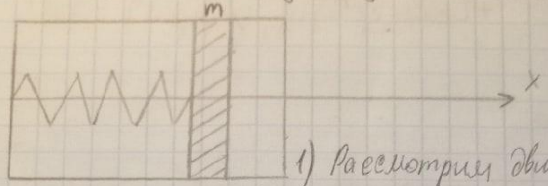
№2 Свободное затухающее колебание. Вывод дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний и его решение. Частота свободных затухающих колебаний.



1) Рассмотрим движение тела в вязкой среде под квазиупругой силы вблизи положения равновесия.

Пусть сила сопротивления будет пропорциональна скорости тела:

$\vec{F}_{сопр} = -r\cdot\vec{V}$; r - коэффициент сопротивления.

2) Уравнение движения поршня:

$$ma = -kx - rV$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ – уравнение свободных затухающих колебаний.

$2\beta = \frac{r}{m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

3) при $r = 0$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

4) $W_{мех} = W_{пот} + W_{кин} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = m\left(\omega_0^2\frac{x^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2}\right)$

Т.к. колебание затухающее $\Rightarrow$ $W_{мех.}$ уменьшается

$$\frac{dW_{мех}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\left(\frac{x^2\omega_0^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2}\right)\right) = m(\omega_0^2 x \cdot \dot{x} + \dot{x}\ddot{x}) = m\dot{x}(\omega_0^2 x + \ddot{x}) =$$

$$= m\dot{x}(-2\beta\dot{x}) = -r\dot{x}^2 < 0$$

5) Пусть $x = e^{\lambda t}$. Найдем решение уравнения:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

$$D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Решение уравнения:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} =$$

$$= e^{-\beta t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right)$$

$C_1, C_2 = const$

6) Формула Эйлера:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Колебания существуют при $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2 \Rightarrow \sqrt{-\omega^2} = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega$$

Решение уравнения:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$