

Лекция 11. Электромагнитные волны

1. Волновое уравнение для электромагнитного поля, его общее решение.
2. Скорость распространения электромагнитных волн.
3. Энергия и импульс электромагнитного поля.
4. Вектор Пойнтинга.
5. Теорема Пойнтинга.

Мы знаем действия многих причин, но
не знаем причин многих действий.

К. Колтон

Мысли философов – как звезды, они не
дают света, потому что слишком
возвышенны.

Ф. Бэкон

Уравнение волны

Уравнение волны – математическое выражение, описывающее смещение колеблющейся частицы в виде функции, зависящей от координат и времени.

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$

Для одномерного случая возможное общее решение:

$$\xi = \xi(x, t) = f(x - ct) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) = F\left(-\frac{x - ct}{c}\right)$$

Гармоническая волна:

$$\xi(x, t) = a \cos \omega(t - x/v),$$

где a — амплитуда волны, ω — циклическая (круговая) частота колебаний частиц среды (с^{-1}). Эта волна периодична во времени и пространстве, поскольку сама функция периодична и ее период равен 2π . Из периодичности во времени $\omega\Delta t = 2\pi$ находим $\Delta t = 2\pi/\omega$. Этот промежуток времени называют *периодом колебаний*:

$$T = 2\pi/\omega.$$

$$\omega t - \omega x/v = \omega t - kx, \quad \text{где } k = \omega/v = 2\pi/Tv, \text{ или}$$

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Величину k называют *волновым числом*.

Уравнение плоской гармонической волны:

$$\xi = a \cos(\omega t - kr)$$

Уравнение плоской одномерной гармонической волны:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx)$$

Уравнение плоской одномерной затухающей гармонической волны:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$$

Уравнение сферической гармонической волны:

$$\xi = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr)$$

$$\xi = A \cos \left(\frac{2\pi \cdot t}{T} - \frac{\omega}{v} r \right) \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ - волновое число}$$

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \quad \vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \text{ - волновой вектор}$$

В направлении распространения волны

$$\frac{\omega}{k} \text{ - Фазовая скорость} \quad \left(\frac{t}{T} = \frac{r}{\lambda} \right)$$

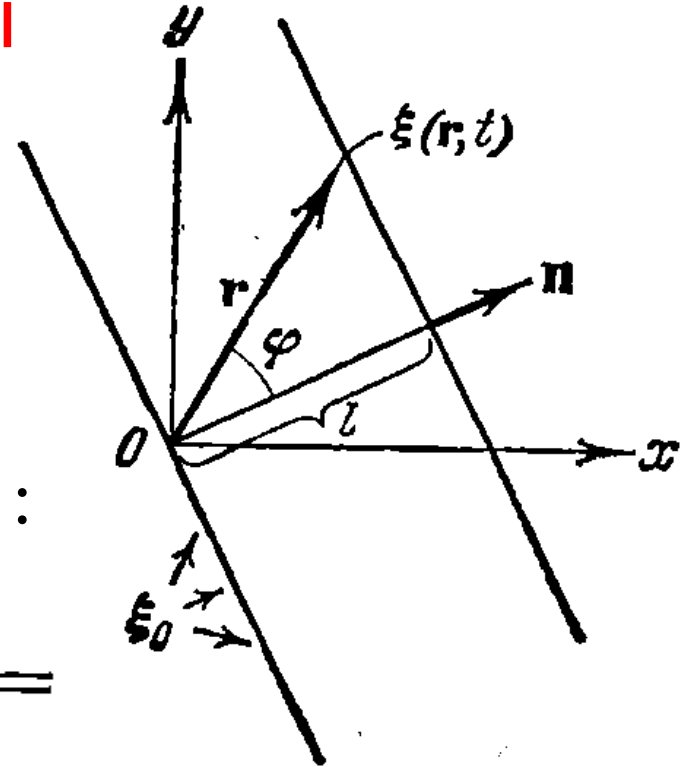
Если общее выражение $\xi = A \cos(\omega t - kr)$

дважды продифференцировать по времени и координатам, то получим волновое уравнение второго порядка

Уравнение плоской волны

Плоская волна при $x = 0$

$$\xi_0 = a \cos(\omega t + \alpha)$$



Амплитуда волны на расстоянии l :

$$\xi = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{l}{v} \right) + \alpha \right] = a \cos(\omega t - kl + \alpha)$$

где: $k = \omega/v$; $l = r \cos \varphi = \mathbf{n} \mathbf{r}$

Можем записать $\xi = a \cos(\omega t - k \mathbf{n} \mathbf{r} + \alpha)$.

Обозначая $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, - волновой вектор. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

Получим $\xi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$.

Тут $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$.

Общее выражение для уравнения волны

$$\xi(x, y, z; t) = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha).$$

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma.$$

Далее - вывод волнового уравнения из уравнения волны

Продифференцируем функцию дважды по каждой переменной

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha) = -k_z^2 \xi.$$

Сложение производных по координатам дает

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi.$$

Сопоставив эту сумму с производной по времени и заменив k^2/ω^2 через $1/v^2$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Это и есть волновое уравнение.

Его можно написать в виде

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

где Δ — оператор Лапласа

Для одномерной плоской волны волновое уравнение имеет
вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

волновому уравнению удовлетворяет
любая функция вида

$$f(x, y, z; t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha).$$

Запомнить:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

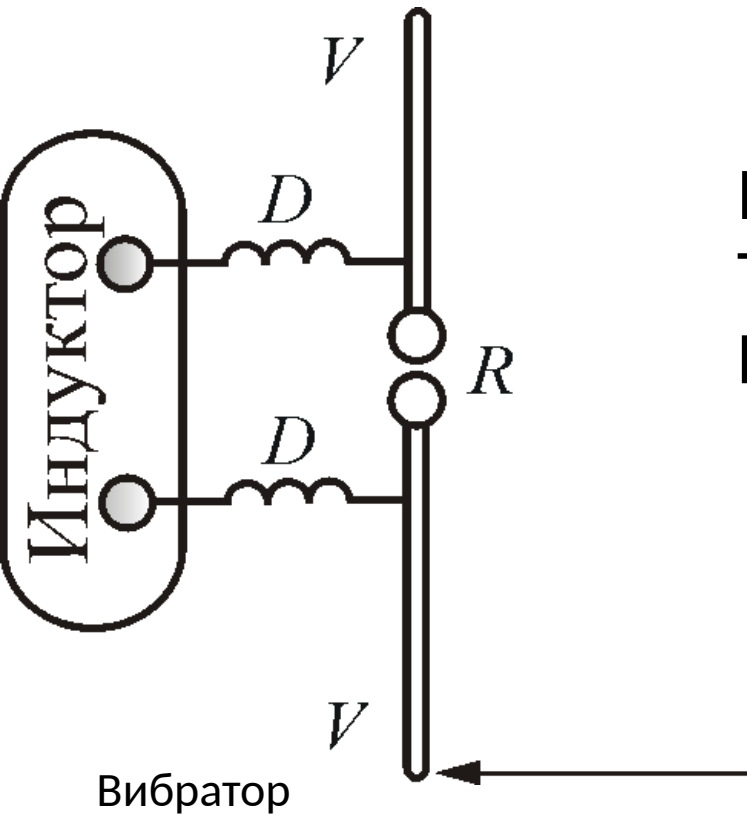
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Герц Генрих Рудольф (1857 – 1894) – немецкий физик.

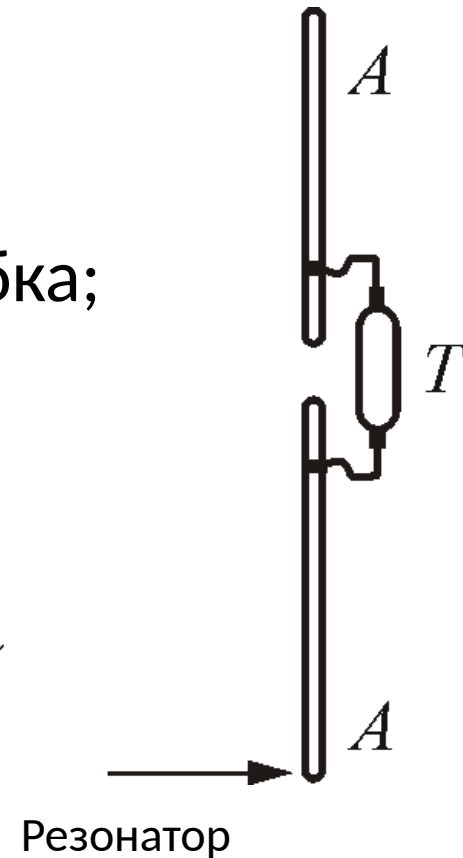
Основные работы относятся к электродинамике, одним из основоположников которой он является, и механике. В 1888 г. экспериментально доказал существование электромагнитных волн, распространяющихся в свободном пространстве, предсказанных теорией Максвелла. В 1887 наблюдал внешний фотоэффект. Исследования Герца посвящены также катодным лучам, теории удара упругих тел и т.п.

Вибратор Герца



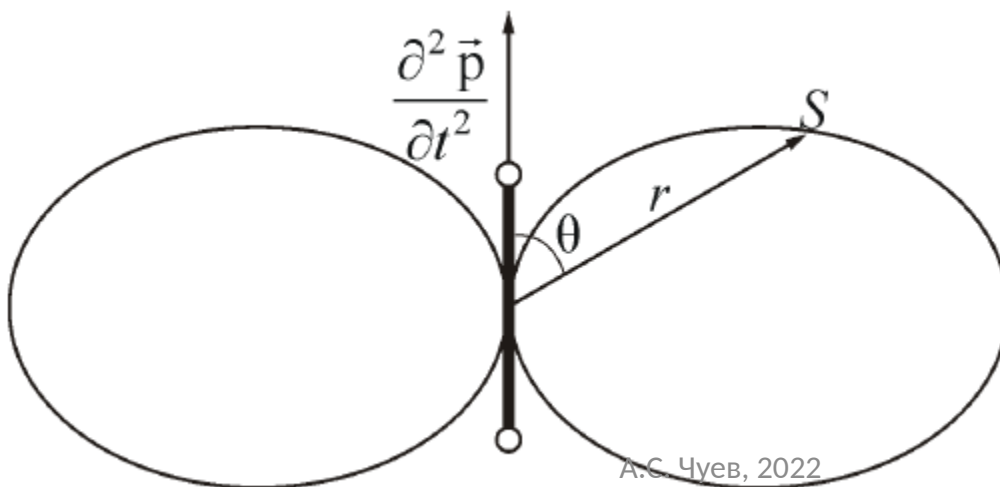
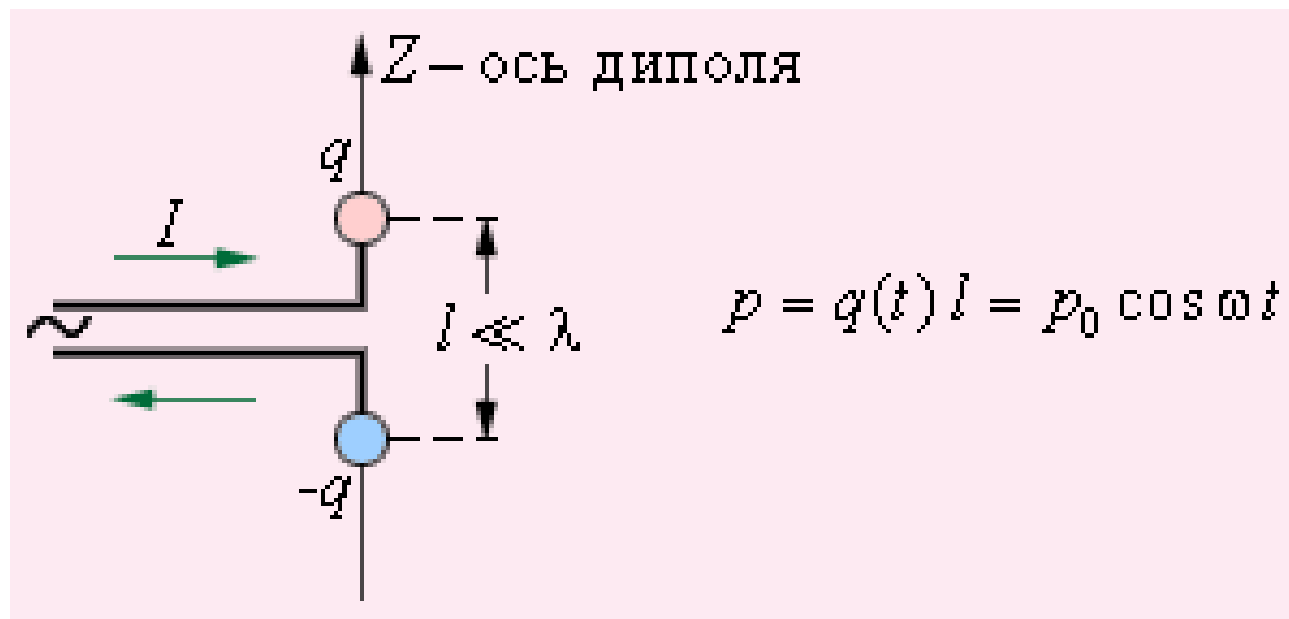
R – разрядник;
T – газоразрядная трубка;
D – дроссели.

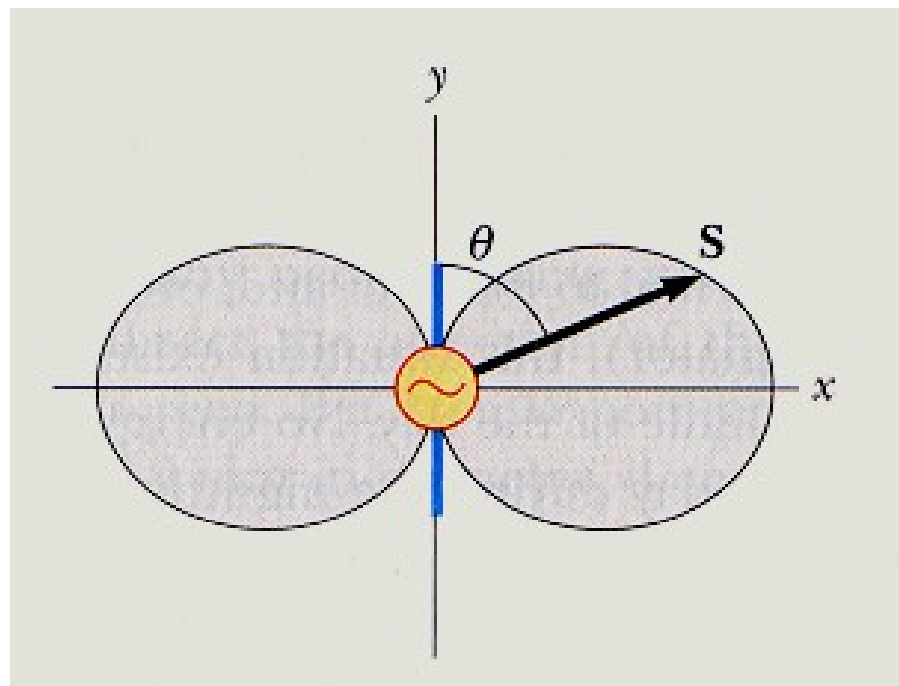
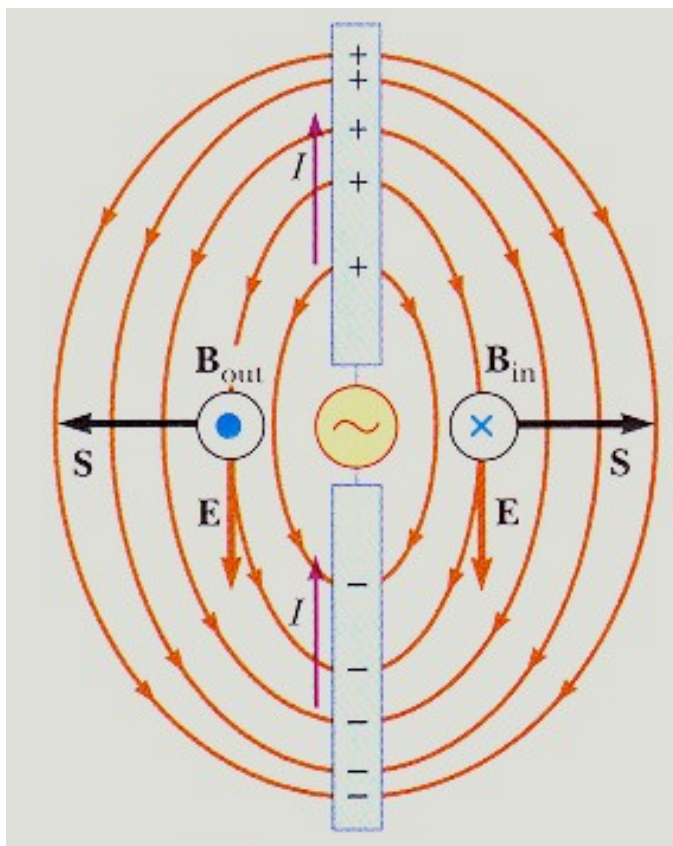
$r \leq \lambda$ – ближняя зона

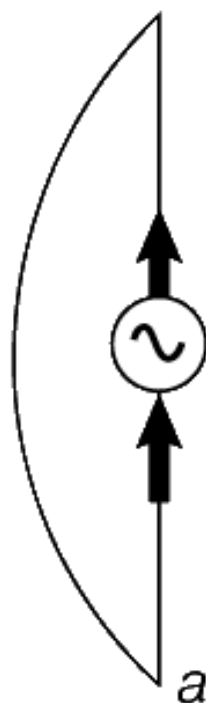


Движущийся с ускорением электрический заряд
испускает электромагнитные волны.

Излучение диполя

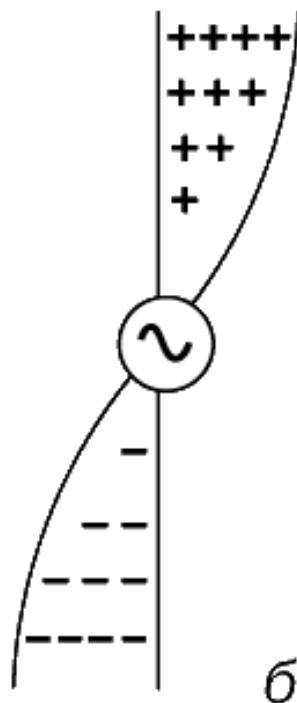






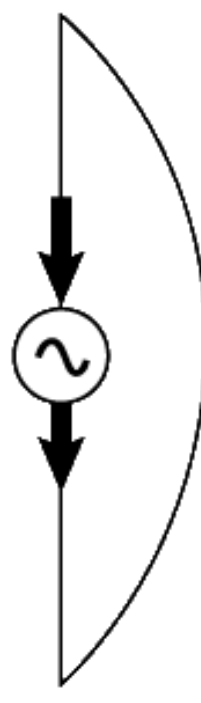
$t = 0$

Ток i максимален,
направлен вверх;
заряд $q = 0$



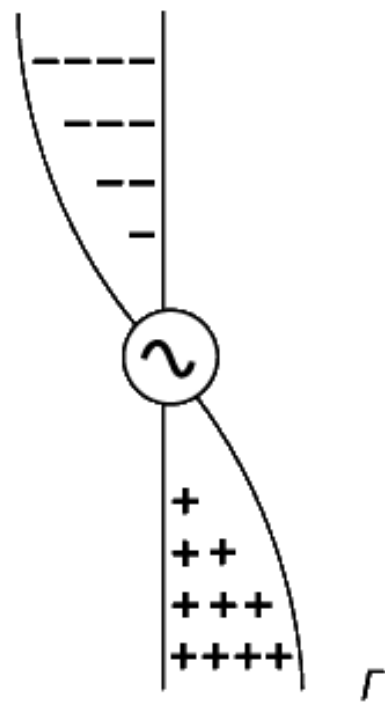
$t = T/4$

Ток $i = 0$,
заряд q
максимален



$t = T/2$

Ток i максимален,
направлен **вниз**
заряд $q = 0$



$t = 3T/4$

Ток $i = 0$,
заряд q
максимален

Рис. 3. ТОКИ И ЗАРЯДЫ в антенне типа полуволнового симметричного вибратора в разные моменты периода.

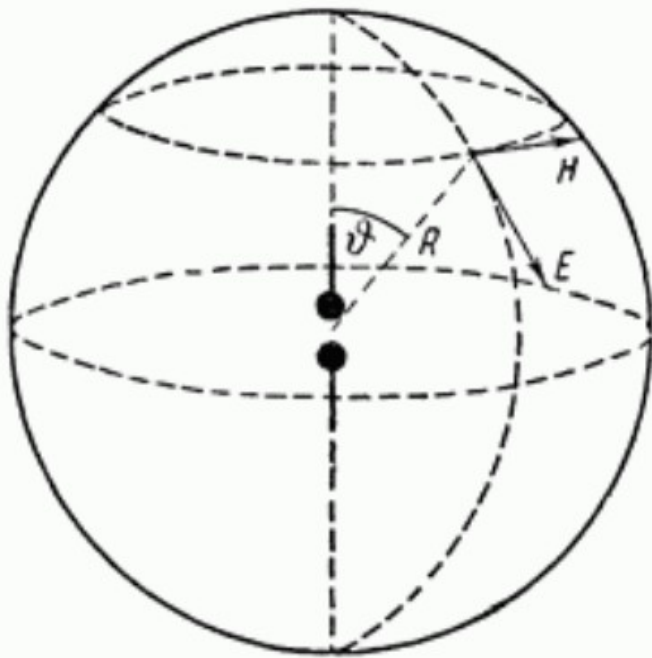
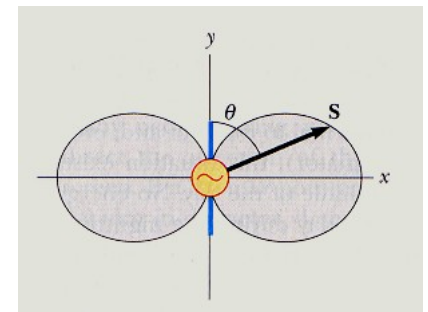


Рис. 382. В электромагнитной волне, излучаемой диполем, векторы \mathbf{E} направлены по меридианам, а векторы \mathbf{H} — по параллелям.

$$E_{\perp} = \frac{\ddot{P} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r c^2}$$

$$H_{\perp} = \frac{\ddot{P} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r c}$$

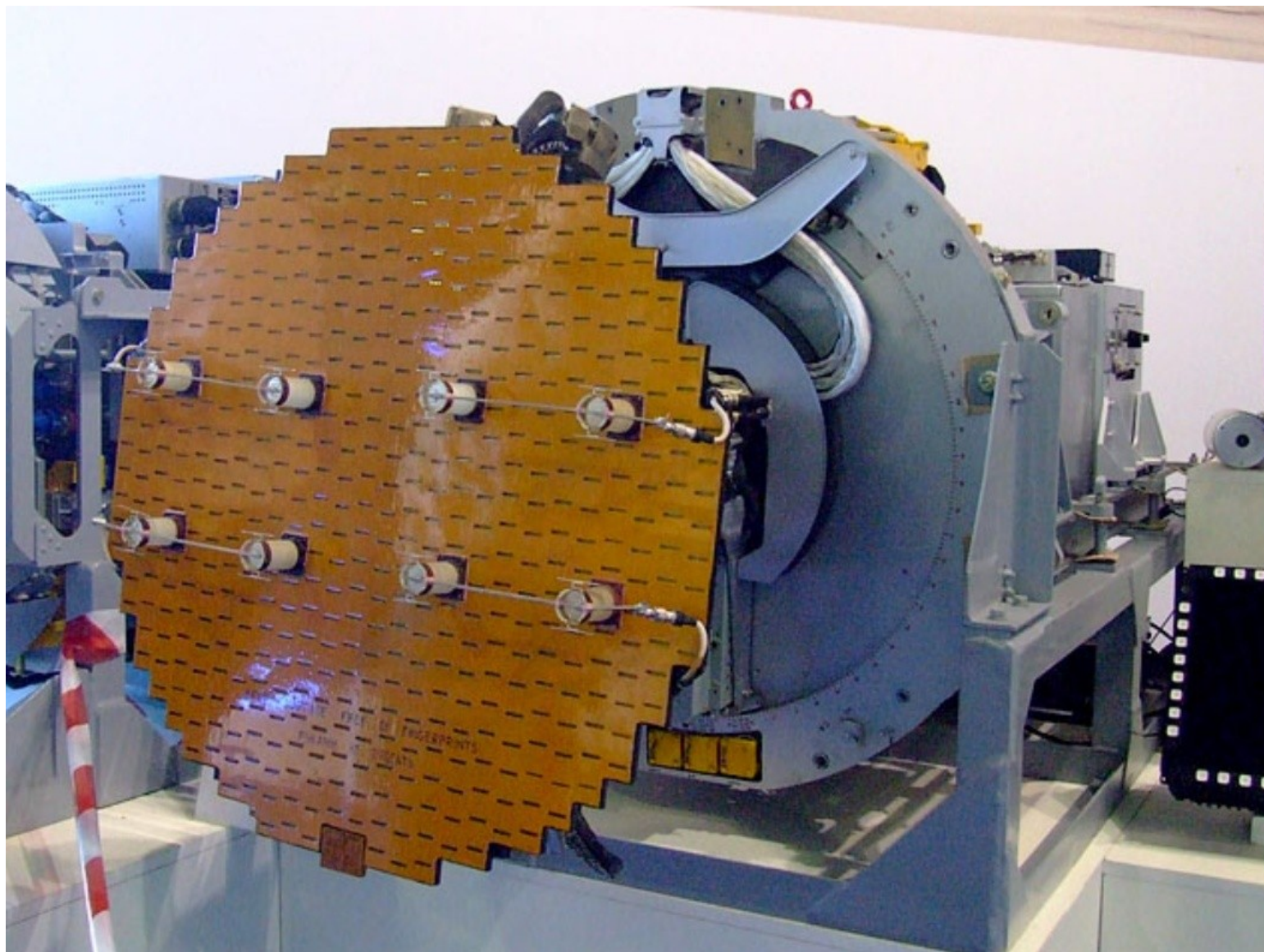
Диаграмма излучения диполя не сферическая!!!



ФАР







Электромагнитная волна

Уравнения Максвелла при отсутствии источников поля

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\nabla \mathbf{H} = 0,$$

$$[\nabla \mathbf{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0.$$

Возьмем ротор от обеих частей первого уравнения

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\mu\mu_0 \left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]$$

Вывод волнового уравнения из уравнений Максвелла

Преобразуя векторное произведение в правой части последнего уравнения:

$$\left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \mathbf{H}].$$

И используя для $\text{rot } \mathbf{H}$, выражение из ур-ий Максвелла $[\nabla \mathbf{H}] = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ получим:

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

В левой части: $[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = \cancel{\nabla (\nabla \mathbf{E})} - \Delta \mathbf{E}.$

В итоге:

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

С учетом

$$\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$$

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Раскрыв оператор Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Аналогичным путем можно получить

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Второй вариант вывода волнового уравнения

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \text{дифференцируем по } x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \text{дифференцируем по } t$$

Исключая из полученных уравнений смешанную производную, получаем:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Используя соотношение $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ получим

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Аналогично можно получить волновое уравнение и для вектора H .

Другой вид волновых формул для электромагнитных волн

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2}$$

где $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ – оператор Лапласа,

v – фазовая скорость.

Еще один вариант записи волновых уравнений для
электромагнитных волн

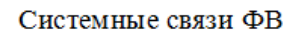
$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \ddot{\mathbf{E}} .$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \ddot{\mathbf{H}} .$$

$$v = c / \sqrt{\varepsilon \mu} , \quad c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} .$$

Оказалось, что $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, т. е. совпадает со скоростью света в вакууме. Это и дало основание Максвеллу предположить задолго до экспериментального подтверждения, что свет представляет собой электромагнитные волны.

A.C.Чуев. 2013
chuev@mail.ru



Соотношение E и B в плоской электромагнитной волне

$$E = E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

Из условия синфазности
векторов E и B в волне

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$kE_{\max} = \omega B_{\max}$$

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{\omega}{k} = c$$

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{E}{B} = c$$

В любой момент времени отношение напряженности электрического поля к величине магнитной индукции в электромагнитной волне равно скорости света в вакууме

Скорость распространения электромагнитных волн в среде зависит от ее электрической и магнитной проницаемостей. Величину

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad \text{называют}$$

абсолютным показателем преломления.

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$$

Показатель преломления есть физическая величина, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к их скорости в среде.

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E_y = \sqrt{\mu\mu_0} H_z.$$

Электромагнитные волны – поперечные волны

Изменения ***E*** и ***H*** синфазны!!!

Для плоской гармонической волны:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx), \quad H = H_m \cos(\omega t - kx),$$

ω — круговая (~~циклическая~~) частота колебаний,

k — волновое число ($k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны).

Соотношение E/H

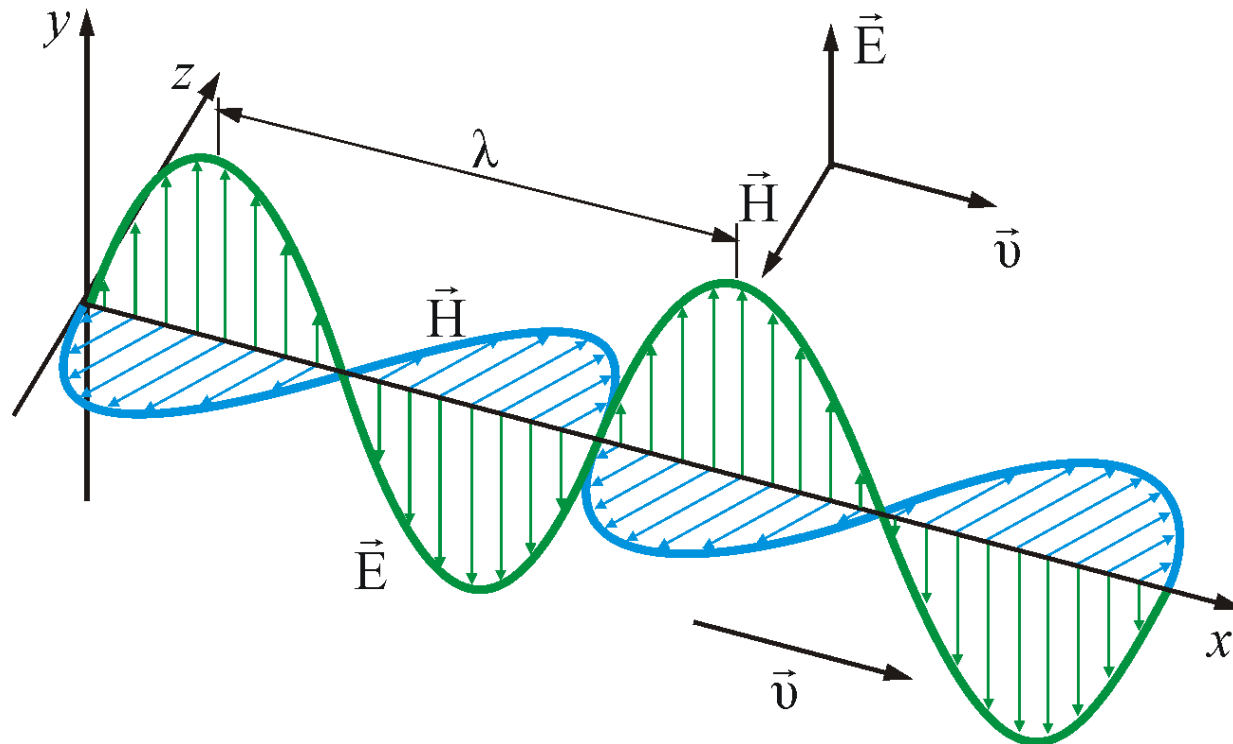
$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Для вакуума

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = R_{\text{ВАК}} \approx 377 \text{ Ом}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_m \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Для \mathbf{H} будет аналогичная запись.



Бабочка Максвелла

Стоячая электромагнитная волна

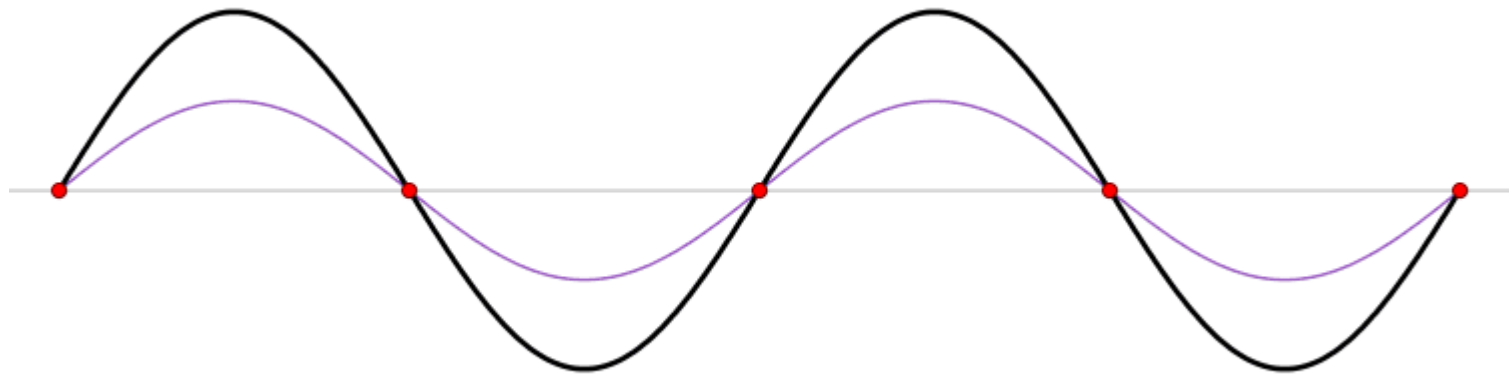
Уравнение встречной волны:

$$E_y = E_m \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_m \cos(\omega t + kx).$$

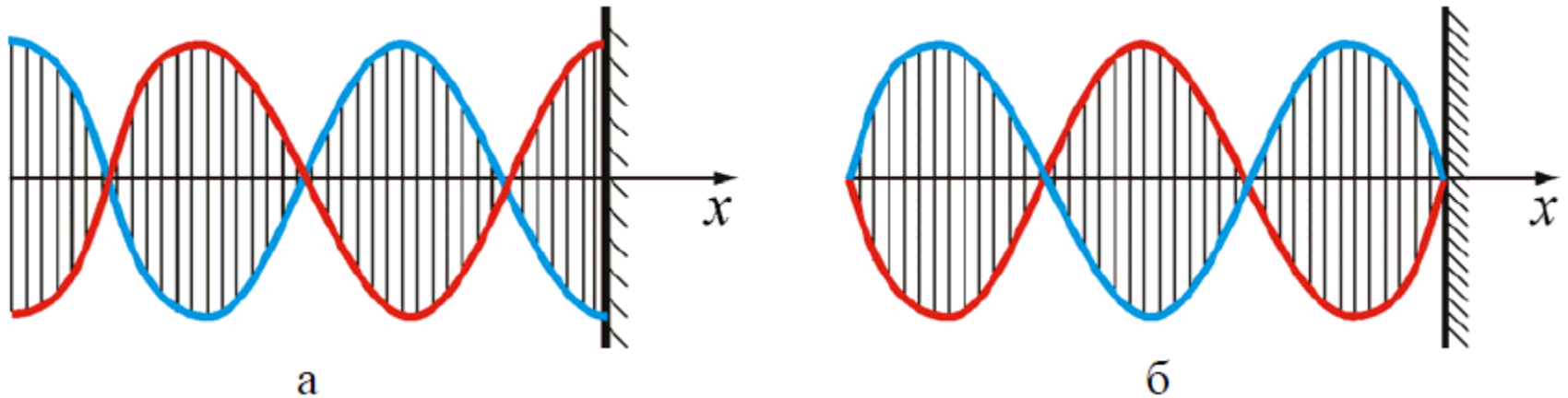
Результат наложения прямой и встречной волн:

$$E_y = 2E_m \cos kx \cdot \cos \omega t, \quad H_z = 2H_m \sin kx \cdot \sin \omega t.$$

Схема образования стоячей волны



Узлы и пучности стоячей волны



$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx) \end{aligned} \right\},$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right)$$

$$\xi = 2A \cos \omega t \cos kx = 2A \cos kx \cos \omega t$$

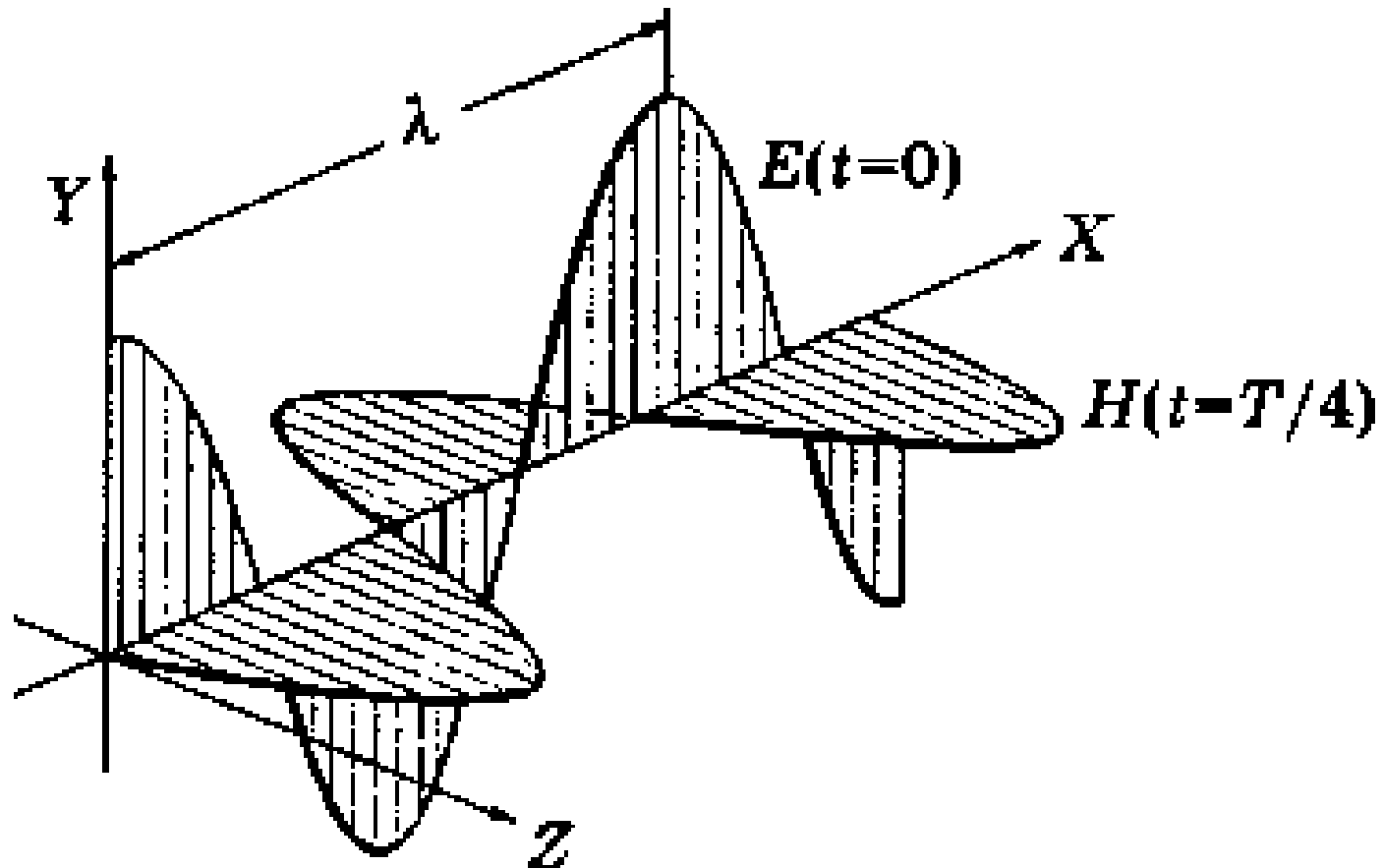
С учетом, $k = \frac{2\pi}{\lambda},$

Уравнение стоячей волны имеет вид:

$$\xi = 2A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \omega t .$$

Стоячие волны не переносят энергию !!!

Изображение стоячей ЭМ волны



Энергия электромагнитной волны

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Используя соотношения E с H , можно получить

$$w = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} EH = EH/v,$$

Умножив w на v , получим плотность потока энергии:

$$S = wv = EH.$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Вектор \mathbf{S} называют *вектором Пойнтинга*.

В случае бегущей гармонической электромагнитной волны

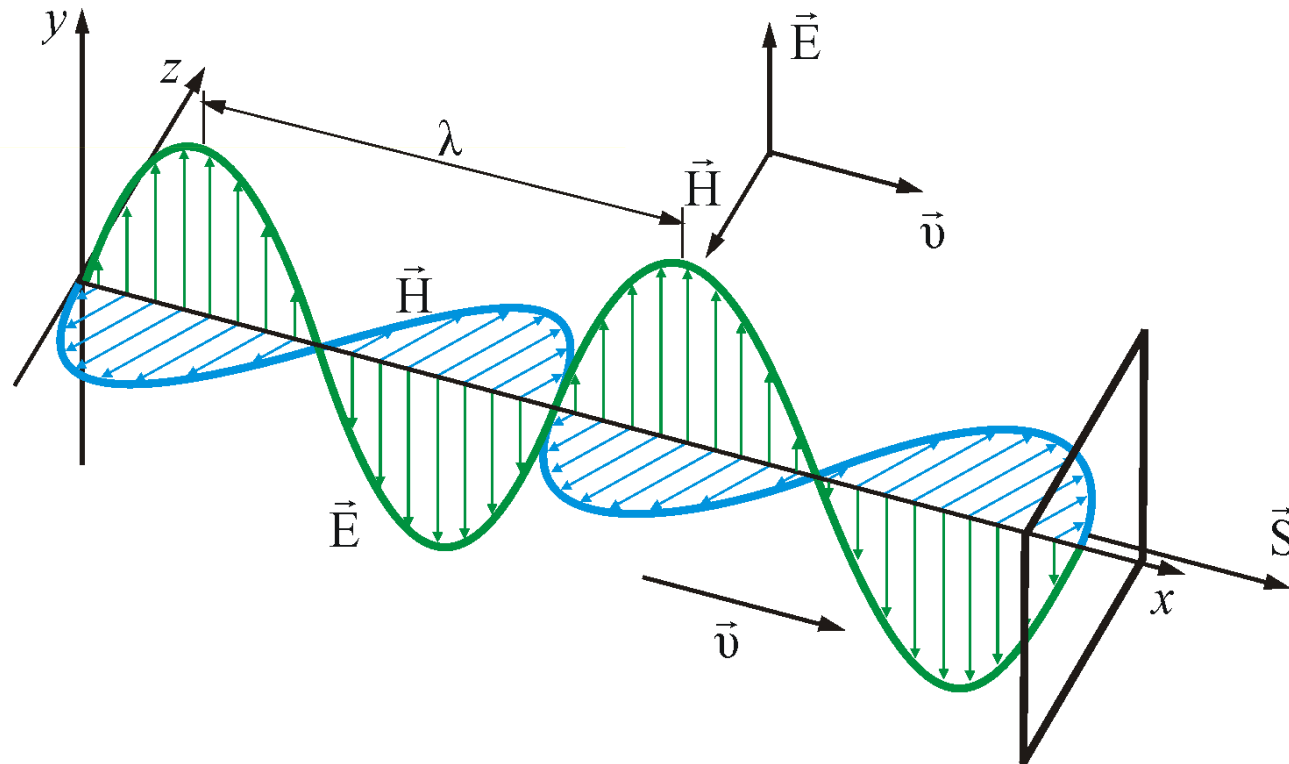
$$w = \epsilon\epsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v} = \sqrt{\epsilon\epsilon_0/\mu\mu_0} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx),$$

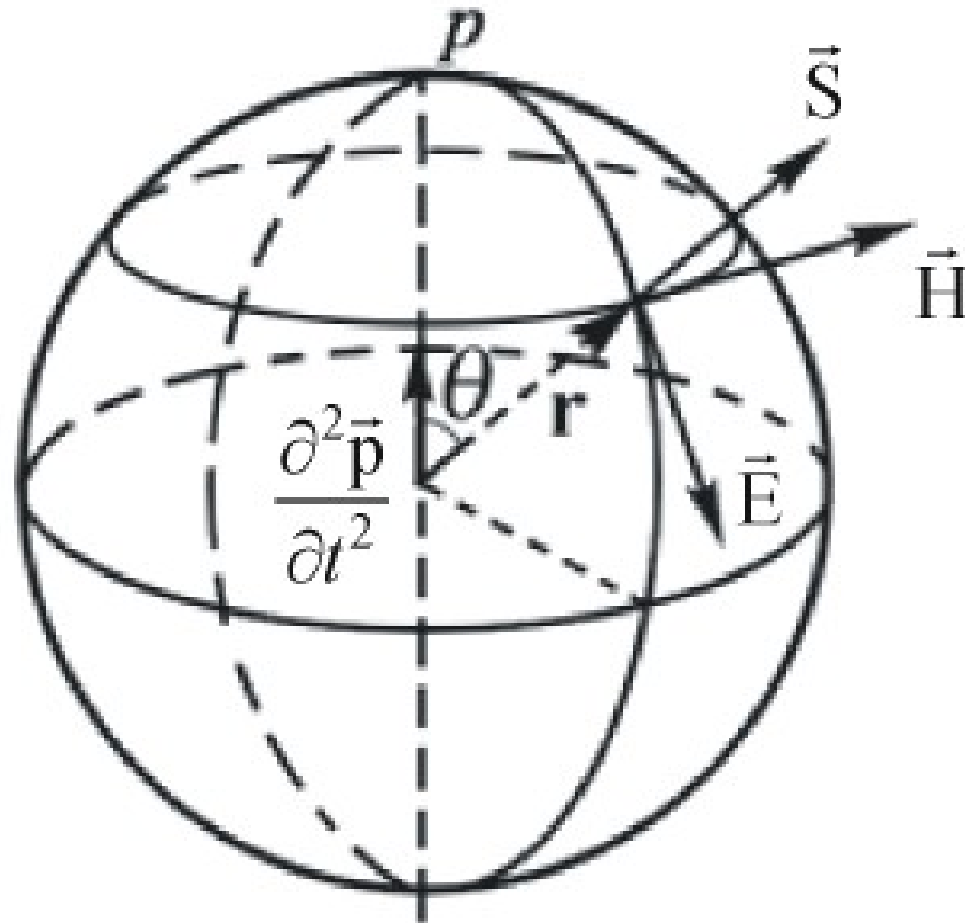
Квадрат косинуса = 1/2 Интенсивность: $I = \langle \mathbf{S} \rangle$.

В результате: $I = \sqrt{\epsilon\epsilon_0/\mu\mu_0} E_m^2/2.$

Вектор Пойнтинга \vec{S} направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.



Для сферической волны:



Теорема Пойнтинга

Из уравнений Максвелла можно получить:

$$\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = (\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \text{rot} \vec{E})$$

Преобразуем левую часть:

$$\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon \epsilon_0}{2} (\vec{E}, \vec{E}) + \frac{\mu \mu_0}{2} (\vec{H}, \vec{H}) \right) = \frac{\partial w}{\partial t}$$

Используя векторное тождество:

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = (\vec{H}, \text{rot} \vec{E}) - (\vec{E}, \text{rot} \vec{H}) \quad \text{и} \quad S = [\vec{E}, \vec{H}]$$

Получим уравнение баланса ЭМ энергии, переносимой ЭМ волной:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} S = 0$$

Это уравнение похоже на уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

где ρ - объемная плотность электрического заряда.

Применяя формулу Гаусса-Остроградского уравнение баланса энергии можно выразить в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V w dV \right) = - \oint_{\Sigma} S_N d\Sigma$$

Σ - обозначена площадь.

S_N - нормальная составляющая вектора Пойнтинга.

Это соотношение называют теоремой Умова-Пойнтинга.

Теорема Умова-Пойнтинга

Теорема Умова - Пойнтинга характеризует баланс энергии электромагнитного поля.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = \int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] d\mathbf{S} + \int_V \sigma E^2 dV,$$

σ - удельная проводимость

Левая часть этого выражения характеризует расход электромагнитной энергии за единицу времени, правая часть показывает, на что расходуется за единицу времени заключенная в объеме энергия.

Импульс электромагнитной волны

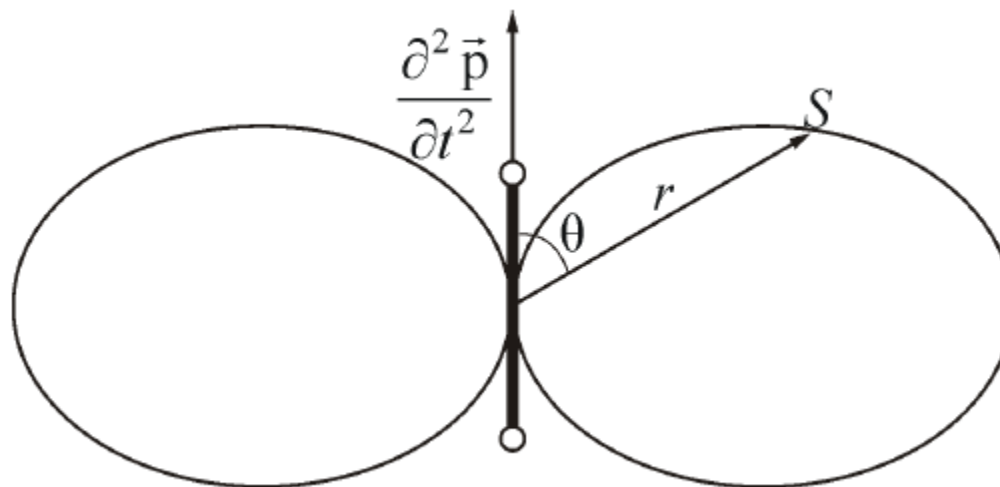
$$p = w/c,$$

где p и w — *плотности импульса и энергии*,

Умножив числитель и знаменатель на скорость света, получим:

$$p = [EH]/c^2.$$

Излучение диполя



Как показывает теория, мощность излучения P диполя определяется формулой

$$P = \alpha \ddot{\mathbf{p}}^2 ,$$

где $\alpha = \mu_0/6\pi c$ (СИ). Зная зависимость \mathbf{p} от t , получим:

$$P = \alpha \omega^4 p_m^2 \cos^2 \omega t.$$

средняя по времени мощность излучения диполя

$$\langle P \rangle = (\alpha/2) \omega^4 p_m^2.$$

Далее

Факультативный материал

Выражение полевых электромагнитных величин через «материальные»

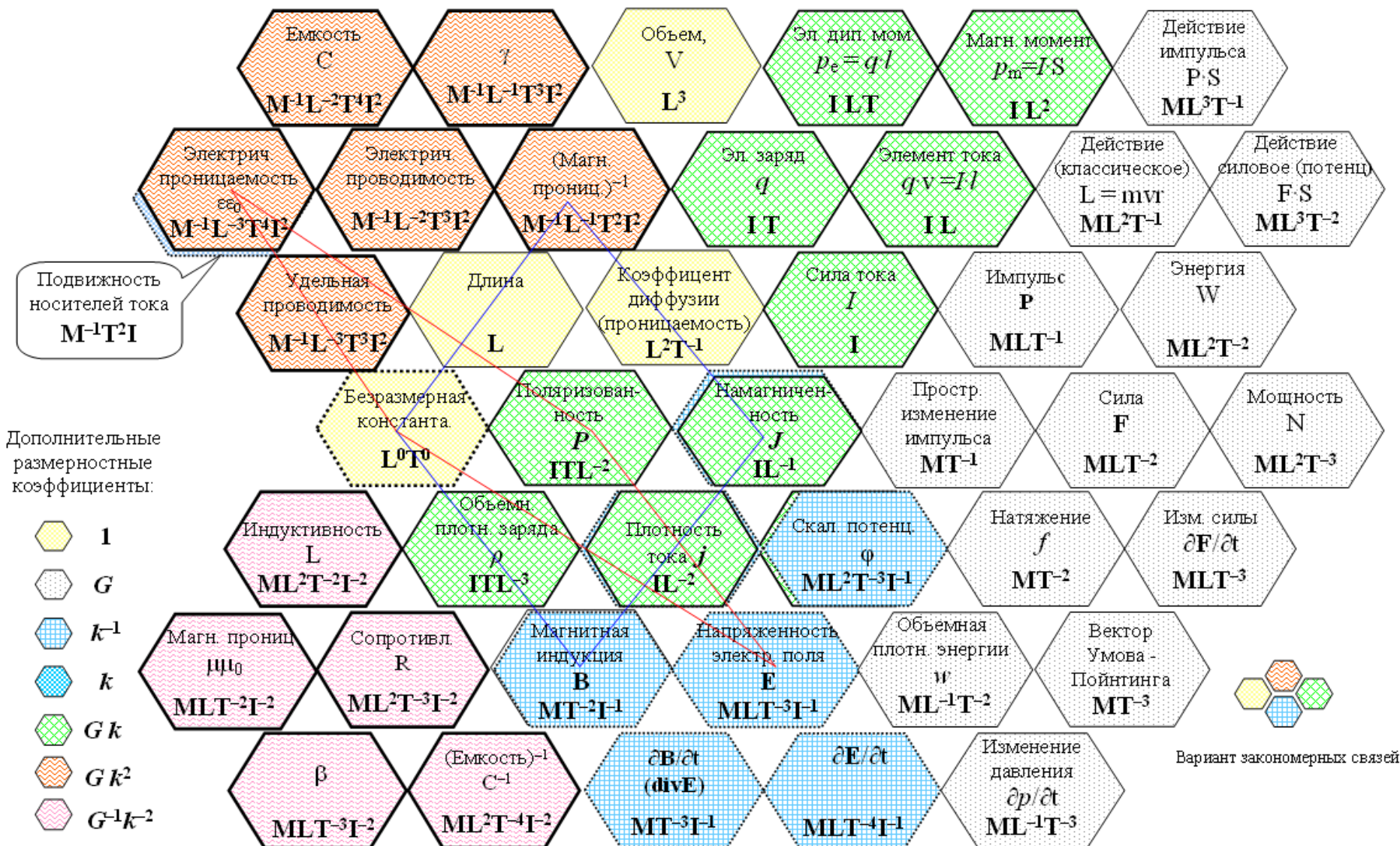
$$\vec{E} = \frac{\vec{P}_B}{\varepsilon_0}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_B$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{J}_B \times \vec{P}_B}{\varepsilon_0}.$$

$$\Delta \vec{J}_B = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{P}_B}{\partial t^2},$$

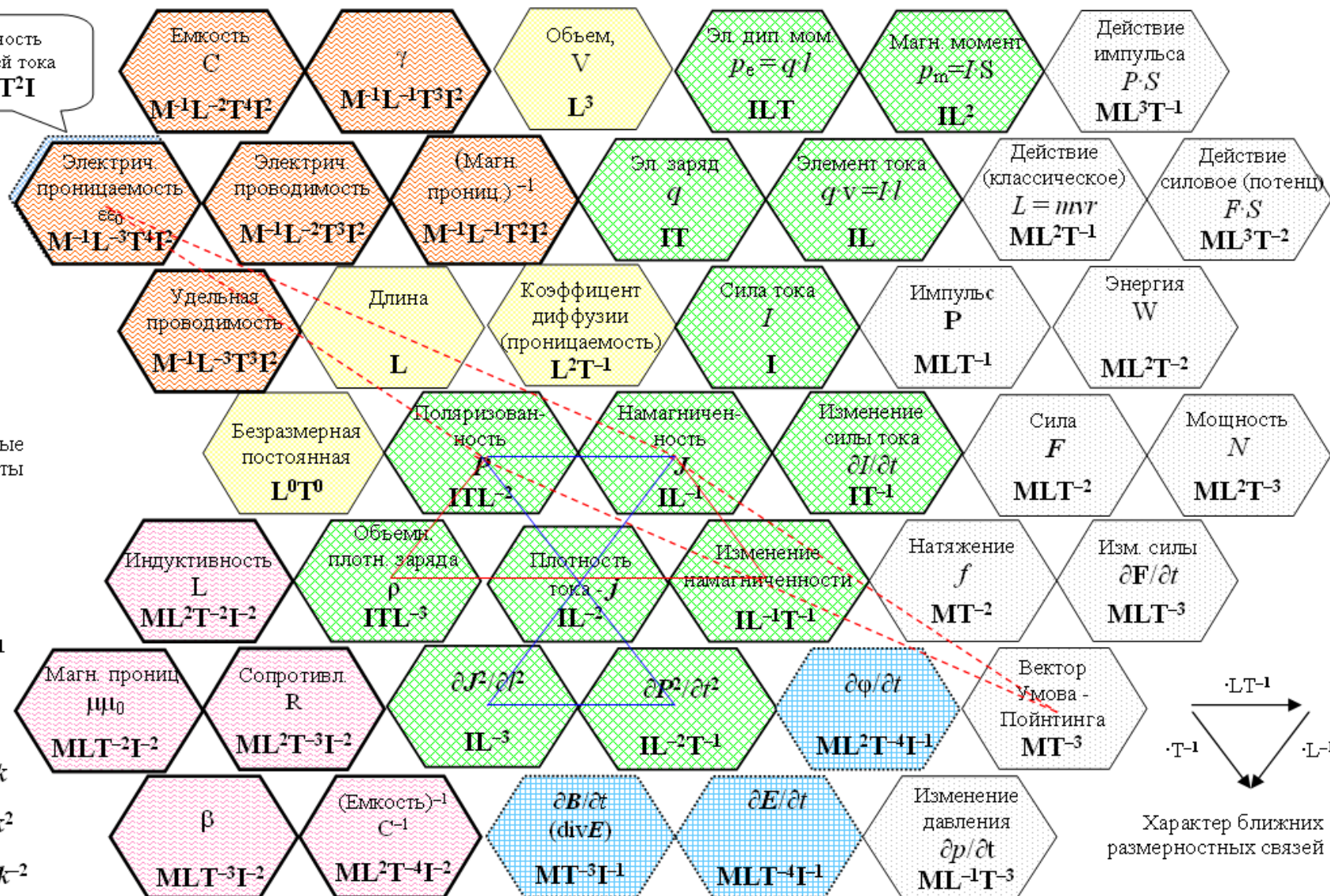
где: Δ - оператор Лапласа.

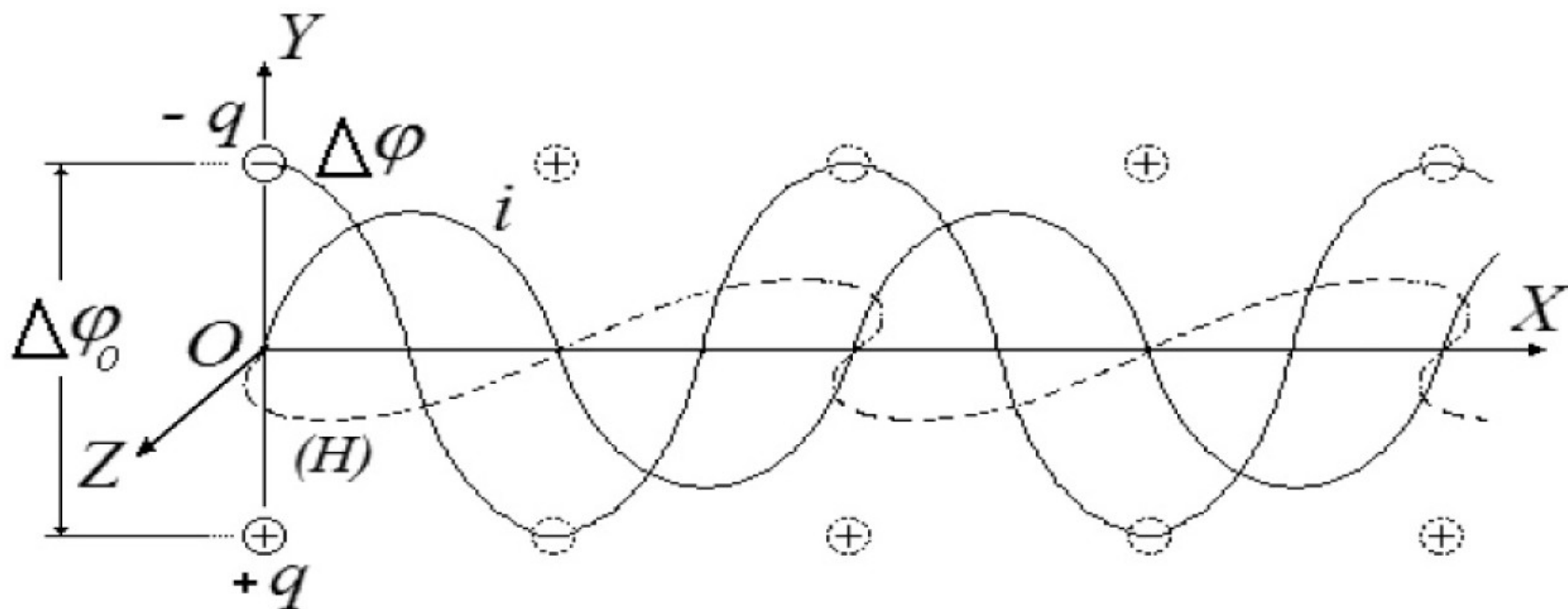
Схема образования полевых электромагнитных величин из соотношения материальных



Системные соотношения с участием физических величин поляризованность и намагниченность

Подвижность
носителей тока
 $M^{-1}T^1I$





Изображение электромагнитной волны по Канну

Наименование параметра или соотношения	Полевая форма представления	Возможные соотношения с участием «материальных» ФВ
Взаимосвязь полевых ФВ с «материальными» электромагнитными величинами	$\vec{E} = \frac{\vec{P}_B}{\varepsilon_0}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_B$	
Объемная плотность электрической энергии	$w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}$	$w = \frac{\vec{P}_B^2}{2\varepsilon_0}$
Объемная плотность магнитной энергии	$w = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$	$w = \frac{\mu_0 \vec{J}_B^2}{2}$
Объемная плотность электромагнитной энергии	От 0 до $\frac{\varepsilon_0 \vec{E}_{\max}^2}{2} + \frac{\vec{B}_{\max}^2}{2\mu_0}$	$w = \frac{J_B \cdot P_B}{R_B^{-1}}$
Вектор Умова-Пойнтинга	$\vec{s} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$	$\vec{s} = \frac{\vec{J}_B \times \vec{P}_B}{\varepsilon_0}$

Соотношения между разнотипными изменяющимися величинами	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0};$ для волн в вакууме $= 0$	$\operatorname{div} \vec{P} = \rho'_q = -\frac{1}{c} \left \vec{j}_{\text{cm}} \right ;$ для волн в вакууме $\neq 0$
	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{P}_B = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}_B}{\partial t}$
	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{J}_B = -\frac{\partial \left \vec{P}_B \right }{\partial t} = \left \vec{j}'_{\text{cm}} \right $
	$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{J}_B = \vec{\omega} \times \vec{P}_B = \vec{j}''_{\text{cm}}$
	$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \operatorname{rot} \vec{B}$	$\frac{\partial \vec{P}_B}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{J}_B$
	$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}$	$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -c^2 \operatorname{rot} \vec{P}_B$
Одномерное волновое уравнение с первыми производными	$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\frac{\partial P_B}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial J_B}{\partial t}$
Одномерные волновые уравнения с вторыми производными	$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 P_B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_B}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2 J_B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 J_B}{\partial t^2}$

СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

А.С.Чуев. 2013
chuev@mail.ru

