Подготовка к РК1

Физика

Над файлом работали:
fiixii, pluttan, dimopster

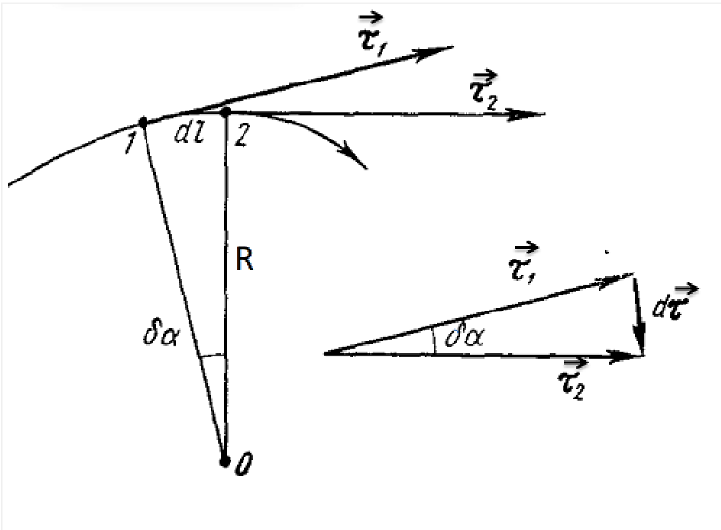
Оглавление

Основы механики

1. Перемещение, скорость, ускорение материальной точки и связь между ними. Тангенциальные (касательное) и нормальное ускорение

Перемещение - это приращение радиус-вектора точки за время Δt.
Скорость - векторная величина, характеризующуая быстроту перемещения и направление движения материальной точки в пространстве относительно выбранной системы отсчёта.
Ускорение - это величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости со временем.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$
$$\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{u}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Вывод тангенциального и нормального ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$V\frac{d\vec{\tau}}{dt} = V\frac{d\vec{\tau}\cdot dl}{dt\cdot dl} = V^2\frac{d\vec{\tau}}{dl}$$

$$\delta\alpha = \frac{dl}{R} = \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{|d\vec{\tau}|}{1} \quad\Rightarrow\quad \frac{|d\vec{\tau}|}{dl} = \frac{1}{R},\ |d\vec{\tau}| = \frac{dl}{R}$$

При $dl \to 0:\quad d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$, вводим единичный вектор $\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{|d\vec{\tau}|} = R\frac{d\vec{\tau}}{dl}$. Таким образом:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{R},\ V^2\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

В результате:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

где:
Тангенциальное ускорение - компонента ускорения, характеризующая изменение скорости по величине

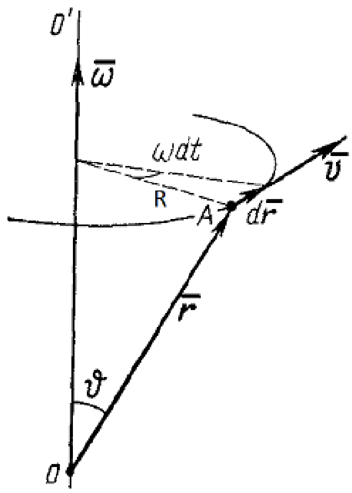
$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}$$

Нормальное ускорение - компонента ускорения, характеризующая изменение скорости по направлению

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

2. Векторы угловой скорости и углового ускорения твёрдого тела при вращательном движении. Их связь с линейными величинами. Период и частота вращения

Угловая скорость - векторная величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки относительно центра вращения.
Угловое ускорение - векторная величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости.



Вывод связей $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ с линейными величинами:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$V = \frac{dl}{dt}$$

При $d\varphi \to 0: \quad d\varphi \approx \sin d\varphi \approx \frac{dl}{R}$. Таким образом:

$$\omega = \frac{dl}{Rdt} = \frac{V}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{R} = \frac{a}{R}$$

Время, за которое тело проходит полный оборот вокруг оси:

$$T = \frac{L}{V} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Либо можно сразу сказать, что это время, за которое тело совершит оборот на угол 2π, то есть, $\frac{2\pi}{\omega}$.
Частота - величина, обратная периоду:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

3. I, II и III законы Ньютона. Сила упругости (закон Гука), сила тяжести (закон всемирного тяготения), сила трения скольжения и сила сопротивления среды.

I-ый закон Ньютона - существуют такие системы отсчета, в которых материальная точка (тело) движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют другие силы или действие этих сил скомпенсировано. Такие системы называются инерциальными.
II-ой закон Ньютона - скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе (сумме всех действующих сил)

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = (m\vec{V})^{\cdot} = m\dot{\vec{V}} = m\vec{a}$$

III-ий закон Ньютона - силы, с которыми действуют друг на друга два тела, лежат на одной прямой, равны по величине и противоположны по направлению. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$;
Сила упругости - это сила, возникающая в теле в результате деформации и старающаяся вернуть его в исходное.
Закон Гука: $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$;
Сила тяжести - сила, с которой земля притягивает к себе различные тела.
Вывод через закон всемирного тяготения

$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

Рассмотрим $\vec{F}$ для любого тела, находящегося на земле. Если тело находится на поверхности земли ($h \ll R$), то можно считать, что расстояние между телом и Землей равно радиусу Земли. Тогда введем константу:

$$\vec{g} = G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$$

И перепишем формулу как

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Сила трения скольжения - сила, возникающая между соприкасающимися телами при их относительном движении.

$$F = \mu N$$

Сила сопротивления (среды) - сила, которая возникает во время движения тела в жидкой или газообразной среде и препятствует этому движению.

$$F = -kV$$

$$F = -kV^2$$

4. Импульс тела. Импульс силы. Механическая система. Центр масс. Уравнение изменения импульса механической системы. Закон сохранения импульса.

Импульс тела - векторная физическая величина, являющаяся мерой механического движения тела.

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

Импульс силы - векторная физическая величина, являющаяся мерой воздействия силы на тело за данный промежуток времени.

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{a}\Delta t = m\Delta\vec{V} = \Delta\vec{p}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

Механическая система - совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.
Центр масс - воображаемая точка, положение которой характеризует распределение массы рассматриваемой системы.
Вывод скорости и ускорения центра масс:
Обозначим $M = \sum m_i$

$$\vec{r} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{M}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{dt} \cdot d\frac{\sum \vec{r}_i m_i}{M} = \frac{1}{M} \cdot \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} m_i = \frac{1}{M} \cdot \sum \vec{V}_i m_i = \frac{\sum \vec{V}_i m_i}{M}$$

Аналогично с ускорением:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{a}_i m_i}{M}$$

Уравнение изменения импульса механической системы:
II закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}$$

По III з-ну Ньютона: $\vec{F}_{\text{внутр}} = \sum\limits_{i=1,\ j=1}^{n} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}\ \ (i \neq j)$, таким образом:

$$\vec{dp} = \vec{F}\,dt$$

Берем интеграл от левой и правой части, взяв соответствующие пределы интегрирования: $\vec{p}_1 = \vec{p}(t_1),\ \vec{p}_2 = \vec{p}(t_2)$.

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

Закон сохранения импульса - импульс замкнутой системы не изменяется во времени.
Запишем второй з-н Ньютона в импульсной форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внутр}} + \vec{F}$$

Т.к. система замкнута, то $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{0}$;
По III з-ну Ньютона: $\vec{F}_{\text{внутр}} = \sum\limits_{i=1,\ j=1}^{n} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}\ \ (i \neq j)$.
В итоге, получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \ \ \Rightarrow \ \ \vec{p} = const = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i$$

5. Момент инерции твердого тела относительно оси. Момент инерции шара (без вывода), стержня, трубки(обруча) и цилиндра(диска). Теорема Штейнера.

Моментом инерции твердого тела относительно данной оси называется физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равна сумме моментов инерции всех частиц тела.

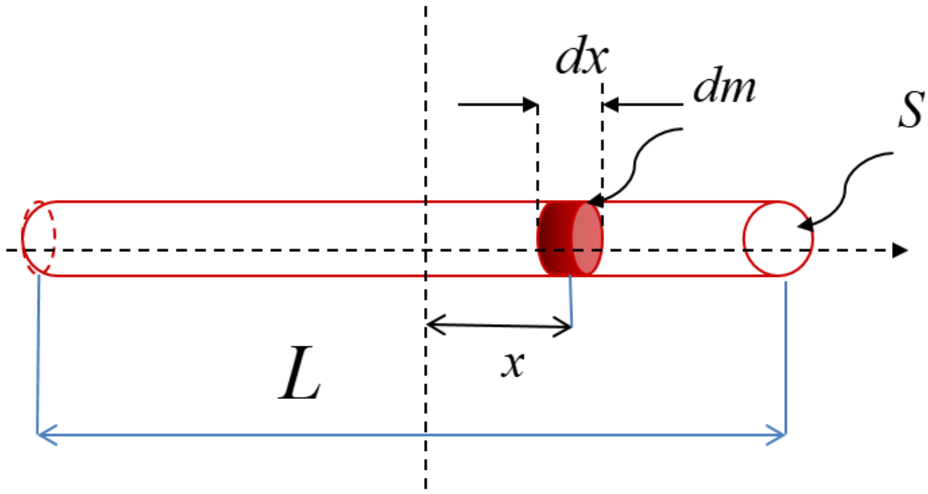
$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

Моменты инерции тел:
Шара:

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Стержня:

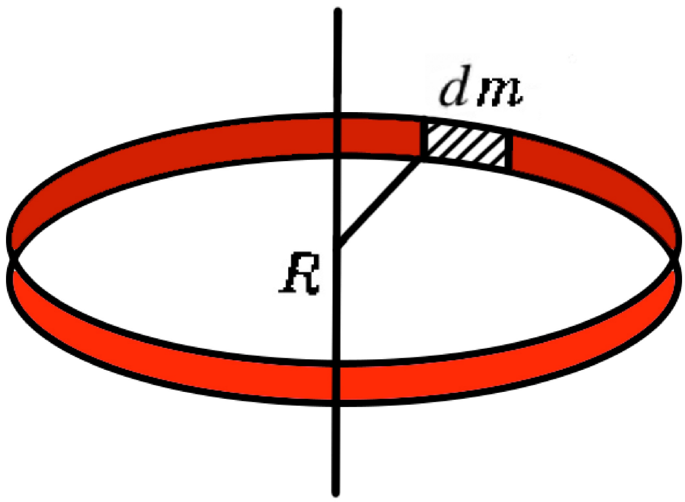


$$dm = \frac{m}{L}dx,\ I_0 = dm \cdot x^2$$

$$I = 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} I_0 = 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dm = 2 \cdot \frac{m}{L} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2 \cdot \frac{m}{L} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{L}{2}} = 2 \cdot \frac{m}{L} \cdot \frac{L^3}{24} = \frac{mL^2}{12}$$

$$I = \frac{1}{12}mL^2$$

Трубки (обруча):

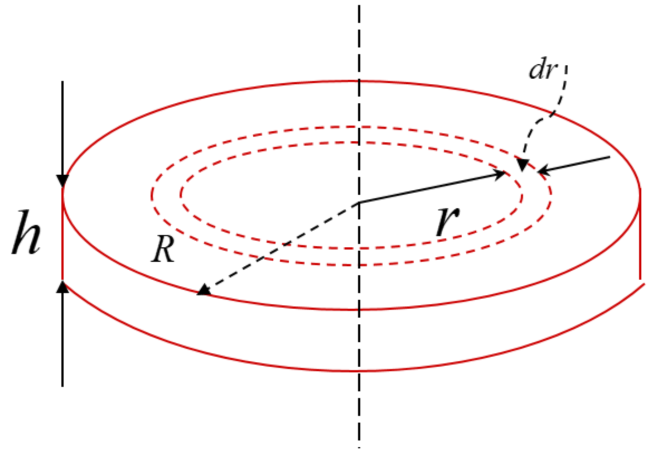


$$dm = \frac{dl}{l}m = \frac{dl}{2\pi R}m$$

$$I = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \left(\frac{dl}{2\pi R}m\right) = \frac{mR}{2\pi}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{mR}{2\pi} \cdot l\Big|_0^{2\pi R} = mR^2$$

$$I = mR^2$$

Цилиндра (диска):

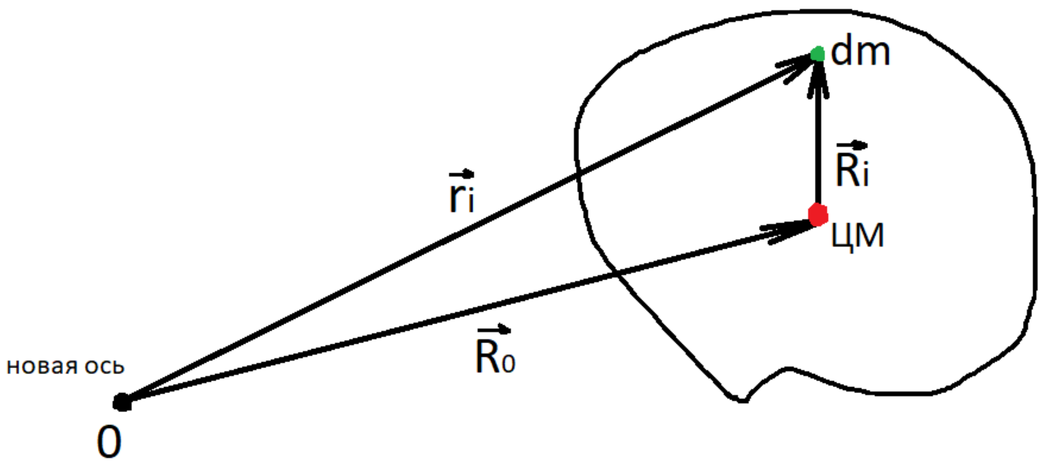


$$dm = \frac{dV}{V} m = \frac{2\pi r \cdot dr \cdot h}{\pi R^2 \cdot h} m = 2\frac{mr}{R^2} dr$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \left(2\frac{mr}{R^2} dr\right) = 2\frac{m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = 2\frac{m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}$$

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Теорема Штейнера - момент инерции тела относительно любой оси вращения равен моменту его инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, плюс произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.



$$I = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{R}_0 + \vec{R}_i)^2 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_0^2 + 2\sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_0 \vec{R}_i + \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 =$$

$$= d^2 \sum_{i=1}^n m_i + 2\vec{R}_0 m \cdot \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} + I_0 = md^2 + 2\vec{R}_0 m \cdot \vec{R}_{(\ \ -)} + I_0 = md^2 + I_0,$$

так как радиус-вектор центра масс в системе центра масс $\vec{R}_{(\ \ -)} = \vec{0}$ по вполне очевидным соображениям.

6. Момент силы. Момент импульса материальной точки и механической системы. Уравнение моментов механической системы. Закон сохранения момента импульса. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Момент силы - физическая величина, характеризующая вращательное действие силы на тело.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Момент импульса - физическая величина, характеризующая количество вращательного движения.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = m[\vec{r} \times \vec{V}] = m[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$$

$$L = mr^2\omega = I\omega$$

Момент импульса механической системы - это сумма моментов импульса всех материальных точек, входящих в систему.
Уравнение моментов механической системы:

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{r} \times \vec{p}]^{\cdot} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} + m\vec{V} \times \vec{V} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

Где $\vec{F}$ - сумма всех действующих сил, $\vec{M}$ - сумма моментов всех действующих сил.
Закон сохранения момента импульса - момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.
Доказательство
Так как система замкнута, то сумма внешних сил равна нулю. Значит $\vec{M} = \vec{0} = \dot{\vec{L}}$, отсюда

$$\vec{L} = const$$

Основное уравнение динамики вращательного движения:
Вывод из уравнения моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

7. Работа. Кинетическая энергия. Связь работы с изменением кинетической энергии. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия твёрдого тела, как сумма энергии поступательного движения со скоростью движения центра масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс (без вывода).

Работа - скалярная величина, равная произведению проекции силы на направление перемещения f_S и пути S, проходимого точкой приложения силы.

$$A_{a\to b} = f_S S$$

Кинетическая энергия - функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения.

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Связь работы с изменением кинетической энергии: работа силы, примененной к телу на пути r, численно равна изменению кинетической энергии этого тела.

$$dA = Fdr = m\frac{dV}{dt}dr = mVdV = d\Big(\frac{mV^2}{2}\Big) = dK$$
$$dA = dK$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна:

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное движения со скоростью движения ц.м. V_0 и вращательное движение с угловой скоростью вокруг оси, проходящего через центр масс:

$$K = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$$

8. Консервативные и неконсервативные силы. Работа в потенциальном поле. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия упругих деформаций и силы тяжести (в общем случае и для однородного поля).Связь между потенциальной энергией и силой, градиент.

Консервативная сила - сила, работа которой не зависит от траектории, а определяется только начальным и конечный положением тела. Если работа силы зависит от траектории, то такие силы называются неконсервативными.
Работа в потенциальном поле:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Потенциальная энергия - скалярная физическая величина, равная работе, совершаемой потенциальной силой при перемещении тела из этой точки в другую, принятую за нуль отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия упругих деформаций:

$$dA = Fdx = -kxdx$$

$$A = \int dA = -\int\limits_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx^2}{2}\bigg|_{x_2}^{x_1} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = U_1 - U_2$$

Если x_1 = 0, то U = $\frac{kx^2}{2}$;

Потенциальная энергия силы тяжести в общем случае:

Закон всемирного тяготения: $\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$

$$dA = Fdr = F|dr|\, cos(180 - \alpha) = -F|dr|\, cos(\alpha)$$

$$dA = -Fdr$$

$$U = A = -\int\limits_{r}^{\infty} \vec{F}dr = -\int\limits_{r}^{\infty} G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{Mm}{r}$$

Потенциальная энергия силы тяжести вблизи поверхности земли:

$$dA = m\vec{g}d\vec{r} = m|\vec{g}||d\vec{r}|\, cos(\alpha) = mgdh$$

$$A = \int\limits_{0}^{h} mgdr = mgh = U$$

Связь между силой и потенциальной энергией: U = U(x,y,z)

$$A = -U$$

$$dA = -dU$$

$$F = \frac{dA}{dr} = -\frac{dU}{dr}$$

$$\vec{F} = -\Big(\frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k}\Big) = -grad\, U$$

9. Полная механическая энергия. Изменение полной механической энергии системы. Закон сохранения механической энергии.

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциально энергий:

$$E = K + U$$

Изменение полной механической энергии системы равно сумме работы, которую совершили над системой внешние силы $A^{(e)}$, и работы, которую совершили над системой или внутри этой системы неконсервативные силы $A^{(i)}$:

$$\Delta A = A^{(e)} + A^{(i)}$$

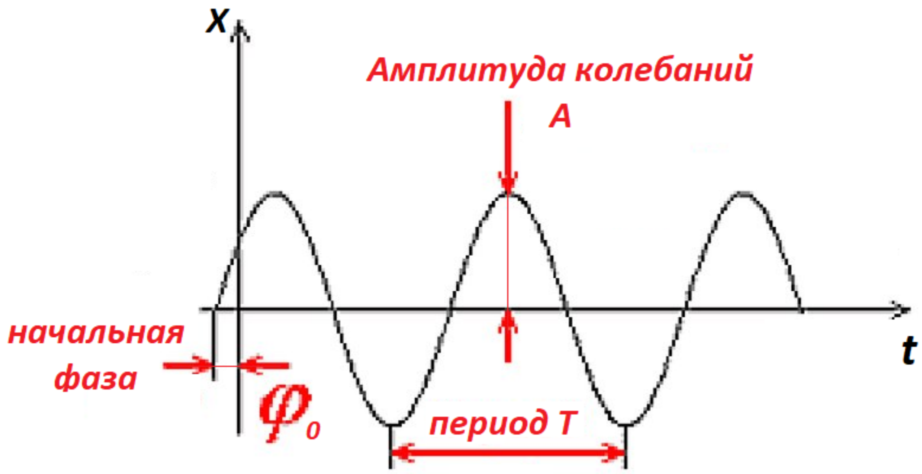
Закон сохранения механической энергии (для замкнутой системы): полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остается постоянной:

$$E = K + U = const$$

Теория колебаний

10. Гармонические колебания. Амплитуда, частота, период, фаза колебаний. Понятия свободных и вынужденных колебаний.

Гармонические колебания - колебания, совершающиеся по закону синуса или косинуса.



Вывод уравнения гармонических колебаний:

Второй закон Ньютона:

$$F = ma, \; F = -kx$$

$$ma + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

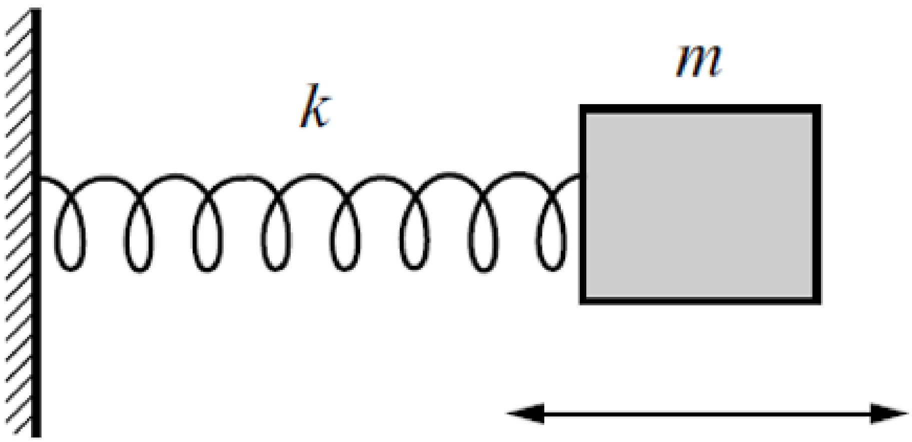
$$\text{Пусть } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Получили lдифференциальное уравнение гармонического осцилятора

Решением этого уравнения является уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



Амплитуда колебаний (A) - максимальное смещение от положения равновесия.
Период (T) - минимальный промежуток времени, по истечению которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t+T) = A\cos\big(\omega(t+T) + \varphi_0\big)$$

$$x(t+T) = x(t) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\omega(t+T) + \varphi_0) - (\omega t + \varphi_0) = T_{cos} = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Частота (ν) - физическая величина, равная количеству колебаний, совершаемых за единицу времени.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Фаза (φ) - физическая величина, определяющая смещение относительно положения равновесия в данный момент времени.

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Свободные колебания - это колебания в системе под действием внутренних сил после того, как система выведена из состояния равновесия.
Вынужденные колебания – колебания, происходящие под действием внешней периодической силы.

11. Квазиупругая сила. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний. Собственные частоты математического, физического и пружинного маятников.

Квазиупругая сила - сила, не являющаяся упругой по своей природе, но подобная упругим силам по характеру зависимости от координат.

$$F = -cx$$

где - постоянный коэффициент, x - смещение относительно положения равновесия.
Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний:
Второй закон Ньютона:

$$F = ma,\ F = -kx$$

$$ma + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Пусть } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

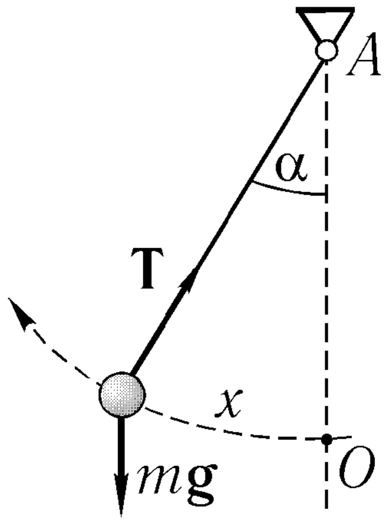
Получили Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

Решением этого уравнения является уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Собственная частота маятника - это частота собственных колебаний системы при отсутствии внешних возмущений.
Для физического маятника с моментом инерции I (относительно оси, проходящей через точку подвеса), массой m и расстоянием R (между центром масс и точкой подвеса), собственная частота определяется следующей формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$$



Вывод:

Основной закон динамики вращательного движения в проекции на ось Oz (ось проходит через точку подвеса, перпендикулярно плоскости, в которой происходит движение):

$$M_0 = I\varepsilon,\ M_0 = M_{mg} = -mgRsin(\alpha)$$

При малых α, можем принять $\sin(\alpha) \approx \alpha$:

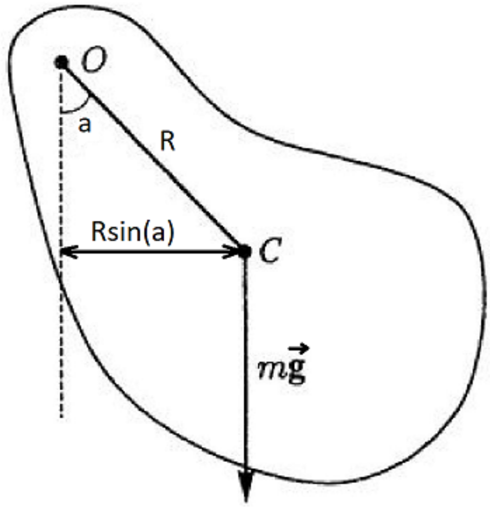
$$I\ddot{\alpha} + mgR\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgR}{I}\alpha = 0, \text{ где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$$

Для математического маятника с длиной подвеса l, собственная частота определяется следующей формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



Вывод:

Основной закон динамики вращательного движения в проекции на ось Oz (ось проходит через точку подвеса, перпендикулярно плоскости, в которой происходит движение):

$$M_0 = I\varepsilon, \; M_0 = M_{mg} = -mglsin(\alpha)$$

При малых α, можем принять $\sin(\alpha) \approx \alpha$, а также, $I = ml^2$ так как маятник - математический (на конце нити - материальная точка):

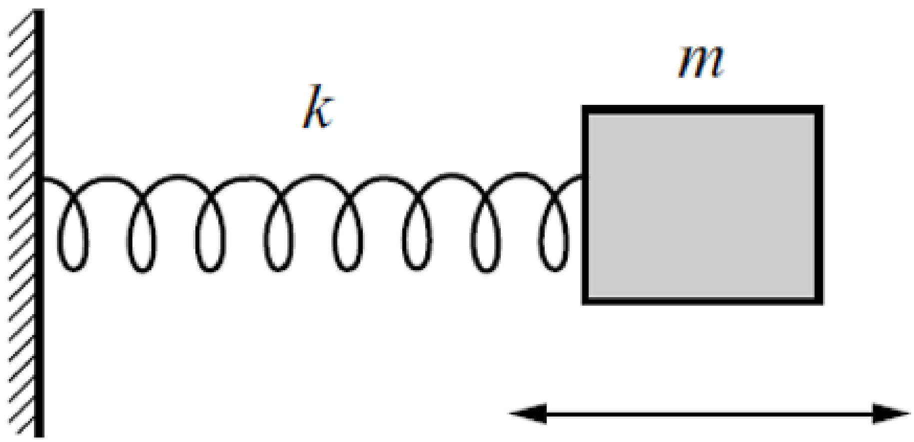
$$ml^2\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0, \text{ где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Для пружинного маятника с массой m и жесткостью пружины k собственная частота определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Вывод:

По второму закону Ньютона:

$$-kx = ma$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

12. Энергия и импульс гармонического осциллятора. Фазовая траектория.

Уравнение гармонического осциллятора: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Потенциальная энергия:

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Кинетическая энергия:

$$U = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2}m\big(-A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)\big)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

Полная энергия:

$$E = U + K = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

Так как:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \;\Rightarrow\; \omega^2 m = k$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$$

получим:

$$E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2$$

Импульс:

$$p = m\dot{x}$$

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2mK}$$

Фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс с полуосями: $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/k}$. Каждая точка фазовой траектории изображает состояние осциллятора для некоторого момента времени (т.е. его отклонение и импульс). С течением времени точка, изображающая состояние, перемещается по фазовой траектории, совершая за период колебания полный обход.

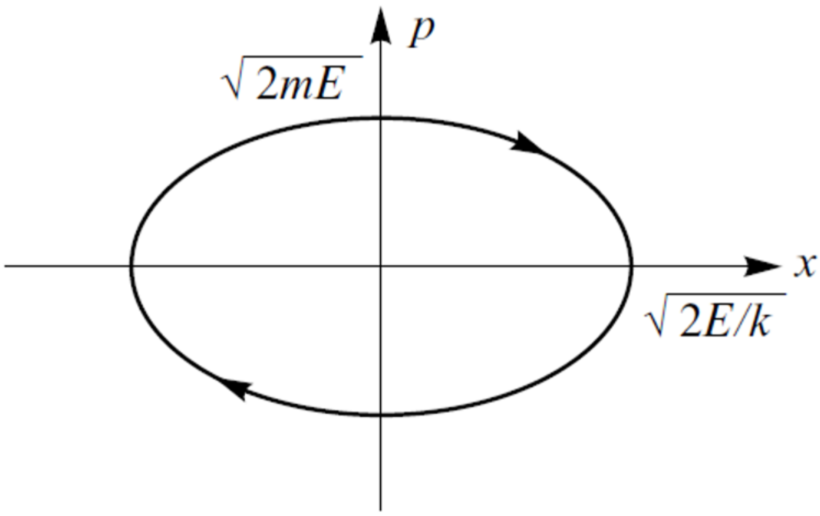
$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const$$

$$p = m\dot{x},$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{kx^2}{2E}$$

$$1 = \left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right)^2 \text{ — эллипс}$$



Полуоси, подставляя полученную ранее формулу полной энергии, можно привести к следующему виду:

$$\sqrt{2mE} = \sqrt{mkA^2} = \sqrt{\omega^2 m^2 A^2} = \omega m A$$

$$\sqrt{2E/k} = \sqrt{kA^2/k} = A$$

13. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления равных частот. Сложение гармонических колебаний одинакового направления близких частот. Биения.

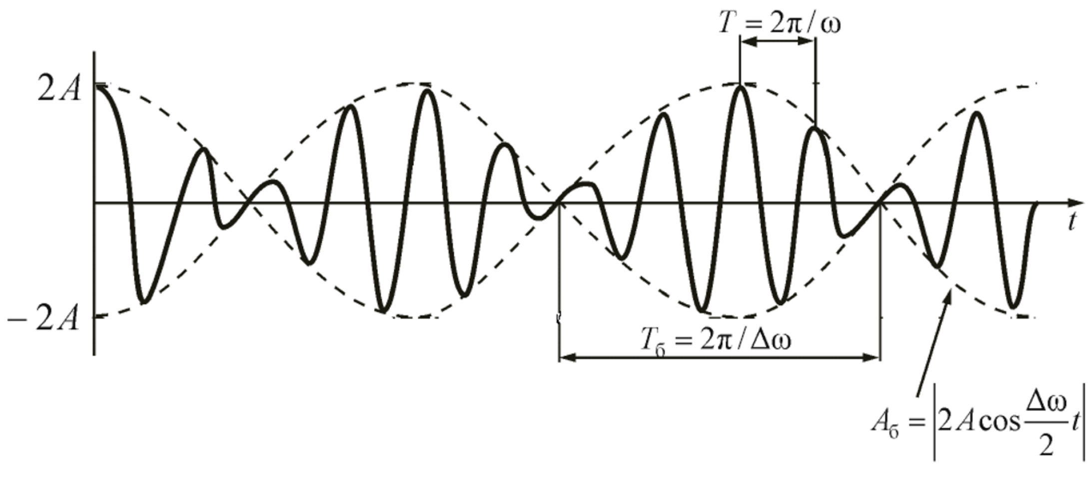
Векторная диаграмма - это способ графического задания колебательного движения в виде вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а напраление вектора образует с Ox угол, равный начальной фазе колебаний.
При **сложении** двух гармонических колебаний **одного направления** и **равной частоты** результирующее колебание будет происходить в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания, в зависимости от разности фаз, если:

1. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi k$, где ($k = 0, 1, 2, ..$), тогда $A = A_1 + A_2$.
2. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$, где ($k = 0, 1, 2, ..$), тогда $A = |A_1 - A_2|$.

В общем случае:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi),$$
$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1^2 A_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$



При сложении гармонических колебаний одинакового направления и близких частот, результурующее смещение будет суммой нескольких смещений. Например:
Пусть есть два гармонических колебания одинакового направления и близких частот, с одинаковыми амплитудами и с начальными фазами, равными 0:

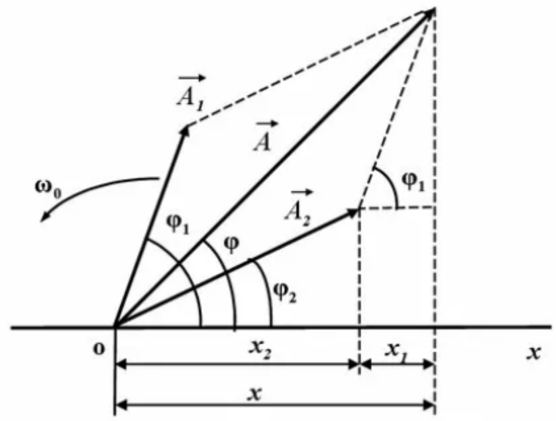
$$x_1 = A\cos(t)$$

$$x_2 = A\cos\big((+\Delta\omega)t\big)$$

Тогда суммарное колебание будет иметь вид:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(t) + A\cos\big((+ \Delta\omega)t\big) = 2A\cos\big(\frac{\Delta\omega}{2}t\big)\cos(\omega t)$$

Отсюда появляется понятие биений. **Биения** - это периодическое изменение амплитуды колебаний, которое возникает при сложении колебаний с близкими, но **не равными частотами**.



Векторная диаграмма для сложения одинаково направленных колебаний одинаковой частоты

14. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот. Фигуры Лиссажу.

$$x(t) = A_x\cos(\omega_x t)$$

$$y(t) = A_y\cos(\omega_y t + \varphi)$$

1. Частоты равны: $\omega_x = \omega_y = \omega$:

Преобразуем полученные выше равенства:

$$x = A_x\cos(\omega t)$$

$$y = A_y\cos(\omega t + \varphi) = A_y\big(\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)\big)$$

Поделим обе части обоих уравнений на амплитуду:

$$\frac{x}{A_x} = \cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{A_y} = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

Преобразуем второе уравнение, подставив $cos(\omega t) = \frac{x}{A_x}$:

$$\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A_x}\cos(\varphi) = -\sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

Возводим в квадрат:

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\varphi) + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\cos^2(\varphi) = \big(1-\cos^2(\omega t)\big)\sin^2(\varphi)$$

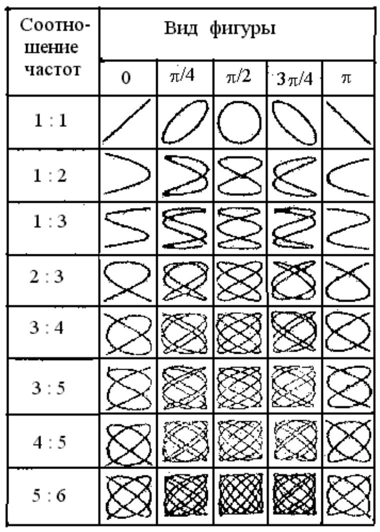
$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\varphi) + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\cos^2(\varphi) = \big(1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\big)\sin^2(\varphi)$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\varphi) + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = \sin^2(\varphi)$$

Получили уравнение эллипса. От φ будет зависеть ориентация осей эллипса, от амплитуд колебаний - размеры эллипса. Некоторые случаи вынесены в табличке ниже, на первой строке (отношение частот 1:1).

1. Частоты не равны (кратны): $\omega_x \neq \omega_y$:

В этом случае получаем траектории, имеющие довольно сложный вид. Если отношения частот складываемых колебаний есть рациональное число (частоты складываемых колебаний - кратны), то получаются траектории, именуемые **фигурами Лиссажу**.



15. Свободные затухающие колебания. Дифференциальное уравнение и его решение. Частота свободных затухающих колебаний. Коэффициент затухания, время релаксации, декремент и логарифмический декремент затухания. Добротность колебательной системы

Свободные затухающие колебания - это такие свободные колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.
Дифференциальное уравнение:
Второй закон Ньютона:

$$F + F = ma, \;\; F = -rV, \;\; F_c = -kx$$

$$-rV - kx = ma$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

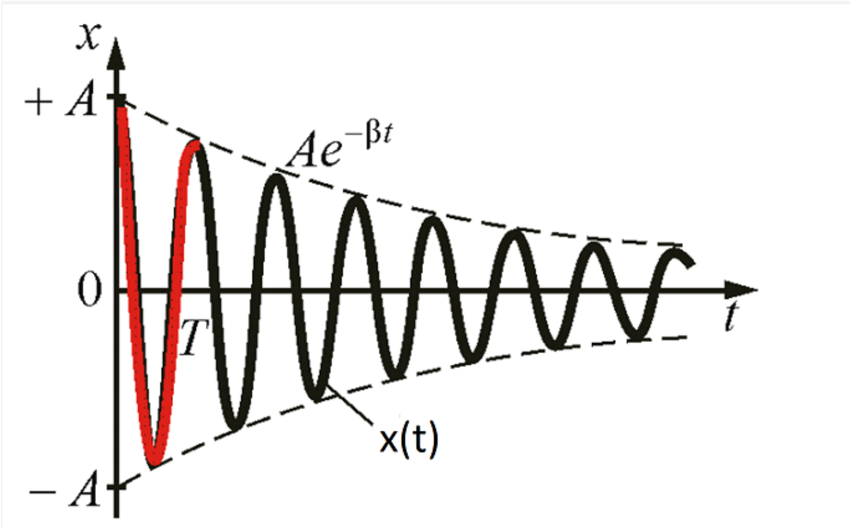
$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m};\ 2\beta = \frac{r}{m}.$$

Решение этого уравнения:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$



Частота свободных затухающих колебаний - это частота собственных колебаний системы, которая учитывает затухание колебаний во времени.

$$\frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

Подставим в дифференциальное уравнение выше:

$$\beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) -$$

$$-\omega^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0) - 2\beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0) - 2\beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0) + \omega_0^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0) = 0$$

Сократим на $A_0 e^{-\beta t}$:

$$-\beta^2\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$

где ω_0 - круговая частота собственных колебаний без учета затухания, β - коэффициент затухания.

Коэффициент затухания - компонент, характеризующий скорость затухания колебаний.

Время релаксации τ - это характеристика процесса затухания, которая определяет время, за которое система приближается к своему установившемуся состоянию равновесия после возмущения (т.е. время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз).

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e$$

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e$$

$$e^{\beta\tau} = e$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Декремент затухания χ - отношение амплитуды затухающих колебаний через период.

$$\chi = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

$$\lambda = \ln\chi = \beta T \text{ - логарифмический декремент}$$

Добротность колебательной системы Q - это безразмерная величина, характеризующая способность системы сохранять свою энергию при затухании колебаний (т.е. характеризует ширину резонансной кривой).

Она определяется как отношение запасенной в системе энергии к потерям энергии за один период свободных колебаний.

$$Q = 2\pi\frac{W_0}{W}$$

где W_0 - запасы энергии, W - потери энергии.

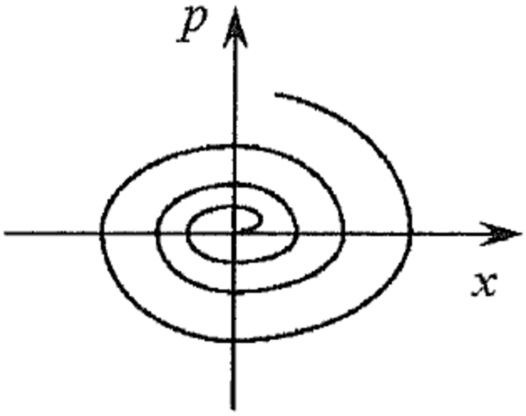
Так как энергия пропорциональна квадрату асплитуды, то:

$$Q = 2\pi\frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = 2\pi\frac{A_0 e^{-2\beta t}}{A_0 e^{-2\beta t} - A_0 e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi\frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\chi}}$$

Если $\chi \to 0$, то $1 - e^{-2\chi} = -(e^{-2\chi} - 1) \sim -(-2\chi) = 2\chi$, таким образом:

$$Q \approx \frac{\pi}{\chi}$$

Фазовая траектория затухающих колебаний



16. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение. Установившиеся вынужденные колебания. Механический резонанс. Резонансная частота.

Вынужденные колебания - колебания, происходящие под действием внешней периодической силы.
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (происходящих вдоль оси X):
Вынуждающая сила:

$$F_x = F_0 \cos \omega t$$

II закон Ньютона:

$$ma_x = -kx - rV_x + F_x$$

Таким образом, получаем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота.
Предположим, что рассматриваемые вынужденные колебания происходят по закону:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Найдем $\dot{x}, \ddot{x}$ и подставим в дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

В итоге:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) - 2\beta\omega A\sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A\cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t$$

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\cdot\big[\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi)\big]-2\beta\omega A\big[\sin(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\cos(\omega t)\big]-f_0\cos\omega t=0$$

$$\cos(\omega t)\cdot\big[A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\varphi)-2\beta\omega A\sin(\varphi)-f_0\big]+\sin(\omega t)\cdot\big[A(\omega^2-\omega_0^2)\sin(\varphi)-2\beta\omega A\cos(\varphi)\big]=0$$

Чтобы уравнение имело решение для любых t, нужно, чтобы коэффициенты при $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ равнялись 0, то есть:

$$\Big\{A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\varphi)-2\beta\omega A\sin(\varphi)-f_0=0A(\omega^2-\omega_0^2)\sin(\varphi)-2\beta\omega A\cos(\varphi)=0$$

$$\Big\{A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\varphi)-2\beta\omega A\sin(\varphi)=f_0A(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\varphi)+2\beta\omega A\cos(\varphi)=0$$

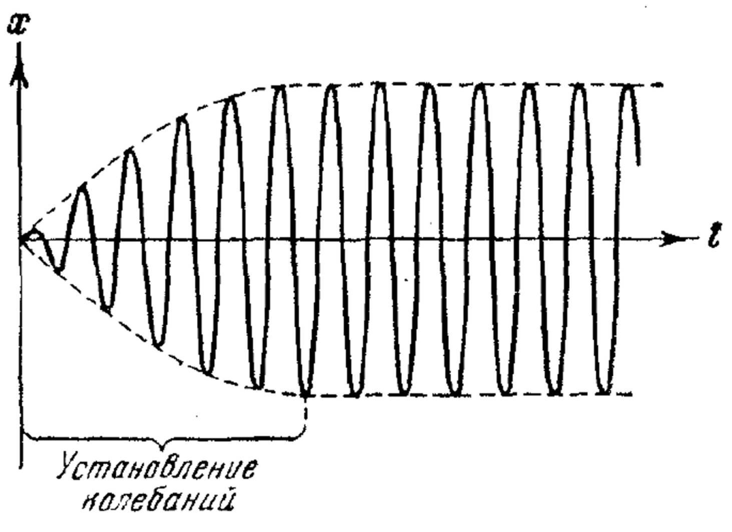
Возводим в квадрат и складываем:

$$f_0^2=\Big(A(\omega_0^2-\omega^2)\Big)^2+4\beta^2\omega^2A^2$$

$$f_0^2=A^2\Big((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\Big)$$

Откуда:

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$



Установившимися вынужденными колебаниями называют гармонические колебания с частотой вынуждающей силы.

Механический резонанс - явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний тела.

Резонансная частота - частота, при которой резко возрастает амплитуда вынужденных колебаний, наступает при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний.

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$A = max \Longleftrightarrow \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = min$$

Дифференцируем $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ по ω:

$$\frac{d\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\big)}{d\omega} = 2(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot(-2)\omega + 4\beta^2\cdot 2\omega = -4\omega\cdot\big((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta^2\big) = 4\omega\cdot\big(\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2)\big)$$

Точки экстремума:

$\omega = 0$, точка локального максимума (нужна точка локального минимума), поэтому смотрим следующее;

$\omega = -\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} < 0$, (частота не может быть меньше 0), поэтому смотрим следующее;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} > 0$, точка локального минимума. Таким образом, резонансная частота определяется следующим соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$