Билет 1

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение открытой окрестности и открытого множества в $\mathbb{R}^n$.

2. Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

3. Сформулировать необходимые условия экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 = 5xyz$ в точке $(2, 1, 1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = 4y^3 + 2xy + x^2 + 3$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 1/x + 1/y$ при условии

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. На гиперболическом параболоиде $xy + x + y - 2z - 5 = 0$ найти точку, наименее удалённую от точки $O(0, 0, 0)$.

Билет 2

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение предельной точки, граничной точки множества, и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.

2. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

3. Сформулировать достаточные условия экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = y + \ln \frac{x}{z}$ в точке $(1, 1, 1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = -11x^2 + 16xy - 6y^2 + 60x - 44y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 4x^2 + 9y^2 - 10$ при условии

$$xy = \frac{3}{2}.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. Среди касательных плоскостей к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$$

найти ту, которая отсекает от положительного октанта $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ тетраэдр наименьшего объёма.

Билет 3

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение ограниченного и связного множества в $\mathbb{R}^n$.
2. Перечислить основные свойства градиента ФНП.
3. Сформулировать необходимые условия условного экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xy + e^{xz} = 0$ в точке $(5, -1/5, 0)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 + xy + 2$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = e^x - y$ при условии

$$y - x = 5.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования (для вторых производных функции двух переменных).

Задача

8. В каких точках поверхности $xy + 2yz + 3zx + 6 = 0$ касательная плоскость параллельна одной из координатных плоскостей?

Билет 4

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение предела ФНП по множеству и непрерывной ФНП.
2. Записать уравнения касательной и нормали к поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

в точке (x_0, y_0, z_0).

3. Сформулировать достаточные условия условного экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ в точке $(1, 0, 1)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = 3\ln x + 4\ln y - xy - x - y$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = xy$ при условии

$$x^2 + y^2 = 6.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу для дифференцирования сложной ФНП (можно ограничиться случаем функции вида $z = f(x(t), y(t))$).

Задача

8. Среди эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через точку $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ найти тот, который имеет наименьший объём.

Билет 5

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение частной производной ФНП в точке.
2. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f(u(x,y), v(x,y))$.
3. Сформулировать теорему о связи непрерывности и дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $e^z - z + xy = 3$ в точке $(2, 1, 0)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - x - y^2 + 6y$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + \sqrt{3}y + 2$ при условии

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Сформулировать теорему о неявной функции. Вывести формулы для частных производных неявной функции.

Задача

8. На кривой

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 7y + 19 = 0$$

найти точки, наименее удалённые от оси OX.

Билет 6

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение дифференцируемой ФНП в точке.
2. Записать формулу для вычисления производной сложной функции вида $u = f(x(t), y(t), z(t))$.
3. Сформулировать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$ в точке $(1, 0, -1)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - 12xy + 17y^2 - 2y$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = 4 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ при условии

$$xy = -2.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Задача

8. Найти те нормали к поверхности $z^2 = x + y + 10$, которые проходят через точку $O(0, 0, 0)$.

Билет 7

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение (полного) первого дифференциала ФНП.

2. Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$.

3. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^4+2x^2y-xy+x$ в точке $(1,0,2)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$, $x>0$, $y>0$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z=2y-x^2$ при условии

$$y^2=2x-1.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования (для вторых производных функции двух переменных).

Задача

8. На эллипсоиде

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}=1$$

найти точку, наиболее удалённую от точки $(1,-1,0)$.

Билет 8

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение второго дифференциала ФНП и матрицы Гессе.

2. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

3. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^4-4y^3z+4xyz^2-4xz^3+1=0$ в точке $(1,1,1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2$ при условии

$$2x^2+y^2=4.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу для дифференцирования сложной ФНП (можно ограничиться случаем функции вида $z=f(x(t),y(t))$).

Задача

8. Среди касательных плоскостей к поверхности

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=1,\quad x>0,\ y>0,\ z>0,$$

найти ту, которая отсекает от положительного октанта $x>0$, $y>0$, $z>0$ тетраэдр наименьшего объёма.

Билет 9

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение градиента ФНП и производной ФНП по направлению.

2. Записать уравнения касательной и нормали к поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

в точке (x_0, y_0, z_0).

3. Сформулировать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $(1, 2, 3)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 3y^2 - 2x^2 - 4y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x + 2y$ при условии

$$x^2 + 3y^2 = 21.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. Найти такие a, b, c, чтобы эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

касался плоскости $7x + 3y + z = 21$ в точке $(2, 2, 1)$.

Билет 10

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение (обычного) экстремума (локального максимума и минимума) ФНП.

2. Перечислить основные свойства градиента ФНП.

3. Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях того, чтобы выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ было полным дифференциалом.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ в точке $(1, 1, 2)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{x-y}$ при условии

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. Среди эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через точку $(\sqrt{7}, \sqrt{5}, \sqrt{3})$ найти тот, который имеет наименьший объём.

Билет 11

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение условного экстремума ФНП.

2. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f(u(x, y), v(x, y))$.

3. Сформулировать теорему о неявной функции.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sqrt{x + y - z} = e^{x-2y+z}$ в точке $(2, 3, 4)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ при условии

$$xy = 2.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Задача

8. На кривой

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 = 15$$

найти точки, наиболее удалённые от оси OX.

Билет 12

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение функции Лагранжа и множителей Лагранжа задачи на условный экстремум ФНП.

2. Записать формулу для вычисления производной сложной функции вида $u = f(x(t), y(t), z(t))$.

3. Сформулировать теорему Тейлора для функции двух переменных.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точке $(2, 2, 1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + y^3 - 6xy$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - 5$ при условии

$$xy = 1.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Сформулировать теорему о неявной функции. Вывести формулы для частных производных неявной функции.

Задача

8. Найти те нормали к поверхности $x^2 + y^2 = 5z$, которые проходят через точку $(3, 9, -3)$.