Лекция 10. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

1. Основные положения электромагнитной теории Максвелла.
2. Вихревое электрическое поле.
3. Ток смещения.
4. Закон полного тока.
5. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

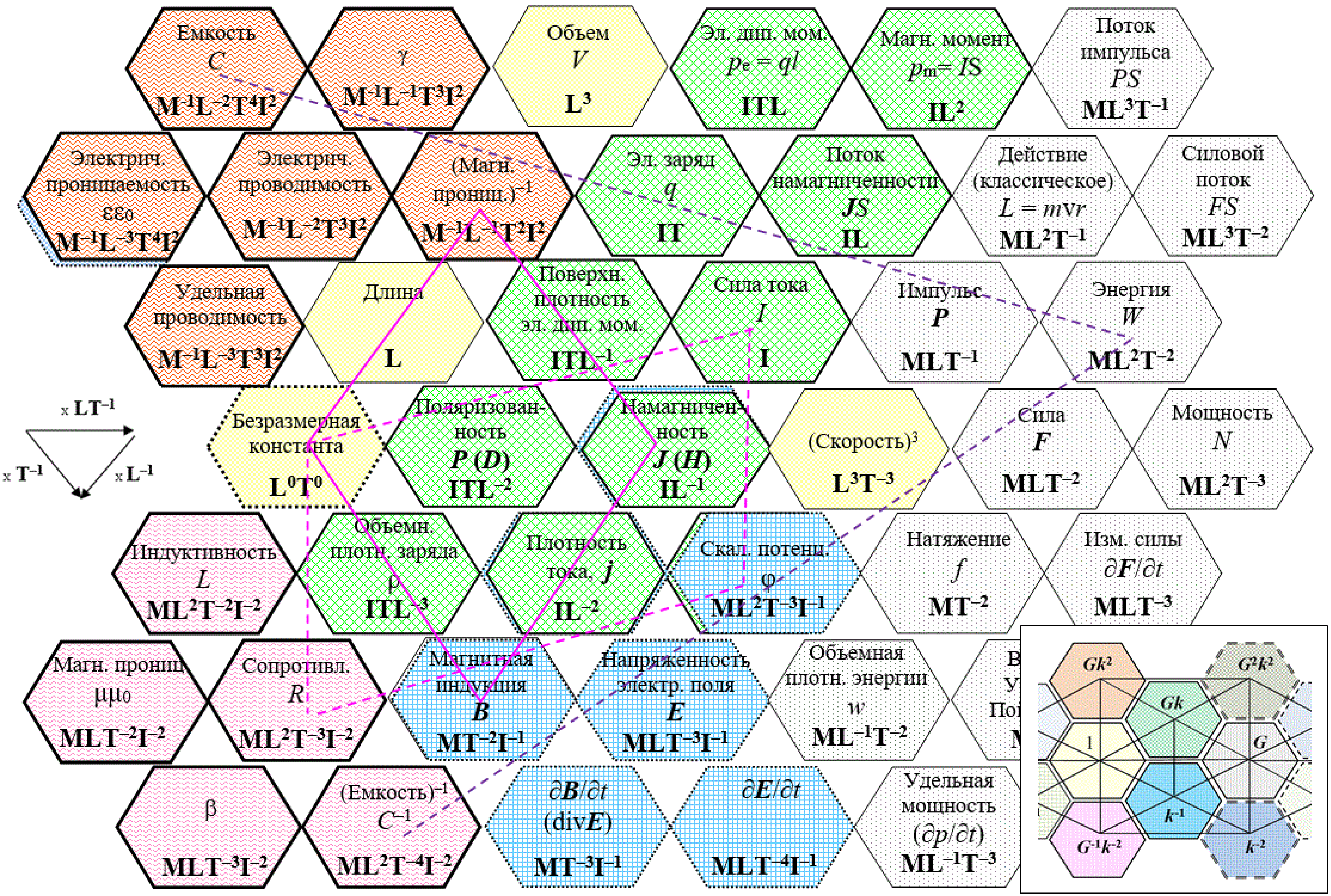
Понимать означает всегда только одно: познавать взаимосвязи…

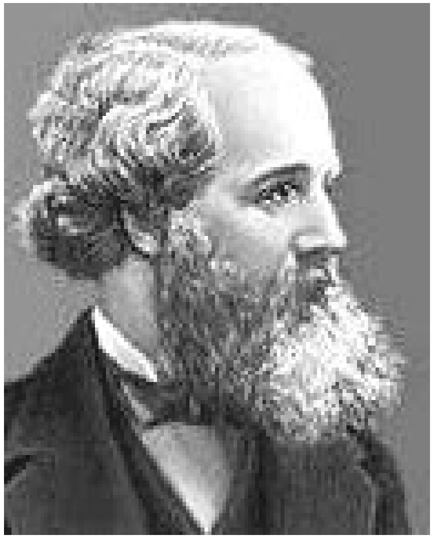
В. Гейзенберг

В физике… нет места для путаных мыслей… Действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности.

Э. Ферми

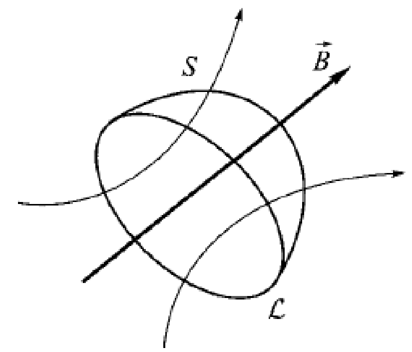
Электромагнитные величины в системе ФВиЗ





Максвелл Джеймс Клерк (1831 – 1879) – английский физик, член Эдинбургского (1855) и Лондонского (1861) королевских обществ с 1871 г. – первый профессор экспериментальной физики в Кембридже. Работы посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статистике, оптике, механике, теории упругости. Самым большим научным достижением Максвелла является созданная им в 1860 – 1865 теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений

Вихревое электрическое поле



К расчету потока вектора $\vec{B}$ магнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

Возникающая в контуре ЭДС может быть представлена как циркуляция вектора $\vec{E}_B$ некоторого электрического поля по замкнутому контуру $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_B d\vec{l}.$$

Аналогия – вращение воды в сливающейся ванне.

Тогда $$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Для электростатического поля:

$$\oint_L \vec{E}_Q d\vec{l} = 0.$$

Силовыми линиями электрического поля $\vec{E}_B$ являются замкнутые линии, т. е. электрическое поле имеет вихревую структуру, поэтому такое поле получило название *вихревого электрического поля*.

Таким образом, в природе существуют электрические поля двух видов: электростатическое $\vec{E}_Q$ и вихревое $\vec{E}_B$.

Согласно принципу суперпозиции: $\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_B$.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

Закон Фарадея

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S}$$

Теорема Стокса

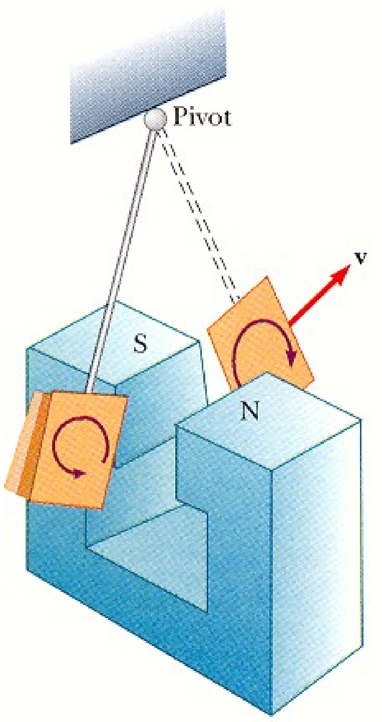
$$\int_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}.$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Вихревое электрическое поле возникает при изменении магнитного поля

Токи Фуко.

Переменный магнитный поток индуцирует ЭДС и ток в контуре.

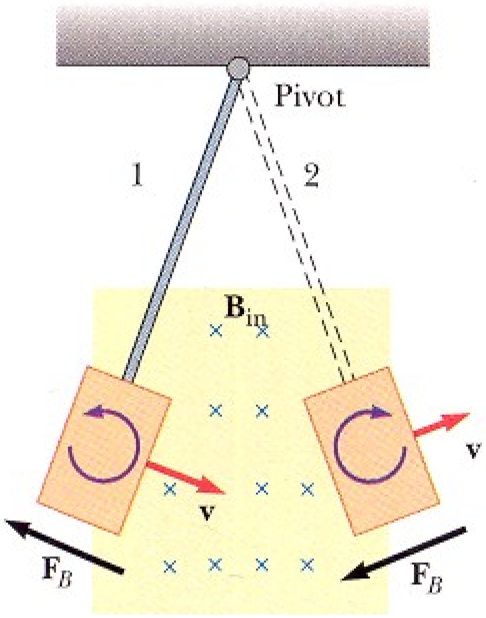


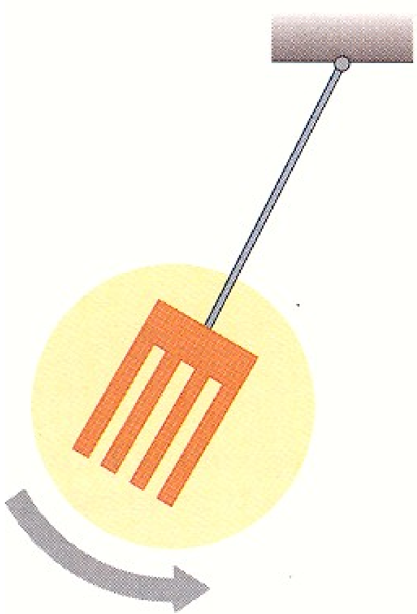
В массивных металлических пластинах, движущихся в магнитном поле, индуцируются вихревые токи, называемые токами Фуко.

Эти токи являются результатом перемещения свободных электронов в пластинах.

Направление вихревых токов таково, что они создают магнитные поля, противодействующие изменениям, вызванным токами (правило Ленца).

Возникающие силы взаимодействия двух полей B и H (J) тормозят движение пластины.





Силы, действующие на пластину, направлены в сторону, противоположную направлению ее движения.
В результате колебательное движение пластины затухает.

Если в проводящей пластине есть прорези (щели), то вихревые токи более слабые и пластина движется в магнитном поле свободнее.

Вихревое электрическое поле в бетатроне из-за изменения магнитного поля

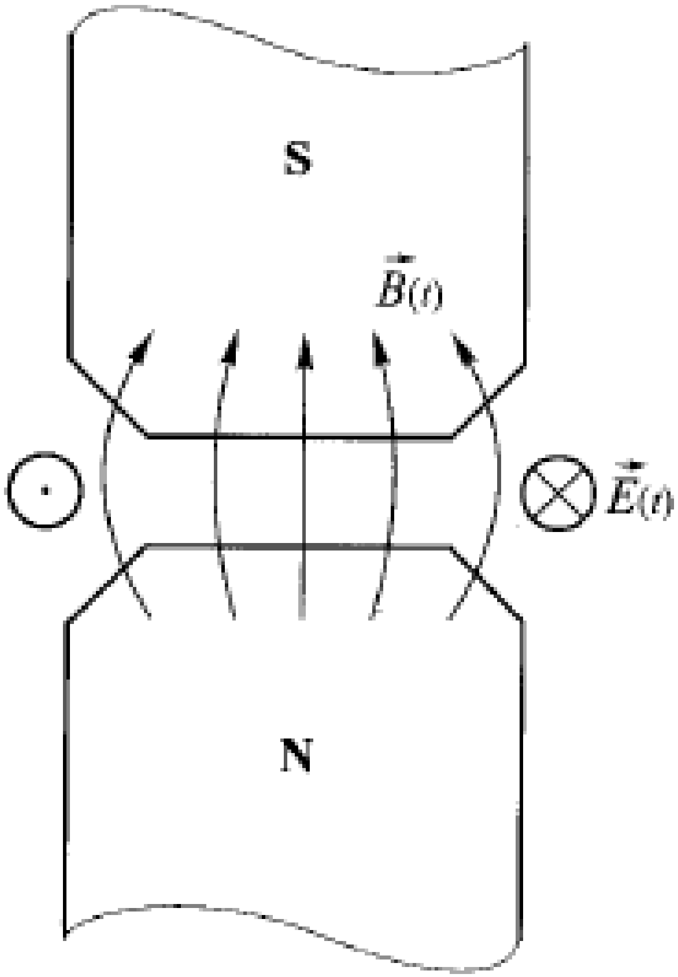


Схема бетатрона

$$m\frac{v^2(t)}{R} = F_B(t),$$

$$F_B(t) = qv(t)B(t),$$

$$m\frac{v^2(t)}{R} = qv(t)B(t)$$

$$v(t) = \frac{q}{m}RB(t).$$

$$2\pi R E(t) = \pi R^2 \dot{B}_{\text{ср}}(t),$$

Циркуляция вектора ***E***

$$m\dot{v}(t) = qE(t) = \frac{qR\dot{B}_{\text{ср}}(t)}{2},$$

Сила после подстановки *E*

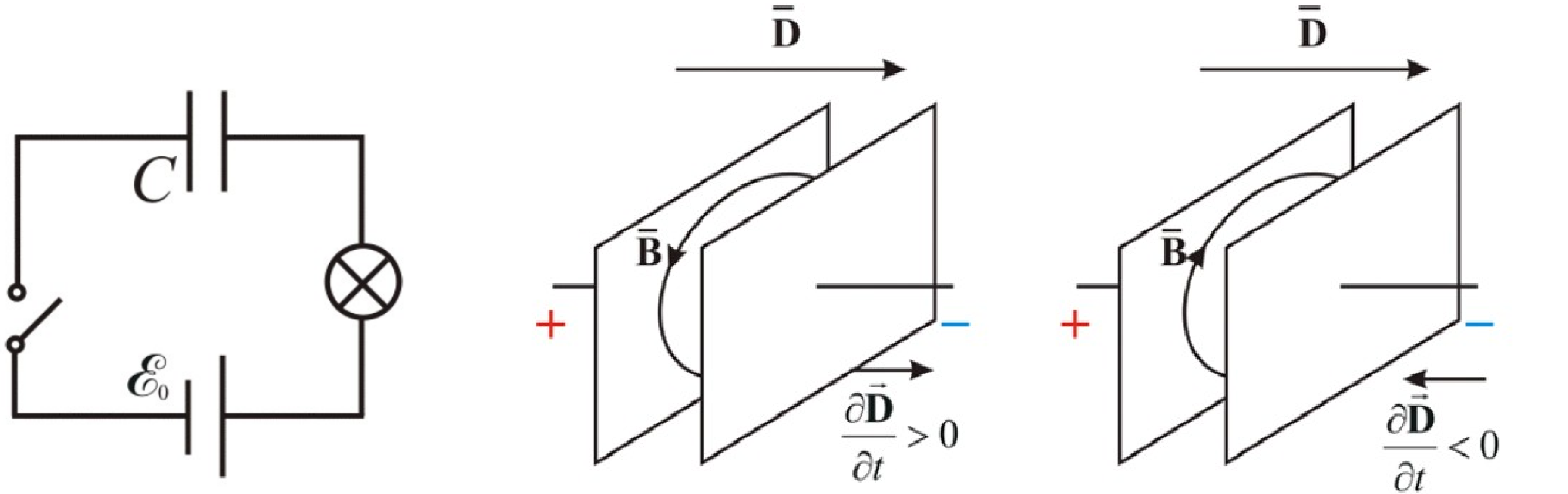
$$\dot{v}(t) = \frac{qE(t)}{m} = \frac{q}{2m} R\dot{B}_{\text{ср}}(t).$$

Ускорение частицы

Увеличением *B* (тока в катушках) производим ускорение частиц на определенном радиусе *R*

ТОК СМЕЩЕНИЯ

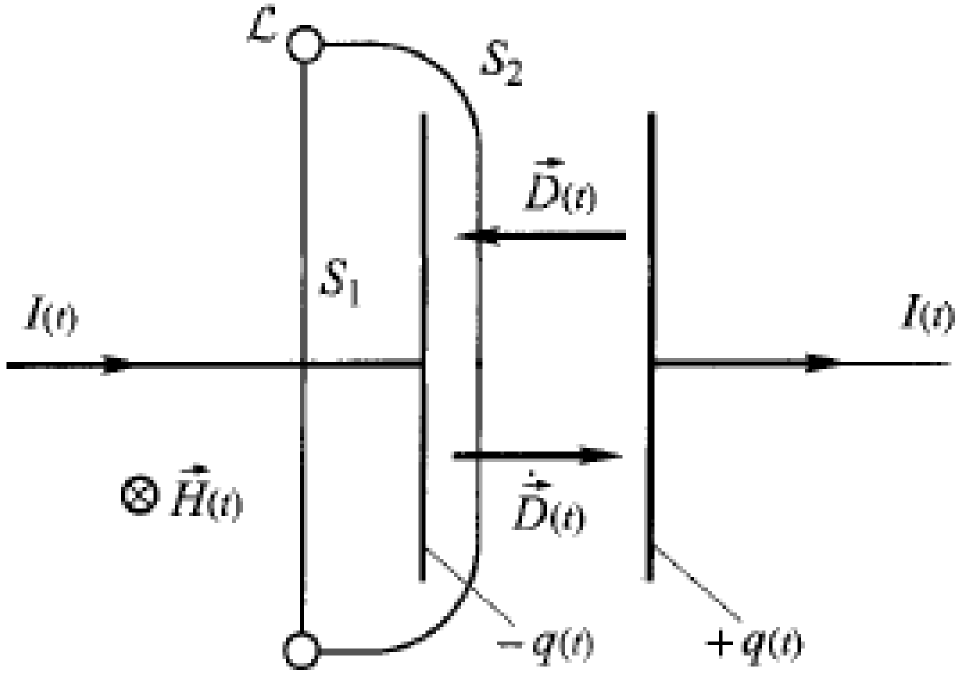
В 1861 г. Дж. Максвелл сформулировал гипотезу о существовании в природе *тока смещения*, который, так же, как и ток проводимости, создает в окружающем пространстве магнитное поле.



Лампочка на короткое время вспыхивает и гаснет.

Максвелл сделал вывод: всякое переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле.

Токи проводимости в проводнике замыкаются токами смещения в диэлектрике или в вакууме. Переменное электрическое поле в конденсаторе создает такое же магнитное поле, как если бы между обкладками существовал ток проводимости, имеющий величину равную току в металлическом проводнике.



$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}.$$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \vec{H}d\vec{l} = \sum_k I_k,}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{H}d\vec{S} = \sum_k I_k,$$

Для поверхности S_1

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H}d\vec{l} = \int_{S_1} \mathrm{rot}\,\vec{H}d\vec{S}_1 = I(t),$$

Для поверхности S_2

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H}d\vec{l} = \int_{S_2} \mathrm{rot}\,\vec{H}d\vec{S}_2 = 0, \qquad D = \sigma = \frac{q}{S_к},$$

Для поверхности S_2 вводится ток смещения

$$S_к \frac{dD}{dt} = \frac{dq}{dt}. \qquad I_{см} = S_к \frac{dD}{dt}.$$

Плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Рисунок из БКФ

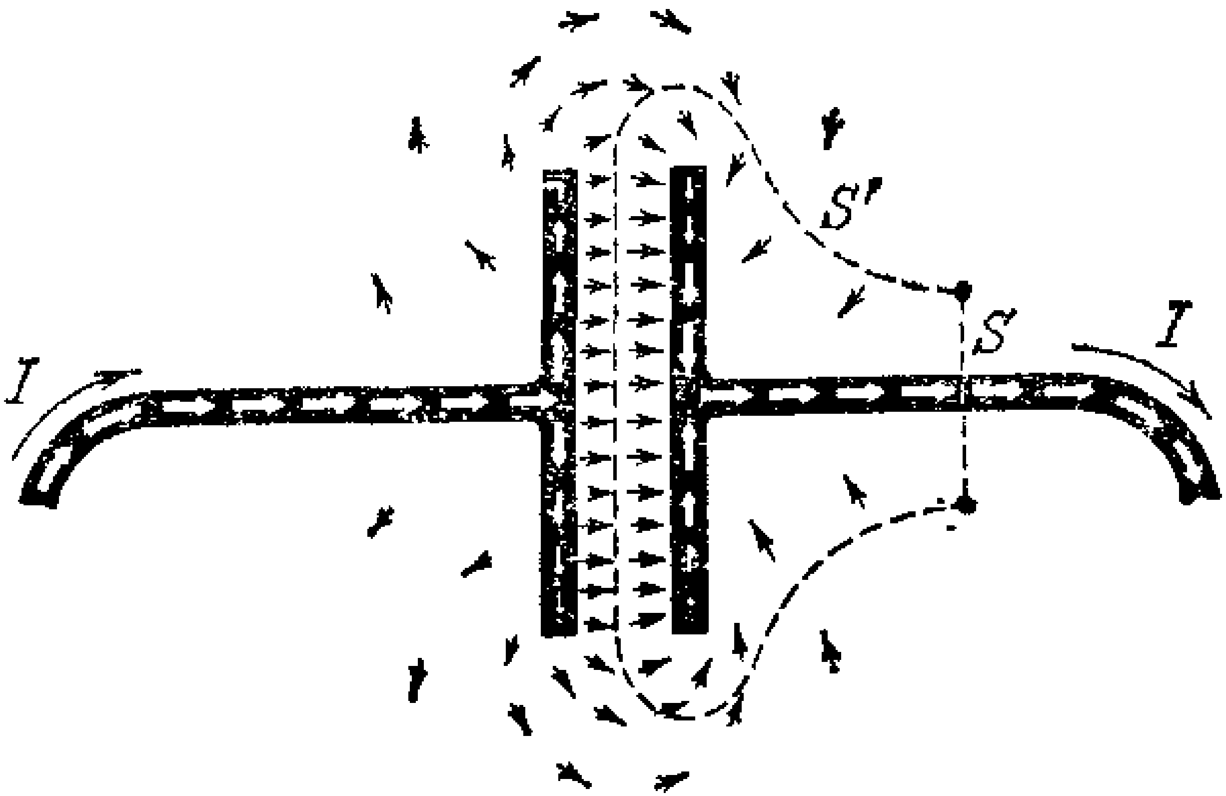


Рис 7.30. Ток проводимости (белые стрелки) и ток смещения (черные стрелки).

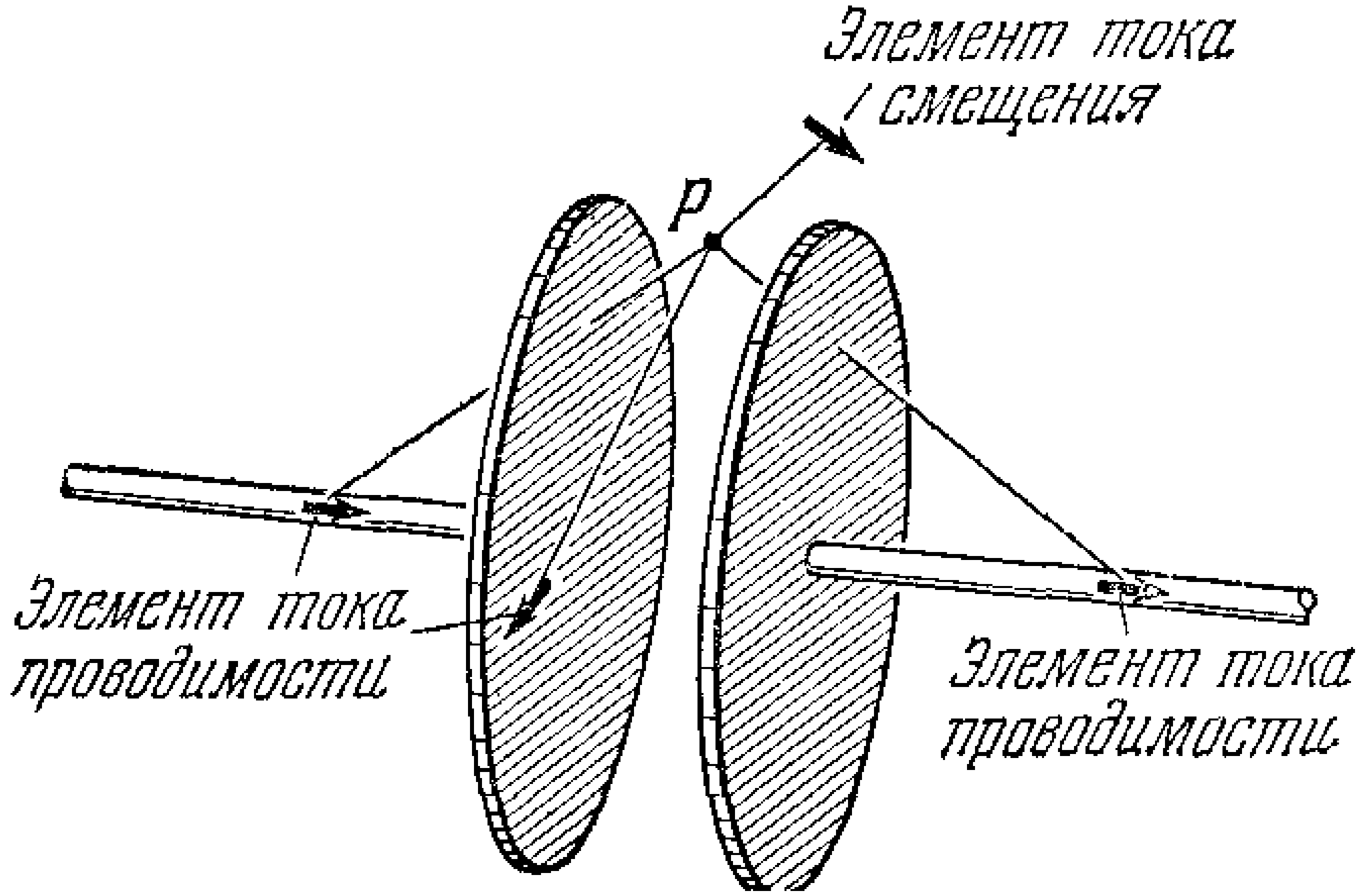
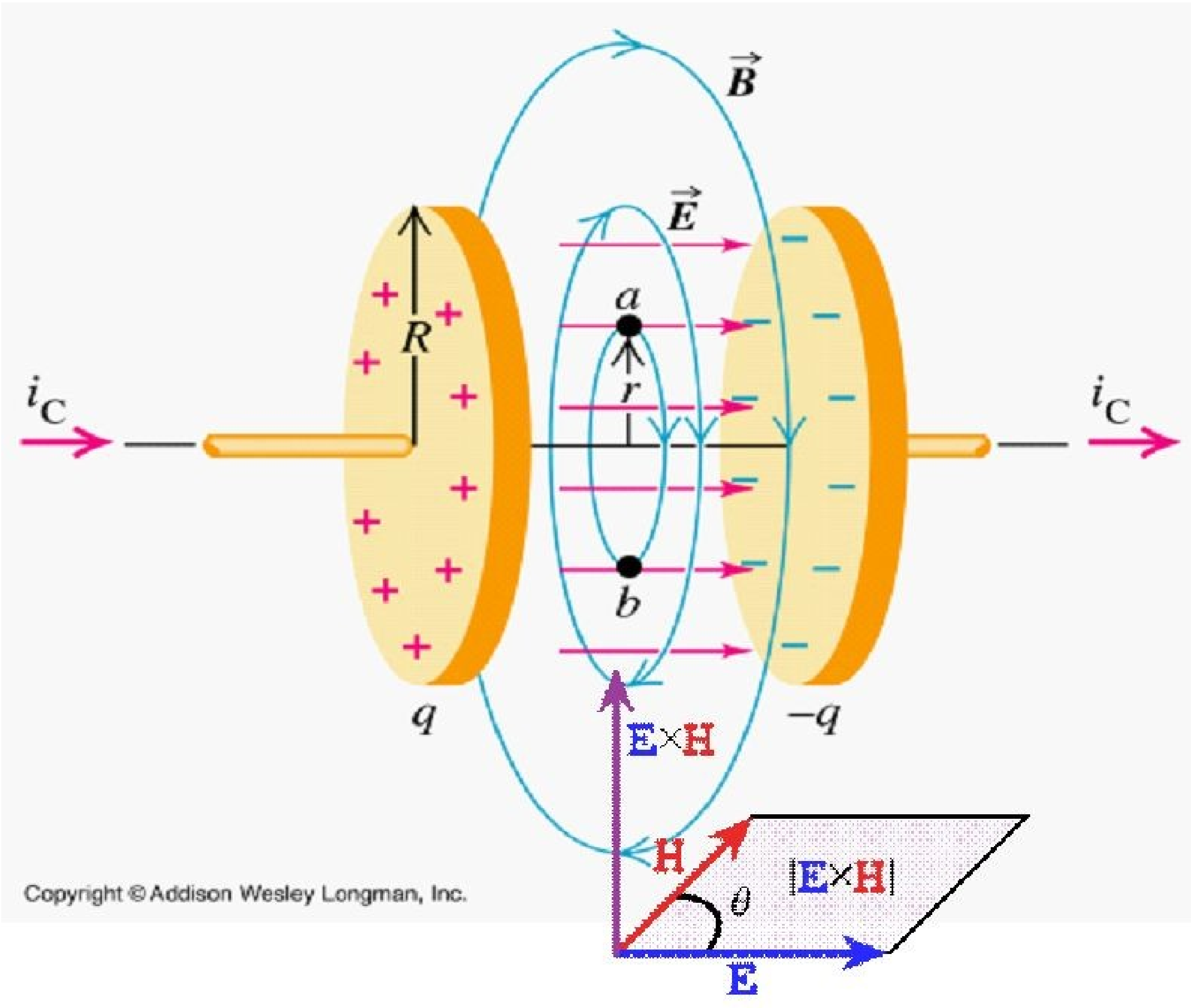
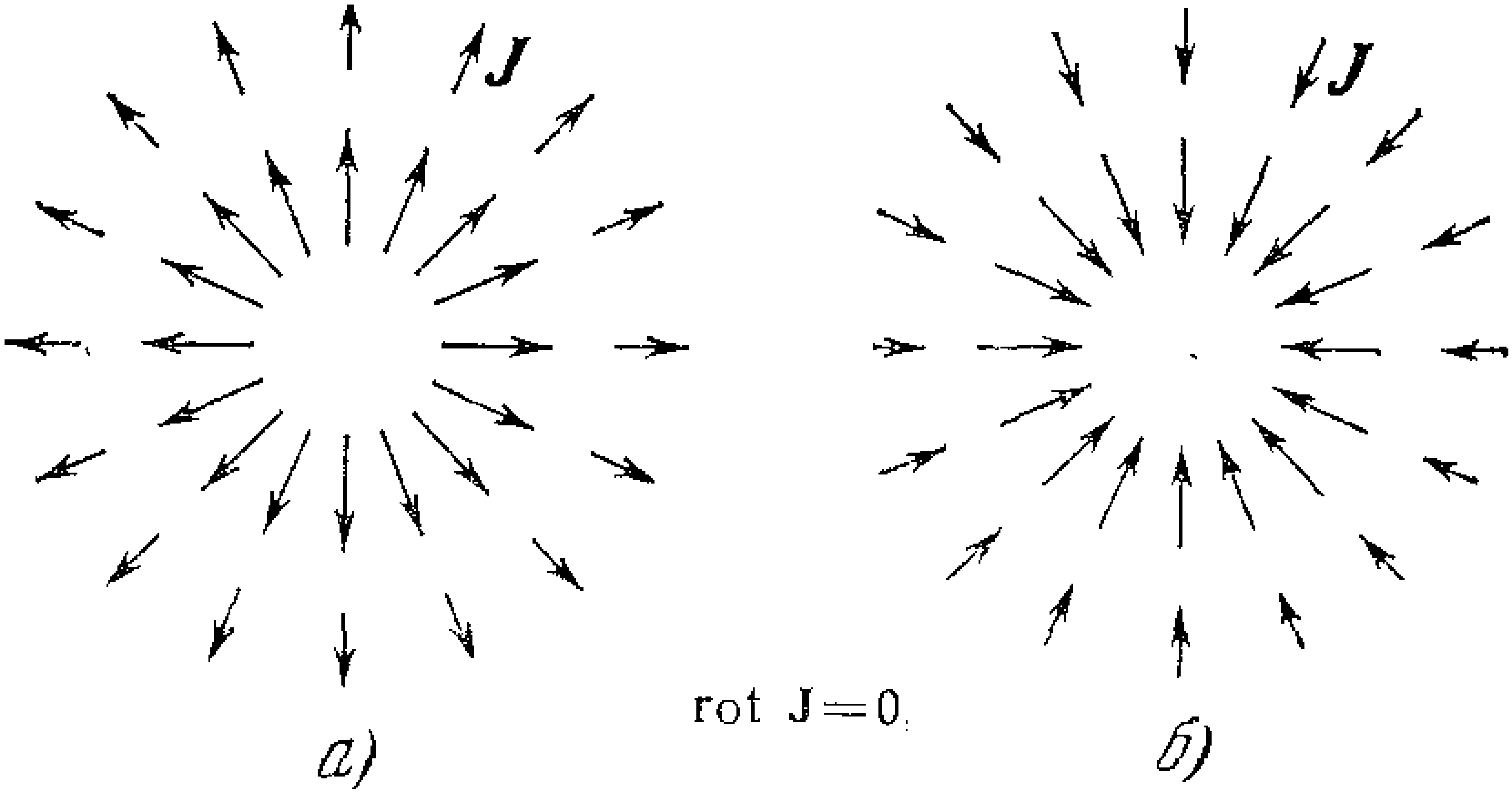


Рис. 7.31. В медленно изменяющихся полях полный вклад в магнитное поле в любой точке от всех токов смещения равен нулю. Магнитное поле в точке P может быть вычислено по закону Био — Савара, применяемому только к элементам тока проводимости.

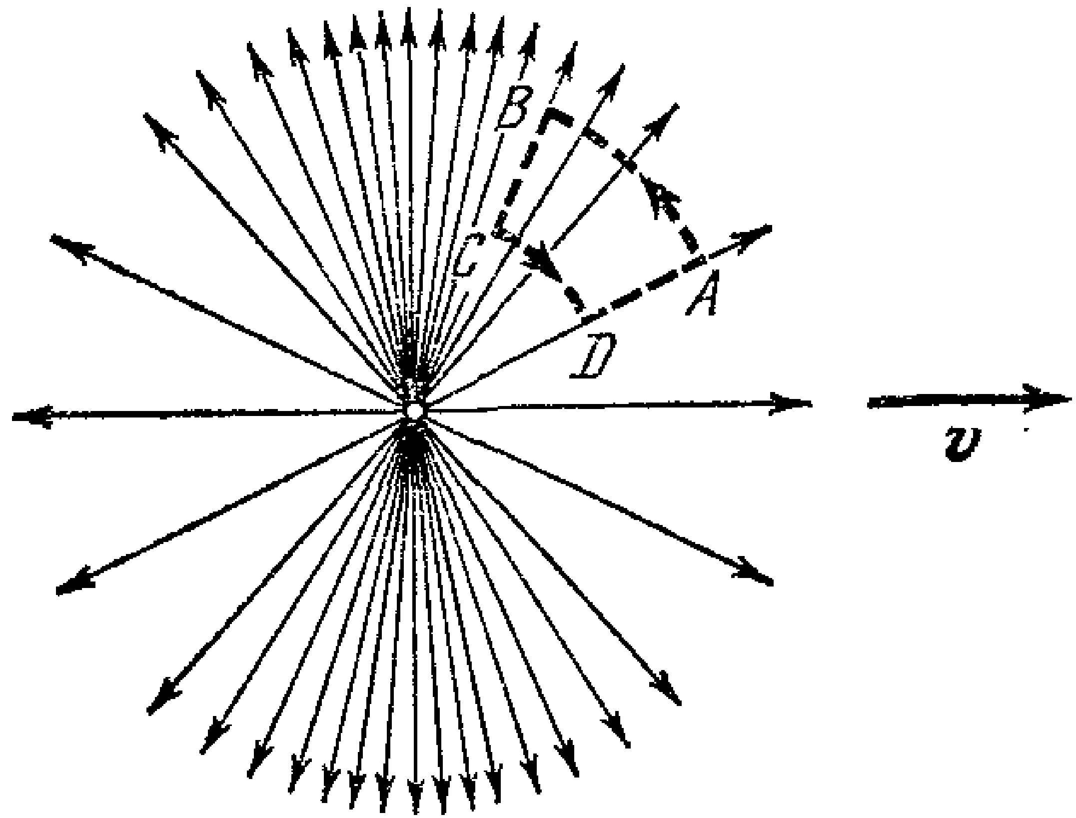


B
E
a
R
r
b
i_C
i_C
q
−q
E×H
H
θ
|E×H|
E
Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Рисунки из БКФ

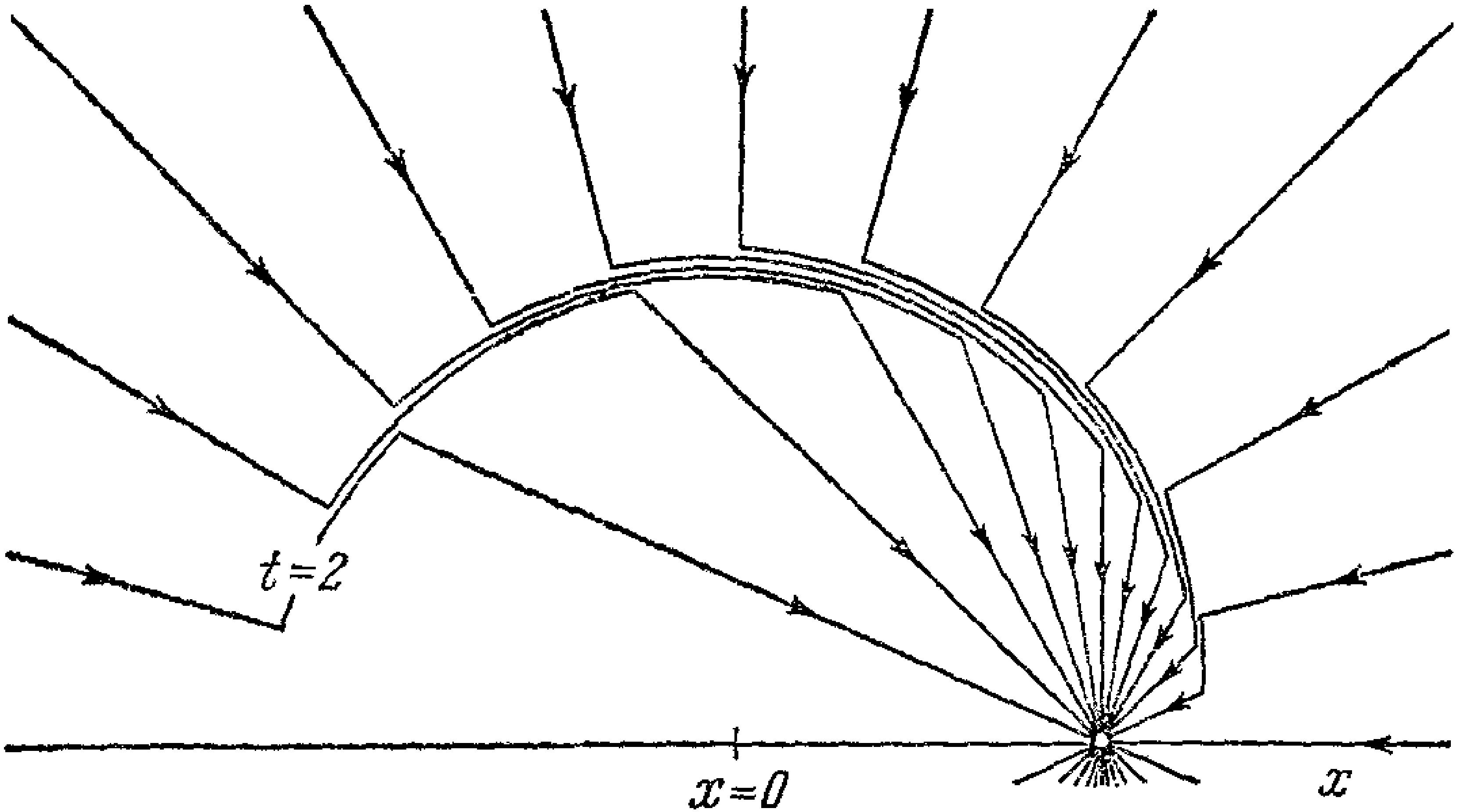


Рисунки из БКФ



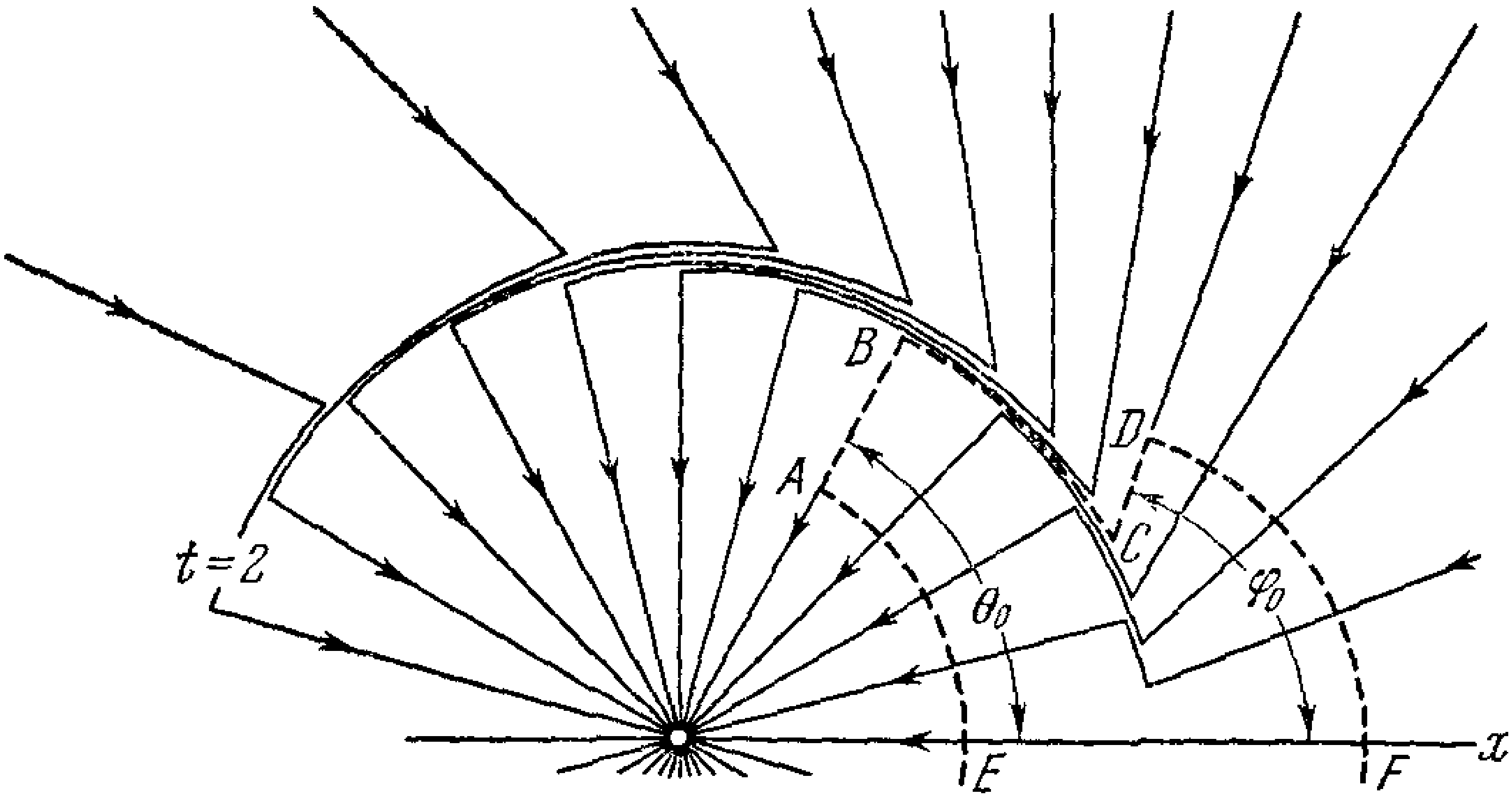
представление поля рав-
номерно движущегося заряда.

Рисунки из БКФ



Заряд, вначале покоящийся в точке $x=0$, внезапно ускоряется в момент $t=0$ и движется затем с постоянной скоростью.

Рисунки из БКФ



Заряд, двигавшийся с постоянной скоростью, в момент $t=0$ достигает начала координат, резко затормаживается там до остановки и остается в начале координат.

Уравнения Максвелла для вакуума

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Закон Гаусса в электричестве

Результирующий электрический поток через произвольную замкнутую поверхность равен величине суммарного заряда, заключенного внутри этой поверхности, деленной на ε_0.

$$\oint_S B\cdot dS = 0$$

Закон Гаусса в магнетизме

Результирующий магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Закон Фарадея

Циркуляция вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура равна скорости изменения магнитного потока через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

$$\oint_L H\cdot dl = I$$

Закон Ампера

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равна сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right)$$

Есть мнение, что токи смещения не создают магнитного поля, возможно, это неверно.

Закон полного тока

Предположение Дж. Максвелла о существовании тока смещения позволило ввести понятие *полного тока* как суммы токов проводимости и тока смещения:

$$\boxed{\vec{j}_{\Sigma} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_k \left(I_k + I_{\text{см}\,k} \right),$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot} \vec{H} \right) = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Далее: $$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D} = 0.$$

С учетом теоремы Гаусса: $$\operatorname{div}\vec{D} = \rho,$$

Выводим уравнение непрерывности:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$$

Это уравнение является следствием закона сохранения электрического заряда.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S};$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho\, dV;$$

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

4 уравнения

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

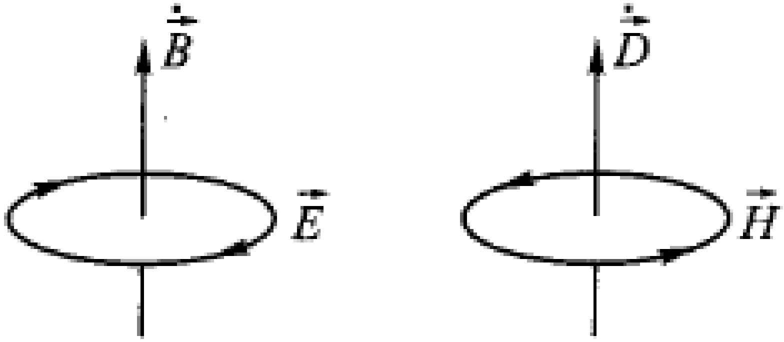
Дифференциальные уравнения Максвелла в иной форме:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned}}$$

В отсутствии токов проводимости

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$



а *б*

Для замыкания уравнений Максвелла используются уравнения материальной среды

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E};$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H};$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

3 уравнения

Далее факультативный материал

С учетом проекции этих уравнений на оси координат уравнения материальной среды позволяют записать еще девять уравнений, которые совместно с семью независимыми уравнениями **основной** системы образуют систему из 16 уравнений, содержащую 16 независимых переменных, что делает ее математически разрешимой.

Подробности

Из четырёх уравнений Максвелла два векторных и два скалярных. Так как каждое векторное уравнение эквивалентно трём скалярным, то всего получается 3+3+2 = 8 уравнений с 12 –тью неизвестными. Поэтому, чтобы систему уравнений можно было решить, её дополняют, так называемыми, **материальными уравнениями**, которые учитывают свойства окружающей токи и заряды среды. В случае однородной несегнетоэлектрической и неферромагнитной среды материальные уравнения имеют вид: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

В этих уравнениях:

- поляризованность среды учитывает величина ε ,
- намагниченность среды величина μ ,
- проводящие свойства среды величина σ .

Чтобы система уравнений Максвелла имела единственное решение, к ним необходимо ещё добавить начальные условия и условия на границе раздела сред (граничные условия):

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \qquad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_N^{поверх}, \qquad B_{2n} - B_{1n} = 0,$$

где σ - поверхностная плотность свободных зарядов в рассматриваемой точке М,

$\vec{n}$ - единичный вектор нормали в точке М, проведённый из среды 1 в 2,

$\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к поверхности раздела в точке М,

$\vec{j}_N^{\,пов}$ - вектор поверхностной плотности тока проводимости в точке М.

Добавления и примечания

$$\vec{\mathbf{j}}_{см} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}.$$

$$\vec{\mathbf{j}}_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}_l}{\partial t}$$

Здесь **E** внутр.

– плотность тока поляризации – плотность тока, обусловленная перемещением зарядов в диэлектрике. Эта составляющая тока смещения выделяет джоулево тепло (тепло выделяющееся при процедурах УВЧ,…). Ток смещения в вакууме и в металлах – джоулева тепла не выделяет.

Решение уравнений Максвелла

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,.$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_2}{r_{1-2}}\mathrm{d}V_2$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_2}{r_{1-2}}\mathrm{d}V_2$$

1 – точка наблюдения;

2 – точка расположения источника поля.

Определения скалярного и векторного потенциалов

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_2}{r_{1-2}}\mathrm{d}V_2 \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_2}{r_{1-2}}\mathrm{d}V_2$$

или

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{\vec{j}_2}{r_{1-2}}\mathrm{d}V_2$$

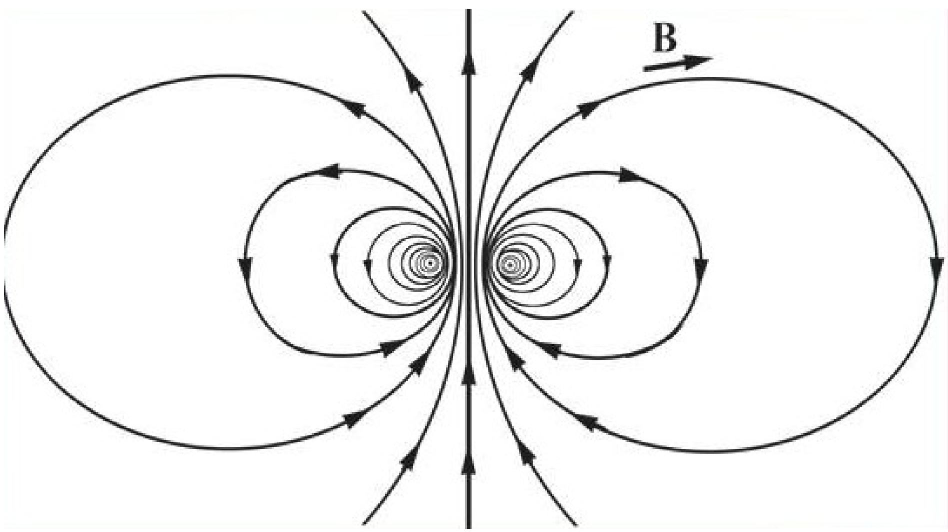
1 – точка наблюдения;

2 – точка расположения источника поля.

Определение векторного потенциала через магнитный момент кругового тока

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[p_m \cdot e_r]}{r^2}$$

$$B = \mathrm{rot}A$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3e_r(e_r \cdot p_m) - p_m}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{p_m}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$$

Из Савельева

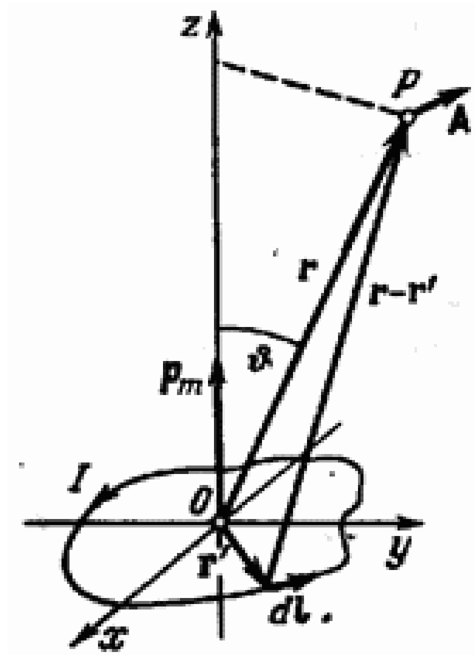


Рис. III.2.

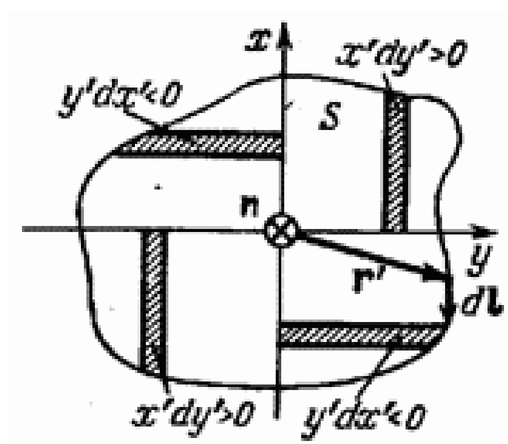


Рис. III.3.

Плотности зарядов и токов выступают как вторые производные скалярного и векторного потенциалов

Уравнение Пуассона для скалярного потенциала

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$\Delta A = -\mu_0 j$$

Аналогии интегральных соотношений

$$\oint D\,\mathrm{d}S = q$$

$$\oint P\,\mathrm{d}S = -q^*$$

$$\oint E\,\mathrm{d}S = (q + q^*)/\varepsilon_0$$

$$\oint H\,\mathrm{d}S = 0 \qquad \oint H\,\mathrm{d}l = \sum I$$

$$\oint J\,\mathrm{d}S = 0 \qquad \oint J\,\mathrm{d}l = \sum I'$$

$$\oint B\,\mathrm{d}S = 0 \qquad \oint B\,\mathrm{d}l = \mu_0 \sum (I + I')$$

$$\int B\,\mathrm{d}S = \Phi$$

Аналогии дифференциальных соотношений

$$\mathrm{div} D = \varepsilon_0 \mathrm{div} E_0 = \rho$$

$$\mathrm{div} P = -\rho'$$

$$\mathrm{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{rot} H = j$$

$$\mathrm{rot} J = j'$$

$$\mathrm{rot} B = \mu_0 (j + j')$$

Из системных представлений:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \operatorname{rot}\vec{B}$$

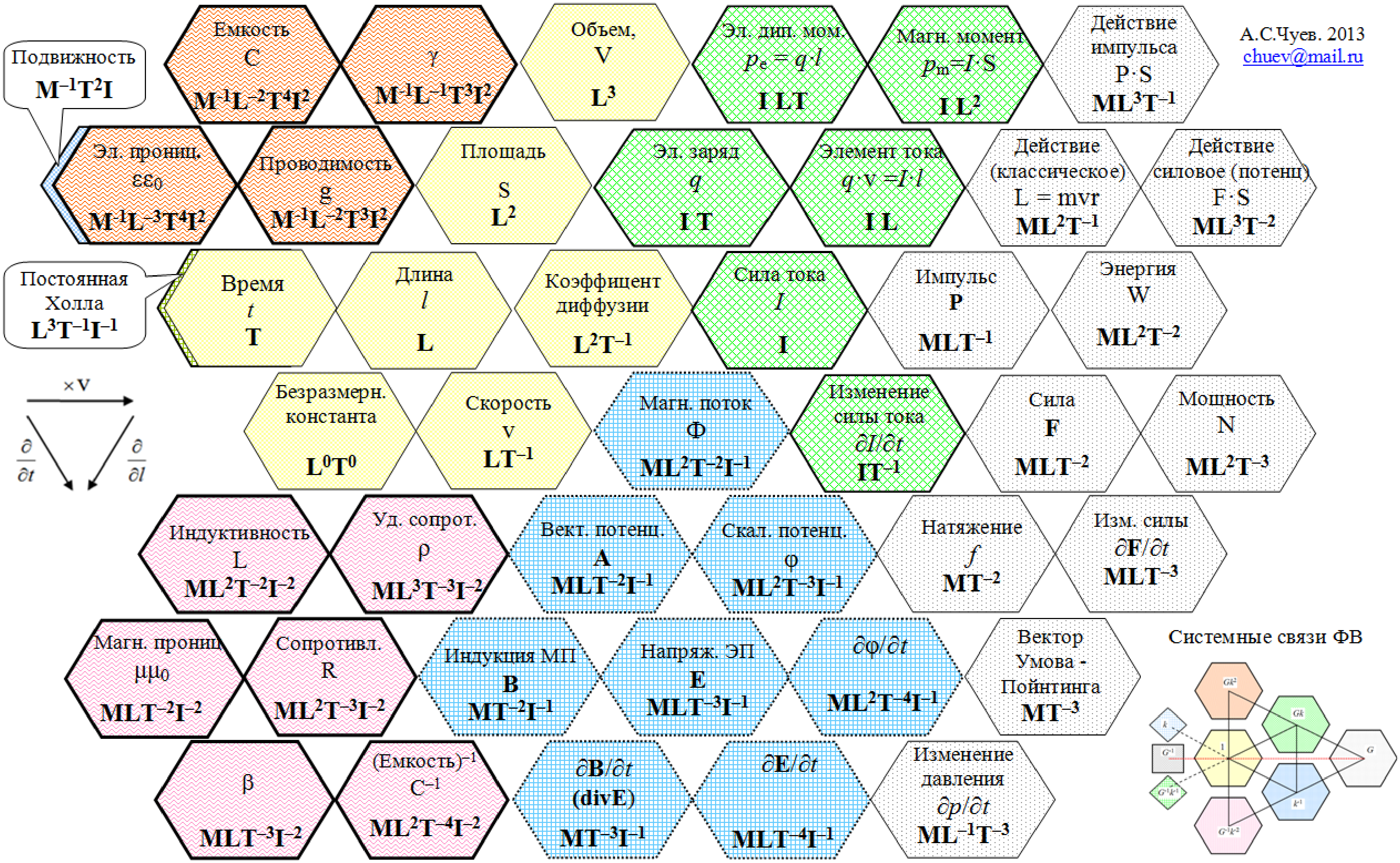
Уравнения Максвелла с использованием «материальных векторов»

$$\frac{\partial P_{в}}{\partial t} = -\left(\operatorname{div}\vec{J}_{в} + \operatorname{rot}\vec{J}_{в}\right)$$

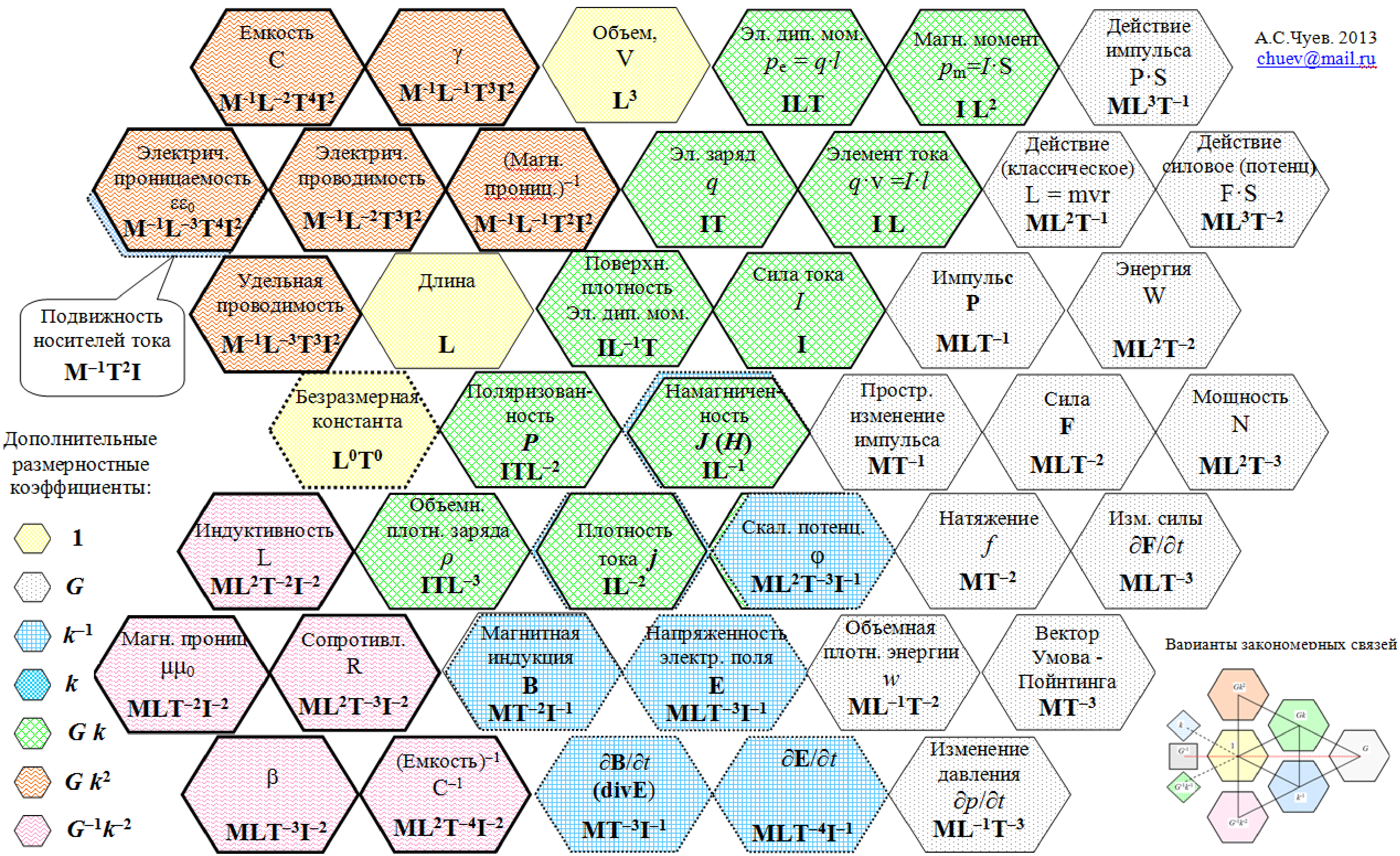
$$\frac{\partial \left|P_{в}\right|}{\partial t} = \vec{j}\,'_{см}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -c^2\left(\operatorname{div}\vec{P}_{в} + \operatorname{rot}\vec{P}_{в}\right)$$

СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ



Система электромагнитных величин и их взаимосвязей



Конец лекции 10 -2022