Подготовка к РК1

Интегралы и дифференциальные уравнения

Над файлом работали:
fiixii, pluttan

Оглавление

Часть 1

1. Сформулировать определение первообразной.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на некотором интервале, если для любого x из этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

2. Сформулировать определение неопределенного интеграла.

Множество всех первообразных функций $f(x)$ на промежутке (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале.
Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$

3. Сформулировать определение определённого интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.
Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $n \to \infty$ и $\max \Delta x_i \to 0$, и при любом выборе точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

стремится к одному и тому же пределу s, то этот предел называют **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

4. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом.

Функция $Y(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом**, где $[a, x] \subset [a, b]$.

5. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, +\infty)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

то этот предел называют **несобственным интегралом 1-го рода** от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

6. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. **Несобственным интегралом 2-го рода** от функции, имеющей разрыв:

1. в правом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

2. в левом конце отрезка, называется предел определенного интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

3. внутри отрезка (в точке $c \in (a, b)$), называется сумма пределов определенных интегралов:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

и обозначается как:

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

7. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

По определению несобственного интеграла 1-го рода:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx$$

Если предел в правой части этого равества существует и конечен, то несобственный интеграл 1-го рода называют **сходящимся**.

8. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Пусть $f(x)$ - непрерывная и знакопеременная функция на $[a, +\infty)$.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big|dx$.

9. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.

Пусть $f(x)$ - непрерывная и знакопеременная функция на $[a, +\infty)$.
Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют **условно сходящимся**, если сам интеграл сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big|dx$ - расходится.

10. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$.
Несобственный интеграл 2-го рода от функции, имеющий разрыв в правом (левом) конце отрезка называется **сходящимся**, если существует и конечен предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad - \text{ (разрыв в правом конце отрезка)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad - \text{ (разрыв в левом конце отрезка)}$$

Несобственный интеграл 2-го рода от функции, имеющий разрыв в точке $c \in (a, b)$ (внутри отрезка $[a, b]$) называется **сходящимся**, если существуют и конечны пределы

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

11. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть $f(x)$ - непрерывная и знакопеременная функция на $[a, b)$, где b - особая точка.
Несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ называют **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int\limits_a^{b} \big|f(x)\big|dx$.

12. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть $f(x)$ - непрерывная и знакопеременная функция на $[a, b)$, где b - особая точка.
Несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ называют **условно сходящимся**, если сам интеграл сходится, а интеграл $\int\limits_a^{b} \big|f(x)\big|dx$ - расходится.

Часть 2

1. Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла.

Если $f(x)$ - функция, интегрируемая на отрезке $[a, b]$,
m и M соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то выполняется неравенство:

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

Доказательство
По условию:

$$\forall x \in [a, b] \ : \ m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x), \ M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$
$f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, следовательно:

$$\int\limits_a^b m dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b M dx$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница:

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

ЧТД

2. Сформулировать и доказать теорему о среднем.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Доказательство
Пусть для определенности $a < b$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то эта функция достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшнго значения M и принимает все значения из отрезка $[m, M]$.
По теореме об оценке определённого интеграла:

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

$$m \leqslant \frac{1}{(b-a)} \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M$$

Обозначим $\lambda = \frac{1}{(b-a)} \int\limits_a^b f(x)dx$. Так как $m \leqslant \lambda \leqslant M$, то функция $f(x)$, в силу непрерывности на отрезке $[a, b]$, в какой-то точке $\xi \in [a, b]$ примет значение λ, т.е:

$$\exists \xi \in [a, b] : \ f(\xi) = \lambda = \frac{1}{(b-a)} \int\limits_a^b f(x)dx,$$

откуда получаем:

$$f(\xi) \cdot (b-a) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

ЧТД

3. Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой точке x этого отрезка. Тогда функция

$$Y(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $Y' = f(x)$.
Доказательство
По определению:
$Y(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$
$Y(x + \Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt, \ \ x + \Delta x \in [a, b]$
Тогда приращение $\Delta Y = Y(x+\Delta x) - Y(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^a f(t)dt + \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

По условию теоремы $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ (по теореме о среднем) $\Delta Y = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x$, где $c \in (x, \ x + \Delta x)$.
По определению производной:

$$Y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x),$$

так как $\Delta x \to 0$ и $x < c < x + \Delta x$, то $c \to x$.
ЧТД

4. Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Доказательство

Одной из первообразных функции $f(x)$ является

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Две первообразные функции $f(x)$ различаются, самое большее, на константу, т.е.

$$\Phi(x) - \int\limits_a^x f(t)dt = C$$

Подставляя сюда $x = a$, получаем, что $C = \Phi(a)$. Поэтому

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$$

При $x = b$ получим:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

*не важно, какой буквой обозначается переменная, поэтому можно заменить t на x, чтобы получить в точности доказываемое выражение.

ЧТД

5. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,df(x)$$

Доказательство

$$d\big(f(x)g(x)\big) = f(x)\,dg(x) + g(x)\,df(x) \;\Rightarrow\; f(x)\,dg(x) = d\big(f(x)g(x)\big) - g(x)\,df(x)$$

Интегрируем обе части тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b d\big(f(x)g(x)\big) - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

ЧТД

6. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,+\infty)$ и $\forall x \in [a,+\infty)$ выполняется неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, тогда:

1. если сходится $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$
2. если расходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$

Доказательство

1) По условию $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\Rightarrow$ по определению $\exists$ конечный $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b g(x)dx = M$, а значит:

$$\forall b > a : \int_a^b g(x)dx \leqslant M$$

По условию, $\forall x \in [a,+\infty)$ выполняется неравенство: $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
По теореме об интегрировании неравенства:

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx \leqslant M$$

Таким образом:

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{b\to+\infty} 0 \leqslant \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \leqslant \lim_{b\to+\infty} M$$

$$0 \leqslant \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant M,$$

из полученного выше следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

2) По условию $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Предположим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, вопреки теореме. Но в таком случае, по доказанному выше, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится. Это противоречит условию теоремы, а значит, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

ЧТД

7. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

Если функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

По условию существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то есть по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M = M(\varepsilon) > 0 : \; \forall x > M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon \quad | \cdot g(x) > 0$$

$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \qquad (1)$$

Пусть $a > M$. Подберем ε так, чтобы $\lambda - \varepsilon > 0$

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда, т.к. из (1) $\Rightarrow \;\; (\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x)$, можно применить признак сходимости по неравенству:

$\int\limits_a^{+\infty} (\lambda - \varepsilon)g(x)dx$ - сходится. Тогда и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится (по свойству линейности).

2) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда по свойству линейности будет сходиться $\int\limits_a^{+\infty} (\lambda + \varepsilon)g(x)dx$.

Из (1) $\Rightarrow \;\; f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$, тогда по признаку сходимости по неравенству, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится.

3) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда, т.к. из (1) $\Rightarrow \;\; f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x)$, можно применить признак сходимости по неравенству:

$\int\limits_a^{+\infty} (\lambda + \varepsilon)g(x)dx$ - расходится, а значит и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ - расходится.

4) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Тогда по свойству линейности будет расходиться $\int\limits_a^{+\infty} (\lambda -$

$\varepsilon)g(x)dx$.

Из (1) $\Rightarrow$ $(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x)$, тогда по признаку сходимости по неравенству, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - расходится.

ЧТД

8. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и знакопеременная в $[a, +\infty)$, и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (последний интеграл называют абсолютно сходящимся).

Доказательство

По условию $f(x)$ непрерывна в $[a, +\infty) \Rightarrow \forall x \in [a, +\infty):\ f(x) \leqslant |f(x)| \Rightarrow f(x) + |f(x)| \leqslant 2|f(x)|$

По условию $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится $\Rightarrow$ $2\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ тоже сходится $\Rightarrow$ (по признаку сходимости по неравенству) $\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)dx$ сходится $\Rightarrow$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)dx}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx}_{\text{сходится}}$$

Таким образом, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится.

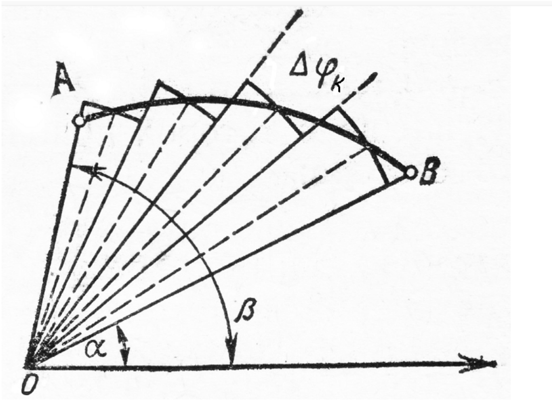
ЧТД

9. Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$.

Пусть криволинейный сектор ограничен отрезками лучей $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ - функция, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь этого криволинейного сектора:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Вывод



Разобьем криволинейный сектор лучами на n частичных криволинейных секторов

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta, \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$$

В каждом частичном секторе возьмем: $\widetilde{\varphi_k} \in \Delta\varphi_k,\ k = 1, 2, ..., n$
При малых $\Delta\varphi_k$ справедливо $S_{.} \approx S$
В свою очередь,

$$S_{.} = \frac{1}{2}\rho_k^2 \cdot \Delta\varphi_k = S_k$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\widetilde{\varphi_k}) \cdot \Delta\varphi_k$$

Получили интегральную сумму для функции $\rho^2(\varphi)$.
$\rho(\varphi)$ - непрерывна на $[a, b]\ \Rightarrow\ \rho^2(\varphi)$ - тоже непрерывна на $[a, b]$, следовательно существует конечный интеграл:

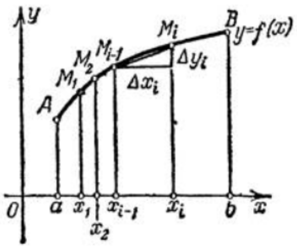
$$S = \frac{1}{2}\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta\varphi_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \rho^2(\widetilde{\varphi_k}) \cdot \Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

10. Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$.

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ - функция, непрерывная на $[a, b]$ и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке. Тогда длина дуги:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Вывод



Разобьем дугу AB на n частей точками $M_1, M_2, ..., M_n$, абсциссы которых: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Соединим все пары соседних точек. Получили ломанную, вписанную в дугу AB. Эта ломанная состоит из звеньев: $M_0M_1,\ ...,\ M_{n-1}M_n$, причем $M_0 = A, M_n = B$.

Обозначим длины звеньев $M_0M_1 = l_1,\ ...,\ M_{n-1}M_n = l_n$

Тогда длина этой ломаной: $L = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k$

Очевидно, что при уменьшении длин хорд ломаная по своей форме приближается к дуге.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_k)^2}{(\Delta x_k)^2}}$$

По теореме Лагранжа:

$$\exists \xi_k \in (x_{k-1},\ x_k) :\ \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k)$$

Таким образом:

$$l_k = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}$$

И длина вписанной ломаной: $L = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} \Delta x_k$

$f'(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$ тоже непрерывна на $[a, b]$, поэтому существует предел интегральной суммы, который равен определенному интегралу, т.е.

$$L = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} \Delta x_k = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$