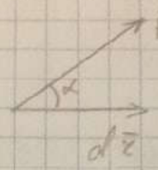
Билет №8.

① Работа. Кинетическая энергия. Связь работы и изменения кинетической энергии.

Работой постоянной силы $\bar{F}$, действующей на материальную точку, при малом перемещении $d\bar{r}$ этой точки называют произведение $A = (\bar{F}, d\bar{r}) = |\bar{F}||\bar{r}| \cos\alpha$.

$\angle\alpha = \angle(\widehat{\bar{F}, d\bar{r}})$



$A = [\text{Дж}]$

Работа переменной силы.

$$A = \int\limits_{\text{путь}} (\bar{F}, d\bar{r}) = \int\limits_{\text{путь}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (3)$$

$d\bar{r} = (dx, dy, dz)$

Связь работы и изменения кинетической энергии.

Рассмотрим движение материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчета. Второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} \quad |\cdot d\bar{r}$$

$$\left(m\frac{d\bar{V}}{dt}, d\bar{r}\right) = (\bar{F}, d\bar{r})$$

Интегрируем.

$$\int\limits_{\text{путь}} \left(m\frac{d\bar{V}}{dt}; d\bar{r}\right) = \int\limits_{\text{путь}} (\bar{F}, d\bar{r}) \quad (1)$$

$$\left(m\frac{d\bar{V}}{dt}, d\bar{r}\right) = \left(m\frac{d\bar{V}}{dt}, \bar{V}dt\right) = m\left(\frac{d\bar{V}}{dt}, \bar{V}\right)dt = \frac{m}{2}\left[\frac{d}{dt}(\bar{V}, \bar{V})\right]dt = d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$$

тогда

$$\int\limits_{\text{путь}} \left(\frac{m\,d\bar{V}}{dt}; d\bar{r}\right) = \int\limits_{\text{путь}} \left(d\frac{mV^2}{2}\right) = \left(\frac{mV^2}{2}\right)_{\text{кон}} - \left(\frac{mV^2}{2}\right)_{\text{нач}} \quad (2)$$

$$(1; 2; 3) \Rightarrow W_{\text{кин}}^{\text{кон}} - W_{\text{кин}}^{\text{нач}} = A.$$

Теорема (о изменении кинетической энергии)
Изменение кинетической энергии материальной точки на участке пути равно работе действующих на нее сил на этом участке.

Кинетической энергией материальной точки массы m, которая движется со скоростью V, называется величина $W_{кин} = \frac{mV^2}{2}$

② Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесие. Квазиупругая сила. Д-иффиренциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его решение

Устойчивое равновесие - равновесие, при малых смещениях тела из положения равновесия, тело будет стремиться в исходное положение

Неустойчивое равновесие - равновесие, которое при малом отклонении от положения равновесия возникает сила, стремящая увести тело от положения равновесия.

Равновесие называется безразличное, если при небольшом отклонении тела из положения равновесия, равнодействующая сила равна 0.

Выражение для консервативной силы вблизи положения устойчивого равновесия можно записать в векторной форме $\bar{F} = -k_0 \Delta \bar{x}$, а величину потенциальной энергии $W = \frac{1}{2} k_0 \Delta x^2 + const$, где $k_0 = \left(\frac{d^2 W}{d x^2}\right)_{x = x_0}$

Такая форма записи для консервативной силы вблизи точки называется квазиупругой силы.

Запишем II Закон Ньютона для тела, движущегося под действием квазиупругой силы вблизи точки устойчивого положения равновесия.

$$\left.\begin{array}{l} ma_x = F_x \\ F_x = -k_0(x - x_0) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} ma_x = -k(x - x_0) \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} ma_x = -k_0 x \\ a_x = \ddot{x} \end{array}\right\} m\ddot{x} = -k_0 x$$

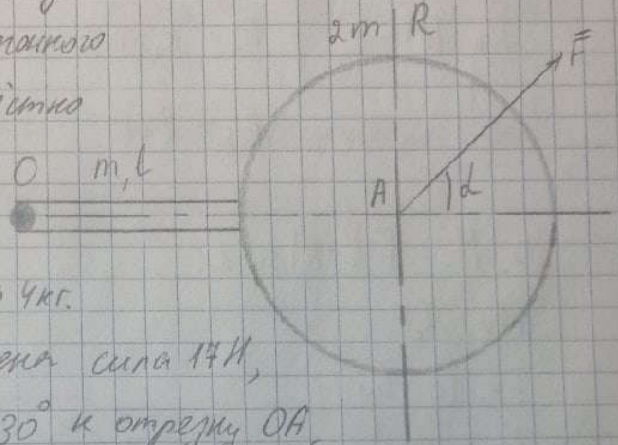
Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний $\rightarrow$ $\ddot{x} + w_0^2 x = 0$

$w_0^2 = \frac{k_0}{m} > 0.$

Решение: $x = A\cos(w_0 t + \alpha)$ или $x = A\sin(w_0 t + \beta)$

при $x_0 = 0$.

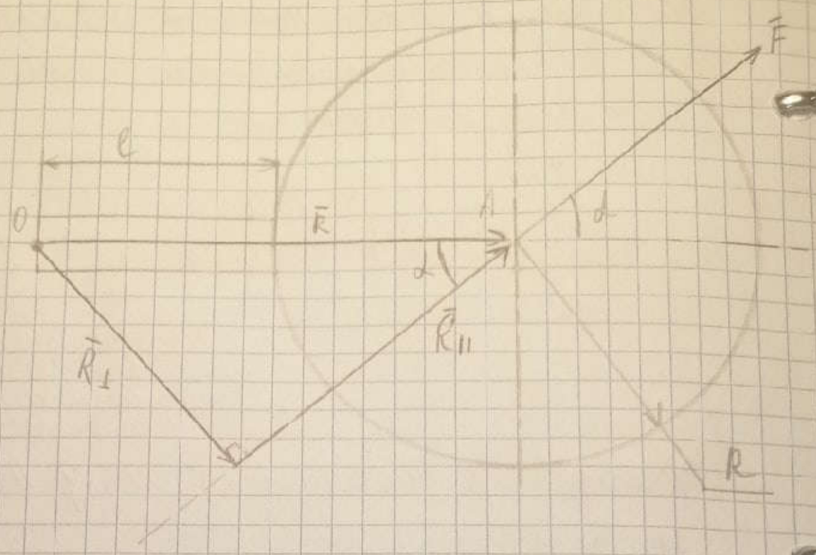
③ Изображенное на рисунке твердое тело состоит из тонкого стержня длиной l и жестко прикрепленного к нему диска радиусом R. Масса стержня равна массе диска и равна 4кг.



К центру диска приложена сила 17Н, направленная под углом 30° к отрезку OA. Стержень, диск и сила расположены в плоскости рисунка.

Тело может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O. Найдите его угловое ускорение, если известно, что $l = R = 25$ см.

Дано:
$m_c = m_д = 4кг = m$
$F = 17$ Н
$\alpha = 30^\circ$
$l = R = 25$ см $= 0{,}25$ м
ε - ?



$$M_c = M_д$$

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_{\perp} + \bar{R}_{\parallel}$$
$$\bar{R}_{\perp} \perp \bar{F}$$
$$\bar{R}_{\parallel} \parallel \bar{F}$$

$$\Rightarrow \bar{M}_c(\bar{F}) = \bar{R}_1 \times \bar{F} = \bar{R}_{\perp} \times \bar{F} \Rightarrow M_c = R_{\perp} \cdot F \Big\} M_c = F R_1 \sin\alpha$$
$$R_{\perp} = R_1 \sin\alpha$$
$$R_1 = l + R \quad \Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_c = F(l+R)\sin\alpha.$$

$$M_д = I\varepsilon$$
$$I = I_c + I_ш$$
$$I_c = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$
$$I_ш = \frac{mR^2}{2} + m(l+R)^2 = \frac{m}{2}\left(R^2 + 2(l+R)^2\right)$$
$$\Big\} M_д = \frac{m}{6}\left(2l^2 + 3R^2 + 6(l+R)^2\right)\varepsilon$$

$$F(l+R)\sin\alpha = \frac{m}{6}\left(2l^2 + 3R^2 + 6(l+R)^2\right)\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{6F(l+R)\sin\alpha}{m(2l^2+3R^2+6(l+R)^2)} = \frac{6 \cdot 2Fl\sin\alpha}{m(2l^2+3l^2+24l^2)} = \frac{12Fl\sin\alpha}{m\,29l^2} = \frac{12F\sin 30}{29ml} =$$
$$= \frac{6F}{29ml} = \frac{6 \cdot 17}{29 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{102}{29} = 3\frac{15}{29} \approx 3{,}5 \,[рад/с^2]$$

Ответ: $[3{,}5$ рад$/с^2]$