1)Определение лин.пространства, следствие из аксиом. Примеры:

Множество L эл-нтов x,y,z..любой природы наз. – линейным пространством, если выполн. 3 усл.
1* задано сложение элементов:
∀ x,y ∈ L; z=x+y∈ L
2* задано операция умножения:
∀**x** ∈ L λx ∈ L;   λ- число
3* указан. Операции удовл аксиомам:

3.1 x+y=y+x
3.2 (x+y)+z= x+(y+z)
3.3 x+0=x
3.4 ∃(-x): x+(-x) = 0 ∀**x**∈L
3.5 1*x=x
3.6 (λ μ)x= λ(μx)
3.7 Λ(x+y)= λx+ λy
3.8 (λ+ μ)x= λ x+μx

Примеры:
1)геометричские векторы
2)Pn – множество многочленов степени не выше n
3)Множество матриц одной размерности n x m
4) Множество всех ф-ций. Непрерывных на [a,b]. C[a,b]
5) Множество всех положительных вещественных чисел x(+)y (xy): λ(*)x,(x^λ)
6) Множество всех решений ОСЛАУ
7) R^n = {x:x∈(x1,x2...xn)} –линейное арифмитическое пространство
x+y=(x1+y1,x2+y2….xn+yn)
λx = (λx1, λx2…. Λxn)

2)Определение лин.зависимой и лин.независимой систем векторов лин.пространства. Китерий лин.зависимости. Свойства лин.зависимых и лин.независимых систем векторов.

Системы векторов x1,x2…xn лин.пространства L наз ЛЗ, если ∃ их нетривиальная лин.комб = 0; в противном случае система векторов наз ЛНЗ
Теорема критерий ЛЗ:
Система векторов ЛЗ ⇔ один из векторов представлен в виде лин.комб остальных
Свойства систем векторов:
1)Если в системе векторов есть ненулевой элемент, то система ЛЗ
2) Если система содержит ЛЗ подсистем., то и сама система тоже ЛЗ
3) Если система векторов ЛНЗ, то для все ее подсистемы тоже ЛЗ
4) Если система векторов лин.простр L x1,x2,...,xn-ЛНЗ, y∈ L не явл их лин.комб,то система x1,x2,...xn,y- ЛНЗ

3) Определение базиса и размерности лин.пространства. Связь м/у этими понятиями. Примеры. Теорема о единственности разложения по базису вектора лин.пространства. Лин.операции с векторами в координатной форме

Упорядочную совокупнось векторов ЛП L называют базисом, если он ЛНЗ и ∀**x**∈L можно представить в виде векторов, входящих в базис. Максимальное КОЛ-ВО ЛНЗ векторов в данном лин.пространстве наз размерностью лин пространства.
Если лин.пространство n-мерно, то ∀ линейно независим система, состоящая из n векторов явл его базисом

Пр1:

В линейном арифметическом пространстве R^n стандартный базис состоит из n векторов, поэтому $\dim R^n = n$, что и отражено в обозначении этого лин.пр-ва.

Теорема

Разложение по базису единственно.

Д-во:

X = $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_n e_n$

X= $\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\beta_n e_n$

0= x+(-x)= $(\alpha_1-\beta_1)e_1+(\alpha_2-\beta_2)e_2+(\alpha_n-\beta_n)e_n$

$E_1,e_2,\dots e_n$ – ЛНЗ = комбинация тривиальная **=>** $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2$, $\alpha_1=\beta_n$

Базис $b_1,\dots,b_n$ в данном линейном пространстве L удоюно записать, как матрицу-строку $b = (b_1,b_2,\dots,b_n)$, а координаты вектора x в этом базисе, как матрицу столбец.

X= (x1

X2

Xn)

Тогда разложение $x= x_1b_1+x_nb_n$ вектора x по базису β можно записать, как произведение матриц-строки на матрицу столбцу x= bx

- **4) Определение подпространства линейного пространства. Пример. Определение линейной оболочки системы векторов. Линейная оболочка как линейное подпространство.**

  Линейное подпространство - подмножество L' лин пространства L, удовлетворяющее условиям

  1) $\forall x,y \in L'$ $x+y\in L'$

  2) $\forall x\in L'$ $\lambda x+L'$, $\forall\lambda\in R$

  Примеры:

  1) А) нулевой элемент

  Б) все мн-во элементов из L

  2) C[a,b] -> Pn[c,b]

  Пусть x1,x2,xn – совокупность элементов из L линейной оболочкой элементов из x1,x2,xn будет называть совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т.е мн-во вида $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_kx_k$, $\alpha_1...\kappa \in R$

  Линейная оболочка является минимальный линейным подпространством, содержащий элементы x1,...xк

  5) Определение ранга системы векторов линейного пространства. Теорема о ранге системы векторов и её следствие.

  Рангом системы векторов в лп называется размерностью линейной оболочки данной системы

  Терема о ранге системы векторов:

  Ранг системы векторов a= (a1,...aк) лин пространства L равен:

  а) максимальному количеству ЛНЗ векторов в системе a

  б) рангу матрицы, составленной по столбцам из координат векторов a1,a2,...aк в каком-либо базисе линейного пространства L.

  Следствие:

  Столбцы ∀ базисного минора матрицы A отвечают набору векторов системы a, являющейся базисом в н{a}- линейного подпространства , порождённом этой системой векторов

  6) Линейное преобразование линейного пространства (переход к новому базису). Матрица перехода. Изменение координат вектора при переходе к новому базису.

  e={e1,e2,...en },e'={e'1,e'2,...e'n}

  $e_i'=\alpha(1i)e_1+...+\alpha_{ni}e_n$ ∀i =1(i)n(вектор)

  ei =e(α1ı e'=e(α11 α12......α1n)

  α2ı. (α21 α22......α2n)

αni) (αn1 αn2......αnn)
Определение: e'=eU U(e->e') -матрица перехода
Преобразование координат:
e1e'
x=exe |
x=e'xe'| => exe =e'xe exe = eU(e->e')*xe' xe = Ue->e' *xe' xe'= U(e->e')^(-1) : xe

- **7) Определение евклидова пространства. Примеры. Формулы для вычисления скалярного произведения двух векторов и нормы вектора в ортонормированном базисе.**
Линейное пространство E называется Евклидовым, если выполняются следующие условия:
1)имеется правило, которое для всех пар элементов x+y∈E ставит в соответствии скаляр, обозначаемым (x,y)
2)Указанное правило удовлетворяет следующим условиям (аксиомы скалярного произведения)
а) (x,y)=(y,x)
б) (x1+x2,y)=(x1,y)+(x2,y)
в) (λx,y)=λ(x,y) для всех λ принадлежащих R
г) (x,x)>=0, причём (x,x)=0 <=> x=0
Примеры:
1)в V3 (x,y) = |x|*|y|*cos(x,y)
2)В R^n :(x,y)=x1y1+...xnyn
3)В произведении линейного пространства может быть задано скалярное произведение, причём различными способами. Выберем в этом пространстве базис e1,..en
x= α1e1+α2e2+...+αnen
y=β1e1+β2e2+βnen
(x,y)=α1β1+α2β2+..+αnβn
Различным базисом будут соответствовать различные операции скалярного произведения
4) C[a,b] :(x,y)= интеграл(x(t)y(t)dt)
Формулы для вычисления скалярного произведения . Пусть векторы а и б имеют в некотором ортонормирование базисе координат {x1,...xn} и {y1,...yn}
Тогда (а,б) = x1y1 +x2y2+...+xnyn = X^(T)Y
Нормы ||x||=sqrt (x^(2)1+x^(2)n)
8) Определение ортонормированной системы векторов евклидова пространства, теорема о ее линейной независимости.
Система векторов называют ортонормированным, если для всех двух векторов этой системы ортогональны и имеют длину равную 1.
Теорема :
Для всех ортогональных систем ненулевые векторов является ЛНЗ.
Д-во:
Рассм произв ортогональную систему ненулевые векторов e1,e2...,em
Пусть она ЛЗ, т.е существует (α1e1+α2e2+...+αmem != 0) (*). ((*),ei)
α1(e1,ei)..+αl(ei,ei)+...+αm(em,ei)=(0, ei)
(αlei,ei)=0 => αi(ei,ei)(>0) =0 αi=0 => не сущ нетривил лк =0 => e1,...,en- ЛНЗ
9) Процесс ортогонализации Грама-Шмидта в евклидовом пространстве. Пример.
Процесс ортогонализации. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ОНБ
Пусть f =(f1,f2,...,fn)-некоторый базис в n-мерном евклидовом пространстве E.
f->e
g1=f1
g2=f2-(f2,e1)e1
gn = fn-(fn,e1)e1-...-(fn1,en-1)en-1. e1=g1/||g1|| en=gn/||gn||

- **10) Определение нормы вектора в евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника.**
  Функцию заданную на линейном пространстве L, которое $\forall x \in L$ ставит в соответсвии вещественное число ||x||, называется <u>нормой</u>, если выполняются следующие условия:
  а) ||x||>=0, причём ||x||=0 <=> x=0
  б) ||λx||=|λ|||x|| ∀λ∈R
  в) ∀x,y∈L ||x+y|| <= ||x||+||y||-неравенство треуг
  Неравенство Коши:
  Для ∀ векторов x,y евклидов пространства E справедливо неравенство:
  (x,y)^2= (x,x)(y,y)
  Доказательство:
  При x=0 обе части неравенства =0, согласно свойству (x,0)=0, значит неравенство выполняется.

  Примеры:
- x!=0. Для ∀ λ∈R выполняется неравенство (λx-y, λx-y) >=0 => (λx-y, λx-y) = λ(x, λx-y)-λ(y, λx-y)= λ^2(x,x)-2λ(x,y)+(y,y) >= 0 => D=0 или D<0. D/4=(x,y)^2-(x,x)(y,y) <=0 (x,y)^2<=(x,x)(y,y)

  11) Определения линейного оператора и действий с линейными операторами. Матрица линейного оператора, определение и примеры. Теоремы о связи между действиями с линейными операторами и действиями с соответствующими им матрицами.
  Отображение A:L ->L' из ЛП L в ЛП L' <u>называется линейным отображением</u> или линейным оператором, если вып сл условия:
  1)A(x,y)= A(x)+A(y)(аддитивность)
  2)A(λx)=λA(x) ∀ λ∈R(
  <u>Замечание1</u>:Если L'=L, то A называется линейным преобразованием пространства L
  <u>Замечание2</u>: A(λx+μy)=λA(x)+μA(y)
  <u>Замечание3</u>:A(0)=0'
  Матрицу A=(a1,...,an) составляющее из координат столбцов векторов Ab1,..Abn в базисе b b=(b1,....bn) <u>называют матрицей линейного оператора</u> A в базисе b.

  Теорема:

  Пусть A: L->L, A – матрица A в базисе b.

  Y=Ax, x_b – координата x в базисе b. Тогда $y_b=Ax_b$

  Теорема:

  Пусть в Ln задан базис в b. Пусть A=(a(ij)) – квадратная матрица nxn. Тогда сущ. Лин.оператор A, матрица которого в базисе b равна матрице A.

  Теорема:

  A:L->L; Ab – матрица A в базисе Ae – матрица. Тогда Ae = U^-1(b->c)*Ab*U(b->e)

12) Теорема о связи между матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах. Инвариантность определителя. Подобные матрицы.

Матрицы Аб и Ае линейного оператора A: L->L, записанные в базисах в и е линейного пространства L,связаны друг другом соотношения.

Ae= U^-1AbU, где U= Ub->e – матрица перехода от базиса b к e.

Д-во:

Пусть y=Ax. Координаты векторов x и y в старом базисе b через xb и yb, а в новом базисе e-через xe,ye, так как

(Уb=Abxb

<(Xb= Uxe , то получаем

(Уb=Ue ye= U^-1yb=U^-1(Ab x b)=U^-1(AbUxe)=(U^-1AbU)xe

Равенство ye= (U^-1AbU)xe является матричной формой записи действия лин.оп. A в базисе e и потому U^-1AbU=Ae

Инвариантность:Определитель матрицы линейного оператора не зависищ от выбора базиса

Квадратные матрица A и B порядка называют подобными, если сущ. Такая невырожденная матрица P, что P^-1AP=B

13) Определение собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Примеры. Инвариантность характеристического многочлена и спектра собственных значений линейного оператора относительно выбора базиса.

Число λ называется собственными значениями оператора A, если существует ненулевой вектор x такой, что Ax= λx, при этом вектор x наз собственным вектором,если оператора A, соответствует собственному значению λ.

Характеристич. Многочленом лин.опер. A: L->L наз характеристическим многочленом его базиса, а характеристич уравнением этого оператора-характер. Ур-нием матрица A. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

14) Теорема о линейной независимости собственных векторов линейного оператора, соответствующих попарно различным собственным значениям.

Собственные значения λ1… λr линейного оператора A попарно различны, тогда система соответствует им собственных векторов e1…er линейно независима.

Д-во:

Для r=1 выполняется. Пусть для r=m выполнено. Покажем, что вып. Для r=m+1

$\Sigma_{i=1}^{m+1}$ αiei = 0 (*) => $\Sigma_{i=1}^{m+1}$ αiAei = 0, так как ei – собственные векторы. $\Sigma_{i=1}^{m+1}$ αi ei=0(**). (*)*λm+1: $\Sigma_{i=1}^{m+1}$αi λm+1 ei = 0(***)

По условию все λ различны: λm+1 != λi, i=1,m(вектор)

(***)-(**):$\Sigma_{i=1}^{m}$(λm+1- λi) αiei=0

e1…em-ЛНЗ => αi=0 ∀i=1,m(вектор) Из (*) => αm+1=0 => e1…em+1- ЛНЗ

15 Теорема о матрице линейного оператора в базисе из собственных векторов.

Если у линейного оператора A собственные векторы b1,b2….,bn, отвечающие собственными значениями λ1, λ2…..λk соотв. , образуют базис, то в этом базисе матрица A' оператора A имеет диагон вид и на диаг стоят собственные значения λ1, λ2…λk

Д-во:

A=(λ1 0…..0)

(0 λ2…0)

(0 0…..λк)

Матрица линейного оператора в базисе β={b1,b2,….,bn} состоит из координат образующий базисный вектор, записывающий по столбцам:

A(b1)= λ1b1+0b2+…..+0* bn

A(b2)=0*b1+ λ2b2+..+0*bn

A(bn)=0*b1+0*b2+…+ λnbn

16 Определение оператора, сопряженного данному линейному оператору, его свойства.

Теорема о матрице сопряженного оператора в ортонормированном базисе

Рассм**.** Лин.оператора, действующие в евклидовом пространстве L(E,E)

Опр Оператор $A^*\in L(E,E)$ назывется сопряженным к линейным оператором $A\in L(E,E)$, если $A(x,y) = (x,A^*y)$

A* является линейным.

Свойства:

1)$(\alpha A)^*= \alpha A$ $\alpha\in R$

2)$(A^*)^*=A$

3)$(A+B)^*=A^*+B^*$

4)$(AB)^*=B^*A^*$

5) Если линейный оператор A невырожден, то сопряжен. С ним оператор A* также невырожден и вып равенство $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$

Теорема:

Для всех лин.опер. A: E->E соотв сопряженный оператор A*, причем его матрицей b, для всех ортонормир базисе e является матрица A^T,трансп матрице A лин.опер. A в том же базисе e.

17 Определение самосопряженного линейного оператора, теорема о симметричности его матрицы в ортонормированном базисе. Теорема о корнях характеристического уравнения самосопряженного линейного оператора и ее следствия. Случай кратных корней.

Линейный оператор A:E->E называется самосопряженным лин.оперaт. в ортонормированном базисе. Матрица самосопряженного оператора b для всех ортонорм базисе является симметричной $\Leftrightarrow$ $A= A^*$.

Д-во:

$A=A^* \Leftrightarrow A=A^*=A^T$

Теорема:

Все корни характер ур-ня самосопряженного лин.опер. действитеьна

Следствие1:Если матриуа A явл симметричной, то все ее характер урн-ня $\det(A- \lambda E)=0$ действительна

Следствие2: Самосопряж оператор,действит в н-мерном Евклидовом пространстве, имеет н-собственных значений , если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

Следствие3: Симметрическая матрица порядка н имеет н-соотв значений,если каждое из них считать столько раз, какова его кратность

18 Теорема об ортогональности собственных векторов самосопряженного линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям.

Собственные векторы самосопряженного лин.опер., отвечающие различными собственными значениями, ортогональны.

Д-во:

Пусть $\lambda 1$, $\lambda 2$ – собственные зн. A: $\lambda 1 != \lambda 2$, x1,x2-соотв собств в-ры.

$Ax1= \lambda 1x1$

$Ax2= \lambda 2x2$

$(Ax1,x2)=(x1,Ax2);(Ax1,x2)= \lambda 1(x1,x2)$

$(x1,Ax2)= \lambda 2(x1,x2)$

$\lambda 1(x1,x2)= \lambda 2(x1,x2)=0$

$(\lambda 1- \lambda 2)(!=0)(x1,x2)=0$ => $(x1,x2)=0$ => x1перп x2 !=0

19 Определение ортогональной матрицы, ее свойства.

Опр Квадратную матрицу O называют ортогональной,если $O^T O=E$

Свойства ортогональной матрицы:

1)detO=1 or detO=-1
2) O^-1=O^T
3)OO^T=E
4)O^T,O^-1- тоже ортогональн
5)Если O,Q –ортогон,то OQ-ортог

20 Ортогональные преобразования и их матрицы в ортонормированном базисе. Примеры. Приведение матрицы самосопряженного линейного оператора к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Опр: Линейный оператор A:E->E, действ в евклидовом пространстве наз ортогон.преобразованием,если для всех x,y принадлежат E: (Ax,Ay)=(x,y)

Теорема: Если линейный оператор A:E->E сохр норму, то он ортогон

Теорема: Если матрица лин.оператор в некотор ортонормированном базисе ортогональны, то лин опер ортогон и наоборот:матрица ортогона лин опер в ОНБ ортогональна

Теорема: В E матрице перехода из ОНБ1->ОНБ2 ортогон

Теорема: для всех симметричн матриц M сущ ортогон U : U^TMU=Л,где Л=diag{ λ1, λ2,…., λn}, где λ1….. λн – собственные значения матрицы M, которые повторяются согласно их кратности

Ортогональные преобразования:
1)Найти собств.значения матрицы M
2)Для каждого с.з найти набор собств векторов, кот. Ему соотв. Они должны быть ЛНЗ, их количество = кратности соотв с.з
3)Применить к найденным в-ры в 1 систему-ОНБ,состоящий из собств в-ров.
5) выпис. Матрицу столбц, кот. Явл. Координаты векторов ОНБ.

21 Определение квадратичной формы и ее матрицы. Координатная, матричная и векторная форма записи этой формы. Теорема о связи между матрицами одной и той же квадратичной формы в различных базисах.

22 Определение ранга квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм.

23 Дайте определение канонического вида и канонического базиса квадратичной формы. Теорема о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду.

24 Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Пример.

25 Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Пример.

26 Знакоопределенные квадратичные формы: определение, критерий Сильвестра. Примеры.

27 Приведение линий и поверхностей второго порядка к каноническому виду.