Оглавление

Семинар 1

Классическая вероятностная схема

1.1 Теоретические сведения

Основные понятия

Классической вероятностной схемой (или моделью) назовем всякий случайный эксперимент, удовлетворяющий следующим условиям:

1) пространство элементарных событий (множество исходов случайного эксперимента) Ω представляет собой конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$;

2) случайные события — всевозможные подмножества множества Ω.

3) все элементарные события равновероятны, т.е. $\mathsf{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$;

4) вероятность любого события $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, состоящего из произвольных k элементарных событий, по определению равна $\dfrac{k}{n}$.

Классическое определение вероятности служит хорошей математической моделью тех случайных явлений для которых исходы опыта в каком-либо смысле симметричны и поэтому представляется естественным предположение об их равновозможности. Обычно это предположение оправдано в задачах из области азартных игр, лотерей и т. д. Это объясняется тем, что при изготовлении игральных костей, карт и организации лотерей заботятся о соблюдении равновозможности различных исходов.

Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме

Решение вероятностных задач на классическую схему часто облегчается использованием комбинаторных формул. Каждая из комбинаторных формул определяет общее число элементарных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов исходного множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. При этом в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Существуют две принципиально различные схемы выбора. В первой схеме выбор осуществляется без возвращения элементов (это значит, что отбираются либо сразу все m элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим выбором. После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы (или их номера) могут быть либо упорядочены (т.е. выложены в последовательную цепочку), либо нет. В результате получаются следующие четыре различные постановки эксперимента по выбору наудачу m элементов из общего числа n различных элементов множества E.

Схема выбора, приводящая к сочетаниям

Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами следует считать m-элементные подмножества множества E, имеющие различный состав. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) носят название сочетания из n элементов по m, а их общее число определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Числа C_n^m называются также биномиальными коэффициентами. См. примеры 1.2, 1.3, 1.4.

Схема выбора, приводящая к размещениям

Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения, но с упорядочиванием их по мере выбора в последовательную цепочку, то различными исходами данного опыта будут упорядоченные m-элементные подмножества множества E, отличающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) называются размещениями из n элементов по m, а их общее число определяется формулой

$$A_n^m = C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

В частном случае $n = m$ опыт фактически состоит в произвольном упорядочивании множества E, т.е. сводится к случайной перестановке элементов всего множества. При этом $A_n^n = n!$. См. пример 1.5.

Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями

Если опыт состоит в выборе с возвращением m элементов множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, но без последующего упорядочивания, то различными исходами такого опыта будут всевозможные m-элементные наборы, отличающиеся составом. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Например, при $m = 4$ наборы $\{e_1, e_1, e_2, e_1\}$ и $\{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ неразличимы для данного эксперимента, а набор $\{e_1, e_1, e_3, e_1\}$ отличен от любого из предыдущих. Получающиеся в результате данного опыта комбинации называются сочетаниями с повторениями, а их общее число определяется формулой C_{n+m-1}^m. См. пример 1.7.

Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями

Если выбор m элементов из множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ производится с возвращением и с упорядочиванием их в последовательную цепочку, то различными исходами будут всевозможные m-элементные наборы (вообще говоря, с повторениями), отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования. Например, при $m = 4$ множества $\omega_1 = \{e_1, e_1, e_2, e_1\}$, $\omega_2 = \{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ и $\omega_3 = \{e_1, e_1, e_3, e_1\}$ являются различными исходами данного опыта. Получаемые в результате комбинации называются размещениями с повторениями, а их общее число определяется формулой n^m. См. примеры 1.1, 1.6.

1.2 Решение типовых примеров

Пример 1.1. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность р того, что оба раза появится одинаковое число очков.

Решение: Исход случайного эксперимента (элементарное событие) — пара (i, j), где i — число очков, выпавшее на первой кости, а j — число очков, выпавшее на второй кости, $i, j = 1, 2, \ldots, 6$. Общее число элементарных событий $n = 6^2$. Число благоприятных исходов $k = 6$. Искомая вероятность p равна

$$p = \frac{k}{n} = \frac{1}{6}.$$

Пример 1.2. В партии, состоящей из N изделий, имеется M дефектных. Из партии выбирается для контроля K изделий. Найти вероятность того, что из них ровно R изделий будут дефектными.

Р е ш е н и е: Случайный эксперимент заключается в выборе K изделий из N изделий, что можно делать C_N^K числом способов. Найдем теперь множество исходов, благоприятствующих событию, состоящему в том, что среди K выбранных изделий ровно R изделий будут дефектными. Из M дефектных изделий можно выбрать R дефектных изделий C_M^R числом способов, а из $N-M$ годных изделий можно выбрать $K-R$ годных изделий C_{N-M}^{K-R} числом способов. Так как любой способ выбора R дефектных изделий может комбинироваться с любым способом выбора $K-R$ годных изделий, то получаем, что число благоприятных способов есть $C_M^R C_{N-M}^{K-R}$. Поэтому искомая вероятность равна

$$p = \frac{C_M^R C_{N-M}^{K-R}}{C_N^K}.$$

Пример 1.3. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$в полученной выборке ровно одно изделие бракованное$\}$, $B = \{$в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия$\}$.

Р е ш е н и е: Занумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество номеров $E_1 = \{1, 2, \ldots, 7\}$ соответствует годным изделиям, а множество номеров $E_2 = \{8, 9, 10\}$ — бракованным изделиям.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвращения и без упорядочивания трех элементов из множества $E = E_1 \cup E_2 = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Поэтому множество исходов случайного эксперимента равно $C_{10}^3 = 120$.

Событию A благоприятствуют только такие исходы, когда один элемент выборки принадлежит E_2, а остальные два элемента — множеству E_1. По формуле прямого произведения множеств получаем, что число всех таких исходов $C_3^1 \cdot C_7^3 = 63$. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}.$$

Событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все три отобранных элемента принадлежат множеству E_1, поэтому этих исходов $C_7^3 = 35$. Отсюда следует, что

$$\mathsf{P}(B) = \frac{7}{24}.$$

Пример 1.4. В урне a белых и b черных шаров ($a > 2$). Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Р е ш е н и е:

Общее число случаев

$$n = C_{a+b}^2 = \frac{(a+b)(a+b-1)}{1 \cdot 2}.$$

Число благоприятных случаев

$$k = C_a^2 = \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}.$$

Вероятность события A — два белых шара — равна

$$\mathsf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Пример 1.5. Множество E состоит из 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько 4-буквенных слов может быть получено в данном опыте? Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой «а»?

Р е ш е н и е:

n — число всех 4-буквенных слов в данном опыте — равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств из 10 элементов, т.е.

$$n = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пусть событие

$$A = \{\text{наудачу составленное слово из 4 букв множества } E \text{ оканчивается буквой «а»}\}.$$

Число элементов множества A равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одному символу из 9 (символ а исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$k = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

и

$$\mathsf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}.$$

Пример 1.6. 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая лунка окажется пустой (при этом может оказаться пустой и еще какая-либо лунка)?

Решение:

Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением номера лунки и записи 7-буквенного слова. При этом каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки).

Так, например, слово

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, № 2 и № 4, во вторую лунку — шар № 7, в третью — шар № 3, в четвертую — шары № 5 и № 6. Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу различных 7-буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т.е. $n = 4^7$.

Событие $A = \{\text{первая лунка окажется пустой}\}$ соответствует такому выбору, когда символ 1 (номер первой лунки) удален из алфавита. Поэтому $k = 3^7$ и

$$\mathsf{P}(A) = \frac{k}{n} = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0.133.$$

Пример 1.7. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д.; всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{заказаны книги из различных разделов науки}\}$, $B = \{\text{заказаны книги из одного и того же раздела науки}\}$.

Решение: Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно, очевидно, числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т.е. $C_{16+4-1}^4 = C_{19}^4$. Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов отобрать без возвращения четыре элемента из 16, поэтому

$$\mathsf{P}(A) = \frac{C_{16}^4}{C_{19}^4} = \frac{455}{969} \approx 0.47.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу способов выбрать один элемент из шестнадцати, поэтому

$$\mathsf{P}(A) = \frac{C_{16}^1}{C_{19}^4} = \frac{4}{969} \approx 0.004.$$

1.3 Задачи для самостоятельного решения

1.1. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий: A — появление четного числа очков; B — появление не менее 5 очков; C— появление не более 5 очков.

Ответ: $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}$; $\mathsf{P}(B) = \frac{1}{3}$; $\mathsf{P}(C) = \frac{5}{6}$.

1.2. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: $1, 2, \ldots, n$.

Ответ: $\frac{1}{n!}$.

1.3. Та же урна, что и в предыдущей задаче, но каждый шар после вынимания вкладывается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: $1, 2, \ldots, n$.

Ответ: $\frac{1}{n^n}$.

1.4. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07 (семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найти вероятность того, что число будет четным.

Ответ: $\frac{5}{9}$.

1.5. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

Ответ: $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

1.6. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «ананас». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «ананас».

Ответ: $\frac{3!2!}{6!} = \frac{1}{60}$.

1.7. N человек случайным образом рассаживаются за круглым столом ($N > 2$). Найти вероятность того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом.

Ответ: $\frac{2}{N-1}$.

1.8. Та же задача, но стол прямоугольный, и N человек рассаживаются случайно вдоль одной из его сторон.

Ответ: $\frac{2}{N}$.

1.9. Какова вероятность того, что в группе из n ($n < 365$) случайно отобранных студентов хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения? Оценить значение этой вероятности для $n = 24$ и $n = 50$.

Ответ: $1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$.

Семинар 2

Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения. Независимые и зависимые события. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли

2.1 Теоретические сведения

Определение 2.1. Пусть A и B — наблюдаемые события в эксперименте, причем $\mathsf{P}(B) > 0$. ***Условной вероятностью*** $\mathsf{P}(A|B)$ ***осуществления события*** A ***при условии, что событие*** B ***произошло в результате данного эксперимента***, называется величина, определяемая равенством

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}. \tag{2.1}$$

Для краткости условную вероятность $\mathsf{P}(A|B)$ называют «вероятностью события A при условии B». При $\mathsf{P}(B) = 0$ условная вероятность $\mathsf{P}(A|B)$ не определена.

Замечание 2.1. Нетрудно проверить, что в случае произвольного вероятностного пространства определенная формулой (2.1) вероятность $\mathsf{P}(A|B)$, рассматриваемая как функция наблюдаемых событий $A \in \mathcal{A}$ при фиксированном событии B, удовлетворяет трем основным аксиомам и всем их следствиям.

Определение 2.2. Событие A называется ***независимым от события*** B, удовлетворяющего условию $\mathsf{P}(B) > 0$, если выполняется равенство

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A).$$

События A и B называются ***независимыми***, если

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \tag{2.2}$$

В противном случае события A и B называются ***зависимыми***.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если для любого набора из m событий ($m = 2, 3, \ldots, n$) выполняется равенство

$$\mathsf{P}(A_{k_1} A_{k_2} \ldots A_{k_m}) = \mathsf{P}(A_{k_1})\mathsf{P}(A_{k_2}) \ldots \mathsf{P}(A_{k_m}), \qquad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n. \tag{2.3}$$

Замечание 2.2. Формулы (2.2) и (2.3) позволяют выделять независимые события в тех случаях, когда модель вероятностного эксперимента формализована и вероятности всех нужных событий полностью определены. Однако в практических задачах, связанных с проведением реальных экспериментов, далеко не всегда возможно использование данных критериев независимости. В таких случаях часто применяют гипотезу о физической независимости событий: считаются независимыми события, не связанные причинно.

Так, например, естественно считать независимыми результаты стрельбы из двух орудий при одновременном выстреле по цели или события, связанные с появлением брака определенного вида изделий, производимых двумя поточными линиями на различных предприятиях, и т. д.

Теорема 2.1. *Пусть производится два последовательных извлечения по одному шару без возвращения из урны, содержащей m белых и n черных шаров. События: $A = \{$первый шар белый$\}$, $B = \{$второй шар белый$\}$.*

Тогда

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{m-1}{m+n-1} = \mathsf{P}(B'),$$

где $B' = \{$вынутый шар белый$\}$ — событие, наблюдаемое в новом эксперименте, состоящем в выборе наудачу одного шара из урны, состав которой изменен в соответствии с условием события A.

Замечание 2.3. Указанный метод вычисления условной вероятности называется методом вспомогательного эксперимента.

Теорема 2.2 (теорема умножения для двух событий)**.**

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A).$$

Теорема 2.3 (теорема сложения для двух событий)**.**

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

Теорема 2.4 (теорема умножения для n событий)**.**

$$\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\ldots\mathsf{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Теорема 2.5. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность осуществления хотя бы одного из них равна*

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}_1)\mathsf{P}(\overline{A}_2)\ldots\mathsf{P}(\overline{A}_n). \tag{2.4}$$

Определение 2.3. Будем говорить, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, если

1) они являются *попарно несовместными*, т.е. $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) хотя бы одно из них обязательно должно произойти в результате опыта, другими словами, их сумма есть достоверное событие, т.е. $H_1 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$.

В этом случае события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ будем называть гипотезами.

Теорема 2.6 (Формула полной вероятности)**.** *Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий.*

Тогда для любого события A

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|H_1)\mathsf{P}(H_1) + \ldots + \mathsf{P}(A|H_n)\mathsf{P}(H_n). \tag{2.5}$$

Теорема 2.7 (Формула Байеса)**.** *Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, интерпретируемые как совокупность гипотез по отношению к интересующему нас событию A. Пусть эксперимент проведен и стало известно, что событие A осуществилось.*

Тогда послеопытная (апостериорная) вероятность осуществления гипотезы H_k при условии, что событие A имело место, дается формулой Байеса

$$\mathsf{P}(H_k|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_k)\mathsf{P}(H_k)}{\mathsf{P}(A)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.6}$$

где $\mathsf{P}(A)$ — полная вероятность осуществления события A, вычисленная по формуле (2.5).

Замечание 2.4. Формула Байеса позволяет «переоценить» вероятность каждой из гипотез после поступления новой «информации» относительно осуществления тех или иных наблюдаемых событий.

Определение 2.4. ***Схемой Бернулли*** (или ***последовательностью независимых одинаковых испытаний***, или ***биномиальной схемой*** испытаний) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

1) при каждом испытании различают лишь два исхода: появление некоторого события A, называемого "успехом", либо появление его дополнения $\overline{A}$, называемого "неудачей";

2) испытания являются *независимыми*, т.е. вероятность успеха в k-м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k-го;

3) *вероятность* успеха во всех испытаниях постоянна и равна $\mathsf{P}(A) = p$.

Теорема 2.8 (Формула Бернулли)**.** *Если Y_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p, то вероятность $\mathsf{P}\{Y_n = k\}$ получить ровно k успехов в n испытаниях равна*

$$\mathsf{P}\{Y_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2.7}$$

где $q = 1 - p$.

2.2 Решение типовых примеров

Пример 2.1. Из урны, содержащей 3 белых и 7 красных шаров, наудачу последовательно и без возвращения извлекаются два шара. События: $A = \{$первый шар белый$\}$, $B = \{$второй шар белый$\}$, $C = \{$по крайней мере один из вынутых шаров белый$\}$. Вычислить вероятности $\mathsf{P}(B|A)$, $\mathsf{P}(A|B)$, $\mathsf{P}(A|C)$.

Р е ш е н и е: Для вычисления искомых условных вероятностей воспользуемся формулой (2.1). Занумеруем белые шары цифрами $1, 2, 3$, а черные — цифрами $4, 5, \ldots, 10$. Обозначим через ω_{ij} элементарное событие (исход эксперимента по выбору двух шаров), состоящее в извлечении сначала шара с номером i, а затем с номером j. Согласно описанию эксперимента имеем следующую схему: выбор наудачу, без возвращения пары чисел из множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$ с упорядочиванием, поэтому множество элементарных исходов случайного эксперимента можно записать в виде

$$\Omega = \{\omega_{ij} : \quad i = 1, \ldots, 10; \quad j = 1, \ldots, 10; \quad i \neq j\}.$$

Отсюда следует, что Ω состоит из $A_{10}^2 = 90$ исходов, $\mathsf{P}(\omega_{ij}) = 1/90$ для всех допустимых значений i и j.

Подмножества, соответствующие событиям A и B, имеют следующий состав:

$$A = \{\omega_{ij} : \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \ldots, 10; \quad i \neq j\},$$

$$B = \{\omega_{ij} : \quad i = 1, \ldots, 10; \quad j = 1, 2, 3; \quad i \neq j\},$$

причем, как нетрудно подсчитать, событие A состоит из $3 \cdot 9 = 27$ исходов, а событие B — из $9 \cdot 3 = 27$. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}, \qquad \mathsf{P}(B) = \frac{3}{10}.$$

Событию AB соответствует подмножество

$$AB = \{\omega_{ij} : \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3; \quad i \neq j\},$$

следовательно, событие AB состоит из $3 \cdot 2 = 6$ исходов и

$$\mathsf{P}(AB) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

По формуле (2.1) отсюда находим

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{2}{9}, \qquad \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{2}{9}.$$

Далее, по формуле классической вероятности

$$\mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}.$$

Для вычисления вероятности произведения AC заметим, что $C = A + B$, $AB \subset A$, поэтому

$$AC = A(A+B) = A + AB = A.$$

Отсюда

$$\mathsf{P}(AC) = \mathsf{P}(A) = \frac{3}{10}.$$

Наконец, снова используя формулу (2.1), получаем

$$\mathsf{P}(A|C) = \frac{\mathsf{P}(AC)}{\mathsf{P}(C)} = \frac{\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(C)} = \frac{9}{16}.$$

Пример 2.2. В условиях эксперимента, описанного в примере 2.1, установить, являются ли независимыми события A и B, A и C, B и C, события A, B и C в совокупности.

Решение: Так как все необходимые вероятности вычислены в примере 2.1, то для решения задачи достаточно проверить, выполняется ли для каждой пары событий критерий независимости (2.2), а для трех событий A, B и C — критерий (2.3). Имеем

$$\mathsf{P}(AB) = \frac{1}{15}, \qquad \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) = \frac{9}{100} \neq \mathsf{P}(AB),$$

т.е. события A и B являются зависимыми. Далее, как установлено в том же примере,

$$\mathsf{P}(AC) = \mathsf{P}(A) \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C),$$

так как $\mathsf{P}(C) \neq 1$. Следовательно, события A и C также зависимы. Наконец,

$$\mathsf{P}(BC) = \mathsf{P}(B(A+B)) = \mathsf{P}(AB+B) = \mathsf{P}(B) \neq \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C),$$

поэтому и события B и C являются зависимыми.

События A, B и C не являются независимыми в совокупности, так как согласно критерию (2.3) для этого необходимо, чтобы все три события были попарно независимы.

Пример 2.3. В продукции завода брак составляет 5% от общего количества выпускаемых деталей. Для контроля отобрано 20 деталей. Какова вероятность того, что среди них имеется хотя бы одна бракованная?

Решение: Для любой детали из продукции завода вероятность быть бракованной равна по условию $p = 0{,}05 = \mathsf{P}(A_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 20$, где событие $A_k = \{k\text{-я по счету извлеченная деталь бракованная}\}$. Очевидно, нас интересует событие $A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}$. В условиях отлаженного технологического процесса можно считать, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ независимы в совокупности. По формуле (2.4) получаем

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}) = 1 - \prod_{k=1}^{20} \mathsf{P}(\overline{A}_k) = 1 - 0{,}95^{20} \approx 0{,}64.$$

Пример 2.4. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживает дефект (если он есть), и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан дефектным?

Решение: Из условия задачи очевидно, что с рассматриваемым событием $A = \{\text{случайно выбранный транзистор признан дефектным}\}$ тесно связаны две гипотезы: $H_1 = \{\text{поступивший на проверку транзистор дефектный}\}$ и $H_2 = \overline{H}_1 = \{\text{поступивший на проверку транзистор исправный}\}$. Безусловные априорные вероятности этих гипотез легко вычисляются по классической формуле: $\mathsf{P}(H_1) = 0{,}1$, $\mathsf{P}(H_2) = 0{,}9$. Условные вероятности определены в условии задачи: $\mathsf{P}(A|H_1) = 0{,}95$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 0{,}03$. Применяя формулу полной вероятности (2.5), получим

$$\mathsf{P}(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03 = 0{,}122.$$

Пример 2.5. В условиях эксперимента, описанного в примере 2.4, случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?

Решение: В обозначениях примера 2.4 требуется вычислить $\mathsf{P}(H_2|A)$ (апостериорную условную вероятность гипотезы H_2). По формуле Байеса (2.6)

$$\mathsf{P}(H_2|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_2)\mathsf{P}(H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0,9 \cdot 0,03}{0,122} \approx 0,221.$$

Таким образом, апостериорная условная вероятность того, что транзистор на самом деле исправный, если известно, что он был признан дефектным, существенно меньше априорной вероятности гипотезы H_2, что явилось следствием поступившей информации.

Пример 2.6. Вероятности рождения мальчика и девочки в первом приближении можно считать равными 0,5. Какова вероятность того, что среди $2n$ наудачу отобранных новорожденных будет хотя бы один мальчик (событие A_1); число мальчиков и девочек одинаково (событие A_2); мальчиков будет больше, чем девочек (событие A_3)?

Решение: Пусть Y_{2n} — число мальчиков среди $2n$ новорожденных. Согласно формуле (2.7)

$$\mathsf{P}\{Y_{2n} = k\} = C_{2n}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Вероятность события A_1 проще всего найти, перейдя к противоположному событию:

$$\mathsf{P}(A_1) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}_1) = 1 - \mathsf{P}\{Y_{2n} = 0\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Вероятность события A_2 записывается непосредственно:

$$\mathsf{P}(A_2) = \mathsf{P}\{Y_{2n} = n\} = C_{2n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Для подсчета вероятности события $A_3 = \{Y_{2n} > n\}$ заметим, что из соображений симметрии

$$\mathsf{P}\{Y_{2n} > n\} = \mathsf{P}\{Y_{2n} < n\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}(A_3) = \mathsf{P}\{Y_{2n} > n\} = \frac{1}{2}\Big(1 - \mathsf{P}\{Y_{2n} = n\}\Big) = \frac{1}{2}\left(1 - C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right).$$

2.3 Задачи для самостоятельного решения

2.1. Подбрасывают наудачу три игральные кости. Наблюдаемые события: A — на трех костях выпадут разные числа очков, B — хотя бы на одной из костей выпадет “шестерка”. Вычислите $\mathsf{P}(A|B)$ и $\mathsf{P}(B|A)$.
Ответ: $\mathsf{P}(A|B) = 60/91, \quad \mathsf{P}(B|A) = 1/2$.

2.2. В шкаф поставили девять новых однотипных приборов. Для проведения опыта берут наугад три прибора, после работы их возвращают в шкаф. На вид прибор, бывший в употреблении, не отличается от нового. Определите вероятность того, что после проведения трех опытов в шкафу не останется новых приборов.
Ответ: $\mathsf{P} = 1 \cdot (6/9 \cdot 5/8 \cdot 4/7) \cdot (3/9 \cdot 2/8 \cdot 1/7) \approx 0{,}0028$.

2.3. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. Пять карточек вынимают наудачу одна за другой и укладывают на стол в порядке появления. Найдите вероятность того, что получится слово “КОНЕЦ”.
Ответ: $\mathsf{P} = 1/32 \cdot 1/31 \cdot 1/30 \cdot 1/29 \cdot 1/28 \approx 4{,}14 \cdot 10^{-8}$.

2.4. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Если студент не отвечает на один вопрос, преподаватель задает другой. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет.

О т в е т: $\mathsf{P} = 1 - 1/29 \approx 0{,}966$.

2.5. Два стрелка стреляют в цель, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого стрелка вероятность попадания в цель равна 0,7, для второго — 0,8. Какова вероятность попасть в цель хотя бы одному стрелку?

О т в е т: $\mathsf{P} = 0{,}94$.

2.6. Система состоит из четырех узлов. Вероятности P_i безотказной работы узлов равны соответственно P_1, P_2, P_3 и P_4. Вычислите вероятность безотказной работы всей системы.

О т в е т: $\mathsf{P} = P_1\,[1 - (1 - P_2)(1 - P_3)]\,P_4$.

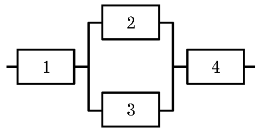

Рис 2.1

2.7. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживают с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найдите вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

О т в е т: $\mathsf{P} = 1 - (1 - p)^n$.

2.8. В первой урне лежат 10 шаров, из них восемь белых, во второй — 20 шаров, из них четыре белых. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару, а затем из этих двух наудачу берется один шар. Найдите вероятность того, что это будет белый шар.

О т в е т: $\mathsf{P} = 0{,}5$.

2.9. На шахматную доску ставят двух слонов: белого и черного. Какова вероятность того, что при первом ходе один слон может побить другого?

О т в е т: $\mathsf{P} = 5/36 \approx 0{,}139$.

2.10. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10 % и третьего — 5 %. Определите вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступили 30 телевизоров с первого завода, 20 — со второго и 50 — с третьего?

О т в е т: $\mathsf{P} = 0{,}895$.

2.11. На заводе, изготавливающем болты, первый станок производит 25 %, второй 35 % и третий 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет 5 %, 4 % и 2 % соответственно.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт будет дефектным?

б) Случайно выбранный болт оказался дефектным. Найдите вероятности P_1, P_2 и P_3 того, что он был произведен первым, вторым, третьим станком?

О т в е т: а) $\mathsf{P} = 0{,}0345$, б) $\mathsf{P}_1 = 125/345 \approx 0{,}36, \mathsf{P}_2 = 140/345 \approx 0{,}406, \mathsf{P}_3 = 80/345 \approx 0{,}23$.

2.12. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Определите вероятность того, что в цель попал первый стрелок.

О т в е т: $\mathsf{P} = 6/7 \approx 0{,}857$.

2.13. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков равны P_1, P_2 и P_3 соответственно. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после стрельбы в мишени оказались две пробоины?

О т в е т:

$$\mathsf{P} = \frac{P_1(1 - P_2)P_3}{(1 - P_1)P_2P_3 + P_1(1 - P_2)P_3 + P_1P_2(1 - P_3)}.$$

2.14. Наудачу подбрасывают три монеты. Найдите вероятность того, что выпадут ровно два “герба”.

О т в е т: $\mathsf{P} = 3/8 \approx 0{,}375$.

2.15. Бросают пять игральных костей. Вычислите вероятность того, что на трех из них выпадет пятерка.

О т в е т: $\mathsf{P} = C_5^3(1/6)^3(5/6)^2 \approx 0{,}032$.

2.16. Бросают 10 одинаковых игральных костей. Определите вероятность того, что ни на одной из них не выпадет шесть очков.

О т в е т: $\mathsf{P} = (5/6)^{10} \approx 0{,}16$.

2.17. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найдите вероятность того, что в день поступит четыре заявки.

Ответ: $\mathsf{P} \approx 0{,}251$.

2.18. Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки — 0,485. В некоторой семье шестеро детей. Какова вероятность того, что среди них не больше двух девочек?

Ответ: $\mathsf{P} \approx 0{,}3723$.

2.19. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничейный исход исключается) три партии из четырех или пять из восьми?

Ответ: Вероятнее выиграть три партии из четырех.

2.20. Сколько нужно параллельно соединить элементов, вероятность безотказной работы каждого из которых за время t равна 0,9, для того чтобы вероятность безотказной работы всей системы за время t была не меньше 0,999?

Ответ: Не менее трех.

Семинар 3

Одномерные случайные величины

3.1 Теоретические сведения

Определение 3.1. ***Случайной величиной*** ξ, называют любую функцию из Ω в $\mathbb{R}$, для которой множество $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ — является событием (т.е. принадлежит σ-алгебре событий $\mathcal{A}$ для любого $x \in \mathbb{R}$).

Определение 3.2. ***Функцией распределения*** (***вероятностей***) случайной величины ξ называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$, т.е. события, состоящего из тех и только тех *элементарных исходов* ω, для которых $\xi(\omega) < x$:

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}.$$

Теорема 3.1. *Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.*

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
2. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ *при* $x_1 < x_2$, *т.е.* $F(x)$ — *неубывающая функция.*
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$
4. $\mathsf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F(b) - F(a)$.
5. $F(x) = F(x-0)$, *где* $F(x-0) = \lim\limits_{y\to x-0} F(y)$, *т.е.* $F(x)$ — *непрерывная слева функция.*

Замечание 3.1. Можно показать, что любая *неубывающая* непрерывная слева функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$, является функцией распределения некоторой случайной величины ξ.

Определение 3.3. Для произвольной случайной величины ξ отображение, которое ставит в соответствие множествам $B \in \mathbb{R}$ вероятность события $\{\xi \in B\}$, т.е. число $\mathsf{P}\{\xi \in B\}$, называют ***законом распределения вероятностей***, или ***распределением*** (***вероятностей***) случайной величины ξ.

Можно показать, что в определении 3.3 в качестве множеств B из $\mathbb{R}$ достаточно взять всевозможные полуинтервалы $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, закон распределения случайной величины однозначно определяется ее функцией распределения.

Определение 3.4. *Случайную величину* ξ называют ***дискретной***, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Распределение дискретной случайной величины удобно описывать с помощью ряда распределения.

Определение 3.5. ***Рядом распределения*** (***вероятностей***) ***дискретной случайной величины*** ξ называют таблицу (табл. 3.1), состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — вероятности $p_i = \mathsf{P}\{\xi = x_i\}$ того, что случайная величина примет эти значения.

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Таблица 3.1.

Определение 3.6. Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_n = \mathsf{P}\{\xi = x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Математическим ожиданием (***средним значением***) $\mathsf{M}\xi$ дискретной случайной величины ξ называют сумму произведений значений x_iслучайной величины и вероятностей $p_n = \mathsf{P}\{\xi = x_n\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения:

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n. \tag{3.1}$$

При этом предполагается, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n < +\infty$, т. е. ряд, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно; в противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Теорема 3.2. *Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_n = \mathsf{P}\{\xi = x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Тогда математическое ожидание случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ определяется формулой

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) p_n, \tag{3.2}$$

при этом требуется выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| p_n < +\infty. \tag{3.3}$$

Определение 3.7. ***Непрерывной*** называют ***случайную величину*** ξ, функцию распределения $F(x)$ которой можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy. \tag{3.4}$$

Функцию $f(x)$ называют ***плотностью распределения*** (***вероятностей***) случайной величины ξ.

Теорема 3.3. *Плотность распределения обладает следующими свойствами.*

1) $f(x) \geqslant 0$.

2) $\mathsf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

4) $\mathsf{P}\{x \leqslant \xi < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$ *в точках непрерывности плотности распределения.*

5) $\mathsf{P}\{\xi = x\} = 0$.

Замечание 3.2. Можно показать, что любая неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины ξ.

Определение 3.8. Пусть ξ непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$. ***Математическим ожиданием*** (***средним значением***) $\mathsf{M}\xi$ непрерывной случайной величины ξ называют интеграл

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx. \tag{3.5}$$

При этом предполагается, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx < +\infty$, т. е. несобственный интеграл, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно. Иначе математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Теорема 3.4. *Пусть ξ непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$. Тогда математическое ожидание случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ определяется формулой*

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx\,, \tag{3.6}$$

причем требуется выполнение условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| f(x)\, dx < +\infty$.

Определение 3.9. ***Дисперсией*** $\mathsf{D}\xi$ случайной величины ξ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ от ее среднего значения, т. е.

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2. \tag{3.7}$$

Среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ называют число $\sqrt{\mathsf{D}\xi}$.

Следствие 3.1. В условиях теоремы 3.2

$$\mathsf{D}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \mathsf{M}\xi)^2 p_n \tag{3.8}$$

Следствие 3.2. В условиях теоремы 3.4

$$\mathsf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}\xi)^2 f(x)\, dx. \tag{3.9}$$

Замечание 3.3. $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$ — неслучайные числа.

Теорема 3.5. *Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам.*

1. Если случайная величина ξ принимает всего одно значение C с вероятностью единица (т.е., по сути дела, не является случайной величиной), то $\mathsf{M}C = C$.

2. $\mathsf{M}(a\xi + b) = a\mathsf{M}\xi + b$, где a, b — постоянные.

3. $\mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2$.

4. $\mathsf{M}(\xi_1\xi_2) = \mathsf{M}\xi_1 \cdot \mathsf{M}\xi_2$ для независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Теорема 3.6. *Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам.*

1. Если случайная величина ξ принимает всего одно значение C с вероятностью единица, то $\mathsf{D}C = 0$.

2. $\mathsf{D}(a\xi + b) = a^2\mathsf{D}\xi$, где a, b — постоянные.

3. $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2$.

4. $\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta$ для независимых случайных величин ξ и η.

Определение 3.10. Дискретную случайную величину назовем ***биномиальной*** с параметрами $p \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$, если она принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями, заданными формулой

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad q = 1 - p, \qquad k = \overline{0, n}.$$

Говорят также, что эта случайная величина ***распределена по биномиальному закону***, или имеет ***биномиальное распределение***.

Биномиальная случайная величина с параметрами n и p — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $q = 1 - p$.

Математическое ожидание биномиальной случайной величины ξ с параметрами n и p равно $\mathsf{M}\xi = np$, дисперсия равна $\mathsf{D}\xi = npq$.

Определение 3.11. Дискретную случайную величину назовем ***пуассоновской*** с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ с вероятностями, заданными формулой

$$\mathsf{P}\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Говорят также, что она ***распределена по пуассоновскому закону***, или имеет ***пуассоновское распределение***.

Известно, что для пуассоновской случайной величины математическое ожидание и дисперсия имеют вид $\mathsf{M}\xi = \lambda$, $\mathsf{D}\xi = \lambda$.

Определение 3.12. Дискретную случайную величину назовем ***геометрической*** с параметром $p \in (0, 1)$, если она принимает значения $1, 2, \ldots$ с вероятностями, заданными формулой

$$\mathsf{P}\{\xi = n\} = pq^{n-1}, \qquad q = 1 - p, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Говорят также, что она ***распределена по геометрическому закону***, или имеет ***геометрическое распределение***.

Известно, что для геометрической случайной величины математическое ожидание и дисперсия имеют вид $\mathsf{M}\xi = \dfrac{1}{p}$, $\mathsf{D}\xi = \dfrac{q}{p^2}$.

Определение 3.13. Случайную величину назовем ***равномерно распределенной*** на отрезке $[a, b]$ (или на интервале (a, b)), если ее плотность распределения $f(x)$ и *функция распределения* $F(x)$ имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x < a \text{ или } x > b; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Говорят также, что она ***распределена по равномерному закону*** или имеет ***равномерное распределение***. Числа a и b называют параметрами распределения.

Известно, что для равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины математическое ожидание и дисперсия имеют вид $\mathsf{M}\xi = \dfrac{b+a}{2}$, $\mathsf{D}\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Определение 3.14. Случайную величину назовем ***экспоненциальной*** (или ***показательной***) с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Говорят также, что она ***распределена по экспоненциальному*** (или ***показательному***) ***закону***, или имеет ***экспоненциальное*** (***показательное***) ***распределение***.

Известно, что для экспоненциальной случайной величины с параметром λ математическое ожидание и дисперсия имеют вид $\mathsf{M}\xi = \dfrac{1}{\lambda}$, $\mathsf{D}\xi = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Определение 3.15. Случайную величину назовем ***нормальной*** (или ***гауссовской***) с параметрами $m \in \mathbb{R}$ и σ^2 ($\sigma > 0$), если ее плотность распределения имеет вид

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < m < +\infty, \;\; \sigma > 0).$$

Говорят также, что она ***распределена по нормальному*** (или ***гауссовскому***) ***закону***, или имеет ***нормальное*** (***гауссовское***) ***распределение***.

Известно, что для нормальной случайной величины с параметрами $m \in \mathbb{R}$ и σ^2 математическое ожидание и дисперсия имеют вид $\mathsf{M}\xi = m$, $\mathsf{D}\xi = \sigma^2$.

Функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{t^2}{2}} dt$$

называется функцией распределения вероятностей стандартной нормальной случайной величины, а функция

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

называется функцией Лапласа.

Пусть ξ — нормальная случайная величина с параметрами m и σ.

Тогда

$$\mathsf{P}\{a < \xi < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \quad (3.10)$$

3.2 Решение типовых примеров

Пример 3.1. Производят четыре независимых опыта, в каждом из которых некоторое событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}8$. Построим ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ — числа появлений события A в четырех опытах.

Решение: В соответствии с условием задачи мы имеем дело со *схемой Бернулли*, т.е. число появлений события A распределено по *биномиальному закону* с параметрами $n = 4$, $p = 0{,}8$ и $q = 1 - p = 0{,}2$. Значит, случайная величина ξ может принимать только значения k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Согласно *формуле Бернулли*

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, 4,$$

определим вероятности возможных значений случайной величины ξ:

$$\mathsf{P}\{\xi = 0\} = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}0016, \quad \mathsf{P}\{\xi = 1\} = C_4^1 p^1 q^3 = 0{,}0256,$$
$$\mathsf{P}\{\xi = 2\} = C_4^2 p^2 q^2 = 0{,}1536, \quad \mathsf{P}\{\xi = 3\} = C_4^3 p^3 q^1 = 0{,}4096,$$
$$\mathsf{P}\{\xi = 4\} = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}4096.$$

Ряд распределения рассматриваемой случайной величины представлен в табл. 3.2. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

ξ	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Таблица 3.2.

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 0{,}0016, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}0272, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}1808, & 2 < x \leqslant 3; \\ 0{,}5904, & 3 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

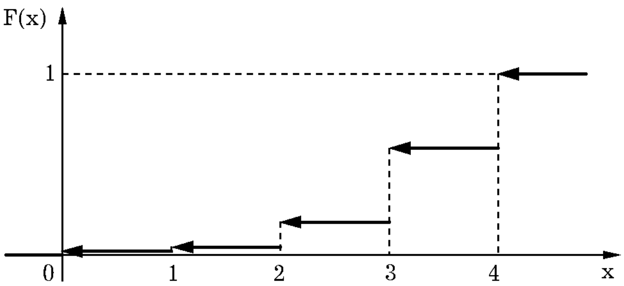

Рис 3.1

График функции распределения $F(x)$ изображен на 3.1.

Пример 3.2. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины ξ, ряд распределения которой представлен в табл. 3.3.

ξ	0	1	2	3
P	0,41	0,43	0,11	0,05

Таблица 3.3.

Решение: В соответствии с определением математического ожидания дискретной случайной величины ξ

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{n=0}^{4} x_n p_n = 0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}8.$$

Дисперсию находим по формуле $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2$.
Математическое ожидание квадрата ξ равно

$$\mathsf{M}\xi^2 = \sum_{n=0}^{4} x_n^2 p_n = 0^2 \cdot 0{,}41 + 1^2 \cdot 0{,}43 + 2^2 \cdot 0{,}11 + 3^2 \cdot 0{,}05 = 1{,}32.$$

Поэтому $\mathsf{D}\xi = 1{,}32 - 0{,}8^2 = 0{,}68$.

Наконец, среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\mathsf{D}\xi} = \sqrt{0{,}68} \approx 0{,}82.$$

Пример 3.3. Непрерывная случайная величина ξ имеет следующую плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ a/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Определим:

а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) графики $f(x)$ и $F(x)$;

г) вероятность $\mathsf{P}\{2 < \xi < 3\}$ попадания случайной величины ξ в интервал $(2{,}3)$;

д) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях случайная величина ξ ни разу не попадет в интервал $(2{,}3)$.

Решение: а) Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством 3 плотности распределения. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{a}{x^2}\,dx = 0 - \frac{a}{x}\bigg|_1^{+\infty} = a,$$

откуда получаем $a = 1$.

б) В соответствии с определением плотности распределения

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0, & x \leqslant 1; \\ \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{dy}{y^2} = \frac{x-1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

в) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 3.2.

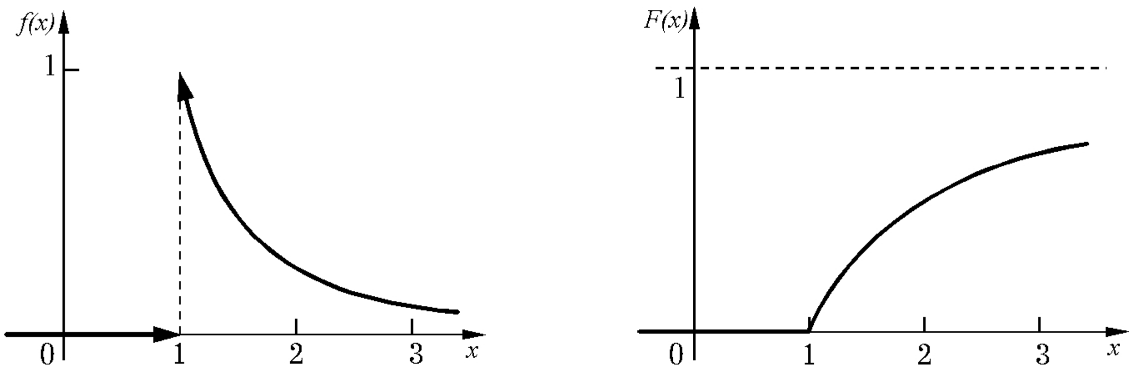

Рис 3.2

г) $\mathsf{P}\{2 < \xi < 3\} = F(3) - F(2) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

д) Вероятность того, что ξ не попадет в интервал $(2,\ 3)$ при одном испытании равна $1 - 1/6 = 5/6$, а при четырех испытаниях — $(5/6)^4 \approx 0{,}48$.

Пример 3.4. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение *непрерывной случайной величины* ξ, *плотность распределения* которой имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \pi/2; \\ \frac{1}{2}\cos x, & |x| \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Решение: В соответствии с определением математического ожидания непрерывной случайной величины ξ

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} xf(x)\,dx + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} xf(x)\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} xf(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} x\cdot 0\,dx + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\frac{1}{2}\cos x\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} x\cdot 0\,dx = 0+0+0 = 0.$$

Вычислим теперь дисперсию ξ:

$$\mathsf{D}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathsf{M}\xi)^2 f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}468.$$

Наконец, $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}\xi} = \sqrt{0{,}468} \approx 0{,}684$.

Пример 3.5. Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = e^{\xi}$.

Решение: Напомним, что случайную величину навывают экспоненциальной (или показательной) с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \end{cases}$$

Говорят также, что она распределена по экспоненциальному (или показательному) закону, или имеет экспоненциальное (показательное) распределение.

Поэтому в данном примере

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3e^{-3x}, & x \geqslant 0; \end{cases}$$

Поскольку математическое ожидание $\mathsf{M}\eta$ и второй момент $\mathsf{M}\eta^2$ функции $\eta = \varphi(\xi)$ от непрерывной случайной величины ξ можно вычислить, используя формулы

$$\mathsf{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)\,dx, \quad \mathsf{M}\eta^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)\,dx,$$

то, поскольку здесь $\varphi(x) = e^x$,

$$\mathsf{M}\eta = \int\limits_{0}^{+\infty} e^x 3e^{-3x} dx = \frac{3}{2}, \quad \mathsf{M}\eta^2 = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{2x} 3e^{-3x} dx = 3.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\eta = \frac{3}{2}, \qquad \mathsf{D}\eta = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Пример 3.6. Из хорошо перетасованной колоды карт слева направо последовательно выкладывают карты лицевой стороной наверх. На карты первой колоды таким же образом кладут карты второй колоды. Найдем среднее число совпадений верхней и нижней карт.

Р е ш е н и е: Пусть число карт в каждой колоде равно n. Число совпадений ξ можно записать в виде

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_i = 1$, если i-я пара карт совпала, и $\xi_i = 0$ в противном случае. Воспользовавшись свойством математического ожидания, получаем

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\xi_1 + \ldots + \mathsf{M}\xi_n.$$

Далее, вероятность совпадения верхней и нижней карт в каждой паре в соответствии с принципом классической вероятности равна $1/n$. Поэтому

$$\mathsf{M}\xi_i = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Окончательно имеем

$$\mathsf{M}\xi = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Интересно отметить, что ответ не зависит от числа n карт в колодах.

3.3 Задачи для самостоятельного решения

3.1. Из партии в 10 деталей, среди которых две бракованные, наудачу выбирают три детали. Найдите закон распределения числа бракованных деталей среди выбранных. Постройте функцию распределения.

О т в е т:

$$\mathsf{P}\{\xi = i\} = \frac{C_2^i C_8^{3-i}}{C_{10}^3}, \quad i = 0,1,2. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 7/15, & x \in (0,\ 1]; \\ 14/15, & x \in (1,\ 2]; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

3.2. Вероятность приема самолетом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Найдите ряд распределения и функцию распределения числа ξ принятых сигналов при шестикратной передаче.

О т в е т: Ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ легко построить, зная, что $\mathsf{P}\{\xi = i\} = C_6^i (0{,}7)^i (0{,}3)^{6-i}$, $i = \overline{0,6}$.

3.3. Найдите закон распределения случайной величины ξ — числа таких бросаний трех игральных костей, в каждом из которых ровно на двух костях появится по 2 очка, если общее число бросаний равно 15.

О т в е т: $\mathsf{P}\{\xi = i\} = C_{15}^i p^i q^{15-i}$, $i = \overline{0,15}$, где $p = C_3^2 (1/6)^2 (5/6)^1 = 5/72 \approx 0{,}0694$.

3.4. В течение часа на станцию скорой помощи поступает случайное число ξ вызовов, распределенное по закону Пуассона с параметром $\lambda = 5$. Найдите вероятность того, что в течение часа поступит:

а) ровно два вызова;

б) не более двух вызовов;

в) не менее двух вызовов.

О т в е т: а) $\mathsf{P}\{\xi = 2\} = 5^2 e^{-5}/2! \approx 0{,}086$;

б) $\mathsf{P}\{\xi \leqslant 2\} = (5^0/0! + 5^1/1! + 5^2/2!)e^{-5} \approx 0{,}127$;

в) $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 2\} = 1 - \mathsf{P}\{\xi < 2\} = 1 - (5^0/0! + 5^1/1!)e^{-5} \approx 0{,}041$.

3.5. Число вызовов, поступающих на АТС (автоматическая телефонная станция) каждую минуту, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 1{,}5$. Найдите вероятность того, что за минуту поступит:

а) ровно три вызова;

б) хотя бы один вызов;

в) менее пяти вызовов.

Ответ: а) 0,12551; б) 0,77687; в) 0,98143.

3.6. В приборный отсек космического корабля за время полета попадает случайное число частиц, распределенное по закону Пуассона с параметром λ, причем вероятность попасть в блок управления, расположенный в отсеке космического корабля, для каждой из этих частиц равна p. Определите вероятность попадания в блок:

а) ровно k частиц;

б) хотя бы одной частицы.

Ответ: а) $(\lambda p)^k e^{-\lambda p}/k!$; б)$1 - e^{-\lambda p}$.

3.7. По цели производят серию независимых выстрелов до первого попадания. Даны вероятность p попадания в цель при одном выстреле и запас патронов n. Найдите ряд распределения и функцию распределения числа ξ израсходованных патронов.

Ответ:

$$\mathsf{P}\{\xi = i\} = \begin{cases} pq^{i-1}, & i = \overline{0, n-1} \quad (q = 1 - p); \\ q^{n-1}, & i = n. \end{cases}$$

3.8. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины ξ, ряд распределения которой представлен в табл. 3.4.

ξ	1	2	3
P	0,30	0,21	0,49

Таблица 3.4.

Ответ: $\mathsf{M}\xi = 2{,}19$, $\mathsf{D}\xi = 0{,}7539$, $\sigma \approx 0{,}868$.

3.9. Вероятность того, что при трех выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз, равна 0,992. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа ξ попаданий при двадцати выстрелах.

Ответ: $\mathsf{M}\xi = 16$, $\mathsf{D}\xi = 3{,}2$.

3.10. Время ξ безотказной работы станка имеет экспоненциальное распределение. Известно, что вероятность отказа станка за 5 ч равна 0,39347. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение времени безотказной работы станка.

Ответ: $\mathsf{M}\xi = 10$ ч, $\mathsf{D}\xi = 100$ ч^2, $\sigma = 10$ ч.

3.11. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращался.

Ответ: $\mathsf{M}\xi = \dfrac{n}{m}$; $\mathsf{D}\xi = \dfrac{n(m+n)}{m^2}$.

3.12. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение случайной величины ξ, имеющей плотность распределения $f(x) = e^{-|x-3|/2}$.

Ответ: $\mathsf{M}\xi = 3$, $\mathsf{D}\xi = 2$, $\sigma = \sqrt{2}$,

3.13. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b); \\ \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\left|x - \dfrac{b+a}{2}\right|, & x \in (a, b), \end{cases}$$

причем a и b не известны, но $b > a$, а $\mathsf{M}\xi = 5$ и $\mathsf{D}\xi = 6$. Найдите a и b.

Ответ: $a = -1$, $b = 11$.

3.14. Каждый из 25 студентов группы выучил 80 % экзаменационных билетов. Найдите среднее число студентов, сдавших экзамен.

Ответ: 20.

3.15. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найдите математическое ожидание случайной величины $\eta = \xi_1 \xi_2$.

Ответ: $\mathsf{M}\eta = 1/(\lambda_1 \lambda_2)$.

3.16. Площадь круга вычисляют по измеренному диаметру круга ξ, используя формулу $S = \pi\xi^2/4$. Считая, что измеренный диаметр круга ξ распределен равномерно на отрезке $[a, b]$, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины S.

Ответ: $\mathsf{M}S = \pi(a^2 + ab + b^2)/12$, $\mathsf{D}S = \pi^2(b-a)^2(4a^2 + 7ab + 4b^2)/720$.

Семинар 4

Функции от случайной величины

4.1 Теоретические сведения

Пусть на *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ задана *случайная величина* $\xi = \xi(\omega)$. Рассмотрим действительную функцию $y = \varphi(x)$ действительного аргумента x (область определения которой включает в себя множество возможных значений случайной величины ξ).

Определение 4.1. Случайную величину η, которая каждому *элементарному исходу* ω ставит в соответствие число $\eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$, называют ***функцией*** $\varphi(\xi)$ ***(скалярной) от скалярной случайной величины*** ξ.

Функция $\eta = \varphi(\xi)$ от *дискретной случайной величины* также является дискретной случайной величиной, поскольку она не может принимать больше значений, чем случайная величина ξ. Очевидно, что если случайная величина ξ имеет *ряд распределения*, представленный в табл. 4.1, то ряд распределения случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ определяется табл. 4.2.

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Таблица 4.1.

При этом, если в верхней строке табл. 4.2 появляются одинаковые значения $\varphi(x_n)$, соответствующие столбцы нужно объединить в один, приписав им суммарную *вероятность*.

η	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\ldots$	$\varphi(x_n)$	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Таблица 4.2.

Функция $\eta = \varphi(\xi)$ от *непрерывной случайной величины* ξ может быть как непрерывной, так и дискретной (если, например, множество значений функции $\varphi(\xi)$ конечное или счетное).

Теорема 4.1. *Пусть ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_n = \mathsf{P}\{\xi = x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Тогда математическое ожидание случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ определяется формулой

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) p_n, \tag{4.1}$$

при этом требуется выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| p_n < +\infty. \tag{4.2}$$

Теорема 4.2. *Пусть ξ непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$. Тогда математическое ожидание случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ определяется формулой*

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx\,, \tag{4.3}$$

причем требуется выполнение условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| f(x)\, dx < +\infty$.

Теорема 4.3. *Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$. Пусть функция $y = \varphi(x)$ является монотонной и дифференцируемой функцией на множестве $S_\xi = \{x \in \mathbb{R} : f_\xi(x) > 0\}$ возможных значений ξ . Обозначим $x = \psi(y)$ функцию, обратную к $y = \varphi(x)$.*

Тогда плотность $f_\eta(y)$ случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ на множестве S_η возможных значений η есть

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)| \tag{4.4}$$

и $f_\eta(y) = 0$ для всех $y \in \mathbb{R} \setminus S_\eta$.

Если $y = \varphi(x)$ — функция немонотонная, то обратная функция неоднозначна. Обозначим через $\psi_1(y), \ldots, \psi_k(y)$, все значения (при данном y) обратной функции. Другими словами $\psi_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots k$ — все прообразы точки y при отображении $y = \varphi(x)$.

Теорема 4.4. *Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$. Пусть функция $y = \varphi(x)$ является кусочно монотонной функцией. Обозначим $x_i = \psi_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots k$, прообразы точки y при отображении $y = \varphi(x)$. Если функции $\psi_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots k$, дифференцируемы, то плотность $f_\eta(y)$ случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ на множестве S_η возможных значений η есть*

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} f_\xi(\psi_i(y))|\psi_i'(y)| \tag{4.5}$$

и $f_\eta(y) = 0$ для всех $y \in \mathbb{R} \setminus S_\eta$.

4.2 Решение типовых примеров

Пример 4.1. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения, представленный в табл. 4.3. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \ln \xi$.

ξ	*1*	*e*	e^2	e^3
P	*0,2*	*0,1*	*0,5*	*0,2*

Таблица 4.3

Поскольку математическое ожидание $\mathsf{M}\eta$ и второй момент $\mathsf{M}\eta^2$ функции $\eta = \varphi(\xi)$ от дискретной случайной величины ξ можно вычислить по формулам

Решение:

$$\mathsf{M}\eta = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i, \qquad \mathsf{M}\eta^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi^2(x_i)p_i,$$

то, поскольку здесь $\varphi(x) = \ln x$,

$$\mathsf{M}\eta = \ln 1 \cdot 0{,}2 + \ln e \cdot 0{,}1 + \ln e^2 \cdot 0{,}5 + \ln e^3 \cdot 0{,}2 = 1{,}7,$$
$$\mathsf{M}\eta^2 = \ln^2 1 \cdot 0{,}2 + \ln^2 e \cdot 0{,}1 + \ln^2 e^2 \cdot 0{,}5 + \ln^2 e^3 \cdot 0{,}2 = 3{,}9.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\eta = 1{,}7 \quad \text{и} \quad \mathsf{D}\eta = \mathsf{M}\eta^2 - (\mathsf{M}\eta)^2 = 3{,}9 - (1{,}7)^2 = 1{,}01.$$

Пример 4.2. Случайная величина ξ имеет *экспоненциальное распределение* с параметром $\lambda = 3$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = e^\xi$.

Решение: Поскольку математическое ожидание $\mathsf{M}\eta$ и второй момент $\mathsf{M}\eta^2$ функции $\eta = \varphi(\xi)$ от непрерывной случайной величины ξ можно вычислить, используя формулы

$$\mathsf{M}\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)\,dx, \quad \mathsf{M}\eta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)\,dx,$$

то, поскольку здесь $\varphi(x) = e^x$,

$$\mathsf{M}\eta = \int_{0}^{+\infty} e^x 3e^{-3x} dx = \frac{3}{2}, \quad \mathsf{M}\eta^2 = \int_{0}^{+\infty} e^{2x} 3e^{-3x} dx = 3.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\eta = \frac{3}{2}, \qquad \mathsf{D}\eta = \mathsf{M}(\eta^2) - (\mathsf{M}\eta)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Пример 4.3. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения, представленный в табл. 4.4. Найдем ряд распределения случайной величины $\eta = 2\xi^2 + 1$.

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

Таблица 4.4

Решение: Значениям $-2,\ -1,\ 0,\ 1$ и 2 случайной величины ξ соответствуют значения $9,\ 3,\ 1,\ 3$ и 9 случайной величины η. Воспользовавшись табл. 4.4, получим ряд распределения случайной величины η, представленный в табл. 4.5.

η	9	3	1	3	9
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

Таблица 4.5

Теперь, для того чтобы получить окончательный ответ, нужно объединить столбцы с одинаковыми значениями η (табл. 4.6).

η	1	3	9
P	0,1	0,3	0,6

Таблица 4.6

Пример 4.4. Случайная величина ξ распределена по закону Коши с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \dfrac{1}{\xi}$.

Решение: Учитывая, что, несмотря на разрывный характер функции $y = \varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, обратная функция $x = \psi(y) = \dfrac{1}{y}$ однозначна, и решая задачу по правилам для монотонной функции, получим по формуле (4.4) с учетом $\psi'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$, что

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{1}{\pi\left(1+\left(\frac{1}{y}\right)^2\right)}\left|-\frac{1}{y^2}\right|$$

или

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

т. е. величина, обратная величине, распределенной по закону Коши, также имеет распределение Коши.

Пример 4.5. Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с плотностью

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^{-x}, & x \geqslant 0; \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение:

I) первый способ

Функция $y = \varphi(x) = x^2$ на множестве $S_\xi = (0, \infty)$ возможных значений ξ монотонна, поэтому плотность распределения величины η может быть найдена по формуле (4.4). Следовательно

$$x = \psi(y) = \sqrt{y}, \qquad \psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Интервал $S_\eta = (0, \infty)$, в котором лежат значения случайной величины η, определяется областью значений функции $y = x^2$ для $x \in (0, \infty)$.

Таким образом для всех $y \in S_\eta = (0, \infty)$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

и $f_\eta(y) = 0$ для всех $y \notin S_\eta = (0, \infty)$.

Окончательно получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y \in (0, \infty), \\ 0, & y \notin (0, \infty). \end{cases}$$

II) второй способ

Забудем, что на множестве значений случайной величины $S_\eta = (0, \infty)$ функция x^2 немонотонна. В этом случае (см. рис. 4.1)

$$y = \varphi(x) = x^2,$$

$$x = \psi_1(y) = -\sqrt{y}, \qquad \psi_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$x = \psi_2(y) = \sqrt{y}, \qquad \psi_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

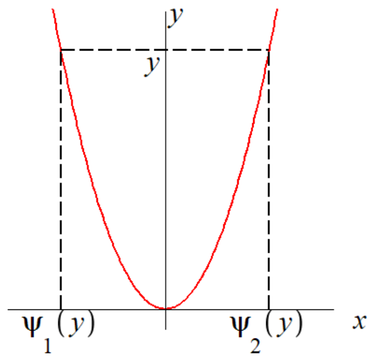

Рис 4.1

Таким образом для всех $y \in S_\eta = (0, \infty)$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi_1(y))|\psi_1'(y)| + f_\xi(\psi_2(y))|\psi_2'(y)| = 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

и $f_\eta(y) = 0$ для всех $y \notin S_\eta = (0, 1)$.

Окончательно получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y \in (0, \infty), \\ 0, & y \notin (0, \infty). \end{cases}$$

Пример 4.6. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sin \xi$.

Р е ш е н и е: По условию задачи

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

Далее, функция $y = \varphi(x) = \sin x$ в интервале $S_\xi = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ возможных значений ξ монотонна, поэтому плотность распределения величины η может быть найдена по формуле (4.4). Следовательно

$$x = \psi(y) = \arcsin y, \qquad \psi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Интервал $S_\eta = (-1, 1)$, в котором лежат значения случайной величины η, определяется областью значений функции $y = \sin x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом для всех $y \in S_\eta = (-1, 1)$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

и $f_\eta(y) = 0$ для всех $y \notin S_\eta = (-1, 1)$.

Окончательно получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1,1), \\ 0, & y \notin (-1,1). \end{cases}$$

Пример 4.7. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \cos\xi$.

Решение: Функция $y = \cos x$ в интервале $S_\xi = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ возможных значений ξ немонотонна, поэтому плотность распределения величины η может быть найдена по формуле (4.5). Решение будем составлять аналогично решению предыдущего примера с той разницей, что в данном случае для любого y обратная функция будет иметь два значения. Следовательно

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

$$y = \varphi(x) = \cos x,$$

$$x = \psi_1(y) = -\arccos y, \qquad \psi_1'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$x = \psi_2(y) = \arccos y, \qquad \psi_2'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Интервал $S_\eta = (0, 1)$, в котором лежат значения случайной величины η, определяется областью значений функции $y = \cos x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом для всех $y \in S_\eta = (0, 1)$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi_1(y))|\psi_1'(y)| + f_\xi(\psi_2(y))|\psi_2'(y)| = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 2\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

и $f_\eta(y) = 0$ для всех $y \notin S_\eta = (0, 1)$.

Окончательно получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0,1), \\ 0, & y \notin (0,1). \end{cases}$$

4.3 Задачи для самостоятельного решения

4.1. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения, представленный в табл. 4.7. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^2 + 1$.

ξ	1	2	3	4
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Таблица 4.7.

Ответ: $\mathsf{M}\eta = 2{,}6$, $\mathsf{D}\eta = 0{,}84$.

4.2. Площадь круга вычисляют по измеренному диаметру круга ξ, используя формулу $S = \pi\xi^2/4$. Считая, что измеренный диаметр круга ξ распределен равномерно на отрезке $[a, b]$, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины S.

Ответ: $\mathsf{M}S = \pi(a^2 + ab + b^2)/12$, $\quad \mathsf{D}S = \pi^2(b-a)^2(4a^2 + 7ab + 4b^2)/720$.

4.3. Площадь круга вычисляют по измеренному диаметру круга ξ, используя формулу $S = \pi\xi^2/4$. Считая, что измеренный диаметр круга ξ распределен равномерно на отрезке $[a, b]$, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины S.

Ответ: $\mathsf{M}S = \pi(a^2 + ab + b^2)/12$, $\quad \mathsf{D}S = \pi^2(b-a)^2(4a^2 + 7ab + 4b^2)/720$.

4.4. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\sin\xi|$.

Ответ:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0,1), \\ 0, & y \notin (0,1). \end{cases}$$

4.5. Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с плотностью

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^{-x}, & x \geqslant 0; \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2 - 2\xi$.

Ответ:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(1+\sqrt{1+y})}}{2\sqrt{1+y}}, & y \in [0, \infty), \\ \dfrac{e^{-(1-\sqrt{1+y})} + e^{-(1+\sqrt{1+y})}}{2\sqrt{1+y}}, & y \in (-1, 0), \\ 0, & y \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Семинар 5

Случайные векторы

5.1 Теоретические сведения

Определение 5.1. Упорядоченную пару случайных величин (ξ, η), заданных на одном и том же *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, назовем ***двумерным случайным вектором***, а случайные величины ξ, η — ***координатами случайного вектора***.

Определение 5.2. ***Функцией распределения (вероятностей)*** $F(x, y)$ случайного вектора (ξ, η) называют функцию, значение которой в точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{\xi < x\}, \{\eta < y\}$, т.е.

$$F(x,y) = \mathsf{P}\{\xi < x, \eta < y\}.$$

Обозначим через $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ функции распределения координат ξ и η. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Двумерная функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.*

1. $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$.

2. $F(x,y)$ *— неубывающая функция по каждому из аргументов* x *и* y.

3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$.

4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

5. $\mathsf{P}\{a \leqslant \xi < b,\ c \leqslant \eta < d\} = F(b,\ d) - F(b,\ c) - F(a,\ d) + F(a,\ c)$.

6. $F(x,y)$ *— непрерывная слева функция в любой точке* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *по каждому из аргументов* x *и* y.

7. $F(x, +\infty) = F_\xi(x), \quad F(+\infty, y) = F_\eta(y)$.

Определение 5.3. ***Двумерный случайный вектор*** (ξ, η) называют ***дискретным***, если каждая из случайных величин ξ и η является *дискретной*.

Распределение дискретного случайного вектора (ξ, η) описывается с помощью таблицы 5.1. В ней

$$p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\},$$

$$p_{i\bullet} = \mathsf{P}\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$$

и

$$p_{\bullet j} = \mathsf{P}\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$

ξ	η					
	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	P_ξ
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$	$p_{2\bullet}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	$p_{i\bullet}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
P_η	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\ldots$	$p_{\bullet j}$	$\ldots$	

Таблица 5.1

для всех $i = 1, 2, \ldots, \infty$, $j = 1, 2, \ldots, \infty$.

Совместная функция распределения $F(x,y)$ дискретного случайного вектора (ξ, η) имеет вид

$$F(x,y) = \sum_{\substack{i:\ x_i < x \\ j:\ y_j < y}} p_{ij}.$$

Определение 5.4. ***Двумерный случайный вектор*** (ξ, η) называют ***непрерывным***, если ее функцию распределения $F(x,y) = \mathsf{P}\{\xi < x, \eta < y\}$ можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(s,t)\,ds\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} ds \int\limits_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{y} dt \int\limits_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds.$$

Функцию $f(x,y)$ называют ***плотностью распределения вероятностей*** случайного вектора (ξ, η).

Заметим, что

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}. \tag{5.1}$$

Теорема 5.2. *Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами.*

1. $f(x,y) \geqslant 0$.
2. $\mathsf{P}\{a < \xi < b, c < \eta < d\} = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)\,dy$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$.
4. $\mathsf{P}\{x < \xi < x + \Delta x,\ y < \eta < y + \Delta y\} \approx f(x,y)\Delta x \Delta y$.
5. $\mathsf{P}\{\xi = x, \eta = y\} = 0$.
6. $\mathsf{P}\{(\xi,\eta) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$.
7. $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$.
8. $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$.

Замечание 5.1. Из свойства 5 теоремы 5.2 вытекает, что в п. 2 и п. 4 теоремы 5.2 знак «$<$» в любом месте можно заменить на знак «$\leqslant$».

Определение 5.5. ***Случайные величины*** ξ и η называют ***независимыми***, если *совместная функция распределения* $F(x,y)$ является произведением *одномерных функций распределения* $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$:

$$F(x,y) = F_\xi(x) F_\eta(y).$$

В противном случае ***случайные величины*** называют ***зависимыми***.

Из определения 5.5 вытекает, что для независимых случайных величин ξ и η события $\{\xi < x\}$ и $\{\eta < y\}$ являются независимыми.

Теорема 5.3. *Для того чтобы непрерывные случайные величины ξ и η были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы для всех x и y*

$$f(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

Теорема 5.4. *Если случайные величины ξ и η независимыми, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ кусочно-непрерывны, то случайные величины $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ также независимы.*

Предложение 5.1. *Если (ξ, η) — непрерывный случайный вектор с плотностью распределения $f(x,y)$, то функцию распределения $F_\zeta(z)$ случайной величины $\zeta = \varphi(\xi,\eta)$, где $z = \varphi(x,y)$ — некоторая функция, можно найти по формуле*

$$F_\zeta(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x,y)\,dxdy, \tag{5.2}$$

где $D(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) < z\}$.

Теорема 5.5. *Математическое ожидание* $\mathsf{M}\zeta$ *функции* $\zeta = \varphi(\xi,\eta)$ *от дискретного случайного вектора* (ξ,η) *равно*

$$\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}\varphi(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}, \tag{5.3}$$

где $p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\}$, $i,j = 1,2,\ldots,\infty$.

Теорема 5.6. *Математическое ожидание* $\mathsf{M}\zeta$ *функции* $\zeta = \varphi(\xi,\eta)$ *от непрерывного случайного вектора* $(\xi,\ \eta)$ *есть*

$$\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}\varphi(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)f(x,y)\,dxdy, \tag{5.4}$$

где $f(x,y)$ *— совместная плотность распределения случайных величин* ξ *и* η.

Теорема 5.7. *Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам.*

1. Если случайная величина ξ *принимает всего одно значение* C *с вероятностью единица (т.е., по сути дела, не является случайной величиной), то* $\mathsf{M}C = C$.

2. $\mathsf{M}(a\xi + b) = a\mathsf{M}\xi + b$, *где* a, b *— постоянные.*

3. $\mathsf{M}(\xi + \eta) = \mathsf{M}\xi + \mathsf{M}\eta$.

4. $\mathsf{M}(\xi\eta) = \mathsf{M}\xi\cdot\mathsf{M}\eta$ *для независимых случайных величин* ξ *и* η.

Теорема 5.8. *Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам.*

1. Если случайная величина ξ *принимает всего одно значение* C *с вероятностью единица, то* $\mathsf{D}C = 0$.

2. $\mathsf{D}(a\xi + b) = a^2\mathsf{D}\xi$, *где* a, b *— постоянные.*

3. $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2$.

4. $\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta$ *для независимых случайных величин* ξ *и* η.

Теорема 5.9 (формула свертки)**.** *Пусть* ξ *и* η *являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения вероятностей соответственно* $f_\xi(x)$ *и* $f_\eta(x)$.

Тогда плотность распределения вероятностей случайной величины $\zeta = \xi + \eta$ *имеет вид*

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)f_\eta(z-x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z-x)f_\eta(x)\,dx. \tag{5.5}$$

Определение 5.6. Функцию $f_\zeta(x)$ (5.5) называют ***сверткой*** функций $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$.

5.2 Решение типовых примеров

Пример 5.1. Случайный вектор (ξ,η) имеет функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \ \text{ или } \ y \leqslant 0; \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0 \ \text{ и } \ y > 0. \end{cases}$$

Найдем:

а) вероятности событий

$$\{-2 \leqslant \xi < 2,\, 1 \leqslant \eta < 3\},\ \ \{\xi \geqslant 0,\, \eta \geqslant 1\} \ \text{ и } \ \{\xi < 1,\, \eta \geqslant 2\};$$

б) функции распределения случайных величин ξ и η.

в) Проверим, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Р е ш е н и е: а) В соответствии со свойством *двумерной функции распределения* имеем

$$\mathsf{P}\{-2 \leqslant \xi < 2,\, 1 \leqslant \eta < 3\} = F(2,\,3) - F(2,\,1) - F(-2,\,3) + F(-2,\,1) =$$
$$= 1 - e^{-4} - e^{-6} + e^{-10} - (1 - e^{-4} - e^{-2} + e^{-6}) - 0 + 0 = e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}.$$

Событие $\{\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 1\}$ представляет собой попадание двумерной случайной величины (ξ, η) в квадрант $\{x \geqslant 0, y \geqslant 1\}$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant 0,\, \eta \geqslant 1\} = F(+\infty, +\infty) - F(+\infty, 1) - F(0, +\infty) + F(0, 1) = \\ = 1 - (1 - e^{-2}) - 0 + 0 = e^{-2}.$$

Аналогично

$$\mathsf{P}\{\xi < 1,\, \eta \geqslant 2\} = F(1, +\infty) - F(1, 2) - F(-\infty, +\infty) + F(-\infty, 2) = \\ = 1 - e^{-1} - (1 - e^{-1} - e^{-4} + e^{-5}) - 0 + 0 = e^{-4} - e^{-5}.$$

б) В соответствии со свойством двумерной функции распределения частные распределения случайных величин ξ и η задаются формулами

$$F_{\xi}(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases}$$

$$F_{\eta}(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$$

в) Из результатов примера следует, что совместная функция распределения $F(x, y)$ случайного вектора (ξ, η) совпадает при всех x и y с произведением частных функций распределения $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ случайных величин ξ и η. Поэтому случайные величины ξ и η являются независимыми согласно определению.

Пример 5.2. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ \sin x \sin y, & 0 < x \leqslant \pi/2 \text{ и } 0 < y \leqslant \pi/2; \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi/2 \text{ и } y > \pi/2; \\ \sin y, & x > \pi/2 \text{ и } 0 < y \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2 \text{ и } y > \pi/2. \end{cases}$$

Найдем:

а) вероятности событий

$$\left\{-1 \leqslant \xi < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \leqslant \eta < \frac{\pi}{3}\right\}, \ \left\{\xi \geqslant \frac{\pi}{4}, \eta \geqslant \frac{\pi}{4}\right\} \text{ и } \left\{\xi < \frac{\pi}{3}, \eta \geqslant \frac{\pi}{6}\right\};$$

б) частные функции распределения случайных величин ξ и η.

Р е ш е н и е: Действуя таким же образом, как в примере 5.1, имеем:

$$\text{а)} \quad \mathsf{P}\left\{-1 \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \leqslant \eta < \frac{\pi}{3}\right\} = F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) - \\ - F\left(-1, \frac{\pi}{3}\right) + F\left(-1, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\mathsf{P}\left\{\xi \geqslant \frac{\pi}{4}, \eta \geqslant \frac{\pi}{4}\right\} = F(+\infty, +\infty) - F\left(+\infty, \frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right) + F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \\ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2},$$

$$\mathsf{P}\left\{\xi < \frac{\pi}{3}, \eta \geqslant \frac{\pi}{6}\right\} = F\left(\frac{\pi}{3}, +\infty\right) - F\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) - F(-\infty, -\infty) + F\left(-\infty, \frac{\pi}{6}\right) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{б)} \quad F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2; \end{cases} \qquad F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ \sin y, & 0 < y \leqslant \pi/2; \\ 1, & y > \pi/2. \end{cases}$$

Пример 5.3. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (ξ, η) задано табл. 5.2. Найдем:

а) *ряды распределения* случайных величин ξ и η;

б) значения совместной функции распределения $F(x, y)$ в точках $(4{,}5;\, 8)$ и $(9;\, 11)$, а также вероятность события $\{4 \leqslant \xi < 9,\, 8 \leqslant \eta < 11\}$.

в) Проверим, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

ξ	η		
	3	8	12
3	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Таблица 5.2.

Решение: а) Поскольку событие $\{\xi = 3\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий $\{\xi = 3,\, \eta = 3\}$, $\{\xi = 3,\, \eta = 8\}$ и $\{\xi = 3,\, \eta = 12\}$, то

$$\mathsf{P}\{\xi{=}3\} = \mathsf{P}\{\xi{=}3, \eta{=}3\} + \mathsf{P}\{\xi{=}3, \eta{=}8\} + \mathsf{P}\{\xi{=}3, \eta{=}12\} = 0{,}55.$$

ξ	3	5
P	0,55	0,45

Таблица 5.3

Аналогично

$$\mathsf{P}\{\xi{=}5\} = \mathsf{P}\{\xi{=}5, \eta{=}3\} + \mathsf{P}\{\xi{=}5, \eta{=}8\} + \mathsf{P}\{\xi{=}5, \eta{=}12\} = 0{,}45.$$

Ряд распределения случайной величины ξ приведен в табл. 5.3.

Суммируя вероятности по столбцам (см. табл 5.2), находим:

$$\mathsf{P}\{\eta = 3\} = \mathsf{P}\{\xi = 3, \eta = 3\} + \mathsf{P}\{\xi = 5, \eta = 3\} = 0{,}27,$$

$$\mathsf{P}\{\eta = 8\} = \mathsf{P}\{\xi = 3, \eta = 8\} + \mathsf{P}\{\xi = 5, \eta = 8\} = 0{,}43,$$

$$\mathsf{P}\{\eta = 12\} = \mathsf{P}\{\xi = 3, \eta = 12\} + \mathsf{P}\{\xi = 5, \eta = 12\} = 0{,}30.$$

η	3	8	12
P	0,27	0,43	0,30

Таблица 5.4

Ряд распределения случайной величины η приведен в табл. 5.4.

б) Используя определение совместной функции распределения и то, что событие $\{\xi < 4{,}5,\, \eta < 8\}$ совпадает с событием $\{\xi = 3,\, \eta = 3\}$, получаем

$$F(4{,}5,\ 8) = \mathsf{P}\{\xi < 4{,}5, \eta < 8\} = \mathsf{P}\{\xi = 3, \eta = 3\} = 0{,}17.$$

Аналогично событие $\{\xi < 9, \eta < 11\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий $\{\xi = 3, \eta = 3\}$, $\{\xi = 3, \eta = 8\}$, $\{\xi = 5, \eta = 3\}$ и $\{\xi = 5, \eta = 8\}$, и, значит,

$$F(9,\, 11) = \mathsf{P}\{\xi < 9, \eta < 11\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi = 3, \eta = 3\} + \mathsf{P}\{\xi = 3, \eta = 8\} + \mathsf{P}\{\xi = 5, \eta = 3\} + \mathsf{P}\{\xi = 5, \eta = 8\} = 0{,}70.$$

Наконец,

$$\mathsf{P}\{4 \leqslant \xi < 9,\, 8 \leqslant \eta < 11\} = \mathsf{P}\{\xi = 5, \eta = 8\} = 0{,}30.$$

в) Поскольку вероятность события $\{\xi = 3,\, \eta = 3\}$ не равна произведению вероятностей событий $\{\xi = 3\}$ и $\{\eta = 3\}$, то случайные величины ξ и η являются зависимыми.

Пример 5.4. Совместная функция распределения *непрерывной двумерной случайной величины* $(\xi,\, \eta)$ имеет вид

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{b} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (a > 0, b > 0).$$

Найдем совместную плотность распределения.

Решение: Воспользовавшись равенством

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y},$$

получим

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{b} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{ab}{\pi^2(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)}.$$

Пример 5.5. *Совместная плотность распределения* непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ 3^{-x-y}\ln^2 3, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдем:

а) совместную функцию распределения;

б) частные плотности распределения случайных величин ξ и η;

в) вероятность попадания *случайного вектора* (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $A(2;1)$, $B(2;2)$ и $C(5;1)$.

Решение:

а) Совместная функция распределения

$$F(x,y) = 0$$

при $x \leqslant 0$ или $y \leqslant 0$, а при $x > 0$ и $y > 0$

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y 3^{-s-t}\ln^2 3 ds dt = \int_0^x ds \int_0^y 3^{-s-t}\ln^2 3 dt =$$
$$= \left(\int_0^x 3^{-s}\ln 3 ds\right)\left(\int_0^y 3^{-t}\ln 3 dt\right) = (1-3^{-x})(1-3^{-y}).$$

б) Частная плотность распределения случайной величины ξ равна 0 при $x \leqslant 0$, а при $x > 0$ имеет вид

$$f_\xi(x) = \int_0^{+\infty} 3^{-x-y}\ln^2 3 dy = 3^{-x}\ln 3.$$

Аналогично частная функция распределения случайной величины η равна 0 при $y \leqslant 0$, а при $y > 0$ определяется выражением

$$f_\eta(y) = \int_0^{+\infty} 3^{-x-y}\ln^2 3 dx = 3^{-y}\ln 3.$$

в) В соответствии со свойством совместной плотности распределения вероятность попадания случайного вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $A(2;1)$, $B(2;2)$ и $C(5;1)$ есть

$$\mathsf{P}\{(\xi,\eta) \in D\} = \iint_D f(x,y) dx dy,$$

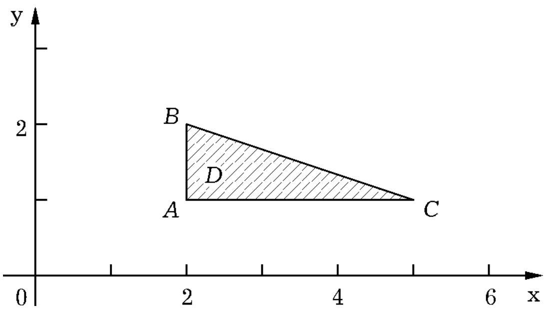

Рис 5.1

где область D представляет собой рассматриваемый треугольник (5.5). Проводя интегрирование, получаем

$$\mathsf{P}\{(\xi,\eta) \in D\} = \int_2^5 3^{-x}\ln 3 dx \int_1^{(8-x)/3} 3^{-y}\ln 3 dy =$$
$$= \int_2^5 3^{-x}\ln 3\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{27}3^{x/3}\right) dx = -\frac{1}{3}3^{-x}\Big|_2^5 + \frac{\sqrt[3]{3}}{18}3^{-2x/3}\Big|_2^5 = \frac{14}{27^2} \approx 0{,}019.$$

Пример 5.6. Распределение вероятностей двумерной случайной величины (ξ, η) задано табл. 5.5. Проверим, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

ξ	η		
	2	4	6
-1	0,08	0,12	0,20
1	0,12	0,18	0,30

Таблица 5.5

Решение: Ряды распределения случайных величин ξ и η представлены в табл. 5.6 и 5.7.

Из табл. 5.5–5.7 следует, что вероятность события $\{\xi = -1, \eta = 2\}$ совпадает с произведением вероятностей событий $\{\xi = -1\}$ и $\{\eta = 2\}$. Это же свойство верно и для всех остальных возможных пар значений случайных величин ξ и η. Поэтому случайные величины ξ и η являются независимыми.

ξ	-1	1
P	0,4	0,6

Таблица 5.6

η	2	4	6
P	0,2	0,3	0,5

Таблица 5.7

Пример 5.7. Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) представлен в табл. 5.8. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = \log_2(\xi/\eta)$.

$\eta \backslash \xi$	0,5	1	2
1	0,1	0,4	0,2
2	0,2	0	0,1

Таблица 5.8

Решение: В соответствии с формулой для вычисления математического ожидания функции от двумерной дискретной случайной величины

$$\mathsf{M}\zeta = \log_2 \frac{0{,}5}{1} \cdot 0{,}1 + \log_2 \frac{1}{1} \cdot 0{,}4 + \log_2 \frac{2}{1} \cdot 0{,}2 + \log_2 \frac{0{,}5}{2} \cdot 0{,}2 + \log_2 \frac{1}{2} \cdot 0 + \log_2 \frac{2}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}2,$$

$$\mathsf{M}\zeta^2 = \left(\log_2 \frac{0{,}5}{1}\right)^2 \cdot 0{,}1 + \left(\log_2 \frac{1}{1}\right)^2 \cdot 0{,}4 + \left(\log_2 \frac{2}{1}\right)^2 \cdot 0{,}2 + \\ + \left(\log_2 \frac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 0{,}2 + \left(\log_2 \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0 + \left(\log_2 \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$$

и

$$\mathsf{D}\zeta = 1{,}2 - (-0{,}2)^2 = 1{,}16.$$

Пример 5.8. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 > 1; \\ \dfrac{3\sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi}, & x^2 + y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = \xi\eta$.

Решение: Используя формулу для вычисления математического ожидания функции от двумерной непрерывной случайной величины, получаем

$$\mathsf{M}\zeta = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{3}{2\pi} xy\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \frac{3}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} x\, dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2 + y^2}\, dy = 0,$$

$$\mathsf{D}\zeta = \mathsf{M}\zeta^2 - (\mathsf{M}\zeta)^2 = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{3}{2\pi} x^2 y^2 \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi \int\limits_{0}^{1} \rho^4 \rho\rho\, d\rho = \frac{3}{112\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} (1 - \cos(4\varphi))\, d\varphi = \frac{3}{56} \approx 0{,}05.$$

Пример 5.9. Рассмотрим независимые случайные величины ξ и η, имеющие экспоненциальное распределение с параметрами λ и μ соответственно. Найдем плотность распределения суммы $\zeta = \xi + \eta$.

Поскольку ξ и η — положительные случайные величины, то случайная величина ζ также положительна и поэтому при $z < 0$

$$f_\zeta(z) = 0.$$

В случае $z > 0$, учитывая, что $f_\xi(x) = 0$ при $x < 0$ и $f_\eta(z - x) = 0$ при $x > z$, имеем, согласно формуле свертки,

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(z - x)\, dx = \int\limits_0^z \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(z-x)}\, dx = \lambda\mu e^{-\mu z} \int\limits_0^z e^{(\mu-\lambda)x}\, dx.$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $\lambda = \mu$, то

$$f_\zeta(z) = \lambda\mu e^{-\mu z} \int\limits_0^z dx = \lambda\mu z e^{-\mu z} = \lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

2) Если $\lambda \neq \mu$, то

$$f_\zeta(z) = \lambda\mu e^{-\mu z} \int\limits_0^z e^{(\mu-\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} e^{-\mu z} \left(e^{(\mu-\lambda)z} - 1\right) = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} \left(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}\right).$$

5.3 Задачи для самостоятельного решения

5.1. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}(4 \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} y + 2\pi \operatorname{arctg} x + 2\pi \operatorname{arctg} y + \pi^2).$$

Найдите:

а) вероятности событий $\{-1 \leqslant \xi < 1,\ 1 \leqslant \eta < \sqrt{3}\}$ и $\{\xi \geqslant 1,\ \eta \geqslant \sqrt{3}\}$;

б) частные функции распределения случайных величин ξ и η;

в) Проверьте, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Ответ:

а) $\mathsf{P}\{-1 \leqslant \xi < 1,\ 1 \leqslant \eta < \sqrt{3}\} = 1/24$, $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 1,\ \eta \geqslant \sqrt{3}\} = 1/24$.

б) $F_\xi(x) = \dfrac{1}{2\pi}(2 \operatorname{arctg} x + \pi)$, $F_\eta(y) = \dfrac{1}{2\pi}(2 \operatorname{arctg} y + \pi)$.

в) да, являются.

5.2. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \ \text{ или } \ y \leqslant 0; \\ \dfrac{\sin x + \sin y - \sin(x + y)}{2}, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{2}, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \ \text{ и } \ y > \pi/2; \\ \dfrac{\sin y - \cos y + 1}{2}, & x > \dfrac{\pi}{2} \ \text{ и } \ 0 < y \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2} \ \text{ и } \ y > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите:

а) вероятности событий $\{\pi/12 \leqslant \xi < \pi/4,\ \pi/12 \leqslant \eta < \pi/4\}$, $\{\xi \geqslant \pi/4,\ \eta \geqslant \pi/4\}$ и $\{\xi < \pi/3,\ \eta \geqslant \pi/6\}$;

б) частные функции распределения случайных величин ξ и η.

в) Проверьте, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Ответ:

а) $\mathsf{P}\{\pi/12 \leqslant \xi < \pi/4,\ \pi/12 \leqslant \eta < \pi/4\} = (2\sqrt{3} - 3)/4$,

$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \pi/4, \eta \geqslant \pi/4\} = (\sqrt{2}-1)/2, \quad \mathsf{P}\{\xi < \pi/3, \eta \geqslant \pi/6\} = 1/2.$

б)

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{2}, & 0 < x \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2; \end{cases} \qquad F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ \dfrac{\sin y - \cos y + 1}{2}, & 0 < y \leqslant \pi/2; \\ 1, & y > \pi/2. \end{cases}$$

в) Нет, не являются.

5.3. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (ξ, η) задано табл. 5.9. Найдите:

а) ряды распределения случайных величин ξ и η;

б) значения совместной функции распределения $F(x, y)$ в точках $(2{,}5; 25)$ и $(9; 11)$, а также вероятность события $\{2 \leqslant \xi < 9,\ 10 \leqslant \eta \leqslant 30\}$.

в) Проверьте, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

ξ	η			
	10	20	30	40
0,5	0,05	0,12	0,08	0,04
2,5	0,09	0,30	0,11	0,21

Таблица 5.9.

Ответ:

а) Ряды распределения случайных величин ξ и η приведены в табл. 5.10 и 5.11.

ξ	0,5	2,5
P	0,29	0,71

Таблица 5.10

η	10	20	30	40
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Таблица 5.11

б) $F(2{,}5,\ 25) = 0{,}17$, $F(9,\ 11) = 0{,}14$, $\mathsf{P}\{2 \leqslant \xi < 9,\ 10 \leqslant \eta < 30\} = 0{,}50$.

в) Нет, не являются.

5.4. Найдите совместную плотность распределения для непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) из задачи 5.2.

Ответ:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ или } y \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \dfrac{\sin(x+y)}{2}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

5.5. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ Ce^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдите:

а) постоянную C;

б) совместную функцию распределения;

в) частные плотности распределения случайных величин ξ и η;

г) вероятность попадания случайного вектора (ξ, η) в область, ограниченную прямыми $y = x,\ \ x + y = 2$ и $x = 0$.

д) проверьте, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Ответ:

а) $C = 8$.

б) $F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$

в) $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 4e^{-4x}, & x > 0; \end{cases} \quad f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ 2e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$

г) $\mathsf{P} = 2(1 - 3e^{-4} + 2e^{-6})/3$.

д) да, являются.

5.6. Непрерывная двумерная случайная величина (ξ, η) распределена равномерно в квадрате с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$. Найдите:

а) совместную плотность распределения;

б) совместную функцию распределения;

в) частные плотности распределения случайных величин ξ и η;

г) вероятность попадания случайного вектора (ξ, η) в круг $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1/2$.

д) проверьте, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Ответ:

а) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1] \text{ или } y \notin [0, 1]; \\ 1, & x \in [0, 1] \text{ и } y \in [0, 1]. \end{cases}$

б) $F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ xy, & 0 < x \leqslant 1 \text{ и } 0 < y \leqslant 1; \\ x, & 0 < x \leqslant 1 \text{ и } y > 1; \\ y, & x > 1 \text{ и } 0 < y \leqslant 1; \\ 1, & x > 1 \text{ и } y > 1. \end{cases}$

в) $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1]; \\ 1, & x \in [0, 1]; \end{cases}$ $f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 1]; \\ 1, & y \in [0, 1]. \end{cases}$

г) $\mathsf{P} = \pi/8$.

д) Да, являются.

5.7. Непрерывная двумерная случайная величина (ξ, η) имеет совместную плотность распределения

$$f(x,y) = \frac{C}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Найдите:

а) постоянную C;

б) совместную функцию распределения;

в) частные плотности распределения случайных величин ξ и η;

г) вероятность попадания случайного вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $(-1; 1)$, $(1; 1)$ и $(0; 0)$.

д) проверьте, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Ответ:

а) $C = 1/\pi$. б) $F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\right)$;

в) $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\quad f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$;

г) $\mathsf{P} = \frac{1}{16}$; д) Да, являются.

Семинар 6

Ковариация и коэффициент корреляции

6.1 Теоретические сведения

Определение 6.1. Пусть (ξ, η) — двумерный случайный вектор. ***Ковариацией*** $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$ *случайных величин* ξ и η называют число

$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{M}\big((\xi - \mathsf{M}\xi)(\eta - \mathsf{M}\eta)\big). \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *Ковариация дискретной двумерной случайной величины (ξ, η) равна*

$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i - \mathsf{M}\xi)(y_j - \mathsf{M}\eta)p_{ij}, \tag{6.2}$$

где $p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, \infty$.

Теорема 6.2. *Ковариация двумерной непрерывной случайной величины $(\xi,\ \eta)$ равна*

$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - \mathsf{M}\xi)(y - \mathsf{M}\eta)f(x, y)\,dx\,dy. \tag{6.3}$$

где $f(x, y)$ — совместная плотность распределения случайных величин ξ и η.

Теорема 6.3. *Пусть (ξ, η) — двумерный случайный вектор, a_1, b_1, a_2, b_2 — неслучайные действительные числа. Ковариация имеет следующие свойства*

1. $\mathsf{cov}(\xi, \xi) = \mathsf{D}\xi$.

2. $\mathsf{cov}(\xi, \eta) = 0$ *для независимых случайных величин ξ и η*

3. Если $\eta_i = a_i\xi_i + b_i$, $i = 1,\ 2$, то $\mathsf{cov}(\eta_1, \eta_2) = a_1a_2\mathsf{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

3а). $\mathsf{cov}(a_1\xi + a_2\eta, b_1\xi + b_2\eta) = a_1b_1\mathsf{D}\xi + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathsf{cov}(\xi, \eta) + a_2b_2\mathsf{D}\eta$.

4. $|\mathsf{cov}(\xi, \eta)| \leqslant \sqrt{\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta}$, *причем* $|\mathsf{cov}(\xi, \eta)| = \sqrt{\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta}$ *тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η связаны линейной зависимостью, т.е. существуют такие числа a и b, при которых $\eta = a\xi + b$.*

5. $\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{M}(\xi\eta) - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta$.

6. $\mathsf{D}(a\xi + b\eta + c) = a^2\mathsf{D}\xi + b^2\mathsf{D}\eta + 2ab\mathsf{cov}(\xi, \eta)$ *для любых действительных a, b и c.*

Определение 6.2. Пусть (ξ, η) — двумерный случайный вектор. Случайные величины ξ и η называют ***некоррелированными***, если их ковариация равна нулю, т.е. $\mathsf{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Определение 6.3. ***Матрицей ковариаций*** (***ковариационной матрицей***) случайного вектора (ξ, η) называют матрицу $\Sigma = \begin{pmatrix} \mathsf{D}\xi, & \mathsf{cov}(\xi, \eta) \\ \mathsf{cov}(\xi, \eta), & \mathsf{D}\eta \end{pmatrix}$ состоящую из ковариаций случайных величин ξ и η.

Определение 6.4. ***Коэффициентом корреляции*** случайных величин ξ и η называют число $\rho = \rho_{\xi\eta} = \rho(\xi, \eta)$, определяемое равенством (предполагается, что $\mathsf{D}\xi > 0$ и $\mathsf{D}\eta > 0$)

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi \cdot \mathsf{D}\eta}}. \tag{6.4}$$

Теорема 6.4. *Пусть (ξ, η) — двумерный случайный вектор, a_1, b_1, a_2, b_2 — неслучайные действительные числа. Коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$ имеет следующие свойства.*

1. $\rho(\xi, \xi) = 1$.

2. Если случайные величины ξ и η являются независимыми (и существуют $\mathsf{D}\xi > 0$ и $\mathsf{D}\eta > 0$), то $\rho(\xi, \eta) = 0$.

3. $\rho(a_1\xi + b_1, a_2\eta + b_2) = \pm\rho(\xi, \eta)$. При этом знак плюс нужно брать в том случае, когда a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки, и минус — в противном случае.

4. $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$.

5. $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η связаны линейной зависимостью.

6.2 Решение типовых примеров

Пример 6.1. Случайные величины U и V связаны со случайными величинами ξ и η соотношениями $U = \xi + 3\eta - 2$ и $V = 2\xi - \eta + 1$. Известно, что $\mathsf{M}\xi = 2$, $\mathsf{D}\xi = 1$, $\mathsf{M}\eta = -3$, $\mathsf{D}\eta = 4$, $\mathsf{cov}(\xi, \eta) = -1$. Найти вектор математических ожиданий $(\mathsf{M}U, \mathsf{M}V)$, ковариационную матрицу Σ вектора (U, V) и коэффициент корреляции ρ_{UV} между U и V.

Р е ш е н и е: Воспользовавшись формулами

$$\mathsf{M}(a\xi + b\eta + c) = a\mathsf{M}\xi + b\mathsf{M}\eta + c, \tag{6.5}$$

$$\mathsf{D}(a\xi + b\eta + c) = a^2\mathsf{D}\xi + b^2\mathsf{D}\eta + 2ab\mathsf{cov}(\xi, \eta) \tag{6.6}$$

для любых действительных a, b и c,

$$\mathsf{cov}(a_1\xi + a_2\eta, b_1\xi + b_2\eta) = a_1b_1\mathsf{D}\xi + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathsf{cov}(\xi, \eta) + a_2b_2\mathsf{D}\eta \tag{6.7}$$

для любых действительных a_1, a_2, b_1 и b_2,

$$\rho_{UV} = \frac{\mathsf{cov}(U, V)}{\sqrt{\mathsf{D}U\mathsf{D}V}}, \tag{6.8}$$

получим

$$\mathsf{M}U = \mathsf{M}(\xi + 3\eta - 2) = \mathsf{M}\xi + 3\mathsf{M}\eta - 2 = 2 + 3\cdot(-3) - 2 = -9, \tag{6.9}$$

$$\mathsf{D}U = \mathsf{D}(\xi + 3\eta - 2) = \mathsf{D}\xi + 3^2\mathsf{D}\eta + 2\cdot 1\cdot 3\cdot\mathsf{cov}(\xi, \eta) = 1 + 9\cdot 4 + 6\cdot(-1) = 31, \tag{6.10}$$

$$\mathsf{M}V = \mathsf{M}(2\xi - \eta + 1) = 2\mathsf{M}\xi - \mathsf{M}\eta + 1 = 2\cdot 2 - (-3) + 1 = 8, \tag{6.11}$$

$$\mathsf{D}V = \mathsf{D}(2\xi - \eta + 1) = 2^2\mathsf{D}\xi + (-1)^2\mathsf{D}\eta + 2\cdot 2\cdot(-1)\cdot\mathsf{cov}(\xi, \eta) = 4\cdot 1 + 1\cdot 4 - 4\cdot(-1) = 12, \tag{6.12}$$

$$\mathsf{cov}(U, V) = \mathsf{cov}(\xi + 3\eta - 2, 2\xi - \eta + 1) = 2\mathsf{D}\xi + (-1 + 6)\mathsf{cov}(\xi, \eta) - 3\mathsf{D}\eta = 2 - 5 - 12 = -15, \tag{6.13}$$

$$\rho_{UV} = \frac{\mathsf{cov}(U, V)}{\sqrt{\mathsf{D}U\mathsf{D}V}} = \frac{-15}{\sqrt{31\cdot 12}} = -\frac{5}{62}\sqrt{93} \approx -0.778. \tag{6.14}$$

Пример 6.2. Распределение вероятностей двумерной случайной величины (ξ, η) задано табл. 6.1. Найдем математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин ξ и η.

ξ \ η	-1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Таблица 6.1

ξ	0	1
P	0,45	0,55

Таблица 6.2

η	-1	0	1
P	0,25	0,40	0,35

Таблица 6.3

Решение: Сначала найдем ряды распределения случайных величин ξ и η, которые приведены в табл. 6.2 и 6.3.

Затем вычислим математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η:

$$\mathsf{M}\xi = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}55 = 0{,}55,$$

$$\mathsf{M}\eta = (-1) \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}40 + 1 \cdot 0{,}35 = 0{,}10,$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = 0^2 \cdot 0{,}45 + 1^2 \cdot 0{,}55 - (0{,}55)^2 = 0{,}2475.$$

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{M}\eta^2 - (\mathsf{M}\eta)^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}25 + 0^2 \cdot 0{,}40 + 1^2 \cdot 0{,}35 - (0{,}10)^2 = 0{,}59,$$

Для определения $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$ воспользуемся формулой

$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{M}(\xi\eta) - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta.$$

Тогда

$$\mathsf{M}(\xi\eta) = (-1) \cdot 0 \cdot 0{,}10 + (-1) \cdot 1 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}15) = 0,$$

$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) = 0 - 0{,}10 \cdot 0{,}55 = -0{,}055$$

и

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta}} = -\frac{0{,}055}{\sqrt{0{,}59 \cdot 0{,}2475}} \approx -0{,}144.$$

Ковариационная матрица имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}2475 & -0{,}055 \\ -0{,}055 & 0{,}59 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.3. Совместная плотность распределения двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,\ \pi/2) \quad \text{или} \quad y \notin (0,\ \pi/2); \\ \frac{1}{2}\sin(x+y), & x \in (0,\ \pi/2) \quad \text{и} \quad y \in (0,\ \pi/2). \end{cases}$$

Найдем математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин ξ и η.

Решение: Имеем

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\, dy, & x \in (0,\ \pi/2) \\ 0, & x \notin (0,\ \pi/2), \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin x + \cos x), & x \in (0,\ \pi/ \\ 0, & x \notin (0,\ \pi/ \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\, dx, & y \in (0,\ \pi/2) \\ 0, & y \notin (0,\ \pi/2), \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin y + \cos y), & y \in (0,\ \pi/ \\ 0, & y \notin (0,\ \pi/ \end{cases}$$

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} x(\sin x + \cos x) dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathsf{M}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} x^2(\sin x + \cos x) dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16},$$

$$\mathsf{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} y(\sin y + \cos y) dy = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathsf{M}\eta^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_\eta(y)\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} y^2(\sin y + \cos y) dy = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{M}\eta^2 - (\mathsf{M}\eta)^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}.$$

Далее,

$$\mathsf{M}(\xi\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} x\, dx \int\limits_{0}^{\pi/2} y \sin(x+y)\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}\sin x + \cos x - \sin x\right) dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathsf{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{M}(\xi\eta) - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi(4-\pi)}{16}$$

и

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta}} = \frac{\pi(4-\pi)}{\pi^2 + 8\pi - 32}.$$

Наконец, ковариационная матрица имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2+8\pi-32}{16} & \frac{\pi(4-\pi)}{16} \\ \frac{\pi(4-\pi)}{16} & \frac{\pi^2+8\pi-32}{16} \end{pmatrix}.$$

Пример 6.4. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (ξ,η) имеет вид

$$f(x,y) = \frac{2}{\pi(x^2+y^2+1)^3}.$$

Проверим, являются ли случайные величины ξ и η *некоррелированными.*

Р е ш е н и е: Найдем $\mathsf{M}\xi$:

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\, dxdy}{\pi(x^2+y^2+1)^3} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\, dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{\pi(x^2+y^2+1)^3}.$$

Здесь внутренний интеграл равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетная, а пределы интегрирования симметричны относительно начала координат. Поэтому $\mathsf{M}\xi = 0$.

Аналогично получаем, что $\mathsf{M}\eta = 0$.

Вычислим теперь ковариацию ξ и η:

$$\mathsf{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{M}(\xi\eta) - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xy\, dxdy}{\pi(x^2+y^2+1)^3} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2x\, dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\, dy}{\pi(x^2+y^2+1)^3} = 0.$$

Поскольку $\mathsf{cov}(\xi,\eta) = 0$, случайные величины ξ и η являются некоррелированными.

Пример 6.5. Случайные величины ξ и η имеют математические ожидания $\mathsf{M}\xi = 2$, $\mathsf{M}\eta = -1$, дисперсии $\mathsf{D}\xi = 3$, $\mathsf{D}\eta = 4$ и ковариацию $\mathsf{cov}(\xi,\eta) = -1$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$\zeta = 2\xi - 3\eta - 5.$$

Р е ш е н и е: В соответствии со свойствами 2 и 3 математического ожидания

$$\mathsf{M}\zeta = 2\mathsf{M}\xi + (-3)\mathsf{M}\eta - 5 = 2,$$

а, согласно свойствам 2 и 5 дисперсии,

$$\mathsf{D}\zeta = 2^2\mathsf{D}\xi + 2\cdot 2\cdot(-3)\mathsf{cov}(\xi,\eta) + (-3)^2\mathsf{D}\eta = 60.$$

6.3 Вопросы и задачи

6.1. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют математические ожидания $\mathsf{M}\xi_1 = -5$, $\mathsf{M}\xi_2 = 2$, дисперсии $\mathsf{D}\xi_1 = 0{,}5$, $\mathsf{D}\xi_2 = 0{,}4$ и ковариацию $\mathsf{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0{,}2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 4\xi_1 - 5\xi_2 + 25$.
Ответ: $\mathsf{M}\eta = -5$, $\mathsf{D}\eta = 10$.

6.2. Найдите математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин η_1 и η_2, где $\eta_1 = 3\xi_1 - 2\xi_2$, $\eta_2 = 5\xi_2 - \xi_1$, а случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют следующие числовые характеристики: $\mathsf{M}\xi_1 = -0{,}5$, $\mathsf{M}\xi_2 = 1$, $\mathsf{D}\xi_1 = 3$, $\mathsf{D}\xi_2 = 2{,}9$, $\mathsf{cov}(\xi_1, \xi_2) = 2$.
Ответ: $\mathsf{M}\eta_1 = -3{,}5$, $\mathsf{M}\eta_2 = 5{,}5$, $\mathsf{D}\eta_1 = 14{,}6$, $\mathsf{D}\eta_2 = 50{,}5$, $\mathsf{cov}(\eta_1, \eta_2) = -4$.

6.3. Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) представлен табл. 6.4. Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин ξ и η.

ξ	η		
	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Таблица 6.4.

Ответ: $\mathsf{M}\xi = 0{,}7$, $\mathsf{D}\xi = 0{,}21$, $\mathsf{M}\eta = -0{,}1$, $\mathsf{D}\eta = 0{,}49$, $\mathsf{M}\xi\eta = 0$, $\mathsf{cov}(\xi, \eta) = 0{,}07$, $\rho(\xi, \eta) = 1/\sqrt{21} \approx 0{,}218$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}07 \\ 0{,}07 & 0{,}49 \end{pmatrix}$.

6.4. Двумерная случайная величина $(\xi_1; \xi_2)$ распределена равномерно в квадрате $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади η прямоугольника со сторонами ξ_1 и ξ_2.
Ответ: $\mathsf{M}\eta = 1/4$, $\mathsf{D}\eta = 7/144$.

6.5. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (ξ_1, ξ_2) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин ξ_1 и ξ_2.
Ответ: $\mathsf{M}\xi_1 = \mathsf{M}\xi_2 = \sqrt{\pi}/2$, $\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{D}\xi_2 = (4-\pi)/4$, $\mathsf{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, $\rho = 0$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (4-\pi)/4 & 0 \\ 0 & (4-\pi)/4 \end{pmatrix}.$$

6.6. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (ξ_1, ξ_2) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}, & x > 0 \text{ и } y > 0, \end{cases}$$

где λ_1, $\lambda_2 > 0$.

Проверьте, являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 некоррелированными.
Ответ: Да, являются.

Семинар 11

Условные характеристики случайных величин

11.1 Теоретические сведения

Дискретные случайные векторы

Пусть (X, Y) — дискретный случайный вектор, принимающий значения (x_i, y_j) с вероятностями $p_{ij} = \mathsf{P}\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = \mathsf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Определение 11.1. ***Условной вероятностью*** π_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ того, что случайная величина X примет значение x_i при условии $Y = y_j$, называют условную вероятность события $\{X = x_i\}$ при условии наступления события $\{Y = y_j\}$, т.е.

$$\pi_{ij} = \mathsf{P}\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{\mathsf{P}\{X = x_i,\ Y = y_j\}}{\mathsf{P}\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}, \tag{11.1}$$

где $p_{Yj} = \mathsf{P}\{Y = y_j\} = \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$.

Условной вероятностью π^*_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ того, что случайная величина Y примет значение y_j при условии $X = x_i$, называют условную вероятность события $\{Y = y_j\}$ при условии наступления события события $\{X = x_i\}$, т.е.

$$\pi^*_{ij} = \mathsf{P}\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{\mathsf{P}\{X = x_i,\ Y = y_j\}}{\mathsf{P}\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Xi}}, \tag{11.2}$$

где $p_{Xi} = \mathsf{P}\{X = x_i\} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 11.1 (критерий независимости дискретных случайных величин)**.** *Дискретные случайные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда для любых $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$*

$$\pi_{ij} = p_{X_i}, \tag{11.3}$$

или

$$\pi^*_{ij} = p_{Y_j}, \tag{11.4}$$

то есть все условные вероятности совпадают с безусловными вероятностями.

Определение 11.2. Число $\mathsf{M}(X|y_j)$, определяемое формулой

$$\mathsf{M}(X|y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \pi_{ij}, \tag{11.5}$$

назовем ***условным математическим ожиданием*** дискретной случайной величины X ***при условии*** наступления события $\{Y = y_j\}$.

Число $\mathsf{M}(Y|x_i)$, определяемое формулой

$$\mathsf{M}(Y|x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \pi_{ij}^*, \tag{11.6}$$

назовем условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при условии наступления события $\{X = x_j\}$.

Замечание 11.1. $\mathsf{M}(X|y_j)$ и $\mathsf{M}(Y|x_i)$ — неслучайные величины.

Определение 11.3. ***Условным математическим ожиданием*** $\mathsf{M}(X|Y)$ дискретной случайной величины X относительно дискретной случайной величины Y называют функцию $\mathsf{M}(X|Y) = g(Y)$ от случайной величины Y, где область определения функции $g(y)$ совпадает с множеством значений $y_1, \ldots, y_n$ случайной величины Y, а каждому значению y_j аргумента y поставлено в соответствие число $g(y_j) = \mathsf{M}(X|y_j)$.

Условным математическим ожиданием $\mathsf{M}(Y|X)$ дискретной случайной величины Y относительно дискретной случайной величины X называют функцию $\mathsf{M}(Y|X) = g(X)$ от случайной величины X, где область определения функции $g(x)$ совпадает с множеством значений $x_1, \ldots, x_m$ случайной величины X, а каждому значению x_i аргумента x поставлено в соответствие число $g(x_i) = \mathsf{M}(Y|x_i)$.

Замечание 11.2. Условное математическое ожидание $\mathsf{M}(X|Y)$ является функцией от случайной величины, то есть случайной величиной. Для каждого $\omega \in \Omega$ значение $\mathsf{M}(X|Y)(\omega)$ случайной величины $\mathsf{M}(X|Y)$ в точке ω есть число $\mathsf{M}(X|Y = y)$, где $y = Y(\omega)$.

Определение 11.4. ***Условной дисперсией*** $\mathsf{D}(X|Y)$ случайной величины X относительно (случайной величины) Y называют случайную величину, задаваемую формулой

$$\mathsf{D}(X|Y) = \mathsf{M}\big(\big[X - \mathsf{M}(X|Y)\big]^2|Y\big). \tag{11.7}$$

Замечание 11.3. Приведенное определение условной дисперсии применимо как для дискретного, так и для непрерывного случайного вектора.

Теорема 11.2. *Для дискретного случайного вектора (X, Y)* ***значение*** $\mathsf{D}(X|y_j)$ ***условной дисперсии*** $\mathsf{D}(X|Y)$ *случайной величины X при условии $Y = y_j$ определяется формулой*

$$\mathsf{D}(X|y_j) = \mathsf{M}\big([X - \mathsf{M}(X|y_j)]^2|y_j\big) = \sum_{i=1}^{m} \big[x_i - \mathsf{M}(X|y_j)\big]^2 \pi_{ij}; \tag{11.8}$$

значение $\mathsf{D}(Y|x_i)$ условной дисперсии $\mathsf{D}(Y|X)$ случайной величины Y при условии $X = x_i$ определяется формулой

$$\mathsf{D}(Y|x_i) = \mathsf{M}\big([Y - \mathsf{M}(Y|x_i)]^2|x_i\big) = \sum_{j=1}^{n} \big[y_j - \mathsf{M}(Y|x_i)\big]^2 \pi_{ij}^*. \tag{11.9}$$

Непрерывные случайные векторы

Пусть (X, Y) — непрерывный случайный вектор с совместной плотностью распределения $p(x, y)$ и плотностями распределения координат X и Y $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ соответственно:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dy, \tag{11.10}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx. \tag{11.11}$$

Определение 11.5. Функцию

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, \tag{11.12}$$

рассматриваемую при фиксированном y как функцию от x, называют ***условной плотностью*** распределения случайной величины X при условии $Y = y$.

Функцию

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, \tag{11.13}$$

рассматриваемую при фиксированном x как функцию от y, называют условной плотностью распределения случайной величины Y при условии $X = x$.

Теорема 11.3 (критерий независимости непрерывных случайных величин). *Непрерывные случайные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда для любых x и y*

$$p_X(x|y) = p_X(x), \tag{11.14}$$

или

$$p_Y(y|x) = p_Y(y), \tag{11.15}$$

то есть условные плотности распределения совпадают с безусловными.

Определение 11.6. Число

$$\mathsf{M}(X|y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x|y)\,dx, \tag{11.16}$$

называют ***условным математическим ожиданием*** непрерывной случайной величины X ***при условии*** $Y = y$, а число

$$\mathsf{M}(Y|x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y|x)\,dy, \tag{11.17}$$

называют условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины Y при условии $X = x$.

Определение 11.7. Для непрерывного случайного вектора (X,Y) ***условным математическим ожиданием*** $\mathsf{M}(X|Y)$ случайной величины X относительно случайной величины Y называют функцию $g(Y) = \mathsf{M}(X|Y)$ от случайной величины Y, принимающую значение $g(y) = \mathsf{M}(X|y)$ при $Y = y$.

Теорема 11.4. *Для непрерывного случайного вектора (X,Y)* ***значение*** $\mathsf{D}(X|y)$ ***условной дисперсии*** $\mathsf{D}(X|Y)$ *случайной величины X при условии $Y = y$ определяется формулой*

$$\mathsf{D}(X|y) = \mathsf{M}\big([X - \mathsf{M}(X|y)]^2\big|y\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[x - \mathsf{M}(X|y)\big]^2 p_X(x|y)\,dx, \tag{11.18}$$

а значение $\mathsf{D}(Y|x)$ условной дисперсии $\mathsf{D}(Y|X)$ случайной величины Y при условии $X = x$ определяется формулой

$$\mathsf{D}(Y|x) = \mathsf{M}\big([Y - \mathsf{M}(Y|x)]^2\big|x\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[y - \mathsf{M}(Y|x)\big]^2 p_Y(y|x)\,dy. \tag{11.19}$$

Замечание 11.4. Условное распределение (для дискретных случайных величин), и условную плотность распределения (для непрерывных случайных величин) — называют ***условными законами распределения***.

11.2 Решение типовых примеров

Пример 11.1. Распределение двумерного *случайного вектора* (X, Y) задано табл. 11.1. Найдем *условное распределение случайной величины* X при условии, что случайная величина Y приняла значение y_j, $j = 1, 2$, и условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x_i, $i = 1, 2, 3$. Используя найденные условные распределения, проверим, являются ли *случайные величины* X и Y *независимыми*.

X	Y		
	0,2	0,5	0,8
0,04	0,15	0,30	0,35
0,08	0,05	0,12	0,03

Таблица 11.1

Решение: Распределения случайных величин Y и X приведены в табл. 11.2 и 11.3.

Y	0,2	0,5	0,8
P	0,20	0,42	0,38

Таблица 11.2

X	0,04	0,08
P	0,8	0,2

Таблица 11.3

Воспользовавшись определением *условных вероятностей*

$$\pi_{ij} = \mathsf{P}\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}},$$

имеем:

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}04 | Y = 0{,}2\} = 0{,}15/0{,}20 = 0{,}750,\\
\pi_{21} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}08 | Y = 0{,}2\} = 0{,}05/0{,}20 = 0{,}250,\\
\pi_{12} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}04 | Y = 0{,}5\} = 0{,}15/0{,}42 \approx 0{,}714,\\
\pi_{22} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}08 | Y = 0{,}5\} = 0{,}12/0{,}42 \approx 0{,}286,\\
\pi_{13} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}04 | Y = 0{,}8\} = 0{,}35/0{,}38 \approx 0{,}921,\\
\pi_{23} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}08 | Y = 0{,}8\} = 0{,}03/0{,}38 \approx 0{,}079.
\end{aligned}$$

X	Y		
	0,2	0,5	0,8
0,04	0,750	0,714	0,921
0,08	0,250	0,286	0,079

Таблица 11.4

Таким образом, для условного закона распределения случайной величины X при условии Y получаем табл. 11.4.

Аналогично находим условные вероятности

$$\pi^*_{ij} = \mathsf{P}\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{Xi}},$$

представленные в табл. 11.5.

Y	X	
	0,04	0,08
0,2	0,1875	0,2500
0,5	0,3750	0,6000
0,8	0,4375	0,1500

Таблица 11.5

Поскольку, например, столбцы в табл. 11.5 не совпадают, то случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 11.2. Будем говорить, что случайный вектор (X, Y) имеет ***равномерное распределение*** в области D (с площадью S), если его плотность распределения

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x; y) \in D; \\ 0, & (x; y) \notin D. \end{cases}$$

Пусть случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$. Найдем условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y, и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x. Используя найденные условные плотности распределения, проверим, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Решение: Поскольку двумерный случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в области D, представляющей собой треугольник с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 2)$, $1, 0)$, то его плотность распределения имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно найти частные плотности распределения случайных величин X и Y:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2(1 - x), & x \in [0,\ 1]; \\ 0, & x \notin [0,\ 1]; \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1 - y/2, & y \in [0,\ 2]; \\ 0, & y \notin [0,\ 2]. \end{cases}$$

Воспользовавшись теперь определением условной плотности распределения, получаем

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}, & x \in [0,\, 1-y/2] \text{ и } y \in [0,\, 2]; \\ 0, & x \notin [0,\, 1-y/2] \text{ и } y \in [0,\, 2]; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)}, & y \in [0,\, 2(1-x)] \text{ и } x \in [0,\, 1]; \\ 0, & y \notin [0,\, 2(1-x)] \text{ и } x \in [0,\, 1]. \end{cases}$$

При $y \notin [0, 2]$ и $x \notin [0, 1]$ условные плотности распределения $p_X(x|y)$ и $p_Y(y|x)$ не определяются, поскольку случайная величина Y не может попасть вне отрезка $[0, 2]$, а случайная величина X — вне отрезка $[0, 1]$.

Так как, например, условная плотность распределения $p_X(x|y)$ зависит от y, а плотность распределения $p_X(x)$ от y не зависит, случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 11.3. В условиях примера 11.1 найдем условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии. $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$

Р е ш е н и е: Используя определение условного математического ожидания для *двумерной дискретной случайной величины* и результаты примера 11.1, находим значения $\mathsf{M}(X|y_j)$ и $\mathsf{M}(Y|x_i)$ условных математических ожиданий $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}(X|0{,}2) = 0{,}04 \cdot 0{,}75 + 0{,}08 \cdot 0{,}25 = 0{,}05,\\
&\mathsf{M}(X|0{,}5) = 0{,}04 \cdot 0{,}714 + 0{,}08 \cdot 0{,}286 = 0{,}05144,\\
&\mathsf{M}(X|0{,}8) = 0{,}04 \cdot 0{,}921 + 0{,}08 \cdot 0{,}079 = 0{,}04316,\\
&\mathsf{M}(Y|0{,}04) = 0{,}2 \cdot 0{,}1875 + 0{,}5 \cdot 0{,}375 + 0{,}8 \cdot 0{,}4375 = 0{,}575,\\
&\mathsf{M}(Y|0{,}08) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}47.
\end{aligned}$$

Таким образом, условное математическое ожидание $\mathsf{M}(X|Y)$ является функцией $g(y)$ от случайной величины Y, причем область определения функции $g(y)$ состоит из трех точек $0{,}2,\ \ 0{,}5,\ \ 0{,}8$ и

$$g(0{,}2) = 0{,}05, \qquad g(0{,}5) = 0{,}05144, \qquad g(0{,}8) = 0{,}04316.$$

Аналогично условное математическое ожидание $\mathsf{M}(Y|X)$ является функцией $h(X)$ от случайной величины X, причем область определения функции $h(x)$ состоит из двух точек $0{,}04,\ \ 0{,}08$ и

$$h(0{,}04) = 0{,}575, \qquad h(0{,}08) = 0{,}47.$$

Вычислим теперь значения $\mathsf{D}(X|y_j)$ и $\mathsf{D}(Y|x_i)$ условных дисперсий $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$:

$$\mathsf{D}(X|0{,}2) = \mathsf{M}(X^2|0{,}2) - \big(\mathsf{M}(X|0{,}2)\big)^2 = 0{,}04^2 \cdot 0{,}75 + 0{,}08^2 \cdot 0{,}25 - 0{,}05^2 = 0{,}0003,$$

$$\mathsf{D}(X|0{,}5) = \mathsf{M}(X^2|0{,}5) - \big(\mathsf{M}(X|0{,}5)\big)^2 = 0{,}04^2 \cdot 0{,}714 + 0{,}08^2 \cdot 0{,}286 - 0{,}05144^2 = 0{,}00033,$$

$$\mathsf{D}(X|0{,}8) = \mathsf{M}(X^2|0{,}8) - \big(\mathsf{M}(X|0{,}8)\big)^2 = 0{,}04^2 \cdot 0{,}921 + 0{,}08^2 \cdot 0{,}079 - 0{,}04316^2 \approx 0{,}00012,$$

$$\mathsf{D}(Y|0{,}04) = \mathsf{M}(Y^2|0{,}04) - \big(\mathsf{M}(Y|0{,}04)\big)^2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}1875 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}375 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}4375 - 0{,}575^2 \approx 0{,}051,$$

$$\mathsf{D}(Y|0{,}08) = \mathsf{M}(Y^2|0{,}08) - \big(\mathsf{M}(Y|0{,}08)\big)^2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}25 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}15 - 0{,}47^2 \approx 0{,}035.$$

Условная дисперсия $\mathsf{D}(X|Y)$ является функцией от случайной величины Y с областью определения, состоящей из точек $0{,}2,\ \ 0{,}5,\ \ 0{,}8$, и

$$\mathsf{D}(X|0{,}2) = 0{,}0003, \quad \mathsf{D}(X|0{,}5) = 0{,}00033, \quad \mathsf{D}(X|0{,}8) = 0{,}00012.$$

Условная дисперсия $\mathsf{D}(Y|X)$ является функцией от случайной величины X с областью определения, состоящей из точек $0{,}04,\ \ 0{,}8$, и

$$\mathsf{D}(Y|0{,}04) = 0{,}051, \qquad \mathsf{D}(Y|0{,}08) = 0{,}035.$$

Пример 11.4. В условиях примера 11.2 найдем условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$.

Р е ш е н и е: Поскольку случайная величина Y принимает значения только из отрезка $[0, 2]$, а случайная величина X — из отрезка $[0, 1]$, то значения $\mathsf{M}(X|y)$ условного математического ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и значение $\mathsf{D}(X|y)$ условной дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ заданы только для y из отрезка $[0, 2]$, а значения $\mathsf{M}(Y|x)$ дисперсии $\mathsf{D}(Y|X)$ заданы только для x из отрезка $[0, 1]$. Поэтому далее будем предполагать, не оговаривая этого особо, что $y \in [0, 2]$, а $x \in [0, 1]$.

Воспользовавшись определением 11.7 условного математического ожидания и условной дисперсии 11.4 для непрерывной случайной величины и результатами примера 11.2, найдем:

$$\mathsf{M}(X|y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x|y)\,dx = \int\limits_{0}^{1-y/2} \frac{2x\,dx}{2-y} = \frac{2-y}{4},$$

$$\mathsf{M}(Y|x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y|x)\,dy = \int\limits_{0}^{2(1-x)} \frac{y\,dy}{2(1-x)} = 1-x,$$

$$\mathsf{D}(X|y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathsf{M}(X|y)\right)^2 p_X(x|y)\,dx = \int\limits_{0}^{1-y/2} \left(x - \frac{2-y}{4}\right)^2 \frac{2\,dx}{2-y} = \frac{(2-y)^2}{48},$$

$$\mathsf{D}(Y|x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathsf{M}(Y|x)\right)^2 p_Y(y|x)\,dy = \int\limits_{0}^{2(1-x)} \frac{\left(y-(1-x)\right)^2 dy}{2(1-x)} = \frac{(1-x)^2}{3}.$$

Таким образом, условное математическое ожидание

$$\mathsf{M}(X|Y) = g(Y) = \frac{2-Y}{4},$$

условное математическое ожидание

$$\mathsf{M}(Y|X) = h(X) = 1-X,$$

условная дисперсия

$$\mathsf{D}(X|Y) = \frac{(2-Y)^2}{48},$$

условная дисперсия

$$\mathsf{D}(Y|X) = \frac{(1-X)^2}{3}.$$

11.3 Задачи

11.1. Распределение двумерного случайного вектора (X, Y) задано табл. 11.6. Найдите условное распределение случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y_j, $j = 1, 2$, и условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x_i, $i = 1, 2, 3$.

	Y		
X	0,10	0,15	0,20
0,3	0,25	0,15	0,32
0,6	0,10	0,05	0,13

Таблица 11.6.

Используя найденные условные распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Найдите условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$.

	Y		
X	0,10	0,15	0,20
0,3	5/7	3/4	32/45
0,6	2/7	1/4	13/45

Таблица 11.7.

О т в е т: Условные распределения случайной величины X при условии Y и случайной величины Y при условии Xпредставлены в табл. 11.7 и 11.8 соответственно. Случайные величины X и Y являются зависимыми.

$\mathsf{M}(X|0{,}10) \approx 0{,}39$, $\mathsf{M}(X|0{,}15) = 0{,}375$,$\mathsf{M}(X|0{,}20) \approx 0{,}39$,
$\mathsf{M}(Y|0{,}3) \approx 0{,}16$, $\mathsf{M}(Y|0{,}6) \approx 0{,}55$,
$\mathsf{D}(X|0{,}10) \approx 0{,}018$, $\mathsf{D}(X|0{,}15) \approx 0{,}17$, $\mathsf{D}(X|0{,}20) \approx 0{,}17$,
$\mathsf{D}(Y|0{,}3) \approx 0{,}0019$, $\mathsf{D}(Y|0{,}6) \approx 0{,}0020$.

Y	X	
	0,3	0,6
0,10	25/72	5/14
0,15	5/24	5/28
0,20	4/9	13/28

Таблица 11.8

11.2. Двумерный случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в прямоугольнике с вершинами в точках $(-3, -10)$, $(-3, 10)$, $(3, 10)$ и $(3, -10)$. Найдите условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x. Используя найденные условные плотности распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Найдите условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$.

Ответ:

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & |x| \leqslant 3 \text{ и } |y| \leqslant 10; \\ 0, & |x| > 3 \text{ и } |y| \leqslant 10; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & |y| \leqslant 10 \text{ и } |x| \leqslant 3; \\ 0, & |y| > 10 \text{ и } |x| \leqslant 3. \end{cases}$$

Случайные величины X и Y являются независимыми. $\mathsf{M}(X|Y) \equiv \mathsf{M}X = 0$, $\mathsf{M}(Y|X) \equiv \mathsf{M}Y = 0$,

$\mathsf{D}(X|Y) \equiv \mathsf{D}X = 3$, $\mathsf{D}(Y|X) \equiv \mathsf{D}Y = 100/3$, $g(y) \equiv 0$,

11.3. Непрерывный двумерный случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$p(x, y) = \begin{cases} Cy, & (x; y) \in D; \\ 0, & (x; y) \notin D, \end{cases}$$

где D — область, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = 1$. Найдите постоянную C, условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y, и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x. Используя найденные условные плотности распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Найдите условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$.

Ответ:

$$C = 5/4;$$

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \text{ и } y \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \text{ и } y \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{1 - x^4}, & y \in [x^2, 1] \text{ и } x \in (-1, 1); \\ 0, & y \notin [x^2, 1] \text{ и } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Условная плотность $p_X(x|y)$ не определяется при $y \notin (0, 1]$, условная плотность $p_Y(y|x)$ — при $x \notin (-1, 1)$. Случайные величины X и Y являются зависимыми.

$\mathsf{M}(X|Y) \equiv 0$, $\mathsf{M}(Y|X) = \frac{2(1+X^2+X^4)}{3(1+X^2)}$, $\mathsf{D}(X|Y) = \frac{Y}{3}$, $\mathsf{D}(Y|X) = \frac{(1-X^2)^2(1+4X^2+X^4)}{18(1+X^2)^2}$,

$g(y) \equiv 0$, $h(x) = \frac{2(1+x^2+x^4)}{(3(1+x^2)}$.

Семинар 12

Многомерное нормальное распределение

12.1 Теоретические сведения

Определение 12.1. Случайный вектор (ξ, η) называется двумерным нормальным случайным вектором, если его плотность имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}. \tag{12.1}$$

Двумерное нормальное распределение зависит от пяти параметров: $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$. Смысл пяти параметров m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ таков: $m_1 = \mathsf{M}\xi$, $m_2 = \mathsf{M}\eta$, $\sigma_1^2 = \mathsf{D}\xi$, $\sigma_2^2 = \mathsf{D}\eta$, ρ — коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

Ниже приводится определение, равносильное определению 12.1.

Определение 12.2. Случайный вектор (ξ, η) называется двумерным ***нормальным (гауссовским) случайным вектором***, если его плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)\widetilde{\Sigma}(x-m)^T}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{12.2}$$

где $m = (m_1, m_2)$, $\widetilde{\Sigma}$ — матрица, обратная к ковариационной матрице Σ случайного вектора (ξ, η) , а T — операция транспонирования.

Заметим, что

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathsf{D}\xi, & \mathsf{cov}(\xi,\eta) \\ \mathsf{cov}(\xi,\eta), & \mathsf{D}\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2, & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2, & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

$$\widetilde{\Sigma} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}. \tag{12.4}$$

Отсюда вытекает равносильность определений 12.2 и 12.1.

Ниже приводится еще одно определение, равносильное определениям 12.2 и 12.1.

Определение 12.3. Случайный вектор (ξ, η) называется двумерным нормальным случайным вектором, если для любых действительных чисел c_1 и c_2 случайная величина $c_1\xi + c_2\eta$ является нормальной.

Теорема 12.1. *Определения 12.1, 12.2 и 12.3 эквивалентны.*

Для удобства далее всюду символ $X \sim \mathcal{N}(\mu, d)$ будет означать, что X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией d.

Теорема 12.2. *Пусть (ξ, η) — двумерный нормальный случайный вектор с параметрами m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ.*

Тогда $\xi \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, *то есть плотность случайных величин* ξ *и* η *имеет вид*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2}, \tag{12.5}$$

и

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \tag{12.6}$$

соответственно.

Замечание 12.1. Теорема 12.2 утверждает, что координаты двумерного нормального вектора являются нормальными случайными величинами. Обратное, вообще говоря, неверно, то есть можно построить случайный вектор, не являющийся нормальным, но координаты которого являются нормальными случайными величинами.

12.2 Решение типовых примеров

Пример 12.1. Случайный вектор (ξ, η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $(0, 2)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти $\mathsf{P}\{\xi - \eta > -1\}$.

Р е ш е н и е:

$$\mathsf{P}\{\xi - \eta > -1\} = \mathsf{P}\{\eta - \xi < 1\} = \mathsf{P}\{\zeta < 1\}, \tag{12.7}$$

где $\zeta = \eta - \xi$, причем согласно определению 12.3, случайная величина ζ является нормальной. Поэтому для ζ как и для всякой нормальной случайной величины

$$\mathsf{P}\{a < \zeta < b\} = \Phi\left(\frac{b - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right), \tag{12.8}$$

$$\mathsf{P}\{\zeta < b\} = \Phi\left(\frac{b - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right), \tag{12.9}$$

$$\mathsf{P}\{a < \zeta\} = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right). \tag{12.10}$$

Из формул

$$\mathsf{M}(a\xi + b\eta + c) = a\mathsf{M}\xi + b\mathsf{M}\eta + c, \tag{12.11}$$

$$\mathsf{D}(a\xi + b\eta + c) = a^2\mathsf{D}\xi + b^2\mathsf{D}\eta + 2ab\,\mathsf{cov}(\xi, \eta), \tag{12.12}$$

где a, b и c — произвольные действительные числа, вытекает, что

$$\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}\eta - \mathsf{M}\xi = 2 - 0 = 2, \qquad \mathsf{D}\zeta = \mathsf{D}\eta + \mathsf{D}\xi - 2\mathsf{cov}(\eta, \xi) = 7 + 5 - 2 \cdot 3 = 6. \tag{12.13}$$

Поэтому с учетом того, что $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ для любого $z \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082$ и $\Phi(0.4082) \approx 0.658$, получим

$$\mathsf{P}\{\xi - \eta > -1\} = \mathsf{P}\{\zeta < 1\} = \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 0.342. \tag{12.14}$$

12.3 Задачи

12.1. Случайный вектор (ξ, η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $(3, 1)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти $\mathsf{P}\{2\eta - \xi > 5\}$.

О т в е т: $\mathsf{P}\{2\eta - \xi > 5\} = \Phi\left(-\frac{6}{5}\right) \approx 0,1151$.

Семинар 13

Предельные теоремы теории вероятностей

13.1 Теоретические сведения

Определение 13.1. Если последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ случайных величин удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right\} = 1, \tag{13.1}$$

то говорят о ***сходимости*** этой последовательности к случайной величине ξ ***с вероятностью 1 или почти наверное*** и обозначают

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi. \tag{13.2}$$

Определение 13.2. Если последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ случайных величин для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1, \tag{13.3}$$

то говорят о ***сходимости*** этой последовательности к случайной величине ξ ***по вероятности***. Сходимость к ξ по вероятности записывается в виде

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \xi. \tag{13.4}$$

Теорема 13.1 (первое неравенство Чебышёва)**.** *Для каждой неотрицательной случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание $\mathsf{M}\xi$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi}{\varepsilon}, \tag{13.5}$$

или

$$\mathsf{P}\{\xi < \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathsf{M}\xi}{\varepsilon}. \tag{13.6}$$

Теорема 13.2 (второе неравенство Чебышёва)**.** *Для каждой случайной величины ξ, имеющей дисперсию $\mathsf{D}\xi$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо* ***второе неравенство Чебышёва***

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}, \tag{13.7}$$

или

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \tag{13.8}$$

Определение 13.3. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел*** (***слабому***), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}\xi_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{13.9}$$

т.е.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0. \tag{13.10}$$

Теорема 13.3 (закон больших чисел в форме Чебышёва)**.** *Если последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимых случайных величин такова, что существуют $\mathsf{M}\xi_i$ и $\mathsf{D}\xi_i$, причем дисперсии ограничены в совокупности (т.е. $\mathsf{D}\xi_i \leqslant C$ для некоторой постоянной C), то для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ выполнен закон больших чисел.*

При этом говорят также, что к последовательности ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n, $\ldots$ случайных величин применим ***закон больших чисел в форме Чебышёва****.*

Определение 13.4. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ назовем одинаково распределенными, если все они имею одну и ту же функцию распределения.

Замечание 13.1. У одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ математические ожидания и дисперсии (если таковые существуют) совпадают: $\mathsf{M}\xi_i = m$, $\mathsf{D}\xi_i = d$, $i = 1, 2, \ldots$, где m и d — некоторые действительные числа, причем $d > 0$.

Следствие 13.1. Если в условиях теоремы 13.3 случайные величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, являются также одинаково распределенными с общим математическим ожиданием m, то последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ случайных величин удовлетворяет закону больших чисел в следующей форме:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} m.$$

Следствие 13.2 (закон больших чисел в форме Бернулли)**.** Пусть проводится n испытаний по *схеме Бернулли* и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов

$$\widehat{p} = \frac{Y_n}{n} \tag{13.11}$$

сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании

$$\widehat{p} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} p. \tag{13.12}$$

Теорема 13.4 (усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова)**.** *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathsf{M}\xi_i = m$ и $\mathsf{M}|\xi_i| < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} m. \tag{13.13}$$

Теорема 13.5 (центральная предельная теорема)**.** *Пусть ξ_1, ξ_2, $\ldots$, $\xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathsf{M}\xi_n = m$, $\mathsf{D}\xi_n = \sigma^2$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \mathsf{P}\left\{\left(\overline{\xi} - m\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x), \tag{13.14}$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Следствие 13.3 (интегральная теорема Муавра — Лапласа)**.** Обозначим Y_n суммарное число успехов в n испытаниях *по схеме Бернулли* с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$. Тогда с ростом n последовательность функций распределения случайных величин $(Y_n - np)/\sqrt{npq}$ сходится к функции стандартного нормального распределения, т.е.

$$\mathsf{P}\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x). \tag{13.15}$$

Замечание 13.2. Из теоремы 13.5 и следствия 13.3 вытекают следующие приближенные формулы:

$$\mathsf{P}\{a < S_n < b\} \approx \Phi\left(\frac{b - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right), \tag{13.16}$$

$$\mathsf{P}\{a < \bar{\xi} < b\} \approx \Phi\left(\frac{(b-m)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-m)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{13.17}$$

$$\mathsf{P}\{|\bar{\xi} - m| < \varepsilon\} \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{13.18}$$

$$\mathsf{P}\left\{a < Y_n < b\right\} \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{13.19}$$

$$\mathsf{P}\left\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\right\} \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \tag{13.20}$$

Определение 13.5. Обозначим через z_α решение (относительно неизвестного z) уравнения $\Phi(z) = \alpha$, т.е. число, удовлетворяющее равенству $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Число z_α назовем квантилью уровня α стандартного нормального распределения.

Замечание 13.3. Квантили z_α можно найти в специальных таблицах (которые есть практически в любом учебнике и задачнике по теории вероятностей или математической статистике) или вычислить с помощью различных математических пакетов, в частности, с помощью программы «Probability Distributions» из Google Play.

Таблицы квантилей функций $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ не следует путать с таблицами значений функций $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$.

Также не следует путать между собой таблицы функции $\Phi(x)$ и таблицы функции $\Phi_0(x)$ (для контроля помните, что $\Phi(0) = 1/2$, $\Phi_0(0) = 0$). #

13.2 Решение типовых примеров

Пример 13.1. По многолетним наблюдениям, средняя скорость ветра в некотором пункте равна 16 км/ч.

а) Оценить вероятность того, что в случайный момент времени скорость ветра в этом пункте превысит 80 км/ч.

б) Оцените минимальное значение скорости ветра, превышение которого произойдет с вероятностью, не более, чем 0,1.

в) Уточните оценки вероятностей из пунктов а) и б), если известно, что среднеквадратическое отклонение скорости ветра равно 2.

Р е ш е н и е: а) Обозначим через ξ скорость ветра в случайный момент времени. По условию задачи $\mathsf{M}\xi = 16$. Воспользовавшись первым неравенством Чебышёва (13.5), получим

$$\mathsf{P}\{\xi > 80\} \leqslant \frac{16}{80} = \frac{1}{5}. \tag{13.21}$$

б) Минимальная скорость ветра C должна удовлетворять условию

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant C\} \leqslant 0,1. \tag{13.22}$$

Так как

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant C\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi}{C}, \tag{13.23}$$

то C будет наименьшим числом, удовлетворяющим неравенству $C \geqslant \frac{\mathsf{M}\xi}{0,1}$, если

$$C = \frac{\mathsf{M}\xi}{0,1} = 160.$$

в) Ошибкой будет написать

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant 80\} = 1 - \Phi\left(\frac{80 - \mathsf{M}\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{80-16}{2}\right) = 1 - \Phi(32), \tag{13.24}$$

поскольку в условии задачи не сказано, что ξ — нормальная случайная величина. Вероятность $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 80\}$ в данном случае вычислить невозможно, так как распределение ξ неизвестно. Эту вероятность можно только оценить.

Воспользовавшись вторым неравенством Чебышёва, получим

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant 80\} = \mathsf{P}\{\xi - \mathsf{M}\xi \geqslant 80 - 16\} \leqslant \mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant 64\} \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{64^2} = \frac{2^2}{64^2} = \frac{1}{1024}. \tag{13.25}$$

Далее, предполагая, что $C > \mathsf{M}\xi$ (будем считать, что нас интересует сильный ветер, представляющий наибольшую опасность), и используя второе неравенство Чебышёва, найдем, что

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant C\} = \mathsf{P}\{\xi - \mathsf{M}\xi \geqslant C - 16\} \leqslant \mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant C - 16\} \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{(C-16)^2}. \tag{13.26}$$

Поэтому наименьшее значение C скорости ветра определим из условия $\frac{\mathsf{D}\xi}{(C-16)^2} \leqslant 0,1$, т.е. $C = 16 + 2\sqrt{10} \approx 22,33$. Другими словами, ветер, превышающий 22,33 м/с, будет с вероятностью не больше 0,1.

Видно, что знание дисперсии (характеризующей величину отклонений случайной величины от своего математического ожидания) позволяет уточнить (а если дисперсия мала, то существенно уточнить) выводы, полученные с использованием информации только о математическом ожидании.

Пример 13.2. Используя неравенство Чебышёва, оценим вероятность того, что частота появления герба при $n = 10000$ бросаниях симметричной монеты отклонится от вероятности его появления $p = 1/2$ по абсолютной величине не более, чем на $\varepsilon = 0,01$. Сравним эту величину с оценкой, полученной с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

Р е ш е н и е: Обозначим через Y_n количество гербов, а через $\widehat{p} = Y_n/n$ долю гербов, выпавших при n подбрасываниях монеты. По условию задачи нужно оценить

$$\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0,01\right\}.$$

Из лекции 8 известно, что Y_n — биномиальная случайная величина с математическим ожиданием $\mathsf{M}Y_n = np$ и дисперсией $\mathsf{D}Y_n = npq$, где $q = 1 - p$. Поэтому, используя свойства математического ожидания и дисперсии (см. теоремы 10.1 и 10.2 лекции 10), получим $\mathsf{M}(\widehat{p}) = p$ и $\mathsf{D}(\widehat{p}) = \frac{pq}{n}$. Следовательно, применяя второе неравенство Чебышёва (13.8), будем иметь

$$\mathsf{P}\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\} = \mathsf{P}\{|\widehat{p} - \mathsf{M}(\widehat{p})| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathsf{D}(\widehat{p})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{13.27}$$

Подставляя в эту формулу $\varepsilon = 0,01$, $n = 10000$, $p = q = 1/2$, найдем, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0,01\right\} > 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{10000 \cdot 0,01^2} = 0,75. \tag{13.28}$$

Согласно закону больших чисел вероятность $\mathsf{P}\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\}$ должна быть близка к 1 при больших n. Нам удалось показать, что эта вероятность не меньше 0,75 (возможно, эта вероятность на самом деле гораздо больше, чем 0,75 — в таком случае полученная оценка будет слишком грубой).

Теперь оценим $\mathsf{P}\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\}$ при помощи теоремы Муавра — Лапласа. Воспользовавшись приближенной формулой (13.20), вытекающей из этой теоремы, получим

$$\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0,01\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{10000}}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 \approx 2 \cdot 0,977 - 1 = 0,954. \tag{13.29}$$

Видно, что оценка (13.28) достаточно грубая, вероятность $\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0,01\right\}$ практически равна единице. Теорема Муавра — Лапласа дала более точную оценку, чем неравенство Чебышёва.

Пример 13.3. В условиях примера 13.2 найдем такое число x, что количество выпавших гербов попадет в интервал $(np - x, np + x)$ с вероятностью $\gamma = 0,99$.

Решение: Сохраняя обозначения примера 13.2, заметим, что нужно найти такое x, что

$$\mathsf{P}\left\{np - x < Y_n < np + x\right\} = \gamma. \tag{13.30}$$

Используя формулу (13.19), получим

$$\mathsf{P}\left\{np - x < Y_n < np + x\right\} \approx \Phi\left(\frac{np + x - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np - x - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) - 1.$$

Из этого выражения и формулы (13.30) видно, что x можно найти приближенно из условия

$$2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) - 1 = \gamma. \tag{13.31}$$

Обозначим через z_α квантиль уровня $\alpha = (1+\gamma)/2$ стандартного нормального распределения (см. определение 13.5). Из (13.31) найдем, что

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1+\gamma}{2} = \alpha, \qquad \frac{x}{\sqrt{npq}} = z_\alpha, \tag{13.32}$$

$$x = z_\alpha\sqrt{npq}. \tag{13.33}$$

Если $\gamma = 0,99$, то $\alpha = (1+\gamma)/2 = 0,995$ и $\Phi(z) = 0,995$ при $z = z_{0,995} \approx 2,5758$. Подставляя в (13.33) $z_\alpha = 2,5758$ и $p = q = 1/2$, окончательно получаем, что $x \approx 128,8$.

Проанализируем полученный результат. Подставляя в (13.30) $x = 129$, будем иметь, что

$$\mathsf{P}\left\{np - x < Y_n < np + x\right\} = \mathsf{P}\left\{4871 < Y_n < 5129\right\} \geqslant 0,99. \tag{13.34}$$

Интервал (4871,5129) длины 258 занимает только 2,58 % длины интервала (0,10000) всех возможных значений числа выпавших гербов. Тем не менее, количество выпавших гербов попадет в него с почти со стопроцентной вероятностью. Таким образом, случайное число выпавших гербов с ростом числа подбрасываний становится менее случайным, практически не отклоняясь от своего среднего значения $np = n/2$.

Пример 13.4. Пусть дана последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимых дискретных случайных величин, причем ряд распределения случайной величины ξ_n представлен в табл. 13.1. Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел в форме Чебышёва.

ξ_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

Таблица 13.1.

Решение: Проверим выполнимость условий теоремы 13.3, согласно которой последовательность должна состоять из независимых случайных величин, дисперсии которых ограничены в совокупности (все дисперсии ограничены одной и той же константой). Так как

$$\mathsf{M}\xi_n = -\sqrt{n}\frac{1}{2n} + 0\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sqrt{n}\frac{1}{2n} = 0, \tag{13.35}$$

то дисперсии

$$\mathsf{D}\xi_n = \mathsf{M}\xi_n^2 = \left(-\sqrt{n}\right)^2\frac{1}{2n} + 0^2\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\sqrt{n}\right)^2\frac{1}{2n} = 1 \tag{13.36}$$

всех случайных величин ξ_n ограничены одной и той же величиной 1. Таким образом для этой последовательности справедлив закон больших чисел.

Пример 13.5. Случайная величина $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ является средним арифметическим из $n = 6400$ независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_i, причем каждое слагаемое имеет математическое ожидание $m = \mathsf{M}\xi_i = 3$ и дисперсию $d = \mathsf{D}\xi_i \leqslant C$, ограниченную постоянной $C = 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Воспользовавшись *вторым неравенством Чебышёва*, оценим вероятность того, что $\overline{\xi}$ отклонится от m по абсолютной величине не более, чем на $\varepsilon = 0,05$.

Решение: Из свойств математического ожидания и дисперсии (см. теоремы 9.1 и 9.2 лекции 9) вытекает, что

$$\mathsf{M}\overline{\xi} = m = 3, \qquad \mathsf{D}\overline{\xi} = \frac{d}{n} \leqslant \frac{C}{n} = \frac{1}{3200}. \tag{13.37}$$

Поэтому в силу второго неравенства Чебышёва (теорема (13.2))

$$\mathsf{P}\{|\overline{\xi} - m| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathsf{D}\overline{\xi}}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{d}{n\varepsilon^2} > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 0,875. \tag{13.38}$$

Пример 13.6. В условиях примера 13.5 оценим $\mathsf{P}\{|\overline{\xi} - m| < \varepsilon\}$ при помощи центральной предельной теоремы.

Решение: Используя формулу (13.18), вытекающей из центральной предельной теоремы (теоремы 13.5), и учитывая (13.37) и то, что функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает, получим

$$\mathsf{P}\{|\overline{\xi} - m| < \varepsilon\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{d}}\right) - 1 \geqslant 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{C}}\right) - 1 = 2\Phi(2\sqrt{2}) - 1 \approx 0,995. \tag{13.39}$$

Пример 13.7. Найдем вероятность того, что при 720 бросаниях игральной кости “шестерка” выпадет от 100 до 130 раз.

Решение: Обозначим через Y_n суммарное число выпавших “шестерок” при $n = 720$ бросаниях игральной кости. Поскольку вероятность выпадения “шестерки” при одном бросании $p = 1/6$, то в силу *интегральной теоремы Муавра — Лапласа* (следствие 13.3) случайная величина

$$\xi = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{Y_n - 120}{10}$$

приближенно распределена по стандартному нормальному закону. Поэтому из формулы (13.15) и свойства функции распределения вытекает, что (см. также (13.19))

$$\mathsf{P}\{100<Y_n<130\} = \mathsf{P}\left\{\frac{100-120}{10} < \xi < \frac{130-120}{10}\right\} \approx \Phi_0(1)-\Phi_0(-2) = 0{,}81859.$$

13.3 Задачи для самостоятельного решения

13.1. Средний ежедневный расход воды в некотором населенном пункте составляет 50 000 л. Оцените с помощью первого неравенства Чебышёва вероятность того, что в произвольно выбранный день расход воды в этом пункте превысит 150 000 л.
Ответ: $\mathsf{P}\{\xi > 150\,000\} < 1/3$.

13.2. Среднее потребление электроэнергии в мае в некотором населенном пункте составляет 360 000 кВт·ч.

а) Оцените с помощью первого неравенства Чебышёва вероятность того, что потребление электроэнергии в мае текущего года в этом населенном пункте превысит 1 000 000 кВт·ч.

б) Оцените с помощью второго неравенства Чебышёва ту же вероятность, если известно, что среднеквадратическое отклонение потребления электроэнергии в мае равно 40 000 кВт·ч.
Ответ: а) $\mathsf{P}\{\xi > 1\,000\,000\} < 0{,}36$; б) $\mathsf{P}\{\xi > 1\,000\,000\} < \frac{1}{256}$.

13.3. Среднеквадратическое отклонение погрешности ξ измерения курса самолета равно 2°. Считая математическое ожидание погрешности измерения равным нулю, оцените с помощью второго неравенства Чебышёва вероятность того, что погрешность одного измерения курса самолета превысит 5°.

Ответ: $\mathsf{P}\{|\xi| > 5^\circ\} < 0{,}16$.

13.4. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна $1/4$. Воспользовавшись вторым неравенством Чебышёва, оцените вероятность того, что число ξ появлений этого события заключено в пределах от 150 до 250.

Ответ: $\mathsf{P}\{150 \leqslant \xi \leqslant 250\} \geqslant 0{,}94$.

13.5. Производится выборочное обследование большой партии электрических лампочек для определения среднего времени их горения, среднеквадратическое отклонение времени горения лампочки равно $\sigma = 80$ ч. Из всей партии наудачу выбирается 400 лампочек. Воспользовавшись центральной предельной теоремой, оцените вероятность того, что среднее (математическое ожидание) время горения лампочки будет отличаться от наблюденного среднего времени горения выбранных 400 лампочек не более чем на 10 ч.

Ответ: $0,9875806693$.

13.6. Случайная величина ξ является средним арифметическим из n независимых одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Воспользовавшись центральной предельной теоремой, оцените, какое число слагаемых n нужно взять для того, чтобы с вероятностью не менее 0,9973 случайная величина ξ отклонялась от своего среднего не более чем на 0,01.

Ответ: $n \geqslant 449994$.

13.7. Решите задачу 13.4, воспользовавшись для приближенной оценки искомой вероятности интегральной теоремой Муавра — Лапласа. Сравните полученные результаты.

Ответ: $\mathsf{P}\{150 \leqslant \xi \leqslant 250\} \approx 0{,}9999554429$. Сравнивая полученные результаты, видим, что интегральная теорема Муавра — Лапласа дает гораздо более точный ответ.

Семинар 14

Основные понятия выборочной теории

14.1 Теоретические сведения

Определение 14.1. Совокупность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет то же распределение, что и случайная величина X, будем называть ***выборкой*** и записывать $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ (иногда просто $X_1, \ldots, X_n$). Число n называют ***объемом выборки***, а случайные величины X_i — ***элементами выборки***. Любое возможное значение $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ выборки $\vec{X}_n$ будем называть ***реализацией выборки*** $\vec{X}_n$.

Для того чтобы подчеркнуть, что речь идет о наблюдении именно случайной величины X, а не какой-нибудь другой, обычно говорят, что $\vec{X}_n$ — выборка из закона распределения X или из распределения X. Если $F(x)$ (или $f(x)$) — функция распределения (или плотность) случайной величины X, говорят, что $\vec{X}_n$ — случайная выборка из $F(x)$ (или из $f(x)$). #

Определение 14.2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения X, а $x_1, \ldots, x_n$ — реализация этой выборки. Обозначим через $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(i)}, \ldots, x_{(n)}$ величины $x_1, \ldots, x_n$, расположенные в неубывающем порядке:

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(i)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}. \tag{14.1}$$

В частности, $x_{(1)}$ — наименьшее, $x_{(n)}$ — наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_n$.

Обозначим через $X_{(i)}$ случайную величину, которая при каждой реализации $x_1, \ldots, x_n$ выборки $X_1, \ldots, X_n$ принимает значение, равное $x_{(i)}$, $i = \overline{1, n}$.

Последовательность случайных величин $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(i)}, \ldots, X_{(n)}$ называют ***вариационным рядом выборки***. При этом $X_{(i)}$ называют i-м ***членом вариационного ряда выборки***, $i = \overline{1, n}$.

Последовательность чисел $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(i)}, \ldots, x_{(n)}$, удовлетворяющих условию (14.1), называют ***реализацией вариационного ряда выборки***, число $x_{(i)} = X_{(i)}(\omega)$ называют реализацией i-го ***члена вариационного ряда***, $i = \overline{1, n}$. #

Определение 14.3. Пусть среди наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ есть только r различных ($r < n$). Обозначим через $z_{(1)}, \ldots, z_{(r)}$ эти r различных значений, расположенных в порядке возрастания, а через n_k — число повторений значения $z_{(k)}$ среди $x_1, \ldots, x_n$, $k = \overline{1, r}$, $n_1 + \cdots + n_r = n$. ***Статистическим рядом*** выборки называют таблицу 14.1, где в первой строке расположены элементы $z_{(1)}, \ldots, z_{(r)}$, а во второй — числа их повторений $n_1, \ldots, n_r$. Отношение n_k/n называют частотой значения $z_{(k)}$, $k = \overline{1, r}$. #

$z_{(1)}$	$z_{(2)}$	$\ldots$	$z_{(r)}$
n_1	n_2	$\ldots$	n_r

Таблица 14.1.

Определение 14.4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимые наблюдения случайной величины X с функцией распределения $F(x)$. Обозначим через $n(x; \vec{X}_n)$ случайную величину, которая для каждого $x \in \mathbb{R}$ и каждой реализации $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ выборки $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ принимает значение $n(x; \vec{x}_n)$, равное числу элементов среди $x_1, \ldots, x_n$, меньших x.

Функцию

$$\widehat{F}(x;\vec{X}_n) = \frac{n(x,\vec{X}_n)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{14.2}$$

будем называть ***выборочной функцией распределения***. #

J_1	J_2	$\dots$	J_m
n_1	n_2	$\dots$	n_m

Таблица 14.2.

Определение 14.5. Пусть $x_1,\dots,x_n$ реализация независимых наблюдений случайной величины X. Разобьем промежуток $J = \left[x_{(1)}, x_{(n)}\right]$, содержащий все выборочные значения, на несколько непересекающихся полуинтервалов $J_k = \left[x_{(1)},\ x_{(1)} + k\Delta\right)$, $k = 1,\dots,m-1$ и отрезок $J_m = \left[x_{(1)}, x_{(1)} + m\Delta\right] = \left[x_{(n)} - \Delta,\ x_{(n)}\right]$ одинаковой длины $\Delta = \left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)/m$. Обозначим через n_i число элементов выборки, попавших в i-й промежуток J_i, $i = \overline{1,m}$, $n = n_1 + \dots + n_m$. Таблицу 14.2 назовем ***интервальным статистическим рядом***.

График функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i; \\ 0, & x \notin J, \end{cases} \tag{14.3}$$

представляющий собой кусочно постоянную функцию называют ***гистограммой***. #

Замечание 14.1. Число промежутков m, на которые разбивают промежуток J, содержащий все выборочные значения, выбирают в зависимости от объема выборки n. Для ориентировочной оценки величины m можно пользоваться приближенной формулой $m \approx \log_2 n + 1$.

Замечание 14.2. Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то при удачном выборе ширины интервалов Δ гистограмма может напоминать график плотности распределения $f(x)$.

Определение 14.6. Пусть $\vec{X}_n$ —независимые наблюдения случайной величины X. Случайную величину

$$\widehat{\mu}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \tag{14.4}$$

называют ***выборочным начальным моментом k-го порядка***. В частности, выборочный начальный момент первого порядка $\widehat{\mu}_1(\vec{X}_n)$ называют ***выборочным средним*** и обозначают $\overline{X}$ (реализацию случайной величины $\overline{X}$ будем обозначать $\overline{x}$):

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{14.5}$$

Определение 14.7. Пусть $\vec{X}_n$ —независимые наблюдения случайной величины X. Случайную величину

$$\widehat{\nu}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^k \tag{14.6}$$

называют ***выборочным центральным моментом k-го порядка***. В частности, выборочный центральный момент 2-го порядка $\widehat{\nu}_2(\vec{X}_n)$ называют ***выборочной дисперсией*** и обозначают $\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, а случайную величину $\widehat{\sigma}(\vec{X}_n) = \sqrt{\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}$ называют ***выборочным среднеквадратическим отклонением***:

$$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2, \tag{14.7}$$

$$\widehat{\sigma}(\vec{X}_n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}. \tag{14.8}$$

Определение 14.8. Пусть $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ — независимые наблюдения случайного вектора (X, Y). Случайную величину

$$\widehat{K}(\vec{X}_n, \vec{Y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) \tag{14.9}$$

называют ***выборочной ковариацией***.

Определение 14.9. Пусть $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ — независимые наблюдения случайного вектора (X, Y). Случайную величину

$$\widehat{\rho}(\vec{X}_n, \vec{Y}_n) = \frac{\widehat{K}(\vec{X}_n, \vec{Y}_n)}{\widehat{\sigma}(\vec{X}_n)\, \widehat{\sigma}(\vec{Y}_n)}, \tag{14.10}$$

где

$$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad \widehat{\sigma}^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

называют ***выборочным коэффициентом корреляции***. #

Значения выборочных моментов (неслучайные числа) будем для краткости называть теми же терминами, что и сами моменты (случайные величины).

Замечание 14.3. Опираясь на закон больших чисел, можно доказать, что при увеличении объема выборки n перечисленные выше выборочные характеристики сходятся по вероятности к соответствующим теоретическим моментам. В частности, при $n \to \infty$

$$\overline{X} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathsf{M}X, \quad \widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathsf{D}X, \quad \widehat{K}(\vec{X}_n, \vec{Y}_n) \to \mathbf{cov}(X, Y), \quad \widehat{\rho}(\vec{X}_n, \vec{Y}_n) \to \rho(X, Y). \tag{14.11}$$

Поэтому, если n велико, то

$$\mathsf{M}X \approx \overline{x}, \quad \mathsf{D}X \approx \widehat{\sigma}^2(\vec{x}_n), \quad \mathbf{cov}(X, Y) \approx \widehat{K}(\vec{x}_n, \vec{y}_n), \quad \rho(X, Y) \approx \widehat{\rho}(\vec{x}_n, \vec{y}_n). \tag{14.12}$$

Замечание 14.4. Для удобства вместо $\widehat{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $\widehat{\sigma}(\vec{x}_n)$ будем писать $\widehat{\sigma}^2$ и $\widehat{\sigma}$ соответственно.

Таким образом

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \tag{14.13}$$

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}. \tag{14.14}$$

14.2 Решение типовых примеров

Пример 14.1. В результате эксперимента получены $n = 79$ наблюдений случайной величины X:

2; 4; 2; 4; 3; 3; 3; 2; 0; 6; 1; 2; 3; 2; 2;
4; 3; 3; 5; 1; 0; 2; 4; 3; 2; 2; 3; 3; 1; 3;
3; 3; 1; 1; 2; 3; 1; 4; 3; 1; 7; 4; 3; 4; 2;
3; 2; 3; 3; 1; 4; 3; 1; 4; 5; 3; 4; 2; 4; 5;
3; 6; 4; 1; 3; 2; 4; 1; 3; 1; 0; 0; 4; 6; 4;
7; 4; 1; 3.

Построим *статистический ряд*, выборочную функцию распределения и нарисуем ее график, найдем $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$, $\widehat{\sigma}$.

Решение: Наименьший элемент выборки (первый член вариационного ряда) $x_{(1)} = 0$, наибольший — $x_{(79)} = 7$. Составим статистический ряд, расположив все элементы выборки в порядке возрастания (табл. 14.3).

$x_{(k)}$	0	1	2	3	4	5	6	7
n_k	4	13	14	24	16	3	3	2

Таблица 14.3

Статистический ряд содержит восемь элементов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Вычислим частоты n_k/n каждого из элементов статистического ряда:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{4}{79} \approx 0{,}0506; \quad \frac{n_2}{n} = \frac{13}{79} \approx 0{,}1646; \quad \frac{n_3}{n} = \frac{14}{79} \approx 0{,}1772; \quad \frac{n_4}{n} = \frac{24}{79} \approx 0{,}3038;$$
$$\frac{n_5}{n} = \frac{16}{79} \approx 0{,}2025; \quad \frac{n_6}{n} = \frac{3}{79} \approx 0{,}0380; \quad \frac{n_7}{n} = \frac{3}{79} \approx 0{,}0380; \quad \frac{n_8}{n} = \frac{2}{79} \approx 0{,}0253;$$

Чтобы найти выборочную функцию распределения, нужно последовательно суммировать частоты:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0{,}0000, & x \leqslant 0; \\ 0{,}0506, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}2152, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}3924, & 2 < x \leqslant 3; \\ 0{,}6962, & 3 < x \leqslant 4; \\ 0{,}8987, & 4 < x \leqslant 5; \\ 0{,}9367, & 5 < x \leqslant 6; \\ 0{,}9747, & 6 < x \leqslant 7; \\ 1{,}0000, & x > 7. \end{cases}$$

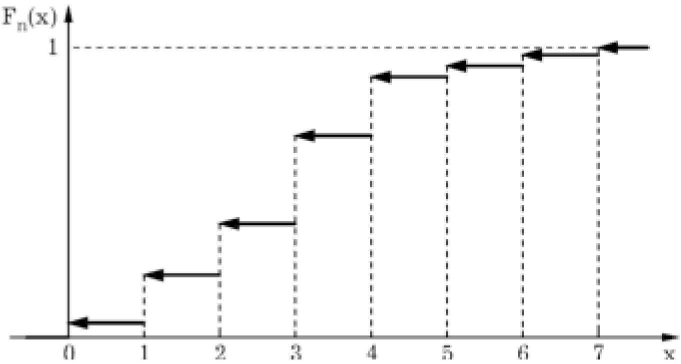

Рис 14.1:

График функции $F_n(x)$ — ступенчатая кривая (14.1).

Учитывая, что элементы выборки повторяются, с помощью формулы (14.5) находим выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{1}{79}\big(0 \cdot 4 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2\big) \approx 2{,}835. \qquad (14.15)$$

С помощью формулы (14.13) находим выборочную дисперсию

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{79}((0-2{,}84)^2 \cdot 4 + (1-2{,}84)^2 \cdot 13 + (2-2{,}84)^2 \cdot 14 + (3-2{,}84)^2 \cdot 24 + \\ + (4-2{,}84)^2 \cdot 16 + (5-2{,}84)^2 \cdot 3 + (6-2{,}84)^2 \cdot 3 + (7-2{,}84)^2 \cdot 2) \approx 2{,}3668. \qquad (14.16)$$

Поэтому выборочное среднеквадратическое отклонение равно

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2} \approx 1{,}54. \qquad (14.17)$$

Пример 14.2. Измерена максимальная емкость 20 подстроечных конденсаторов, результаты измерений (в пикофарадах) приведены в таблице 14.4.

Номер конденсатора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Емкость, пФ	4,40	4,31	4,40	4,40	4,65	4,56	4,71	4,54	4,36	4,56
Номер конденсатора	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Емкость, пФ	4,31	4,42	4,60	4,35	4,50	4,40	4,43	4,48	4,42	4,45

Таблица 14.4

Составим статистический ряд и построим *гистограмму*.

Р е ш е н и е: Статистический ряд представлен в таблице 14.5. Наименьшее значение выборки $x_{(1)} = 4{,}31$, наибольшее значение $x_{(20)} = 4{,}71$.

$x_{(i)}$	4,31	4,35	4,36	4,40	4,42	4,43	4,45	4,48	4,50	4,54	4,56	4,60	4,65	4,71
n_i	2	1	1	4	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1

Таблица 14.5

Для построения гистограммы результаты наблюдений представим в виде *интервального статистического ряда*, разбив отрезок $[4{,}31,\ 4{,}71]$ на пять равных промежутков (см. таблицу 14.9).

J_k	$[4{,}31,\ 4{,}39)$	$[4{,}39,\ 4{,}47)$	$[4{,}47,\ 4{,}55)$	$[4{,}55,\ 4{,}63)$	$[4{,}63,\ 4{,}71]$
n_k	4	8	3	3	2

Таблица 14.6

Длина Δ каждого полученного промежутка равна 0,08. Определим выборочную плотность распределения $f_n(x)$, используя формулу 14.3:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{4}{20\cdot 0{,}08} = 2{,}500, & x \in [4{,}31,\ 4{,}39); \\ \frac{8}{20\cdot 0{,}08} = 5{,}000, & x \in [4{,}39,\ 4{,}47); \\ \frac{3}{20\cdot 0{,}08} = 1{,}875, & x \in [4{,}47,\ 4{,}55); \\ \frac{3}{20\cdot 0{,}08} = 1{,}875, & x \in [4{,}55,\ 4{,}63); \\ \frac{2}{20\cdot 0{,}08} = 1{,}250, & x \in [4{,}63,\ 4{,}71]; \\ 0, & x \notin [4{,}31,\ 4{,}71]. \end{cases}$$

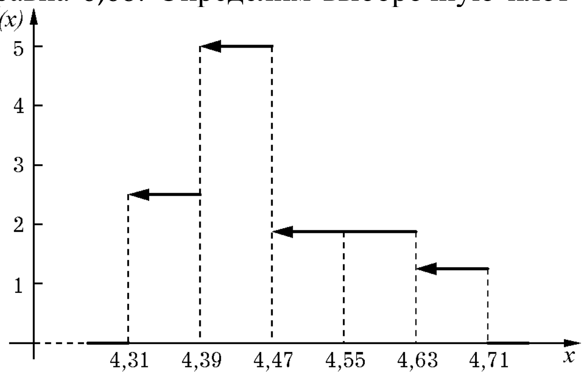

Рис 14.2:

График функции $f_n(x)$ (гистограмма) представлен на рис. 14.2.

Пример 14.3. В результате эксперимента получены $n = 20$ наблюдений случайного вектора $(X; Y)$:

$$\begin{array}{llll} (1365,\ 0{,}28); & (1375,\ 0{,}38); & (1375,\ 0{,}42); & (1375,\ 0{,}31); \\ (1405,\ 0{,}33); & (1410,\ 0{,}47); & (1410,\ 0{,}60); & (1420,\ 0{,}47); \\ (1425,\ 0{,}50); & (1415,\ 0{,}66); & (1440,\ 0{,}65); & (1385,\ 0{,}37); \\ (1390,\ 0{,}53); & (1395,\ 0{,}38); & (1450,\ 0{,}85); & (1450,\ 0{,}93); \\ (1455,\ 0{,}60); & (1475,\ 1{,}68); & (1480,\ 1{,}45); & (1485,\ 1{,}80). \end{array}$$

Найдем значение *выборочной ковариации* (см. 14.9).

$$\widehat{K}(\vec{x}_n, \vec{y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \tag{14.18}$$

Р е ш е н и е: По выборке

$$\begin{array}{llllllllll} 1365; & 1375; & 1375; & 1375; & 1405; & 1410; & 1410; & 1420; & 1425; & 1415; \\ 1440; & 1385; & 1390; & 1395; & 1450; & 1450; & 1455; & 1475; & 1480; & 1485 \end{array}$$

находим

$$\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 1419.$$

По выборке

$$\begin{array}{llllllllll} 0{,}28; & 0{,}38; & 0{,}42; & 0{,}31; & 0{,}33; & 0{,}47; & 0{,}60; & 0{,}47; & 0{,}50; & 0{,}66; \\ 0{,}65; & 0{,}37; & 0{,}53; & 0{,}38; & 0{,}85; & 0{,}93; & 0{,}60; & 0{,}68; & 1{,}45; & 1{,}80 \end{array}$$

находим

$$\overline{y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = 0{,}683 \approx 0{,}68.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \widehat{K}(\vec{x}_n, \vec{y}_n) \approx \frac{1}{20}\Big(& (1365 - 1419)(0{,}28 - 0{,}68) + (1375 - 1419)(0{,}38 - 0{,}68) + \\ & + (1375 - 1419)(0{,}42 - 0{,}68) + (1375 - 1419)(0{,}31 - 0{,}68) + \\ & + (1405 - 1419)(0{,}33 - 0{,}68) + (1410 - 1419)(0{,}47 - 0{,}68) + \\ & + (1410 - 1419)(0{,}60 - 0{,}68) + (1420 - 1419)(0{,}47 - 0{,}65) + \\ & + (1425 - 1419)(0{,}50 - 0{,}68) + (1415 - 1419)(0{,}66 - 0{,}68) + \\ & + (1440 - 1419)(0{,}65 - 0{,}68) + (1385 - 1419)(0{,}37 - 0{,}68) + \\ & + (1390 - 1419)(0{,}53 - 0{,}68) + (1395 - 1419)(0{,}38 - 0{,}68) + \\ & + (1450 - 1419)(0{,}85 - 0{,}68) + (1450 - 1419)(0{,}93 - 0{,}68) + \\ & + (1455 - 1419)(0{,}60 - 0{,}68) + (1475 - 1419)(1{,}68 - 0{,}68) + \\ & + (1480 - 1419)(1{,}45 - 0{,}68) + (1485 - 1419)(1{,}80 - 0{,}68)\Big) \approx 10{,}955. \end{aligned}$$

Пример 14.4. Для заданной выборки:

66	51	60	67	53	45	42	70	56	42	58	53	53	58	38	30	50	40	44	41	58	27	45	63	38
30	48	47	38	58	42	52	62	73	60	36	63	70	55	40	57	38	32	48	57	44	60	46	47	39

Таблица 14.7

1) постройте: а) статистический ряд; б) интервальный статистический ряд, предварительно определив число интервалов;

2) найдите значения точечных оценок математического ожидания и дисперсии;

3) постройте гистограмму;

4) на основе анализа результатов наблюдений выдвинете гипотезу о виде закона распределения генеральной совокупности. При производстве ЧИПов их выводы устанавливаются автоматически; изогнутость выводов является важным показателем при сборке готовой продукции.

Решение:

1) а) статистический ряд;

$x_{(i)}$	27	30	32	36	38	40	41	42	44	45	46	47	48	50	52	53	55	56	57	58	60	62	63	66	67	70	73
n_i	1	2	1	1	4	2	1	3	2	2	1	2	1	1	1	3	1	1	2	4	3	1	2	1	1	2	1

Таблица 14.8

2) Точечной оценкой математического ожидания является выборочное среднее

$$\mathsf{M}X \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i =$$
$$= \frac{1}{50}\Big(66 + 51 + \cdots + 47 + 39\Big) = \frac{1}{50}\Big(27\cdot 1 + 30\cdot 2 + \cdots + 70\cdot 2 + 73\cdot 1\Big) = 49.8.$$

Точечной оценкой дисперсии является выборочная дисперсия

$$\mathsf{D}X \approx \widehat{\sigma}^2(\vec{x}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(x_i - \overline{x}\Big)^2 =$$
$$= \frac{1}{50}\Big((66-49.8)^2 + (51-49.8)^2 + \cdots + (47-49.8)^2 + (39-49.8)^2\Big) = 125.68.$$

Точечной оценкой среднеквадратического отклонения является

$$\sqrt{\mathsf{D}X} \approx \sqrt{\widehat{\sigma}^2(\vec{x}_n)} = \sqrt{125.68} \approx 11.21.$$

в) Наблюдений $n = 50$, поэтому число интервалов равно $m = [\log_2 n + 1] = 6$.
Интервальный статистический ряд имеет вид

J_k	[27; 34,67)	[34,67; 42,34)	[42,34; 50)	[50; 57,67)	[57,67; 65,34)	[65,34; 73]
n_k	4	12	9	10	10	5

Таблица 14.9

3) Гистограмма приведена на рис. 14.3. На этом же рисунке красная линия является графиком плотности нормального распределения с математичесим ожиданием $\overline{x} = 49.8$ и дисперсией $\widehat{\sigma}^2(\vec{x}_n) = 125.68$.

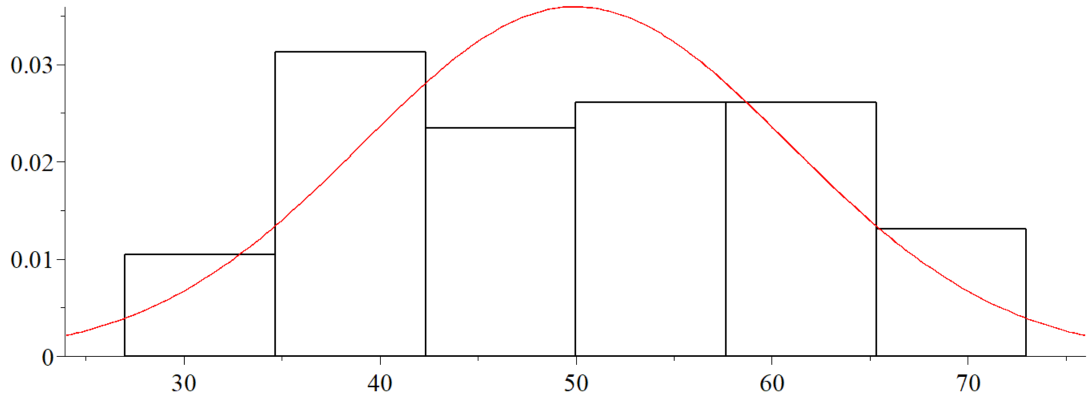

Рис 14.3

Изменяя количество интервалов можно добиться более красивого вида гистограммы. На рис. 14.4 изображена гистограмма, построенная по 7 интервалам.

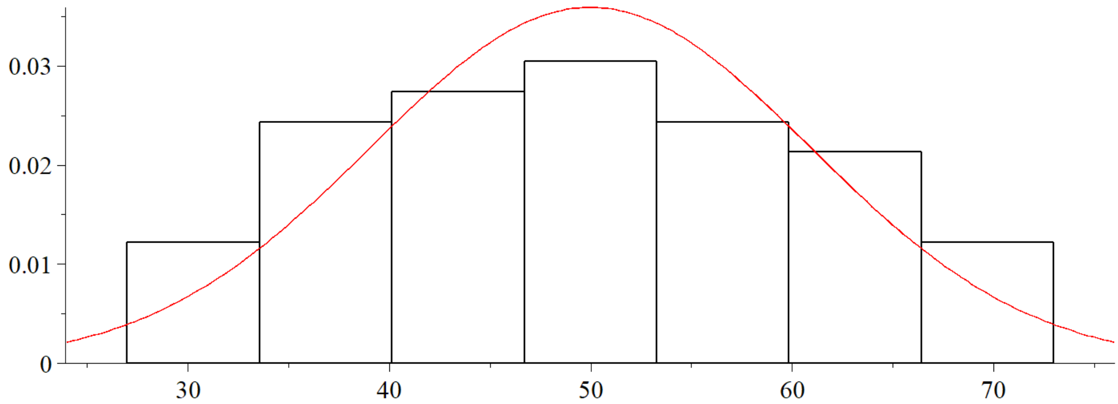

Рис 14.4

14.3 Вопросы и задачи

14.1. По результатам измерений имеем наблюдения 2781, 2836, 2807, 2763, 2858 случайной величины X. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения и ее график. Вычислите $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$.
Ответ: $\overline{x} = 2809$; $\widehat{\sigma}^2 = 1206{,}8$.

14.2. Докажите, что имеет место равенство

$$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X})^2.$$

14.3. По результатам измерений получены наблюдения случайной величины X:

3,7;	6,2;	5,2;	5,7;	6,2;	4,7;	4,2;	6,7;
7,2;	5,2;	6,2;	4,7;	7,2;	5,2;	4,7;	5,7;
5,2;	4,7;	5,2;	5,7;	4,2;	6,7;	5,2;	6,2;
5,7;	6,7;	5,2;	5,7;	5,2;	4,2;	5,2;	4,7;
5,7;	4,2;	5,2;	6,2;	5,7;	6,2;	5,7;	4,2;
5,2;	5,7;	4,2;	5,2;	6,2;	7,2;	5,2;	4,7;
5,7;	6,2;	5,2;	4,7;	5,7;	6,7;	7,2;	6,7;
7,2;	3,7;	7,7;	3,2;	3,7;	7,7;	5,2;	4,7.

Составьте статистический ряд, постройте гистограмму, выборочную функцию распределения и ее график. Вычислите значения числовых характеристик $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$, $\widehat{\sigma}$.
Ответ: $\overline{x} = 5{,}73$; $\widehat{\sigma}^2 = 1{,}187$; $\widehat{\sigma} = 1{,}06$.

14.4. В результате эксперимента получены $n = 60$ наблюдений случайного вектора $(X; Y)$ (данные приведены в таблице 14.10). Найдите значение выборочного коэффициента корреляции.

	4100	4300	4500	4700	4900	5100	5300	5500
6,75		1						
6,25	1	2	2	1				
5,75		1	3	4	2	3		
5,25		3	5	7	1	1		
4,75			2	5	5	3	2	
4,25					1	2	2	
3,75								1

Таблица 14.10

О т в е т: $\widehat{\rho} = 0{,}63$.

Семинар 15

Точечные оценки

15.1 Теоретические сведения

Определение 15.1. Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ независимые наблюдения случайной величины X, функция распределения которой $F(x;\theta)$ известна с точностью до вектора параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$.

Обозначим $\mu_k(\theta) = \mathsf{M}(X^k)$, $\nu_k(\theta) = \mathsf{M}\left((X - \mathsf{M}X)^k\right)$ соответственно начальный и центральный моменты порядка k, а $\widehat{\mu}_k(\vec{X}_n)$ и $\widehat{\nu}_k(\vec{X}_n)$ соответственно выборочный начальный и центральный моменты порядка k, $k = 1, 2, \ldots$.

Оценкой $\widehat{\theta}(\vec{X}_n) = (\widehat{\theta}_1(\vec{X}_n), \ldots, \widehat{\theta}_r(\vec{X}_n))$ ***параметра*** θ ***методом моментов*** назовем решение любой системы из r уравнений вида

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_{i_\alpha}(\vec{X}_n) = \mu_{i_\alpha}(\theta), & \alpha = \overline{1,k}, \\ \widehat{\nu}_{j_\beta}(\vec{X}_n) = \nu_{j_\beta}(\theta), & \beta = \overline{1,l}, \end{cases}, \qquad k + l = r, \tag{15.1}$$

относительно неизвестных $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Индексы i_α и j_β выбирают таким образом, чтобы эта система уравнений решалась как можно проще (обычно так бывает, если i_α и j_β невелики, например 1, 2 и т.д.). #

Определение 15.2. Пусть $\vec{X}_n$ — независимые наблюдения случайной величины X. Если X непрерывна, что через $P\big(x;\theta\big)$ обозначим ее плотность $f\big(x;\theta\big)$, а если X дискретна, то по определению положим $P\big(x;\theta\big) = \mathsf{P}\{X = x\}$ для любого $x \in \mathbb{R}$:

$$P\big(x;\theta\big) = \begin{cases} f\big(x;\theta\big), & \text{если } X \text{ непрерывная случайная величина;} \\ \mathsf{P}\{X = x\}, & \text{если } X \text{ дискретная случайная величина.} \end{cases} \tag{15.2}$$

Оценкой максимального правдоподобия $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра θ называют точку максимума функции $L(\vec{X}_n;\theta)$, которая определяется равенством

$$L(\vec{X}_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} P\big(X_i;\theta\big), \tag{15.3}$$

рассматривается как функция от θ при фиксированных $X_1, \ldots, X_n$ и называется ***функцией правдоподобия***. #

Если функция $L(\vec{X}_n;\theta)$ дифференцируема как функция аргумента θ при любом $\vec{X}_n$ и максимум $L(\vec{X}_n;\theta)$ достигается во внутренней точке из Θ, то оценка максимального правдоподобия в случае скалярного параметра $\theta \in \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (необходимому условию экстремума)

$$\frac{dL(\vec{X}_n;\theta)}{d\theta} = 0, \tag{15.4}$$

а в случае векторного параметра $\theta \in \mathbb{R}^r$ — системе уравнений

$$\frac{\partial L\big(\vec{X}_n;\theta\big)}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = \overline{1,r}. \tag{15.5}$$

Замечание 15.1. С целью облегчения нахождения оценок максимального правдоподобия уравнение (15.4) обычно заменяется уравнением

$$\frac{dl(\vec{X}_n;\theta)}{d\theta} = 0, \tag{15.6}$$

а система (15.5) — системой

$$\frac{\partial l(\vec{X}_n;\theta)}{\partial\theta_k} = 0, \quad k = \overline{1,r}. \tag{15.7}$$

где $l(\vec{X}_n;\theta) = \ln L(\vec{X}_n;\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln P\big(X_i;\theta\big)$ — логарифмическая функция правдоподобия.

Замечание 15.2. Так как $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, то $n\overline{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Поэтому в дальнейшем вместо громоздкого выражения $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ нередко будем писать более компактное выражение $n\overline{X}$.

Определение 15.3. Функция

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \qquad p > 0, \tag{15.8}$$

называется ***гамма-функцией***.

Известно, что $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и $\Gamma(n) = (n-1)!$ для $n \in \mathbb{N}$.

15.2 Решение типовых примеров

Пример 15.1. Пусть случайная величина X имеет *гамма-распределение* с плотностью

$$f(x,\lambda,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{15.9}$$

где λ и α — два неизвестных параметра.

Найдем с помощью метода моментов оценки неизвестных параметров λ и α по независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Р е ш е н и е:

Используя определение *гамма-функции*

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \tag{15.10}$$

а также рекуррентное соотношение $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, получим следующие выражения для первых двух начальных моментов и дисперсии:

$$\mu_1(\lambda,\alpha) = \mathsf{M}X = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx = \begin{vmatrix} x = t/\lambda \\ dx = dt/\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}, \tag{15.11}$$

$$\mu_2(\lambda,\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}, \tag{15.12}$$

$$\nu_2(\lambda,\alpha) = \mathsf{D}X = \mathsf{M}(X^2) - (\mathsf{M}X)^2 = \mu_2(\lambda,\alpha) - \mu_1^2(\lambda,\alpha) = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{15.13}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \mu_1(\lambda,\alpha) = \widehat{\mu}_1(\vec{X}_n), \\ \nu_2(\lambda,\alpha) = \widehat{\nu}_2(\vec{X}_n), \end{cases} \tag{15.14}$$

будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\lambda} = \overline{X}, \\ \dfrac{\alpha}{\lambda^2} = \widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n), \end{cases} \tag{15.15}$$

решая которую, получим

$$\lambda = \frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}, \qquad \alpha = \left(\frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}(\vec{X}_n)}\right)^2. \tag{15.16}$$

Следовательно, оценками неизвестных параметров будут

$$\widehat{\lambda}(\vec{X}_n) = \frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}, \qquad \widehat{\alpha}(\vec{X}_n) = \left(\frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}(\vec{X}_n)}\right)^2. \tag{15.17}$$

Пример 15.2. Пусть X — случайная величина, имеющая распределение Бернулли с параметром p, т.е. X принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Найдем с помощью метода моментов оценку параметра p по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Решение: Выборкой $\vec{X}_n$ в данном случае являются n дискретных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$.

Так как $\mathsf{M}X = p$, то уравнение $\mu_1(p) = \widehat{\mu}_1(\vec{X}_n)$ имеет вид $p = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Следовательно, $\widehat{p}(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Если n наблюдений случайной величины X трактовать как n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, то точечной оценкой параметра p является частота успехов (доля успехов) в этих n испытаниях.

Пример 15.3. Пусть X — экспоненциальная случайная величина с параметром λ. Найдем оценку максимального правдоподобия параметра λ по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Решение: Плотность случайной величины X имеет вид

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{15.18}$$

Заметим, что так как $f(x,\lambda) = 0$ для всех $x < 0$, то все наблюдения X_i неотрицательны, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $f(X_i, \lambda) = \lambda e^{-\lambda X_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и

$$L(\vec{X}_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i}, \tag{15.19}$$

$$l(\vec{X}_n;\lambda) = \ln L(\vec{X}_n;\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\lambda e^{-\lambda X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\ln\lambda - \lambda X_i) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{15.20}$$

Следовательно,

$$\frac{dl(\vec{X}_n;\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{15.21}$$

и уравнение правдоподобия (15.6) имеет вид

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \tag{15.22}$$

решая которое получим, что

$$\lambda = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1} = \frac{1}{\overline{X}}. \tag{15.23}$$

Далее, дифференцируя $l(\vec{X}_n; \lambda)$ дважды и учитывая, что $n > 0$, найдем, что

$$\frac{d^2 l(\vec{X}_n; \lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \tag{15.24}$$

для всех λ, в частности для $\lambda = 1/\overline{X}$. Поэтому $1/\overline{X}$ является точкой максимума функции (15.20), а не точкой минимума или точкой перегиба.

Таким образом, точечной оценкой неизвестного параметра λ является $\widehat{\lambda}(\vec{X}_n) = 1/\overline{X}$.

Если учесть, что для экспоненциальной случайной величины $\mathsf{M}X = 1/\lambda$, а наилучшей оценкой $\mathsf{M}X$ является *выборочное среднее* $\overline{X}$, то полученный ответ представляется вполне естественным.

Пример 15.4. Пусть X — пуассоновская случайная величина с параметром λ, т.е.

$$\mathsf{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15.25}$$

Найдем оценку максимального правдоподобия параметра λ по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Р е ш е н и е: Согласно определению метода максимального правдоподобия для дискретной случайной величины и определению пуассоновской случайной величины

$$P(x, \lambda) = \mathsf{P}\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}. \tag{15.26}$$

Поэтому

$$L(\vec{X}_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda}, \tag{15.27}$$

$$l(\vec{X}_n; \lambda) = \ln L(\vec{X}_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \ln\lambda - \ln(X_i!) - \lambda\right). \tag{15.28}$$

Следовательно,

$$\frac{dl(\vec{X}_n; \lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}X_i - 0 - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0 - n, \tag{15.29}$$

и уравнение правдоподобия (15.6) имеет вид

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i - n = 0, \tag{15.30}$$

решая которое получим, что

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}. \tag{15.31}$$

Далее, дифференцируя $l(\vec{X}_n; \lambda)$ дважды и учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i > 0$ (наблюдения X_i пуассоновской случайной величины неотрицательны), найдем, что

$$\frac{d^2 l(\vec{X}_n; \lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\lambda^2} < 0 \tag{15.32}$$

для всех λ, в частности для $\lambda = \overline{X}$. Поэтому $\overline{X}$ является точкой максимума функции (15.28), а не точкой минимума или точкой перегиба.

Таким образом, точечной оценкой неизвестного параметра λ является $\widehat{\lambda}(\vec{X}_n) = \overline{X}$.

Если учесть, что для пуассоновской случайной величины $\mathsf{M}X = \lambda$, а наилучшей оценкой $\mathsf{M}X$ является *выборочное среднее* $\overline{X}$, то полученный ответ представляется вполне естественным.

Пример 15.5. Пусть X — биномиальная случайная величина с параметрами p и m, т.е. X — число успехов в m испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p:

$$\mathsf{P}\{X = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{15.33}$$

Предполагая параметр m известным, найдем оценку максимального правдоподобия параметра p по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Р е ш е н и е: Согласно определению метода максимального правдоподобия для дискретной случайной величины и определению биномиальной случайной величины

$$P(x, p) = \mathsf{P}\{X = x\} = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}. \tag{15.34}$$

Поэтому

$$L(\vec{X}_n; p) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i} p^{X_i} (1-p)^{m-X_i}. \tag{15.35}$$

Заменяя громоздкое выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ более компактным $n\overline{X}$, получим

$$l(\vec{X}_n; p) = \ln L(\vec{X}_n; p) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(C_m^{X_i} p^{X_i} (1-p)^{m-X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln C_m^{X_i} + X_i \ln p + (m - X_i) \ln(1-p\right.$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \ln C_m^{X_i} + \ln p \sum_{i=1}^{n} X_i + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n} (m - X_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln C_m^{X_i} + n\overline{X} \ln p + (nm - n\overline{X}) \ln(1-p). \tag{15.36}$$

Следовательно,

$$\frac{dl(\vec{X}_n; p)}{dp} = 0 + n\overline{X}\frac{1}{p} - (nm - n\overline{X})\frac{1}{1-p}. \tag{15.37}$$

Решая относительно p уравнение

$$n\overline{X}\frac{1}{p} - (nm - n\overline{X})\frac{1}{1-p} = 0, \tag{15.38}$$

получим, что $p = \overline{X}/m$.

Заметим, что среднее арифметическое наблюдений $\overline{X}$ не превышает максимально возможного значения случайной величины, т.е. $\overline{X} \leqslant m$. Кроме того, из неравенств $X_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ вытекает, что $\overline{X} \geqslant 0$. Дифференцируя $l(\vec{X}_n; \lambda)$ дважды и учитывая, что $\overline{X} \leqslant m$, $\overline{X} \geqslant 0$ и $n > 0$, найдем, что

$$\frac{d^2 l(\vec{X}_n; p)}{d\lambda^2} = -\frac{n\overline{X}}{p^2} - \frac{n(m - \overline{X})}{(1-p)^2} < 0 \tag{15.39}$$

для всех p, в частности для $p = \overline{X}/m$. Поэтому $\overline{X}/m$ является точкой максимума функции (15.36), а не точкой минимума или точкой перегиба.

Таким образом, точечной оценкой неизвестного параметра p является $\widehat{p} = \overline{X}/m$.

15.3 Вопросы и задачи

15.1. Пусть X — геометрическая случайная величина, т.е.

$$\mathsf{P}\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{15.40}$$

Другими словами, X — число испытаний до появления первого успеха в схеме Бернулли с вероятностью успеха p.

Найдите по независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X методом максимального правдоподобия точечную оценку параметра p.

О т в е т: $\widehat{p}(\vec{X}_n) = 1/\overline{X}$.

15.2. Пусть X — случайная величина с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta}, \quad \alpha > -1, \ \beta > 0, \ x \geqslant 0. \qquad (15.41)$$

Предполагая параметр α известным, найдите методом максимального правдоподобия по независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X точечную оценку параметра β.

Ответ: $\widehat{\beta}(\vec{X}_n) = \frac{\overline{X}}{\alpha+1}$.

15.3. Пусть X — случайная величина с плотностью

$$f(x) = \frac{\alpha^k x^{k-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(k)}, \quad x > 0, \qquad (15.42)$$

где k — известный параметр, а α — неизвестный. Найдите с помощью метода максимального правдоподобия оценку параметра α.

Ответ: $\widehat{\alpha}(\vec{X}_n) = k/\overline{X}$.

Семинар 16

Интервальное оценивание

16.1 Теоретические сведения

Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины с известной дисперсией

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения.

Доверительный интервал уровня доверия γ для математического ожидания μ нормальной случайной величины с известной дисперсией σ^2 имеет вид

$$\left(\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{16.1}$$

Наименьшее количество наблюдений n, позволяющих оценить μ с точностью ε (т.е. $|\overline{X} - \mu| \leqslant \varepsilon$) и надежностью γ определяется неравенством

$$n \geqslant \left(\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma}{\varepsilon}\right)^2. \tag{16.2}$$

Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины с неизвестной дисперсией

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Доверительный интервала уровня доверия γ для математического ожидания μ нормальной случайной величины с неизвестной дисперсией σ^2 имеет вид

$$\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}\right). \tag{16.3}$$

Доверительные интервалы для дисперсии и среднеквадратического отклонения нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ и $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)$ — квантили уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$ соответственно χ^2-распределения с $n-1$ степенью свободы.

Доверительный интервала уровня доверия γ для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$\left(\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \quad \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}\right). \tag{16.4}$$

Доверительный интервала уровня доверия γ для среднеквадратического отклонения σ нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}}, \quad \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}}\right). \tag{16.5}$$

Доверительный интервал для разности математических ожиданий нормальных случайных величин с известными дисперсиями

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \dots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения.

Доверительный интервала уровня доверия γ для разности математических ожиданий μ_1 и μ_2 нормальных случайных величин с известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 имеет вид

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, \quad \overline{X} - \overline{Y} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right). \tag{16.6}$$

Доверительный интервал для разности математических ожиданий нормальных случайных величин с неизвестными, но равными дисперсиями

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \dots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестной дисперсией σ^2. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad S^2(\vec{X}_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

$$S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n) = \sqrt{\frac{(m-1)S^2(\vec{X}_n) + (n-1)S^2(\vec{Y}_n)}{m+n-2}},$$

$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы.

Доверительный интервала уровня доверия γ для разности математических ожиданий μ_1 и μ_2 нормальных случайных величин с неизвестными, но равными дисперсиями имеет вид

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}, \overline{X} - \overline{Y} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right). \tag{16.7}$$

Приближенный доверительный интервал для вероятности успеха в схеме Бернулли

Пусть S_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с неизвестной вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1-p$. Обозначим через $\hat{p} = S_n/n$ и $\hat{q} = 1-\hat{p}$ соответственно доли успехов и неудач в n испытаниях, $u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения.

Приближенный доверительный интервал уровня доверия γ для вероятности успеха p в схеме Бернулли имеет вид

$$\left(\hat{p} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \quad \hat{p} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) \tag{16.8}$$

Замечание 16.1. При вычислении значений границ доверительных интервалов в формулы (16.1)–(16.8) вместо случайных величин будем подставлять их значения, вычисленные по конкретным наблюдениям (по заданным реализациям случайных выборок), взятым из условий задач. Такое отождествление случайные величины с их значениями не должно привести к путанице.

16.2 Решение типовых примеров

Пример 16.1. В таблице 16.1 даны результаты 126 измерений глубины озера при помощи прибора, ошибки измерения которого являются нормальными и не содержат систематической составляющей. Нужно построить доверительные интервалы уровней доверия 0,9 и 0,99 для неизвестной глубины.

381	388	384	418	373	364	376	383	432	428	413	412	395	420
440	440	409	406	416	418	398	371	391	421	421	425	400	391
413	385	425	423	421	431	429	411	418	429	418	449	380	347
390	382	430	372	430	437	407	402	400	429	380	456	418	411
385	405	363	404	369	340	421	358	422	373	399	391	373	418
418	383	412	382	383	428	409	397	427	430	395	410	400	405
392	376	433	363	365	395	393	377	392	379	394	410	385	370
388	399	389	362	382	382	384	415	378	375	395	388	361	399
384	375	372	427	385	410	378	392	398	398	389	403	388	429

Таблица 16.1

Решение: Нужно по наблюдениям, приведенным в таблице, построить доверительный интервал (16.3) для математического ожидания нормальной случайной случайной величины с неизвестной дисперсией.

Находим $n = 126$, $\sqrt{n} \approx 11.22497216$, $\overline{x} \approx 399.0952381$, $S^2(\vec{x}_n) \approx 516.678857142856$, $S(\vec{x}_n) \approx 22.7305709814526$.

Далее рассмотрим два случая, соответствующие уровням доверия 0,9 и 0,99.

1) Пусть $\gamma = 0.9$, тогда $(1+\gamma)/2 = 0.95$. Используя таблицу квантилей распределения Стьюдента находим квантиль

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) = t_{0.95}(125) \approx 1.657135178.$$

Следовательно

$$\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 - \frac{1.657135178 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 395.740,$$

$$\overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 + \frac{1.657135178 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 402.451.$$

Доверительный интервал уровня доверия 0.9 имеет вид $(395.740, 402.451)$.

2) Пусть теперь $\gamma = 0.99$. Тогда $(1+\gamma)/2 = 0.995$,

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) = t_{0.995}(125) \approx 2.615733377,$$

$$\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 - \frac{2.615733377 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 393.798,$$

$$\overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 + \frac{2.615733377 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 404.392.$$

Доверительный интервал уровня доверия 0.99 имеет вид $(393.798, 404.392)$.

Видно, что при прочих равных условиях доверительный интервал уровня доверия 0.99 шире доверительного интервала уровня доверия 0.9. Из этого можно сделать два вывода. Во-первых, этот факт согласуется с интуитивным представлением о том, что чем более расплывчатым является прогноз, тем с большей вероятностью от сбудется. Во-вторых, бессмысленно увеличивать уровень доверия γ практически до единицы, поскольку в этом случае доверительный интервал будет очень широким и, следовательно, неинформативным.

Пример 16.2. В условиях примера 16.1 построить доверительный интервал уровня доверия 0,95 для дисперсии и для среднеквадратического отклонения ошибки измерения.

Р е ш е н и е: Нужно построить доверительный интервал (16.4) для дисперсии нормальной случайной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием.

Находим $n = 126$, $\sqrt{n} \approx 11.22497216$, $S^2(\vec{x}_n) \approx 516.678857142856$.

Далее, т.к. $\gamma = 0.95$, то $(1-\gamma)/2 = 0.025$, $(1+\gamma)/2 = 0.975$. Используя таблицу квантилей χ^2-распределения находим квантиль

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(125) \approx 95.94572517, \quad \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(125) \approx 157.8385032.$$

Следовательно, левая граница интервала имеет вид

$$\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \approx \frac{125 \cdot 516.678857142856}{157.8385032} \approx 409.183157679976,$$

а правая граница интервала имеет вид

$$\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \approx \frac{125 \cdot 516.678857142856}{95.94572517} \approx 673.139496610436.$$

Таким образом, доверительный интервал уровня доверия 0.95 для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$(409.183, \quad 673.139). \tag{16.9}$$

Извлекая согласно (16.5) квадратный корень из границ интервала (16.9) получим, что доверительный интервал уровня доверия 0.95 для среднеквадратического отклонения σ нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$(20.228, \quad 25.945). \tag{16.10}$$

Пример 16.3. Предположим, что в условиях примера 16.1 известна дисперсия ошибки измерения (можно считать, что она взята из технического паспорта прибора), которая равна $\sigma^2 = 516.678857142856$. Построим доверительный интервал уровня доверия 0,9 для неизвестной глубины и сравним его с доверительным интервалом уровня доверия 0,9 из примера 16.1.

Р е ш е н и е: Заметим, что данные этого примера практически идентичны данным примера 16.1. Отличие заключается лишь в том, что в этом примере число 516.678857142856 — это дисперсия, а в примере 16.1 — оценка дисперсии. Выясним как сам факт о наличии дополнительной информации (дисперсия уже известна, ее не нужно оценивать) влияет на точность доверительного оценивания.

Поскольку дисперсия известна, то нужно построить доверительный интервал (16.1) для математического ожидания нормальной случайной случайной величины с известной дисперсией.

Находим $n = 126$, $\sqrt{n} \approx 11.22497216$, $\overline{x} \approx 399.0952381$, $\sigma^2 = 516.678857142856$, $\sigma = 22.7305709814526$.

Далее, т.к. $\gamma = 0.9$, то $(1+\gamma)/2 = 0.95$. Используя таблицу квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}} = u_{0.95} \approx 1.644853627,$$

$$\overline{x} - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 - \frac{1.644853627 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 395.764,$$

$$\overline{x} + u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 + \frac{1.644853627 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 402.426.$$

Доверительный интервала уровня доверия 0.9 имеет вид $(395.764, 402.426)$.

Видно, что при прочих равных условиях доверительный интервал уровня доверия 0.9 с неизвестной дисперсией больше доверительного интервала уровня доверия 0.9 с известной дисперсией. Это согласуется с интуитивным представлением о том, что чем больше информации, том точнее прогноз.

Пример 16.4. Длина доверительного интервала примера 16.3, построенного с надежностью (с уровнем доверия) $\gamma = 0.9$ равна 10.43210977. Из формулы (16.1) вытекает, что с ростом числа наблюдений n длина доверительного интервала стремится к нулю. Сколько в условиях примера 16.3 наблюдений нужно сделать, чтобы точность оценивания глубины μ выборочным средним $\overline{X}$ по абсолютной величине была не более $\varepsilon = 2$ метра с той же надежностью (с уровнем доверия не менее $\gamma = 0.9$)?

Р е ш е н и е: Согласно неравенству (16.2)

$$n \geqslant \left(\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{1.644853627 \cdot 22.73057098}{2}\right)^2 = 349.4742750. \tag{16.11}$$

Пример 16.5. Амплитуда колебаний определялась двумя лаборантами с интервалом в один день. Первый лаборант по 100 наблюдениям получил среднее арифметическое значений амплитуды 81 мм, а второй по 150 наблюдениям — среднее арифметическое значений 84 мм.

В предположении, что дисперсии измерений известны и равны 32 мм^2 и 48 мм^2 для первого и второго лаборанта соответственно, найти 95 %-ный доверительный интервал для разности амплитуд.

Р е ш е н и е: Обозначим через μ_1 и μ_2 неизвестные значения амплитуд соответственно во время первого и второго измерений. Предположим, что ошибки наблюдений лаборантов являются нормальными и не имеют систематической составляющей. Тогда для построения доверительного интервала для $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ можно применить модель (16.6).

Фраза «95 %-ный доверительный интервал» в переводе с инженерного языка означает, что $\gamma = 0.95$. Поэтому $(1+\gamma)/2 = 0.975$. Используя таблицу квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}} = u_{0.975} \approx 1.959963985.$$

Из условия видно, что $m = 100$, $n = 150$, $\overline{X} = 81$, $\overline{Y} = 84$, $\sigma_1^2 = 32$, $\sigma_2^2 = 48$. Поэтому

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} = \sqrt{\frac{32}{100} + \frac{48}{150}} = \frac{4}{5} = 0.8.\text{Следовательно}$$

$$\overline{X} - \overline{Y} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \approx 81 - 84 - 1.959963985 \cdot 0.8 \approx -4.567971188,$$

$$\overline{X} - \overline{Y} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \approx 81 - 84 + 1.959963985 \cdot 0.8 \approx -1.432028812.$$

Таким образом, доверительный интервала уровня доверия 0.95 имеет вид $(-4.568, -1.432)$.

Пример 16.6. Ожидается, что добавление специальных веществ уменьшает жесткость воды. Измерения жесткости воды до и после добавления специальных веществ по 40 и 50 пробам соответственно дали следующие значения жесткости (в градусах жесткости).

Значения жесткости до добавления специальных веществ равны
3.73, 3.92, 3.85, 4.05, 3.99, 4.43, 3.59, 4.39, 4.04, 4.25, 4.07, 3.63, 3.99, 4.00, 3.99, 3.95, 4.05, 3.98, 3.98, 3.96, 4.04, 3.83, 3.89, 4.22, 4.12, 4.32, 4.06, 3.99, 3.89, 3.71, 3.70, 3.71, 4.03, 3.85, 4.16, 3.96, 3.79, 4.34, 3.75, 3.76.

Значения жесткости после добавления специальных веществ равны
3.46, 4.21, 4.14, 3.54, 3.86, 4.17, 3.47, 3.71, 3.82, 4.00, 3.77, 3.83, 3.96, 3.79, 3.59, 3.73, 3.62, 4.29, 3.74, 3.78, 4.10, 3.55, 4.28, 3.83, 3.91, 3.67, 3.86, 3.70, 3.81, 4.30, 4.35, 4.02, 4.02, 3.58, 3.57, 3.58, 3.75, 3.72, 3.94, 3.50, 3.57, 3.47, 3.52, 4.12, 3.43, 4.20, 3.63, 4.07, 3.61, 3.66.

Предполагается, что все измерения жесткости проводились одним и тем же прибором, ошибки измерения которого являются нормальными с нулевой систематической составляющей. Найдем 95 %-ный доверительный интервал для разности жесткости воды до и после добавления специальных веществ.

Р е ш е н и е: Обозначим через μ_1 и μ_2 неизвестные значения жесткости воды соответственно до и после добавления специальных веществ. Из условия задачи следует, что для построения доверительного интервала для $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ можно применить модель (16.7).

Последовательно вычисляем

$$\overline{X} = 3.974, \qquad \overline{Y} = 3.816000000,$$

$$S^2(\vec{X}_m) \approx 0.0412348717948718, \qquad S^2(\vec{Y}_n) \approx 0.0662448979591837,$$

$$S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n) \approx .234863596776744.$$

Используя таблицу квантилей распределения Стьюдента находим для $\gamma = 0.95$ квантиль уровня $(1+\gamma)/2 = 0.975$ с 88 степенями свободы

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2) = t_{0.975}(88) \approx 1.987289865.$$

Следовательно, согласно формуле (16.7) доверительный интервал будет иметь вид (0.0578787565213012, 0.258121243478699).

Пример 16.7. Найдем доверительный интервал для вероятности попадания снаряда в цель с коэффициентом доверия $\gamma = 0{,}9$, если после 220 выстрелов в цель попало 75 снарядов.

Решение: Нужно построить доверительный интервал (16.8). Так как $\gamma = 0.9$, то $(1+\gamma)/2 = 0.95$. Используя таблицу квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}} = u_{0.95} \approx 1.644853627.$$

Далее $n = 220$, $\hat{p} = \dfrac{75}{220} = \dfrac{15}{44} \approx 0.3409090909$, $\hat{q} = \dfrac{29}{44}$, $\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n} = \dfrac{87}{85184}$,

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{87}{85184}} = \frac{\sqrt{957}}{968} \approx 0.03195807499.$$

Поэтому границы доверительного интервала имеют вид

$$\underline{p} = \hat{p} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.3409090909 - 1.644853627 \cdot 0.03195807499 \approx 0.288, \tag{16.12}$$

$$\overline{p} = \hat{p} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.3409090909 + 1.644853627 \cdot 0.03195807499 \approx 0.393. \tag{16.13}$$

Значит, доверительный интервал для вероятности попадания снаряда в цель следующий: $(0.288, 0.393)$.

16.3 Задачи для самостоятельного решения

16.1. Некоторая постоянная величина измерена 25 раз с помощью прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 10. Выборочное среднее оказалось равно 100. Определите значения границ доверительного интервала для измеряемой величины при коэффициенте доверия 0.99.
Ответ: значение нижней границы 94.9, верхней — 105.1.

16.2. На основании 100 опытов было определено, что выборочное среднее время для производства детали составляет 5.5 секунд, а оценка среднеквадратического отклонения равна 1.7 секундам. Сделав допущение, что время для производства детали распределено по нормальному закону, определите доверительный интервал для математического ожидания времени производства детали с коэффициентом доверия 0.85.
Ответ: $(5.25,\ 5.75)$.

16.3. Среднеквадратическое отклонение ошибки высотомера известно и равно 15 метрам. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с достоверностью 0.99 ошибка измерения высоты была меньше 30 метров? При этом случайные ошибки высотомера распределены по нормальному закону, а систематические ошибки отсутствуют.
Ответ: на самолете должно быть не менее двух высотомеров.

Семинар 17

Проверка гипотез

17.1 Теоретические сведения

Основные понятия

Определение 17.1. Пусть X — произвольная одномерная или многомерная случайная величина. ***Статистической гипотезой*** называют любое утверждение о функции распределения случайной величины X, при этом слово "статистическая" для краткости обычно опускают.

Пусть имеется случайная величина X с функцией распределения $F(x)$ и две гипотезы о $F(x)$. Одну из них назовем ***основной***, или ***нулевой***, ***гипотезой*** и обозначим H_0, а вторую — ***альтернативной***, или ***конкурирующей***, ***гипотезой*** и обозначим H_A.

Определение 17.2. ***Критерием***, или ***статистическим критерием***, проверки гипотез называют правило, по которому по данным выборки $\vec{X}_n$ принимается решение о справедливости либо основной, либо альтернативной гипотезы.

Критерий задают с помощью ***критического множества*** $W \in \mathbb{R}^n$. Решение принимают следующим образом:

- если выборка $\vec{X}_n$ принадлежит критическому множеству W, то отвергают основную гипотезу H_0 и принимают альтернативную гипотезу H_A;
- если выборка $\vec{X}_n$ не принадлежит критическому множеству W (т.е. принадлежит дополнению $\overline{W} = \mathbb{R}^n \setminus W$ множества W до $\mathbb{R}^n$), то отвергают альтернативную гипотезу H_A и принимают основную гипотезу H_0. Множество $\overline{W}$ называют ***доверительным множеством***..

При использовании любого критерия возможны ошибки следующих видов:

- принять гипотезу H_A, когда верна H_0 — ***ошибка первого рода***;
- принять гипотезу H_0, когда верна H_A — ***ошибка второго рода***.

Вероятности совершения ошибок первого и второго рода обозначают α и β:

$$\alpha = \mathsf{P}\{\vec{X}_n \in W \mid H_0\}, \qquad \beta = \mathsf{P}\{\vec{X}_n \in \overline{W} \mid H_A\}.$$

Здесь $\mathsf{P}\{A \mid H_0\}$ и $\mathsf{P}\{A \mid H_A\}$ — вероятности события A при условии, что справедливы соответственно гипотезы H_0 и H_A.

Вероятность совершения ошибки первого рода α называют также ***уровнем значимости критерия***.

Величину $1 - \beta$, равную вероятности отвергнуть основную гипотезу H_0, когда она неверна, называют ***мощностью критерия***. #

Проверка гипотез о математическом ожидании нормальной случайной величины с известной дисперсией

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины X. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \xi = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Обозначим через u_α, $u_{1-\alpha}$ и $u_{1-\alpha/2}$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0:\ \mu = \mu_0$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1:\ \mu < \mu_0,$$

$$H_2:\ \mu_1 > \mu_0,$$

$$H_3:\ \mu_1 \neq \mu_0,$$

где μ_0 — некоторое известное число, имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется:

1) в пользу H_1, если $\xi < u_\alpha/2$;

2) в пользу H_2, если $\xi > u_{1-\alpha}$;

3) в пользу H_3, если $|\xi| > u_{1-\alpha/2}$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Проверка гипотез о математическом ожидании нормальной случайной величины с неизвестной дисперсией

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины X. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad \tau = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}.$$

Обозначим через $t_\alpha(n-1)$, $t_{1-\alpha}(n-1)$ и $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0:\ \mu = \mu_0$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1:\ \mu < \mu_0,$$

$$H_2:\ \mu_1 > \mu_0,$$

$$H_3:\ \mu_1 \neq \mu_0,$$

где μ_0 — некоторое известное число, имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\tau < t_\alpha/2(n-1)$;

2) в пользу H_2, если $\tau > t_{1-\alpha}(n-1)$;

3) в пользу H_3, если $|\tau| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Проверка гипотез о дисперсии нормальной случайной величины при неизвестном математическом ожидании

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины X. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad \eta = \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma_0^2}.$$

Обозначим через $\chi^2_\alpha(n-1)$, $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ и $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ – квантили уровня α, $1-\alpha$, $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ соответственно χ^2-распределения с $n-1$ степенью свободы.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2,$$

$$H_2: \ \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

$$H_3: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

где σ_0^2 — некоторое известное число, имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\eta < \chi^2_\alpha(n-1)$;

2) в пользу H_2, если $\eta > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$;

3) в пользу H_3, если $\eta < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ или $\eta > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий нормальных случайных величин с известными дисперсиями

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$,

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad \xi = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}.$$

Обозначим через u_α, $u_{1-\alpha}$ и $u_{1-\alpha/2}$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1: \ \mu_1 < \mu_2,$$

$$H_2: \ \mu_1 > \mu_2,$$

$$H_3: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\xi < u_\alpha$;

2) в пользу H_2, если $\xi > u_{1-\alpha}$;

3) в пользу H_3, если $|\xi| > u_{1-\alpha/2}$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий нормальных случайных величин с неизвестными, но равными дисперсиями

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестными, но равными дисперсиями σ^2.

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad S^2(\vec{X}_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

$$S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n) = \sqrt{\frac{(m-1)S^2(\vec{X}_m) + (n-1)S^2(\vec{Y}_n)}{m+n-2}},$$

$$\tau = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}.$$

Обозначим через $t_\alpha(m+n-2)$, $t_{1-\alpha}(m+n-2)$ и $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1: \ \mu_1 < \mu_2,$$

$$H_2: \ \mu_1 > \mu_2,$$

$$H_3: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\tau < t_\alpha(m+n-2)$;

2) в пользу H_2, если $\tau > t_{1-\alpha}(m+n-2)$;

3) в пользу H_3, если $|\tau| > t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Проверка гипотез о равенстве дисперсий нормальных случайных величин с неизвестными математическими ожиданиями

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad S^2(\vec{X}_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

$$F = \frac{S^2(\vec{X}_m)}{S^2(\vec{Y}_n)},$$

Обозначим $f_{\alpha}(m-1,n-1)$, $f_{1-\alpha}(m-1,n-1)$, $f_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ и $f_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$, $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ распределения Фишера с числом степеней свободы $m-1$ и $n-1$.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1: \ \sigma_1^2 < \sigma_2^2,$$
$$H_2: \ \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$
$$H_3: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $F < f_{\alpha}(m-1,n-1)$;

2) в пользу H_2, если $F > f_{1-\alpha}(m-1,n-1)$;

3) в пользу H_3, если $F < f_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ или $F > f_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

17.2 Решение типовых примеров

Пример 17.1. В цехе завода выпускают валы электродвигателей. Из продукции одного станка произвольно выбирают 50 изделий, измеряют их диаметры и вычисляют значение *выборочного среднего* $\overline{x} = 42.972$ мм. По техническим условиям станок настраивается на номинальный размер 43 мм. Можно ли на основании полученных результатов сделать вывод о том, что станок обеспечивает заданный номинальный размер, или полученные данные свидетельствуют о неудовлетворительной наладке технологического оборудования. Ошибка измерения имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией 0.01 мм^2.

Решение: Для оценки правильности настройки оборудования необходимо проверить гипотезу H_0: $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 = 43$ мм о математическом ожидании нормальной случайной величины X с известной дисперсией $\sigma^2 = 0.01$ (см. раздел 17.2) при альтернативной гипотезе H_3: $\mu \neq 43$ мм, выбор который объясняется тем, что станок можно настроить на размер как выше, так и ниже номинального.

Выбираем уровень значимости $\alpha = 0.05$. Для рассматриваемой альтернативы H_3 при $\alpha = 0.05$ критическое множество имеет вид

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \geqslant 1.96,$$

где 1.96 — квантиль $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975}$ стандартного нормального распределения. Находим значение случайной величины $\xi = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$:

$$\xi = \frac{42.972-43}{0.1}\sqrt{50} = -1.98.$$

Поскольку полученное значение принадлежит критическому множеству ($|-1.98| > 1.96$), то гипотезу H_0 отклоняем в пользу альтернативы H_3, т.е. считаем, что станок разладился и его нужно останавливать и настраивать.

Пусть теперь уровень значимости $\alpha = 0.01$, т.е. мы с большей неохотой собираемся отклонять H_0 (будем более осторожными). Тогда $u_{1-\alpha/2} = u_{0.995} \approx 2.58$. Так как $|-1.98| \leqslant 2.58$, то на уровне значимости 0.01 гипотеза H_0 не отклоняется.

Таким образом, в этой задаче ситуация такова, что осторожные исследователи (которые очень боятся совершить ошибку первого рода) считают, что станок все еще настроен хорошо, а отличие 42.972 от 43 объясняют случайными ошибками измерений. Более решительные исследователи (которые не очень боятся совершить ошибку первого рода) считают, что отличие 42.972 от 43 нужно объяснить разладкой станка.

Пример 17.2. В условиях примера 17.1 проверим гипотезу H_0: $\mu = \mu_0 = 43$ мм при альтернативной гипотезе H_1: $\mu \neq 43$ мм в предположении, что дисперсия ошибки неизвестна, а исправленная выборочная дисперсия S^2 равна 0.01.

Решение: Выбираем уровень значимости $\alpha = 0.05$. По таблице квантилей распределения Стьюдента находим квантиль $t_{1-\alpha/2} \approx 2.01$ с числом степеней свободы 49. Критическое множество для рассматриваемых гипотез (см. раздел 17.2) имеет вид

$$\left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n}\right| \geqslant 2.01.$$

Вычисляя выборочное значение статистики

$$\tau = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}(\vec{X}_n),$$

получаем

$$\tau = \frac{42.972 - 43}{0.1}\sqrt{50} = -1.98.$$

Полученное значение не принадлежит критическому множеству, поэтому гипотезу H_0 принимаем.

Пример 17.3. Ведутся наблюдения за состоянием технологического процесса. Разладка оборудования приводит к изменению номинального значения контролируемого признака X, имеющего нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2 = 0.069$ мм^2. Для проверки стабильности технологического процесса через каждые три смены изучают выборку объема $n = 50$. По результатам двух выборок рассчитывают $\overline{x}_1 = 3.038$ мм и $\overline{x}_2 = 2.981$ мм. Проверим стабильность технологического процесса.

Решение: Для проверки стабильности технологического процесса необходимо проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий H_0: $\mu_1 = \mu_2$ нормальных случайных величин с известными дисперсиями (см. раздел 17.2). Здесь $m = n = 50$, дисперсии известны (и даже совпадают, хотя это и не обязательно) и равны 0.069. В качестве конкурирующей гипотезы выбираем H_2: $\mu_1 > \mu_2$, так как оценка номинального значения контролируемого признака уменьшилась с течением времени.

Выбираем уровень значимости, например $\alpha = 0.05$. По таблице квантилей нормального распределения находим квантиль уровня $1 - \alpha = 0.95$: $u_{1-\alpha} = u_{0.95} \approx 1.645$. Критическое множество имеет вид

$$\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \geqslant 1.645.$$

Поскольку значение

$$\xi = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} = \frac{3.038 - 2.981}{\sqrt{0.069\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)}} = 1.085$$

не принадлежит критическому множеству, гипотезу H_0 принимаем, т.е. делаем вывод, что технологический процесс на момент проверки можно считать стабильным.

Пример 17.4. Давление в камере измерялось дважды двумя манометрами. По результатам 10 замеров получены следующие данные (в единицах шкалы приборов): $\overline{x} = 1593$, $\overline{y} = 1601$, $S_1^2 = 1.72$, $S_2^2 = 1.75$. Выясним, есть ли основание считать, что давление в камере не изменилось, если ошибки измерения распределены по нормальному закону.

Решение: Проверяем гипотезу H_0: $\mu_1 = \mu_2$ против альтернативы H_3: $\mu_1 \neq \mu_2$, предполагая, что дисперсии не известны, но одинаковы (см. раздел 17.2). Задаем уровень значимости $\alpha = 0{,}01$. Для построения критического множества вычисляем

$$S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n) = \sqrt{\frac{(m-1)S^2(\vec{X}_m) + (n-1)S^2(\vec{Y}_n)}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)\cdot 1.72 + (10-1)\cdot 1.75}{10+10-2}} \approx 1.3171934,$$

$$\tau = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S(\vec{X}_m,\vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} = \frac{1593-1601}{1.3171934\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} \approx -13.58.$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента находим квантиль уровня $1-\alpha/2 = 0{,}995$ с числом степеней свободы $n+m-2=18$: $t_{1-\alpha/2} = t_{0{,}995} = 2{,}88$. Гипотезу H_0 отклоняем, так как значение -13.58 принадлежит критическому множеству: $|-13.58| > 2{,}88$.

Пример 17.5. Цех выпускает болты. Из партии болтов взята выборка объема $n = 20$ и измерена длина каждого болта, по которым рассчитаны выборочное среднее $\overline{X} = 18$ мм и выборочная дисперсия $S^2 = 784$ мм^2. Выясним, можно ли считать, что станок обеспечивает допустимый для данной партии разброс, или же расчетное значение S^2 указывает на несоответствие точности изготовления деталей предъявляемым требованиям, согласно которым $\sigma_0^2 = 400$ мм^2. Контролируемый признак распределен по нормальному закону.

Р е ш е н и е: Для ответа на поставленный вопрос проверим гипотезу о величине дисперсии H_0: $\sigma_0^2 = 400$, выбрав в качестве альтернативной гипотезу H_2: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (см. раздел 17.2). Назначаем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Для того чтобы построить критическое множество, вычислим

$$\eta = \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)\cdot 784}{400} = 37{,}24.$$

По таблице квантилей χ^2-распределения с числом степеней свободы $n-1$ найдем $\chi^2_{1-\alpha}(19) = 30{,}1$. Критическое множество имеет вид $\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma_0^2} > 30{,}1$.

Гипотезу H_0 отклоняем, так как $37{,}24 > 30{,}1$. Станок нужно останавливать и настраивать.

Пример 17.6. До наладки станка была проверена точность изготовления 10 изделий и найдена оценка дисперсии контролируемого признака $S_1^2 = 9.6$. После наладки измерено еще 15 изделий и получена оценка дисперсии $S_2^2 = 5.7$. Можно ли считать, что точность изготовления изделий после наладки повысилась? Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

Р е ш е н и е: Для ответа на поставленный вопрос проверим гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_2: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (см. раздел 17.2). Назначаем уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Для построения критического множества вычисляем

$$F = S_1^2(\vec{X}_n)/S_2^2(\vec{X}_n) = 9.6/5.7 = 1.68.$$

По таблице квантилей распределения Фишера с числом степеней свободы $m-1 = 9$ и $n-1 = 14$ находим $f_{1-\alpha}(9,14) = f_{0.95}(9,14) = 2.65$. Критическое множество имеет вид $S_1^2(\vec{x}_n)/S_2^2(\vec{x}_n) > 2.65$.

Гипотезу H_0 принимаем, так как $1.68 < 2.65$, т.е. мы осторожничаем и скажем, что пока нет оснований считать, что точность повысилась. Если кто-то уверен в обратном (для него числа 9.6 и 5.7 явно не равны), то ему нужно брать больше наблюдений и если он прав, то получит желаемый результат и при помощи данного критерия.

Виды семян	Частота	Вероятность	
Круглые и желтые	315	9/16	312.75
Морщинистые и желтые	101	3/16	104.25
Круглые и зеленые	108	3/16	104.25
Морщинистые и зеленые	32	1/16	34.75

Таблица 17.1

Пример 17.7. В экспериментах с селекцией гороха Г.И.Мендель [1] наблюдал частоты появления различных видов семян при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в 17.3. Проверьте на уровне

[1] Г.И.Мендель (1822–1884) — монах и австрийский естествоиспытатель.

значимости $\alpha = 0{,}1$ гипотезу H_0 о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями.

Р е ш е н и е:

Здесь $n = 315 + 101 + 108 + 32 = 556$,

$$\chi^2(\vec{x}_n) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k(\vec{x}_n) - np_{k0})^2}{np_{k0}} =$$

$$= \frac{\left(315 - 556 \cdot \frac{9}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{9}{16}} + \frac{\left(101 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(108 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(32 - 556 \cdot \frac{1}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{1}{16}} \approx 0.47002.$$

Так как $\chi^2_{0.9}(3) = 6.25$, и $0.47002 < 6.25$, то гипотеза H_0 на уровне значимости 0.9 принимается.

Пример 17.8. Даны 55 наблюдений случайной величины X.

20,3 15,4 17,2 19,2 23,3 18,1 21,9 15,3 16,8 13,2 20,4 16,5 19,7 20,5 14,3 20,1 16,8 14,7 20,8 19,5 15,3 19,3 17,8 16,2 15,7 22,8 21,9 12,5 10,1 21,1 18,3 14,7 14,5 18,1 18,4 13,9 19,1 18,5 20,2 23,8 16,7 20,4 19,5 17,2 19,6 17,8 21,3 17,5 19,4 17,8 13,5 17,18 11,8 18,6 19,1

Проверим гипотезу о том, что X — нормальная случайная величина.

Наибольшее наблюдение — 24, наименьшее — 10, размах выборки $23{,}8$—$10{,}1 = 13{,}7$. Делим отрезок $[10, 24]$ на 7 интервалов длины 2 и заполняем таблицу.Длина интервала группировки 6=13,7/7 «2. В качестве первого интервала удобно взять интервал 10—12. Результаты группировки сведены в таблицу 1.1. >

N	Интервал	n_k	p_k	np_k	np_k сгруппиров.	$nk - np_k$	$\frac{(nk-np_k)^2}{np_k}$
1	[10, 12)	2	0.016	0.901			
2	[12, 14)	4	0.016	0.901			

17.3 Задачи для самостоятельного решения

17.1. В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч со средним квадратичным отклонением 100 ч. Значение выборочного среднего времени безотказной работы для случайно отобранных 25 приборов оказалось равным 970 ч. Предположим, что среднее квадратичное времени безотказной работы для приборов в выборке совпадает со средним квадратичным во всей партии, а контролируемая характеристика имеет нормальное распределение. Выясните, можно ли считать, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям, если: а) $\alpha = 0{,}1$; б) $\alpha = 0{,}01$.

О т в е т: а) да; б) нет.

17.2. Решите предыдущую задачу при условии, что среднее квадратичное отклонение времени безотказной работы, вычисленное по выборке, равно 115 ч.

О т в е т: а) нет; б) да.

17.3. Ожидается, что при добавлении специальных веществ жесткость воды уменьшается. По оценкам жесткости воды до и после добавления специальных веществ по 40 и 50 пробам соответственно получили средние значения жесткости (в стандартных единицах), равные 4,0 и 3,8. Дисперсия измерений в обоих случаях предполагается равной 0,25. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект? Принять $\alpha = 0{,}05$. Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

О т в е т: да.

17.4. При обработке втулок на станке-автомате ведутся наблюдения за режимом его работы. Для проверки стабильности работы станка через определенные промежутки времени изучают выборки объема $n = 10$. По результатам двух выборок (см. табл. 17.2) проверьте стабильность работы станка. Распределение контролируемого признака предполагается нормальным. Также предполагается, что дисперсии случайных величин, из которых получены выборки, равны. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Номер изделия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2,060	2,063	2,068	2,060	2,067	2,063	2,059	2,062	2,062	2,060
y_i	2,063	2,060	2,057	2,056	2,059	2,058	2,062	2,059	2,059	2,057

Таблица 17.2

Ответ: гипотезу о стабильности работы станка следует отклонить.

17.5. При изменении определенной процедуры проверки коэффициента трения установлено, что дисперсия результатов измерений этого коэффициента составляет 0,1. Значение выборочной дисперсии, вычисленное по результатам 26 измерений коэффициента трения, оказалось равным 0,2. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу о том, что дисперсия результатов измерений коэффициента трения равна 0,1. Предполагается, что контролируемый признак имеет нормальное распределение.

Ответ: гипотеза отклоняется.

17.6. На двух токарных автоматах изготавливают детали по одному чертежу. Из продукции первого станка было отобрано $n_1 = 9$ деталей, а из продукции второго $n_2 = 11$ деталей. Оценки выборочных дисперсий контрольного размера, определенные по этим выборкам, равны $\widehat{\sigma}_1^2 = 5{,}9\,\text{мкм}^2$ и $\widehat{\sigma}_2^2 = 23{,}3\,\text{мкм}^2$ соответственно. Проверьте гипотезу о равенстве дисперсий при $\alpha = 0{,}05$, если альтернативная гипотеза утверждает следующее: а) дисперсии не равны; б) дисперсия размера для второго станка больше, чем для первого.

Ответ: а) гипотеза принимается; б) гипотеза отклоняется.

Виды семян	Частота	Вероятность
Круглые и желтые	315	9/16
Морщинистые и желтые	101	3/16
Круглые и зеленые	108	3/16
Морщинистые и зеленые	32	1/16

Таблица 17.3

В экспериментах с селекцией гороха Г.И.Мендель [1] наблюдал частоты появления различных видов семян при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в 17.3. Проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ гипотезу H_0 о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями.

Гипотеза принимается.

[1] Г.И.Мендель (1822–1884) — монах и австрийский естествоиспытатель.