№1 Вывод основного уравнения динамики вращательного движения из уравнения моментов.

Момент импульса твердого тела при вращательном движении вокруг оси z вычисляется как

$$L_z = I_z w$$

Тогда уравнение динамики вращательного движения примет вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z w)$$

Если тело твердое, то $I_z = const$, поэтому, с учетом того, что $\frac{dw}{dt} = \varepsilon$:

$$\underline{\varepsilon \cdot I_z = M_z^{внешн.}}$$

Это уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

Угловое ускорение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси прямо пропорционально величине момента внешних сил относительно этой оси.

② Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести (в общем случае и для однородного поля, с выводом)

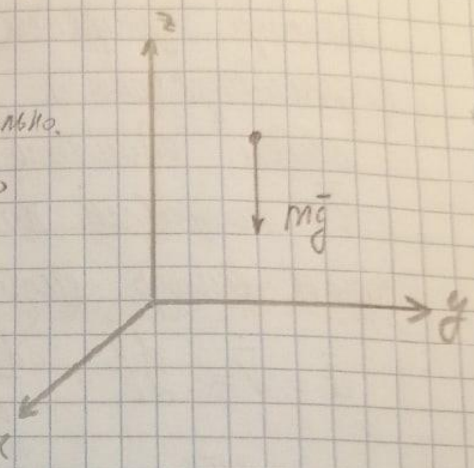
Для силы тяжести $F_T = mg$ потенциальная энергия $W_п = mgh$

h — определяется выбором начала отсчета энергии.

Проверим соотношение $F = -grad W$

В системе отсчёта, связанной с землёй, введем систему координат так, чтобы ось z была направлена вверх, тогда потенциальная энергия тела равна $W_п = mgz + C$

C — определяется началом отсчета координаты z.



$z = const \Rightarrow$ вектор силы направлен перпендикулярно плоскости z, т.е. вертикально.

Величина энергии увеличивается вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вектор силы направлен вниз

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -mg$$

$\Downarrow$

$\bar{F}(0; 0; -mg)$

$$W_п^{нач} - W_п^{кон} = A_{гр} = mgh$$

$$A_{гр} = \int F_{гр} dS = \int mg dS = mgh$$

$$W_п^{гр} = mgh$$

Найдем $W_{пот}$ для $F_{грав} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$

Пусть $\bar{R}$ в системе отсчета связан с точкой m_1 $\Rightarrow$ $\bar{F}_{грав}$, действующий на материальную точку m_2, направлен противоположно: $\bar{F}_{грав} = -G\frac{m_1 m_2}{R^2}\bar{e}_{\bar{R}}$,

где $\bar{e}_{\bar{R}} = \frac{\bar{R}}{|R|}$

т.к. $\bar{F}_{грав}$ – консервативная сила, то

$$\int(\bar{F}, d\bar{r}) = W_{пот}^{нач} - W_{пот.}^{кон}$$

Этот интеграл не должен зависеть от траектории, поэтому будем интегрировать вдоль радиус-вектора $d\bar{r} = d\bar{R}$. $\bar{F}_{грав} \uparrow\downarrow \bar{R}$ $\Rightarrow$

$$(\bar{F}_{грав}, d\bar{r}) = -F_{грав}\, dR$$

$$\int(\bar{F}_{грав}\, d\bar{r}) = \int_{R_{нач}}^{R_{кон}}(-F_{грав}\, dR) = \int_{R_{нач}}^{R_{кон}}\left(-\frac{G m_1 m_2}{R^2}\, dR\right) = G\frac{m_1 m_2}{R}\Bigg|_{R_{нач}}^{R_{кон}} =$$

$$= G\frac{m_1 m_2}{R_{кон}} - G\frac{m_1 m_2}{R_{нач.}}$$

Сравним: $W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон} = G\frac{m_1 m_2}{R_{кон}} - G\frac{m_1 m_2}{R_{нач}}$

$$W_{пот\ грав} = -G\frac{m_1 m_2}{R} + C \quad (\text{обычно } C = 0).$$

$$W_{пот} = \int F_{сопр}\, dS = A_{сопр}$$