Подготовка к экзамену

Физика

Над файлом работали:
fiixii, pluttan

Оглавление

Билет №1

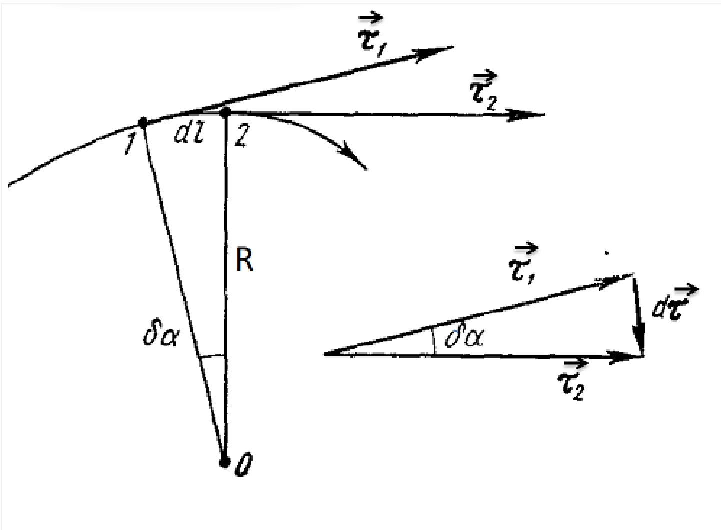
1. Радиус-вектор, скорость и ускорение материальной точки. Разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие (с выводом).

Радиус-вектор точки - вектор, направленный из начала координат в данную точку.
Скорость - векторная величина, характеризующуая быстроту перемещения и направление движения материальной точки в пространстве относительно выбранной системы отсчёта.
Ускорение - это величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости со временем.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{u}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$V\frac{d\vec{\tau}}{dt} = V\frac{d\vec{\tau} \cdot dl}{dt \cdot dl} = V^2\frac{d\vec{\tau}}{dl}$$

$$\delta\alpha = \frac{dl}{R} = \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{|d\vec{\tau}|}{1} \quad\Rightarrow\quad \frac{|d\vec{\tau}|}{dl} = \frac{1}{R},\ |d\vec{\tau}| = \frac{dl}{R}$$

При $dl \to 0 : \quad d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$, вводим единичный вектор $\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{|d\vec{\tau}|} = R\frac{d\vec{\tau}}{dl}$. Таким образом:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{R},\ V^2\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

В результате:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

где:

Тангенциальное (касательное) ускорение - компонента ускорения, характеризующая изменение скорости по величине

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}$$

Нормальное ускорение - компонента ускорения, характеризующая изменение скорости по направлению

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

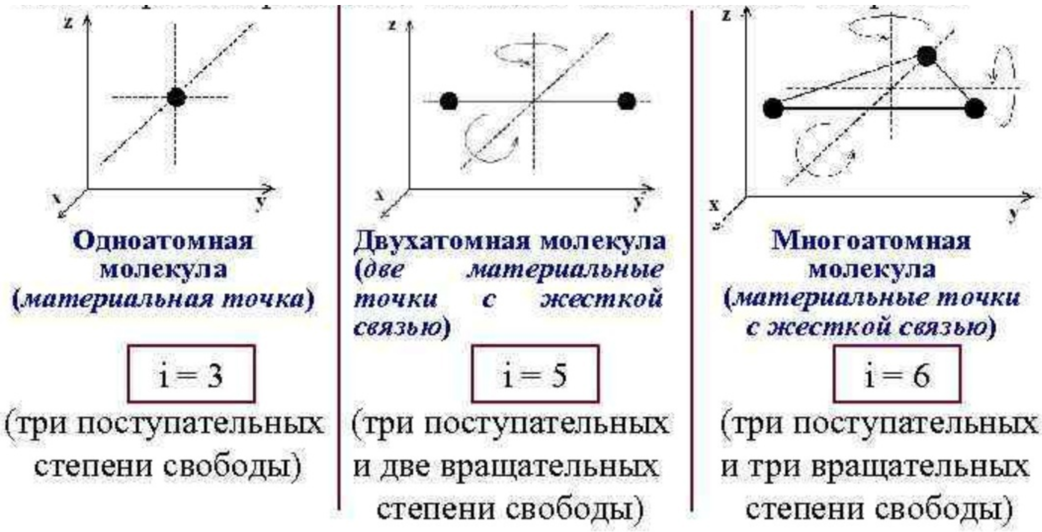
2. Понятие числа степеней свободы механической системы. Число степеней свободы молекул идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа (вывод на основе формулы для средней кинетической энергии поступательного движения молекул).

Числом степеней свободы называется наименьшее число независимых координат, которое необходимо ввести, чтобы определить положение тела в пространстве.

Число степеней свободы молекул идеального газа

Молекула идеального одноатомного газа может быть рассмотрена как материальная точка, обладающая 3-мя степенями свободы поступательного движения.

Для многоатомных молекул добавляются вращательные степени свободы. Таким образом, молекула идеального двухатомного газа обладает 3-мя поступательными и 2-мя вращательными степенями свободы. Для молекул трехатомных газов добавляется еще одна вращательная степень свободы.



Внутренняя энергия идеального газа

По закону равномерного распределения кинетической энергии по степеням свободы, энергия, приходящаяся на 1 степень свободы:

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2}kT$$

Тогда полная кинетическая энергия одной молекулы с числом степеней свободы i:

$$E_K = i\langle K\rangle = \frac{i}{2}kT$$

Так как у идеального газа отсутствует потенциальная энергия взаимодействия молекул, то внутренняя энергия равна суммарной кинетической энергии всех молекул:

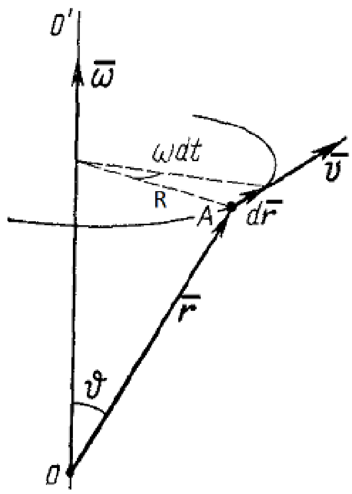
$$U = \sum_{i=1}^{N} E_K = NE_K = N\frac{i}{2}kT = \nu N_a\frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\nu RT,$$

$$U = \frac{i}{2}\nu RT$$

Билет №2

1. Угловые скорость и ускорение твердого тела при вращательном движении. Связь угла поворота, угловой скорости и углового ускорения. Связь угловой скорости с линейной. Все аналитические выражения необходимо вывести.

Угловая скорость - векторная величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки относительно центра вращения.
Угловое ускорение - векторная величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости.



Связь угла поворота, угловой скорости и углового ускорения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Вывод связей $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ с линейными величинами:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$V = \frac{dl}{dt}$$

При $d\varphi \to 0: \quad d\varphi \approx \sin d\varphi \approx \frac{dl}{R}$. Таким образом:

$$\omega = \frac{dl}{Rdt} = \frac{V}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{R} = \frac{a}{R}$$

2. Адиабатический процесс. Вывод уравнения Пуассона для идеального газа на основе известных формул для C_p и C_v.

Адиабатический процесс - это процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, т.е. $\delta Q = 0$.
Вывод уравнения Пуассона

$$\partial Q = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 0 = \Delta U + A,\; A = -\Delta U$$

Для малых изменений параметров:

$$dU + pdV = 0$$

$$dU = \nu C_V dT$$

dT находим из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT \;\; |d$$

$$d(pV) = pdV + Vdp,\;\; d(\nu RT) = \nu RdT$$

$$dT = \frac{pdV + Vdp}{\nu R}$$

таким образом,

$$dU = \nu C_V \frac{pdV + Vdp}{\nu R}$$

$$C_V \frac{pdV + Vdp}{R} + pdV = 0$$

$$C_V(pdV + Vdp) + pRdV = 0$$

$$pdV(C_V + R) + C_V Vdp = 0 \;\; | : \big(pVC_V\big)$$

Уравнение Майера: $C_V + R = C_p$

$$\frac{C_p}{C_V}\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$d(\ln V^{\frac{C_p}{C_V}}) + d(\ln p) = 0$$

$$d(\ln pV^{\frac{C_p}{C_V}}) = 0$$

$$pV^{\frac{C_p}{C_V}} = const, \;\; \gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

$$pV^{\gamma} = const$$

Билет №3

1. Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы (вывод на основе известных выражений для полной энергии и релятивистского импульса).

Релятивистский импульс частицы:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v}$$

Энергия покоя частицы:

$$W_0 = m_0c^2$$

Полная энергия частицы:

$$W = W_0 + W_K = m_0c^2 + (m - m_0)c^2 = mc^2$$

Рассмотрим:

$$W^2 - p^2c^2 = m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \frac{m_0^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}(c^2 - v^2) = \frac{m_0^2c^4(c^2-v^2)}{c^2-v^2} = m_0^2c^4$$

Таким образом, связь между импульсом и энергией релятивистской частицы определяется формулой:

$$W^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

2. Диффузия в идеальных газах. Вывод уравнения диффузии и формулы для коэффициента диффузии.

Диффузия – это процесс самопроизвольного выравнивания концентраций веществ в смесях. Например, в смеси двух газов условие отсутствия перемешивания состоит в том, что суммарное давление постоянно. По закону Дальтона $p = p_1 + p_2 = n_1kT + n_2kT = const$, поэтому для концентрации $n = n_1 + n_2 = const$. Введем физическую величину – относительную концентрацию молекул одного из газов $F_1 = \frac{n_1}{n}$, тогда для плотности потока концентрации

$$j_{n_1} = -\frac{1}{3}\langle\nu_1\rangle n\lambda_1\frac{d}{dx}\left(\frac{n_1}{n}\right) = -\frac{1}{3}\langle\nu_1\rangle\lambda_1\frac{dn_1}{dx}$$

Или $j_{n_1} = -D_1\frac{dn_1}{dx}$, $J_{n_1} = -D_1S\frac{dn_1}{dx}$ где $D_1 = \frac{1}{3}\langle\nu_1\rangle\lambda_1$ - коэффициент диффузии. Если m_1 - масса молекулы, то плотность газа $\rho_1 = m_1n_1$, поэтому для потока плотности получается уравнение, которое называется законом Фика

$$J_{\rho_1} = -D_1S\frac{d\rho_1}{dx}$$

Билет №4

1. Понятие эффективного диаметра молекулы. Вывод формулы для длины свободного пробега молекул идеального газа.

Эффективный диаметр молекулы — минимальное расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при столкновении.
Длина свободного пробега молекулы - это среднее расстояние, которое пролетает моле- кула между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами.
Рассмотрим газ, состоящий из одинаковых молекул. Размерами молекул не пренебрегаем, но средние значения величин скоростей молекул считаем одинаковыми.
Две молекулы столкнутся, если центр одной из них находится на расстоянии не большем, чем $d = 2r$ от центра другой при их встречном движении (r – радиус молекулы). Пусть одна из них покоится, а вторая налетает с относительной скоростью $v_{\text{отн}}$. Рассмотрим прямой цилиндр, связанный с этой покоящейся молекулой, определяемый условием, что внутри цилиндра не должно быть других молекул. Если объём этого цилиндра $V_0 = L\pi d^2$ (L - расстояние до соседней молекулы), то объем всего газа можно определить как $V = NV_0$, где N – количество молекул.
Тогда концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{L\pi d^2}, \Rightarrow\ L = \frac{1}{n\pi d^2}$$

Если λ - длина свободного пробега, то время между двумя последовательными столкновениями не зависит от системы отсчета. Пусть $\langle v\rangle$ - средняя скорость молекул, тогда

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\text{отн}}} = \frac{\lambda}{\langle v\rangle}, \Rightarrow\ \lambda = \frac{\langle v\rangle}{v_{\text{отн}}}L$$

Относительная скорость двух молекул $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1,\ \Rightarrow$

$$(\vec{v}_{\text{отн}},\ \vec{v}_{\text{отн}}) = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1,\ \vec{v}_2 - \vec{v}_1) = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1v_2\cos\alpha$$

Усредняем это выражение:

$$\langle(\vec{v}_{\text{отн}})^2\rangle = \langle v_1^2\rangle + \langle v_2^2\rangle - 2\langle v_1v_2\rangle\langle\cos\alpha\rangle$$

Для среднего значения должно выполняться $\int\limits_0^{2\pi}\langle\cos\alpha\rangle d\alpha = \int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha = 0$, откуда $\langle\cos\alpha\rangle = 0$.
Поэтому $\langle(\vec{v}_{\text{отн}})^2\rangle = \langle v_1^2\rangle + \langle v_2^2\rangle = 2\langle v^2\rangle$, тк по предположению в начале $\langle v_1^2\rangle = \langle v_2^2\rangle = \langle v^2\rangle$
В грубом приближении $\langle v_{\text{отн}}\rangle \approx \sqrt{2}\langle v\rangle$
В результате получаем формулу для длины свободного пробега молекул

$$\lambda\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

2. Консервативные силы. Работа в потенциальном поле. Связь между силой и потенциальной энергией. Выражение для нахождения силы в случае известной зависимости потенциальной энергии от координат. Все аналитические выражения необходимо вывести.

Консервативная сила - сила, работа которой не зависит от траектории, а определяется только начальным и конечный положением тела. Если работа силы зависит от траектории, то такие силы называются неконсервативными.
Работа в потенциальном поле:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Потенциальная энергия - скалярная физическая величина, равная работе, совершаемой потенциальной силой при перемещении тела из этой точки в другую, принятую за нуль отсчета потенциальной энергии.
Связь между силой и потенциальной энергией:

$$U = U(x, y, z)$$

$$A = -U$$

$$dA = -dU$$

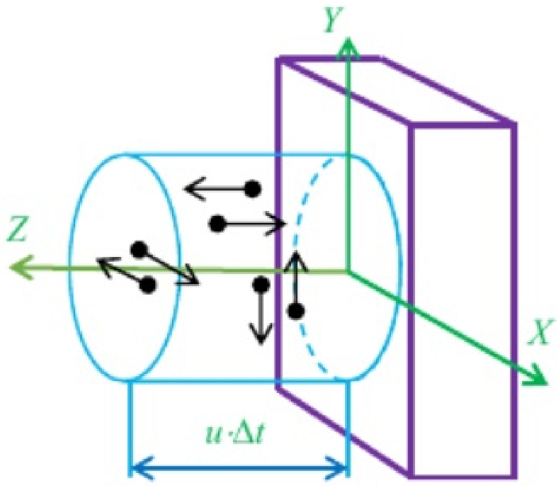
$$F = \frac{dA}{dr} = -\frac{dU}{dr}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad\, U$$

Билет №5

1. Основное уравнение МКТ идеального газа (с выводом). Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул (с выводом)

Рассмотрим механическую модель газа, находящегося в термодинамическом равновесии со стенками сосуда.
В качестве идеализации модели, заменим атомы в молекулах материальными точками. Предполагаем, что материальные точки не взаимодействуют друг с другом на расстоянии, поэтому потенциальную энергию такого взаимодействия принимаем нулевой.
Пусть $n = \frac{N}{V}$ - концентрация молекул газа, -температура газа, u - средняя скорость поступательного движения молекул. Выберем систему координат так, чтобы стенка сосуда лежала в плоскости XY, а ось Z была направлена перпендикулярно стенке внутрь сосуда.



Рассмотрим удары молекул о стенки сосуда. Т.к. удары упругие, то после удара о стенку импульс молекулы меняет направление, но его величина не меняется. За период времени Δt до стенки долетят только те молекулы, которые находятся от стенки на расстоянии не далее, чем $L = u\Delta t$. Общее число молекул в цилиндре, с площадью основания S и высотой L, объем которого равен $V = LS = u\Delta tS$ равно $N = nV = nu\Delta tS$.
В данной точке пространства можно условно выделить три различных направления движения молекул, например, вдоль осей X, Y, Z. Молекула может двигаться вдоль каждого из направлений “вперед” и “назад”. Поэтому по направлению к стенке, будут двигаться не все молекулы в выделенном объёме, а только шестая часть от их общего числа. Следовательно, количество молекул, которые за время Δt ударятся о стенку:

$$N_1 = \frac{N}{6} = \frac{nu\Delta tS}{6}$$

Изменение импульса молекул при ударе равно импульсы силы, действующей на молекулы со стороны стенки - с такой же по величине силой молекулы действуют на стенку

$$\Delta P_Z = P_{2Z} - P_{1Z} = F\Delta t$$

$$N_1 m_0 u - (-N_1 m_0 u) = F\Delta t$$

$$2N_1 m_0 u = F\Delta t$$

$$2 \cdot \frac{nu\Delta t S}{6} m_0 u = F\Delta t$$

$$\frac{1}{3} n m_0 u^2 = \frac{2}{3} n W_K^{\text{ПОСТ}}$$

где $W_K^{\text{ПОСТ}} = \frac{m_0 v^2}{2}$ - кинетическая энергия материальной точки (поступательного движения молекулы). Следовательно, давление такого (механического) газа пропорционально кинетической энергии поступательного движения молекул (центра масс молекулы)

$$p = \frac{2}{3} n W_K^{\text{ПОСТ}} - \text{основное уравнение МКТ}$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул

Закон *равномерного распределения энергии по степеням свободы* гласит, что средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы при тепловом движении равна

$$W_1 = \frac{1}{2} kT$$

Поэтому полная кинетическая энергия одной молекулы, у которой число степеней свободы равно i определяется соотношением

$$W_K = iW_1 = \frac{i}{2} kT$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы равна, очевидно, кинетической энергии движения центра масс (как точки), поэтому:

$$\langle W_K^{\text{ПОСТ}} \rangle = \frac{3}{2} kT$$

2. Импульс тела. Импульс механической системы. Уравнение изменения импульса механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения импульса (с выводом).

Импульс тела - векторная физическая величина, являющаяся мерой механического движения тела.

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

Механическая система - совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

Импульс механической системы - векторная величина, равная геометрической сумме импульсов всех точек системы:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i$$

Уравнение изменения импульса механической системы:

II закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}$$

По III з-ну Ньютона: $\vec{F}_{\text{внутр}} = \sum\limits_{i=1,\ j=1}^{n} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}\ \ (i \neq j)$, таким образом:

$$\vec{d}p = \vec{F}\,dt$$

Берем интеграл от левой и правой части, взяв соответствующие пределы интегрирования: $\vec{p}_1 = \vec{p}(t_1),\ \vec{p}_2 = \vec{p}(t_2)$.

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Закон сохранения импульса - импульс замкнутой системы не изменяется во времени.

Запишем второй з-н Ньютона в импульсной форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внутр}} + \vec{F}$$

Т.к. система замкнута, то $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{0}$;

По III з-ну Ньютона: $\vec{F}_{\text{внутр}} = \sum\limits_{i=1,\ j=1}^{n} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}\ \ (i \neq j)$.

В итоге, получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \ \ \Rightarrow \ \ \vec{p} = const = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i$$

Билет №6

1. Первое начало термодинамики в интегральной и дифференциальной форме. Работа, совершаемая телом при изменении объёма (вывод из определения механической работы). Работа идеального газа при изотермическом процессе (вывод из формулы для работы тела при изменении объёма).

Первое начало термодинамики
Количество теплоты, переданное системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними телами

$$Q = \Delta U + A$$

В дифференциальной форме первое начало термодинамики имеет следующий вид:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

Работа, совершаемая телом при изменении объёма
Работа, совершаемая телом (например, газом) над внешними телами при перемещении элемента поверхности этого тела (оболочки газа), площадью S, на расстояние Δh вдоль нормали к поверхности равна:

$$A = F\Delta h = pS\Delta h = p\Delta V$$

где: F - сила, действующая по нормали к поверхности , p - внешнее давление.
Работа идеального газа при изотермическом процессе

$$T = const,\ pV = \nu RT \ \Rightarrow$$

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p dV = \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

2. Момент импульса материальной точки и механической системы. Уравнение моментов механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения момента импульса механической системы (вывод из уравнения моментов).

Момент импульса - физическая величина, характеризующая количество вращательного движения.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = m[\vec{r} \times \vec{V}] = m[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$$

$$L = mr^2\omega = I\omega$$

Момент импульса механической системы - это сумма моментов импульса всех материальных точек, входящих в систему.

Уравнение моментов механической системы:

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{r} \times \vec{p}]^{\cdot} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} + m\vec{V} \times \vec{V} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

Где $\vec{F}$ - сумма всех действующих сил, $\vec{M}$ - сумма моментов всех действующих сил.

Закон сохранения момента импульса - момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.

Доказательство

Так как система замкнута, то сумма внешних сил равна нулю. Значит $\vec{M} = \vec{0} = \dot{\vec{L}}$, отсюда

$$\vec{L} = const$$

Основное уравнение динамики вращательного движения:

Вывод из уравнения моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Билет №7

1. Работа потенциальной силы. Полная механическая энергия. Закон изменения полной механической энергии механической системы. Закон сохранения полной механической энергии.

Работа потенциальной силы по замкнутому контуру равна 0.
Полная механическая энергия – сумма кинетической и потенциальной энергии тела.

$$E = E_K + E_\text{П}$$

Закон сохранения полной механической энергии.
Полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы остаётся постоянной.

2. Теплопроводность идеальных газов. Вывод уравнения теплопроводности (закона Фурье) и формулы для коэффициента теплопроводности.

Теплопроводность - процесс выравнивания температуры в различных точках среды. Молекулы газа, находясь в постоянном хаотическом движении, при упругих соударениях обмениваются кинетической энергией поступательного движения, что приводит к выравниванию температуры.
Введем физическую величину $F = \frac{3}{2}kT$- энергия теплового движения центра масс молекулы, тогда получаем уравнение

$$j_Q = -\frac{1}{3}\langle v\rangle n\frac{3}{2}k\lambda\frac{dT}{dx}$$

Но

$$n\frac{3}{2}k = \frac{N}{V}\frac{3}{2}k = \frac{\nu N_a}{V}\frac{3}{2}k = \frac{\nu}{V}\frac{3}{2}R = \frac{m}{V}\frac{\nu C_V}{m} = \rho C_{\text{уд V}},$$

$$j_Q = -\frac{1}{3}\langle v\rangle\rho C_{\text{уд V}}\lambda\frac{dT}{dx}$$

Если ввести обозначение

$$\frac{1}{3}\langle v\rangle\rho C_{\text{уд V}}\lambda = \chi - \text{коэффициент теплопроводности, то}$$

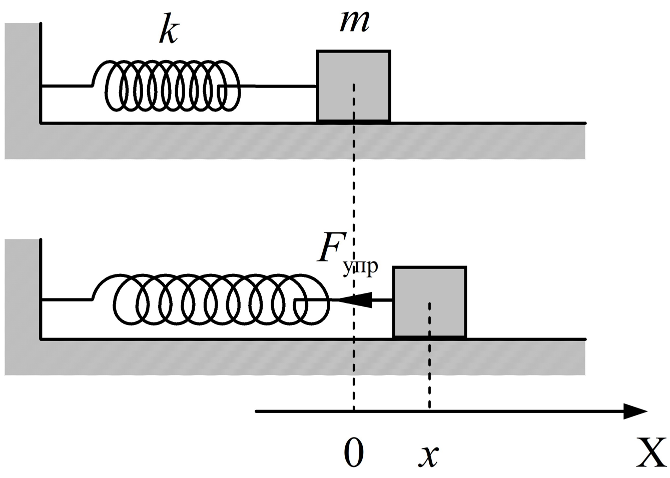
$$j_Q = -\chi\frac{dT}{dx} - \text{плотность потока теплоты}$$

$$J_Q = \chi S\frac{dT}{dx} - \text{поток теплоты}$$

Билет №8

1. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний (вывод на примере пружинного маятника или любой другой колебательной системы с квазиупругой силой). Его решение.

уравнение свободных гармонических колебаний:



Второй закон Ньютона:

$$ma = F,\ F = -kx$$

$$ma + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Пусть } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

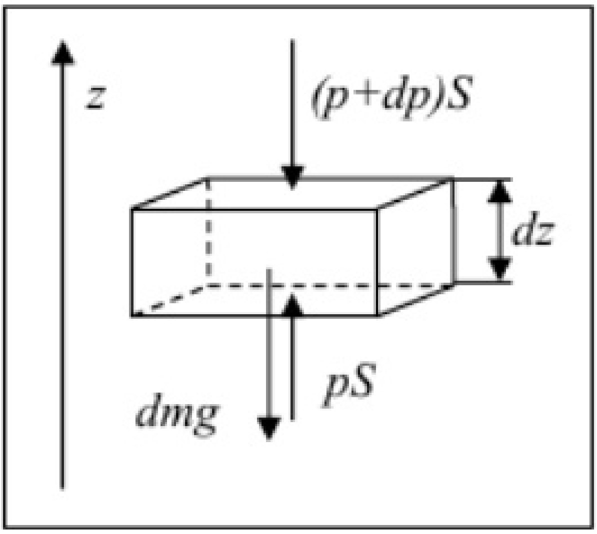
Получили Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

Решением этого уравнения является уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

2. Барометрическая формула (с выводом). Распределение Больцмана.

Пусть идеальный газ находится во внешнем поле силы тяжести при постоянной температуре.



Рассмотрим равновесие малого объёма газа

$$pS - dmg - S(p+dp) = 0$$

$$-dpS = \rho S dz \cdot g$$

где плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$$

$$-dp = \frac{p\mu}{RT} dz \cdot g$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{\mu g}{RT} dz$$

$$p = Ce^{\frac{-\mu g z}{RT}}$$

При $z = z_0: \ p = p_0$, получаем

$$p = p_0 e^{\frac{-\mu g z}{RT}} = p_0 e^{\frac{-m_0 g z}{kT}} \text{ – Барометрическая формула}$$

С учётом основного уравнения МКТ $p = nkT$ получаем

$$n = n_0 e^{\frac{-m_0 g z}{kT}}$$

Где n_0 - концентрация молекул при $z = 0$. Если учесть, что $W_\Pi = m_0 g z$ – потенциальная энергия молекул в поле сил тяжести, то получаем распределение Больцмана по энергиям

$$n = n_0 e^{\frac{-W_\Pi}{kT}}$$

Билет №9

1. Импульс тела. Импульс механической системы. Уравнение изменения импульса механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения импульса (с выводом).

Смотри в билет 5 задание 2

2. Теорема Карно (1-ая теорема Карно), с доказательством. Термодинамическая шкала температур. Неравенство Клаузиуса (вывод из теоремы Карно). Равенство Клаузиуса.

1-ая теорема Карно

КПД любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, не зависит от природы рабочего тела и устройства машины, а является функцией только температур нагревателя и холодильника.

Доказательство

Возьмем две тепловые машины, возможно, разной конструкции и использующие разные рабочие тела, но имеющие общие нагреватель и холодильник и работающие по циклу Карно.

Пусть КПД 1-й машины больше чем КПД 2-й машины $\eta_1 > \eta_2$.

Это означает, что $1 - \frac{Q'_{\text{Х1}}}{Q_{\text{Н1}}} > 1 - \frac{Q'_{\text{Х2}}}{Q_{\text{Н2}}}$. Запустим 1ю машину по прямому циклу, а вторую по обратному. Т.к. вторая машина будет работать как тепловой насос, то для второй машины коэффициент равен

$$\eta_{\text{ТН}} = \frac{Q'_{\text{Н2}}}{Q'_{\text{Н2}} - Q_{\text{Х2}}}$$

Учитывая, что для прямого и обратного (обратимого) цикла выполняется равенство $\eta_{\text{ПР}} = \frac{1}{\eta_{\text{ОБР}}}$, соотношение для КПД примет вид

$$1 - \frac{Q'_{\text{Х1}}}{Q_{\text{Н1}}} > 1 - \frac{Q_{\text{Х2}}}{Q'_{\text{Н2}}}, \text{ или } \frac{Q'_{\text{Х1}}}{Q_{\text{Н1}}} < \frac{Q_{\text{Х2}}}{Q'_{\text{Н2}}}$$

Установим связь между обеими машинами так, чтобы первая совершала работу над второй, и, при этом, выполнялось равенство $Q'_{\text{Х1}} = Q_{\text{Х2}}$. Тогда $Q_{\text{Н1}} > Q'_{\text{Н2}}$, $Q_{\text{Н1}} - Q'_{\text{Х1}} > Q'_{\text{Н2}} - Q_{\text{Х2}}$. Но это означает, что $A1$ - работа первой машины больше, чем $A2_{\text{ВНЕШ}}$ - работа, которую надо совершить над второй машиной. Так как работа второй машины

$$A2 = -A2_{\text{ВНЕШ}} = -(Q'_{\text{Н2}} - Q_{\text{Х2}})$$

то

$$A_{\text{ОБЩ}} = A1 + A2 = Q_{\text{Н1}} - Q'_{\text{Х1}} - (Q'_{\text{Н2}} - Q_{\text{Х2}}) > 0$$

Итак, общая теплота, получаемая холодильником, будет равна нулю, а у нагревателя будет отобрана теплота $Q_H = Q_{H1} - Q'_{H2} > 0$ и при этом совершена работа $A_{\text{ОБЩ}} > 0$. Противоречие со вторым началом термодинамики в формулировке Томсона. Следовательно, неравенство $\eta_1 > \eta_2$ не выполняется.

Пусть теперь $\eta_1 < \eta_2$. Запустим первую машину по обратному циклу, а вторую – по прямому. И повторим рассуждения.

Таким образом, машины имеют одинаковые КПД. Однако если рабочим телом одной из машин является идеальный газ, то КПД такого процесса известен $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H}$

В итоге получаем, что для любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно

$$\eta = 1 - \frac{Q'_X}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$$

Неравенство Клаузиуса

Из второй теоремы Карно следует $Q_{\text{НЕРАВ X}} > Q_{\text{НЕРАВ Н}}$. Перепишем его в виде

$$\frac{Q'_X}{T_X} \geq \frac{Q_H}{T_H}$$

подразумевая, что для обратимых процессов выполняется равенство, а для необратимых - неравенство. По договоренности об обозначениях $Q'_X = |Q_X|$, т.е. $Q'_X = -Q_X$. Следовательно

$$0 \geq \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q'_X}{T_X} = \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_X}{T_X}$$

В общем случае циклический процесс можно разделить на некоторое множество участков, на которых подводится или отводится теплота.

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Величина $\frac{Q}{T}$ называется приведённым количеством теплоты. В пределе для элементарных количеств теплоты

$$\oint_{\text{ЦИКЛ}} \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

*(Кружок в интеграле показывает, что процесс круговой.)

Это соотношение носит название **неравенства Клаузиуса** - суммарное количество приведенной теплоты в любом замкнутом цикле для любой термодинамической системы не может быть положительным.

Знак равенства можно поставить только для обратимых процессов.

Билет №10

1. Момент импульса материальной точки и механической системы. Уравнение моментов механической системы (вывод из законов Ньютона). Закон сохранения момента импульса механической системы (вывод из уравнения моментов).

Смотри в билет 6 задание 2

2. Теплоемкость. Теплоемкость идеального газа в изохорическом и изобарическом процессах. Уравнение Майера (с выводом).

Теплоемкостью тела называется коэффициент пропорциональности между изменением его температуры и количеством подведённой теплоты $C = \frac{Q}{\Delta T}$.
Теплоемкость идеального газа в изохорическом процессе

$$V = const, \Rightarrow A = 0, \; Q = \Delta U$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R \Delta T$$

$$Q = \nu C_V \Delta T$$

$$\Rightarrow \; C_V = \frac{i}{2}R$$

Теплоемкость идеального газа в изобарическом процессе

$$p = const \;\Rightarrow\; A = p(V_K - V_H)$$

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2}\nu R\Delta T + \nu R T_K - \nu R T_H = \left(\frac{i}{2} + 1\right)\nu R \Delta T$$
$$Q = \nu C_p \Delta T$$

$$\Rightarrow \; C_p = \frac{i+2}{2}R = \frac{i}{2}R + R = C_V + R - \text{соотношение Майера}$$

Билет №11

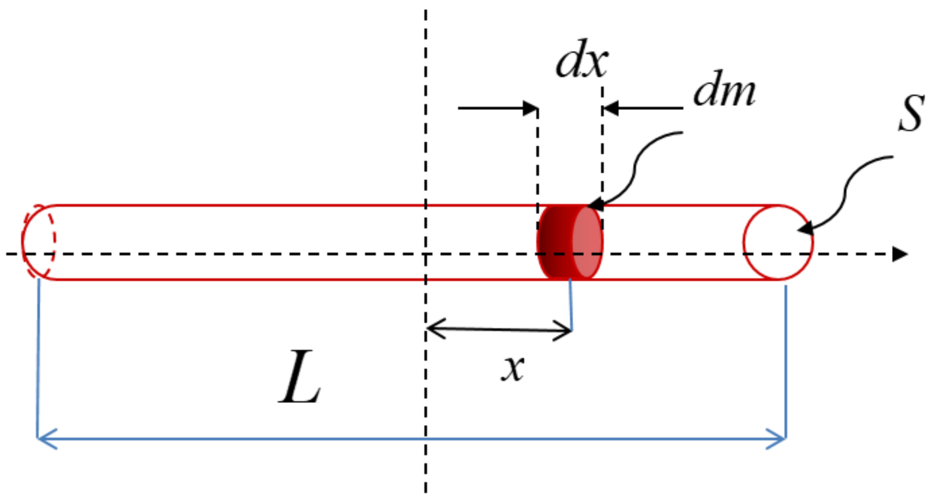
1. Момент инерции твердого тела относительно оси. Момент инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его центр (с выводом).

Моментом инерции твердого тела относительно данной оси называется физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равна сумме моментов инерции всех частиц тела.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

Момент инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его центр

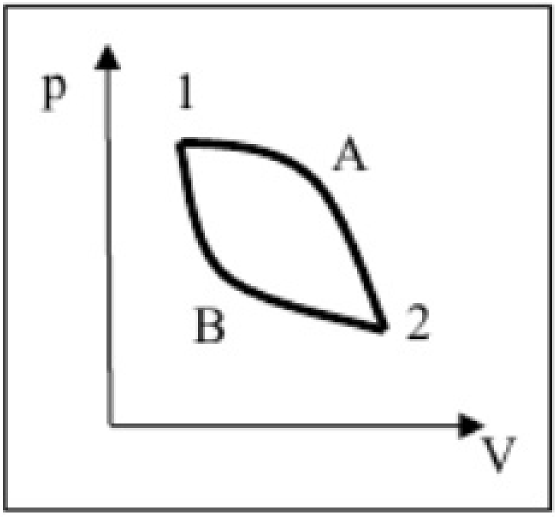


$$dm = \frac{m}{L}dx,\ I_0 = dm \cdot x^2$$

$$I = 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} I_0 = 2 \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dm = 2 \cdot \frac{m}{L} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2 \cdot \frac{m}{L} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{L}{2}} = 2 \cdot \frac{m}{L} \cdot \frac{L^3}{24} = \frac{mL^2}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} mL^2$$

2. Термодинамическая энтропия (определение и обоснование того, что она является функцией состояния термодинамической системы). Закон возрастания энтропии в замкнутой системе (с доказательством).



Рассмотрим произвольный цикл обратимого циклического процесса, состоящий из двух процессов 1A2 и 2B1. Суммарное приведенное количесвто теплоты для такого процесса равно 0

$$\oint\limits_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1A2} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Таким образом,

$$\int\limits_{1A2} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1B2} \frac{\delta Q}{T}$$

т.е. значение интеграла не зависит от процесса, а только от начального и конечного состояний. Поэтому элементарное количество приведенной теплоты для обратимого процесса является полным дифференциалом некоторой функции равновесного состояния системы

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

изменение которой равно суммарному количеству приведенной теплоты в равновесном процессе $S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}$. Эта величина называется **термодинамической энтропией** S.

Теперь рассмотрим циклический процесс, одна половина которого 1A2 - необратимый процесс, а вторая половина 2B1 - обратимый процесс. Тогда должно быть

$$\oint\limits_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} \le 0$$

$$\oint\limits_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1A2} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1A2} \frac{\delta Q}{T} - \int\limits_{1B2} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1A2} \frac{\delta Q}{T} - (S_2 - S_1) \le 0$$

т.е.

$$S_2 - S_1 \geq \int\limits_{1A2} \frac{\delta Q}{T}$$

Если система является адиабатически изолированной, то $\delta Q = 0$, поэтому $S_2 - S_1 \geq 0$.
В адиабатически изолированной системе энтропия не убывает. Это - закон возрастания энтропии для адиабатически замкнутой системы.

Билет №12

1. Работа силы (определение для общего случая). Кинетическая энергия. Связь работы и изменения кинетической энергии (с выводом). Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (с выводом).

Работа - скалярная величина, равная произведению проекции силы на направление перемещения f_S и пути S, проходимого точкой приложения силы.

$$A_{a \to b} = f_S S$$

Кинетическая энергия - функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения.

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Связь работы с изменением кинетической энергии: работа силы, примененной к телу на пути r, численно равна изменению кинетической энергии этого тела.

$$dA = Fdr = m\frac{dV}{dt}dr = mVdV = d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dK$$
$$dA = dK$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна:

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

2. Барометрическая формула (с выводом). Распределение Больцмана.

Смотри в билет 8 задание 2

Билет №13

1. Консервативные силы. Работа в потенциальном поле. Связь между силой и потенциальной энергией. Выражение для нахождения силы в случае известной зависимости потенциальной энергии от координат. Все аналитические выражения необходимо вывести.

Смотри в билет 4 задание 2

2. Энтропия в статистической физике. Статистический вес. Статистическое обоснование второго начала термодинамики. Формула Больцмана для статистической энтропии. Аддитивность энтропии.

Для равновесных систем вероятность возникновения флуктуации обратно пропорциональна её величине – чем больше величина отклонения, тем меньше вероятность её возникновения. Например, вероятность того, что все молекулы газа соберутся в одной части сосуда очень мала, т.е. процесс самопроизвольного перехода в неравновесное состояние маловероятен, что согласуется со вторым началом термодинамики. Всякий самопроизвольный необратимый процесс переводящий систему из неравновесного состояния в равновесное с гораздо большей вероятностью протекает в природе, чем обратный ему процесс. Необратимыми являются те процессы, вероятность протекания которых в прямом направлении выше, чем в обратном. Это приводит к возникновению в природе преимущественного направления протекания термодинамических процессов. Термодинамической величиной, характеризующей направление протекания процесса, является энтропия.

Пусть в сосуде, объем которого V_0 находится одна молекула. Тогда вероятность того, что она будет находиться в части сосуда, объем которой V, равна $p(V) = \frac{V}{V_0}$. Если молекул две, то $p(V) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$. Если молекул - N, то $p(V) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^N$. Поэтому отношение вероятностей для разных объемов равно

$$\frac{p(V_1)}{p(V_2)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N$$

С другой стороны, рассмотрим изотермическое расширение идеального газа от объёма V_1 до объема V_2. В этом случае $dU = 0$, поэтому $\delta Q = \delta A = \nu RT dV$, следовательно

$$S_2 - S_1 = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{V_1}^{V_2} \nu R \frac{dV}{V} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Однако $\nu R = \frac{N}{N_A} R = Nk$, поэтому

$$S_2 - S_1 = k \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N = k \ln \left(\frac{p(V_2)}{p(V_1)}\right)$$

Из этой формулы следует, что энтропия состояния пропорциональна вероятности того, что система придет в это состояние.

Статистическим весом G макроскопического состояния называется величина, численно равная количеству равновесных микросостояний, с помощью которых может быть реализовано рассматриваемое макросостояние. Статистический вес пропорционален вероятности $G \sim p$. Если система состоит из N частиц, каждая из которых может находится в одном из K дискретных состояниях, то статистический вес системы равен

$$G = \frac{N!}{N_1!N_2!...N_K!}K^{-N}$$

где N_i - число частиц в состоянии с номером i, и $\sum\limits_{i=1}^{K} N_i = N$

Данное рассуждение может служить обоснованием для **формулы Больцмана**, связывающей энтропию со статистическим весом

$$S = k \ln G$$

Билет №14

1. Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести (в общем случае и для однородного поля, с выводом)

Потенциальная энергия - скалярная физическая величина, равная работе, совершаемой потенциальной силой при перемещении тела из этой точки в другую, принятую за нуль отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия в поле силы тяжести в общем случае:

Закон всемирного тяготения: $\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$

$$dA = Fdr = F|dr|\,cos(180\ -\ \alpha) = -F|dr|\,cos(\alpha)$$

$$dA = -Fdr$$

$$U = A = -\int\limits_r^{\infty} Fdr = -\int\limits_r^{\infty} G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{Mm}{r}$$

Для однородного поля

$$W_{\text{П}} = SF_{\text{сопр.}}ds = A_{\text{сопр}}$$

2. Термодинамические потенциалы: энтальпия, свободная энергия Гельмгольца, энергия Гиббса (все с выводом).

Термодинамические потенциалы

Термодинамические потенциалы (термодинамические функции) — это определённые функции объёма, давления, температуры, энтропии, числа частиц системы и других макроскопических параметров, характеризующих состояние системы, обладающие следующим свойством: если известен термодинамический потенциал, то путём его дифференцирования по отмеченным выше параметрам можно получить все другие параметры, определяющие состояние системы.

Энтальпия

Выберем в качестве независимых параметров давление p и энтропию S.

С учетом равенства $d(pV) = pdV + Vdp$, и основного уравнения $TdS = dU + pdV$, получаем

$$TdS + Vdp = dU + pdV + Vdp$$

$$TdS + Vdp = d(U + pV)$$

Введем обозначение $H = U + pV$. Тогда $dH = TdS + Vdp$ и

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p=const}, V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S=const}$$

Таким образом, функция $H = U + pV$ является термодинамическим потенциалом и носит название **энтальпия**.

Свободная энергия Гельмгольца

Выберем в качестве независимых параметров объём V и температуру T.

Перепишем основное уравнение $dS = dU + pdV$ в виде $-pdV = dU - TdS$ и с учётом равенства $d(TS) = TdS + SdT$ получаем

$$-pdV - SdT = dU - TdS - SdT$$

$$-pdV - SdT = d(U - TS)$$

Вводим обозначение $\Psi = U - TS$, тогда $d\Psi = -pdV - SdT$ и

$$p = -\Big(\frac{\partial \Psi}{\partial V}\Big)_{T=const},\ S = -\Big(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\Big)_{V=const}$$

Таким образом, $\Psi = U - TS$ - термодинамический потенциал, который называется **свободной энергией** или **термодинамическим потенциалом Гельмгольца**.

Энергия Гиббса

Выберем в качестве независимых параметров давление p и температуру T. Рассмотрим функцию $G = H + \Psi - U = U + pV + U - TS - U = U + pV - TS$

$$dG = dH + d\Psi - dU = TdS + Vdp - pdV - SdT - TdS + pdV$$

$$dG = Vdp - SdT$$

Так как

$$V = \Big(\frac{\partial G}{\partial p}\Big)_{T=const},\ S = -\Big(\frac{\partial G}{\partial T}\Big)_{p=const}$$

то $g = U + pV - TS$ - потенциал, который носит название **энергия Гиббса**

Билет №15

1. Преобразования Лоренца для координат и времени (вывод из постулатов СТО).

Пусть K - неподвижная система; K' - подвижная система (движется со скоростью V по оси Ox)
Пусть в момент $t' = t = 0$, когда начала координат O и O' совпадали, в них проихошшла вспышка света, и стала распространяться сферическая световая волна. Из I постулата фронт этой волны в обоих СО будет сферой. Из II постулата, эта сфера растет со скоростью c:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

В K':

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2$$

попробуем преобразования Галилея:

$$x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$$

$$x^2 + \underline{(-2Vxt)} + \underline{V^2t^2} + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Сравним с $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$. Нужно избавиться от подчеркнутых членов. Для этого, попробуем следующие преобразования:

$$x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t - \alpha x$$

$$x^2 - 2Vxt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2\big(t^2 - 2\alpha tx + \alpha^2x^2\big)$$

$$x^2 - 2Vxt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - 2\alpha txc^2 + \alpha^2x^2c^2$$

Попробуем взять $\alpha = \frac{V}{c^2}$:

$$x^2 - 2Vxt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - 2Vxt + \frac{V^2x^2}{c^2}$$

перегруппируем члены:

$$x^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

Подправим преобразования так, чтобы исчезли выражения в скобках:

$$x' = \big(x - Vt\big)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Таким образом, после подстановки в $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$.

Полученные выше преобразования и есть преобразования Лоренца.

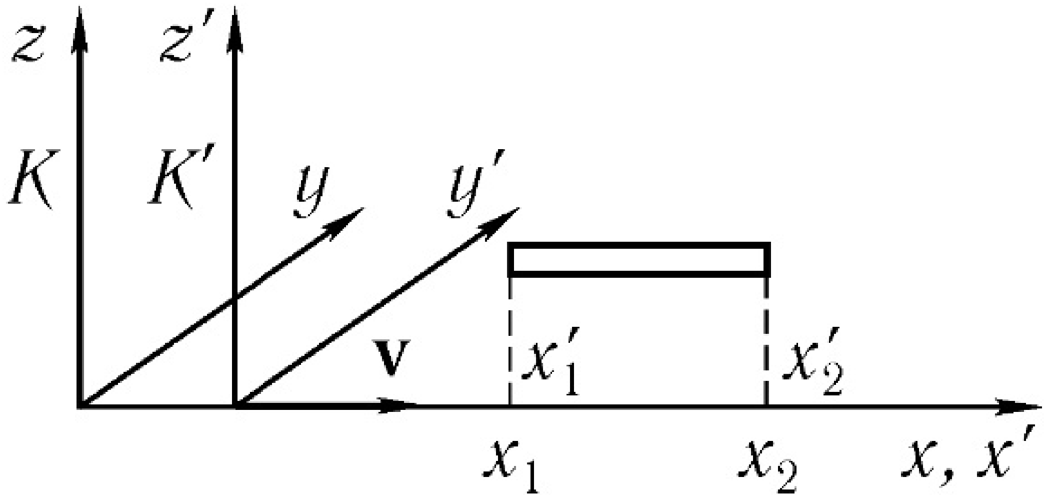
2. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний (вывод на примере пружинного маятника или любой другой колебательной системы с квазиупругой силой). Его решение.

Смотри в билет 8 задание 1

Билет №16

1. Вывод преобразований Лоренца выражений для Лоренцева сокращения длины и изменения промежутка времени между событиями при переходе в другую систему отсчета в СТО.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси Ox и покоящийся относительно K'.



Длина в этой системе равна $l_0 = x_2' - x_1'$.
Относительно системы K стержень движется, вместе с системой K', со скоростью V. Тогда в системе K длина стержня $l = x_2 - x_1$, при этом

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

или $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Т.е. длина движущегося стержня короче покоящегося.
Пусть в некоторой точке, неподвижной относительно движущейся системы K', происходит процесс длительностью $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$.
Относительно системы K, точка, в которой происходит процесс, перемещается, и $\Delta t = t_2 - t_1$. При этом

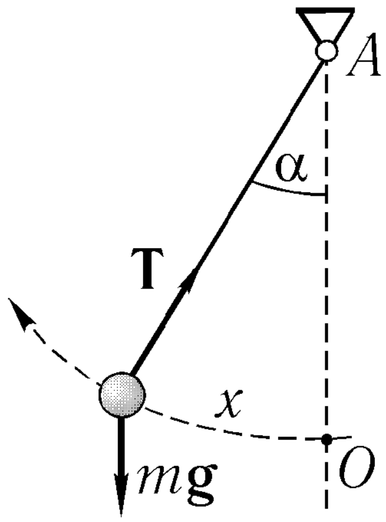
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Т.е. движущиеся часы идут медленнее покоящихся.

2. Математический и физический маятники. Вывод формул для их собственных частот.

Для математического маятника с длиной подвеса l, собственная частота определяется следующей формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



Вывод:

Основной закон динамики вращательного движения в проекции на ось Oz (ось проходит через точку подвеса, перпендикулярно плоскости, в которой происходит движение):

$$M_0 = I\varepsilon,\ M_0 = M_{mg} = -mgl\sin(\alpha)$$

При малых α, можем принять $\sin(\alpha) \approx \alpha$, а также, $I = ml^2$ так как маятник - математический (на конце нити - материальная точка):

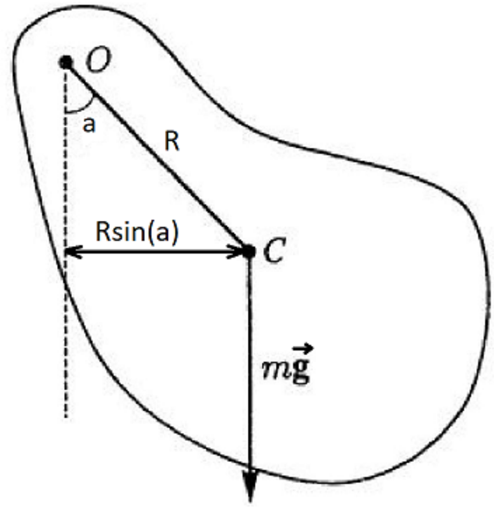
$$ml^2\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0,\ \text{где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Для физического маятника с моментом инерции I (относительно оси, проходящей через точку подвеса), массой m и расстоянием R (между центром масс и точкой подвеса), собственная частота определяется следующей формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$$



Вывод:

Основной закон динамики вращательного движения в проекции на ось Oz (ось проходит через точку подвеса, перпендикулярно плоскости, в которой происходит движение):

$$M_0 = I\varepsilon,\ M_0 = M_{mg} = -mgR\sin(\alpha)$$

При малых α, можем принять $\sin(\alpha) \approx \alpha$:

$$I\ddot{\alpha} + mgR\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgR}{I}\alpha = 0,\ \text{где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$$

Билет №17

1. Релятивистский закон сложения скоростей (используя преобразования Лоренца, выведите формулы для преобразования каждой из трех компонент скорости)

Дифференцируем выражения для преобразований Лоренца по t':

$$x' = (x - Vt)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y' = y,\ t' = \left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

по правилу

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt},\ u'_y = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}$$

получаем

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - u_x\frac{V}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x\frac{V}{c^2}}$$

2. Сложение гармонических колебаний перпендикулярного направления равных частот. Сложение гармонических колебаний перпендикулярного направления, отношение частот которых рационально (фигуры Лиссажу).

$$x(t) = A_x\cos(\omega_x t)$$

$$y(t) = A_y\cos(\omega_y t+\varphi)$$

1. Частоты равны: $\omega_x = \omega_y = \omega$:

Преобразуем полученные выше равенства:

$$x = A_x\cos(\omega t)$$

$$y = A_y\cos(\omega t+\varphi) = A_y\big(\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)\big)$$

Поделим обе части обоих уравнений на амплитуду:

$$\frac{x}{A_x} = \cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{A_y} = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

Преобразуем второе уравнение, подставив $cos(\omega t) = \frac{x}{A_x}$:

$$\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A_x}\cos(\varphi) = -\sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

Возводим в квадрат:

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\varphi) + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\cos^2(\varphi) = \big(1-\cos^2(\omega t)\big)\sin^2(\varphi)$$

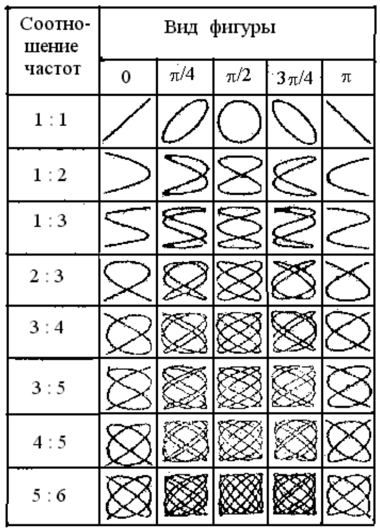
$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\varphi) + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\cos^2(\varphi) = \big(1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\big)\sin^2(\varphi)$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_xA_y}\cos(\varphi) + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = \sin^2(\varphi)$$

Получили уравнение эллипса. От φ будет зависеть ориентация осей эллипса, от амплитуд колебаний - размеры эллипса. Некоторые случаи вынесены в табличке ниже, на первой строке (отношение частот 1:1).

1. Частоты не равны (кратны): $\omega_x \neq \omega_y$:

В этом случае получаем траектории, имеющие довольно сложный вид. Если отношения частот складываемых колебаний есть рациональное число (частоты складываемых колебаний - кратны), то получаются траектории, именуемые **фигурами Лиссажу**.



Билет №18

1. Интервал между событиями в СТО. Инвариантность интервала (доказательство на основе преобразований Лоренца).

Интервал между событиями в СТО - величина, квадрат которой определяется соотношением

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]$$

Докажем, что s не зависит от системы отсчета.
Найдем $(s')^2$ в системе K':

$$(s')^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - \left[(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2\right]$$

Подставим вместо $x',\ y',\ z',\ t'$ выражения для преобразований Лоренца:

$$(s')^2 = c^2\left(\frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)^2 - \left[\left(\frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]$$

Первые две скобки расписываем как разность квадратов:

$$(s')^2 = \left(\frac{(c+V)(t_2 - t_1) - \left(1 + \frac{V}{c}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)\left(\frac{(c-V)(t_2 - t_1) + \left(1 - \frac{V}{c}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right) - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z$$

В результате математических преобразований получаем:

$$(s')^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] = s^2$$

Таким образом, величина интервала не зависит от системы отсчета.

2. Сложение гармонических колебаний одинакового направления близких частот. Биения. Все аналитические выражения необходимо вывести.

При сложении гармонических колебаний одинакового направления и близких частот, результирующее смещение будет суммой нескольких смещений. Например:
Пусть есть два гармонических колебания одинакового направления и близких частот, с одинаковыми амплитудами и с начальными фазами, равными 0:

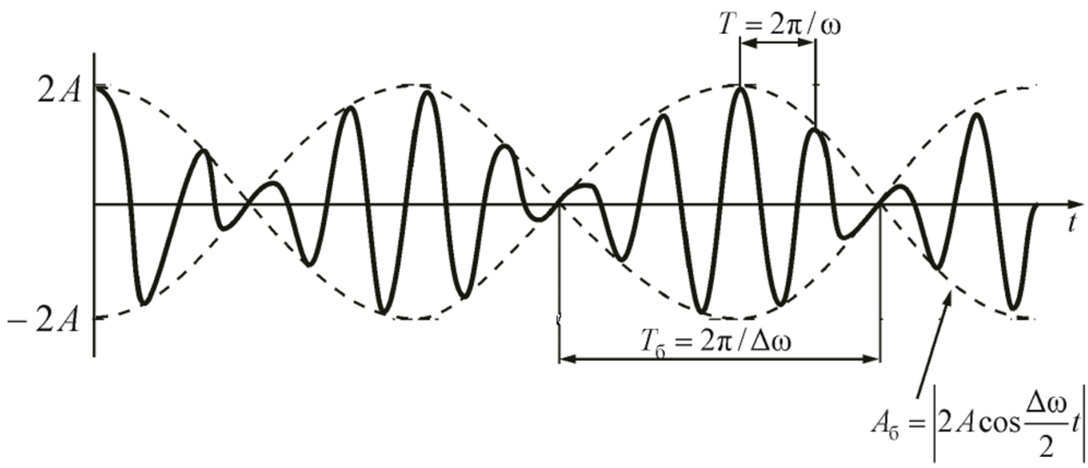
$$x_1 = A\cos(t)$$

$$x_2 = A\cos\big((+\Delta\omega)t\big)$$

Тогда суммарное колебание будет иметь вид:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(t) + A\cos\big((+\Delta\omega)t\big) = 2A\cos\big(\frac{\Delta\omega}{2}t\big)\cos(\omega t)$$

Отсюда появляется понятие биений. **Биения** - это периодическое изменение амплитуды колебаний, которое возникает при сложении колебаний с близкими, но **не равными частотами**.



Билет №19

1. Область применимости СТО. Постулаты СТО. Выражение для импульса в СТО (без вывода). Основное уравнение релятивистской механики (без вывода).

Область применимости СТО:

1. для слабых гравитационных полей.
2. для инерциальных систем отсчета.
3. для движения с релятивистскими скоростями (т.е. скоростями, близкими к c).

Постулаты СТО:

1. Принцип относительности: все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной ИСО к другой (протекают одинаково во всех ИСО).

2. Принцип инвариантности скорости света: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех ИСО.

Выражение для импульса в СТО

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Основное уравнение релятивистской механики

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)$$

2. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (с выводом). Резонанс.

Вынужденные колебания - колебания, происходящие под действием внешней периодической силы.
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (происходящих вдоль оси X):
Вынуждающая сила:

$$F_x = F_0 \cos\omega t$$

II закон Ньютона:

$$ma_x = -kx - rV_x + F_x$$

Таким образом, получаем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos\omega t$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t,$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота.
Предположим, что рассматриваемые вынужденные колебания происходят по закону:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Найдем $\dot{x}, \ddot{x}$ и подставим в дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

В итоге:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)-2\beta\omega A\sin(\omega t+\varphi)+\omega_0^2 A\cos(\omega t+\varphi)=f_0\cos\omega t$$

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\cdot\big[\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi)\big]-2\beta\omega A\big[\sin(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\cos(\omega t)\big]-f_0\cos\omega t=0$$

$$\cos(\omega t)\cdot\left[A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\varphi)-2\beta\omega A\sin(\varphi)-f_0\right]+\sin(\omega t)\cdot\left[A(\omega^2-\omega_0^2)\sin(\varphi)-2\beta\omega A\cos(\varphi)\right]=0$$

Чтобы уравнение имело решение для любых t, нужно, чтобы коэффициенты при $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ равнялись 0, то есть:

$$\Big\{A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\varphi)-2\beta\omega A\sin(\varphi)-f_0=0A(\omega^2-\omega_0^2)\sin(\varphi)-2\beta\omega A\cos(\varphi)=0$$

$$\Big\{A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\varphi)-2\beta\omega A\sin(\varphi)=f_0A(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\varphi)+2\beta\omega A\cos(\varphi)=0$$

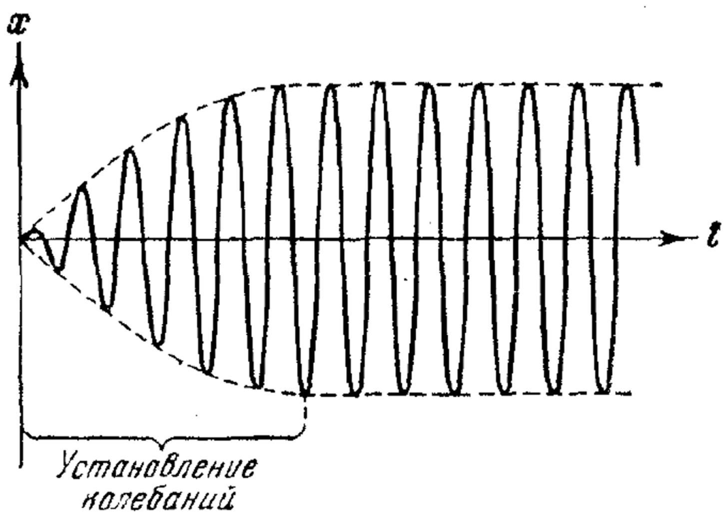
Возводим в квадрат и складываем:

$$f_0^2=\Big(A(\omega_0^2-\omega^2)\Big)^2+4\beta^2\omega^2A^2$$

$$f_0^2=A^2\Big((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\Big)$$

Откуда:

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$



Механический резонанс - явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний тела.

Резонансная частота - частота, при которой резко возрастает амплитуда вынужденных колебаний, наступает при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний.

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$A = max \Longleftrightarrow \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = min$$

Дифференцируем $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ по ω:

$$\frac{d\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\big)}{d\omega} = 2(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot(-2)\omega + 4\beta^2\cdot 2\omega = -4\omega\cdot\big((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta^2\big) = 4\omega\cdot\big(\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2)\big)$$

Точки экстремума:
$\omega = 0$, точка локального максимума (нужна точка локального минимума), поэтому смотрим следующее;
$\omega = -\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} < 0$, (частота не может быть меньше 0), поэтому смотрим следующее;
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} > 0$, точка локального минимума. Таким образом, резонансная частота определяется следующим соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Билет №20

1. Кинетическая энергия релятивистской частицы (выведите, считая известным основное уравнение релятивистской динамики). Полная энергия и энергия покоя в СТО.

Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$dT = dA = \vec{F}d\vec{r} = \frac{s\vec{p}}{dt}d\vec{r} = d\vec{p}\frac{d\vec{r}}{t} = d\vec{p}\,\vec{v}$$

$$d\vec{p} = d(m\vec{v}) = md\vec{v} + \vec{v}dm$$

$$d\vec{\ }p\vec{v} = m\vec{v}d\vec{v} + v^2dm = mdv^2 + v^2dm$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ \Rightarrow\ v^2 = c^2 - \frac{m_0^2}{m^2}c^2$$

$$dv^2 = \frac{2c^2m_0^2}{m^3}dm$$

$$d\vec{p}\,\vec{v} = c^2\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 dm + c^2dm - c^2\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 dm = c^2dm$$

$$T = \int_0^T dT = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

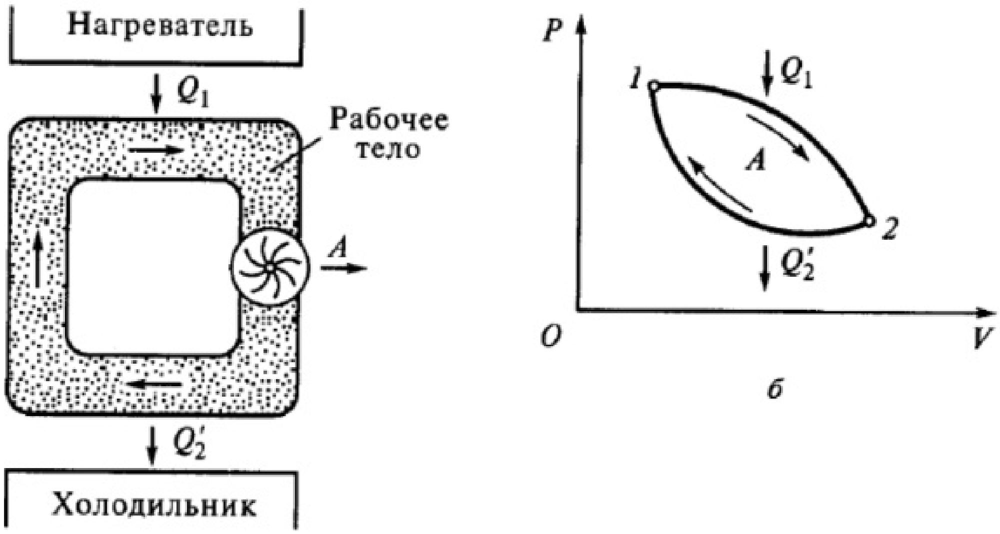
Полная энергия и энергия покоя

Энергия покоя: $E_0 = m_0c^2$

Полная энергия: $E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = E_0 + T$

2. Тепловые машины (схема и КПД). Холодильные машины (схема и КПД). Второе начало термодинамики в формулировках Клаузиуса и Томсона (Кельвина).

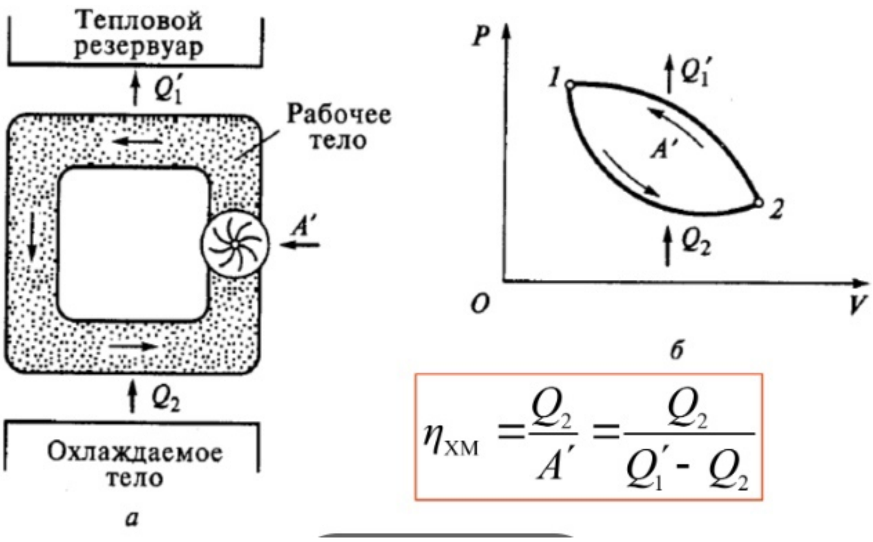
Тепловые машины или **тепловые двигатели**, предназначены для получения полезной работы за счет теплоты, выделяемой вследствие химических реакций (сгорания топлива), ядерных превращений или по другим причинам. Для функционирования тепловой машины обязательно необходимы следующие составляющие: нагреватель, холодильник и рабочее тело.



КП

$$\eta = \frac{A_{\text{цикл}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{Q_{\text{получ}} + Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{Q_{\text{получ}} - Q'_{\text{отд}}}{Q_{\text{получ}}} = 1 - \frac{Q'_{\text{отд}}}{Q_{\text{получ}}}$$

Холодильные машины - машины, работающие по обратному циклу Карно. Таким образом, теплота забирается у менее нагретого тела (холодильника) и отдается более нагретому телу (нагревателю).



$$\boxed{\eta_{\text{ХМ}} = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1' - Q_2}}$$

КПД:
В холодильной машине внешние тела совершают работу $A_{\text{ВНЕШН}}$ по отводу теплоты от охлаждаемого тела Q_2 и передачи теплоты к тепловому резервуару Q_1'. КПД холодильной машины - это отношение отведенного количества теплоты к затраченной работ

$$\eta = \frac{Q_2}{A_{\text{ВНЕШН}}} = \frac{Q_2}{Q_1' - Q_2}$$

Второе начало термодинамики в формулировках Клаузиуса и Томсона (Кельвина)
Формулировка Клаузиуса: невозможен самопроизвольный переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому.
Формулировка Томсона (Кельвина): невозможны процессы, единственным результатом которых было бы превращение тепла целиком в работу.

Билет №21

1. Математический и физический маятники. Вывод формул для их собственных частот.

Смотри в билет 16 задание 2

2. Энтропия в статистической физике. Статистический вес. Статистическое обоснование второго начала термодинамики. Формула Больцмана для статистической энтропии. Аддитивность энтропии.

Смотри в билет 13 задание 2

Билет №22

1. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот.

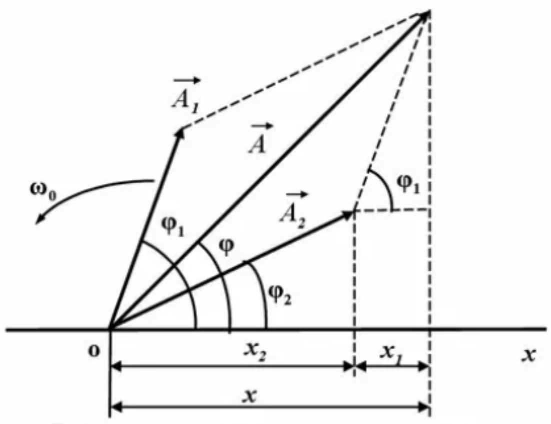
Векторная диаграмма - это способ графического задания колебательного движения в виде вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а напраление вектора образует с Ox угол, равный начальной фазе колебаний.
При **сложении** двух гармонических колебаний **одного направления** и **равной частоты** результирующее колебание будет происходить в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания, в зависимости от разности фаз, если:

1. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi k$, где ($k = 0, 1, 2, ..$), тогда $A = A_1 + A_2$.
2. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi$, где ($k = 0, 1, 2, ..$), тогда $A = |A_1 - A_2|$.

В общем случае:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi),$$
$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1^2 A_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$



Векторная диаграмма для сложения одинаково направленных колебаний одинаковой частоты

2. Распределение Максвелла для модуля скорости молекул (вывод из функции распределения для проекции скорости на оси координат).

Скорость любой молекулы $\vec{V} = (V_x,\ V_y,\ V_z)$ полностью задается тремя координатами, поэтому ее можно задать как точку в трехмерном пространстве скоростей. Тогда вероятность того, что координаты скорости молекулы будут находиться в определенных интервалах должна определяться через плотность распределения скорости

$$\rho(V_{1x} < V_x < V_{2x},\ V_{1y} < V_y < V_{2y},\ V_{1z} < V_z < V_{2z}) = \int\limits_{V_{1x}}^{V_{2x}} \int\limits_{V_{1y}}^{V_{2y}} \int\limits_{V_{1z}}^{V_{2z}} f(V_x,\ V_y,\ V_z) dV_x dV_y dV_z$$

При этом должны быть выполнены условия нормироки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(V_x,\ V_y,\ V_z) dV_x dV_y dV_z = 1$$

Функция плотности распределения молекул по скоростям

$$f(V) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{W_K}{kT}}$$

Билет №23

1. Объемная плотность энергии упругой волны (вывод на примере продольной волны). Вектор Умова (вектор плотности потока энергии).

Рассмотрим выделенный участок стержня длиной Δx. При колебаниях скорость этого участка $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и величина деформации $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Соответственно кинетическая и потенциальная энергии выделенного участка:

$$W_K = \frac{1}{2}\rho S \Delta x \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$$

$$W_\Pi = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 S\Delta x$$

Объем участка $V = S\Delta x$.
Объемная плотность механической энергии

$$w = \frac{W_K + W_\Pi}{V} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

Пусть энергия переносится со скоростью $\vec{v}$ в направлении под углом α к нормали некоторой малой площадки S. Тогда вся энергия, прошедшая через эту площадку за малое время dt окажется в области, объем которой $dV = Sv\cos\alpha\, dt$ (на рисунке эта область является косым цилиндром). Если объемная плотность энергии равна w, то энергия этого объема

$$W = wdV = wSv\cos\alpha\, dt$$

Введем вектор плотности потока энергии (вектор Умова)

$$\vec{j} = w\vec{v}$$

Вектор Умова - это вектор плотности потока энергии волны, направленный в сторону переноса энергии волной.

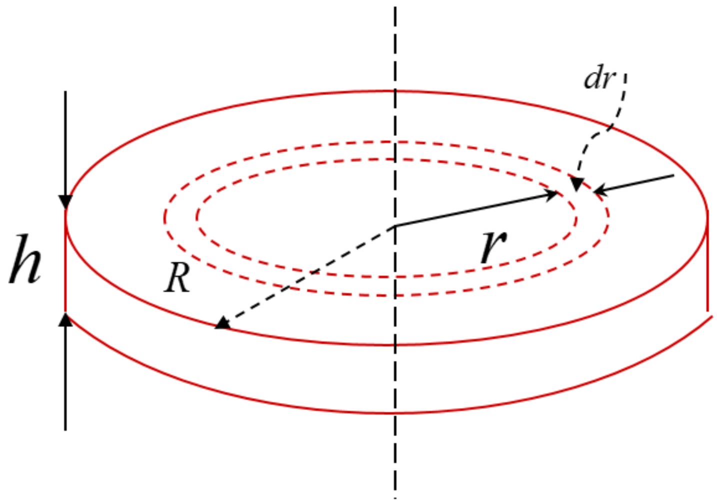
2. Момент инерции твердого тела относительно оси. Момент инерции однородного диска или цилиндра относительно его оси (с выводом).

Моментом инерции твердого тела относительно данной оси называется физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равна сумме моментов инерции всех частиц тела.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

Момент инерции однородного цилиндра (диска):



$$dm = \frac{dV}{V} m = \frac{2\pi r \cdot dr \cdot h}{\pi R^2 \cdot h} m = 2\frac{mr}{R^2} dr$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \left(2\frac{mr}{R^2} dr\right) = 2\frac{m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = 2\frac{m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{mR^2}{2}$$

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Билет №24

1. Стоячая волна. Уравнение стоячей волны (вывод из уравнения бегущей волны). Узлы и пучности.

Стоячая волна образуется при наложении двух волн одинаковой частоты, бегущих в противоположных направлениях:

$$\begin{cases} \xi_1 = A\cos(\omega t + kx + \alpha_1) \\ \xi_2 = A\cos(\omega t - kx + \alpha_2) \end{cases}$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t + kx + \alpha_1) + A\cos(\omega t - kx + \alpha_2)$$

Положим $\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0$, тогда

$$\xi = 2A\cos(kx)\cos(\omega t + \theta)$$

Величину $A_0 = 2A\big|\cos(kx)\big|$ можно назвать амплитудой стоячей волны (тк амплитуда не может быть меньше 0, берем косинус с модулем).

Точки, где амплитуда стоячей волны максимальная, называют **пучностями**. Эти точки можно найти из условия $|\cos kx| = 1$.

Т.е. $kx = \pm\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

Следовательно, координаты пучностей:

$$x_{\text{пуч}} = \pm\frac{\pi n}{k} = \pm\frac{\pi n}{2\pi}\lambda = \pm n\frac{\lambda}{2}$$

Точки, где амплитуда стоячей волны равна 0, называют **узлами**. Эти точки можно найти из условия $|\cos kx| = 0$.

Т.е. $kx = \frac{\pi}{2} \pm \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

Следовательно, координаты узлов:

$$x_{\text{узл}} = \frac{\frac{\pi}{2} \pm \pi n}{k} = \frac{\frac{\pi}{2} \pm \pi n}{2\pi}\lambda = \left(\frac{1}{2} \pm n\right)\frac{\lambda}{2}$$

2. Кинетическая энергия релятивистской частицы (выведите, считая известным основное уравнение релятивистской динамики). Полная энергия и энергия покоя в СТО.

Смотри в билет 20 задание 1

Билет №25

1. Уравнение плоской гармонической волны. Характеристики волны: период, частота, длина волны, волновое число и волновой вектор. Единица измерения этих величин в СИ. Уравнение сферической волны (без вывода)

$$\xi = A\cos(\omega t - kR + \alpha) = A\sin\left(\omega t - (\vec{k}, \vec{R}) + \alpha\right)$$

Период: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, с

Частота: $\nu = \frac{v}{\lambda}$, с$^{-1}$

Волновое число: $k = \frac{\omega}{v}$, рад/м

Длина волны: $\lambda = vT = v\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$, м

Волновой вектор: $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ - волновой вектор направлен перпендикулярно фазовой (волновой) поверхности волны в сторону её движения.

Уравнение сферической волны

$$\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)$$

2. Понятие эффективного диаметра молекулы. Вывод формулы для длины свободного пробега молекул идеального газа.

Смотри в билет 4 задание 1

Билет №26

1. Одномерное волновое уравнение для продольной упругой волны в твердом теле (с выводом). Общий вид волнового уравнения (без вывода).

Если возвращающая сила пропорциональна смещению точки от положения равновесия, то волна называется **упругой**. Выведем волновое уравнение на примере продольных волн деформации в стержне.
Выделим часть стержня длиной Δx. Если площадь поперечного сечения стержня равна S, плотность материала ρ, то масса этой части $\Delta m = \rho S \Delta x$. При деформациях на эту часть стержня действую силы упругости. Запишем второй закон Ньютона – уравнение движения этой части стержня вдоль оси X:

$$\Delta m a_x = F_2 - F_1$$

Это уравнение записано в предположении растяжения этой части стержня. Силы с обеих сторон выделенной части вызывают деформацию этой части стержня. При равновесии и отсутствии деформации положение точек в двух близко расположенных сечениях стержня можно задать координатами x и $x + \Delta x$. При деформировании стержня его точки сместятся от равновесных положений. Пусть $x_1(x)$ – задает положение точки стержня при деформации, если её равновесное положение задавалось координатой x. Тогда для близкого сечения новыми координатами будет $x_1 + \Delta x_1$. Изменение линейного размера части стержня вызвано смещением точек стержня. Введем величину смещения $\xi = x_1 - x$. По определению, относительная деформация в данном сечении стержня – это отношение изменения длины части стержня к начальной длине этой части:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x}$$

Если стержень сжимается, то его продольные размеры уменьшаются $\Delta x_1 < \Delta x$ и поэтому $\varepsilon < 0$. Таким образом, при сжатии $\varepsilon < 0$ и при растяжении $\varepsilon > 0$.
Если все точки стержня смещаются на одинаковую величину, то изменения длины участка стержня не происходит. Поэтому деформация равна разности смещений соседних точек $\Delta x_1 - \Delta x = \Delta \xi$.
Тогда можно записать

$$\varepsilon = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$$

В пределе (при $\Delta x \to 0$) получаем $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$
С учетом напряжений в сечениях $F_1 = \sigma_x S$, $F_2 = \sigma_{x+\Delta x} S$. Напряжения в сечениях стержня найдем по закону Гука: $\sigma_x = E\varepsilon_x$, $\sigma_{x+\Delta x} = E\varepsilon_{x+\Delta x}$, где E - модуль упругости материала (модуль Юнга).
Относительная деформация меняется вдоль стержня, поэтому можно считать, что

$$\varepsilon_{x+\Delta x} = \varepsilon_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\Delta x + \ldots$$

Ускорение точек выделенной части стержня $a_x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Последовательно подставим эти соотношения в уравнения движения:

$$\Delta m a_x = F_2 - F_1$$

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma_{x+\Delta x} S - \sigma_x S$$

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E\varepsilon_2 - E\varepsilon_1 = E\Big(\varepsilon_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\Delta x\Big) - E\varepsilon_1 = E\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\Delta x$$

С учетом равенства $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, после сокращений, получаем дифференциальное уравнение, описывающее распространение волны (вдоль одного направления – оси X):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

2. Область применимости СТО. Постулаты СТО. Выражение для импульса в СТО (без вывода). Основное уравнение релятивистской механики (без вывода).

Смотри в билет 19 задание 1

Билет №27

1. Сложение гармонических колебаний одинакового направления близких частот. Биения. Все аналитические выражения необходимо вывести.

Смотри в билет 18 задание 2

2. Адиабатический процесс. Вывод уравнения Пуассона для идеального газа на основе известных формул для C_p и C_v.

Смотри в билет 2 задание 2

Билет №28

1. Свободные затухающие колебания. Дифференциальное уравнение (вывод на примере любой колебательной системы с вязким трением и квазиупругой силой). Его решение. Частота свободных затухающих колебаний. Время релаксации и логарифмический декремент затухания.

Свободные затухающие колебания - это такие свободные колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.
Дифференциальное уравнение:
Второй закон Ньютона:

$$F + F = ma, \quad F = -rV, \quad F_c = -kx$$

$$-rV - kx = ma$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

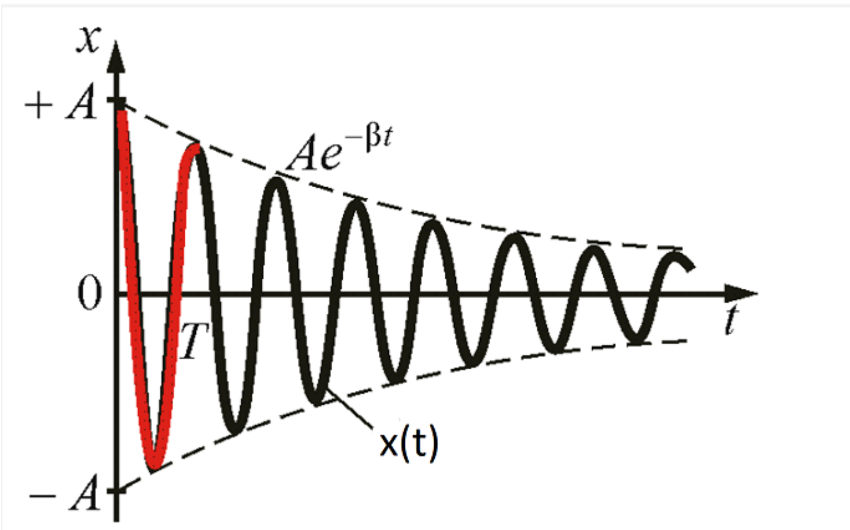
$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\,\frac{dx}{dt} \;+\; \omega_0^2 x \;=\; 0,$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m};\; 2\beta = \frac{r}{m}.$$

Решение этого уравнения:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$



Частота свободных затухающих колебаний - это частота собственных колебаний системы, которая учитывает затухание колебаний во времени.

$$\frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)+\beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)+\beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)-\omega^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

Подставим в дифференциальное уравнение выше:

$$\beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)+\beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)+\beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)-\omega^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)-2\beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos($$

Сократим на $A_0 e^{-\beta t}$:

$$-\beta^2\cos(\omega t+\varphi_0)-\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)+\omega_0^2\cos(\omega t+\varphi_0)=0$$

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}$$

где ω_0 - круговая частота собственных колебаний без учета затухания, β - коэффициент затухания.

Коэффициент затухания - компонент, характеризующий скорость затухания колебаний.

Время релаксации τ - это характеристика процесса затухания, которая определяет время, за которое система приближается к своему установившемуся состоянию равновесия после возмущения (т.е. время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз).

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)}=e$$

$$\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+\tau)}}=e$$

$$e^{\beta\tau}=e$$

$$\tau=\frac{1}{\beta}$$

Декремент затухания χ - отношение амплитуды затухающих колебаний через период.

$$\chi=\frac{A(t)}{A(t+T)}=\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+T)}}=e^{\beta T}$$

$\lambda=\ln\chi=\beta T$ - логарифмический декремент

2. Тепловые машины (схема и КПД). Холодильные машины (схема и КПД). Второе начало термодинамики в формулировках Клаузиуса и Томсона (Кельвина).

Смотри в билет 20 задание 2

Билет №29

1. Время релаксации, логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы. Вывод формул для нахождения этих величин. Связь добротности с убылью энергии (с выводом).

Время релаксации τ - это характеристика процесса затухания, которая определяет время, за которое система приближается к своему установившемуся состоянию равновесия после возмущения (т.е. время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз).

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e$$

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e$$

$$e^{\beta\tau} = e$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Декремент затухания χ - отношение амплитуды затухающих колебаний через период.

$$\chi = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

$$\lambda = \ln\chi = \beta T \text{ - логарифмический декремент}$$

Добротность колебательной системы Q - это безразмерная величина, характеризующая способность системы сохранять свою энергию при затухании колебаний (т.е. характеризует ширину резонансной кривой).
Она определяется как отношение запасенной в системе энергии к потерям энергии за один период свободных колебаний.

$$Q = 2\pi\frac{W_0}{W}$$

где W_0 - запасы энергии, W - потери энергии.
Так как энергия пропорциональна квадрату асплитуды, то:

$$Q = 2\pi\frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = 2\pi\frac{A_0 e^{-2\beta t}}{A_0 e^{-2\beta t} - A_0 e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi\frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\chi}}$$

Если $\chi \to 0$, то $1 - e^{-2\chi} = -(e^{-2\chi} - 1) \sim -(-2\chi) = 2\chi$, таким образом:

$$Q \approx \frac{\pi}{\chi}$$

2. Понятие числа степеней свободы механической системы. Число степеней свободы молекул идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа (вывод на основе формулы для средней кинетической энергии поступательного движения молекул).

Смотри в билет 1 задание 2

Билет №30

1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (с выводом). Резонанс.

Смотри в билет 19 задание 2

2. Теплоемкость. Теплоемкость идеального газа в изохорическом и изобарическом процессах. Уравнение Майера (с выводом).

Смотри в билет 10 задание 2