Занятие 4. Магнитное поле токов.

Для подготовки к семинару надо проработать

Лекции 5. Магнитное поле в вакууме.
ОЛ-1(§5.1- 5.5), ОЛ-3(§6.1- 6.3, 6.12), ОЛ-4(§6.2- 6.5), ДЛ-10,11,12.
Лекция 8. Магнитное поле в веществе.
ОЛ-1(§8.1- 8.7), ОЛ-3(§7.1- 7.9), ОЛ-4(§7.1- 7.6), ДЛ-10,11,12.

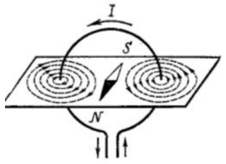
ОЛ-1. Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 423 с.
ОЛ-3. Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для втузов. В 5 кн (кн.2). – М.: Наука, 1998.
ОЛ-4. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 352 с.

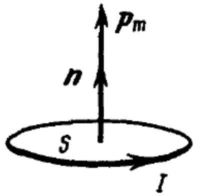
ДЛ-10. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Теория и практика классической электродинамики. – М.: URSS, 2014. – 774 с.
ДЛ-11. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 720 с.
ДЛ-12. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие для вузов. В 5 томах. – М.: Физматлит, 2002. – 4506 с.

Краткие теоретические сведения

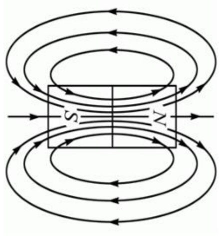
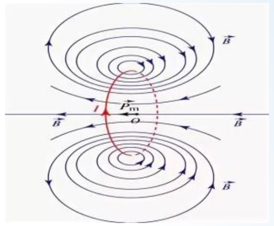
Источники магнитного поля

$$q\vec{v} = I\vec{l} = \vec{j}V$$





$$\vec{p}_{\mathrm{m}} = IS\vec{n}$$

Характеристики магнитного поля

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{p}_m, \vec{e}_r]}{r^3}; \quad B = \mu_0 \frac{p_{\mathrm{m}}}{4\pi r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Силовая: $B = \dfrac{F}{\left|jV\right|_{\text{Пр}}}$; $\quad d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}\left[\vec{j}_0 \times \vec{e}_{\mathrm{r}}\right] dV;$

Закон Био-Савара-Лапласа $\quad d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\left[d\vec{l} \times \vec{e}_{\mathrm{r}}\right]; \quad \delta B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}.$

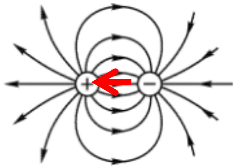
Энергетическая: $\left|\vec{A}\right| = \dfrac{W}{\left|\vec{j}V\right|_{\text{Пр}}}$; $\quad \vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r}\displaystyle\int \vec{j}_0 dV;$

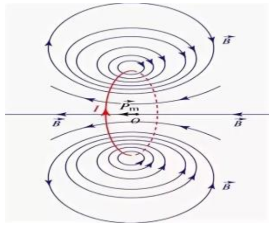
Взаимосвязь параметров: $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}; \quad \Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}.$

Краткие теоретические сведения

Поле магнитного диполя – вихревое, в сечении похожее на поле электрического диполя

$\boxed{\vec{p}_{\mathrm{e}}}$ $\vec{p}_{\mathrm{e}} = q\vec{l}\,;$





$\boxed{\vec{p}_{\mathrm{m}}}$ $\vec{p}_{\mathrm{m}} = IS\vec{n};$ $B = \mu_0 \dfrac{p_{\mathrm{m}}}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$

Реакция вещества на внешнее магнитное поле, векторы *J* и *H*

$\chi = \mu - 1;$ $\vec{J} = \chi\vec{H};$ $\boxed{\vec{J} == \dfrac{\sum \vec{p}_{\mathrm{m}}}{V};}$ Вариант физического представления: $\vec{H} = \dfrac{\sum \vec{p}_{\mathrm{m}}^{\;\text{вирт}}}{V}$

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu\mu_0\vec{H}$ - суммарный вектор. $\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}$

Циркуляция векторов *H* , *J* и *B*

$$\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \sum I; \quad \oint \vec{J}\mathrm{d}\vec{l} = \sum I'; \quad \oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I + I') = \mu\mu_0 I$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}; \quad \mathrm{rot}\vec{J} = \vec{j}\,'; \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}\,') = \mu\mu_0\vec{j}$$

Граничные условия для магнитных векторов

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$$ - из теоремы о циркуляции вектора ***H.***

$$B_{\mathrm{n}1} = B_{\mathrm{n}2}$$ - из теоремы Гаусса для вектора ***B.*** $\mathrm{div}\vec{B} = 0.$

$$J_{\mathrm{R}} = i'^{\text{пов}} = \frac{I'^{\text{пов}}}{2\pi R}$$ - из теоремы о циркуляции вектора ***J.***

Аналогии магнитных и электрических векторов:

$\boldsymbol{B}$ аналог $\boldsymbol{E}$; $\boldsymbol{H}$ аналог $\boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{J}$ аналог $\boldsymbol{P}$.

Задача 2.234. Ток $I = 11{,}0$ А течёт по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса $R = 5{,}0$ см (рис. 1). Найти магнитную индукцию на оси О.

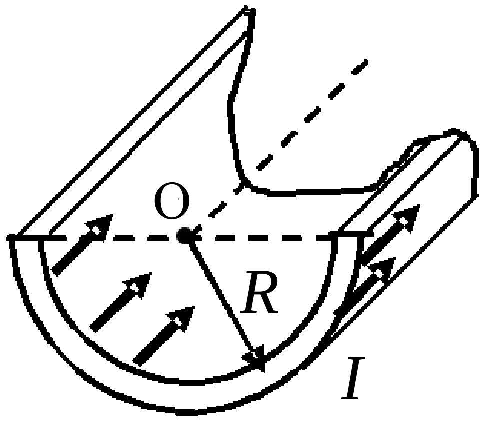


Рис.1

Решение: Разобьём проводник на множество тонких проводников, опирающихся на малый центральный угол $d\alpha$ (рис.2). По такому проводнику протекает ток

$$dI = \frac{I}{\pi} d\alpha. \qquad (1)$$

Этот проводник создаёт в точках на оси О вектор индукции магнитного поля, направление которого согласовано с направлением тока правым винтом

$$\delta B = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R}. \qquad (2)$$

Если ввести оси координат, как показано на рис.2:

$$B_X = \int_0^{\pi} \delta B \sin\alpha = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{I}{\pi} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}, \qquad (3)$$

$$B_Y = \int_0^{\pi} \delta B \cos\alpha = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{I}{\pi} \cos\alpha d\alpha = 0. \qquad (4)$$

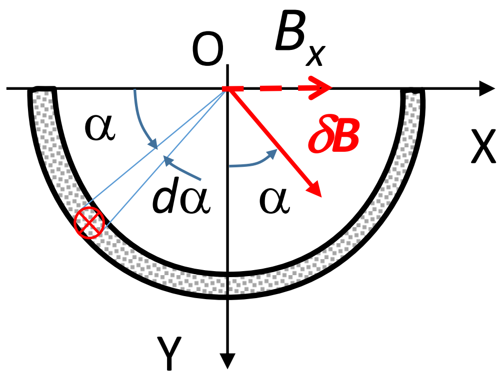


Рис.2

Окончательный ответ:

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}. \qquad (5)$$

Задача 2.242. ***Однородный ток плотности j течёт внутри неограниченной пластины толщины 2d параллельно её поверхности. Пренебрегая влиянием вещества пластины, найти индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния x от середины плоскости пластины.***

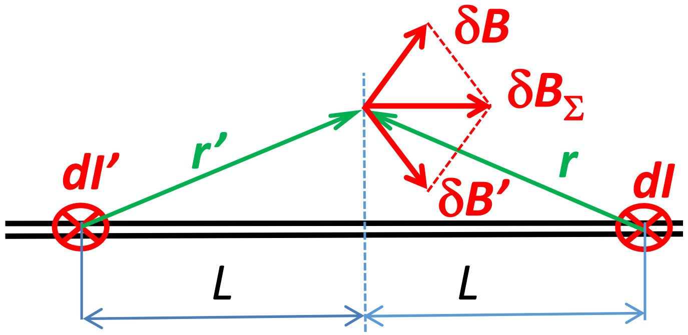


Рис. 3

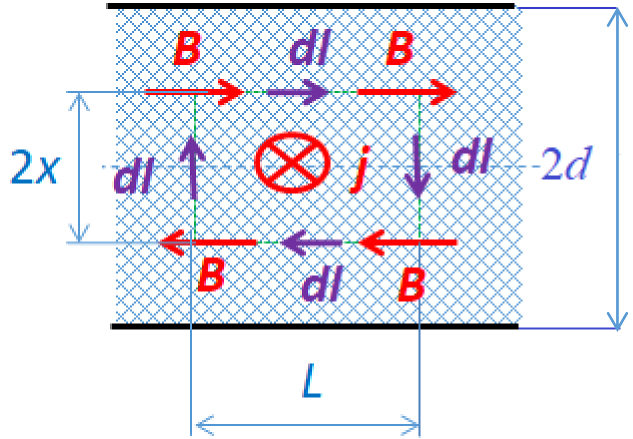


Рис. 4

Решение: Сначала покажем направление вектора магнитной индукции поля, создаваемого однородным током, протекающим по тонкой неограниченной пластине.

Как видно из рис.3, два любых одинаковых малых тока dI и dI' создают в любой точке срединного перпендикуляра к отрезку, соединяющего эти токи, вектор индукции δB_Σ, направленный параллельно пластине. Таким образом, в каждой точке поля около тонкой пластины вектор индукции направлен параллельно пластине. Очевидно, что направление вектора магнитной индукции согласовано с направлением тока правым винтом.

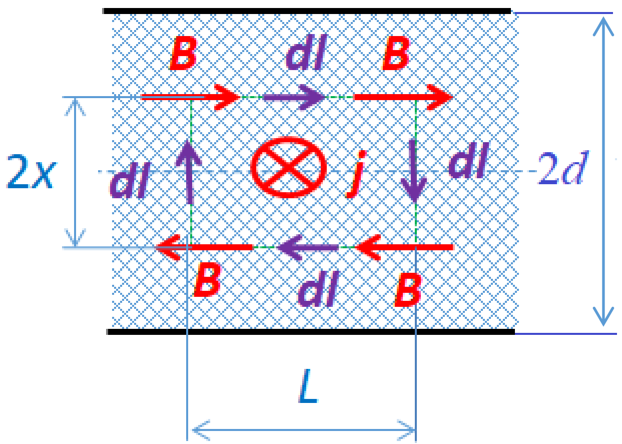


Рис. 4

Неограниченную пластину толщины 2*d* можно рассматривать как набор тонких неограниченных пластин, поэтому в каждой точке вектор индукции направлен параллельно пластине.
Применим теорему о циркуляции вектора магнитной индукции

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{B}, \overrightarrow{dl}\right) = \mu_0 I_{\text{ВН}}. \qquad (1)$$

В качестве контура Γ возьмём прямоугольник длиной *L* и высотой 2*x*, расположенный симметрично относительно срединной плоскости (рис. 4). Направление обхода контура согласуем с направлением вектора плотности тока $\vec{j}$, поэтому на горизонтальных сторонах контура касательный вектор $\overrightarrow{dl}$ и вектор магнитной индукции направлены одинаково, а на вертикальных – перпендикулярно друг к другу.

Поэтому

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{B}, \overrightarrow{dl}\right) = 2BL. \qquad (2)$$

а) пусть $x < d$, тогда сила тока внутри выделенного контура

$$I_{\text{ВН}} = j2xL \qquad (3)$$

и согласно (1) циркуляция вектора B по выделенному контуру

$$2BL = \mu_0 j2xL; \qquad (4)$$

отсюда

$$B = \mu_0 jx; \qquad (5)$$

б) пусть $x \geq d$, тогда

$$I_{\text{ВН}} = j2dL \qquad (6)$$

и

$$2BL = \mu_0 j2dL; \qquad (7)$$

отсюда

$$B = \mu_0 jd\ . \qquad (8)$$

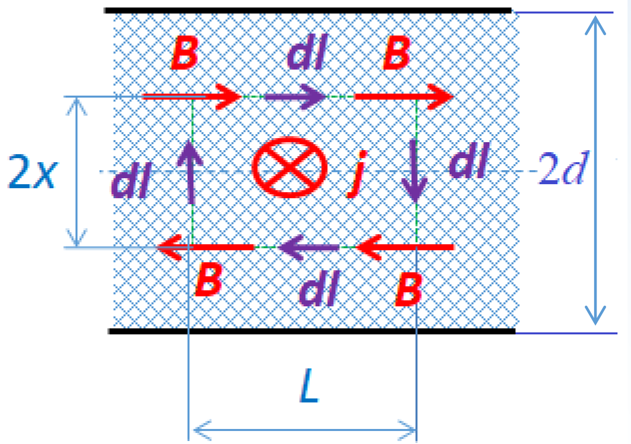
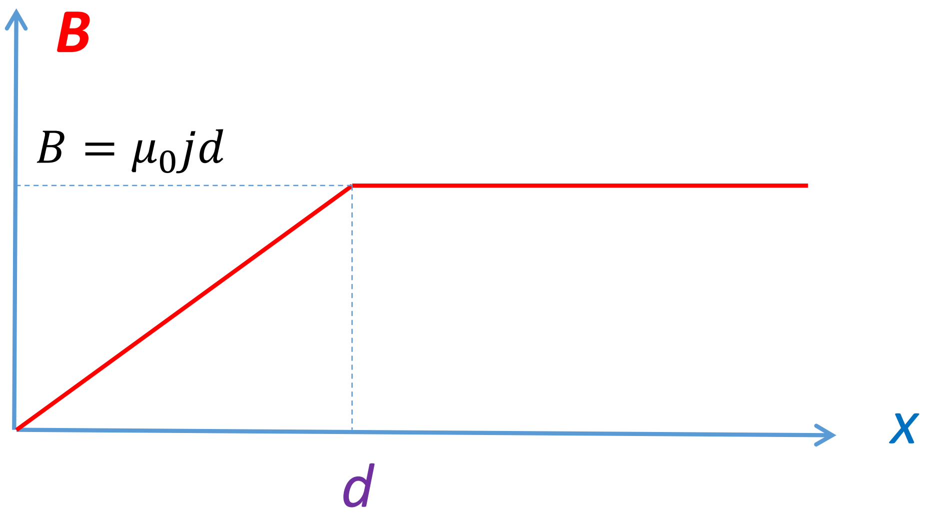


Рис. 4



Задача 2.250. ***Длинный соленоид имеет радиус сечения R и n витков на единицу длины. По нему течёт постоянный ток I. Найти индукцию магнитного поля на оси как функцию координаты x, отсчитываемой вдоль оси соленоида от его торца. Изобразить примерный график зависимости индукции B от отношения x/R.***

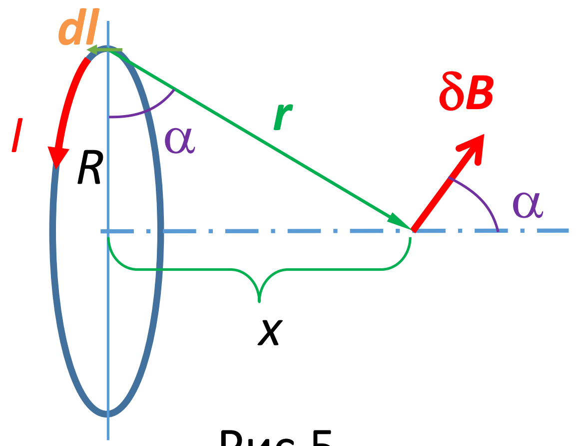


Рис.5

Решение: 1) Сначала найдем величину индукции на оси тонкого кольца радиуса *R* с постоянным током *I* как функцию расстояния от центра кольца *B*(*x*) (рис. 5). Так как картина магнитного поля не меняется при повороте кольца вокруг оси, то вектор индукции направлен по оси кольца.

По закону Био-Савара-Лапласа малый элемент кольца $\overrightarrow{dl}$ создает на оси кольца на расстоянии *x* от центра кольца индукцию магнитного поля величиной

$$\delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}, \qquad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + R^2}$. (2)

Если ввести угол α между осью кольца и вектором $\overrightarrow{\delta B}$, то величина суммарной индукции на оси будет равна $B = \oint_{\text{кольцо}} \delta B cos\alpha$, (3)

где $cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$. (4)

Тогда $$B = \oint_{\text{кольцо}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{RIdl}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad (5)$$

2) Определим индукцию на торцах соленоида длиной *L*.

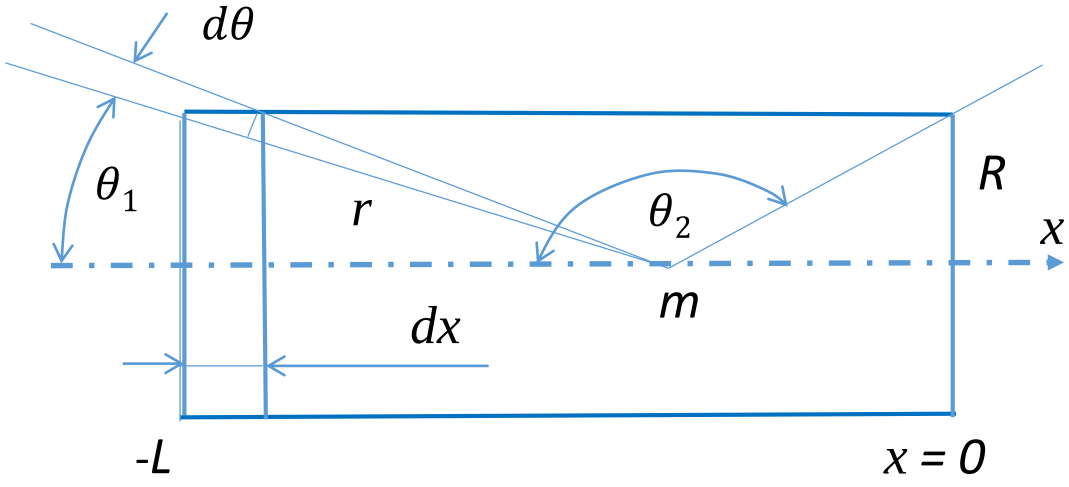


Рис. 6

Рассмотрим вклад элементарного участка соленоида, который расположен между радиусами *r*, проведенными из точки $x = m$ и образующими с осью x углы от θ_1 до $\theta_1 + d\theta$.

Длина этого участка соленоида $dx = rd\theta/\sin\theta_1$,

Этот участок эквивалентен кольцу с током, равным

$$In r d\theta/\sin\theta_1.$$

Вклад этого участка в осевое магнитное поле в точке $x = m$ на оси катушки:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2}{r^3}\frac{In\, r\, d\theta}{\sin\theta 1} = \frac{\mu_0}{2} In \sin\theta_1 d\theta. \qquad (6)$$

Для нахождения индукции на краях соленоида от всех его витков точку *m* совмещаем с $x = 0$ и производим интегрирование выражения (6), обозначив $\theta_1 = \theta_L$, при этом $\theta_2 = \pi/2$.

$$B_L = \frac{\mu_0 In}{2}\int_{\theta_L}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta, \qquad (7)$$

Общее решение интеграла (7) $B_x = \frac{\mu_0 In}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$. (8)

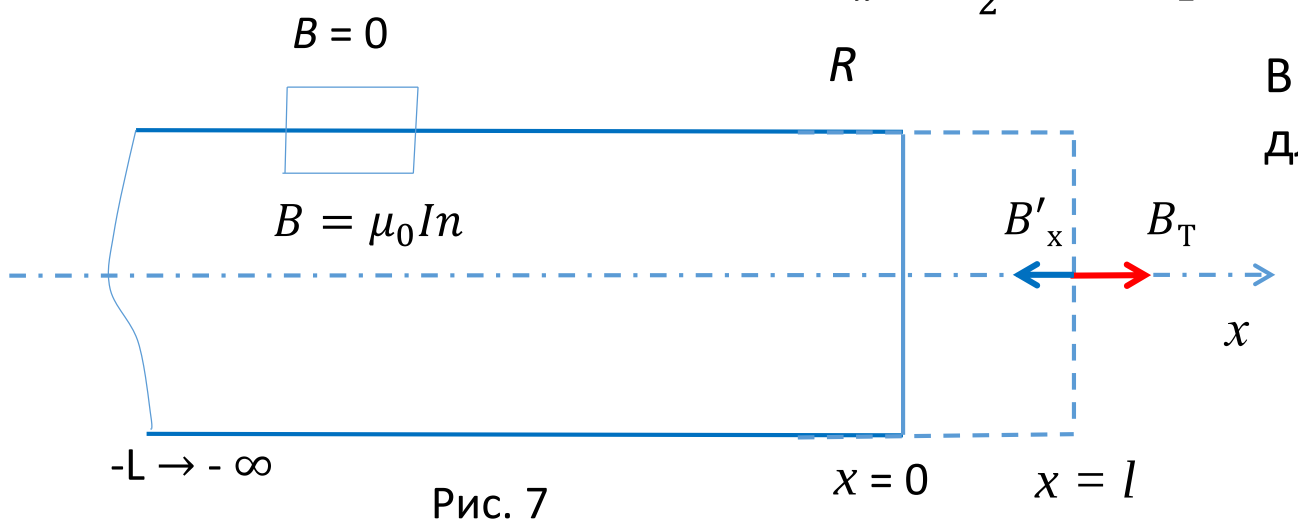


Рис. 7

В нашем примере для соленоида длиной L индукция на его краях

$$B_\mathrm{L} = \frac{\mu_0 In}{2}\cos\theta_\mathrm{L} = \frac{\mu_0 In}{2}\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}. \quad (9)$$

При произвольной длине соленоида

$$B'_\mathrm{x} = \frac{\mu_0 In}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}. \quad (10)$$

3) При $L \to \infty$ индукция на торцах соленоида: $B_\mathrm{T} = \frac{\mu_0 In}{2}$. (11)

Внутри соленоида индукции вдвое превышает это значение, что можно определить по общей формуле (8) или по теореме о циркуляции вектора B (см. рис. 7).

Индукцию на оси соленоида вне его можно определить методом инверсной суперпозиции, т.е. наложением на торец другого соленоида с обратным направлением тока и требуемым значением $x = l$ (см. рис.7). В этом случае

$$B_\mathrm{x} = B_\mathrm{T} - B'_\mathrm{x}. \quad (12)$$

Для координат точек вне длинного соленоида $x > 0$

$$B(x) = \frac{In\mu_0}{2}\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right\}. \qquad (13)$$

Или в относительных единицах

$$\frac{B(x)}{B_\infty} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{(x/R)}{\sqrt{(x/R)^2+1}}\right\}. \qquad (14)$$

Качественный график отношения $\frac{B(x)}{B_\infty}$ в зависимости от величины $\left(\frac{x}{R}\right)$
 показан на рис. 8.

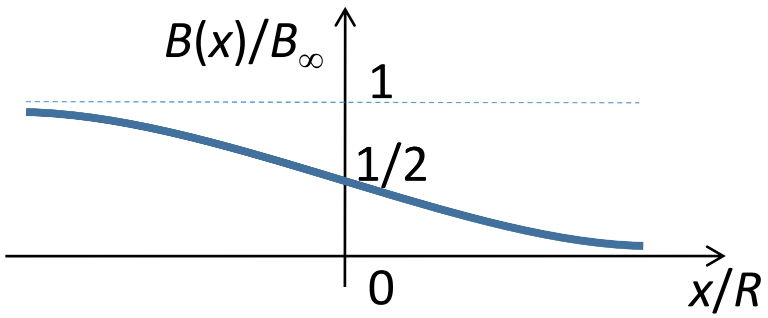
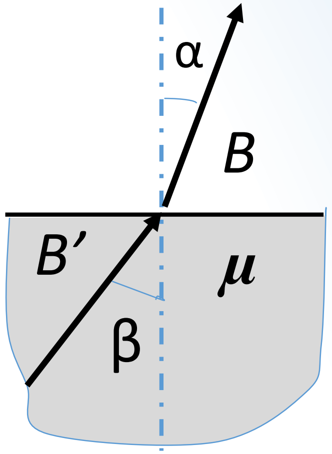


Рис. 8

Задача 2.293. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного магнетика равна B, причём вектор B составляет угол α с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика μ. Найти индукцию B' магнитного поля в магнетике вблизи поверхности.



Решение: На границе раздела магнетиков неизменны:

- нормальная составляющая вектора индукции

$$B_{1n} = B_{2n}\text{, т.е. } B'_n = B\cos\alpha$$

- касательная составляющая вектора напряжённости магнитного поля

$$H_{1t} = H_{2t}\text{, т.е. } H'_t = \frac{B\sin\alpha}{\mu_0}.$$

Касательная составляющая вектора индукции магнитного поля

$$B'_t = \mu_0 \mu H'_t = \mu B\sin\alpha$$

Величина индукции магнитного поля в магнетике вблизи поверхности

$$B' = \sqrt{(B'_t)^2 + (B'_n)^2} \text{ или } B' = \sqrt{(\mu B\sin\alpha)^2 + (B\cos\alpha)^2}.$$

Угол наклона β к нормали к границе со стороны магнетика определяется из соотношения:

$$tg\beta = \frac{B'_t}{B'_n} = \mu tg\alpha\ .$$

Для закрепления знаний по теме данного семинара дома следует самостоятельно решить следующие задачи, которые рекомендуются учебным планом

Домашнее задание

Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998 - 2001,

Дома: ОЛ-7 задачи 2.239, 2.258 или ОЛ-8 задачи 3.231, 3.249.

ОЛ-7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2001.
ОЛ-8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Наука, 1988.

ОЛ-7 задачи 2.239, 2.258

3.239. Найти индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током $I = 8{,}0$ А имеет вид, показанный на рис. 3.63: *а*, *б* .

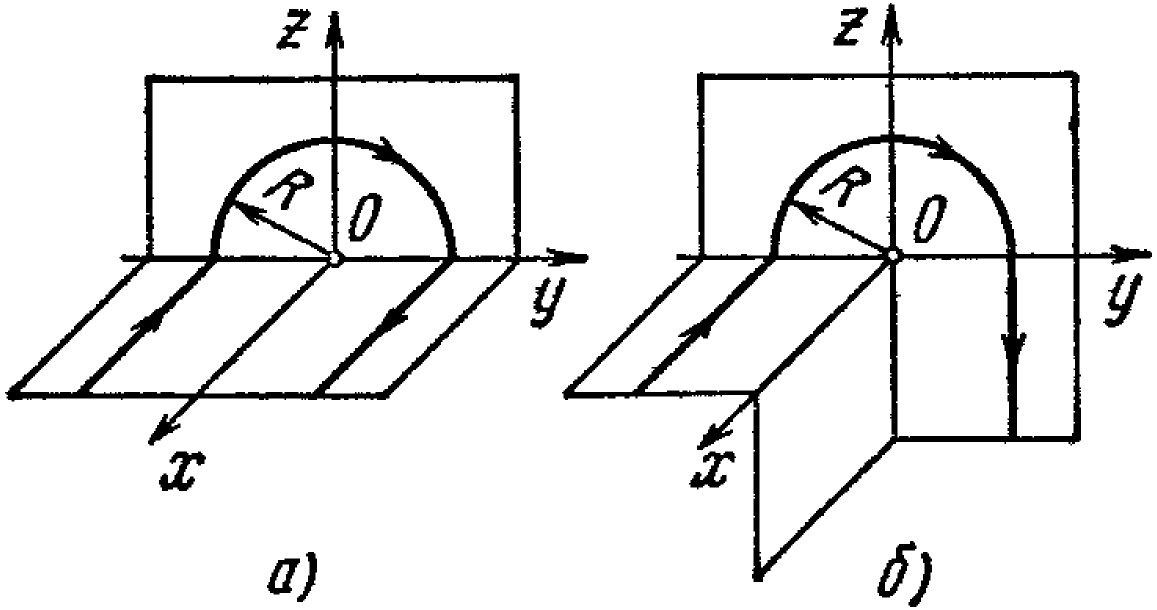


Рис. 3.63.

Радиус изогнутой части проводника $R = 100$ мм, прямолинейные участки проводника очень длинные.

2.258. Тонкий провод (с изоляцией) образует плоскую спираль из $N = 100$ плотно расположенных витков, по которым течет ток

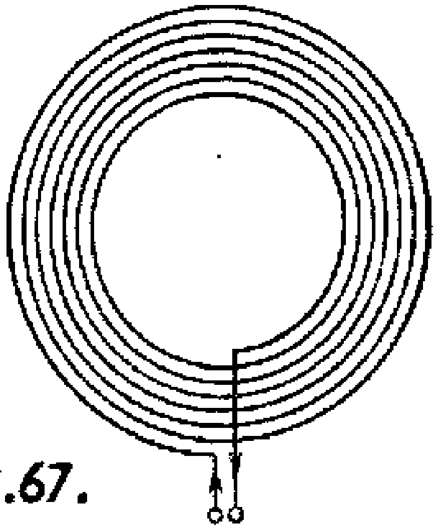


Рис. 3.67.

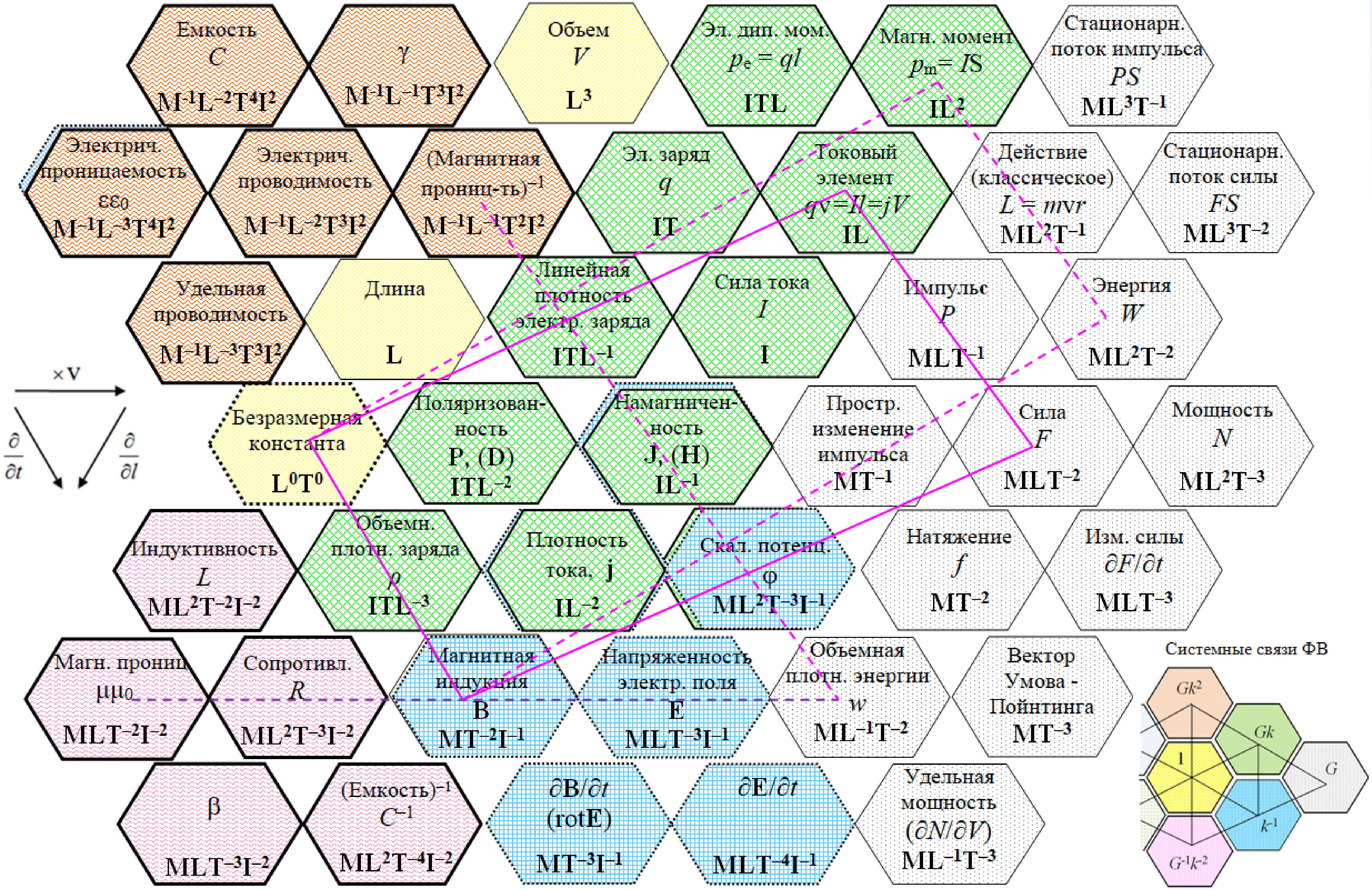
$I = 8$ мА. Радиусы внутреннего и внешнего витков (рис. 3.67) равны $a = 50$ мм, $b = 100$ мм. Найти:

а) индукцию магнитного поля в центре спирали;

б) магнитный момент спирали при данном токе.

Электромагнитные величины в системе ФВиЗ

МГТУ им. Н.Э. Баумана



Спасибо за внимание