Занятие 6. Электромагнитные волны.



Для подготовки к семинару надо проработать

Лекция 10. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля.

ОЛ-1 (§10.1- 10.4), ОЛ-3 (§9.1- 9.3), ОЛ-4 (§10.1- 10.3), ДЛ-10,11,12.

Лекция 11. Электромагнитные волны.

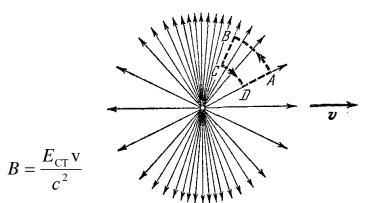
ОЛ-2 (§1.1- 1.2), ОЛ-4 (§10.4- 10.5), ОЛ-5 (§2.1- 2.5), ОЛ-6 (§2.1- 2.5), ДЛ-10,11,12.

- **ОЛ-1.** Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле. Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2013. 423 с.
- **ОЛ-2.** Литвинов О.С., Горелик В.С. Электромагнитные волны и оптика. Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. 448 с.
- ОЛ-3. Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для втузов. В 5 кн (кн.2). М.: Наука, 1998.
- **ОЛ-4.** Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 352 с.
- ОЛ-5. Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для втузов. В 5 кн (кн.4). М.: Наука, 1998.
- **ОЛ-6.** Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы. М.: Лаборатория базовых знаний, 1999. 256 с.
- ДЛ-10. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Теория и практика классической электродинамики. M.: URSS, 2014. 774 с.
- ДЛ-11. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Издательский центр «Академия», 2005. 720 с.
- ДЛ-12. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие для вузов. В 5 томах. М.: Физматлит, 2002..

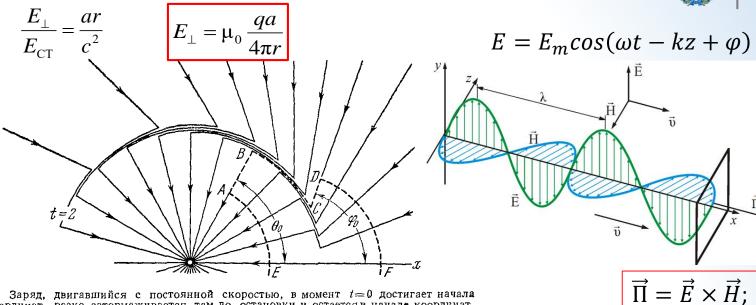
Краткие теоретические сведения



$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{q V}{4\pi r^2} = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{q V}{4\pi r^2}$$
 $\frac{E_{\perp}}{E_{CT}} = \frac{a r}{c_{\perp}^2}$



представление поля равномерно движущегося заряда.



Заряд, двигавшийся с постоянной скоростью, в момент t=0 достигает начала координат, резко затормаживается там до остановки и остается в начале координат.

Уравнения Максвелла:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} d\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S};$$

$$\oint_{S} \vec{D} d\vec{S} = \iint_{V} \rho dV;$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E};$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H};$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{c\tau}).$$

 $\Pi = wv = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 / \mu \mu_0} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx), \quad \langle \Pi \rangle = \frac{E_m^2}{2R_p};$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = 0 \qquad j_{\text{CM}} = \frac{dD}{dt}$$

$$j_{\rm CM} = \frac{dD}{dt}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E};$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H};$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{ct}).$$

$$Ct$$

$$R_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = c\mu_0 \approx 377 \text{ Om}$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$



Решение уравнений Максвелла:

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$
,

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_2}{r_{1-2}} dV_2$$

$$\vec{A}_{1} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{2}}{r_{1-2}} dV_{2}$$

- 1 точка наблюдения;
- 2 точка расположения источника поля.

Взаимосвязь полевых и «материальных» электромагнитных величин

$$ec{E} = rac{1}{arepsilon_0} ec{D} = rac{1}{arepsilon_0} (ec{D} - ec{P})$$
, где: $ec{P} = rac{\sum ec{p}_{
m q}}{V};$ $ec{D} = rac{\sum ec{p}_{
m q}^{
m \ Bupt}}{V}$ $ec{B} = \mu \mu_0 ec{H} = \mu_0 (ec{H} + ec{J})$, где: $ec{J} = rac{\sum ec{p}_{
m m}}{V};$ $ec{H} = rac{\sum ec{p}_{
m m}^{
m \ Bupt}}{V}$

Уравнения Пуассона:
$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

Физический смысл ε_0 и μ_0

$$\epsilon_{0} = C_{yz} = \frac{C_{bak}S}{V}; \quad \mu_{0} = L_{yz} = \frac{L_{bak}S}{V}$$

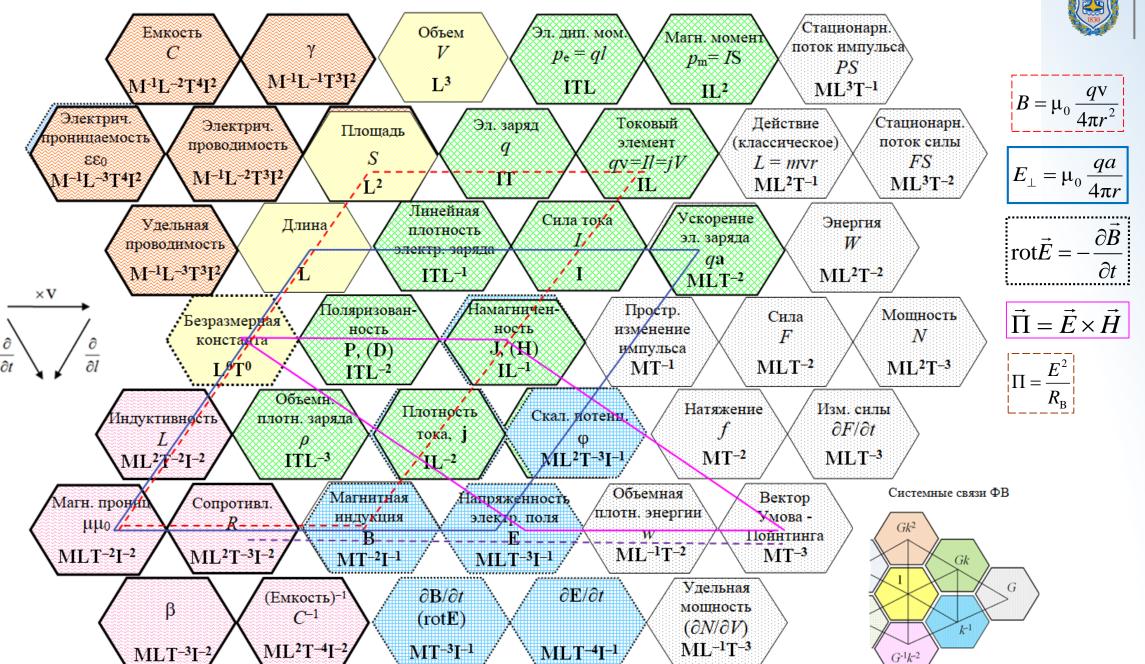
$$R_{BAK} = \sqrt{\frac{\mu_{0}}{\epsilon_{0}}}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{0}\mu_{0}}}$$

Для электрического контура:

$$R_{XAP} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \omega_{pe3} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Электромагнитные величины в системе ФВиЗ







Решение: Введём ось Z вдоль направления падения волны (рис.1). Тогда вектор Пойнтинга волны имеет координаты

$$\vec{\Pi} = (0,0,\Pi). \tag{1}$$

Величина вектора Пойнтинга с учётом того, что в плоской электромагнитной волне векторы \vec{E} и \vec{H} направлены перпендикулярно друг другу

$$\left| \overrightarrow{\Pi} \right| = \left| \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H} \right| = EH. \tag{2}$$

Для плоской электромагнитной волны величины напряженности магнитного и электрического поля связаны соотношением

$$H = \frac{E}{R_{\rm B}},\tag{3}$$

где

– волновое сопротивление среды, в которой распространяется волна.

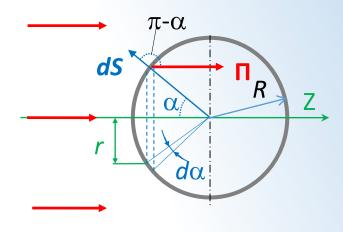


Рис. 1



Пусть уравнение электрической части волны имеет вид

$$E = E_m cos(\omega t - kz + \varphi), \qquad (5)$$

тогда величина вектора Пойнтинга

$$\left|\overrightarrow{\Pi}\right| = \frac{E_m^2}{R_B} \cos^2(\omega t - kz + \varphi).$$
 (6)

Среднее значение вектора Пойнтинга по времени равно

$$<\left|\overrightarrow{\Pi}\right|>=\frac{E_{m}^{2}}{2R_{R}}.$$
(7)

В координатной форме

$$\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = (0,0,\langle \Pi \rangle). \tag{8}$$

Т.к.

$$\langle |\overrightarrow{\Pi}| \rangle = |\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle| = \langle \Pi \rangle$$
,

то и в скалярном выражении

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_m^2}{2R_B} \ . \tag{9}$$

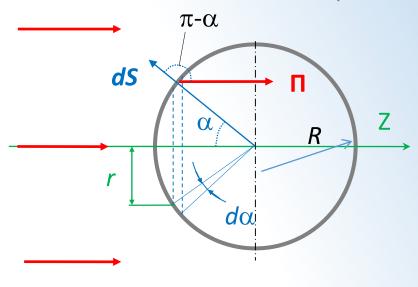
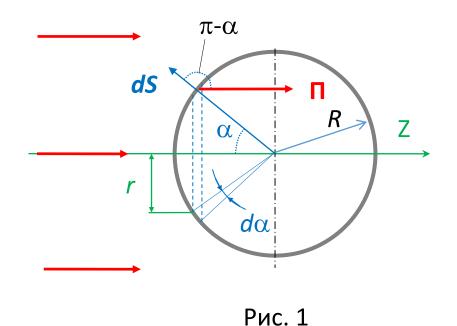


Рис. 1



Найдём среднее (по времени) значение потока вектора Пойнтинга через поверхность сферы (без учёта отражения).



Вводим угловую координату α (рис. 1). Тогда

$$\Phi_{\Pi} = \oiint_{S} \left(\overrightarrow{\Pi}, \overrightarrow{dS} \right) = \oiint_{S} \Pi \cos(\pi - \alpha) dS. \tag{10}$$

Угол α и величина П одинаковые на участках поверхности dS, образующих кольцо радиусом $r=Rsin\alpha$ и шириной $dl=Rd\alpha$. Площадь этого кольца

$$dS_{\rm K} = 2\pi r \cdot dl = 2\pi R \sin\alpha \cdot R d\alpha, \tag{11}$$

поэтому

$$\oiint_{S} (\vec{\Pi}, \vec{dS}) = \oiint_{S} \Pi \cos(\pi - \alpha) dS_{K} = -\int_{0}^{\pi/2} \Pi \cdot \cos\alpha \cdot 2\pi R \sin\alpha \cdot R d\alpha.$$
 (12)

Среднее (по времени) значение потока вектора Пойнтинга

$$\langle \Phi_{\Pi} \rangle = -\int_0^{\pi/2} \langle \Pi \rangle \cdot \cos\alpha \cdot 2\pi R \sin\alpha \cdot R d\alpha = -\langle \Pi \rangle \pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\alpha \cdot d\alpha \tag{13}$$

или, с учётом (9)

$$\langle \Phi_{\Pi} \rangle = -\frac{E_m^2}{2R_p} \pi R^2 \tag{14}$$

Знак минус в (14) показывает, что энергия втекает внутрь сферы.

Полная энергия, поглощенная шаром за время t, равна

$$W = |\langle \Phi_{\Pi} \rangle| t \tag{15}$$

или

$$W = \frac{E_m^2}{2R_B} \pi R^2 t \ . \tag{16}$$

Для немагнитной среды μ = 1.

Поэтому при ε = 4 волновое сопротивление среды примерно равно

$$R_B \equiv 60\pi \text{ Om}.$$

Тогда вычисления по (16) дают:

$$W \equiv 5000 \, \text{Дж}$$
.

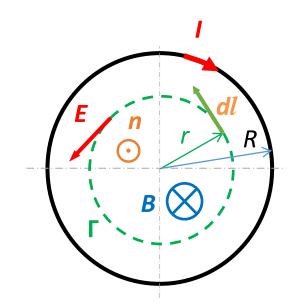
Простой вариант решения:

Среднее значение вектора Пойнтинга: $\Pi = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0} \frac{E_m^2}{2}}$

умножаем на сечение Миделя πR^2 и умножаем на заданное время t .

В результате получаем итоговую формулу $W=\sqrt{rac{arepsilon arepsilon_0}{\mu_0}}rac{E_m^2}{2}\pi R^2 t$, совпадающую с (16).

Задача 3.249. Синусоидальный ток частоты $\omega = 1000 \, c^{-1}$ течёт по обмотке соленоида, радиус сечения которого $R = 6,0 \, \mathrm{cm}$. Найти отношение амплитудных значений электрической и магнитной энергий внутри соленоида.



Решение: Пусть сила тока в обмотке соленоида зависит от времени

$$I = I_0 sin(\omega t). \tag{1}$$

Предполагаем, что окружающая среда — вакуум. Ток создаёт внутри соленоида магнитное поле, индукция которого равна

$$B = \mu_0 nI. \tag{2}$$

Применим закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dl} \right) = -\frac{d}{dt} \iint_{S} \left(\vec{B}, \overrightarrow{dS} \right). \tag{3}$$

Рис. 2

Выберем в качестве контура Г соосную окружность радиуса r < R в поперечном сечении соленоида (рис. 2) с выбранным направлением касательного вектора \overrightarrow{dl} и согласованным с ним направлением нормали \overrightarrow{n} к площадки круга, ограниченного контуром Г.

Тогда для выбранного на рисунке 2 направления вектора $ec{B}$

$$\iint_{S} \left(\vec{B}, \vec{dS} \right) = -B\pi r^2 \tag{4}$$

и направления вектора $ec{E}$

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dl} \right) = E2\pi r \tag{5}$$

Выражение (3) с учётом (4) и (5) имеет вид:

$$E2\pi r = \frac{d}{dt}(B\pi r^2). \tag{6}$$

С учетом (2) и (1) выражение (6) можно записать

$$E = \frac{r}{2} \mu_0 n \omega I_0 \cos(\omega t). \tag{7}$$

Т.е. электрическое поле внутри соленоида в любой момент времени является переменным и **неоднородным** (зависит от r).

Объёмная плотность энергии электрического поля с учётом (7)

$$w_{\mathfrak{I}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 (\mu_0 n \omega I_0)^2}{8} r^2 \cos^2(\omega t) \tag{8}$$

Полная энергия электрического поля будет равна

$$W_{\mathfrak{I}} = \iiint_{V} w_{\mathfrak{I}} dV \tag{9}$$

Пусть длина соленоида равна l, тогда выбираем элементарный объём в виде

$$dV = 2\pi r l dr . (10)$$

Подставляя (8) и (10) в (9), получим

$$W_{\mathfrak{I}} = \int_{0}^{R} \frac{\varepsilon_{0}(\mu_{0}n\omega I_{0})^{2}}{8} r^{2}cos^{2}(\omega t) 2\pi r l dr = \frac{\pi l \varepsilon_{0}(\mu_{0}n\omega I_{0})^{2}}{16} R^{4}cos^{2}(\omega t). \tag{11}$$

Следовательно, максимальное значение энергии электрического поля

$$W_{\Im max} = \frac{\pi l \varepsilon_0 (\mu_0 n \omega I_0)^2}{16} R^4 . \tag{12}$$

Объёмная плотность энергии магнитного поля с учётом (1) и (2)

$$w_{\rm M} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I_0^2 sin^2(\omega t) . \tag{13}$$

Т.к. магнитное поле внутри соленоида в любой момент времени является **однородным** (не зависит от r), то энергия магнитного поля внутри соленоида, объём которого $V=\pi R^2 l$, с учётом (13) равна

$$W_{\rm M} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_0^2 \pi R^2 l sin^2(\omega t) . \tag{14}$$

Следовательно, максимальное значение энергии магнитного поля

$$W_{\text{M }max} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_0^2 \pi R^2 l . \qquad (15)$$

Тогда отношение амплитудных значений электрической и магнитной энергий внутри соленоида:

$$\frac{W_{\Im max}}{W_{Mmax}} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2 \omega^2}{8} \,. \tag{16}$$

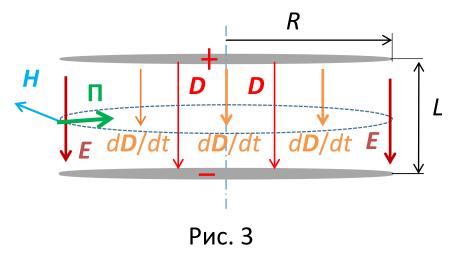
Т.к. $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, где $c = 3.10^8$ м/с - скорость света в вакууме, то выражение (16) примет вид

$$\frac{W_{\Im max}}{W_{M max}} = \frac{R^2 \omega^2}{8c^2} = 5 \cdot 10^{-15}.$$
 (17)

Таким образом, можно сделать вывод, что в соленоиде энергия магнитного поля в значительной степени превышает энергию электрического поля.

Задача 3.250. Плоский конденсатор с круглыми параллельными пластинами медленно заряжают. Показать, что поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии конденсатора за единицу времени. Рассеянием поля на краях при расчёте пренебречь.

Решение: Пусть радиус пластин конденсатора равен R. Расстояние между пластинами L.



Если конденсатор заряжается, то величина заряда пластин увеличивается, поэтому длина вектора электрического смещения \vec{D} увеличивается. Вектор $\frac{d\vec{D}}{dt}$ направлен также как и вектор \vec{D} (рис.3). Применим теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint_{\Gamma} \left(\overrightarrow{H}, \overrightarrow{dl} \right) = I + \frac{d}{dt} \iint_{S} \left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{dS} \right). \tag{1}$$

В данном случае ток проводимости отсутствует

$$I=0, (2)$$

а ток смещения определяется только производной от вектора электрического смещения

$$\frac{d}{dt}\iint_{S} \left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{dS}\right) = \iint_{S} \left(\frac{d\overrightarrow{D}}{dt}, \overrightarrow{dS}\right). \tag{3}$$

В поперечной плоскости боковая поверхность конденсатора даёт окружность Г радиуса *R*. Пусть ориентация окружности Г согласована с ориентацией поверхности круга внутри,

тогда (1) с учётом (3) примет вид

$$H2\pi R = \frac{dD}{dt}\pi R^2, \qquad (4)$$

откуда

$$H = \frac{dD}{dt} \frac{R}{2}.$$
 (5)

На боковой поверхности конденсатора вектор Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{6}$$

направлен внутрь конденсатора. Его величина постоянная в данный момент времени на боковой поверхности

$$\Pi = EH = E \frac{dD}{dt} \frac{R}{2}.$$
 (7)

Пусть боковая поверхность конденсатора ориентирована вовнутрь, тогда поток вектора Пойнтинга, совпадающий по размерности с мощностью, равен

$$\Phi_{\Pi} = \iint_{S} \left(\overrightarrow{\Pi}, \overrightarrow{dS} \right) = \Pi 2\pi R L = E \frac{dD}{dt} \pi R^{2} L . \tag{8}$$

Для исследования выражения (8) надо учесть следующее:

$$D = \varepsilon_0 E . (9)$$

Объёмная плотность энергии электрического поля:

$$w_{\mathfrak{I}} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}. \tag{10}$$

Объём пространства между обкладками конденсатора:

$$V = \pi R^2 L . \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует выражение для полной энергии конденсатора

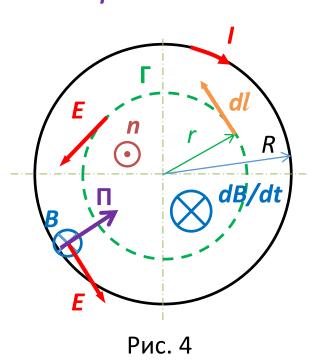
$$W = w_{\mathfrak{I}}V = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} \pi R^2 L. \tag{12}$$

Продифференцируем (12) по времени с учётом (9)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) \pi R^2 L = \varepsilon_0 E \frac{dE}{dt} \pi R^2 L = E \frac{dD}{dt} \pi R^2 L . \tag{13}$$

Конечные выражения (13) и (8) совпадают, значит задача выполнена.

Задача 3.253. Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, достаточно медленно увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.



Решение: Предполагаем, что окружающая среда — вакуум. Пусть радиус витков соленоида равен R, а его длина — l. Ток создаёт внутри соленоида магнитное поле, индукция которого равна

$$B = \mu_0 n I. \tag{1}$$

Применим закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dl} \right) = -\frac{d}{dt} \iint_{S} \left(\vec{B}, \overrightarrow{dS} \right). \tag{2}$$

Выберем в качестве контура Г соосную окружность радиуса r < R в поперечном сечении соленоида (рис. 4), с выбранным направлением касательного вектора \overrightarrow{dl} и согласованным с ним направлением нормали \overrightarrow{n} к площадки круга, ограниченного контуром Г. Тогда для выбранного на рис. 4 направления вектора \overrightarrow{E}

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dl} \right) = E2\pi r . \tag{3}$$



Т.к. ток медленно увеличивается, то величина индукции поля увеличивается, поэтому вектор $\frac{d\vec{B}}{dt}$ направлен **так же** как и вектор \vec{B} . Тогда

$$\frac{d}{dt}\iint_{S} (\vec{B}, \vec{dS}) = \iint_{S} \left(\frac{d\vec{B}}{dt}, \vec{dS} \right) = -\frac{dB}{dt} \pi r^{2} . \quad (4)$$

Выражение (2) с учётом (3) и (4)

$$E2\pi r = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

или

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \ . \tag{5}$$

Вблизи боковой поверхности $(r \to R)$ вектор Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{6}$$

направлен внутрь соленоида. Его величина в определенный момент времени на боковой поверхности соленоида

$$\Pi = EH = \frac{R}{2} \frac{dB}{dt} H. \tag{7}$$



С учётом ориентации потока энергии через боковую поверхность соленоида (из вне вовнутрь), искомый поток вектора Пойнтинга равен

$$\Phi_{\Pi} = \iint_{S} \left(\overrightarrow{\Pi}, \overrightarrow{dS} \right) = \Pi 2\pi R l = \frac{dB}{dt} H \pi R^{2} l. \tag{8}$$

Для исследования выражения (8) надо учесть следующее:

$$B = \mu_0 H. \tag{9}$$

Объёмная плотность энергии магнитного поля:

$$w_{\rm M} = \mu_0 \frac{H^2}{2}. (10)$$

Объём пространства соленоида:

$$V = \pi R^2 l. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует выражение для полной энергии соленоида

$$W = w_{\rm M}V = \mu_0 \frac{H^2}{2} \pi R^2 l. \tag{12}$$

Продифференцируем (12) по времени с учётом (9):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mu_0 \frac{H^2}{2} \right) \pi R^2 l = \mu_0 H \frac{dH}{dt} \pi R^2 l = H \frac{dB}{dt} \pi R^2 l.$$
 (13)

Конечные выражения (8) и (13) совпадают, значит задача выполнена.



Для закрепления знаний по теме данного семинара дома следует самостоятельно решить следующие задачи, которые рекомендуются учебным планом

Домашнее задание

Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998 - 2001,

Дома: ОЛ-7 задачи 3.243, 3.245 или ОЛ-8 задачи 4.227, 4.229...

ОЛ-7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2001.

ОЛ-8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Наука, 1988.



3.243. В вакууме вдоль оси x распространяются две плоские одинаково поляризованные волны, электрические составляющие которых изменяются по закону $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \cos{(\omega t - kx)}$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \cos{(\omega t - kx + \phi)}$. Найти среднее значение плотности потока энергии.

$$\langle \Pi \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 (1 + \cos \varphi)$$

3.245. Шар радиуса R = 50 см находится в немагнитной среде проницаемости $\varepsilon = 4.0$. В среде распространяется плоская электромагнитная волна, длина которой $\lambda << R$ и амплитуда электрической составляющей $E_m = 200$ В/м. Какая энергия падает на шар за время t = 60 с?

W =
$$(\sqrt{\epsilon\epsilon_0/\mu_0}E_m^2\pi R^2t)\frac{1}{2}=5$$
 кДж



Спасибо за внимание