

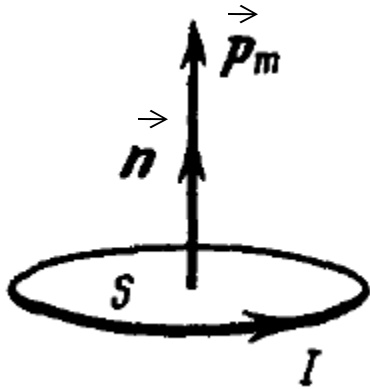
# Лекция 8 – 2022

1. Намагниченность вещества
2. Вектор напряженности магнитного поля и его связь с векторами индукции и намагниченности.
3. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества
4. Теоремы о циркуляции векторов напряженности и намагниченности в интегральной и дифференциальной формах.
5. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.
6. Поле на границе раздела магнетиков

То, что мы знаем, - ограничено, а то, что  
не знаем, - бесконечно

*П. Лаплас*

# Магнитный момент



$$\vec{p}_m = I S \vec{n}$$

**Намагниченность** –  
объемная плотность  
суммарного магнитного  
дипольного момента

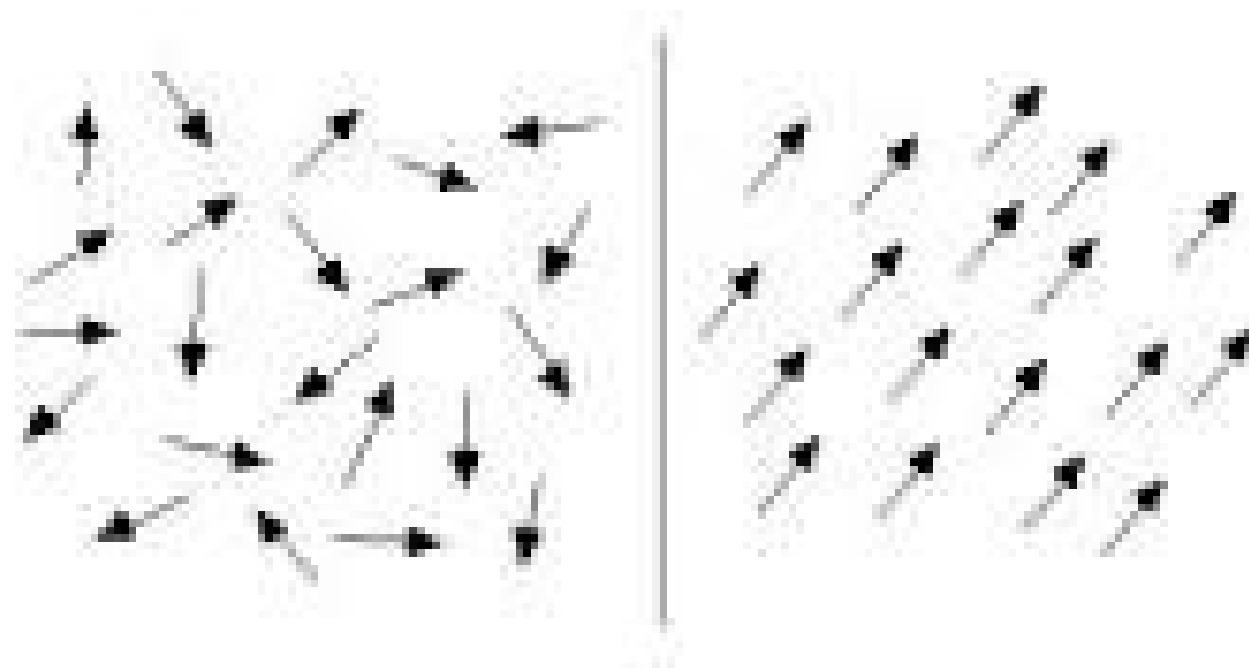
$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{P}_{m i}$$

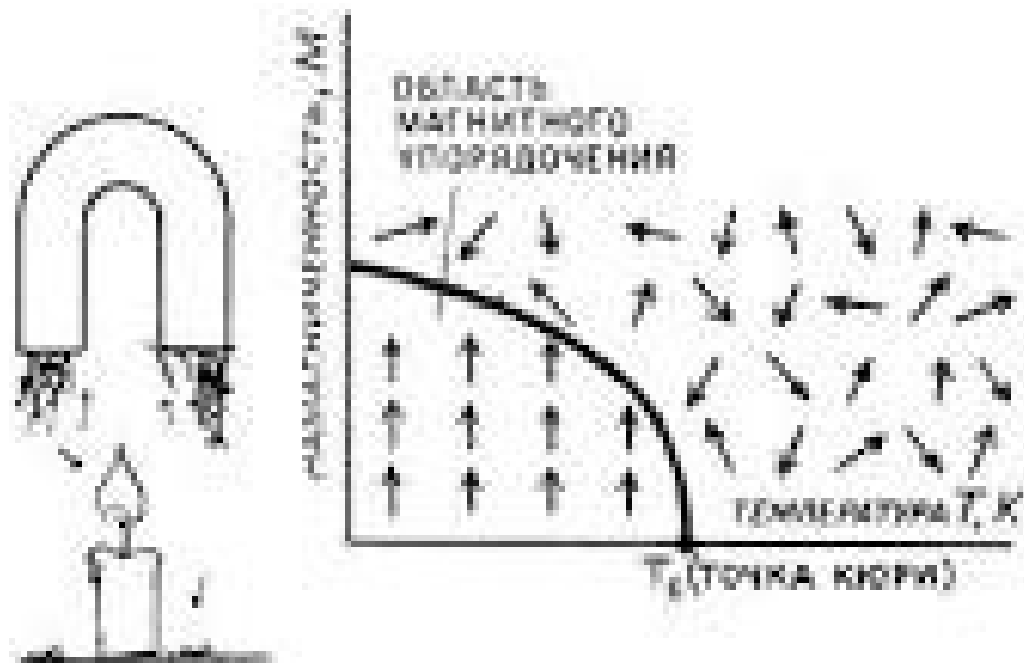
# Намагниченность вещества

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m,$$

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle,$$

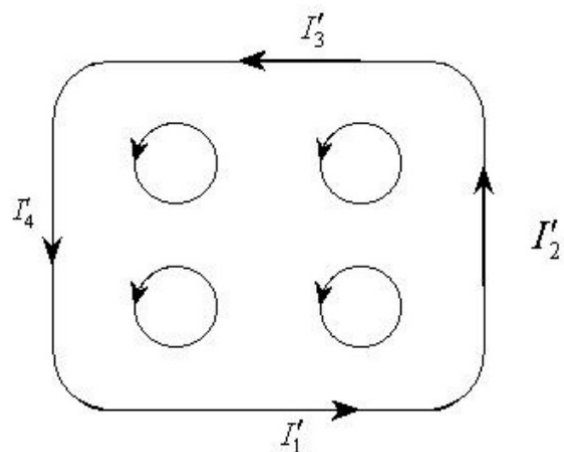
# Намагниченность веществ



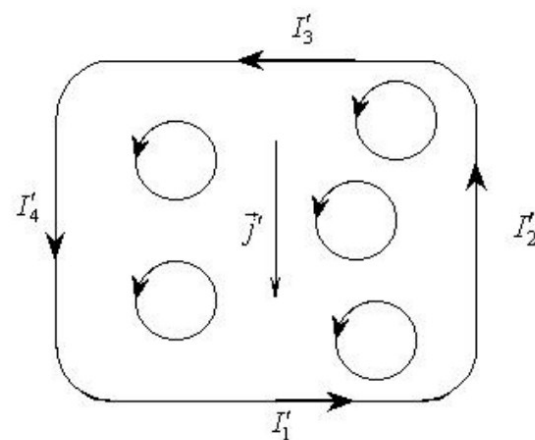


# Намагниченность веществ

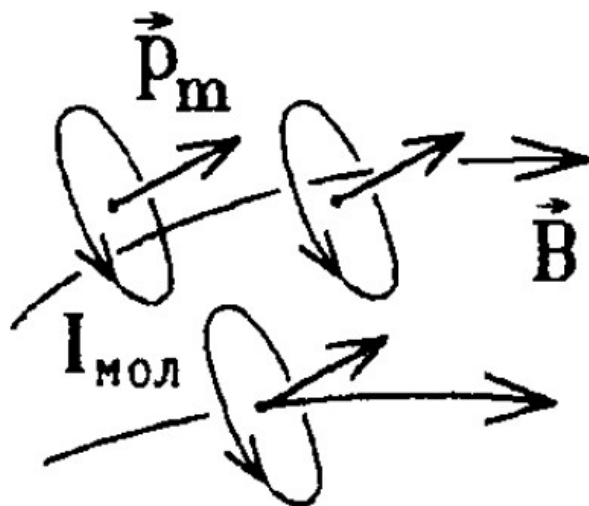
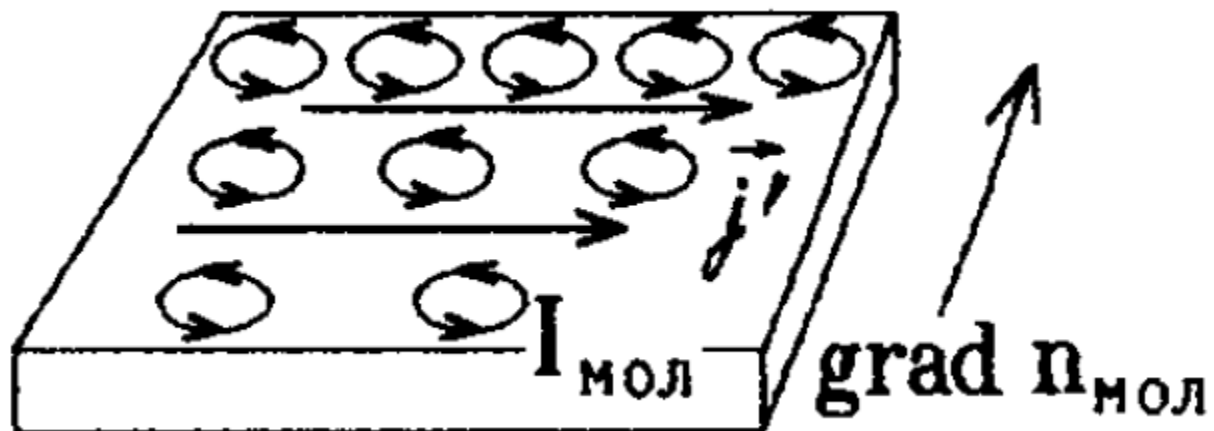
Однородная намагниченность



Неоднородная намагниченность



## Неоднородная намагниченность

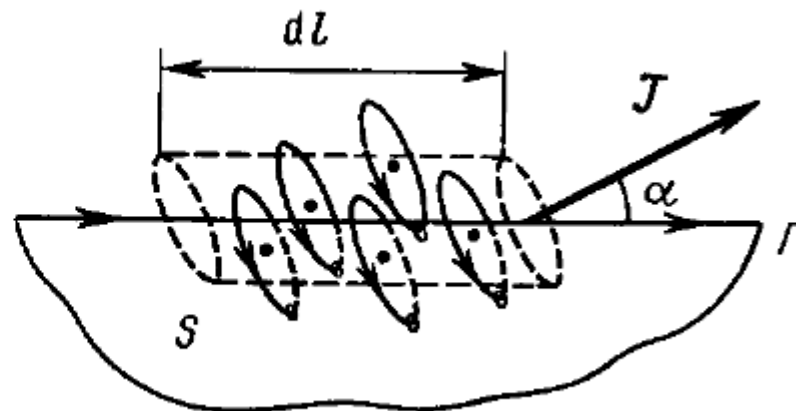
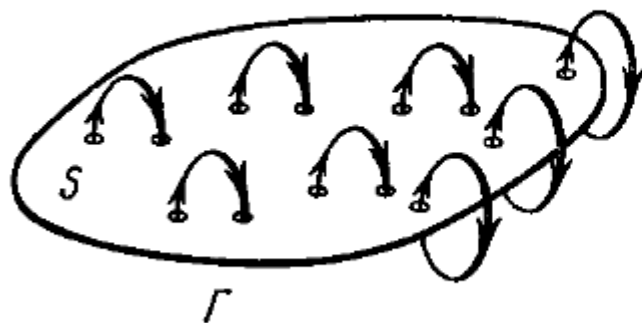




# Теорема о циркуляции вектора $\vec{J}$

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I',$$

Иродов, стр. 181.



$$dV = S_m \cos \alpha dl,$$

$dI' = I_m n dV$ , где  $n$  — концентрация молекул.

$$dI' = I_m S_m n \cos \alpha dl = J \cos \alpha dl = \vec{J} d\vec{l};$$

$I_m S_m = p_m$  — магнитный момент отдельного молекулярного тока.

$I_m S_m n$  — магнитный момент единицы объема вещества.

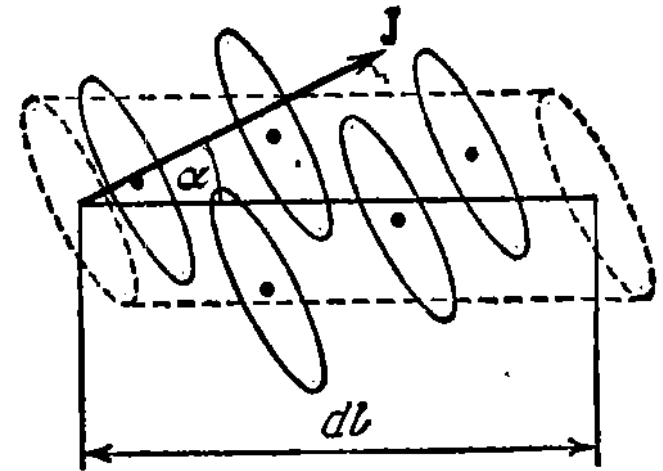
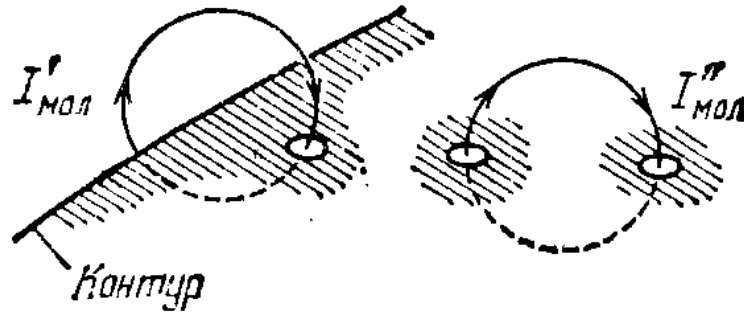
# Теорема Стокса

- **Циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром.**

Подобные иллюстрации из учебника Савельева

$$I_{\text{мол}} = I'$$

$$j_{\text{мол}} = j'$$



$$\int_{\vec{S}} \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l}. \quad - \text{ суммарный молекулярный ток у края контура, равный силе тока намагничивания.}$$

$$\int_{\vec{S}} \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S} = \int_{\vec{S}} [\vec{\nabla} \vec{J}] d\vec{S}. \quad - \text{ выражение этого тока по теореме Стокса.}$$

$$\text{rot} J = j' \quad - \text{ из равенства интегральных выражений. Ротор вектора намагничивания = плотности поверхностного молекулярного тока.}$$

## Граничное условие для вектора $\mathbf{J}$

Циркуляция вектора намагниченности равна силе поверхностного молекулярного тока.

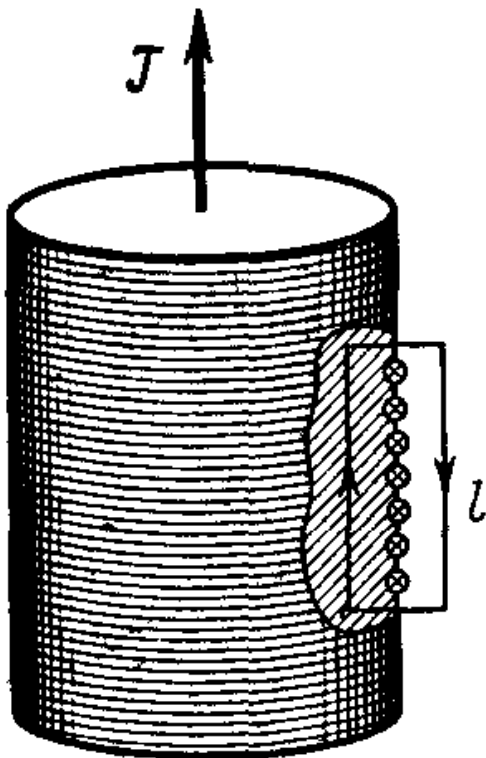
$$\oint \vec{\mathbf{J}} \, d\vec{\mathbf{l}} = I'.$$

Из циркуляция вектора намагниченности:

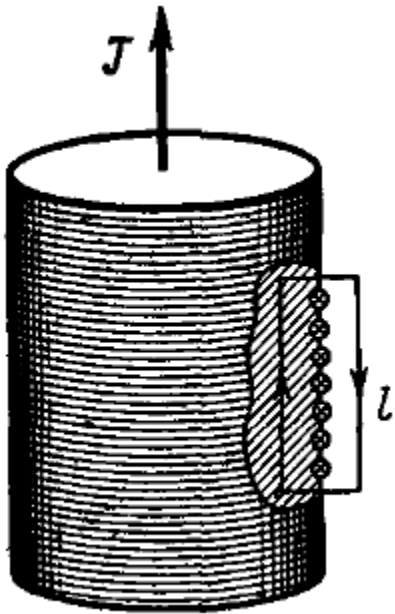
$$Jl = i'l$$

$$i' = J.$$

Линейная плотность поверхностного молекулярного тока численно равна приповерхностной намагниченности



**Намагниченность** численно равна  
поверхностной плотности тока  
намагничивания (молекулярного тока)



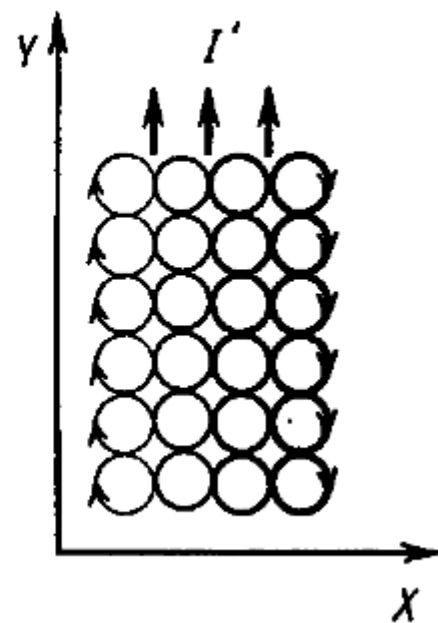
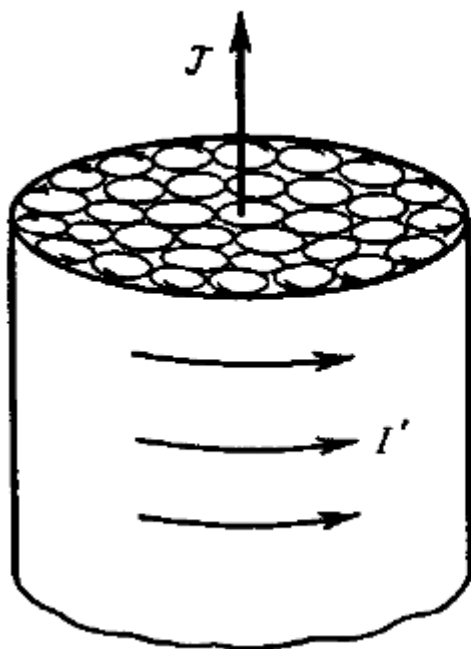
$$i' = J.$$

векторы  $\vec{i}'$  и  $\vec{J}$  взаимно перпендикулярны:

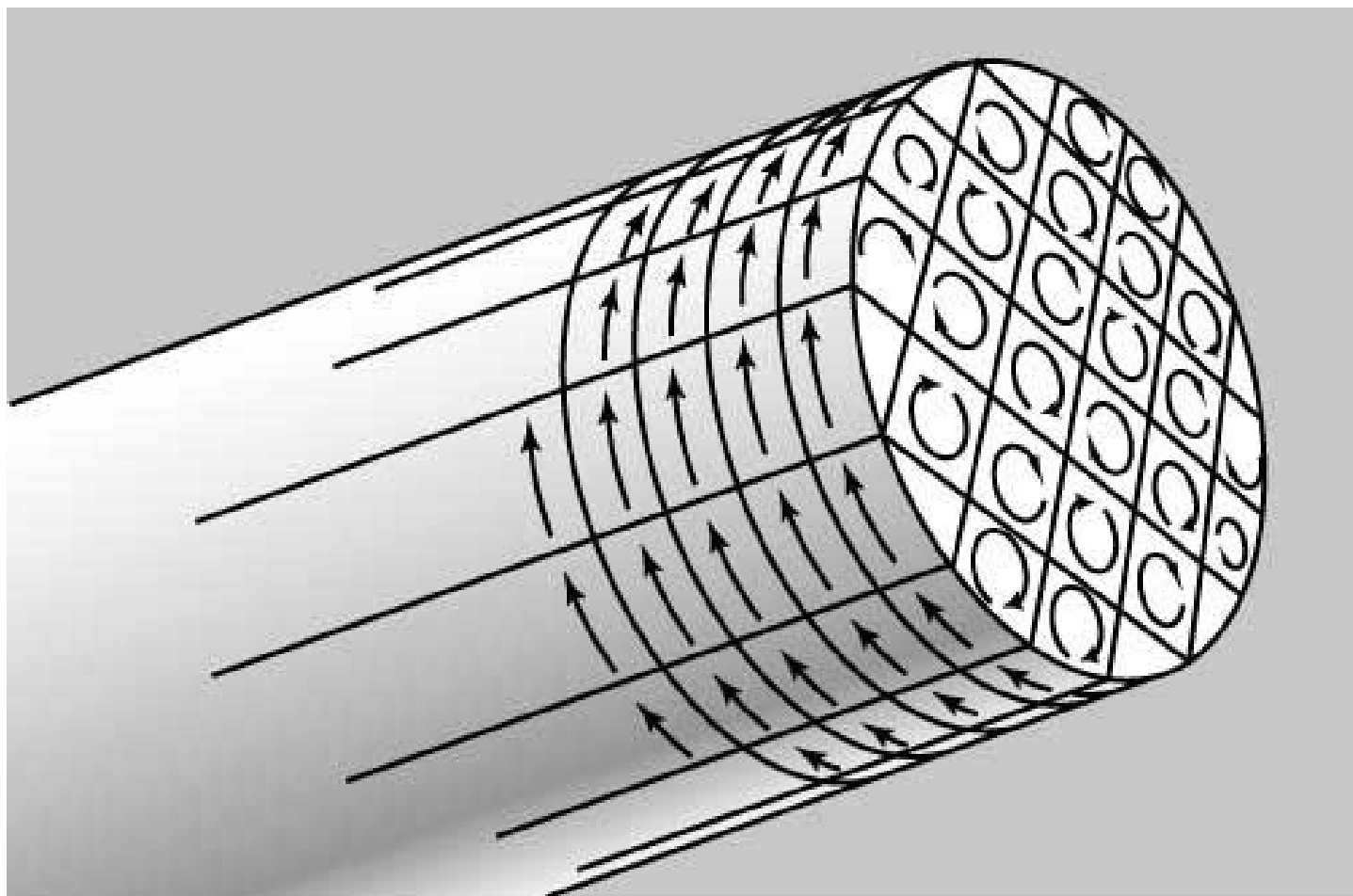
$$\vec{i}' \perp \vec{J}.$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

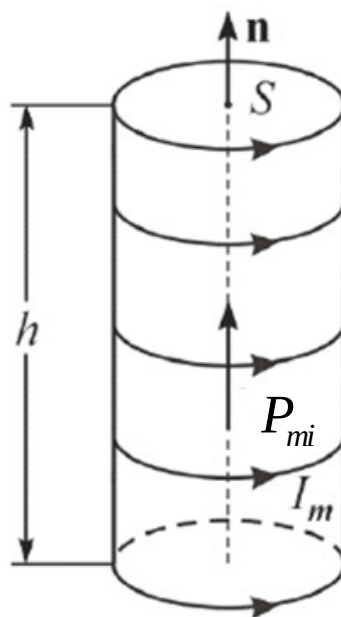
$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$



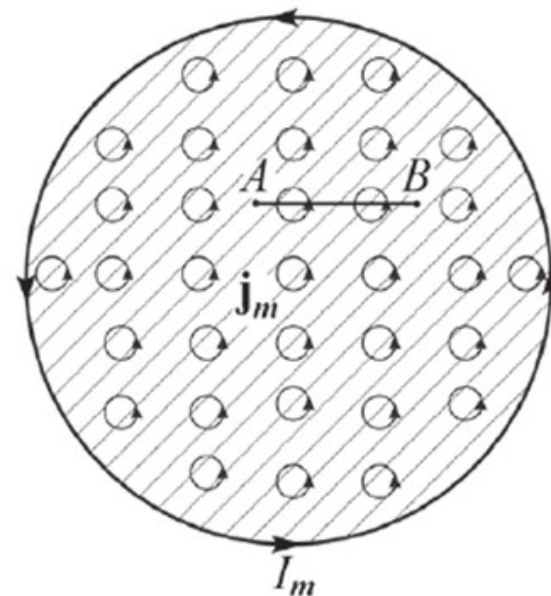
$$\text{rot} J \neq 0$$



$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{P}_{mi}$$



а



б

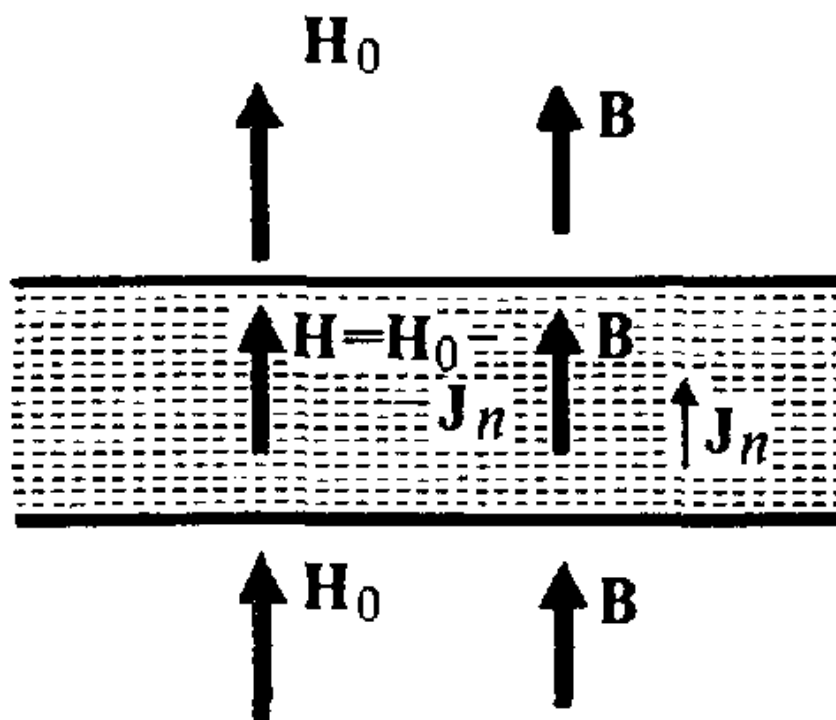
## Циркуляция вектора $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}):$$

$I_{\text{микро}}$  и  $I_{\text{макро}}$  — алгебраическая сумма макро- и микротоков сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур  $L$ .



# Реакция ферромагнетиков на внешнее однородное магнитное поле



Традиционное  
представление  
 $\mathbf{H}$  – суммарный  
вектор

Учебник  
Матвеева, стр. 149

Магнитное поле в присутствии  
ферромагнетика

# Реакция ферромагнетиков на внешнее однородное магнитное поле

Из учебника Матвеева

Рассмотрим для примера постоянный магнит в виде плоской пластины конечной толщины и бесконечной площади (рис. 149). Постоянная намагниченность  $J_n$  направлена перпендикулярно поверхности постоянного магнита. Диа- и парамагнитные свойства постоянного магнита не учитываем.

Пусть вне постоянного магнита имеется магнитное поле с напряженностью  $H_0$ , направленной перпендикулярно его поверхности. Индукция поля одинакова как вне магнита, так и внутри него и равна  $B = \mu_0 H_0$ . Тогда [см. (38.31в)]  $\mu_0 H_0 = \mu_0 H + \mu_0 J_n$ . Отсюда напряженность поля внутри постоянного магнита равна (см. рис. 149):

$$H = H_0 - J_n$$

Однако это очень сомнительно.

# Вектор напряженности магнитного поля $H$

Термин *напряженность* появился самым первым. Закон Био-Савара-Лапласа изначально был сформулирован для  $H$ , но после открытия *намагниченности*, ввели понятие *магнитной индукции*, обозначив ее буквой  $B$

$$B = \mu \mu_0 H$$

$\mu$  – определяется  
типом материала

Для вакуума  $B = \mu_0 H$

В системе СГС, где значение  $\mu_0$  принято безразмерным и равным единице, *магнитная индукция* считается макроскопическим полем, а *напряженность* микроскопическим (атомно-молекулярным) магнитным полем, т.е., по сути, различий нет.

Вектор **H** стали определять токами проводимости, а вектор **J** определять молекулярными токами. Тогда получается, что вектор **B** суммарный вектор (*но это не всеми признается*).

Интегральная теорема о циркуляции вектора **H**

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I.$$

Используя теорему Стокса, можем записать

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{H} dS$$

Учитывая, что:  $I = \int_S j dS$  получим:  $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$

Ротор вектора **H** равен вектору плотности тока проводимости ( $\text{A/m}^2$ )

*Иная форма записи:*

**Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора **H**:**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

# Вариант теоремы о циркуляции вектора $\vec{H}$ (по Иродову)

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I'),$$

где  $I$  и  $I'$  — токи проводимости и намагничивания, охватываемые заданным контуром  $\Gamma$ .

С учетом:  $\oint \vec{J} d\vec{l} = I'.$

Можно записать:  $\oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I.$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J},$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I.$$

## Связь между векторами $\mathbf{J}$ и $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

где  $\chi$  — магнитная восприимчивость,

## Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J},$$

преобразуем в  $(1 + \chi) \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ . Отсюда

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H},$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды.

$$\mu = 1 + \chi.$$

# Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость веществ

$$J = \chi H$$

$$\frac{B}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{J}$$

$$B = \underbrace{\mu \mu_0 H = \mu_0 (H + J)}$$

$$J = (\mu - 1)H$$

$$\chi = (\mu - 1)$$

# Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики

$$\chi \leq 0$$

$$\chi \geq 0$$

$$\chi \gg 0$$

**Диамагнетиками** называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствии внешнего поля равны нулю, т.к. магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы (например инертные газы, водород, азот, NaCl и др.).

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле его атомы приобретают наведенные магнитные моменты. В пределах малого объема  $\Delta V$  изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты всех атомов одинаковы и направлены *противоположно* вектору  $B$ .

**Парамагнетиками** называются вещества, атомы которых имеют, в отсутствие внешнего магнитного поля, отличный от нуля магнитный момент .

К парамагнетикам относятся многие щелочные металлы, кислород , оксид азота NO, хлорное железо  $\text{FeCl}_2$  и др.

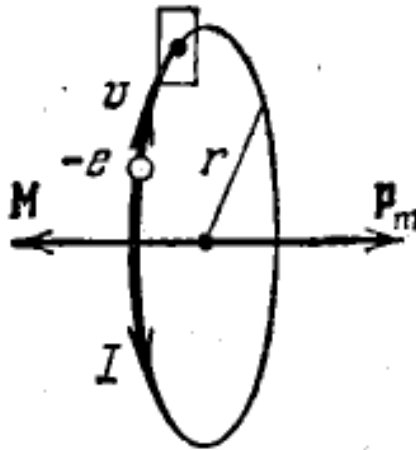


**Магнитная восприимчивость элементов  
и соединений при 20 °С ( $B = \mu_0(1 + \chi)H$ )**

Вещество	$\chi, 10^{-6}$	Вещество	$\chi, 10^{-6}$
Алюминий	23	Серебро	-26,25
Висмут	-176	Стекло	-12,6
Вода	-9	Цинк	-12,3
Вольфрам	176	Эбонит	14,0
Золото	-36,7	<i>Газы</i>	
Калий	5,6		
Каменная соль	-12,6	Азот	0,013
Кварц	-15,1	Водород	-0,063
Кислород жидкий	3400	Воздух	0,38
Медь	-10,3	Гелий	-1,1
Платина	360	Кислород	1,9

# Орбитальный магнитный момент электрона в атоме

$$M = mvr$$



$$p_m = IS = ev\pi r^2$$

$$p_m = \frac{evr}{2}$$

Гиромагнитное  
соотношение

$$\frac{p_m}{M} = -\frac{e}{2m}$$

# Физическая природа диамагнетизма

За время  $dt$  вектор  $\mathbf{M}$  получает приращение  $d\mathbf{M}$ , равное

$$d\mathbf{M} = \mathbf{N} dt.$$

Вектор  $d\mathbf{M}$ , как и вектор  $\mathbf{N}$ , перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{M}$ ; его модуль равен

$$|d\mathbf{M}| = p_m B \sin \alpha dt,$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ .

За время  $dt$  плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{M}$ , повернется вокруг направления  $\mathbf{B}$  на угол

$$d\vartheta = \frac{|d\mathbf{M}|}{M \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{M \sin \alpha} = \frac{p_m}{M} B dt.$$

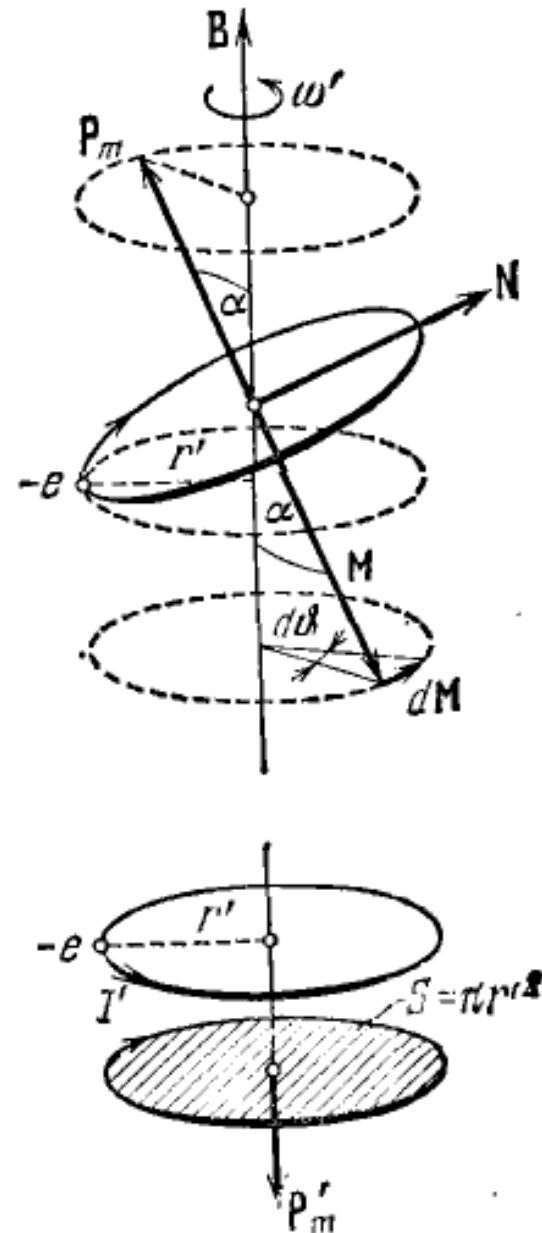
Разделив этот угол на время  $dt$ , найдем угловую скорость прецессии:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{M} B.$$

Подставив значение (56.3) отношения магнитного и механического моментов электрона, получим

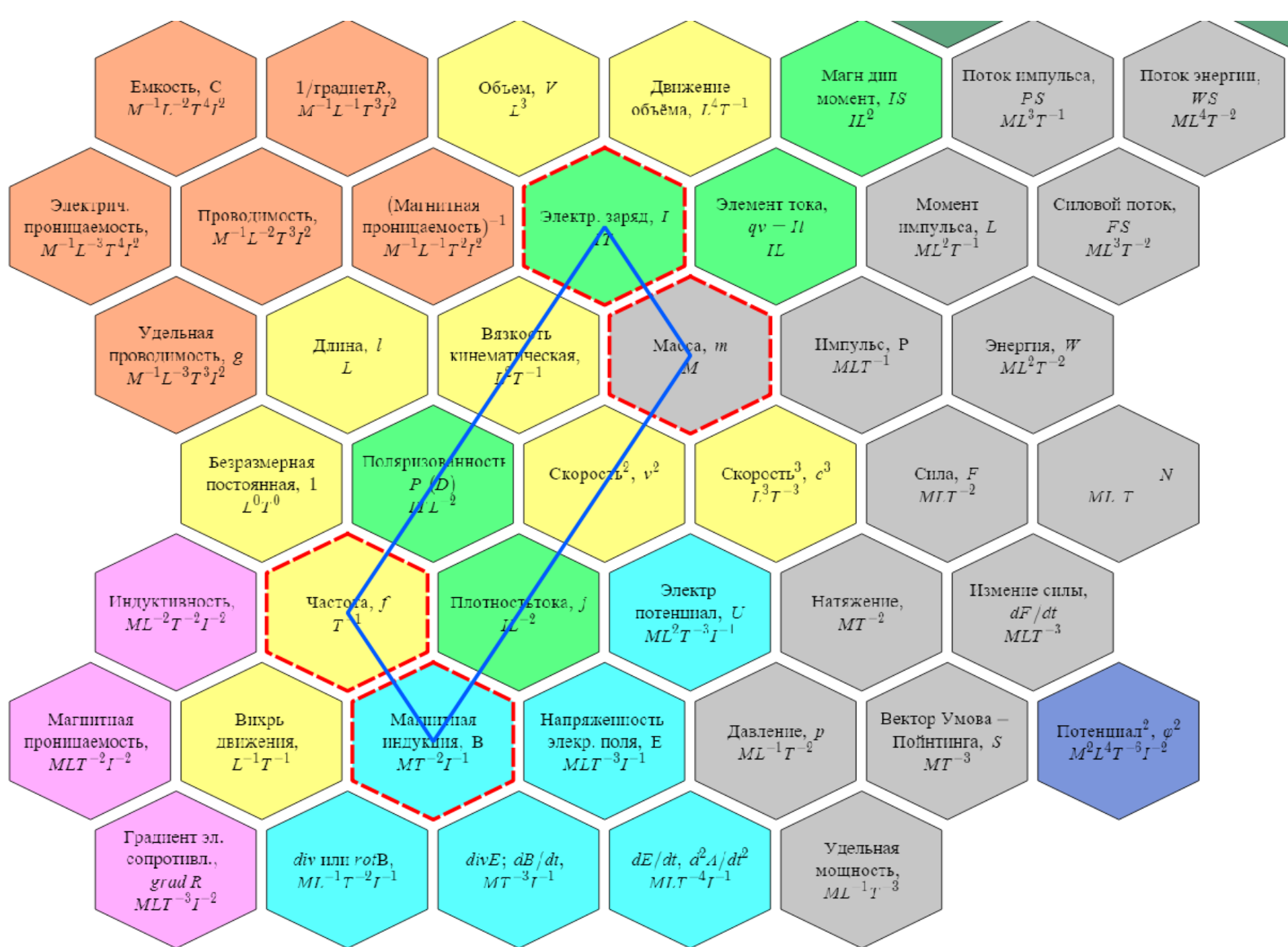
$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (57.1)$$

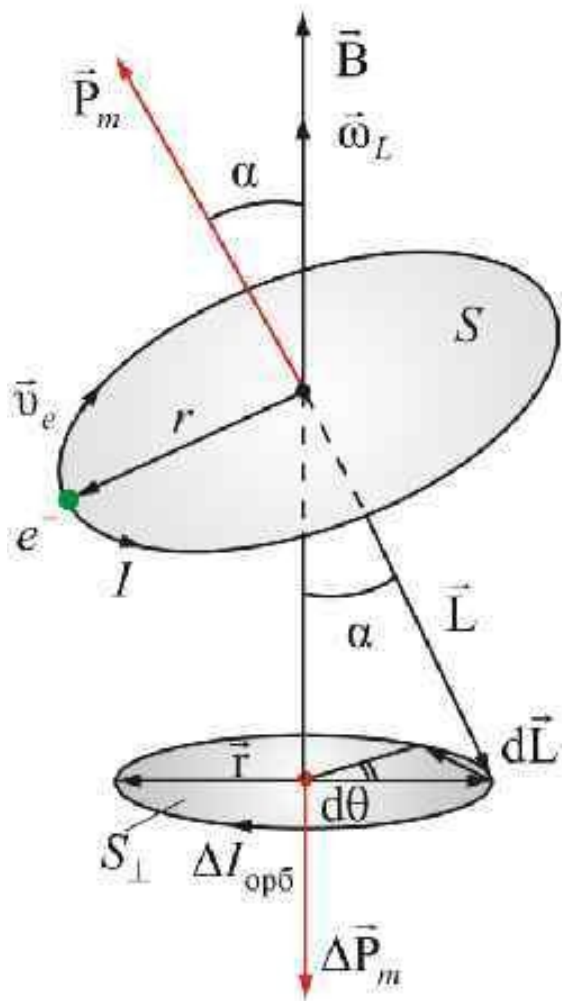
А.С. Чуев, 2022



$$\omega_L = \frac{eB}{2m} . \quad (57.1)$$

Частоту (57.1) называют частотой ларморовой прецессии или просто ларморовой частотой. Она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.





**Теорема Лармора:**  
**единственным**  
**результатом влияния**  
**магнитного поля на орбиту**  
**электрона в атоме является**  
**прецессия орбиты и**  
**вектора – орбитального**  
**магнитного момента**  
**электрона с угловой**  
**скоростью  $\omega_L$  вокруг оси,**  
**проходящей через ядро атома**  
**параллельно вектору**  
**индукции магнитного поля.**



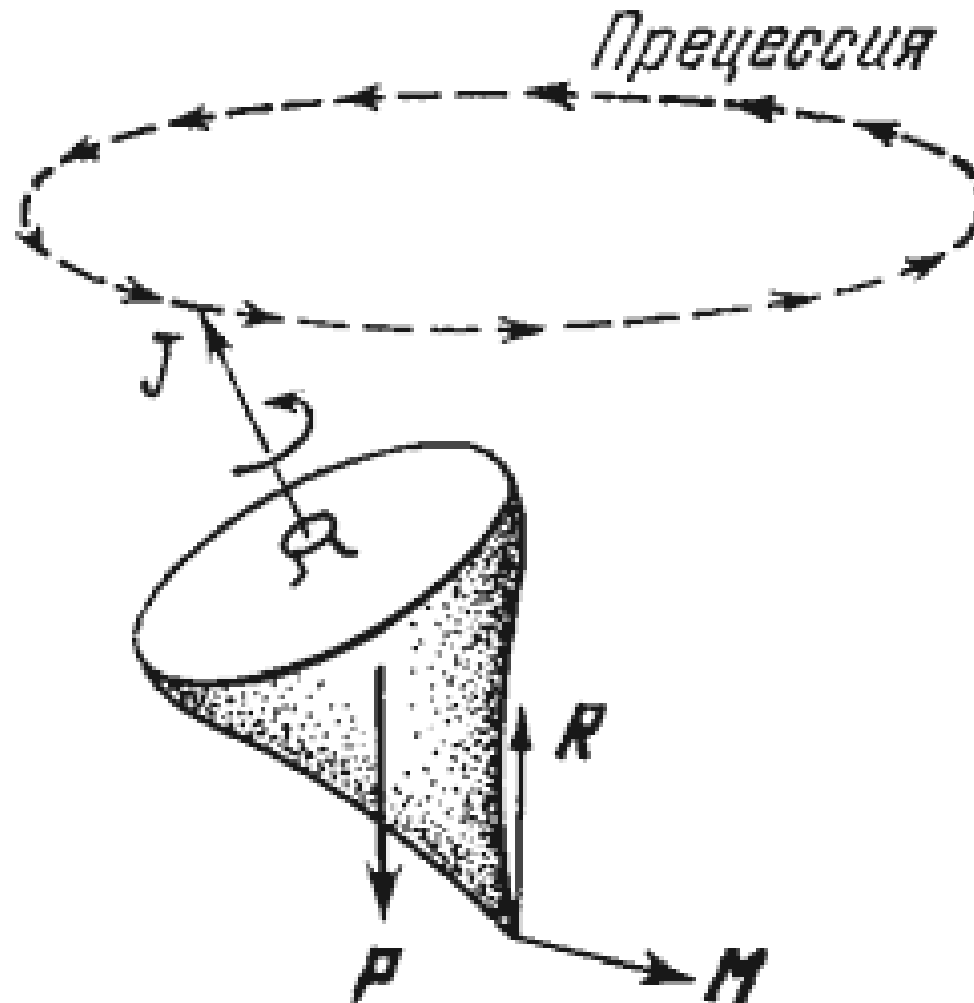
## Ларморовские частоты некоторых атомных ядер

ядро	Ларморовская частота в МГц при 0,5 Тесла	Ларморовская частота в МГц при 1 Тесла	Ларморовская частота в МГц при 7,05 Тесла
$^1\text{H}$ (Водород)	21,29	42,58	300.18
$^2\text{D}$ (Дейтерий)	3,27	6,53	46,08
$^{13}\text{C}$ (Углерод)	5,36	10,71	75,51
$^{23}\text{Na}$ (Натрий)	5,63	11,26	79.40
$^{39}\text{K}$ (Калий)	1,00	1,99	

Частота для резонанса протонов находится в диапазоне коротких волн (длина волн около 7 м)<sup>[4]</sup>.

Прецессия вращающегося волчка.

$J$  – момент импульса,  $P$  – сила тяжести,  $R$  – реакция опоры,  $M$  – вращающий момент.





## Ферромагнетизм

Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. По своему наиболее распространенному представителю — железу — они получили название **ферромагнетиков**. К их числу кроме железа принадлежат никель, кобальт, гадолиний, их сплавы и соединения, а также некоторые сплавы и соединения марганца и хрома с неферромагнитными элементами. Ферромагнетизм присущ всем этим веществам только в кристаллическом состоянии.

Ферромагнетики являются сильномагнитными веществами. Их намагниченность в огромное (до  $10^{10}$ ) число раз превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков, принадлежащих к категории слабомагнитных веществ.

Ферромагнитные свойства веществ обусловлены наличием собственного (спинового) момента у электронов атомов.

# Соотношения магнитных векторов внутри магнетиков

Диамагнетики



Парамагнетики



Ферромагнетики



Обозначения:



Вектор  $\mathbf{H}$  от токов проводимости



Вектор  $\mathbf{J}$  - намагниченность магнетика



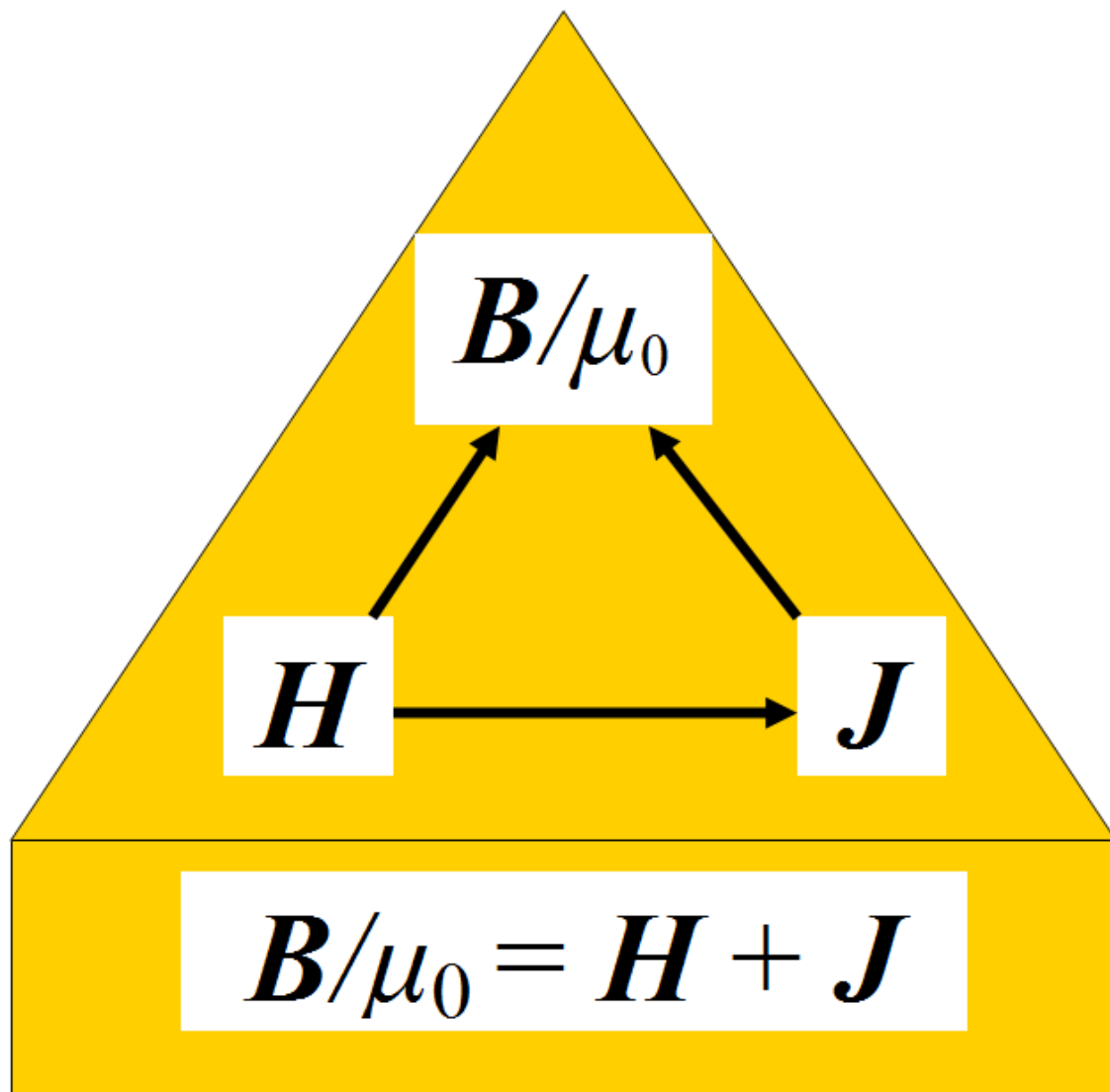
Вектор  $\mathbf{B}/\mu_0$  (составной результирующий вектор)

Вектор ***B*** - суммарный вектор

$$B = \mu \mu_0 H = \mu_0 (H + J)$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I'),$$

$$\text{rot} B = \mu \mu_0 j = \mu_0 (j + j')$$



$$\vec{B}/\mu_0 = (1 + \chi)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{J} = \chi\vec{H}$$

$$(1 + \chi) = \mu$$



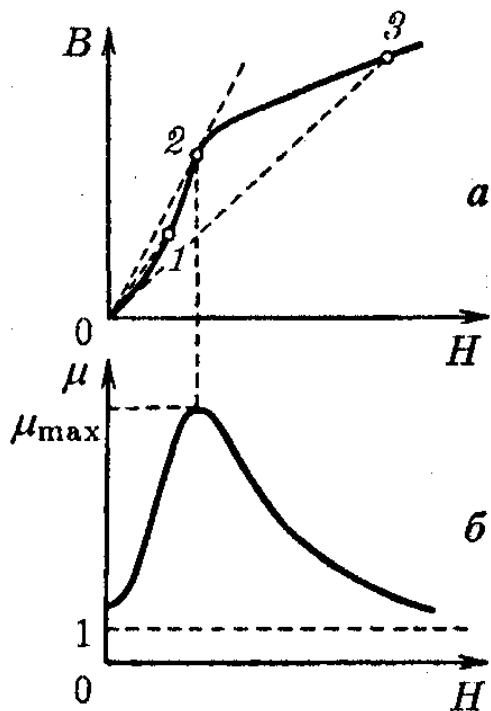
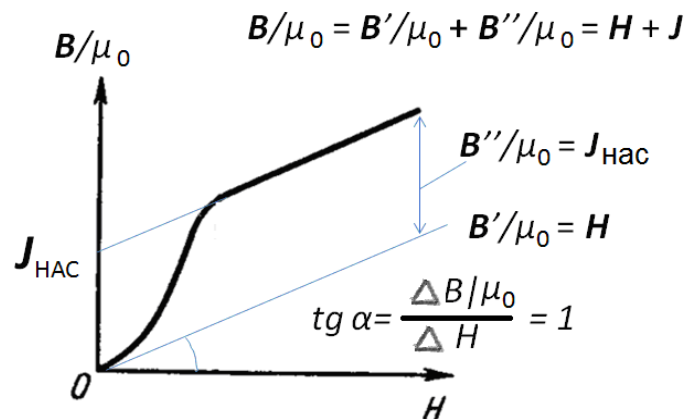
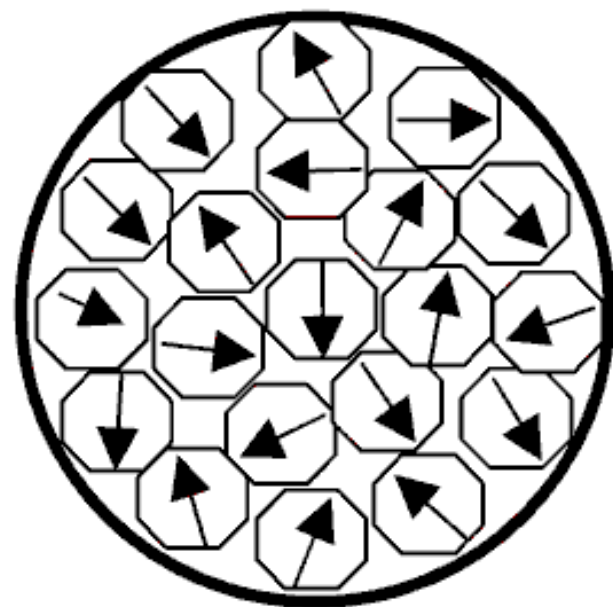
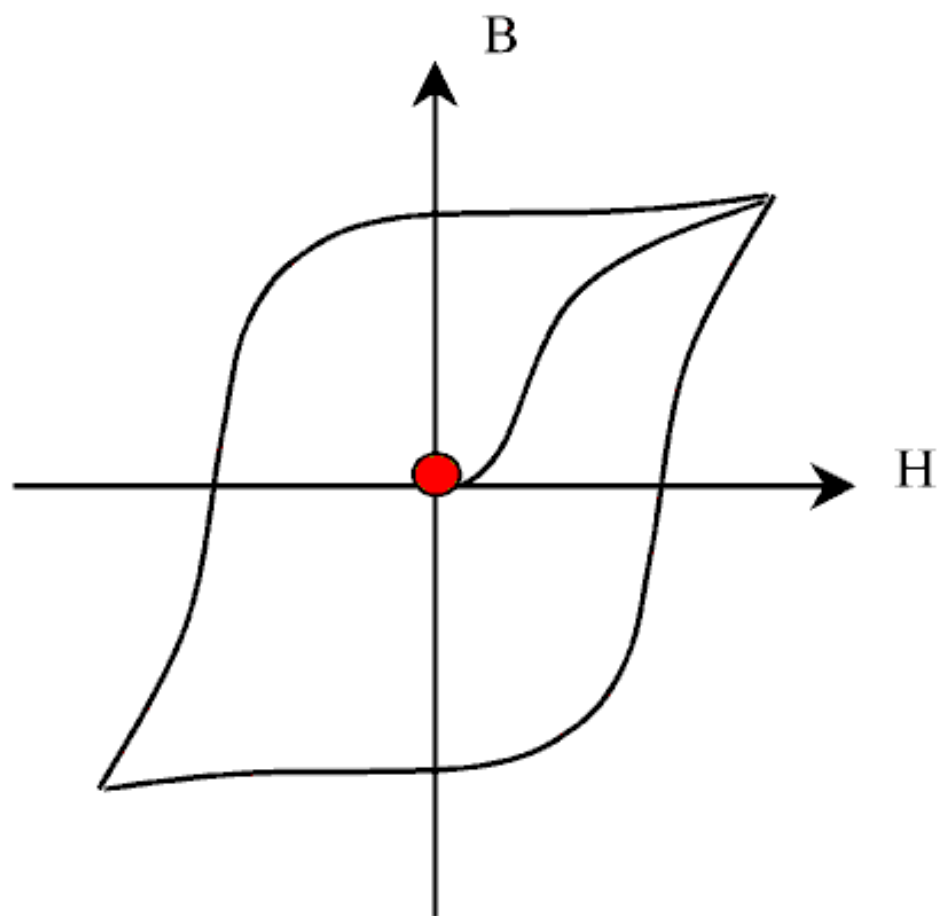


Рис. 7.19



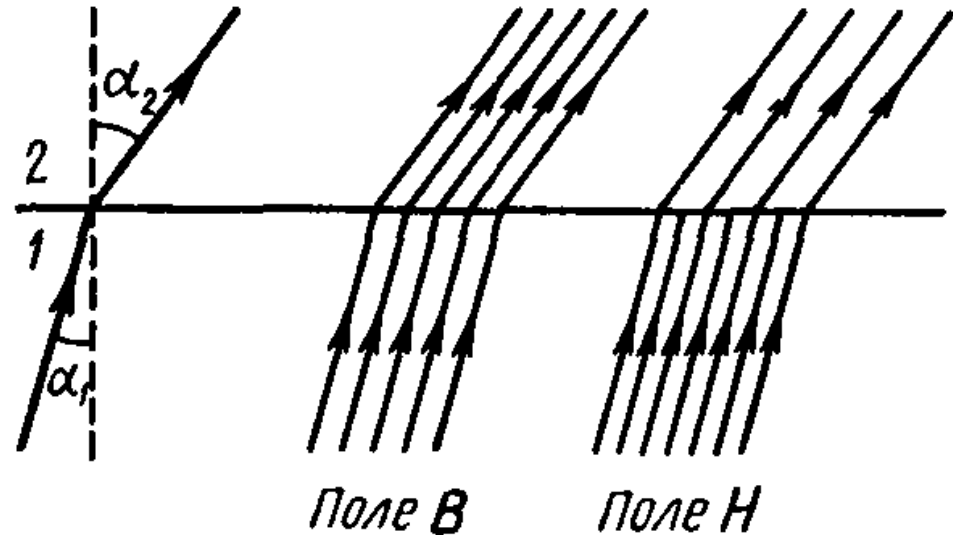
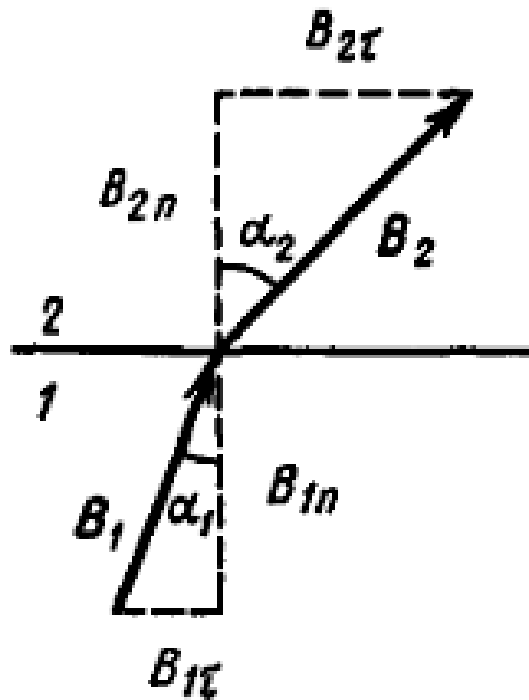
$B = \mu_0 (H + J)$ . Поэтому по достижении насыщения  $B$  продолжает расти с  $H$  по линейному закону:  
 $B = \mu_0 H + \text{const}$ , где  $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$ .



$H$



# Классическое представление о поведении векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ на границе двух сред

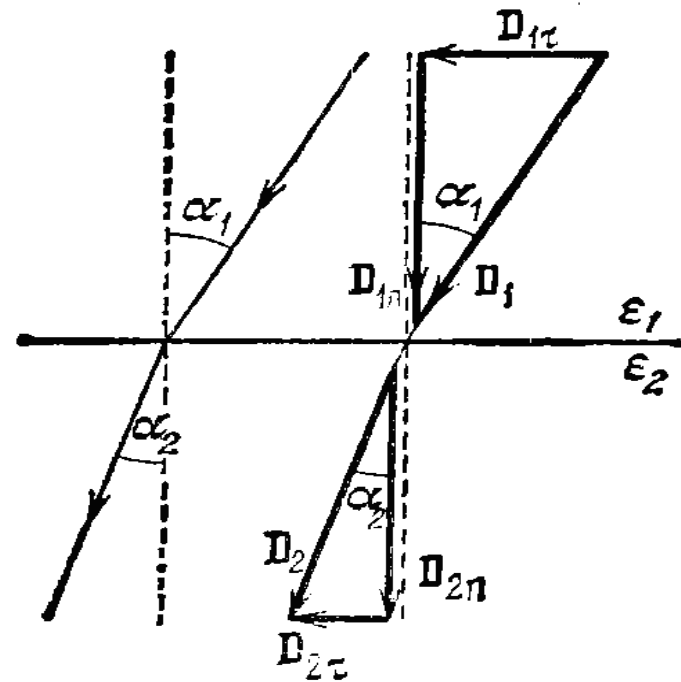
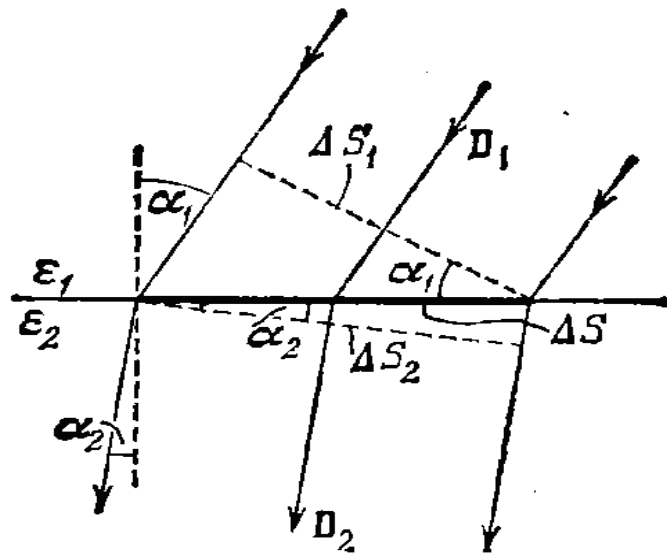


$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{1\tau} / B_{1n}}{B_{2\tau} / B_{2n}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



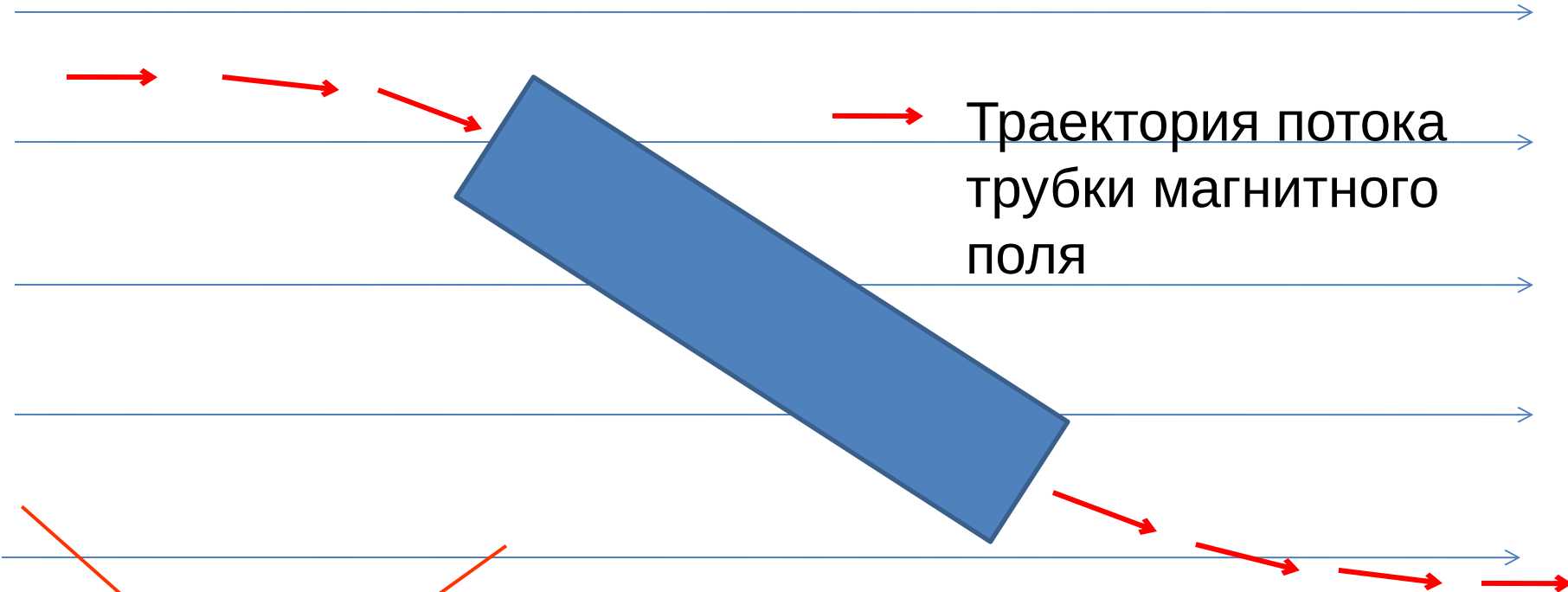
Для сравнения: классическое представление о поведении вектора **D** на границе двух сред



Закон преломления векторов электрической индукции **D** и магнитной индукции **B** оказывается одинаковым!!!

# ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ ЛЕКЦИИ

вектор  $\mathbf{B}$  (точнее,  $\mathbf{B}/\mu_0$ )  
составной, он включает в себя векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$

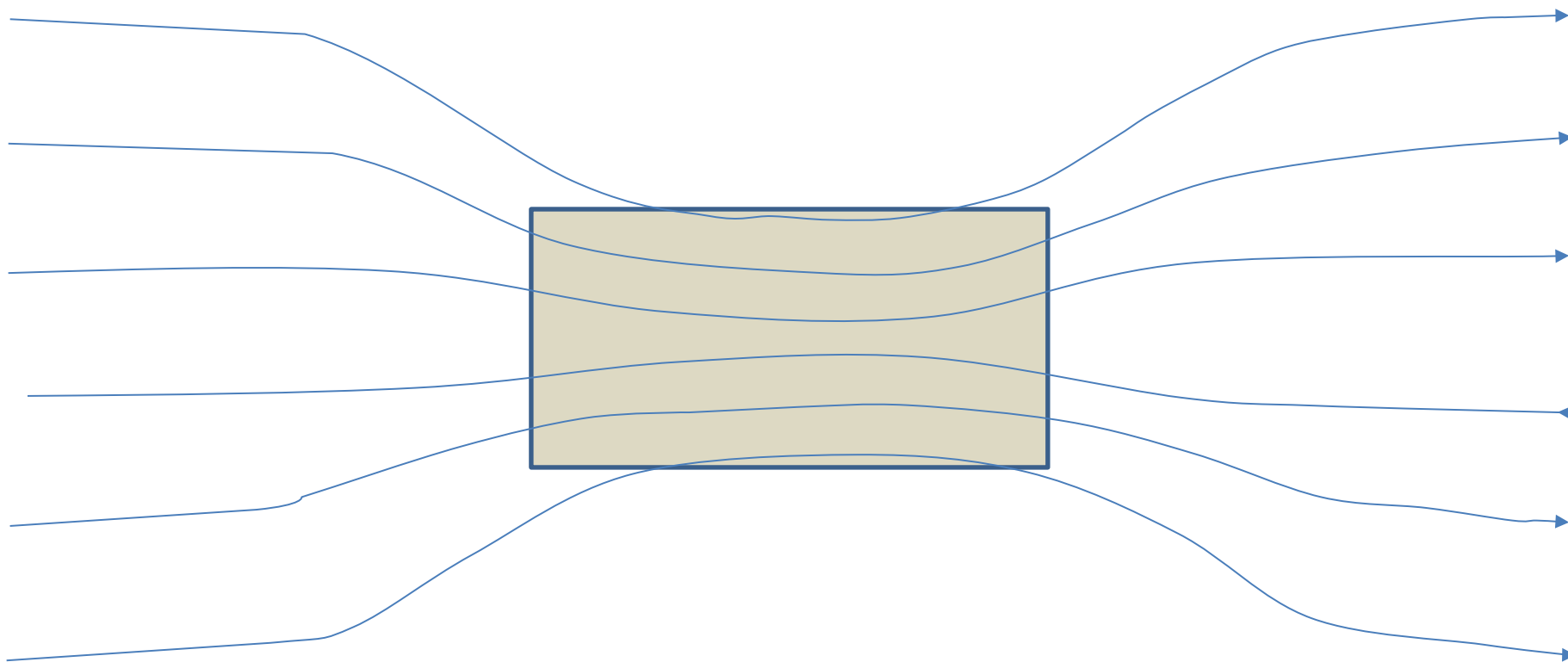


~~$$\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{J}$$~~

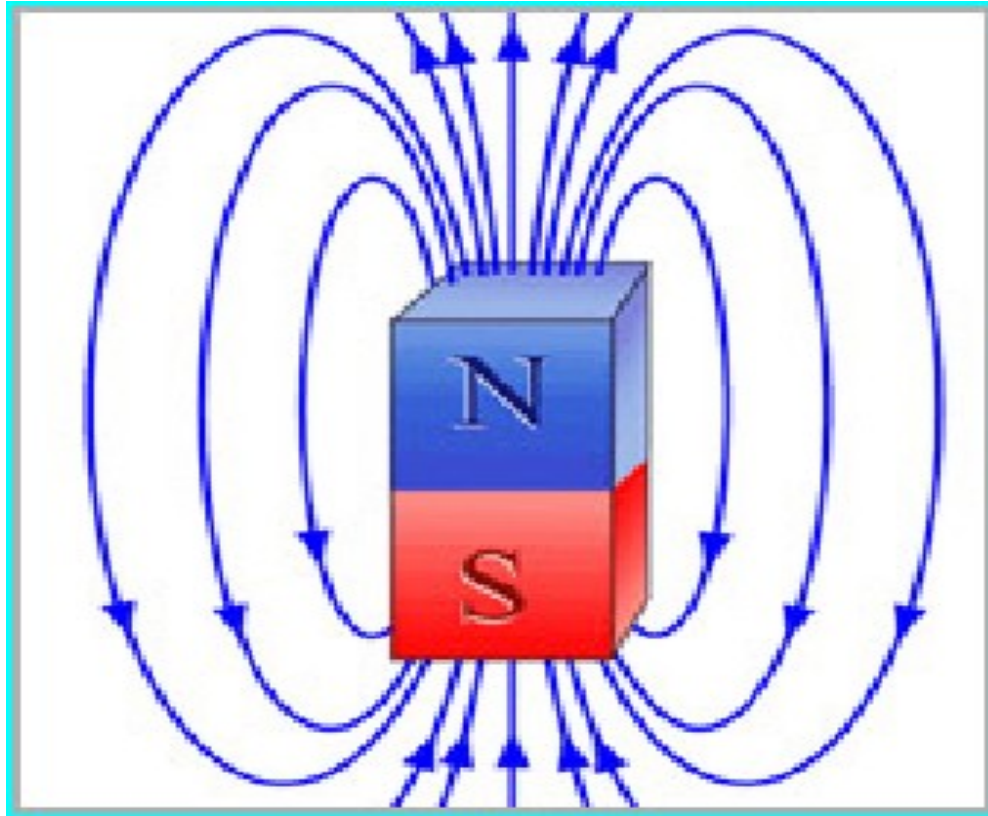
$$\mathbf{B} / \mu_0 = \mathbf{H} + \mathbf{J}$$

# Реакция ферромагнетиков на внешнее однородное магнитное поле

$$\operatorname{div} H = 0 \quad \operatorname{div} J \neq 0 \quad \operatorname{div} B \neq 0 \quad ?$$

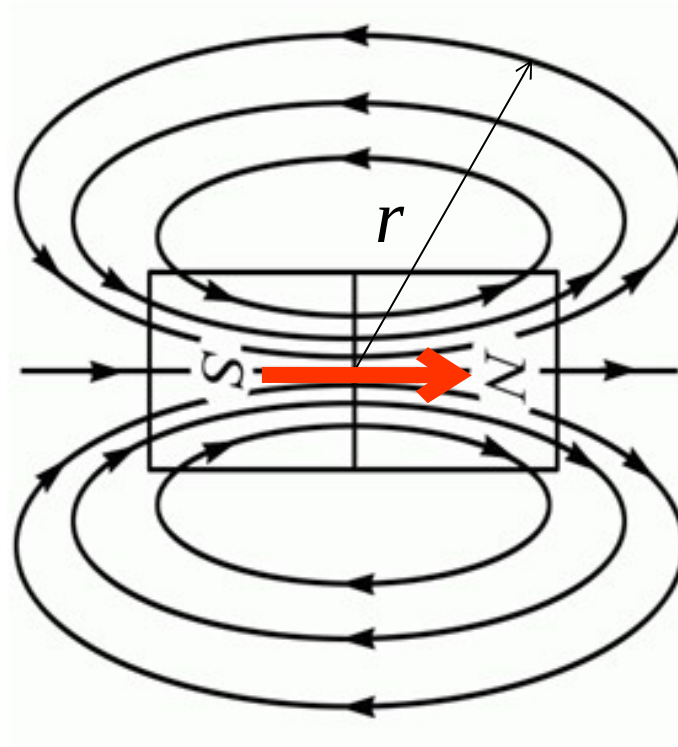


# Внешнее магнитное поле намагниченных тел



# Внешнее магнитное поле цилиндрического магнита (намагниченного стержня)

Есть ли поле  $H$ ?

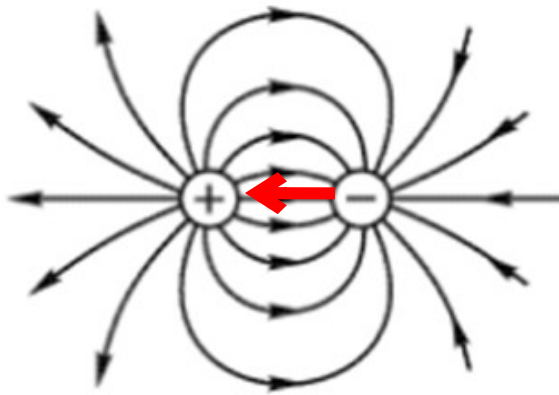


$$p_m = J \cdot V_M$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3e_r(e_r \cdot p_m) - p_m}{r^3}$$

$$\frac{B}{\mu_0} = \frac{V_M}{4/3 \pi r^3} \left( \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{J}) - \frac{J}{3} \right)$$

Линии вектора  $E$



$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$



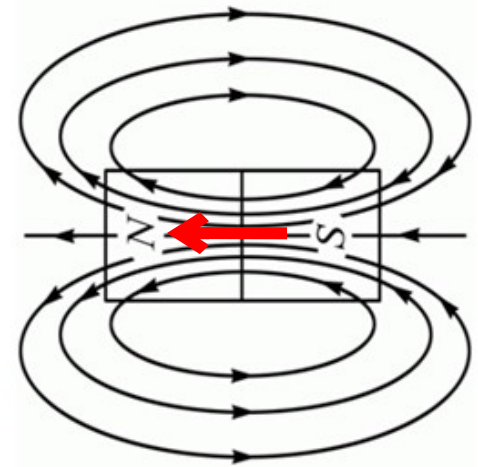
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{p}'_e = -\vec{p}_e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\vec{p}'_e - 3\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{p}'_e)}{r^3}$$

$$E = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \frac{p_e}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Линии вектора  $B$



$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

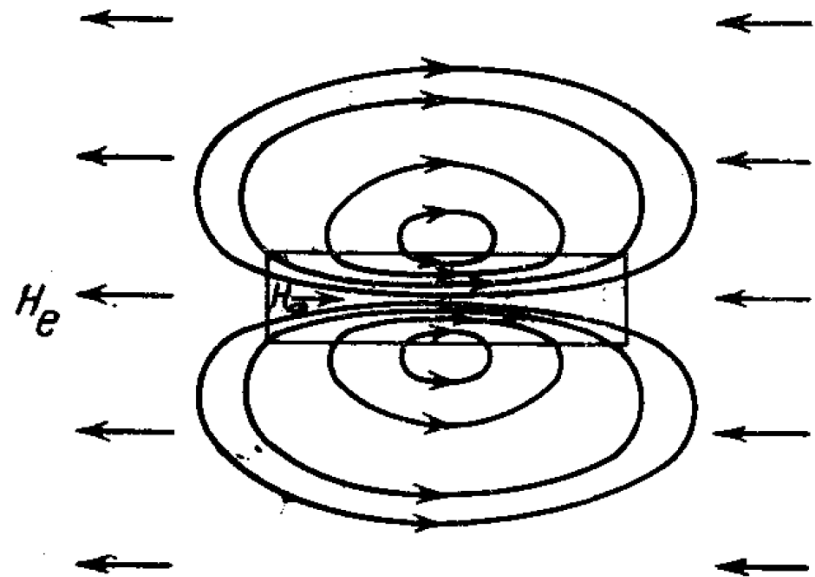
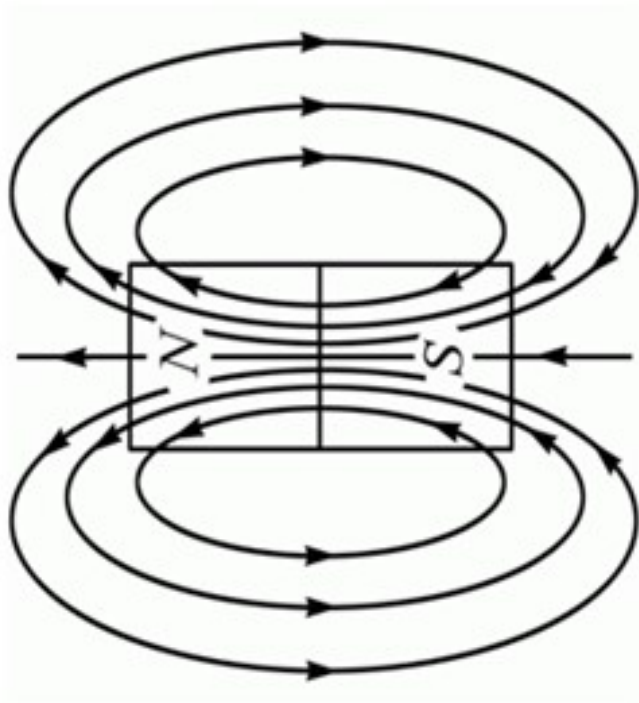


$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}_m \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{p}_m) - \vec{p}_m}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Магнитное поле свободного диполя и диполя, находящегося во внешнем поле  $H_e$  большой совокупности диполей



Размагничивающее поле

$$H_{\otimes} = H_{\tau} = -NJ$$



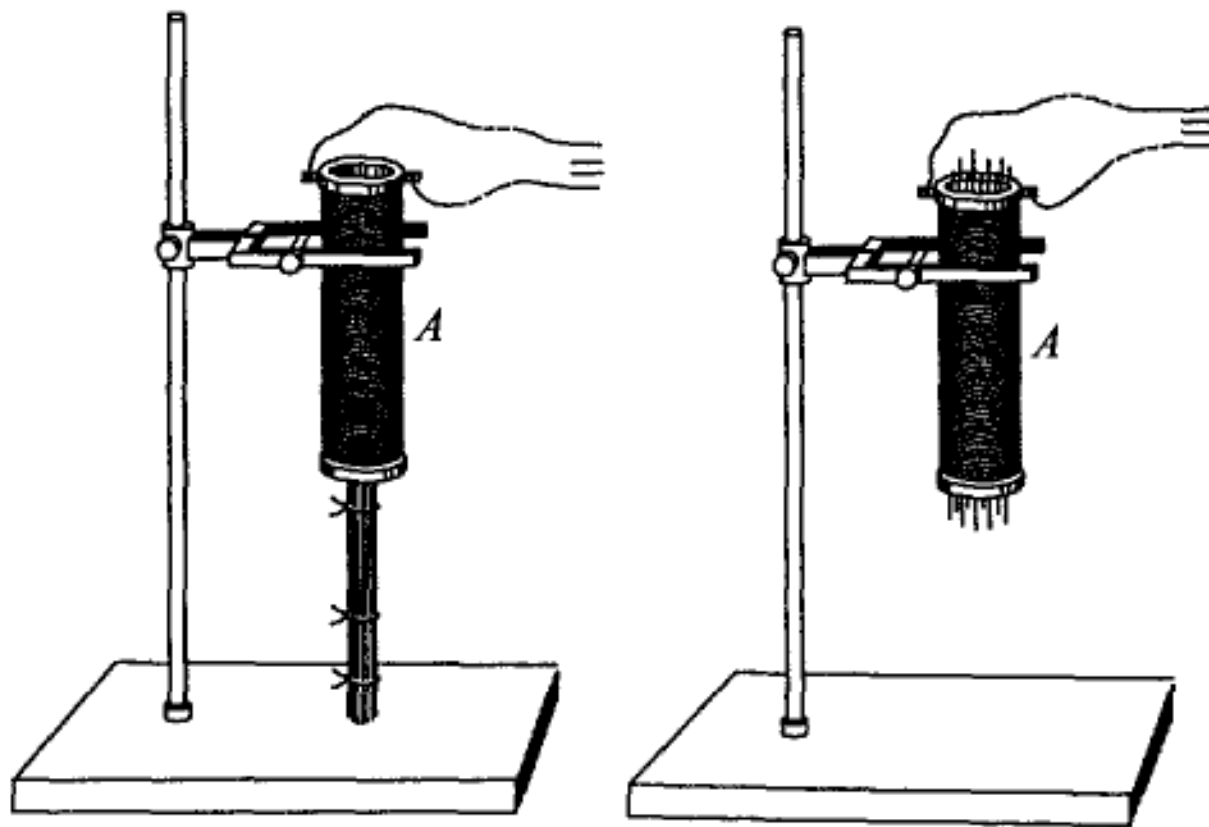
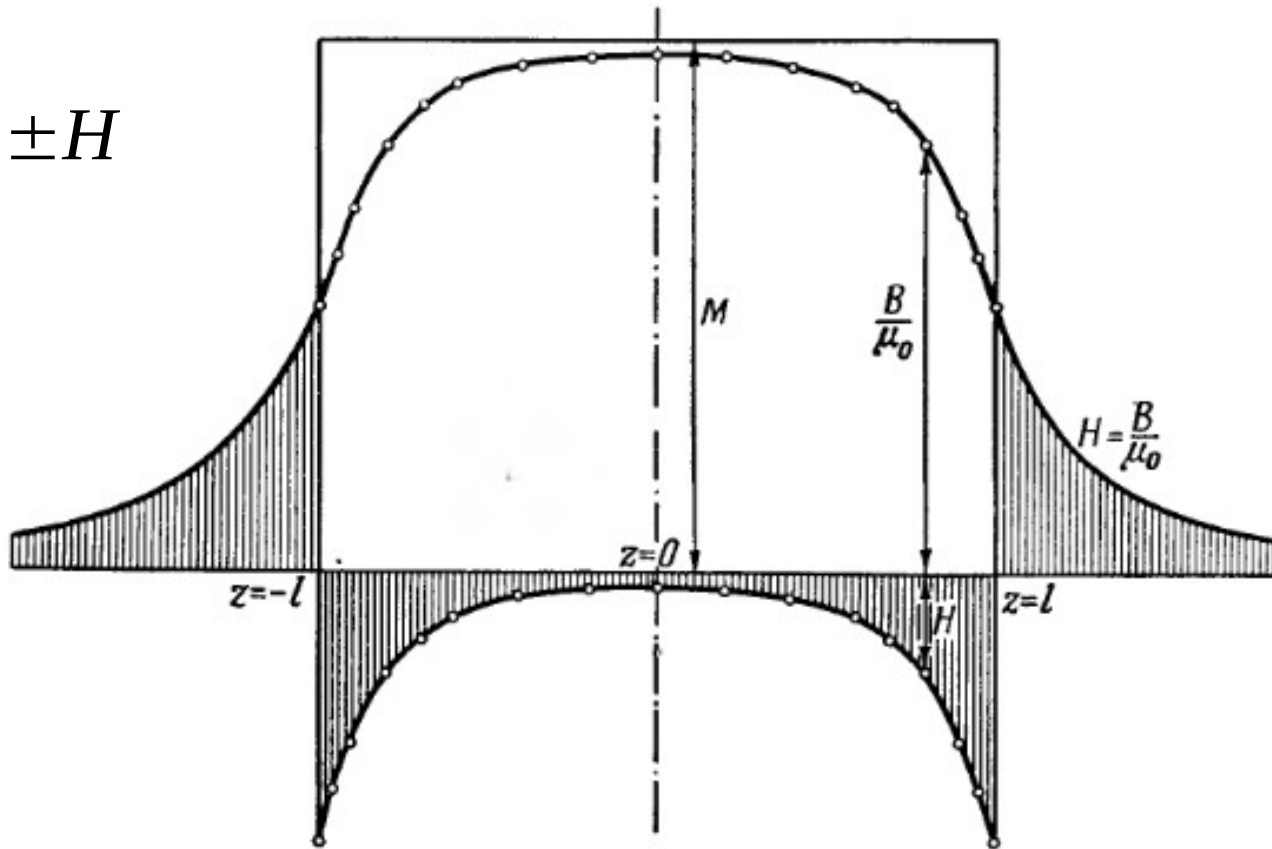


Рис 162. Железные проволоки порознь намагничиваются сильнее, чем толстый стержень, составленный из этих проволок

Внешнее поле намагниченных проволок ослабляет внутреннее магнитное поле соседних с ними проволок

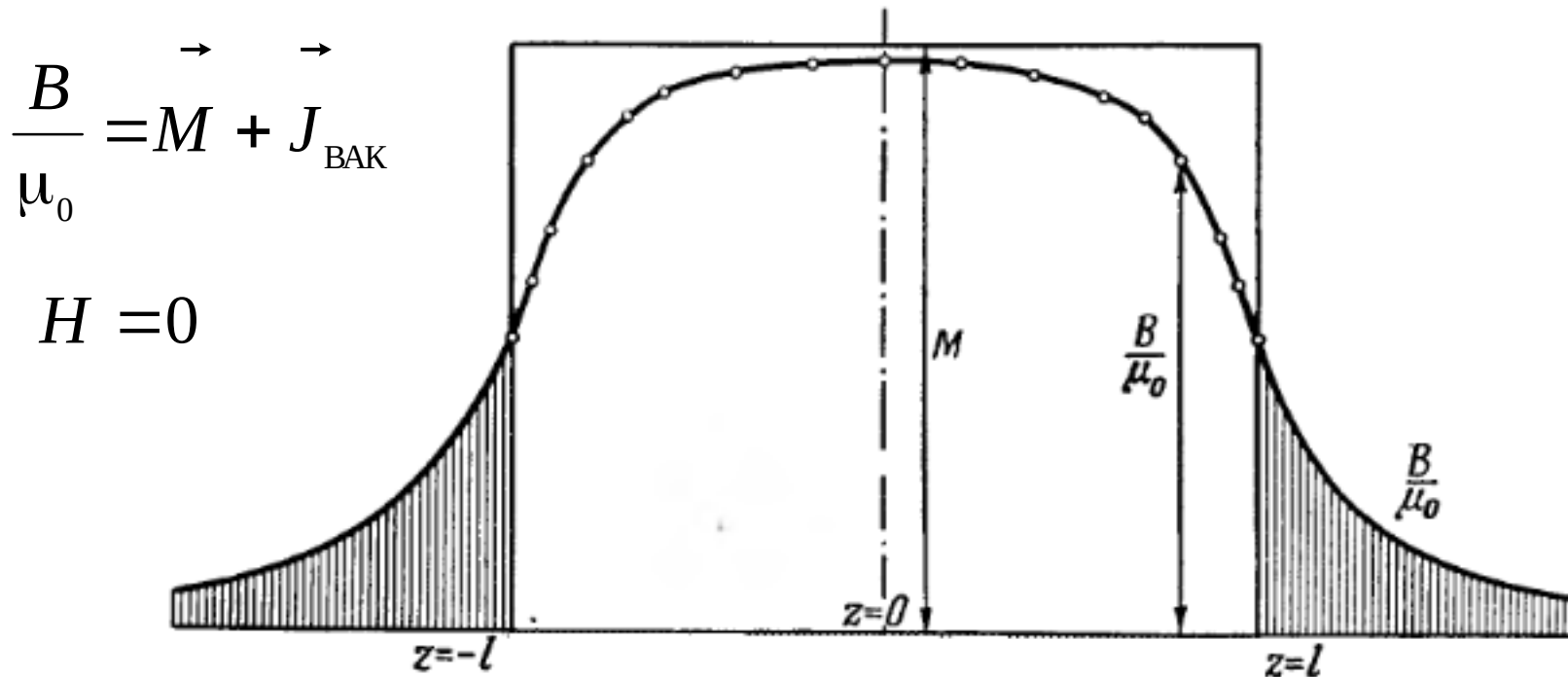
Картина магнитного поля намагниченного стержня (по Зоммерфельду). Поле вектора  $H$  создается магнитными зарядами.

$$\frac{B}{\mu_0} = M \pm H$$



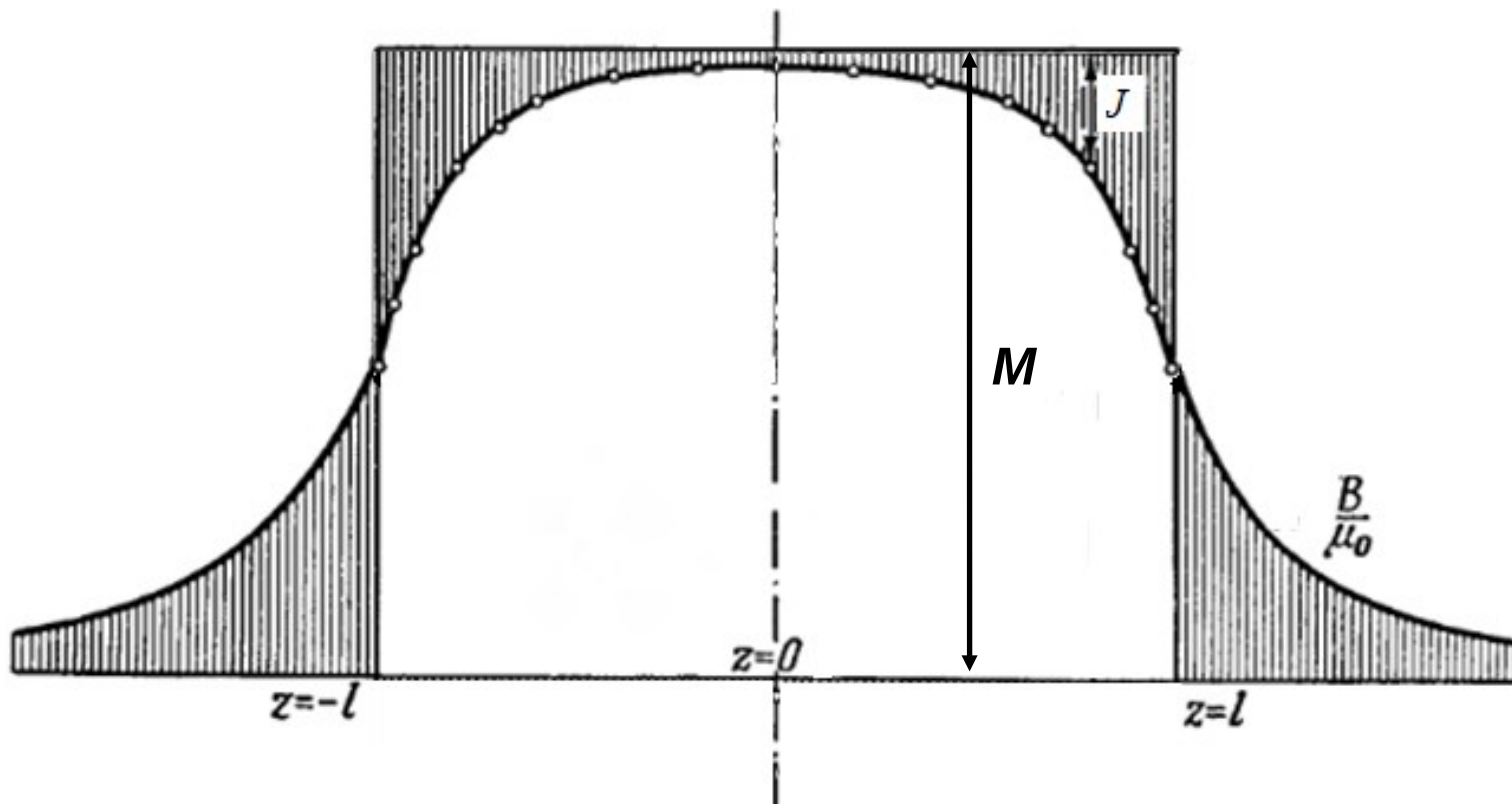
Ф и г. 15. Распределение поля и намагниченности однородно намагниченного стержня.

# Иное изображение намагниченности $M$ и магнитного поля $B$ намагниченного стержня



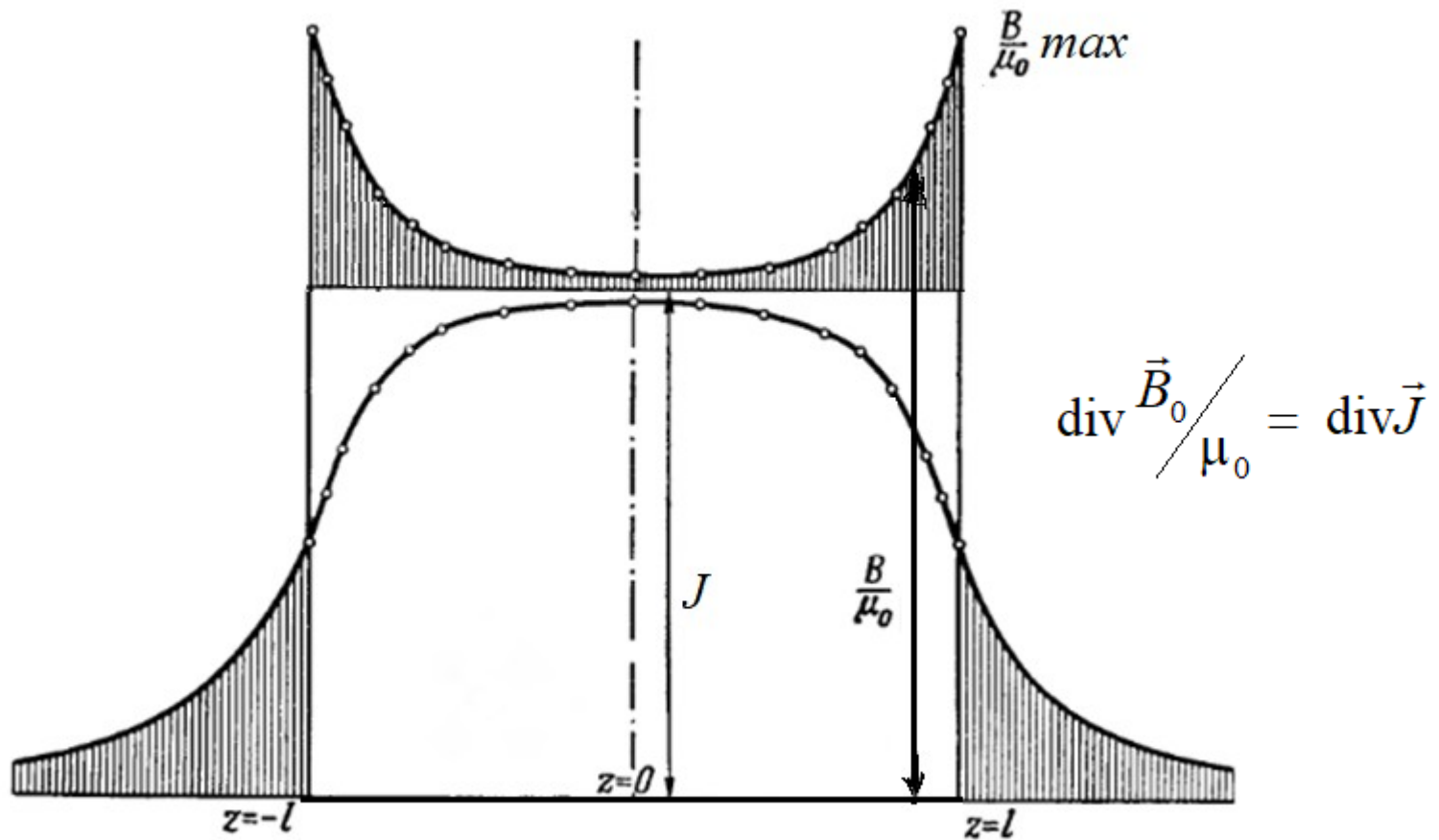
Получается, что намагниченность части пространства внутри вещества противоположна намагниченности пространства, свободного от вещества. И картина становится в какой-то степени похожей на зоммерфельдовскую.

# Возможное изображение намагниченности $M$ и магнитного поля $B$ намагниченного стержня



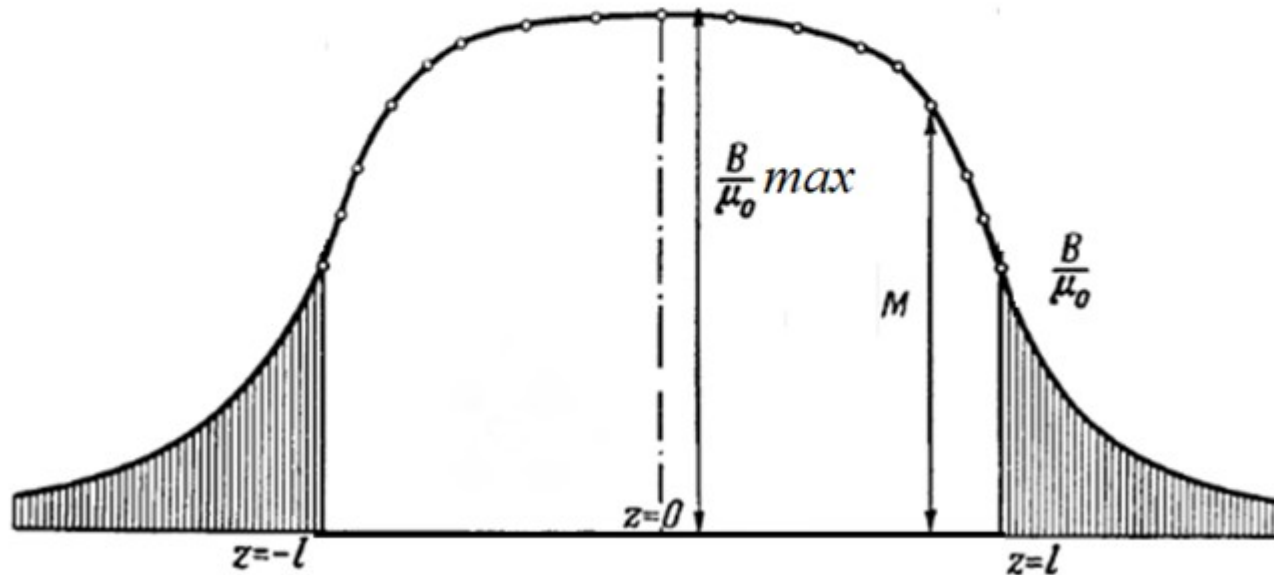
$J$  - непонятная составляющая намагниченности материала. Возможно, это ослабление намагниченности из-за поворота магнитных диполей на краю магнита, что не наблюдается.

# Вариант изображения намагниченности $J$ и магнитного поля $B$ намагниченного стержня



Внутри магнита намагниченность пространства уменьшается

Наиболее вероятное изображение переменной  
намагниченности  $M$  внутри стержня и  
и магнитного поля  $B$  у торцов вне стержня



На торцах стержня магнитное поле  $B$ , делённое на  $\mu_0$  нулевое примерно в два раза меньше намагниченности в центре стержня

# Подтверждающие опыты



Рис. 1.3

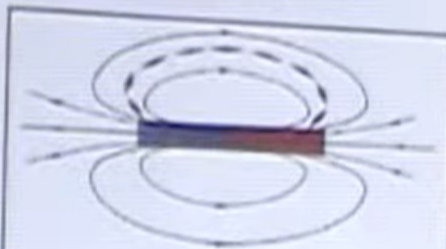
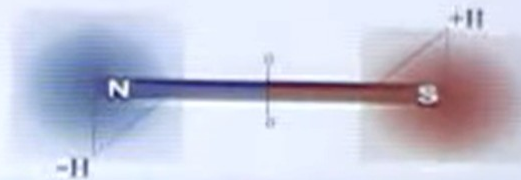


Рис. 1.6 б

Силовые линии магнитного поля отсутствуют.

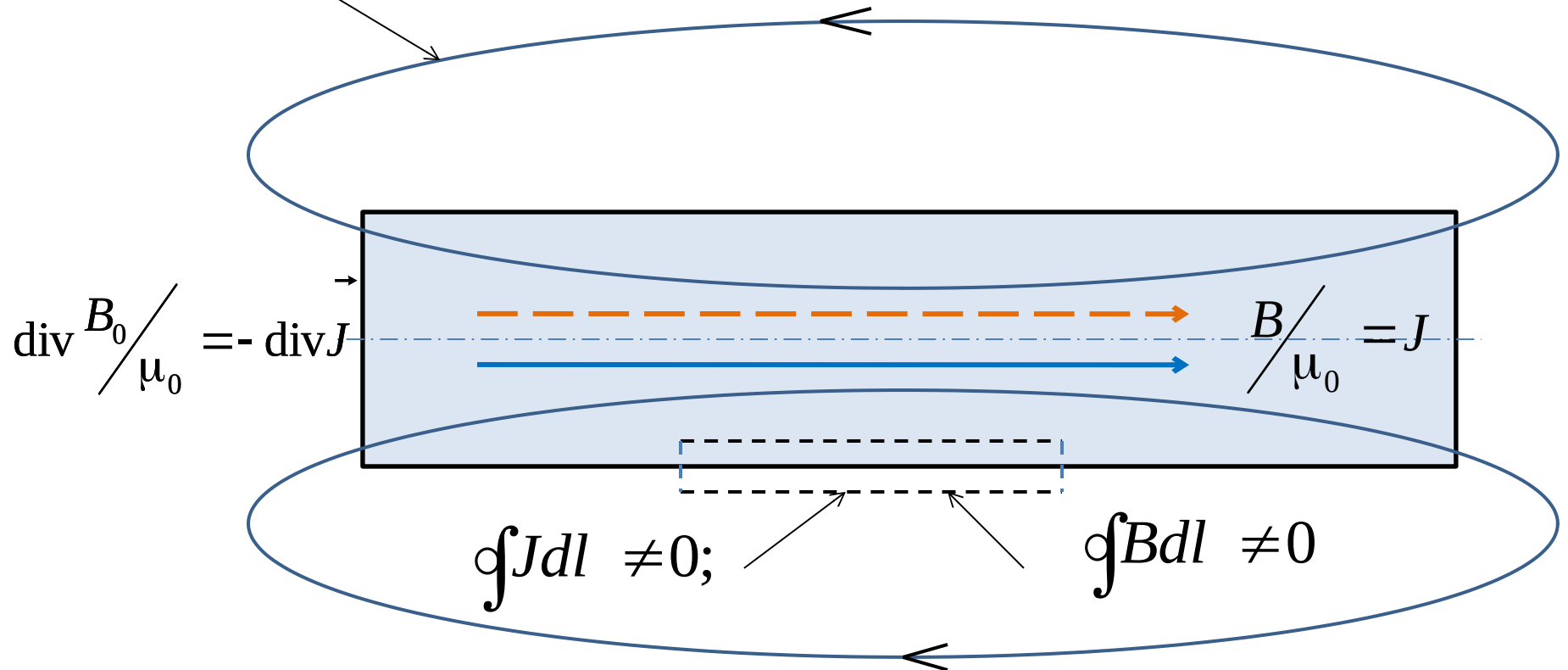
Тихоняков С. А.

Т16 Физика. 11 класс : учеб. для образовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / С. А. Тихоняков, В. М. Яворский. — 3-е изд., стер. — М. : Учитель, 2012. —



Предположен ранее Чуевым.  
Знак минус подозрителен.

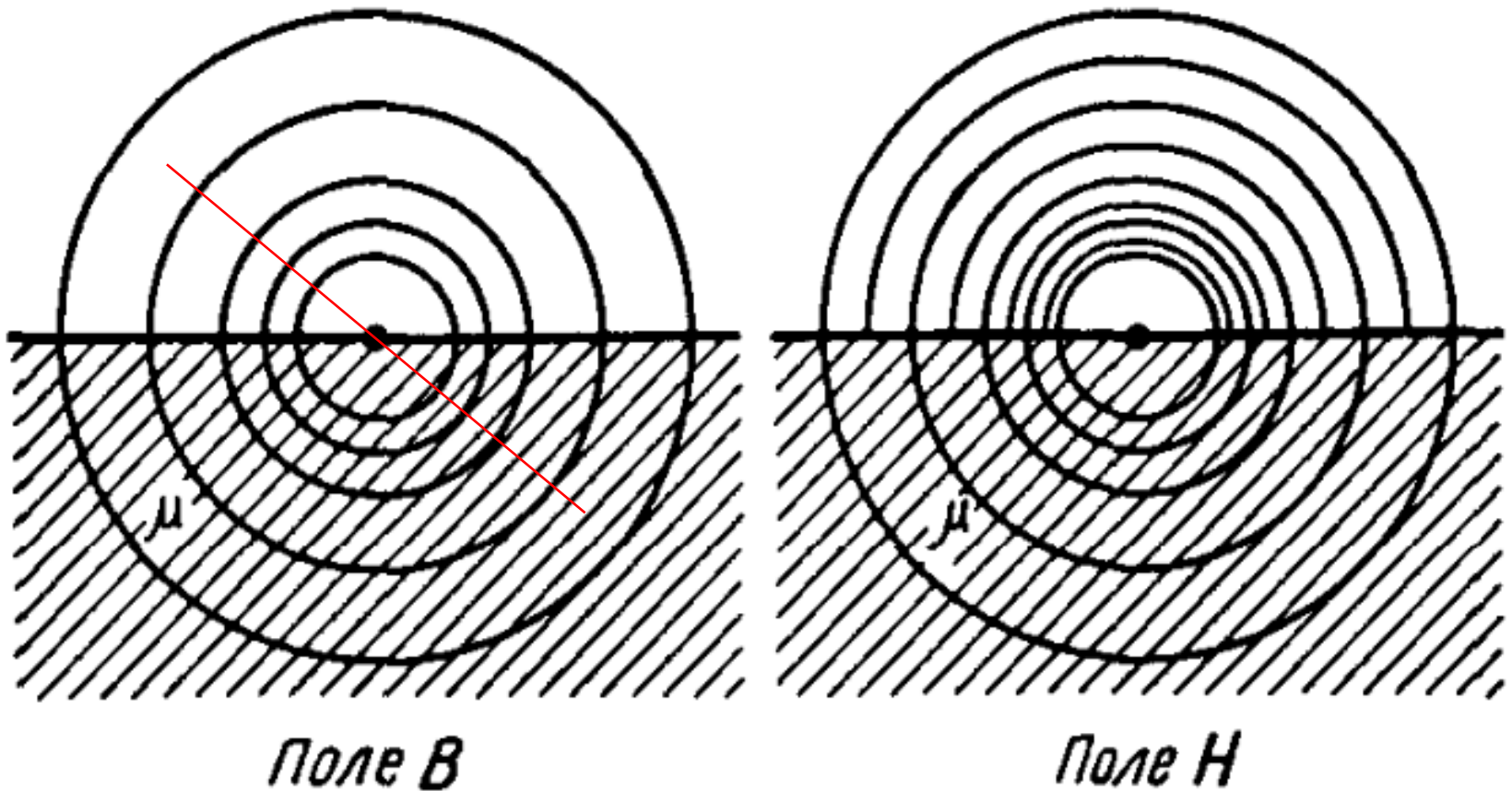
$$\frac{B_0}{\mu_0} = \frac{P_m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta},$$



Приводимое изображение противоречит известному соотношению  $\text{div } \mathbf{B} = 0$



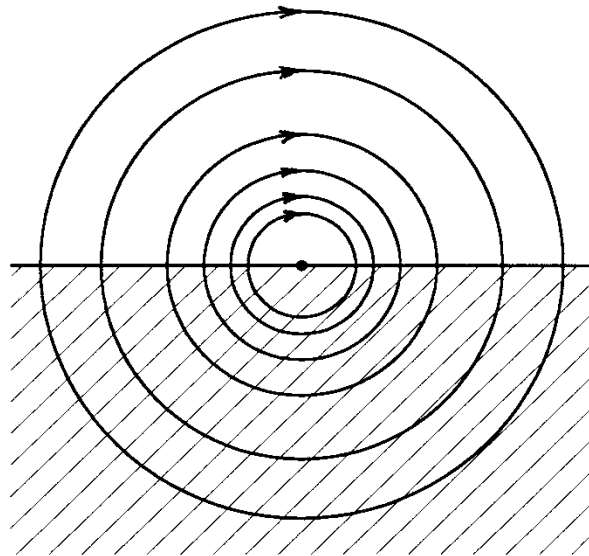
# Парадокс изображения магнитных полей



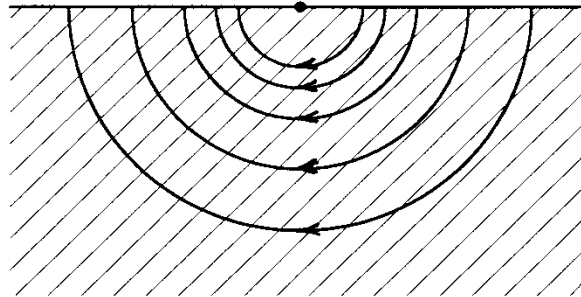
$$\vec{dB} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I[dl, r]}{r^3}$$

Закон Б-С-Л не выполняется при любом  $r$ .

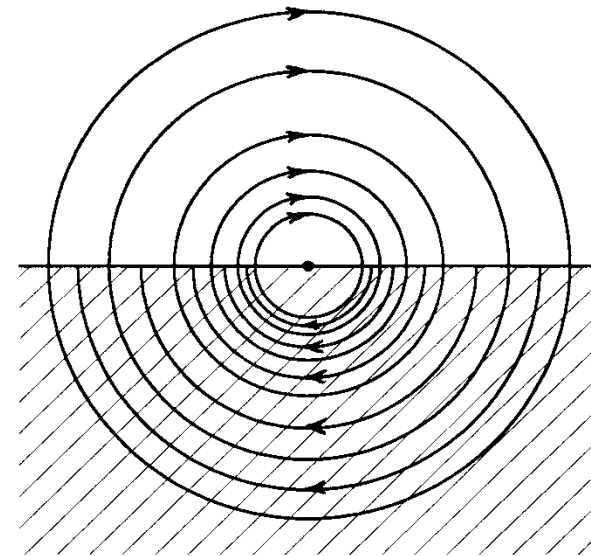
# Верные изображения магнитных полей от проводника с током на границе 2-х сред



*Поле H*



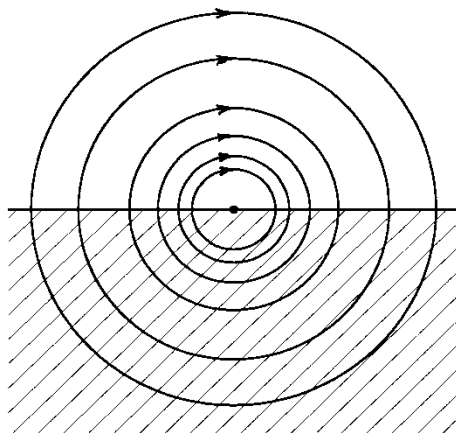
*Поле J*



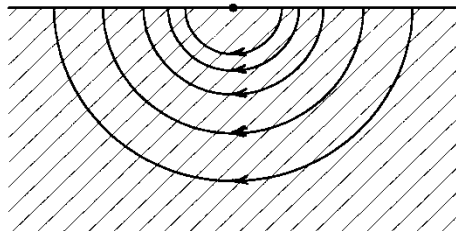
*Поле B*

Несоответствие сегодняшней теории:

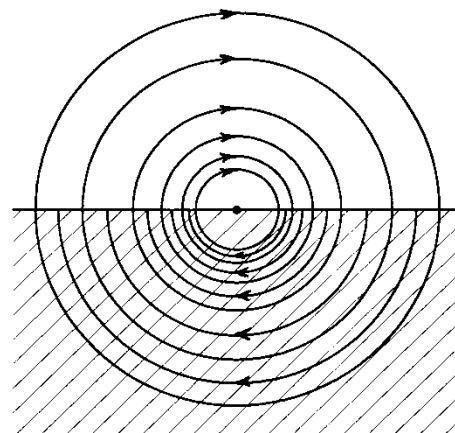
$$\operatorname{div} B \neq 0$$



*Поле  $H$*

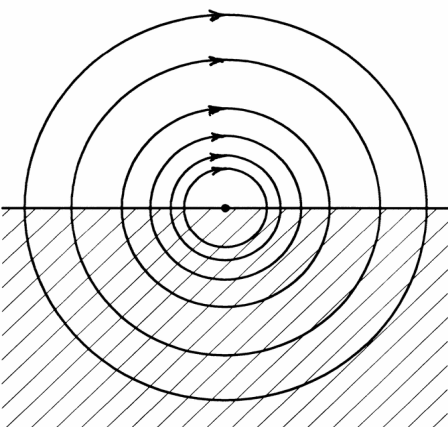


*Поле  $J$*

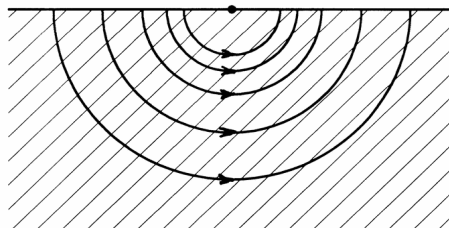


*Поле  $B$*

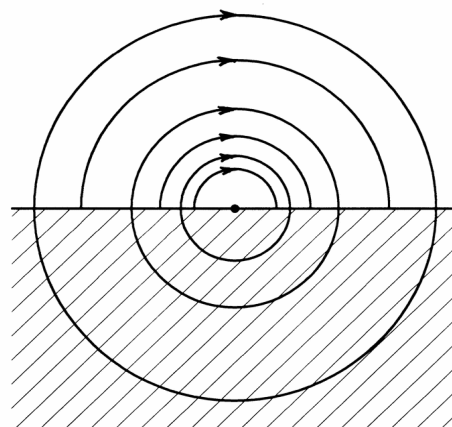
Магнитные поля от проводника с током на границе вакуум-парамагнетик и вакуум-ферромагнетик



*Поле  $H$*



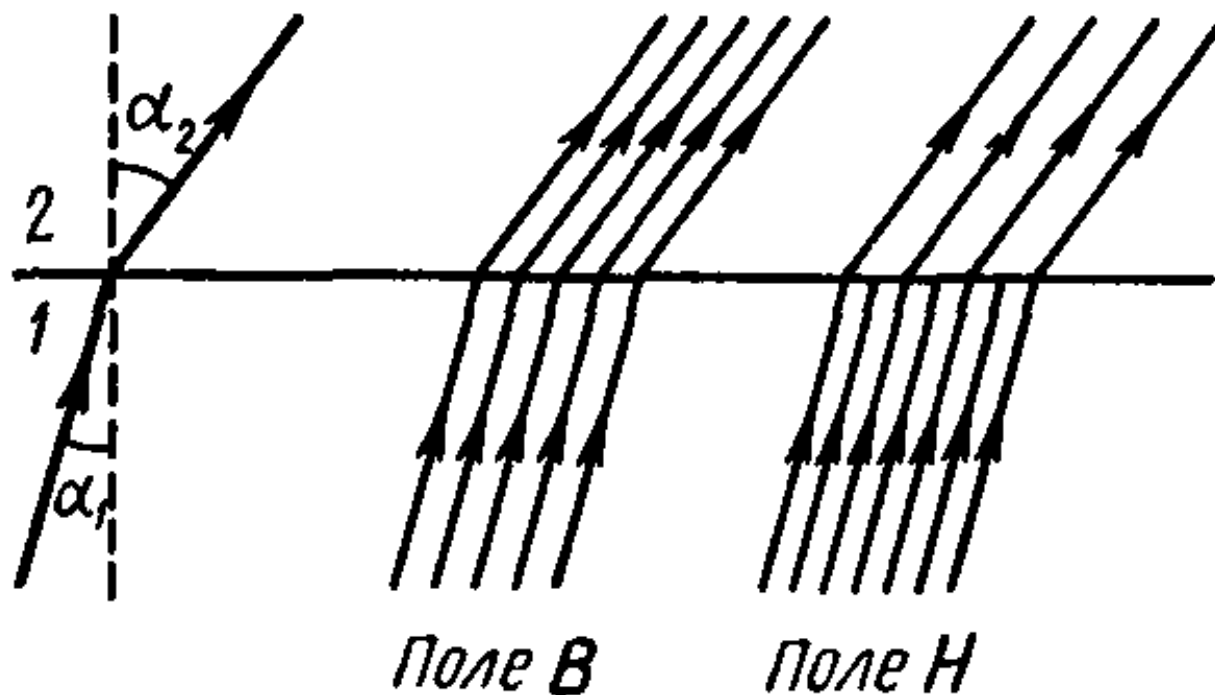
*Поле  $J$*



*Поле  $B$*

Магнитные поля от проводника с током на границе вакуум-диамагнетик

Вектор  $\mathbf{H}$  не может прерываться и преломляться на границе двух сред



В данном случае становится невыполнимой известная на практике теорема о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$

# Парадокс изображения магнитных векторов в теле кольцевого магнита с щелевым зазором

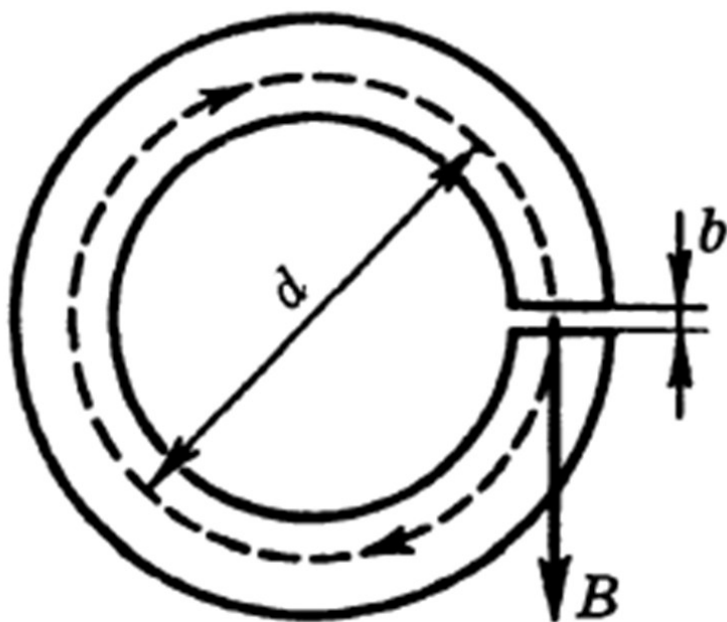


Рис. 7.22

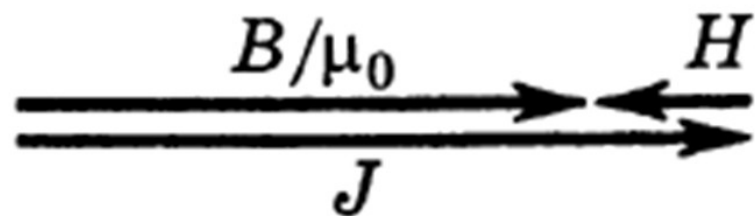


Рис. 7.23

**7.6.** Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца равен  $d$ . Ширина зазора  $b$ , магнитная индукция поля в зазоре  $B$ . Пренебрегая рассеянием поля на краях зазора, найти модули векторов  $H$  и  $J$  внутри вещества.

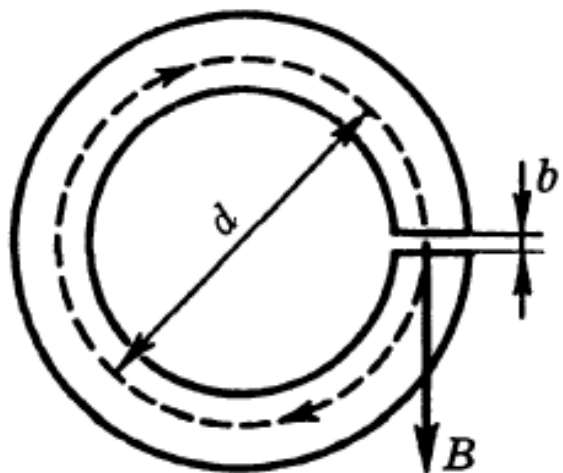


Рис. 7.22

нитная индукция поля в зазоре  $B$ . Пренебрегая рассеянием поля на краях зазора, найти модули векторов  $H$  и  $J$  внутри вещества.

**Решение.** Воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора  $H$  по пунктирной окружности диаметром  $d$  (рис. 7.22) и учитывая, что токов проводимости нет, запишем

$$(\pi d - b)H_{\tau} + bB/\mu_0 = 0,$$

где  $H_{\tau}$  — проекция вектора  $H$  на направление обхода контура (оно взято совпадающим с направлением вектора  $B$  в зазоре). Отсюда

$$H_{\tau} = -\frac{bB}{\mu_0(\pi d - b)} \approx -\frac{bB}{\mu_0 \pi d}. \quad (1)$$

Знак минус показывает, что направление вектора  $\mathbf{H}$  внутри вещества магнита противоположно вектору  $\mathbf{B}$  в той же точке. Заметим, что при  $b \rightarrow 0$  и  $H \rightarrow 0$ .

Модуль намагниченности  $\mathbf{J}$  найдем по формуле (7.11), используя результат (1):

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}/\mu_0}{1 - b/\pi d} \approx \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Соотношение между векторами  $\mathbf{B}/\mu_0$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  в любой точке вещества магнита показано на рис. 7.23.

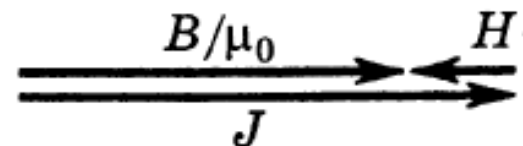
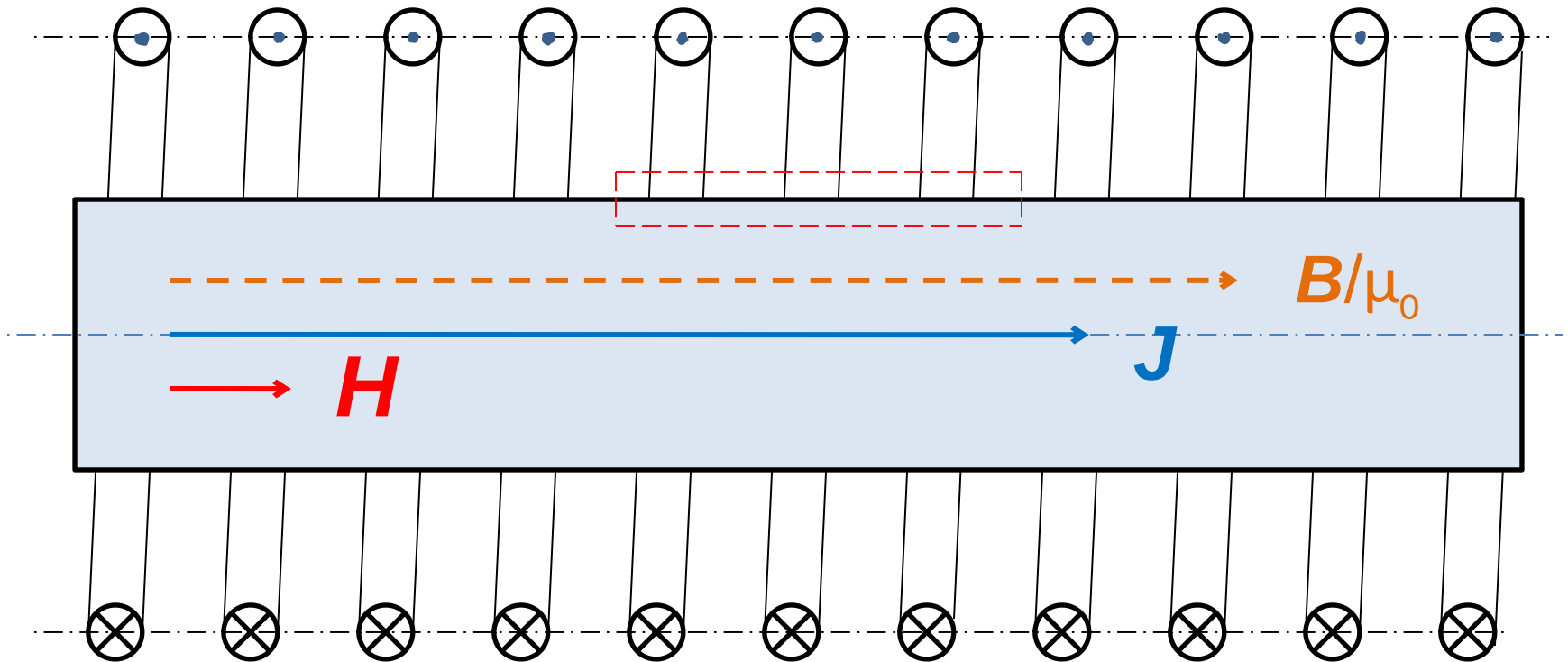


Рис. 7.23

Катушка индуктивности с током, внутри намагничиваемый стержень.  
Внутри стержня поле  $\mathbf{H}$  и поле намагниченности  $\mathbf{J}$ .

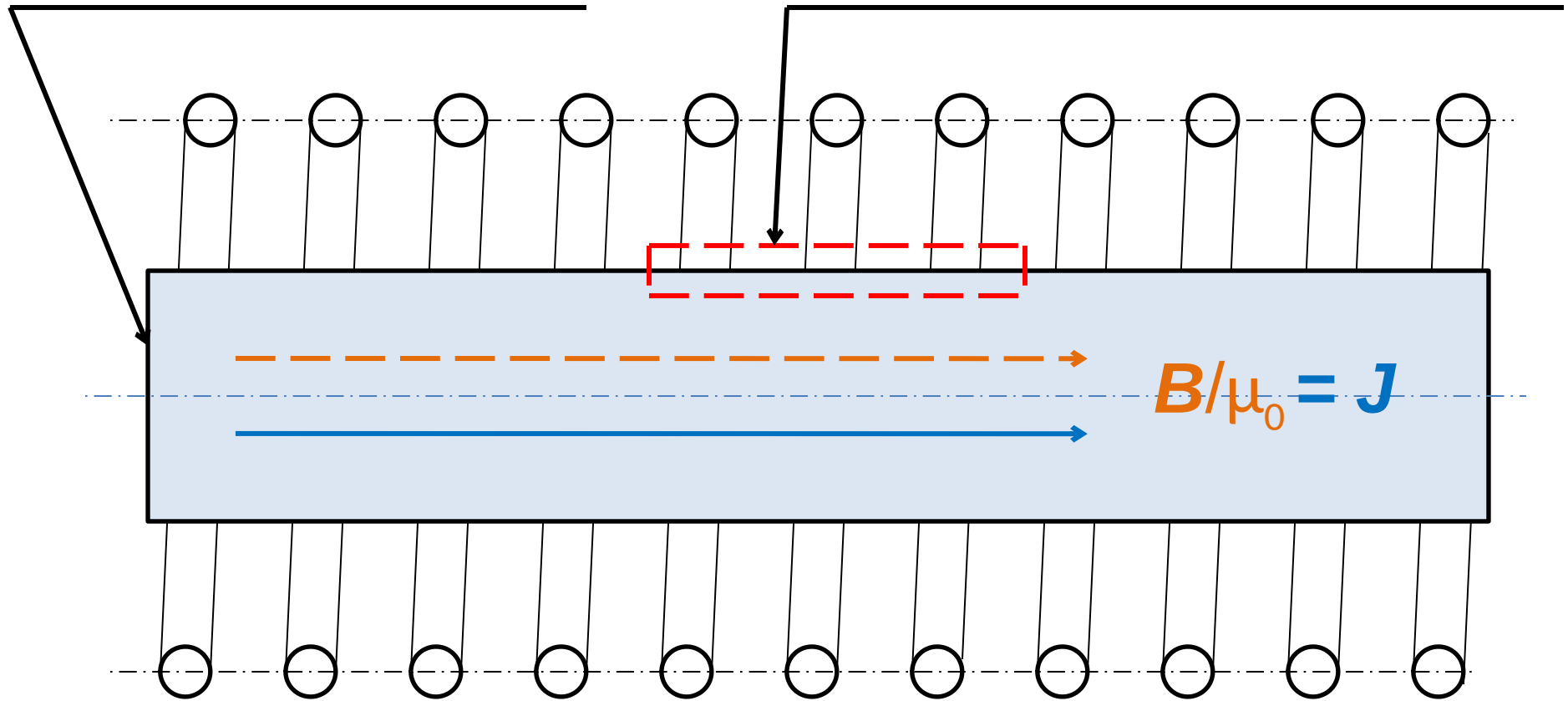


Поле  $\mathbf{B}/\mu_0$  суммарное поле внутри стержня.



$$\operatorname{div} J = -\operatorname{div} B/\mu_0$$

$$\oint H dl = 0; \quad \oint J dl \neq 0; \quad \oint B dl \neq 0$$

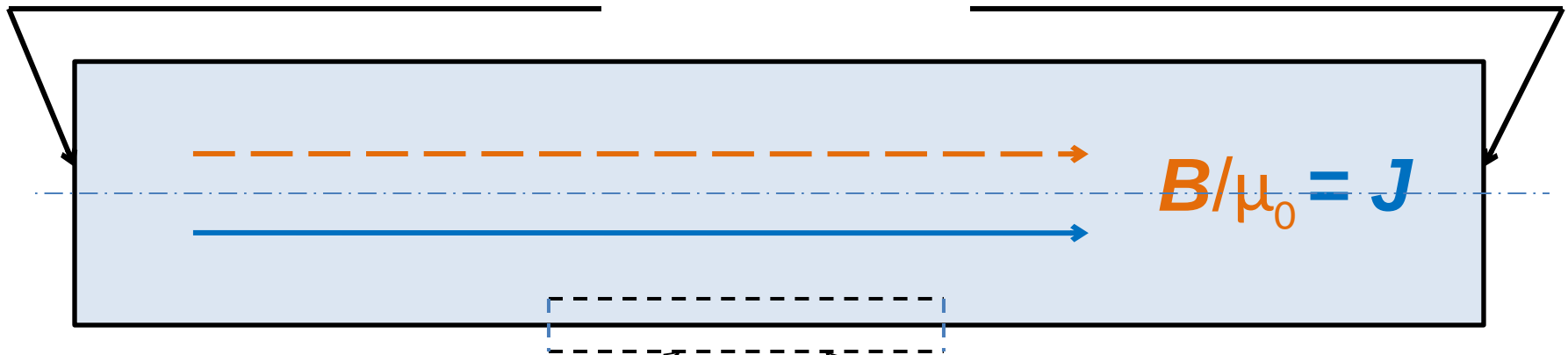


Ток катушки выключен, внутри  
стержня поле намагниченности  $J$

$$\frac{B}{\mu_0} = \cancel{H} + J$$

# Магнитное поле внутри намагниченного стержня

$$\operatorname{div} B / \mu_0 = -\operatorname{div} J$$



$$\oint J dl \neq 0; \quad \oint B dl \neq 0$$

Поле вне стержня:  $\frac{B_0}{\mu_0} = \frac{P_m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta},$

$$\vec{H} + \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\frac{B}{\mu\mu_0} + \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0};$$

$$B + \mu\mu_0 J = \mu B;$$

$$\mu\mu_0 J = (\mu - 1)B;$$

Преобразуем в выражение:

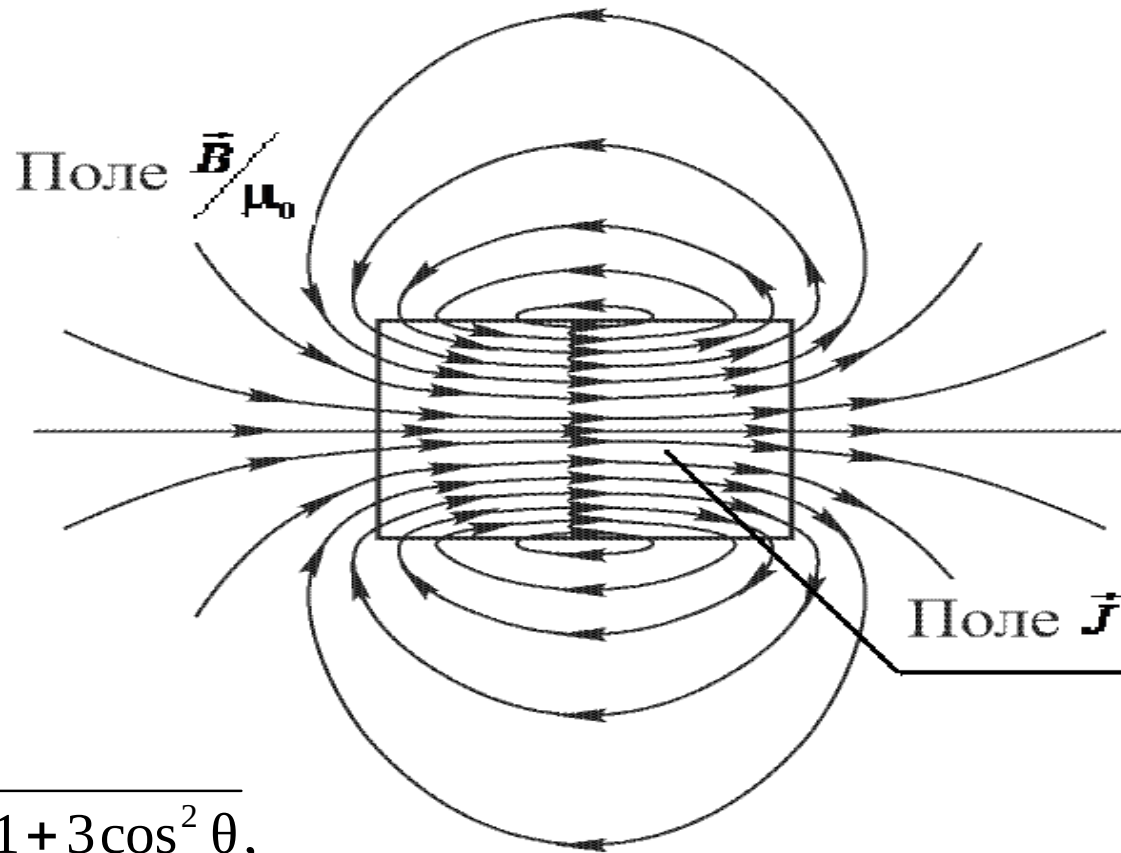
$$\frac{\mu J}{\mu - 1} = \frac{B}{\mu_0}$$

Для ферромагнетиков  $\mu \gg 1$ , тогда  $\mu \approx \mu - 1$

и на торцах намагниченного стержня 
$$\vec{J} \approx \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Это означает, что на торцах стержня вектор  $\vec{J}$  переходит в вектор  $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$   
а вектор  $\vec{H}$  отсутствует .

В отсутствие токов проводимости на торцах магнита поле намагниченности переходит во внешнее поле  $B/\mu_0$



$$\frac{B_0}{\mu_0} = \frac{P_m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta},$$

# Примечания Чуева, выделены рамкой красного цвета

$$\vec{D} = \frac{\sum \vec{p}_e^{\text{вирт}}}{V}$$

$$D_{n1} = D_{n2}; \quad D_{\tau 1} = D_{\tau 2}.$$

На границе двух диэлектриков, возможно

$$\oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{rot} \vec{E} \neq 0$$

$$\vec{H} = \frac{\sum \vec{p}_m^{\text{вирт}}}{V}$$

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}; \quad H_{n1} = H_{n2}; \quad \text{div} \vec{H} = 0.$$

На полюсах магнита и в отсутствии токов

$$\text{проводимости} \quad \text{div} \vec{B} / \mu_0 = -\text{div} \vec{J}$$

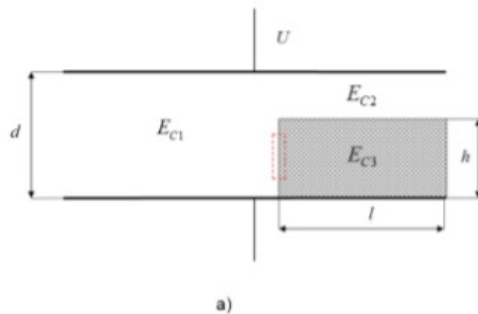
Соотношения, выделенные рамкой красного цвета, не являются общепризнанными.

Примеры, подтверждающие приводимые выше формулы

$$U_{C1} = U$$

$$U_{C2} = U \frac{\varepsilon(d-h)}{\varepsilon(d-h)+h}$$

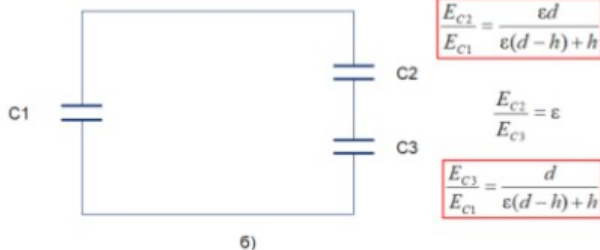
$$U_{C3} = U \frac{h}{\varepsilon(d-h)+h}$$



$$E_{C1} = \frac{U}{d}$$

$$E_{C2} = \frac{\varepsilon U}{\varepsilon(d-h)+h}$$

$$E_{C3} = \frac{U}{\varepsilon(d-h)+h}$$



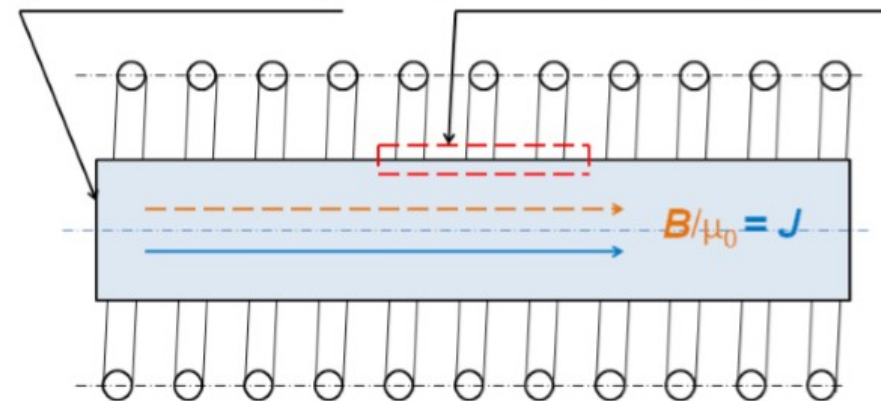
$$\frac{E_{C2}}{E_{C1}} = \frac{\varepsilon d}{\varepsilon(d-h)+h}$$

$$\frac{E_{C2}}{E_{C3}} = \varepsilon$$

$$\frac{E_{C3}}{E_{C1}} = \frac{d}{\varepsilon(d-h)+h}$$

$$\text{div} \vec{J} = -\text{div} \vec{B} / \mu_0$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0; \quad \oint \vec{J} d\vec{l} \neq 0; \quad \oint \vec{B} d\vec{l} \neq 0$$



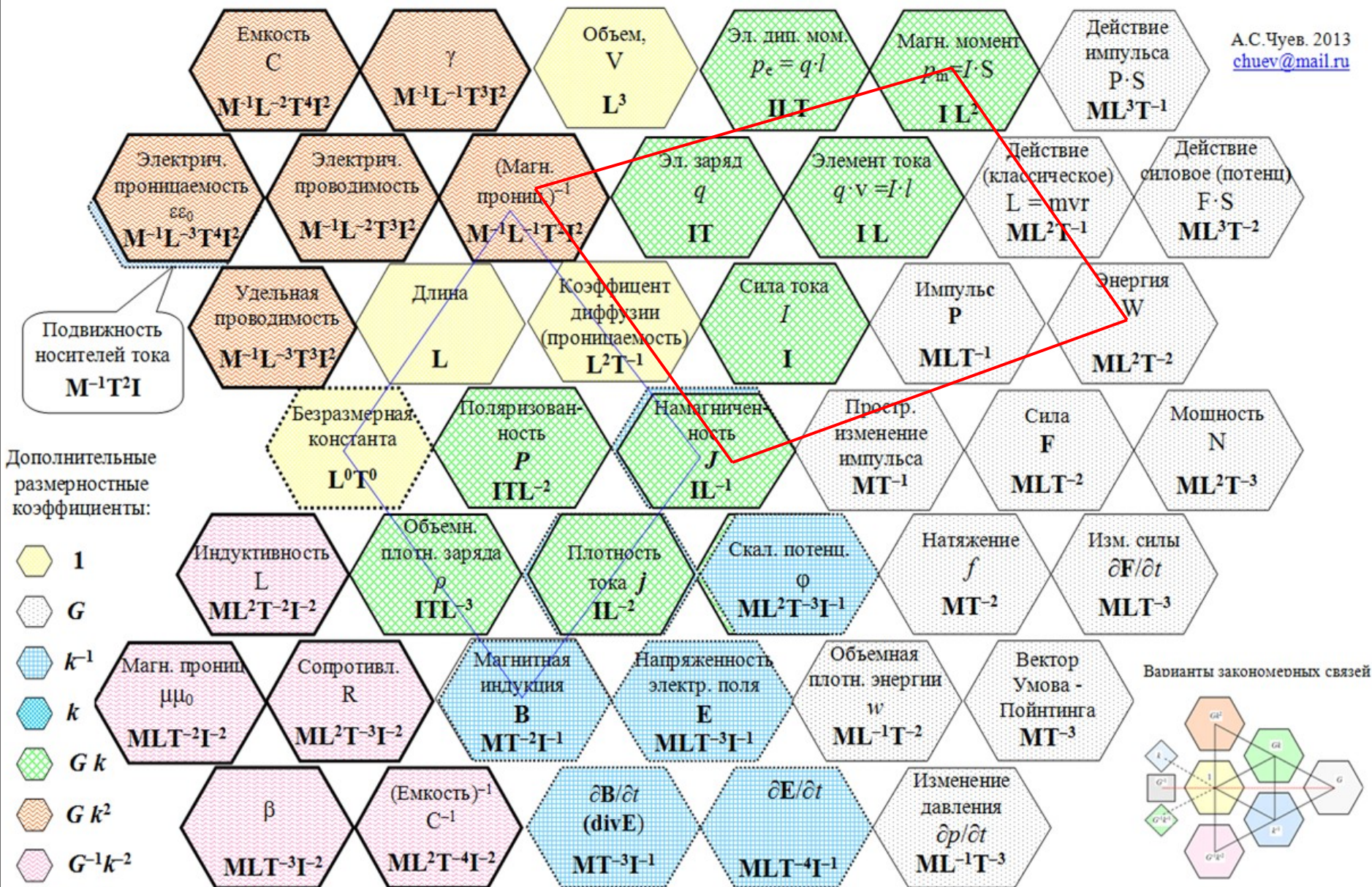
Ток катушки выключен, внутри стержня поле намагниченности  $\vec{J}$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{J}$$



# Система электромагнитных величин и их взаимосвязей

А.С.Чуев. 2013  
[chuev@mail.ru](mailto:chuev@mail.ru)



# Пример из ДЗ

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = I$$

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{s})$$

$$H 2\pi r_a = j(\pi r_a^2 - \pi R^2)$$

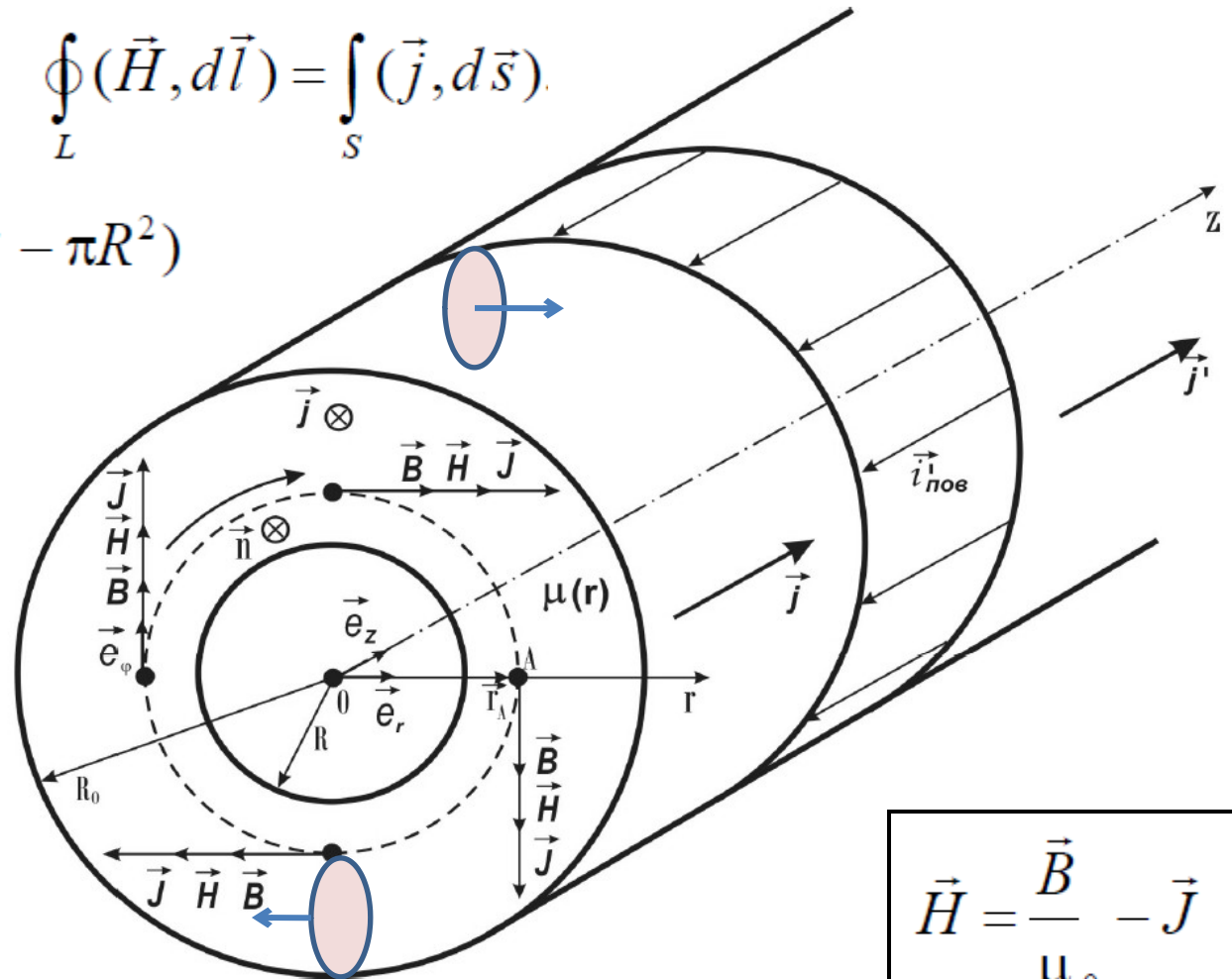
$$B = \mu \mu_0 H$$

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

$$\chi = \mu - 1$$

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) = I'$$

$$\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'$$



$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

$$\oint B dl = \mu \mu_0 \sum I = \mu_0 \sum (I + I')$$

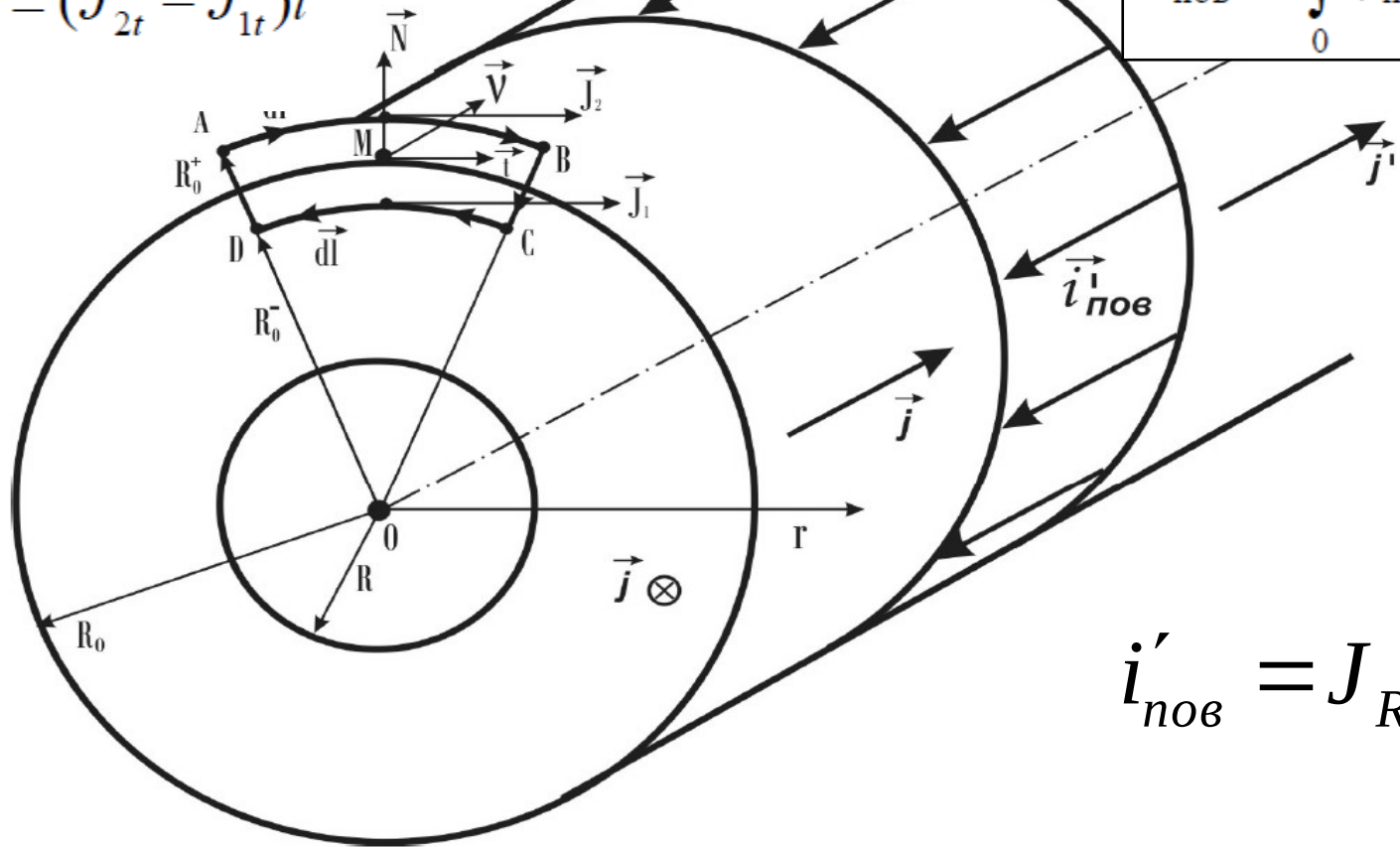


$$i'_{нов} \cdot 2\pi R_0 = J_{R_0} \cdot 2\pi R_0$$

$$dI'_{пов} = (\vec{i}'_{пов}, \vec{v}) dl = (\vec{i}'_{пов})_v dl.$$

$$\oint_{ABCD} (\vec{J}, d\vec{l}) = (J_{2t} - J_{1t})l$$

$$I'_{пов} = \int_0^l (\vec{i}'_{пов})_v dl.$$



$$i'_{нов} = J_{R_0}$$

$$I'_{сум} = \int_0^{2\pi R_0} i'_{нов} dl + \int_S j' dS = 0 \quad \text{Проверка правильности решения}$$

$\vec{N}$  — единичный вектор нормали к элементу поверхности раздела двух магнетиков (в рассматриваемой задаче это поверхность раздела «магнетик — вакуум») в окрестности точки наблюдения  $M$ ,  $\vec{t}$  — единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности раздела в точке наблюдения; единичный вектор  $\vec{v}$  также лежит в этой касательной плоскости и является ортогональным к вектору нормали  $\vec{N}$  и выбранному касательному направлению — вектору  $\vec{t}$ . Легко заметить, что в условиях рассматриваемой задачи вектор  $\vec{v}$  перпендикулярен плоскости элементарного контура  $ABCD$  и обуславливает положительное направление обхода этого контура, циркуляция вектора намагниченности  $\vec{J}$  по которому лежит в основе вывода локального соотношения для касательных компонент вектора  $\vec{J}$  на границе раздела двух магнетиков. Это соотношение выполняется в каждой точке поверхности раздела  $S$ .

# Конец лекции 8