varphi)$.
$\rho(\varphi)$ - непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \rho^2(\varphi)$ - тоже непрерывна на $[a, b]$, следовательно существует конечный интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta\varphi_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \rho^2(\tilde{\varphi_k}) \cdot \Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a,\ x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.



Пусть тело M заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и пусть для каждой точки $x \in [a; b]$ известна площадь $S(x) = \pi f^2(x)$ фигуры, получающейся в сечении тела M плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через указанную точку.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Тогда объем V_i части M_i тела, расположенной между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, при достаточно малом $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, приблизительно равен объему цилиндра с площадью основания $S(\xi_i),\ \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и высотой Δx_i:

$$V_i = S(\xi_i)\Delta x_i$$

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n} V_i$ в пределе при $n \to \infty$ и $\max\limits_{k}\Delta x_i \to 0$ (далее эти условия обозначаются "$\cdots$"):

$\lim\limits_{\cdots} \sum\limits_{i=0}^{n} V_i$, с одной стороны, равен искомому объему вращения V (с учетом всего сказанного выше).

С другой же,

$$\lim_{\cdots} \sum_{i=0}^{n} V_i = \lim_{\cdots} \sum_{i=0}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Таким образом,

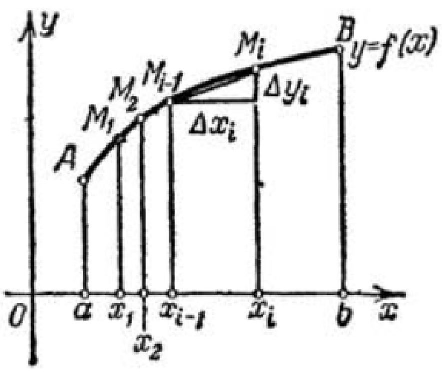
$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y - декартовые координаты точки, $a \leq x \leq b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ - функция, непрерывная на $[a; b]$ и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке, тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Покажем это:



Разобьем дугу AB на n частей точками $M_0, M_1, ..., M_n$, абсциссы которых $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$

Соединив соседние точки отрезками, получим ломаную, вписанную в дугу AB. Обозначим длины отрезков $M_{i-1}M_i$ за l_i, тогда длина ломаной

$$l_{\text{ломанной}} = l_1 + l_2 + ... + l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

Длиной l дуги AB кривой $y = f(x)$ называется предел длины вписанной в нее ломаной, когда число ее звеньев неограниченно растет, а наибольшая из длин звеньев длина стремится к 0, т.е.

$$l = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} l_i$$

*При этом предполагается, что этот предел существует и не зависит от выбора точек.

Кривые, для которых существует этот предел, называют спрямляемыми**.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости, имеем:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \text{ или}$$

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}, \text{ где}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

По теореме Лагранжа,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Тогда

$$l_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2}$$

и длина вписанной ломаной:

$$l_{\text{ломанной}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} \text{ – интегральная сумма}$$

Так как $f'(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то и $\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}$ непрерывна на $[a;b]$, поэтому существует предел интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$l = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} dx$$

20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ - полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Кривая задана в полярных координатах в виде $r = f(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тогда

$$\begin{cases} x(\varphi) = r\cos\varphi \\ y(\varphi) = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y'_\varphi = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi},\ dx = x'_\varphi d\varphi,\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta)$$

Подставим все в формулу длины дуги кривой, заданной в полярных координатах:

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}\right)^2} x'_\varphi d\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2} d\varphi =$$

$$\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2\cos^2\varphi - 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + (r')^2\sin^2\varphi + 2r'r\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$$

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$$

21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод "$u \cdot v$") и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - непрерывные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка** (*ЛДУ1*)
Если $q(x) = 0$, то *ЛДУ1* называют **однородным** (*ОЛДУ1*)
В противном случае $\big(q(x) \neq 0\big)$ *ЛДУ1* называют **неоднородным** (*НЛДУ1*)

Интегрирование *НЛДУ1* методом Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Решение будем искать в виде $y = U \cdot V$, где $U = U(x),\ V = V(x)$ - новые неизвестные функции.
Тогда

$$y' = U'V + V'U$$

$$U'V + V'U + p(x) \cdot UV = q(x)$$

Выносим за скобки одну из новых функций:

$$V\big(U' + p(x) \cdot U\big) + UV' = q(x)$$

Функции U и V будем искать из условий:

$$\begin{cases} U' + p(x) \cdot U = 0 \\ UV' = q(x) \end{cases}$$

1. Из первого условия находим U:

$$U' + p(x) \cdot U = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = -p(x)U$$

$$\int \frac{dU}{U} = -\int p(x)dx$$

$$U = e^{-\int p(x)dx} + C$$

Возьмем частное решение при $C = 0$:

$$U = e^{-\int p(x)dx}$$

2. Из второго условия, с учетом полученного частного решения U, находим V:

$$UV' = q(x)$$

$$V'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{dV}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$dV = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$\int dV = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$V = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

Таким образом, получаем:

$$y = U \cdot V = e^{-\int p(x)dx}\Big(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\Big)$$

Интегрирование *НЛДУ1* методом Лагранжа

$$y' + p(x)y = q(x)$$

1. Решим соответствующее *ОЛДУ1*:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C$$

$$y_{\text{о.о.}} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

2. Искать общее решение *НЛДУ1* будем в том же виде, что и решение *ОЛДУ1*, но считая C неизвестной функцией от x, т.е.

$$y_{\text{о.н.}} = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$y'_{\text{о.н.}} = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot \big(-p(x)\big)$$

Подставляем $y_{\text{о.н.}}$, $y'_{\text{о.н.}}$ в исходное *НЛДУ1*

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot \big(-p(x)\big) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{dC}{dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$dC = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

$$\int dC = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

$$C = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C_1$$

Подставим найденную C в $y_{\text{о.н.}}$

$$y_{\text{о.н.}} = \Big(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C_1\Big) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка

Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ и ее частные производные по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области D, то существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка

1. $y^{(n)} = f(x)$

   Общее решение находится последовательным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \bigg(\int f(x)dx + C_1 \bigg) dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2$$

$$\dots$$

$$y(x) = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

2. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ - *ДУ* n-го порядка, не содержащее явно $y,\ y', ...,\ y^{(k-1)}$

   Порядок *ДУ* понижается на k заменой $y^{(k)} = p(x)$. Таким образом, *ДУ* примет вид:

$$F(x, p, p', ..., p^{(n-k)})$$

   Общее решение этого *ДУ*: $p(x) = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k})$

   С учетом замены: $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k})$

   Решаем полученное *ДУ* последовательным интегрированием и находим общее решение исходного *ДУ*:

   $y = \psi(x, C_1, ..., C_n)$

3. $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ - *ДУ* n-го порядка, не содержащее явно x.

   Порядок *ДУ* понижаем на 1 с помощью замены

$$y' = p(y),$$

$$y'' = \big(p(y)\big)' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p,$$

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

теорема Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) - \text{ЛДУ n-го порядка}$$

Если функции $p_1(x),\ p_2(x),\ ...,\ p_n(x),\ f(x)$ являются непрерывными на $[a; b]$, то для любого начального условия

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

существует единственное решение $y = \varphi(x)$ *ЛДУ* n-го порядка, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

1. Если y_1 и y_2 - частные решения *ЛОДУ* n-го порядка, то y_1+y_2 - также является решением этого *ЛОДУ*.

   Доказательство

   $$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot (y_1 + y_2) =$$
   $$= \underbrace{y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1}_{0} + \underbrace{y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_2}_{0} = 0$$

   Это означает, что $y_1 + y_2$ по определению является решением этого *ЛОДУ*

   Теорема доказана

2. Если y_1 - частное решение *ЛОДУ* n-го порядка, то $C \cdot y_1$ - также является решением этого *ЛОДУ*, $C = const$.

   Доказательство

   $$(C \cdot y_1)^{(n)} + p_1(x) \cdot (C \cdot y_1)^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot (C \cdot y_1) =$$
   $$= C \cdot y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot C \cdot y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot C \cdot y_1 =$$
   $$= C \cdot \underbrace{\left(y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot y_1\right)}_{0} = 0$$

   Это означает, что $C \cdot y_1$ по определению является решением этого *ЛОДУ*

Теорема доказана

Следствие. Если y_1 и y_2 - частные решения *ЛОДУ* n-го порядка, то их линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2,\ \ C_1 = const,\ C_2 = const$ - также является решением этого *ЛОДУ*.

Доказательство

$$(C_1y_1 + C_2y_2)^{(n)} + p_1(x) \cdot (C_1y_1 + C_2y_2)^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot (C_1y_1 + C_2y_2) =$$

$$= C_1 \cdot y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot C_1 \cdot y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2^{(n)} + p_1(x) \cdot C_2 \cdot y_2^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot C_2 \cdot y_2 =$$

$$= C_1 \cdot \underbrace{\left(y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot y_1\right)}_{0} + C_2 \cdot \underbrace{\left(y_2^{(n)} + p_1(x) \cdot y_2^{(n-1)} + ... + p_n(x) \cdot y_2\right)}_{0} = 0$$

Это означает, что $C_1y_1 + C_2y_2$ по определению является решением этого *ЛОДУ*
Теорема доказана

24, 25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Система функций $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на $[a;b]$, если $\exists\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$, не все равные 0, такие, что на $[a;b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

Система функций $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ называется **линейно независимой** на $[a;b]$, если на $[a;b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

только когда $\forall\alpha_i = 0$.

Теорема (о вронскиане линейно зависимых функций)
Если функции $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ являются линейно зависимыми на $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ определитель Вронского этих функций равен 0.

Доказательство
По условию функции $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на $[a;b] \ \Rightarrow\ \exists\alpha_i$, не все равные 0, такие что

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \text{ дифференцируем} \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Получили *СЛОАУ* (систему линейных однородных алгебраических уравнений) с неизвестными $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n$ и с отличным от 0 решением, так как не все $\alpha_i = 0$ (см. выше).
Это возможно в случае, если определитель системы равен 0, но определитель этой системы и является определителем Вронского функций $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$, т.е.

$$\forall x \in [a;b] \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Теорема доказана

Теорема (о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка)
Если линейно независимые на $[a;b]$ функции $y_1,\ \dots,\ y_n$ являются частными решениями *ЛОДУ*

n-го порядка с непрерывными на $[a;b]$ коэффициентами $p_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$, то $\forall x \in [a;b]$ определитель Вронского этих функций отличен от нуля.

Доказательство (от противного)

Предположим, что для какой-то точки $x_0 \in [a;b]$ $W(x_0) = 0$. Рассмотрим СЛАУ относительно $\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x_0) = 0$ $\Rightarrow$система имеет ненулевое решение, то есть $\exists \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n$, не все равные 0, являющиеся решением этой СЛАУ.

Рассмотрим частное решение *ЛОДУ*

$$\overline{y}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x)$$

Оно удовлетворяет в точке x_0 начальным условиям (в силу СЛАУ выше)

$$\begin{cases} \overline{y}(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \overline{y}'(x_0) = \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \\ \overline{y}^{(n-1)}(x) = \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим частное решение *ЛОДУ* $\overline{\overline{y}}(x) = 0$

Оно удовлетворяет в точке x_0 начальным условиям

$$\begin{cases} \overline{\overline{y}}(x_0) = 0 \\ \overline{\overline{y}}'(x_0) = 0 \\ ... \\ \overline{\overline{y}}^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, частные решения $\overline{y}(x),\ \overline{\overline{y}}(x)$ удовлетворяют одним и тем же начальным условиям задачи Коши. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $\overline{y}(x) = \overline{\overline{y}}(x)$, иначе получим два различных частных решения, удовлетворяющих одному начальному условию.

$$\overline{y}(x) = \overline{\overline{y}}(x)$$

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0$$

То есть $y_1, y_2,\ ...,\ y_n$ - линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию линейной неза-

висимости $y_1, y_2, \ ..., \ y_n$, а значит, получили противоречие с условием теоремы.
Таким образом $\forall x \in [a;b] \ \ W(x) \neq 0$
Теорема доказана

26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема (о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка)
У каждого *ЛОДУ* n-го порядка $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$ с непрерывными $p_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ коэффициентами на $[a; b]$ существует ФСР.

Доказательство
Возьмем любой числовой определитель n-го порядка, не равный нулю

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Возьмем любую точку $x_0 \in [a; b]$ и сформулируем для уравнения n задач Коши, причём начальные условия в точке x_0 для i-ой задачи возьмём из i-го столбца этого определителя:

$$\begin{matrix} y_1(x_0) = \beta_{11} & y_2(x_0) = \beta_{12} & \cdots & y_n(x_0) = \beta_{1n} \\ y_1'(x_0) = \beta_{21} & y_2'(x_0) = \beta_{22} & \cdots & y_n'(x_0) = \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n1} & y_2^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n2} & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) = \beta_{nn} \end{matrix}$$

Пусть $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ - решения этих задач. Эта система линейно независима на $[a; b]$, так как её определитель Вронского в точке x_0 равен взятому числовому определителю и отличен от нуля, следовательно, это фундаментальная система решений.
Теорема доказана

27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка)
Общее решение на $[a;b]$ *ЛОДУ* n-го порядка с непрерывными $p_i(x),\ i = 1,2,...,n$ на $[a;b]$ функциями равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами

$$y_{\text{о.о.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

Доказательство
ЛОДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$$

1. Докажем, что $y_{\text{о.о.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ - решение ДУ. Подставим его и его производные в ДУ:

$$(y_{\text{о.о.}})^{(n)} + p_1(x)\cdot(y_{\text{о.о.}})^{(n-1)} + ... + p_n(x)\cdot y_{\text{о.о.}} = (C_1y_1)^{(n)} + p_1(x)\cdot(C_1y_1)^{(n-1)} +$$

$$+ ... + p_n(x)\cdot C_1y_1 + ... + (C_ny_n)^{(n)} + p_n(x)\cdot(C_ny_n)^{(n-1)} + ... + p_n(x)\cdot C_ny_n =$$

$$= C_1\underbrace{\left((y_1)^{(n)} + p_1(x)\cdot(y_1)^{(n-1)} + ... + p_n(x)\cdot y_1\right)}_{0} +$$

$$+ ... + C_n\underbrace{\left((y_n)^{(n)} + p_n(x)\cdot(y_n)^{(n-1)} + ... + p_n(x)\cdot y_n\right)}_{0} = 0$$

2. Докажем, что $y_{\text{о.о.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ.

   По условию теоремы $p_i(x)$ непрерывны на $[a;b]$ $\Rightarrow$ выполнены условия теоремы Коши о существовании и единственности решения *ЛОДУ*. Тогда решение $y_{\text{о.о.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ будет общим, если найдутся единственным образом C_i при произвольно заданных начальных условиях:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},\ \text{ где } x_0 \in [a;b]$$

   Требуем, чтобы решение и его производные этим начальным условиям:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + ... + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ ... \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского $W(x_0)$ линейно независимой системы решений однородного уравнения и $W(x_0) \neq 0$.

Следовательно существует единственное решение $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$ системы уравнений для произвольной точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ $\Rightarrow$ по определению решение $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ - есть общее решение *ЛОДУ*.

Теорема доказана

28. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пусть дано *ДУ* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$

Предположим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения этого *ЛОДУ*, следовательно:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \ \mid \cdot (-y_2) \\ \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \ \mid \cdot y_1 \end{cases} +$$

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p_1(x)\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$\frac{dW(x)}{dx} = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)\,W(x) = 0 - \text{ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{dW(x)}{dx} = -p_1(x)\,W(x)$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p_1(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dW(x)}{W(x)} = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx$$

$$\ln|W(x)| - ln|W(x_0)| = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx$$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \text{ - формула Остроградского-Лиувилля}$$

29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

Пусть дано *ЛОДУ* 2-го порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, y_1 - известное решение этого уравнения. Найдем второе частное решение, линейно независимое с y_1

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \quad (W \neq 0)$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} \ \Rightarrow$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx \ \Rightarrow \ y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

Докажем, что полученное второе решение линейно независимо с y_1:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx \\ y_1' & y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx + y_1\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} \end{vmatrix} =$$

$$= y_1y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx + y_1y_1\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} - y_1'y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx = e^{-\int p_1(x)dx} \neq 0 \ \ \forall x$$

$\Rightarrow \ y_1, \ y_2$ - линейно независимы

Таким образом, общее решение *ЛОДУ 2-го порядка*

$$y = C_1y_1 + C_2y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка)
Общее решение *НЛДУ* n-го порядка с непрерывными на $[a;b]$ коэфициентами $p_i(x),\ i=1,2,...,n$ и непрерывной на $[a;b]$ функцией $f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего *ЛОДУ* и какого-либо частного решения самого *НЛДУ*

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$$

Доказательство
НЛДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

1. Докажем, что $y_{\text{о.н.}}$ - решение этого *ДУ*:

По условию, $y_{\text{о.о.}}$ - решение соответствующего *ЛОДУ*, т.е.

$$y^{(n)}_{\text{о.о.}} + p_1(x)y^{(n-1)}_{\text{о.о.}} + ... + p_n(x)y_{\text{о.о.}} = 0$$

$y_{\text{ч.н.}}$ - частное решение самого *НЛДУ*, т.е.

$$y^{(n)}_{\text{ч.н.}} + p_1(x)y^{(n-1)}_{\text{ч.н.}} + ... + p_n(x)y_{\text{ч.н.}} = f(x)$$

Подставим $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$ в исходное *ЛНДУ:*

$$y^{(n)}_{\text{о.н.}} + p_1(x)y^{(n-1)}_{\text{о.н.}} + ... + p_n(x)y_{\text{о.н.}} = (y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}})^{(n)} + p_1(x)\cdot(y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}})^{(n-1)} +$$
$$+ ... + p_n(x)\cdot(y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}) = \underbrace{y^{(n)}_{\text{о.о.}} + p_1(x)y^{(n-1)}_{\text{о.о.}} + ... + p_n(x)y_{\text{о.о.}}}_{0} +$$
$$+ \underbrace{y^{(n)}_{\text{ч.н.}} + p_1(x)y^{(n-1)}_{\text{ч.н.}} + ... + p_n(x)y_{\text{ч.н.}}}_{f(x)} = f(x)$$

$\Rightarrow\ y_{\text{о.н.}}$ - решение *ДУ*

1. Докажем, что $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$ - общее решение *НЛДУ*

По теореме о структуре общего решения *ЛОДУ:*

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + y_{\text{ч.н.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_{\text{ч.н.}},$$

где y_i - линейно независимые частные решения соответствующего *ЛОДУ*, причем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \ \ \forall x \in [a;b]$$

Надо доказать, что если решение $y_{\text{о.н.}} = C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n+y_{\text{ч.н.}}$ и его производные удовлетворяют заданным условиям начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, то из этих условий можно единственным образом определить $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n,\ \ x_0 \in [a;b]$

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + ... + C_ny_n(x_0) = y_0 - y_{\text{ч.н.}}(x_0) \\ ... \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{\text{ч.н.}}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

СЛАУ с $W(x) \neq 0;\ x_0 \in [a;b] \ \Rightarrow\ \exists$ и $!\ {}_1 = {}^0_1,\ {}_2 = {}^0_2,\ ...,\ {}_n = {}^0_n\ :$

$$y(x) = C_1^0y_1(x) + C_2^0y_2(x) + ... + C_n^0y_n(x) + y_{\text{ч.н.}} - \text{ частное решение}$$

Теорема доказана

31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad a_1, a_2 = const$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ - квадратное уравнение.

$$D = a_1^2 - 4a_2;\ k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

В случае кратных корней: $D = 0$, т.е.

$$k = k_{1,2} = \frac{-a_1}{2} \iff a_1 = -2k$$

Первое частное решение: $y_1 = e^{kx}$

Найдем второе частное решение, линейно независимое с y_1:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = e^{kx} \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = x \cdot e^{kx}$$

ФСР: $y_1 = e^{kx},\ y_2 = x \cdot e^{kx}$

$$y_{\text{о.о.}} = {}_1 e^{kx} + {}_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$$

32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad a_1, a_2 = const$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ - квадратное уравнение.

$$D = a_1^2 - 4a_2;\ k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

В случае комплексных (комплексно-сопряженных) корней: $D < 0$, т.е.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \ \ (\beta \neq 0)$$

Рассмотрим $e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ - формула Эйлера

Выделим действительную и мнимую части решения:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \cdot (\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x) - (\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{2\alpha x}\cdot\big((\alpha\cos\beta x\sin\beta x + \beta\cos^2\beta x) - (\alpha\cos\beta x\sin\beta x - \beta\sin^2\beta x)\big) =$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0, \ \ \forall x \in [a; b], \ \ \text{т.к. } \beta \neq 0;\ e^{2\alpha x} > 0$$

$$\Rightarrow \text{ФСР: } y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_{\text{o.o.}} = {}_1e^{\alpha x}\cos\beta x + {}_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

Квазимногочленом называется сумма нескольких слагаемых вида

$$e^{\alpha x}\Big(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\Big) \qquad (\star)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Возьмем *ЛНДУ* с постоянными коэффициентами и с квазимногочленом $f(x)$ в правой части:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x), \;\; \forall a_i = const$$

Рассмотрим оответствующее *ЛОДУ*:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x),\ \forall a_i = const$, и квазимногочленом в правой части рекомендуется искать методом неопределённых коэффициентов (методом подбора). Для каждого слагаемого вида $(\star)$, входящего в правую часть решаемого уравнения, частное решение ищется в виде

$$x^r e^{\alpha x}\Big(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\Big) \qquad (\star\star)$$

где r - кратность корней $\alpha \pm \beta i$ в характеристическом уравнении ($r = 0$, если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения), $s = \max(n, m),\ R_s(x)$ и $T_s(x)$ - общий вид многочленов степени S.
Для нахождения неопределённых коэффициентов выражение $(\star\star)$ подставляется в соответствующее уравнение, и затем приравниваются коэффициенты при подобных членах слева и справа. После того, как частные решения найдены для всех слагаемых, входящих в $f(x)$, частное решение исходного уравнения определяется с помощью теоремы о наложении частных решений.

Теорема (о наложении частных решений)
Если $y_1(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_2(x)$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$, где $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y$.

Доказательство
По условию $y_1(x)$ - решение уравнения $L[y] = f_1(x),\ y_2(x)$ - решение уравнения $L[y] = f_2(x)$.
$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x) \;\Rightarrow$ Функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Теорема доказана

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),$$

функции $p_1(x),\ p_2(x)$ - непрерывны на $[a;b]$.
Рассмотрим оответствующее *ЛОДУ*:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

Пусть $y_1(x),\ y_2(x)$ - известная ФСР *ЛОДУ*. Будем искать решение *ЛНДУ* в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

где $C_1(x),\ C_2(x)$ - новые неизвестные функции, зависящие от x. Найдем производную $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) = \Big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\Big) = \Big(C_1(x)y_1(x)\Big)' + \Big(C_2(x)y_2(x)\Big)' = \\ = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) = \\ = \Big(C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)\Big) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

Дальше надо вычислять вторую производную. Воспользуемся тем обстоятельством, что вместо одной функции $y(x)$ мы ищем две функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, и, как следствие, можем наложить произвольную связь на эти функции. Для того, чтобы в выражении для второй производной не участвовали вторые производные функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$, в качестве этой связи положим

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \qquad (\star)$$

Тогда:

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

$$\begin{aligned} y''(x) = \Big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\Big)' = \Big(C_1(x)y_1'(x)\Big)' + \Big(C_2(x)y_2'(x)\Big)' = \\ = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) = \\ = \Big(C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)\Big) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \end{aligned}$$

Подставляем выражения для $y(x)$ и ее производных в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \Big(C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)\Big) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)\times \\ \times\Big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\Big) + p_2(x)\cdot\Big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\Big) = f(x) \end{aligned}$$

$$\Big(C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)\Big)+C_1(x)\cdot\underbrace{\Big(y_1''(x)+p_1(x)y_1'(x)+p_2(x)y_1(x)\Big)}_{=\,0,\text{ т.к. } y_1(x)-\text{решение ЛОДУ}}+$$

$$+\,C_2(x)\cdot\underbrace{\Big(y_2''(x)+p_1(x)y_2'(x)+p_2(x)y_2(x)\Big)}_{=\,0,\text{ т.к. } y_2(x)-\text{решение ЛОДУ}}=f(x)$$

Поэтому получаем:

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)\qquad(\star\star)$$

Уравнения $(\star),\ (\star\star)$ образуют **систему соотношений для варьируемых переменных**:

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0\\C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x)\end{cases}$$

определитель которой есть определитель Вронского линейно независимых решений $y_1(x),\ y_2(x)$, отличный от $0,\ \forall x\in[a;b]$. Решаем эту систему как *СЛАУ* относительно $C_1'(x),\ C_2'(x)$:

$$C_1'(x)=\varphi_1(x),\ C_2'(x)=\varphi_2(x)$$

Интегрируем:

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+C_1$$

$$C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+C_2$$

Общее решение *ЛНДУ* получаем, подставив $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$:

$$y(x)=\Big(\int\varphi_1(x)dx+C_1\Big)\cdot y_1(x)+\Big(\int\varphi_2(x)dx+C_2\Big)\cdot y_2(x)=$$

$$=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_1(x)\int\varphi_1(x)dx+y_2(x)\int\varphi_2(x)dx,$$

где $C_1,\ C_2$ - произвольные постоянные.

35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение

$$y^{(n)}(x) = F\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ ...,\ y^{(n-1)}(x)\Big),\ \ x \in [a;b]$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y^{(n)} = F(x,\ y,\ y',\ ...,\ y^{(n-1)})$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Метод сведения дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной к нормальной системе дифференциальных уравнений

Пусть функция $y = y(x)$ является решением *ДУ*

$$y^{(n)}(x) = F\Big(x,\ y(x),\ y'(x),\ ...,\ y^{(n-1)}(x)\Big),\ \ x \in [a;b]$$

Введем функции

$$y_1(x) = y(x),\ y_2(x) = y'(x),\ ...,\ y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

Тогда эти функции являются решениями нормальной системы

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x),\ \ x \in [a;b] \\ y_2'(x) = y_3(x),\ \ x \in [a;b] \\ \dots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x),\ \ x \in [a;b] \\ y_n'(x) = F\big(x,\ y_1(x),\ ...,\ y_n(x)\big),\ \ x \in [a;b] \end{cases}$$

36. Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Пусть функции $f_i(x,\ y_1,\ ...,\ y_n),\ i = 1, 2, ..., n$ определены и непрерывны для

$$\forall x \in [a; b],\ \ (y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Требуется определить функции $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$, являющиеся решениями нормальной системы *ДУ* на отрезке $[a; b]$

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1\big(x,\ y_1(x),\ ...,\ y_n(x)\big) \\ y_2'(x) = f_2\big(x,\ y_1(x),\ ...,\ y_n(x)\big) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n\big(x,\ y_1(x),\ ...,\ y_n(x)\big) \end{cases}$$

и удовлетворяющие начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_{01},\ y_2(x_0) = y_{02},\ ...,\ y_n(x_0) = y_{0n},$$

где x_0 - некоторая фиксированная точка на отрезке $[a; b]$, а $y_{01},\ y_{02},\ ...,\ y_{0n}$ - заданные вещественные числа.

Теорема Коши о существовании и единственности решения этой задачи
Пусть правые части системы

$$y_i' = f_i(x,\ y_1,\ ...,\ y_n),\ \ i = 1, ..., n,$$

определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $y_1,\ ...,\ y_n$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,y_1,..,y_n}$. Тогда для любой точки $(x_0,\ y_{10},\ ...,\ y_{n0}) \in G$ существует решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $y_i'(x_0) = y_{i0},\ \ i = 1, ..., n$. Любые два решения этой системы, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены.

Метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка (на примере системы 2-х уравнений)

Пусть имеется нормальная система *ДУ*

$$\begin{cases} y_1' = f_1\big(x,\ y_1,\ y_2\big) \\ y_2' = f_2\big(x,\ y_1,\ y_2\big) \end{cases}$$

Продифференцируем по x первое уравнение системы, и подставим в получившееся выражение $y_2'(x)$ из второго уравнения системы.

$$y_1'' = \frac{\partial f_1(x,\ y_1,\ y_2)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(x,\ y_1,\ y_2)}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1(x,\ y_1,\ y_2)}{\partial y_2} \cdot f_2(x,\ y_1,\ y_2)$$

Из первого уравнения определим y_2 как функцию от $x,\ y_1,\ y_1'$, т.е. $y_2 = y_2(x,\ y_1,\ y_1')$ и подставим эту функцию вместо y_2 в полученное выше равенство. Таким образом, следствием данной системы является дифференциальное уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции $y_1 = y_1(x)$.

37. Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений.

Функция $\Phi : G \to \mathbb{R}$ называется **первым интегралом** нормальной системы дифференциальных уравнений, если для любого решения этой системы $y_i = y_i(x),\ i = 1, ..., n$, заданного на некотором интервале I, функция

$$\Phi\big(x,\ y_1(x),\ ...,\ y_n(x)\big)$$

постоянна на этом интервале.

Теорема (об условиях, при которых функция является первым интегралом системы)
Пусть в системе правые части непрерывно дифференцируемы в области G по всем переменным. Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $\Phi : G \to \mathbb{R}$ была первым интегралом этой системы необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции, составленная в силу системы, равнялась нулю всюду в области G.

Применение первых интегралов для решения системы дифференциальных уравнений

Если известен первый интеграл Φ системы *ДУ*, то, разрешая уравнение

$$\Phi(x,\ y_1,\ ...,\ y_n) = C$$

относительно, например, y_n, получим

$$y_n = y_n(x,\ y_1,\ ...,\ y_{n-1},\ C)$$

Подставляя правую часть этого равенства вместо y_n в первые $n-1$ уравнений системы, мы перейдем к системе из $n-1$ уравнений относительно $n-1$ неизвестных функций. Таким образом, первый интеграл дает возможность понизить число уравнений в системе на 1.
Если найдены n независимых первых интегралов системы:

$$\Phi_1 = (x,\ y_1,\ ...,\ y_n) = C_1$$
$$\dots$$
$$\Phi_n = (x,\ y_1,\ ...,\ y_n) = C_n$$

то, разрешая эти уравнения относительно $y_1,\ ...,\ y_n$, получим общее решение исходной системы:

$$y_1 = y_1(x,\ C_1,\ ...,\ C_n),\ ...,\ y_n = y_n(x,\ C_1,\ ...,\ C_n)$$

Формулы

Таблица простейших интегралов

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ \ a > 0, \ a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \ \ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ \ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{a}\int \frac{a+x-x}{(x-a)(x+a)}dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{d(x-a)}{x-a} + \frac{1}{2a}\int \frac{-2xdx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x-a)}{x-a} + \frac{1}{2a}\int \frac{-2xdx}{x^2-a^2} =$$
$$= \frac{1}{a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\int \frac{d(x^2-a^2)}{x^2-a^2} = \frac{2}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x^2-a^2| + C =$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{\big(|x-a|\big)^2}{|(x-a)(x+a)|} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \ \ a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

таким образом функция $\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)$ - есть первообразная функции $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Вычисление площадей плоских фигур

1. В декартовой ПСК:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx, \;\; a < b, \; f(x) \geq 0 \quad \text{– явное задание функции } f(x)$$

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \;\; a < b, \; f(x) \geq 0 \quad \text{– параметрическое задание функции } \begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$$

2. В полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi, \;\; \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

Вычисление объемов тел вращения

1. Объем фигуры, ограниченной осью Ox, кривой $y = f(x)$ и линиями $x = a,\ x = b$, образованной вращением вокруг оси Ox

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

2. Объем фигуры, ограниченной осью Oy, кривой $x = g(y)$ $\big($ где $g(y) = f^{-1}(y)$ $\big)$ и линиями $y = c,\ y = d$, образованной вращением вокруг оси Oy

$$V = \pi \int\limits_c^d g^2(y)dy$$

3. Объем фигуры, ограниченной осью Ox, кривой $y = f(x)$ и линиями $x = a,\ x = b$, образованной вращением вокруг оси Oy

$$V = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)dx$$

4. Объем фигуры, заданной в полярных координатах, ограниченной линиями $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$, функцией $r = r(\varphi)$, образованной вращением вокруг оси Ox

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi) \sin\varphi d\varphi$$

Вычисление длины дуги

1. Дуга задана кривой $y = f(x)$

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \Big(f'(x)\Big)^2} dx, \quad b > a$$

2. Дуга задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} dt, \ \ t_2 > t_1$$

3. Дуга задана в полярной системе координат кривой $r = r(\varphi), \ \ \alpha \le \varphi \le \beta$

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \big(r'(\varphi)\big)^2} d\varphi$$