

Copyright botva

Привет! Это BOTVA ИУ6, точнее малая ее часть.

Пользоваться и распространять файлы конечно же можно. Если вы нашли ошибку в файле, можете исправить ее в исходном коде и подать на слияние или просто написать в issue.

Если возникнут вопросы, пишите в комментарии под постом файла в tg.

Приятного бота)

[GitHub](#)



@BOTVA_ITS6

Подготовка к экзамену

Интегралы и дифференциальные уравнения

Над файлом работали:

fīixii, pluttan

Оглавление

Определения и понятия	4
Вопросы для подготовки к экзамену	9
1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределенного интеграла.	9
2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. . .	13
3, 4, 5, 6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенного интегралом знака подынтегральной функции (теорема 6). Доказать теорему об оценке определенного интеграла (теорема 9). Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла (теорема 8). Доказать теорему о среднем для определенного интеграла (теорема 11).	15
7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.	20
8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.	21
9. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определённого интеграла. .	22
10. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла. . .	23
11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.	24
12,13,14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода. .	25
15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов.	28
16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.	29
17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ - полярные координаты точки, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.	30
18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.	31
19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y - декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.	32
20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ - полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.	34
21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод " $u \cdot v$ ") и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).	35
22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка.	38
23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.	40

24, 25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.	42
26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.	45
27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.	46
28. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.	48
29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.	49
30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.	50
31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.	52
32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.	53
33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.	54
34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.	56
35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.	58
36. Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.	59
37. Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений.	61

Формулы	62
Таблица простейших интегралов	62
Вычисление площадей плоских фигур	64
Вычисление объемов тел вращения	65
Вычисление длины дуги	66

Определения и понятия

1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, на некотором интервале, если для любого x из этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.
2. Множество всех первообразных функций $f(x)$ на $(a; b)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$

3. Если в рациональной дроби $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ степень числителя меньше степени знаменателя ($m < n$), то дробь - **правильная**. В противном случае ($m \geq n$), дробь - **неправильная**.
4. **Простейшими** дробями 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов называют правильные рациональные дроби следующего типа:

$$1) \frac{A}{x-a}$$

$$2) \frac{A}{(x-a)^k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > 1$$

$$3) \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad D = p^2 - 4q < 0$$

$$4) \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad D = p^2 - 4q < 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > 1$$

5. **Определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы, при условии, что n (число отрезков разбиения) неограниченно растет, а максимальная из длин отрезков разбиения $\max_k \Delta x_k \rightarrow 0$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

6. Функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на отрезке $[a; b]$, если существует предел интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$ и $\max_k \Delta x_k \rightarrow 0$.

7. Функция $Y(x) = \int_a^x f(t)dt$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом**, где $[a, x] \subset [a, b]$.

8. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, +\infty)$. Тогда предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ называют **несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом (несобственный интеграл 1-го рода)** и обозначают:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

9. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл 1 рода называется **сходящимся**. Если этот предел не существует или равен ∞ , то несобственный интеграл 1 рода называется **расходящимся**.

10. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. **Несобственным интегралом 2-го рода** от функции, имеющей разрыв:

(а) в правом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

(б) в левом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

(с) внутри отрезка (в точке $c \in (a, b)$), называется сумма пределов определенных интегралов:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

и обозначается как:

$$\int_a^b f(x) dx$$

11. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. Несобственный интеграл 2-го рода от функции, имеющий разрыв в правом (левом) конце отрезка называется **сходящимся**, если существует и конечен предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad \text{— (разрыв в правом конце отрезка)}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad \text{— (разрыв в левом конце отрезка)}$$

Несобственный интеграл 2-го рода от функции, имеющий разрыв в точке $c \in (a, b)$ (внутри отрезка $[a, b]$) называется **сходящимся**, если существуют и конечны пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

12. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если несоб-

ственный интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции $\int_a^b |f(x)| dx$ схо-

дится.

13. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а несобственный интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится.

14. **Обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка** называется уравнение, зависящие от одной независимой переменной x , неизвестной функции $y = f(x)$ и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$ до n -го порядка включительно.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

15. **Порядком дифференциального уравнения** называется максимальный порядок производной, входящей в это ДУ.
16. **Решением (любым) ДУ** называется функция $y = \varphi(x)$ такая, что после подстановки ее и ее производных: $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ в ДУ, получается верное тождество, т.е.

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

17. Нахождение решения ДУ называется **интегрированием ДУ**.

18. График решения ДУ называется **интегральной кривой**.

19. **Задачей Коши** называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

20. **Общим решением ДУ n -го порядка** называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, такая что:

- (а) При любых допустимых значениях постоянных C_1, C_2, \dots, C_n функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

является решением ДУ;

- (б) Каковы бы ни были начальные условия, можно единственным образом так подобрать значения постоянных $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, чтобы решение

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$$

удовлетворяла начальным условиям.

21. **Частным решением ДУ** называется решение, получаемое из общего решения при каких-либо конкретных значениях постоянных.

22. ДУ с разделяющимися переменными называется ДУ 1-го порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \text{ или}$$

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

где функции $f(x)$, $f_{1,2}(x)$ зависят только от x , а функции $g(y)$, $g_{1,2}(y)$ - только от y .

23. Функция $f(x, y)$ называется **однородной** функцией степени n относительно переменных x и y , если $\forall t$ справедливо равенство:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

24. ДУ $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ называется **однородным**, если функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ являются однородными функциями одинаковой степени однородности.

25. ДУ вида

$$y' + p(x)y = q(x)$$

где $p(x)$, $q(x)$ - непрерывные функции, называют **линейным ДУ 1-го порядка**.

Если $q(x) = 0$, то ЛДУ называют **однородным**. В противном случае ($q(x) \neq 0$) ЛДУ называют **неоднородным**.

26. ДУ вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$

называется *уравнением Бернулли*.

27. **Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка** называется уравнение, являющееся линейным относительно неизвестной функции y и всех ее производных, то есть ДУ вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x),$$

где $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, $g(x)$ - заданные на некотором интервале функции.

Если $g(x) = 0$, то ЛДУ называют **однородным (ЛОДУ n -го порядка)**. В противном случае ($g(x) \neq 0$) ЛДУ называют **неоднородным (ЛНДУ n -го порядка)**.

28. **Дифференциальным оператором $L[y]$** называется выражение вида:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

29. Система функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на $[a; b]$, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные 0, такие, что на $[a; b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

30. Система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ называется **линейно независимой** на $[a; b]$, если на $[a; b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

только когда $\forall \alpha_i = 0$.

31. **Определитель Вронского** функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

32. Совокупность любых n линейно независимых частных решений *ЛОДУ n -го порядка* называют его **фундаментальной системой решений (ФСР)**.

33. *ДУ* вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

где $\forall a_i = \text{const}$, называется **ЛОДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами**.

34. **Квазимногочленом** называется сумма нескольких слагаемых вида

$$e^{\alpha x} \left(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right) \quad (\star)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределенного интеграла.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, на некотором интервале, если для любого x из этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Свойства первообразной

Теорема 1

Если $F(x)$ - есть первообразная функции $f(x)$ на $(a; b)$, то функция $F(x) + C$, где $C = const$, также является первообразной для этой функции на $(a; b)$.

Доказательство

По условию $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $(a; b)$ $\stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \forall x \in (a; b) \quad F'(x) = f(x)$
 $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) \stackrel{\text{по опр.}}{\Rightarrow} F(x) + C$ - первообразная $f(x)$ на $(a; b)$.

Теорема доказана

Теорема 2

Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема на $(a; b)$, и $\forall x \in (a; b) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$, то эта функция - константа на $(a; b)$.

Доказательство

Пусть d - некоторая фиксированная точка интервала $(a; b)$, а x - любая точка этого интервала. Тогда отрезок $[x, d]$ или соответственно $[d, x]$ целиком принадлежит интервалу $(a; b)$, поэтому функция $\varphi(x)$ дифференцируема (а следовательно, и непрерывна) на этом отрезке. Применим теорему Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(d) = \varphi'(\varepsilon)(x - d), \quad \varepsilon \in (x; d)$$

$\Rightarrow \varepsilon \in (a; b)$, но по условию теоремы $\forall x \in (a; b) \quad \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(\varepsilon) = 0$.

Тогда $\varphi(x) - \varphi(d) = 0 \Rightarrow \forall x \in (a; b) \quad \varphi(x) = \varphi(d)$.

Теорема доказана

Теорема 3 (основная теорема о первообразной)

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - любые первообразные функции $f(x)$ на некотором интервале $(a; b)$, то $\forall x \in (a; b)$ выполняется $F_1(x) - F_2(x) = C = const$.

Доказательство

Обозначим $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$.

$F_1(x), F_2(x)$ - первообразные функции $f(x) \Rightarrow$ они дифференцируемы на интервале $(a; b)$ по условию \Rightarrow функция $\Phi(x)$ также дифференцируема на $(a; b) \Rightarrow \Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) =$

$$f(x) - f(x) = 0.$$

Имеем: $\forall x \in (a; b) \quad \Phi'(x) = 0 \stackrel{\text{по Th.2}}{\Rightarrow} \Phi(x) - \text{константа.}$

Теорема доказана

Множество всех первообразных функций $f(x)$ на $(a; b)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C,$

$f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла

Теорема 1

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Доказательство

$$\left(\int f(x)dx \right)' \stackrel{\text{по опр.}}{=} (F(x) + C)' = F'(x) \stackrel{\text{по опр.}}{=} f(x)$$

Теорема доказана

Теорема 2

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$$

Доказательство

$$d\left(\int f(x)dx \right) = \left(\int f(x)dx \right)' dx \stackrel{\text{по Th.1}}{=} f(x)dx$$

Теорема доказана

Теорема 3

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной $C = \text{const.}$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad C = \text{const}$$

Доказательство

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx \stackrel{\text{по опр.}}{=} F(x) + C$$

Теорема доказана

Теорема 4

Неопределенный интеграл алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых.

$$\int (f_1(x) \pm \dots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx$$

Доказательство

Возьмем дифференциал от правой части:

$$\begin{aligned} d\left(\int f_1(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx\right) &= d\int f_1(x)dx \pm \dots \pm d\int f_n(x)dx = \\ &= f_1(x)dx \pm \dots \pm f_n(x)dx = (f_1(x) \pm \dots \pm f_n(x))dx \end{aligned}$$

т.е.

$$d\left(\int f_1(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx\right) = (f_1(x) \pm \dots \pm f_n(x))dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей полученного равенства:

$$\begin{aligned} \int d\left(\int f_1(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx\right) &= \int (f_1(x) \pm \dots \pm f_n(x))dx \\ \int f_1(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx &= \int (f_1(x) \pm \dots \pm f_n(x))dx \end{aligned}$$

Теорема доказана

Теорема 5

Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

Доказательство

Возьмем дифференциал от правой части:

$$d\left(k \int f(x)dx\right) = k \cdot d\left(\int f(x)dx\right) = k \cdot f(x)dx$$

Возьмем интеграл от обеих частей полученного равенства:

$$k \int f(x)dx = \int k \cdot f(x)dx$$

Теорема доказана

Теорема 6 (об инвариантности неопределенного интеграла)

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ - произвольная функция, дифференцируемая на интервале $(a; b)$, то:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Доказательство

По условию $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тогда $\forall x \in (a; b) : F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$, и по св-ву инвариантности формы 1-го дифференциала $dF(u) = f(u)du$, где $u = \varphi(x)$ - любая дифференцируемая функция на $(a; b)$.

Возьмем интеграл от обеих частей $dF(u) = f(u)du$:

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$$

Теорема доказана

2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

Простейшими дробями 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов называют правильные рациональные дроби следующего типа:

1. $\frac{A}{x-a}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, k \in \mathbb{Z}, k > 1$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, D=p^2-4q < 0$
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, D=p^2-4q < 0, k \in \mathbb{Z}, k > 1$

Интегрирование простейших дробей

1. $\int \frac{A}{x-a} dx$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \int \frac{1}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$. В числителе выделяем производную знаменателя и полученный интеграл представляем в виде суммы 2-х интегралов

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} &= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \cdot \int \frac{(2x+p) + (\frac{2N}{M} - p)}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \cdot \int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q} dx + \\ &+ \frac{M}{2} \cdot \int \frac{(\frac{2N}{M} - p)}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \cdot \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (N - \frac{pM}{2}) \cdot \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} = \\ &= \frac{M}{2} \cdot \ln|x^2+px+q| + (N - \frac{pM}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \end{aligned}$$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx &= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{(2x+p) + (\frac{2N}{M} - p)}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{M}{2} \cdot \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \\ &+ \frac{2N-pM}{2} \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^k} = \frac{M}{2} \cdot \frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2N - pM}{2} \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^k} \\
I_k &= \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^k} = \left| t = x + \frac{p}{2}, dx = dt, a = q - \frac{p^2}{4} \right| = \\
&= \int \frac{dt}{(t^2 + a)^k} = \frac{1}{a} \int \frac{(a + t^2) - t^2}{(t^2 + a)^k} dt = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{(t^2 + a)^{k-1}} - \frac{1}{a} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a)^k} = \\
&= \frac{1}{a} \cdot I_{k-1} - \frac{1}{a} \int \frac{\frac{t}{2} \cdot d(t^2 + a)}{(t^2 + a)^k} = \frac{1}{a} \cdot I_{k-1} - \frac{1}{a} \int \frac{t}{2(-k+1)} \frac{(-k+1)}{(t^2 + a)^k} d(t^2 + a) = \\
&= \frac{1}{a} \cdot I_{k-1} - \frac{1}{a \cdot 2(-k+1)} \int t \cdot d\left(\frac{1}{(t^2 + a)^{k-1}}\right) = \\
&= \left| u = t, du = dt; dv = d\left(\frac{1}{(t^2 + a)^{k-1}}\right), v = \frac{1}{(t^2 + a)^{k-1}} \right| = \\
&= \frac{1}{a} \cdot I_{k-1} - \frac{1}{2a(1-k)} \cdot \left(\frac{t}{(t^2 + a)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + a)^{k-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{a} \cdot I_{k-1} - \frac{t}{2a(1-k)(t^2 + a)^{k-1}} + \frac{I_{k-1}}{2a(1-k)} = \\
&= I_{k-1} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a(1-k)} \right) + \frac{t}{2a(k-1)(t^2 + a)^{k-1}}
\end{aligned}$$

Получили рекуррентную формулу для I_k , причем при $k = 1$ получим:

$$\int \frac{dt}{t^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{a}} + C$$

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших)

Правильная рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, ($m < n$), где $P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$ может быть единственным образом представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned}
\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} &= \frac{1}{a_0} \left(\frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{B_1}{(x - x_s)} + \frac{B_2}{(x - x_s)^2} + \right. \\
&+ \dots + \frac{B_{k_s}}{(x - x_s)^{k_s}} + \frac{C_1x + D_1}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \frac{C_{l_1}x + D_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \\
&\left. + \dots + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_tx + q_t)} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_tx + q_t)^2} + \frac{M_{l_t}x + N_{l_t}}{(x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}} \right)
\end{aligned}$$

где $A_1, \dots, A_{k_1}, B_1, \dots, B_{k_s}, C_1, \dots, C_{l_1}, D_1, \dots, D_{l_1}, M_1, \dots, M_{l_t}, \dots, N_1, \dots, N_{l_t}$ - неизвестные коэффициенты, которые требуется найти.

3, 4, 5, 6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции (теорема 6). Доказать теорему об оценке определенного интеграла (теорема 9). Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла (теорема 8). Доказать теорему о среднем для определенного интеграла (теорема 11).

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм при $n \rightarrow \infty$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_k$$

Свойства определенного интеграла

Теорема 1

$$\int_a^b (f_1(x) \pm \dots \pm f_m(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \dots \pm \int_a^b f_m(x) dx$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) \pm \dots \pm f_m(x)) dx &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (f_1(\xi_i) \pm \dots \pm f_m(\xi_i)) \Delta x_i = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i \pm \dots \pm \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f_m(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f_1(x) dx \pm \dots \pm \int_a^b f_m(x) dx \end{aligned}$$

Теорема доказана

Теорема 2

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Доказательство

$$\int_a^b c f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (c f(\xi_i)) \Delta x_i = c \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i)) \Delta x_i = c \int_a^b f(x) dx$$

Теорема доказана

Теорема 3

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a)$$

Доказательство

$$\int_a^b c \, dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b - a)$$

Теорема доказана

Теорема 4

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

Доказательство

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = - \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_{i-1} - x_i) = - \int_b^a f(x) \, dx$$

Теорема доказана

Теорема 5

Для любых a, b, c , расположенных в интервале интегрирования функции $f(x)$,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx,$$

Если все эти три интеграла существуют.

[3] Теорема 6 (о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции)

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) на этом отрезке, то $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ (≤ 0)

Доказательство

Так как функция $f(x)$ интегрируема, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Пусть по условию:

$$f(\xi_i) \geq 0, \Delta x_i > 0 \Rightarrow f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow по теореме о сохранении функцией знака своего предела:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geq 0$$

При $f(x) \leq 0$ аналогично.

Теорема доказана

Теорема 7

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и на этом отрезке выполняется $f(x) \geq \varphi(x)$ ($f(x) \leq \varphi(x)$), тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx \quad (\leq)$$

[5] Теорема 8 (об оценке модуля определенного интеграла)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Доказательство

По условию функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда по теореме Вейерштрасса

$$\forall x \in [a; b] \quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

По предыдущей теореме

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Теорема доказана

[4] Теорема 9 (об оценке определенного интеграла)

Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$, интегрируемой на $[a; b]$, то выполняется неравенство:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Доказательство

По условию:

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M,$$

где $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$

$f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, следовательно:

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \\ m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \end{aligned}$$

Теорема доказана

Теорема 10

Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$, интегрируемой на $[a; b]$, и функция $\varphi(x) \geq 0$ - интегрируема на $[a; b]$, то

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

[6] Теорема 11 (о среднем)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a; b]$, то $\exists c \in (a; b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx$$

Доказательство

По условию функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b] \Rightarrow$ по Th Вейерштрасса $\forall x \in [a; b] \ m \leq f(x) \leq M$, где $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x) \quad (\varphi(x) > 0)$$

По теореме 10:

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx > 0 \Rightarrow$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Коши $\exists c \in (a; b)$ такая, что

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \Rightarrow$$

$$f(c) \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$$

Теорема доказана

7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.

Функция $Y(x) = \int_a^x f(t)dt$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом**, где $[a, x] \subset [a, b]$.

Теорема (о производной от интеграла по его верхнему пределу)

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой точке x этого отрезка. Тогда функция

$$Y(x) = \int_a^x f(t)dt$$

дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $Y' = f(x)$.

Доказательство

По определению:

$$Y(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$Y(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt, \quad x + \Delta x \in [a, b]$$

$$\text{Тогда приращение } \Delta Y = Y(x + \Delta x) - Y(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

По условию теоремы $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ (по теореме о среднем) $\Delta Y = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x$, где $c \in (x, x + \Delta x)$.

По определению производной:

$$Y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x),$$

так как $\Delta x \rightarrow 0$ и $x < c < x + \Delta x$, то $c \rightarrow x$.

Теорема доказана

8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.

Свойства определенного интеграла см. в [3](#), [4](#), [5](#), [6](#)

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Доказательство

Одной из первообразных функции $f(x)$ является

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Две первообразные функции $f(x)$ различаются, самое большее, на константу, т.е.

$$\Phi(x) - F(x) = \Phi(x) - \int_a^x f(t)dt = C$$

Подставляя сюда $x = a$, получаем, что $C = \Phi(a)$. Поэтому

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$$

При $x = b$ получим:

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

*не важно, какой буквой обозначается переменная, поэтому можно заменить t на x , чтобы получить в точности доказываемое выражение.

Теорема доказана

9. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определённого интеграла.

Теорема (об интегрировании подстановкой для определённого интеграла)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, функции $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $f(\varphi(t))$ - непрерывны на $[\alpha; \beta]$, где $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство

Пусть $F(x)$ - какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на $[a; b]$. Р/м сложную функцию $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. Найдем ее производную:

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Отсюда следует, что $\Phi(t)$ является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема доказана

10. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла.

Теорема (об интегрировании по частям для определённого интеграла)

Если функции $U(x)$ и $V(x)$ непрерывно дифференцируемы на $(a; b)$, то $\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU$

Доказательство

$$d(UV) = U dV + V dU \Rightarrow U dV = d(UV) - V dU$$

$U(x)$ и $V(x)$ непрерывны на $[a; b]$, $\Rightarrow \exists$ определённый интеграл от функций:

$$\int_a^b U dV = \int_a^b d(UV) - \int_a^b V dU$$

Теорема доказана

11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Свойства определенного интеграла см. в [3](#), [4](#), [5](#), [6](#)

Интегрирование периодических функций:

Если $f(x)$ - периодическая функция, непрерывная на $[a; a + T]$, где T - ее период, то $\forall a \in \mathbb{R}$ и $T > 0$:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат:

Пусть $f(x)$ - четная функция на $[-a; a]$, т.е. $\forall x \in [-a; a] : f(x) = f(-x)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \left| \begin{array}{ll} x = -t & dx = -dt \\ t_1 = a & x_1 = -a \\ x_2 = 0 & t_2 = 0 \end{array} \right| = \\ &= \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \end{aligned}$$

Пусть $f(x)$ - нечетная функция на $[-a; a]$, т.е. $\forall x \in [-a; a] : -f(x) = f(-x)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \left| \begin{array}{ll} x = -t & dx = -dt \\ x_1 = -a & t_1 = a \\ x_2 = 0 & t_2 = 0 \end{array} \right| = \\ &= \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)dx = - \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = 0 \end{aligned}$$

12,13,14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, +\infty)$. Тогда предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ называют **несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом (несобственный интеграл 1-го рода)** и обозначают:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

*аналогично определение несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом.

[12] признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда:

1. если сходится $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$
2. если расходится $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

Доказательство

1) По условию $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится \Rightarrow по определению \exists конечный $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = M$, а значит:

$$\forall b > a : \int_a^b g(x) dx \leq M$$

По условию, $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство: $0 \leq f(x) \leq g(x)$

По теореме об интегрировании неравенства:

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq M$$

Таким образом:

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq M$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \leq \lim_{b \rightarrow \infty} M$$

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq M,$$

из полученного выше следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

2) По условию $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится. Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, вопреки теореме. Но в таком случае, по доказанному выше, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ - сходится. Это противоречит условию теоремы, а значит, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ расходится.

Теорема доказана

[13] предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

Если функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и существует конечный предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

По условию существует конечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то есть по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) > 0 : \forall x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon \quad | \cdot g(x) > 0$$

$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \quad (1)$$

Пусть $a > M$. Подберем ε так, чтобы $\lambda - \varepsilon > 0$

1) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Тогда, т.к. из (1) $\Rightarrow (\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x)$, можно применить признак сходимости по неравенству:

$\int_a^{+\infty} (\lambda - \varepsilon)g(x) dx$ - сходится. Тогда и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится (по свойству линейности).

2) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится. Тогда по свойству линейности будет сходиться $\int_a^{+\infty} (\lambda + \varepsilon)g(x) dx$.

Из (1) $\Rightarrow f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$, тогда по признаку сходимости по неравенству, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ - сходится.

3) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится. Тогда, т.к. из (1) $\Rightarrow f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$, можно применить признак сходимости по неравенству:

$\int_a^{+\infty} (\lambda + \varepsilon)g(x)dx$ - расходится, а значит и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ - расходится.

4) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда по свойству линейности будет расходиться $\int_a^{+\infty} (\lambda - \varepsilon)g(x)dx$.

Из (1) $\Rightarrow (\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x)$, тогда по признаку сходимости по неравенству, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ - расходится.

Теорема доказана

[14] признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и знакопеременная в $[a, +\infty)$, и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (последний интеграл называют абсолютно сходящимся).

Доказательство

По условию $f(x)$ непрерывна в $[a, +\infty) \Rightarrow \forall x \in [a, +\infty) : f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$

По условию $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится $\Rightarrow 2 \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ тоже сходится \Rightarrow (по признаку сходимости

по неравенству) $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx$ сходится \Rightarrow

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)|dx}_{\text{сходится}}$$

Таким образом, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится.

Теорема доказана

15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. **Несобственным интегралом 2-го рода** от функции, имеющей разрыв:

1. в правом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

2. в левом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

3. внутри отрезка (в точке $c \in (a, b)$), называется сумма пределов определенных интегралов:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

и обозначается как:

$$\int_a^b f(x) dx$$

признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода

(они аналогичны признакам сходимости несобственных интегралов 1-го рода)

Теорема 1

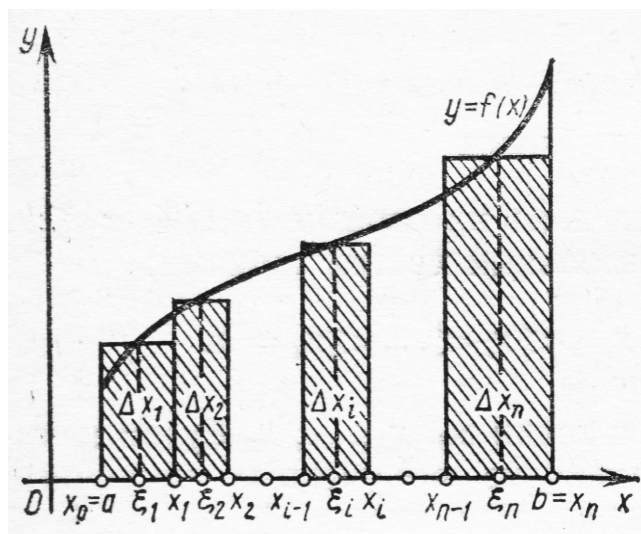
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда:

1. если сходится $\int_a^b g(x) dx$, то сходится и $\int_a^b f(x) dx$
2. если расходится $\int_a^b f(x) dx$, то расходится и $\int_a^b g(x) dx$

Теорема 2

Если функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ непрерывны на $[a, b]$ и $f(b) = \infty$, $g(b) = \infty$ и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.



Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, и осью Ox . разобьем основание на n частичных отрезков точками:

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b, \text{ где}$$

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Проведем прямые через эти точки, перпендикулярно оси абсцисс.

Внутри каждого отрезка зафиксируем $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$

Тогда $S_k = f(\xi_k)\Delta x_k$ - площадь k -го прямоугольника с высотой $f(\xi_k)$ и шириной Δx_k . Эта площадь, при условии $\Delta x_k \rightarrow 0$, будет приблизительно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной $y = f(x)$, $x = x_{k-1}$, $x = x_k$, и осью Ox .

Составим интегральную сумму - сумму вида:

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k, \text{ где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Эта сумма приблизительно равна искомой площади криволинейной трапеции, причем это приближение становится более точным, если n будет неограниченно расти, а длины отрезков разбиения Δx_k , соответственно, уменьшаться. Предел интегральной суммы при перечисленных выше условиях будет равен, по определению, определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$, и будет равен, исходя из всех рассуждений выше, искомой площади криволинейной трапеции. Таким образом,

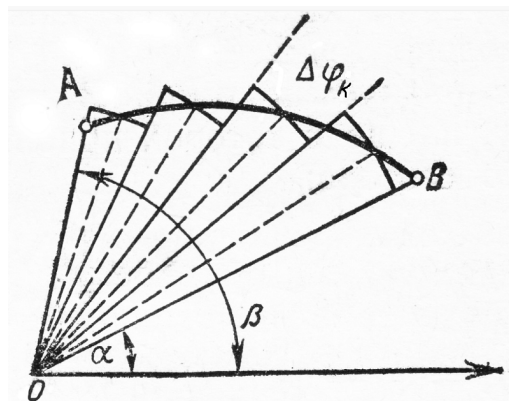
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ - полярные координаты точки, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.

Пусть криволинейный сектор ограничен отрезками лучей $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ - функция, непрерывная на отрезке $[\alpha; \beta]$. Тогда площадь этого криволинейного сектора:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Вывод



Разобьем криволинейный сектор лучами на n частичных криволинейных секторов

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta, \quad \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$$

В каждом частичном веткоре возьмем: $\tilde{\varphi}_k \in \Delta\varphi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$

При малых $\Delta\varphi_k$ справедливо $S_{\text{крив. сектора}} \approx S_{\text{кругового сектора}}$

В свою очередь,

$$S_{\text{круг. сектора}} = \frac{1}{2} \rho_k^2 \cdot \Delta\varphi_k = S_k$$

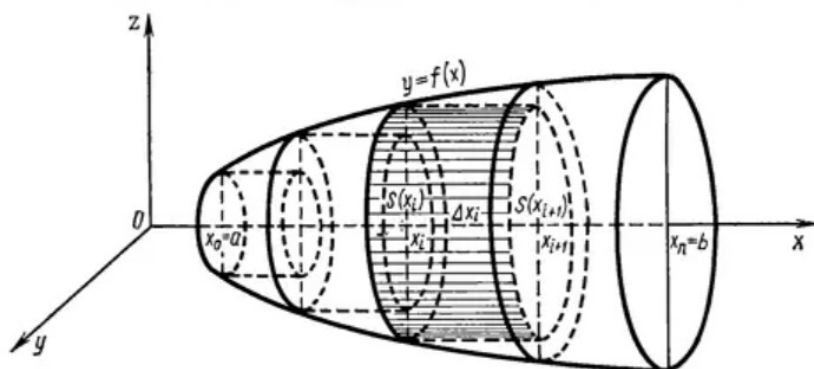
$$S = \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho^2(\tilde{\varphi}_k) \cdot \Delta\varphi_k$$

Получили интегральную сумму для функции $\rho^2(\varphi)$.

$\rho(\varphi)$ - непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \rho^2(\varphi)$ - тоже непрерывна на $[a, b]$, следовательно существует конечный интеграл:

$$S = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta\varphi_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \rho^2(\tilde{\varphi}_k) \cdot \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.



Пусть тело M заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и пусть для каждой точки $x \in [a; b]$ известна площадь $S(x) = \pi f^2(x)$ фигуры, получающейся в сечении тела M плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через указанную точку.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Тогда объем V_i части M_i тела, расположенной между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, при достаточно малом $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, приблизительно равен объему цилиндра с площадью основания $S(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и высотой Δx_i :

$$V_i = S(\xi_i) \Delta x_i$$

Рассмотрим сумму $\sum_{i=0}^n V_i$ в пределе при $n \rightarrow \infty$ и $\max_k \Delta x_i \rightarrow 0$ (далее эти условия обозначаются "..."):

$\lim_{\dots} \sum_{i=0}^n V_i$, с одной стороны, равен искомому объему вращения V (с учетом всего сказанного выше).

С другой же,

$$\lim_{\dots} \sum_{i=0}^n V_i = \lim_{\dots} \sum_{i=0}^n S(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Таким образом,

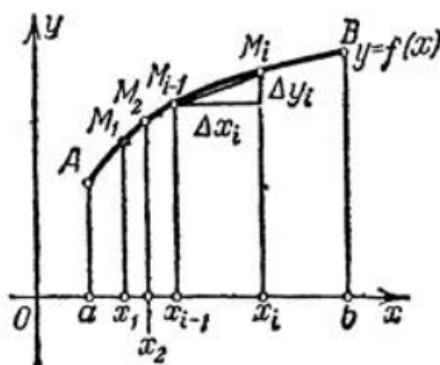
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y - декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ - функция, непрерывная на $[a; b]$ и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке, тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Покажем это:



Разобьем дугу AB на n частей точками M_0, M_1, \dots, M_n , абсциссы которых $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Соединив соседние точки отрезками, получим ломаную, вписанную в дугу AB . Обозначим длины отрезков $M_{i-1}M_i$ за l_i , тогда длина ломаной

$$l_{\text{ломанной}} = l_1 + l_2 + \dots + l_n = \sum_{i=1}^n l_i$$

Длиной l дуги AB кривой $y = f(x)$ называется предел длины вписанной в нее ломаной, когда число ее звеньев неограниченно растет, а наибольшая из длин звеньев длины стремится к 0, т.е.

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n l_i$$

*При этом предполагается, что этот предел существует и не зависит от выбора точек.

Кривые, для которых существует этот предел, называют спрямляемыми.**

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости, имеем:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \text{ или}$$

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}, \text{ где}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

По теореме Лагранжа,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Тогда

$$l_i = \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$$

и длина вписанной ломаной:

$$l_{\text{ломанной}} = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} - \text{интегральная сумма}$$

Так как $f'(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то и $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ непрерывна на $[a; b]$, поэтому существует предел интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ - полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Кривая задана в полярных координатах в виде $r = f(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тогда

$$\begin{cases} x(\varphi) = r \cos \varphi \\ y(\varphi) = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_\varphi = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ y'_\varphi = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases}$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}, \quad dx = x'_\varphi d\varphi, \quad a = x(\alpha), \quad b = x(\beta)$$

Подставим все в формулу длины дуги кривой, заданной в полярных координатах:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}\right)^2} x'_\varphi d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 \cos^2 \varphi - 2r'r \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + (r')^2 \sin^2 \varphi + 2r'r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi \\ l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi \end{aligned}$$

21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод “ $u \cdot v$ ”) и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - непрерывные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка (ЛДУ1)**

Если $q(x) = 0$, то ЛДУ1 называют **однородным (ОЛДУ1)**

В противном случае ($q(x) \neq 0$) ЛДУ1 называют **неоднородным (НЛДУ1)**

Интегрирование НЛДУ1 методом Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Решение будем искать в виде $y = U \cdot V$, где $U = U(x)$, $V = V(x)$ - новые неизвестные функции.

Тогда

$$y' = U'V + V'U$$

$$U'V + V'U + p(x) \cdot UV = q(x)$$

Выносим за скобки одну из новых функций:

$$V(U' + p(x) \cdot U) + UV' = q(x)$$

Функции U и V будем искать из условий:

$$\begin{cases} U' + p(x) \cdot U = 0 \\ UV' = q(x) \end{cases}$$

1. Из первого условия находим U :

$$U' + p(x) \cdot U = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = -p(x)U$$

$$\int \frac{dU}{U} = - \int p(x)dx$$

$$U = e^{-\int p(x)dx} + C$$

Возьмем частное решение при $C = 0$:

$$U = e^{-\int p(x)dx}$$

2. Из второго условия, с учетом полученного частного решения U , находим V :

$$UV' = q(x)$$

$$V' e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{dV}{dx} = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$dV = q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

$$\int dV = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

$$V = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Таким образом, получаем:

$$y = U \cdot V = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

Интегрирование *НЛДУ1* методом Лагранжа

$$y' + p(x)y = q(x)$$

1. Решим соответствующее *ОЛДУ1*:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx$$

$$\ln |y| = - \int p(x) dx + C$$

$$y_{o.o.} = C \cdot e^{- \int p(x) dx}$$

2. Искать общее решение *НЛДУ1* будем в том же виде, что и решение *ОЛДУ1*, но считая C неизвестной функцией от x , т.е.

$$y_{o.n.} = C(x) \cdot e^{- \int p(x) dx}$$

$$y'_{o.n.} = C'(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} + C(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} \cdot (-p(x))$$

Подставляем $y_{o.n.}$, $y'_{o.n.}$ в исходное *НЛДУ1*

$$C'(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} + C(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} \cdot (-p(x)) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} = q(x)$$

$$C'(x) \cdot e^{- \int p(x) dx} = q(x)$$

$$\frac{dC}{dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$dC = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx$$

$$\int dC = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx$$

$$C = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C_1$$

Подставим найденную C в $y_{o.n.}$

$$y_{o.n.} = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C_1 \right) \cdot e^{- \int p(x) dx}$$

22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка.

Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n -го порядка

Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области D , то существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка

1. $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение находится последовательным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2$$

...

$$y(x) = \int dx \int dx \dots \int f(x)dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

2. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ - ДУ n -го порядка, не содержащее явно $y, y', \dots, y^{(k-1)}$

Порядок ДУ понижается на k заменой $y^{(k)} = p(x)$. Таким образом, ДУ примет вид:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)})$$

Общее решение этого ДУ: $p(x) = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$

С учетом замены: $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$

Решаем полученное ДУ последовательным интегрированием и находим общее решение исходного ДУ:

$$y = \psi(x, C_1, \dots, C_n)$$

3. $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ - ДУ n -го порядка, не содержащее явно x .

Порядок ДУ понижаем на 1 с помощью замены

$$y' = p(y),$$

$$y'' = (p(y))' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p,$$

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

теорема Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) - \text{ЛДУ } n\text{-го порядка}$$

Если функции $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$ являются непрерывными на $[a; b]$, то для любого начального условия

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

существует единственное решение $y = \varphi(x)$ ЛДУ n -го порядка, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка

1. Если y_1 и y_2 - частные решения ЛОДУ n -го порядка, то $y_1 + y_2$ - также является решением этого ЛОДУ.

Доказательство

$$\begin{aligned} & (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot (y_1 + y_2) = \\ & = \underbrace{y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_1}_{0} + \underbrace{y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_2}_{0} = 0 \end{aligned}$$

Это означает, что $y_1 + y_2$ по определению является решением этого ЛОДУ

Теорема доказана

2. Если y_1 - частное решение ЛОДУ n -го порядка, то $C \cdot y_1$ - также является решением этого ЛОДУ, $C = \text{const}$.

Доказательство

$$\begin{aligned} & (C \cdot y_1)^{(n)} + p_1(x) \cdot (C \cdot y_1)^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot (C \cdot y_1) = \\ & = C \cdot y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot C \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot C \cdot y_1 = \\ & = C \cdot \underbrace{(y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y_1)}_0 = 0 \end{aligned}$$

Это означает, что $C \cdot y_1$ по определению является решением этого ЛОДУ

Теорема доказана

Следствие. Если y_1 и y_2 - частные решения ЛОДУ n -го порядка, то их линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2$, $C_1 = const$, $C_2 = const$ - также является решением этого ЛОДУ.

Доказательство

$$\begin{aligned}
 & (C_1y_1 + C_2y_2)^{(n)} + p_1(x) \cdot (C_1y_1 + C_2y_2)^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot (C_1y_1 + C_2y_2) = \\
 & = C_1 \cdot y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot C_1 \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2^{(n)} + p_1(x) \cdot C_2 \cdot y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot C_2 \cdot y_2 = \\
 & = C_1 \cdot \underbrace{(y_1^{(n)} + p_1(x) \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y_1)}_0 + C_2 \cdot \underbrace{(y_2^{(n)} + p_1(x) \cdot y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y_2)}_0 = 0
 \end{aligned}$$

Это означает, что $C_1y_1 + C_2y_2$ по определению является решением этого ЛОДУ

Теорема доказана

24, 25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

Система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на $[a; b]$, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные 0, такие, что на $[a; b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

Система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ называется **линейно независимой** на $[a; b]$, если на $[a; b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

только когда $\forall \alpha_i = 0$.

Теорема (о вронскиане линейно зависимых функций)

Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ являются линейно зависимыми на $[a; b]$, то $\forall x \in [a; b]$ определитель Вронского этих функций равен 0.

Доказательство

По условию функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a; b] \Rightarrow \exists \alpha_i$, не все равные 0, такие что

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 & \text{дифференцируем} \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Получили *СЛОАУ* (систему линейных однородных алгебраических уравнений) с неизвестными $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и с отличным от 0 решением, так как не все $\alpha_i = 0$ (см. выше).

Это возможно в случае, если определитель системы равен 0, но определитель этой системы и является определителем Вронского функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, т.е.

$$\forall x \in [a; b] \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Теорема доказана

Теорема (о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка)

Если линейно независимые на $[a; b]$ функции y_1, \dots, y_n являются частными решениями *ЛОДУ*

n -го порядка с непрерывными на $[a; b]$ коэффициентами $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $\forall x \in [a; b]$ определитель Вронского этих функций отличен от нуля.

Доказательство (от противного)

Предположим, что для какой-то точки $x_0 \in [a; b]$ $W(x_0) = 0$. Рассмотрим СЛАУ относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x_0) = 0 \Rightarrow$ система имеет ненулевое решение, то есть $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные 0, являющиеся решением этой СЛАУ.

Рассмотрим частное решение ЛОДУ

$$\bar{y}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$$

Оно удовлетворяет в точке x_0 начальным условиям (в силу СЛАУ выше)

$$\begin{cases} \bar{y}(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \bar{y}'(x_0) = \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим частное решение ЛОДУ $\bar{\bar{y}}(x) = 0$

Оно удовлетворяет в точке x_0 начальным условиям

$$\begin{cases} \bar{\bar{y}}(x_0) = 0 \\ \bar{\bar{y}}'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \bar{\bar{y}}^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, частные решения $\bar{y}(x)$, $\bar{\bar{y}}(x)$ удовлетворяют одним и тем же начальным условиям задачи Коши. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $\bar{y}(x) = \bar{\bar{y}}(x)$, иначе получим два различных частных решения, удовлетворяющих одному начальному условию.

$$\bar{y}(x) = \bar{\bar{y}}(x)$$

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

То есть y_1, y_2, \dots, y_n - линейно зависимы на $[a; b]$, что противоречит условию линейной неза-

зависимости y_1, y_2, \dots, y_n , а значит, получили противоречие с условием теоремы.

Таким образом $\forall x \in [a; b] \quad W(x) \neq 0$

Теорема доказана

26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

Теорема (о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка)

У каждого ЛОДУ n -го порядка $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$ с непрерывными $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ коэффициентами на $[a; b]$ существует ФСР.

Доказательство

Возьмем любой числовой определитель n -го порядка, не равный нулю

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Возьмем любую точку $x_0 \in [a; b]$ и сформулируем для уравнения n задач Коши, причём начальные условия в точке x_0 для i -ой задачи возьмём из i -го столбца этого определителя:

$$\begin{array}{cccc} y_1(x_0) = \beta_{11} & y_2(x_0) = \beta_{12} & \cdots & y_n(x_0) = \beta_{1n} \\ y'_1(x_0) = \beta_{21} & y'_2(x_0) = \beta_{22} & \cdots & y'_n(x_0) = \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n1} & y_2^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n2} & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) = \beta_{nn} \end{array}$$

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ - решения этих задач. Эта система линейно независима на $[a; b]$, так как её определитель Вронского в точке x_0 равен взятому числовому определителю и отличен от нуля, следовательно, это фундаментальная система решений.

Теорема доказана

27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка)

Общее решение на $[a; b]$ ЛОДУ n -го порядка с непрерывными $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ на $[a; b]$ функциями равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

Доказательство

ЛОДУ n -го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

1. Докажем, что $y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - решение ДУ. Подставим его и его производные в ДУ:

$$\begin{aligned} (y_{o.o.})^{(n)} + p_1(x) \cdot (y_{o.o.})^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y_{o.o.} &= (C_1 y_1)^{(n)} + p_1(x) \cdot (C_1 y_1)^{(n-1)} + \\ &+ \dots + p_n(x) \cdot C_1 y_1 + \dots + (C_n y_n)^{(n)} + p_n(x) \cdot (C_n y_n)^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot C_n y_n = \\ &= C_1 \underbrace{\left((y_1)^{(n)} + p_1(x) \cdot (y_1)^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y_1 \right)}_0 + \\ &+ \dots + C_n \underbrace{\left((y_n)^{(n)} + p_n(x) \cdot (y_n)^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y_n \right)}_0 = 0 \end{aligned}$$

2. Докажем, что $y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - общее решение ЛОДУ.

По условию теоремы $p_i(x)$ непрерывны на $[a; b] \Rightarrow$ выполнены условия теоремы Коши о существовании и единственности решения ЛОДУ. Тогда решение $y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ будет общим, если найдутся единственным образом C_i при произвольно заданных начальных условиях:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad \text{где } x_0 \in [a; b]$$

Требуем, чтобы решение и его производные этим начальным условиям:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского $W(x_0)$ линейно независимой системы решений однородного уравнения и $W(x_0) \neq 0$.

Следовательно существует единственное решение C_1, C_2, \dots, C_n системы уравнений для произвольной точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \Rightarrow$ по определению решение $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - есть общее решение ЛОДУ.

Теорема доказана

28. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пусть дано ДУ $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$

Предположим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения этого ЛОДУ, следовательно:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 & | \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} +$$

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

$$\frac{dW(x)}{dx} = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

$$\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)W(x) = 0 - \text{ДУ с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{dW(x)}{dx} = -p_1(x)W(x)$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p_1(x)dx$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dW(x)}{W(x)} = - \int_{x_0}^x p_1(x)dx$$

$$\ln |W(x)| - \ln |W(x_0)| = - \int_{x_0}^x p_1(x)dx$$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(x)dx} - \text{формула Остроградского-Лиувилля}$$

29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, y_1 - известное решение этого уравнения. Найдем второе частное решение, линейно независимое с y_1

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (W \neq 0)$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} \Rightarrow$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx \Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Докажем, что полученное второе решение линейно независимо с y_1 :

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx + y_1 \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} \end{vmatrix} = \\ &= y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx + y_1 y_1 \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} - y_1' y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx = e^{-\int p_1(x)dx} \neq 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_1, y_2$ - линейно независимы

Таким образом, общее решение ЛОДУ 2-го порядка

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка)

Общее решение $НЛДУ$ n -го порядка с непрерывными на $[a; b]$ коэффициентами $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и непрерывной на $[a; b]$ функцией $f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего $ЛОДУ$ и какого-либо частного решения самого $НЛДУ$

$$y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$$

Доказательство

$НЛДУ$ n -го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$$

1. Докажем, что $y_{o.n.}$ - решение этого $ДУ$:

По условию, $y_{o.o.}$ - решение соответствующего $ЛОДУ$, т.е.

$$y_{o.o.}^{(n)} + p_1(x)y_{o.o.}^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_{o.o.} = 0$$

$y_{ч.н.}$ - частное решение самого $НЛДУ$, т.е.

$$y_{ч.н.}^{(n)} + p_1(x)y_{ч.н.}^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_{ч.н.} = f(x)$$

Подставим $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$ в исходное $НЛДУ$:

$$\begin{aligned} y_{o.n.}^{(n)} + p_1(x)y_{o.n.}^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_{o.n.} &= (y_{o.o.} + y_{ч.н.})^{(n)} + p_1(x) \cdot (y_{o.o.} + y_{ч.н.})^{(n-1)} + \\ &+ \dots + p_n(x) \cdot (y_{o.o.} + y_{ч.н.}) = \underbrace{y_{o.o.}^{(n)} + p_1(x)y_{o.o.}^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_{o.o.}}_0 + \\ &+ \underbrace{y_{ч.н.}^{(n)} + p_1(x)y_{ч.н.}^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_{ч.н.}}_{f(x)} = f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_{o.n.}$ - решение $ДУ$

2. Докажем, что $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$ - общее решение $НЛДУ$

По теореме о структуре общего решения $ЛОДУ$:

$$y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.} = \sum_{i=1}^n C_i y_i + y_{ч.н.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{ч.н.},$$

где y_i - линейно независимые частные решения соответствующего $ЛОДУ$, причем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

Надо доказать, что если решение $y_{\text{о.н.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{\text{ч.н.}}$ и его производные удовлетворяют заданным условиям начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, то из этих условий можно единственным образом определить C_1, C_2, \dots, C_n , $x_0 \in [a; b]$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{\text{ч.н.}}(x_0) \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{\text{ч.н.}}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

СЛАУ с $W(x) \neq 0$; $x_0 \in [a; b] \Rightarrow \exists \text{ и! } C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0 :$

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) + y_{\text{ч.н.}} - \text{частное решение}$$

Теорема доказана

31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad a_1, a_2 = \text{const}$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ - квадратное уравнение.

$$D = a_1^2 - 4a_2; \quad k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

В случае кратных корней: $D = 0$, т.е.

$$k = k_{1,2} = \frac{-a_1}{2} \iff a_1 = -2k$$

Первое частное решение: $y_1 = e^{kx}$

Найдем второе частное решение, линейно независимое с y_1 :

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = e^{kx} \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = x \cdot e^{kx}$$

ФСР: $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x \cdot e^{kx}$

$$y_{\text{о.о.}} = {}_1e^{kx} + {}_2xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x)$$

32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad a_1, a_2 = \text{const}$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ - квадратное уравнение.

$$D = a_1^2 - 4a_2; \quad k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

В случае комплексных (комплексно-сопряженных) корней: $D < 0$, т.е.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad (\beta \neq 0)$$

Рассмотрим $e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$ - формула Эйлера

Выделим действительную и мнимую части решения:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - e^{\alpha x} \beta \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \beta \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= e^{\alpha x} \cos \beta x \cdot (\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \beta \cos \beta x) - (\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - e^{\alpha x} \beta \sin \beta x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x = \\ &= e^{2\alpha x} \cdot ((\alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \cos^2 \beta x) - (\alpha \cos \beta x \sin \beta x - \beta \sin^2 \beta x)) = \\ &= \beta e^{2\alpha x} \neq 0, \quad \forall x \in [a; b], \quad \text{т.к. } \beta \neq 0; \quad e^{2\alpha x} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{ФСП: } y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_{\text{о.о.}} = {}_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + {}_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

Квазимногочленом называется сумма нескольких слагаемых вида

$$e^{\alpha x} \left(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right) \quad (\star)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Возьмем ЛНДУ с постоянными коэффициентами и с квазимногочленом $f(x)$ в правой части:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad \forall a_i = \text{const}$$

Рассмотрим соответствующее ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$, $\forall a_i = \text{const}$, и квазимногочленом в правой части рекомендуется искать методом неопределённых коэффициентов (методом подбора). Для каждого слагаемого вида (\star) , входящего в правую часть решаемого уравнения, частное решение ищется в виде

$$x^r e^{\alpha x} \left(R_s(x) \cos \beta x + T_s(x) \sin \beta x \right) \quad (\star\star)$$

где r – кратность корней $\alpha \pm \beta i$ в характеристическом уравнении ($r = 0$, если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения), $s = \max(n, m)$, $R_s(x)$ и $T_s(x)$ – общий вид многочленов степени S .

Для нахождения неопределённых коэффициентов выражение $(\star\star)$ подставляется в соответствующее уравнение, и затем приравниваются коэффициенты при подобных членах слева и справа. После того, как частные решения найдены для всех слагаемых, входящих в $f(x)$, частное решение исходного уравнения определяется с помощью теоремы о наложении частных решений.

Теорема (о наложении частных решений)

Если $y_1(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_2(x)$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$, где $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$.

Доказательство

По условию $y_1(x)$ – решение уравнения $L[y] = f_1(x)$, $y_2(x)$ – решение уравнения $L[y] = f_2(x)$.
 $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow$ Функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Теорема доказана

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),$$

функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ - непрерывны на $[a; b]$.

Рассмотрим соответствующее ЛОДУ:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ - известная ФСР ЛОДУ. Будем искать решение ЛНДУ в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ - новые неизвестные функции, зависящие от x . Найдем производную $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x))' = (C_1(x)y_1(x))' + (C_2(x)y_2(x))' = \\ &= C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) = \\ &= (C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

Дальше надо вычислять вторую производную. Воспользуемся тем обстоятельством, что вместо одной функции $y(x)$ мы ищем две функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, и, как следствие, можем наложить произвольную связь на эти функции. Для того, чтобы в выражении для второй производной не участвовали вторые производные функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$, в качестве этой связи положим

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (\star)$$

Тогда:

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= (C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x))' = (C_1(x)y_1'(x))' + (C_2(x)y_2'(x))' = \\ &= C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) = \\ &= (C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \end{aligned}$$

Подставляем выражения для $y(x)$ и ее производных в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} & (C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x) \times \\ & \times (C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + p_2(x) \cdot (C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) \right) + C_1(x) \cdot \underbrace{\left(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x) \right)}_{= 0, \text{ т.к. } y_1(x) - \text{решение ЛОДУ}} + \\
& + C_2(x) \cdot \underbrace{\left(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x) \right)}_{= 0, \text{ т.к. } y_2(x) - \text{решение ЛОДУ}} = f(x)
\end{aligned}$$

Поэтому получаем:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \quad (\star\star)$$

Уравнения (\star) , $(\star\star)$ образуют **систему соотношений для варьируемых переменных**:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

определитель которой есть определитель Вронского линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, отличный от 0, $\forall x \in [a; b]$. Решаем эту систему как *СЛАУ* относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x)$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int \varphi_1(x) dx + C_1 \\
C_2(x) &= \int \varphi_2(x) dx + C_2
\end{aligned}$$

Общее решение *ЛНДУ* получаем, подставив $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left(\int \varphi_1(x) dx + C_1 \right) \cdot y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x) dx + C_2 \right) \cdot y_2(x) = \\
&= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x) \int \varphi_1(x) dx + y_2(x) \int \varphi_2(x) dx,
\end{aligned}$$

где C_1 , C_2 - произвольные постоянные.

35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Дифференциальным уравнением n -го порядка, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right), \quad x \in [a; b]$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Метод сведения дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной к нормальной системе дифференциальных уравнений

Пусть функция $y = y(x)$ является решением ДУ

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right), \quad x \in [a; b]$$

Введем функции

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad \dots, \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

Тогда эти функции являются решениями нормальной системы

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), & x \in [a; b] \\ y_2'(x) = y_3(x), & x \in [a; b] \\ \dots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x), & x \in [a; b] \\ y_n'(x) = F(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), & x \in [a; b] \end{cases}$$

36. Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Пусть функции $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ определены и непрерывны для

$$\forall x \in [a; b], (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Требуется определить функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, являющиеся решениями нормальной системы ДУ на отрезке $[a; b]$

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

и удовлетворяющие начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_{01}, y_2(x_0) = y_{02}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n},$$

где x_0 - некоторая фиксированная точка на отрезке $[a; b]$, а $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$ - заданные вещественные числа.

Теорема Коши о существовании и единственности решения этой задачи

Пусть правые части системы

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным y_1, \dots, y_n в некоторой области $G \subset \mathbb{R}_{x, y_1, \dots, y_n}^{n+1}$. Тогда для любой точки $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in G$ существует решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $y_i'(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, \dots, n$. Любые два решения этой системы, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены.

Метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка (на примере системы 2-х уравнений)

Пусть имеется нормальная система ДУ

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Продифференцируем по x первое уравнение системы, и подставим в получившееся выражение $y_2'(x)$ из второго уравнения системы.

$$y_1'' = \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial y_2} \cdot f_2(x, y_1, y_2)$$

Из первого уравнения определим y_2 как функцию от x, y_1, y_1' , т.е. $y_2 = y_2(x, y_1, y_1')$ и подставим эту функцию вместо y_2 в полученное выше равенство. Таким образом, следствием данной системы является дифференциальное уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции $y_1 = y_1(x)$.

37. Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений.

Функция $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется **первым интегралом** нормальной системы дифференциальных уравнений, если для любого решения этой системы $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, заданного на некотором интервале I , функция

$$\Phi(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

постоянна на этом интервале.

Теорема (об условиях, при которых функция является первым интегралом системы)

Пусть в системе правые части непрерывно дифференцируемы в области G по всем переменным. Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ была первым интегралом этой системы необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции, составленная в силу системы, равнялась нулю всюду в области G .

Применение первых интегралов для решения системы дифференциальных уравнений

Если известен первый интеграл Φ системы DU , то, разрешая уравнение

$$\Phi(x, y_1, \dots, y_n) = C$$

относительно, например, y_n , получим

$$y_n = y_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, C)$$

Подставляя правую часть этого равенства вместо y_n в первые $n-1$ уравнений системы, мы перейдем к системе из $n-1$ уравнений относительно $n-1$ неизвестных функций. Таким образом, первый интеграл дает возможность понизить число уравнений в системе на 1.

Если найдены n независимых первых интегралов системы:

$$\Phi_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1$$

...

$$\Phi_n(x, y_1, \dots, y_n) = C_n$$

то, разрешая эти уравнения относительно y_1, \dots, y_n , получим общее решение исходной системы:

$$y_1 = y_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, y_n = y_n(x, C_1, \dots, C_n)$$

Формулы

Таблица простейших интегралов

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{a} \int \frac{a dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{a} \int \frac{a+x-x}{(x-a)(x+a)} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{d(x-a)}{x-a} + \frac{1}{2a} \int \frac{-2x dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x-a)}{x-a} + \frac{1}{2a} \int \frac{-2x dx}{x^2 - a^2} = \\ &= \frac{1}{a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \int \frac{d(x^2 - a^2)}{x^2 - a^2} = \frac{2}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x^2 - a^2| + C = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \frac{(|x-a|)^2}{|(x-a)(x+a)|} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot 2x \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \end{aligned}$$

таким образом функция $\left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right)$ - есть первообразная функции $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \int \frac{dx}{2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \\ &= \int \frac{d \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \end{aligned}$$

Вычисление площадей плоских фигур

1. В декартовой ПСК:

$$S = \int_a^b f(x)dx, \quad a < b, \quad f(x) \geq 0 \quad - \text{явное задание функции } f(x)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \quad a < b, \quad f(x) \geq 0 \quad - \text{параметрическое задание функции } \begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$$

2. В полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

Вычисление объемов тел вращения

1. Объем фигуры, ограниченной осью Ox , кривой $y = f(x)$ и линиями $x = a$, $x = b$, образованной вращением вокруг оси Ox

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

2. Объем фигуры, ограниченной осью Oy , кривой $x = g(y)$ (где $g(y) = f^{-1}(y)$) и линиями $y = c$, $y = d$, образованной вращением вокруг оси Oy

$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

3. Объем фигуры, ограниченной осью Ox , кривой $y = f(x)$ и линиями $x = a$, $x = b$, образованной вращением вокруг оси Oy

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

4. Объем фигуры, заданной в полярных координатах, ограниченной линиями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, функцией $r = r(\varphi)$, образованной вращением вокруг оси Ox

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$$

Вычисление длины дуги

1. Дуга задана кривой $y = f(x)$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad b > a$$

2. Дуга задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad t_2 > t_1$$

3. Дуга задана в полярной системе координат кривой $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

