Занятие 3. Электроёмкость, конденсаторы, энергия электростатического поля

Для подготовки к семинару надо проработать

Лекция 4. Электрическое поле заряженных проводников. Энергия электростатического поля

ОЛ-1(§3.1- 3.4), ОЛ-3(§3.1- 3.4, 4.1- 4.3), ОЛ-4(§2.1- 2.3, 2.6, 4.1- 4.3), ДЛ-10,11,12.

ОЛ-1. Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2013. – 423 с.

ОЛ-3. Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для втузов. В 5 кн (кн.2). – М.: Наука, 1998.

ОЛ-4. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 352 с.

ДЛ-10. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Теория и практика классической электродинамики. – М.: URSS, 2014. – 774 с.

ДЛ-11. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 720 с.

ДЛ-12. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие для вузов. В 5 томах. – М.: Физматлит, 2002. – 4506 с.

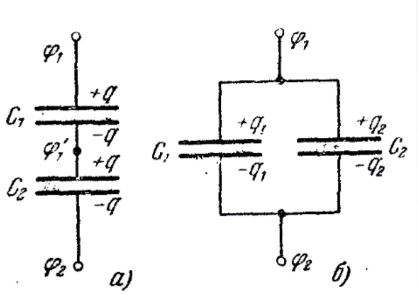
Краткие теоретические сведения

Электрическая емкость отдельного проводника с зарядом *q*

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Электрическая емкость конденсаторов , соединения конденсаторов

$$C_{плоск.} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}; \qquad C_{цил.} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}; \qquad C_{сфер.} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$



$$C = C_1 + C_2.$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Энергия электростатического поля, заряженных конденсаторов и системы заряженных тел

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}; \qquad w = \frac{ED}{2}; \qquad W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V;$$

$$W = \frac{CU^2}{2}; \qquad W = \frac{q^2}{2C}; \qquad W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i.$$

Задача 2.115. ***Найти ёмкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого a и b, причём a < b, если пространство между обкладками заполнено диэлектриком:***
а) проницаемости ε;
б) проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\boldsymbol{\varepsilon = \alpha/r}$, где α - постоянная.

Решение: Электроёмкость конденсатора

$$C = \frac{q}{U}. \qquad (1)$$

Напряжение между пластинами конденсатора

$$U = \int_a^b \left(\vec{E}, \overrightarrow{dr}\right). \qquad (2)$$

Найдем напряженность электрического поля между обкладками конденсатора, заряд внутренней обкладки примем положительным +q. Применим теорему Гаусса

$$\oiint_S \left(\vec{D}, \overrightarrow{dS}\right) = q \qquad (3)$$

для поверхности сферы S радиусом $r < R$, центр которой совпадает с центром шара. Вектор электрического смещения

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \qquad (4)$$

Векторы $\vec{D}$ и $\overrightarrow{dS}$ направлены одинаково в каждой точке поверхности S , поэтому

$$\oiint_S \left(\vec{D}, \overrightarrow{dS}\right) = \oiint_S \; DdS = q. \qquad (5)$$

Т.к. в каждой точке поверхности сферы S величина $E = const$ и $D = const$, то

$$\oiint_S \left(\vec{D}, \overrightarrow{dS}\right) = D \oiint_S \; dS = \varepsilon_0 \varepsilon E \cdot 4\pi r^2. \; (6)$$

Тогда

$$\varepsilon_0 \varepsilon E \cdot 4\pi r^2 = q \qquad (7)$$

откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r^2} \qquad (8)$$

Пусть касательный вектор $\overrightarrow{dr}$ к пути интегрирования направлен по радиусу, тогда векторы $\overrightarrow{dr}$ и $\vec{E}$ направлены одинаково. Поэтому

$$U = \int_a^b \left(\vec{E}, \overrightarrow{dr}\right) = \int_a^b Edr \qquad (9)$$

а) Если относительная диэлектрическая проницаемость постоянная $\varepsilon = const$, то

$$U = \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \qquad (9)$$

Откуда

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}. \qquad (10)$$

б) Если проницаемость зависит от расстояния *r* до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r$, где α - постоянная, то

$$U = \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha r}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\alpha}ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (11)$$

Откуда

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad (12).$$

Задача 2.119. Длинный прямой провод расположен параллельно проводящей плоскости. Радиус сечения провода *a*, расстояние между осью провода и проводящей плоскостью *b*. Найти взаимную ёмкость этой системы на единицу длины провода при условии *a<<b*.

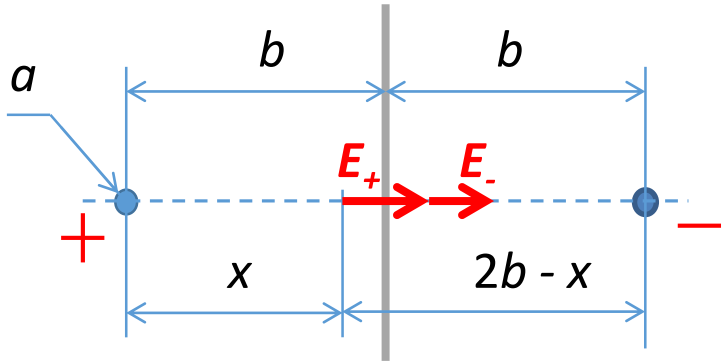


Рис. 1

Решение: Емкость системы на единицу длины равна

$$C_l = \frac{\tau}{U}, \qquad (1)$$

где τ - линейная плотность электрического заряда,

$$U = \int_a^b (\vec{E}, \vec{dl}) \qquad (2)$$

– напряжение между проводом и плоскостью. Т.к. плоскость – проводящая, то её потенциал постоянный, поэтому для решения задачи используем метод электрических изображений.

Расположим второй провод с противоположным по знаку электрическим зарядом симметрично первому относительно плоскости (рис.1). Величина напряжённости в точке прямого отрезка, проходящего через оси проводников, на расстоянии *x* от первого провода равна

$$E = E_+ + E_- , \qquad (3)$$

где напряженность поля от положительно заряженного провода равна

$$E_+ = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x}, \qquad (4)$$

а напряженность поля отрицательно заряженного провода равна

$$E_{-} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(2b-x)} \qquad (5)$$

Величина напряжения

$$U = \int_a^b \left(\vec{E}, \overrightarrow{dl}\right) \qquad (6)$$

для потенциального поля не зависит от траектории интегрирования, поэтому можно проинтегрировать вдоль отрезка, проходящего через оси проводников:

$$U = \int_a^b E dx \qquad (7)$$

или

$$U = \int_a^b \left\{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(2b-x)}\right\} dx = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{b}{2b-a}\right) \qquad (8)$$

С учётом условия *a*<<*b*

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{2b}{a}\right). \qquad (9)$$

Поэтому ёмкость системы на единицу длины равна

$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{2b}{a}\right)}. \qquad (10)$$

Задача 2.135. ***Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной а в системах, которые показаны на рис. 2***

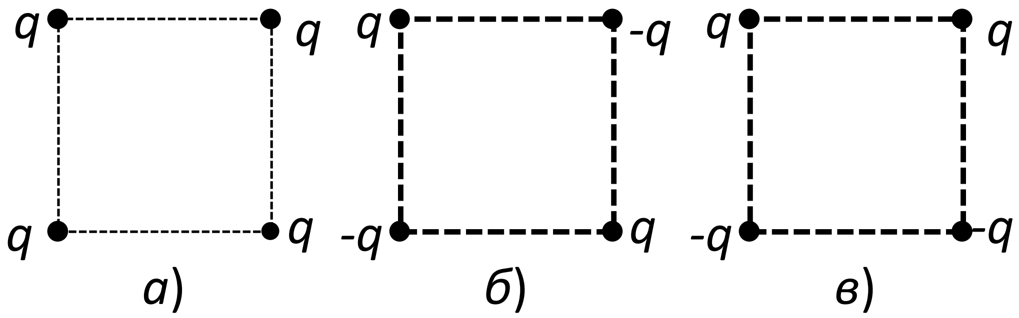


Рис. 2

Решение. Энергию системы зарядов можно найти суммированием энергии попарных взаимодействий $W = \sum_{(i,j)} W_{ij}$, где пара разных индексов (*i*, *j*) берётся только один раз:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34} \qquad (1)$$

Часто удобнее вычислять энергию взаимодействия по формуле

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i\,, \qquad (2)$$

где

$$\varphi_i = \sum_{j\neq i}\varphi_j \qquad (3)$$

– потенциал поля в точке заряда с номером *i*, создаваемого остальными зарядами.

Для конфигурации зарядов на рисунке *а*) потенциалы всех зарядов одинаковые

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a\sqrt{2}}\,, \qquad (4)$$

поэтому

$$W = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot q\cdot\left(2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} + \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}}\,. \qquad (5)$$

Для конфигурации зарядов на рисунке *б*) потенциалы в точках нахождения положительных зарядов

$$\varphi_+ = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a\sqrt{2}}, \qquad (6)$$

потенциалы в точках нахождения отрицательных зарядов

$$\varphi_- = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{a\sqrt{2}}, \qquad (7)$$

поэтому

$$W = \frac{1}{2} \cdot (2q \cdot \varphi_+ - 2q \cdot \varphi_-) = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}} - 4 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}. \qquad (8)$$

Для конфигурации зарядов на рисунке *в*) потенциалы в точках нахождения положительных зарядов

$$\varphi_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{a\sqrt{2}}, \qquad (9)$$

потенциалы в точках нахождения отрицательных зарядов

$$\varphi_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a\sqrt{2}}, \qquad (10)$$

поэтому

$$W = \frac{1}{2} \cdot (2q \cdot \varphi_+ - 2q \cdot \varphi_-) = -\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}}. \qquad (11)$$

Задача 2.152. ***Плоский конденсатор расположен горизонтально так, что одна его пластина находится над поверхностью жидкости, а вторая – под её поверхностью. Диэлектрическая проницаемость жидкости ε, её плотность ρ. На какую высоту поднимется уровень жидкости в конденсаторе после сообщения его пластинами заряда с поверхностной плотностью σ?***

Решение: При расчетах будем пренебрегать искажением поля вблизи краёв пластин. Пусть площадь пластины конденсатора равна S, тогда заряд конденсатора равен $q = \sigma S$. Предполагаем, что время, в течение которого был заряжен конденсатор много меньше времени заполнения жидкостью. В этом случае можно считать, что энергия конденсатора после сообщения заряда изменилась за счет работы силы тяжести.

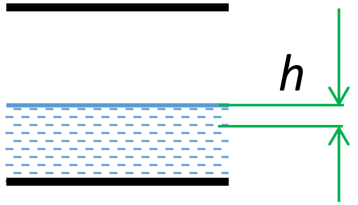


Рис.3

Сила тяжести совершает работу при подъёме центра масс жидкости на высоту $h/2$:

$$A_{\text{Т}} = -mg\frac{h}{2}, \quad (1)$$

где масса жидкости равна

$$m = \rho h S. \quad (2)$$

Если пренебречь выделением теплоты, то работа силы тяжести равна изменению энергии конденсатора

$$A_{\text{Т}} = \Delta W, \quad (3)$$

Электрическое смещение в D в конденсаторе равно поверхностной плотности заряда

$$D = \sigma \qquad (4)$$

Объёмная плотность энергии в конденсаторе при отсутствии жидкости

$$w_0 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0} \qquad (5)$$

В случае присутствия жидкости

$$w_{ж} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (6)$$

Разность энергии в объёме величиной $V = Sh$ с жидкостью и без неё равна работе по поднятию жидкости

$$\Delta W = \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)Sh. \quad (7)$$

С учётом выражений (1) – (3) получаем выражение для высоты подъёма жидкости

$$h = \frac{\sigma^2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon_0 \varepsilon g \rho}. \qquad (8)$$

Анализируя выражение, описывающее изменение высоты подъёма жидкости с учётом выражений для энергии и совершаемой работы, поиском минимума функции $W(h)$ находится минимум этой функции со значением

$$h_{\min} = \frac{\sigma^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon_0 \varepsilon g \rho}. \qquad (9)$$

Домашнее задание

Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998 - 2001,

Дома: ОЛ-7 задачи 2.116, 2.149 или ОЛ-8 задачи 3.108, 3.143.

ОЛ-7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2001.
ОЛ-8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Наука, 1988.

2.116. Найти емкость цилиндрического конденсатора длины *l*, радиусы обкладок которого *a* и *б*, причем *a* меньше *б*, если пространство между обкладок заполнено диэлектриком:

а) проницаемости ε;

б) проницаемость которого зависит от расстояния *r* до оси конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r$, где α – постоянная.

2.116. а) $C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon l/\ln(b/a)$; б) $C = 2\pi\varepsilon_0 l\alpha/(b - a)$, α — постоянная.

2.149. Имеется плоский воздушный конденсатор, площадь каждой обкладки которого равна S. Какую работу необходимо совершить, чтобы медленно увеличить расстояние между обкладками от x_1 до x_2, если при этом поддерживать неизменным:

а) заряд конденсатора, равный q;

б) напряжение на конденсаторе, равное U?

2.149. а) $A = q^2(x_2 - x_1)/2\varepsilon_0 S$; б) $A = \varepsilon_0 S U^2(x_2 - x_1)/2x_1x_2$.

Спасибо за внимание