Занятие 1. Электростатическое поле в вакууме. Принцип суперпозиции. Проводники в электростатическом поле.

Для подготовки к семинару надо проработать:

Лекция 1. Электрическое поле системы неподвижных зарядов в вакууме. Теорема Гаусса для электростатического поля.

ОЛ-1 (§1.1- 1.6), ОЛ-3 (§1.1- 1.5, §1.11, §1.13-1.14), ОЛ-4 (§1.1- 1.4), ДЛ-10, 11, 12.

Лекция 2. Работа и потенциал электростатического поля.

ОЛ-1 (§1.7- 1.8), ОЛ-3 (§1.6, 1.8, 1.12), ОЛ-4 (§1.5- 1.6), ДЛ-10, 11, 12.

***ОЛ-1.** Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2013. – 423 с.*

***ОЛ-2.** Литвинов О.С., Горелик В.С. Электромагнитные волны и оптика. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. – 448 с.*

***ОЛ-3.** Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для втузов. В 5 кн (кн.2). – М.: Наука, 1998.*

***ОЛ-4.** Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 352 с.*

***ДЛ-10.** Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Теория и практика классической электродинамики. – М.: URSS, 2014. – 774 с.*

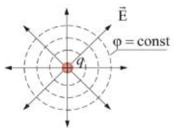
***ДЛ-11.** Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 720 с.*

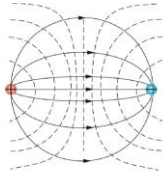
***ДЛ-12.** Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие для вузов. В 5 томах. – М.: Физматлит, 2002. – 4506 с.*

Краткие теоретические сведения

Источники электростатического поля

$$q = \lambda l = \sigma S = \rho V;$$





$$\vec{p}_\mathrm{e} = q\vec{l}$$

Характерстики электрического поля

Силовая:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{Пр}}}; \qquad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q_0}{4\pi r^2}\vec{e}_\mathrm{r}; \qquad d\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{dq_0}{4\pi r^2}\vec{e}_\mathrm{r}$$

Энергетическая:

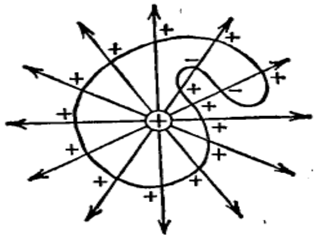
$$\varphi = \frac{W}{q_{\text{Пр}}}; \qquad \varphi = \frac{q_0}{\varepsilon_0 4\pi r} = \frac{1}{\varepsilon_0 4\pi r}\int \rho \mathrm{d}V$$

Взаимосвязь параметров:

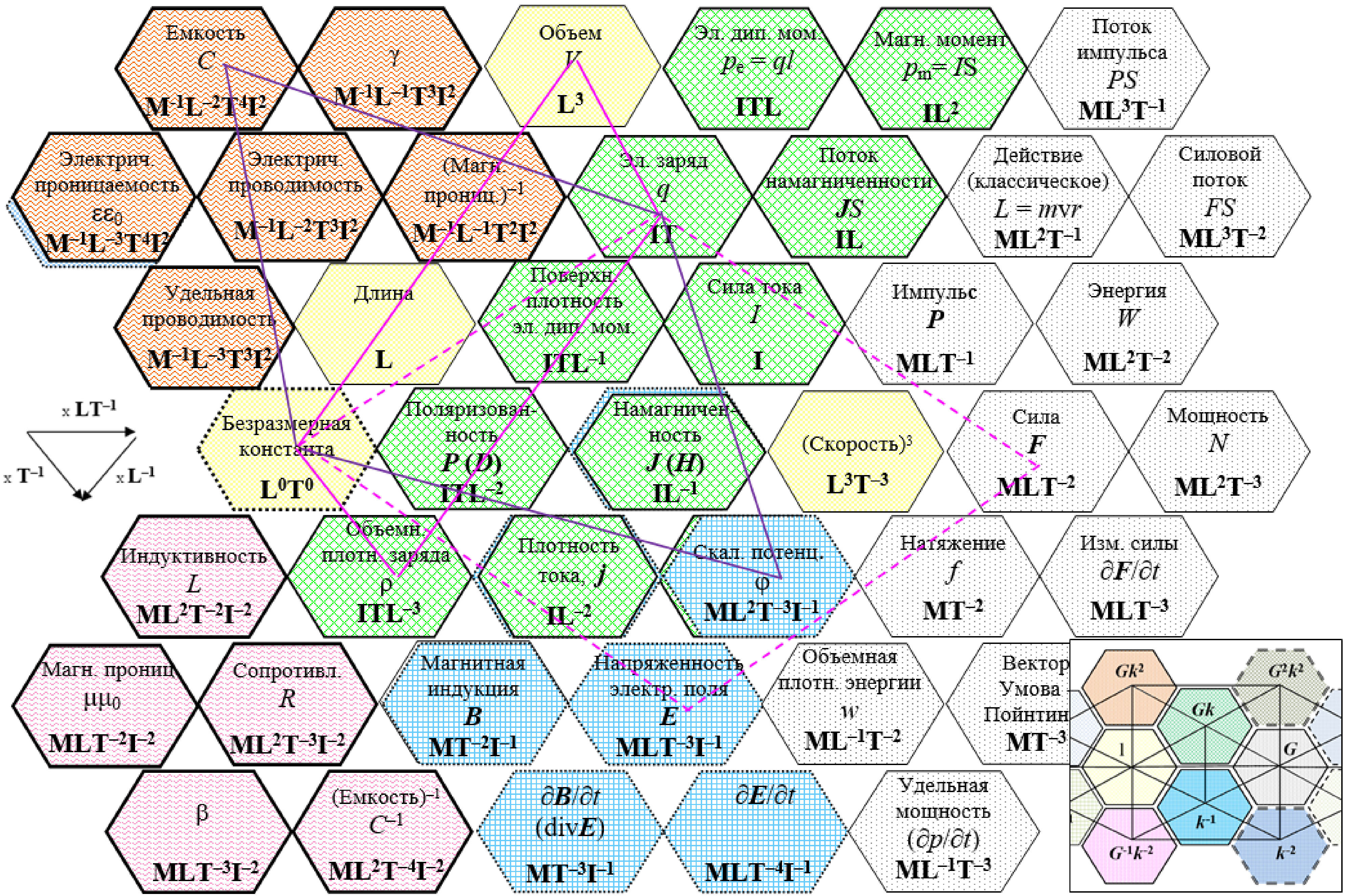
$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi; \qquad \Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$$

Теорема Гаусса:

$$\boxed{\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{внутр}},}$$



Электромагнитные величины в системе ФВиЗ



Задача 2.18. Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины $2a$ заряжен равномерно зарядом q. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня до точки прямой:

а) перпендикулярной стержню и проходящей через его центр;

б) совпадающей с осью стержня, если $r > a$.

Исследовать полученные выражения при $r >> a$.

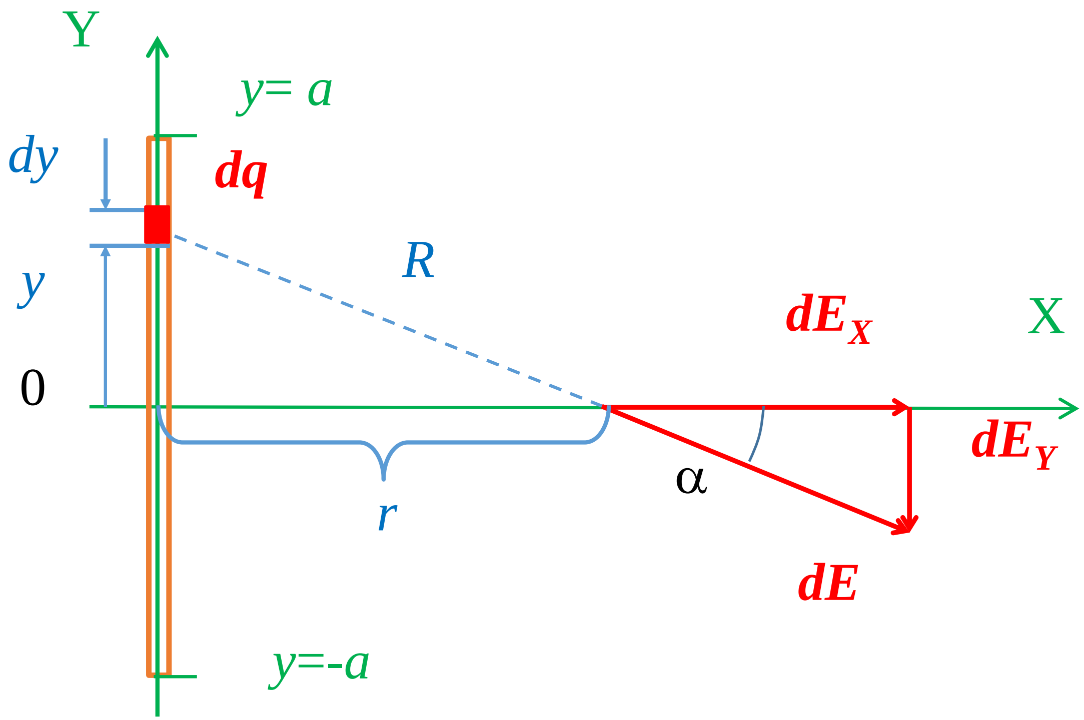


Рис. 1

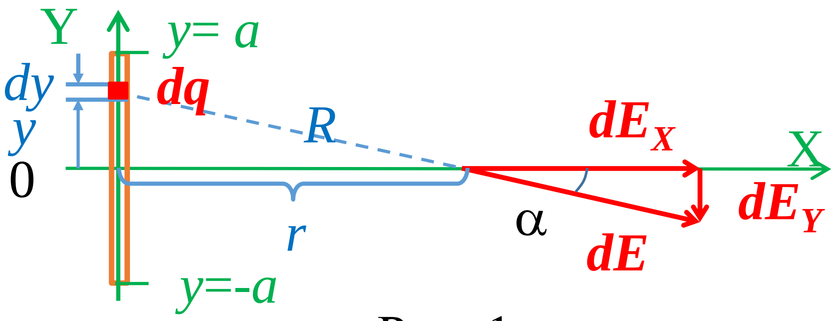


Рис. 1

Решение:

Для определенности примем, что заряд стержня положительный $q > 0$.

В решении этой задачи будем использовать принцип суперпозиции. Для этого разделим стержень на элементарные части dl , каждую из которых можно рассматривать как точечный заряд величиной

$$dq = \frac{q}{2a} dl \qquad (1)$$

Каждый элементарный заряд создаёт в рассматриваемой точке вектор напряженности, длина которого равна

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R^2} \qquad (2)$$

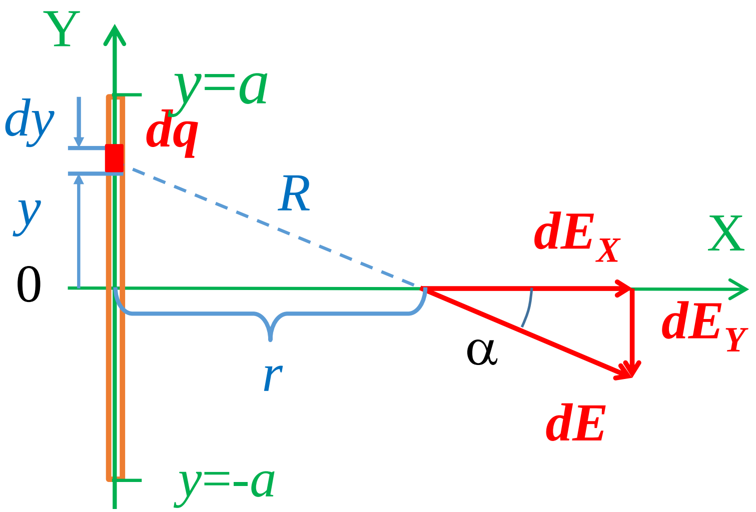


Рис. 1

а) В любой точке на оси X, препендикулярной стержню и проходящей через его центр, как показано на рис.1, у вектора напряженности можно выделить две составляющие по *X* и *Y*, которые можно интегрировать (суммировать) по тому или иному направлению. Согласно рис.1

$$dE_X = dE\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}, \qquad (4)$$

$$dE_Y = dE\sin\alpha, \qquad (5)$$

где $$\sin\alpha = \frac{y}{R} \qquad (6)$$

и $$R = \sqrt{r^2 + y^2}, \qquad (7)$$

Применяя интегрирование выражения (2) по оси *X* с учетом (1), $dl = dy$ и последних соотношений, получим

$$E_X = \int_{-a}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{r dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{q}{8ar\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{r^2 dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} \qquad (8)$$

Рассмотрим интегральную часть выражения (8) отдельно

$$\int \frac{r^2dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \int \frac{r^2+y^2}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy - \int \frac{y^2}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy. \qquad (9)$$

Первый интеграл в (9) равен

$$\int \frac{r^2+y^2}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy = \int \frac{dy}{\sqrt{r^2+y^2}}. \qquad (10)$$

Второй интеграл в (9) можно найти интегрированием по частям

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (11)$$

а именно:

$$\int \frac{y^2}{(r^2+y^2)^{3/2}}dy = \left[\begin{array}{c} u = y, du = dy \\ dv = \frac{ydy}{(r^2+y^2)^{3/2}}, v = -\frac{1}{\sqrt{r^2+y^2}} \end{array}\right] = -\frac{y}{\sqrt{r^2+y^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{r^2+y^2}}. \qquad (12)$$

Подставляя (10) и (12) в (9) получаем

$$\int \frac{r^2dy}{(r^2+y^2)^{3/2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{r^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{r^2+y^2}} - \int \frac{dy}{\sqrt{r^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{r^2+y^2}}, \qquad (13)$$

поэтому выражение (8) с учетом (13) принимает вид:

$$E_X = \frac{q}{8ar\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\sqrt{r^2+y^2}}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{q}{4r\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}. \qquad (14)$$

Аналогичное интегрирование по оси *Y* дает нулевой результат:

$$E_Y = \int_{-a}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{yqdy}{2a(r^2+y^2)^{3/2}} = \frac{q}{16a\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{d(r^2+y^2)}{(r^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_Y = -\frac{q}{8a\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2+y^2}}\bigg|_{-a}^{a} = 0. \qquad (15)$$

Ввиду последнего результата суммарная величина напряженности

$$E = \sqrt{E_X^2 + E_Y^2} \qquad (16)$$

определяется выражением, совпадающим с (14)

$$E = \frac{q}{4r\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}. \qquad (17)$$

При *r* >> *a* выражение (17) принимает вид

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (18)$$

что совпадает с выражением для величины напряженности электрического поля точечного заряда *q*.

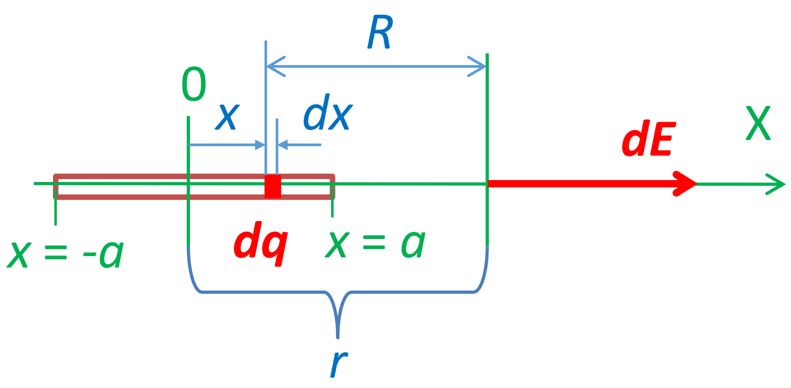


Рис. 2

Для решения по варианту б) введём систему координат, показаннную на рис. 2. В этом случае вектор напряженности от любого элементарного заряда направлен исключительно вдоль оси *X*.

$$E = \int dE_X \,. \qquad (19)$$

Действующеее растояние

$$R = r - x \,. \qquad (20)$$

Вычисляя (19) с учётом (2), $dl = dx$ и (20) получим

$$E = \int_{-a}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q dx}{2a(r-x)^2} \,.$$

Результат вычисления интеграла

$$E = \frac{q}{8a\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(r-x)}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2-a^2)} \,. \qquad (21)$$

Выражение (21) при *r* >> *a* принимает вид

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,, \qquad (22)$$

что также совпадает с формулой для напряженности поля точечного заряда *q*.

Замечание. Рассмотрим формулу (21) при *r* << *a*

$$E = \frac{q}{4\pi r a \varepsilon_0}. \qquad (23)$$

С учетом определения линейной плотности заряда $\tau = \frac{q}{l}$, при $l = 2a$, формулу (23) можно записать в виде

$$E = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_0}. \qquad (24)$$

Эта формула определяет напряженность поля бесконечной заряженной прямой нити на расстоянии r от неё.
Вектор напряженности направлен перпендикулярно к нити в каждой точке пространства вокруг нити.

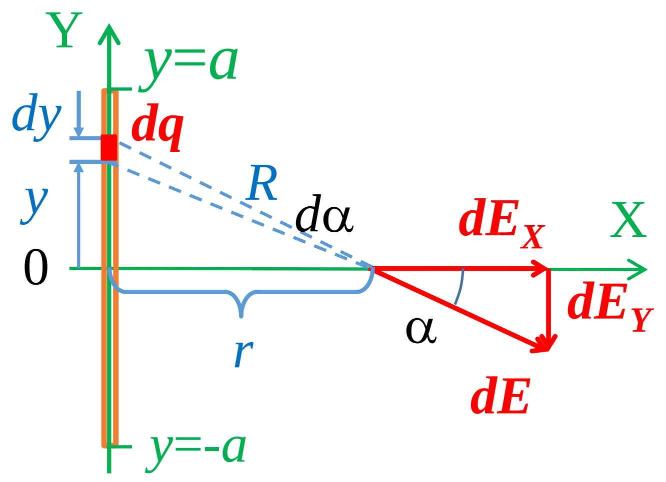


Рис. 1

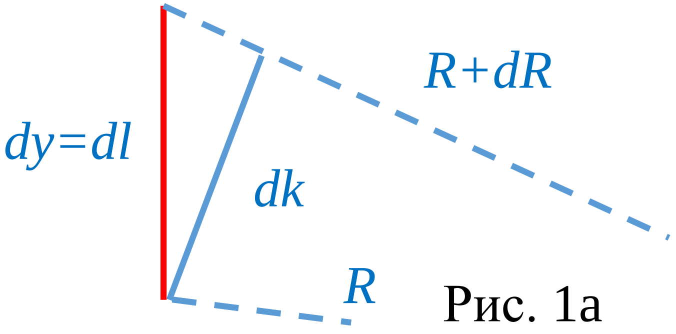


Рис. 1а

Вариант решения а) с интегрированием по углу

а) Элемент dl с электрическим зарядом dq из рассматриваемой точки будет виден под углом $d\alpha$.

Дополнительные геометрические соотношения (см. рис. 1 и рис. 1а) следующие:

$$dk = R d\alpha \qquad (1^*)$$

$$dl = \frac{dk}{cos\alpha} \qquad (2^*)$$

$$dl = \frac{r}{(cos\alpha)^2} d\alpha \ . \qquad (3^*)$$

С учетом (3*) выражение (8) принимает вид:

$$E_X = \frac{q}{4\pi a r \varepsilon_0} \int_0^{\arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)} \cos\alpha \, d\alpha.$$

Вычисление этого интеграла дает результат идентичный (17).

Задача 2.27. ***Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена равномерно по длине с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 cos\varphi$, где φ - полярный угол цилиндрической системы координат, ось Z которой совпадает с осью данной поверхности. Найти модуль и направление напряженности электрического поля на оси Z.***

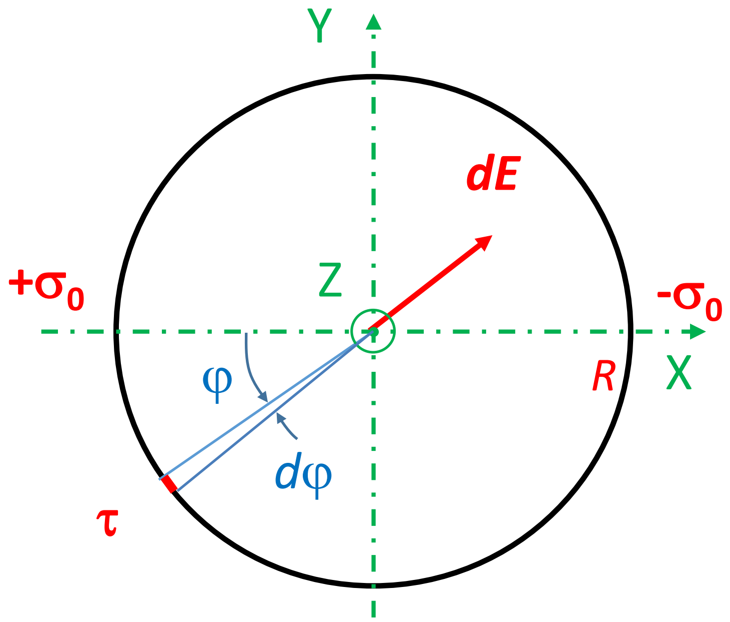


Рис. 3

Решение:

На рис. 3 приведено поперечное сечение заданной бесконечно длинной цилиндрической поверхности. Для вычислений примем ее радиус величиной *R*.

Выделим на поверхности цилиндра тонкую полоску, которая опирается на малый центральный угол $d\varphi$. Линейная плотность заряда этой полоски равна

$$\tau = \sigma R d\varphi \,. \qquad (1)$$

Согласно формуле (24) из задачи 2.18 эта полоска создаёт в точках оси Z вектор напряженности электрического поля, величина которого равна

$$dE = \frac{\tau}{2\pi R \varepsilon_0} \,. \qquad (2)$$

Вектор напряженности в точках оси Z можно представить в координатной форме

$$\vec{E} = (E_X, E_Y, E_Z), \qquad (3)$$

где координаты вектора напряженности можно найти суммированием по всему углу φ

$$E_X = \int_{(\varphi)} dE cos\varphi, \qquad (4)$$

$$E_Y = \int_{(\varphi)} dE sin\varphi. \qquad (5)$$

Т.к. вектор напряженности перпендикулярен к выделенной полоске в любой точке оси Z, то

$$E_Z = 0\,. \qquad (6)$$

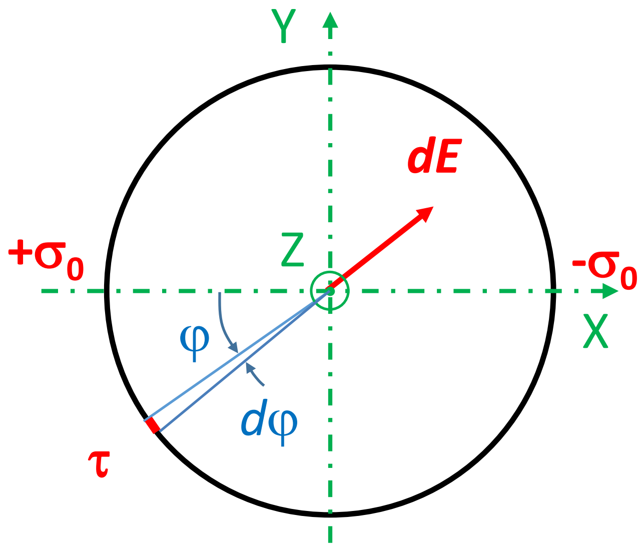


Рис. 3

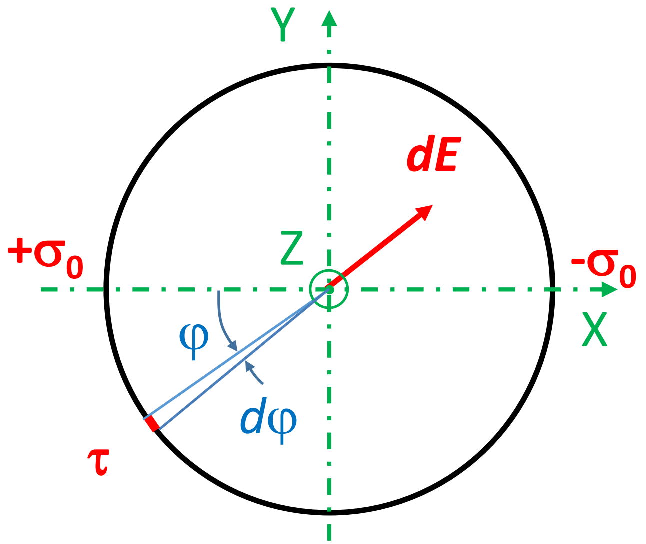


Рис. 3

Подставляя (1) и (2) в (4), получаем:

$$E_X = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 cos^2\varphi R d\varphi}{2\pi R\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\,. \qquad (7)$$

Подставляя (1) и (2) в (5), получаем:

$$E_Y = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 cos\varphi sin\varphi R d\varphi}{2\pi R\varepsilon_0} = 0\,. \qquad (8)$$

Т. о. вектор напряженности в точках оси Z направлен вдоль оси *X* и его величина равна

$$E = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\,. \qquad (9)$$

Задача 2.36. Имеются два тонких проволочных кольца радиуса **R** каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны **q** и **–q**. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстояние **L**, если **R = 30 см, L = 52 см** и **q = 0,40 мкКл.**

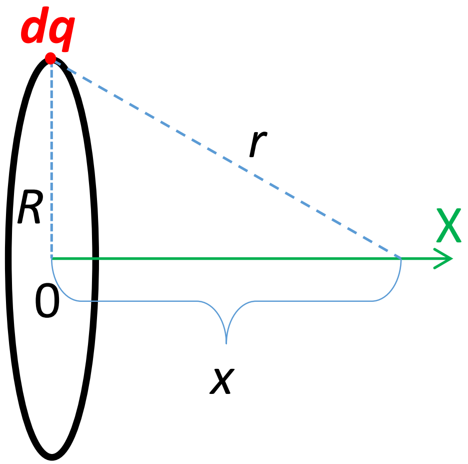
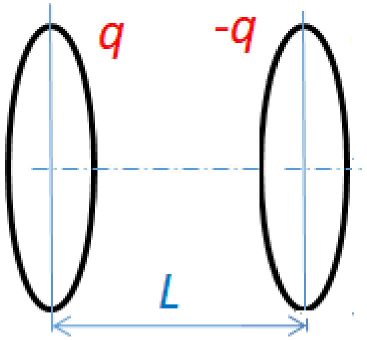


Рис. 4



Решение:

Найдём потенциал на оси одного кольца в точке, находящейся на расстоянии x от кольца (рис. 4).

Разобьем кольцо на большое количество *N* малых зарядов, каждый из которых можно рассматривать как точечный

$$dq = \frac{q}{N}. \qquad (1)$$

Потенциал, создаваемый одним точечным зарядом *dq* на оси кольца

$$d\varphi = \frac{dq}{4r\pi\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

где

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}. \qquad (3)$$

Чтобы найти потенциал от всего кольца надо просуммировать по всем зарядам

$$\varphi = \sum_{dq} d\varphi = \sum_{dq} \frac{dq}{4r\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}. \qquad (4)$$

Разность потенциалов между центрами соосно расположенных колец равна

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-. \qquad (5)$$

Потенциал в центре положительно заряженного кольца

$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+L^2}}. \qquad (6)$$

Потенциал в центре отрицательно заряженного кольца

$$\varphi_- = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+L^2}}. \qquad (7)$$

Поэтому

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+L^2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+L^2}} \qquad (8)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}\right) = 12000 \text{ В}. \qquad (9)$$

Задача 2.69. Тонкое проволочное кольцо радиуса R = 7,5 см имеет заряд q = 5,2 мкКл. Кольцо расположено параллельно проводящей плоскости на расстоянии L = 6,0 см от нее. Найти поверхностную плотность заряда σ в точке плоскости, расположенной симметрично относительно кольца.

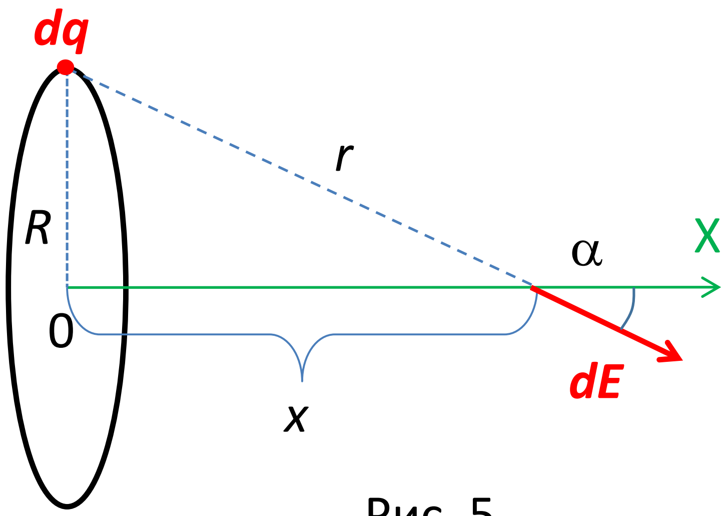


Рис. 5

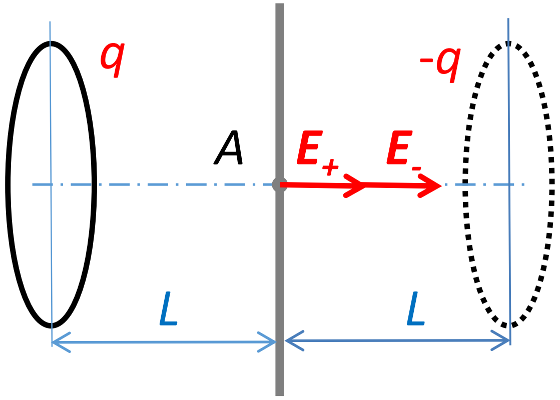


Рис. 6

Решение. Найдём величину напряженности на оси кольца в точке, находящейся на расстоянии *x* от кольца (рис. 5). Разобьем кольцо на большое количество *N* малых зарядов, каждый из которых можно рассматривать как точечный

$$dq = \frac{q}{N}. \qquad (1)$$

Величина напряженности, создаваемой одним точечным зарядом *dq* на оси кольца

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (2)$$

где

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}. \quad (3)$$

Из-за симметричного распределения зарядов по кольцу вектор напряженности лежит на оси кольца. Чтобы найти потенциал от всего кольца надо просуммировать по всем зарядам проекции напряженности от каждого заряда на ось кольца

$$E = \sum_1^N dE\cos\alpha \qquad (4)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad (5)$$

$$E = \sum_1^N \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{r} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}\,. \qquad (6)$$

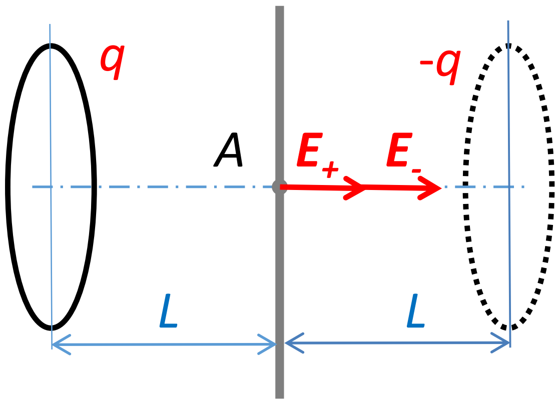


Рис. 6

Т. к. кольцо расположено параллельно проводящей плоскости, то в соответствии с методом электрических изображений надо симметрично относительно плоскости расположить такое же кольцо, но с противоположным по знаку зарядом (рис.6). Напряженность поля вблизи плоскости (в точке А) равна векторной сумме напряженностей от каждого из колец

$$\vec{E_A} = \vec{E_+} + \vec{E_-}\,. \qquad (7)$$

Т.к. векторы напряженностей от колец в точке *A* направлены одинаково и равны по величине

$$E_+ = E_- = \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0(R^2+L^2)^{3/2}}, \qquad (8)$$

поэтому

$$E_A = E_+ + E_- = \frac{2qL}{4\pi\varepsilon_0(R^2+L^2)^{3/2}}. \qquad (9)$$

Поверхностная плотность заряда σ_A в точке А плоскости определяется равенством

$$E_A = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0}, \qquad (10)$$

поэтому

$$\sigma_A = \varepsilon_0 E_A = \frac{qL}{2\pi(R^2+L^2)^{3/2}}. \qquad (11)$$

$$\sigma_A \approx 5{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл/м}^2.$$

Для закрепления знаний по теме данного семинара дома следует самостоятельно решить следующие задачи, рекомендуемые учебным планом

Домашнее задание:

ОЛ-7 задачи 2.17, 2.44   или   ОЛ-8 задачи 3.12, 3.36. .

Литература:

ОЛ-7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2001.
ОЛ-8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Наука, 1988.

ОЛ-7 задачи 2.17, 2.44

2.17. Тонкое непроводящее кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$, где λ_0 — постоянная, φ — азимутальный угол. Найти модуль вектора напряженности электрического поля:

а) в центре кольца;

б) на оси кольца в зависимости от расстояния x до его центра. Исследовать полученное выражение при $x \gg R$.

2.44. Определить вектор напряженности электрического поля, потенциал которого зависит от координат x, y по закону:

а) $\varphi = a(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = axy$,

где a — постоянная. Изобразить примерный вид этих полей с помощью силовых линий (в плоскости x, y).

Спасибо за внимание