

ВАРИАНТ 1

- (2 балла) Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(x + y^2)$; найти и изобразить линию уровня этой функции, проходящую через точку $(-3, 2)$.
- (2 балла) Для функции $u = y^3 + \sqrt{z^2 - x^2}$ в точке $M(3, 0, -5)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
- (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \cos \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^4} \right) ?$$

Ответ обосновать.

- (3 балла) Вычислить все частные производные второго порядка от функции $u = e^{xy} \sin z$.
- (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1; 2; -1)$ задана уравнением

$$z^3 + xz + y = 0.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1; 2)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(0,9; 2,2)$.

ВАРИАНТ 3

- (2 балла) Найти и изобразить область определения функции $z = \ln \sqrt{x^2 - y^2}$; найти и изобразить линию уровня этой функции, проходящую через точку $(-1, 0)$.
- (2 балла) Для функции $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ в точке $M(1, -2, 2)$ найти градиент и производную в направлении вектора \vec{MN} , если $N(3, 0, 3)$.
- (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \exp \left(x - \frac{1}{y^2} \right) ?$$

Ответ обосновать.

- (3 балла) Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z = f(u(x, y), v(x, y))$, если $f = \operatorname{tg}(u - v)$, $u = \operatorname{arctg} xy$, $v = \operatorname{arctg}(x/y)$.
- (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, 1, 0)$ задана уравнением

$$xy - z = e^z.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1, 1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(0,9; 1,2)$.

ВАРИАНТ 2

- (2 балла) Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = x^2 + y^2 - z^2$, проходящую через точку $(1, -1, 1)$.
- (2 балла) Для функции $z = xe^{xy}$ в точке $M(1, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.
- (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^x \sin y ?$$

Ответ обосновать.

- (3 балла) Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
- (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(-2, 1, 1)$ задана уравнением

$$\sin(x + y + z) = 2z + x.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(-2, 1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(-2, 1; 0,9)$.

ВАРИАНТ 4

- (2 балла) Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = 1 - z - x^2 - y^2$, проходящую через точку $(2, 2, -7)$.
- (2 балла) Для функции $z = e^x \cos y$ в точке $M(1, \frac{\pi}{3})$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = -\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$.
- (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x^2 + y} ?$$

Ответ обосновать.

- (3 балла) Вычислить все частные производные второго порядка от функции $u = e^x \ln y + \sin y \ln x + z^2$.
- (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(-2, -2, 1)$ задана уравнением

$$\ln(2x - y + 3z) = x + y + 4z.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(-2, -2)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(-1,9; -1,9)$.

ВАРИАНТ 5

1. (2 балла) Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-2y^2}}$; найти и изобразить линию уровня этой функции, проходящую через точку $(1/2, 1/2)$.
2. (2 балла) Для функции $u = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xy - 2y + 3$ в точке $M(1, -1, 2)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2} ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Доказать, что функция $z = \frac{x^2 y^2}{x+y}$ удовлетворяет уравнению $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$.
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1/2, -10, 2)$ задана уравнением

$$z^3 + xz^2 + y = 0.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1/2, -10)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(0,4; -9,8)$.

ВАРИАНТ 7

1. (2 балла) Найти и изобразить область определения функции $z = 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$; найти и изобразить линию уровня этой функции, проходящую через точку $(\sqrt{3}/2, 0)$.
2. (2 балла) Для функции $u = xy^2z^3 + x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(1, 1, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \ln \frac{1-y^2}{1+x^2} ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Вычислить все частные производные второго порядка от функции $u = x^2 y + \arcsin \frac{y}{z}$.
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1/2, 1, 3/2)$ задана уравнением

$$x - y + z = e^{x+y-z}.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1/2, 1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(0,7; 1,1)$.

ВАРИАНТ 6

1. (2 балла) Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = z - x^2 + y^2$, проходящую через точку $(4, 3, 7)$.
2. (2 балла) Для функции $z = x^2 + y^2 - xy$ в точке $M(1, 3)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Найти производную u'_t функции $u = f(x(t), y(t), z(t))$, если $f = 2x^2 + y^2 + z^2 - yz$, $x = \cos t$, $y = t - \sin t$, $z = t + \sin t$.
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(0, 1, 1)$ задана уравнением

$$\ln \frac{z}{y} = \frac{x}{z}.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(0, 1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(-0,1; 1,1)$.

ВАРИАНТ 8

1. (2 балла) Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = \frac{x+y+z-1}{x+y+z+1}$, проходящую через точку $(0, 3, 0)$.
2. (2 балла) Для функции $z = \sin(x^3 - 2y^2)$ в точке $M(2, -2)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Доказать, что если $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$, то $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ при любых дважды дифференцируемых функциях φ и ψ .
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, 2, 1)$ задана уравнением

$$\arctg(z - x) = yz - 2.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1, 2)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(1,2; 1,9)$.

ВАРИАНТ 9

1. (2 балла) Найти и изобразить область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$; найти и изобразить линию уровня этой функции, проходящую через точку $(1, 3/2)$.
2. (2 балла) Для функции $u = e^{xyz}$ в точке $M(2, 3, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора \vec{MN} , если $N(-1, 1, -5)$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \ln y ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z = f(u(x, y), v(x, y))$, если $f = u \ln v - v \ln u$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$.
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, 1, 1)$ задана уравнением

$$3x - y - z = \cos(z - y).$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1, 1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(0,8; 0,8)$.

ВАРИАНТ 11

1. (2 балла) Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(xy + 1)$; найти и изобразить линию уровня этой функции, проходящую через точку $(1, e - 1)$.
2. (2 балла) Для функции $u = x^3 - x^2y + y^2z - z^3$ в точке $M(1, -1, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2} ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Доказать, что функция $z = e^{-9x} \cos 3y + e^{-4x} \sin 2y$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(-1, -1, -1)$ задана уравнением

$$e^x + e^y + e^z = -\frac{3}{e}z.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(-1, -1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(-0,9; -0,8)$.

ВАРИАНТ 10

1. (2 балла) Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - z^2 - 1}$, проходящую через точку $(2, 2, 0)$.
2. (2 балла) Для функции $z = \operatorname{tg}(3x^2 - 2y)$ в точке $M(-1, 3/2)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y)e^x \operatorname{arctg} y ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Вычислить все частные производные второго порядка от функции $u = e^{x^2 + y^2} \sin^2 z$.
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, 2, -1)$ задана уравнением

$$z^4 - xz - y = 0.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1, 2)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(1,2; 1,9)$.

ВАРИАНТ 12

1. (2 балла) Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = \ln(7 - 2x^2 - 3y^2 - z^2)$, проходящую через точку $(1, 1, 1)$.
2. (2 балла) Для функции $z = \arcsin(xy) + \arccos(\frac{x}{y})$ в точке $M(1/2, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
3. (3 балла) Существует ли предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{\frac{x}{y}} ?$$

Ответ обосновать.

4. (3 балла) Найти производную u'_t функции $u = f(x(t), y(t), z(t))$, если $f = x^2y^3z^5$, $x = t \ln t$, $y = \ln t$, $z = 1/\ln t$.
5. (3 балла) неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, 1, 1)$ задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1, 1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(1,1; 1,1)$.