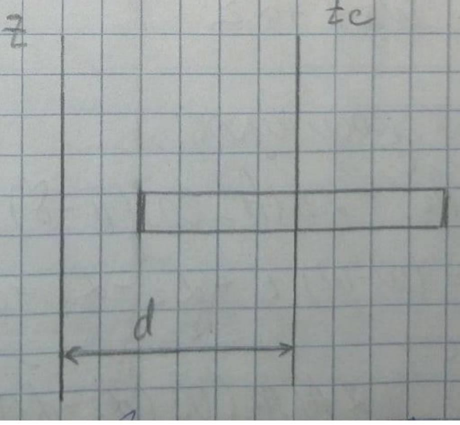
11 Теорема Штейнера (без доказательства)

Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела и квадрата расстояния между осями, умноженного на массу тела.

$$I = I_0 + md^2$$



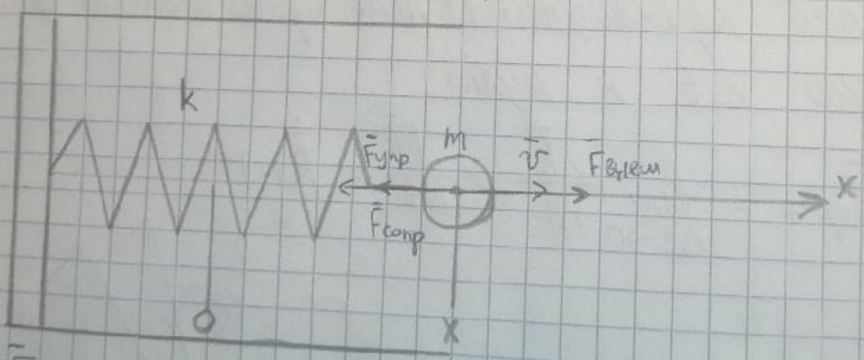
② Вынужденные колебания. Вывод дифференциального уравнения вынужденных колебаний и вид решения для случая установившихся колебаний.

Вынужденные колебания - колебания, которые происходят под действием периодических внешних сил.

Вывод дифференциального уравнения:

Рассмотрим движение тела в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической силы $F(t) = F_0 \cos(\Theta t + \alpha)$

Второй закон Ньютона: $ma = -kx - r\bar{v} + F(t)$.



$\bar{F}_{упр} = -k\bar{x}$

$\bar{F}_{сопр} = -r\bar{v}$

$\bar{F}_{внеш} = \bar{F}(t) = \bar{F}_0 \cos(\Omega t + \alpha)$

$$ma = -kx - r\upsilon + F_0 \cos(\theta t + \alpha)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\theta t + \alpha) \quad \Big| : m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{m} + \frac{F_0}{m}\cos(\theta t + \alpha)$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\theta t + \alpha)$$ — Уравнение вынужденных колебаний

$$2\beta = \frac{r}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

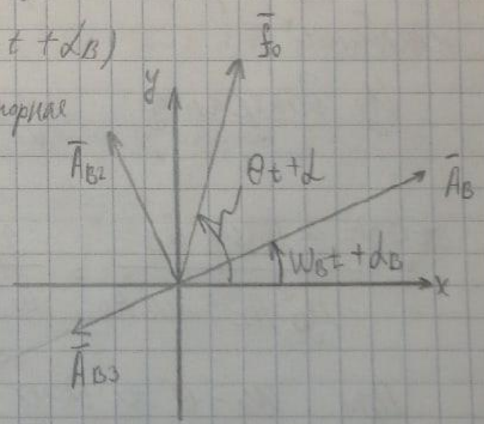
Вывод вида решения для случая установившихся колебаний.

Частное решение неоднородного уравнения вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\theta t + \alpha) \quad (1)$$

Должны получить: $x_B = A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B)$

Амплитудно-векторная диаграмма



$$\omega_0^2 x_B = \omega_0^2 A_B \cos(\omega_B + \alpha_B)$$

$$|\bar{A}_{B1}| = \omega_0^2 A_B$$

Т.к. $\dot{x}_B = -\omega_B A_B \sin(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B A_B \cdot \cos(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2})$, то

величине $2\beta\dot{x}_B = 2\beta\omega_B A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2})$ соответствует вектор $\bar{A}_{B2}$, повернутый относительно вектора $\bar{A}_{B1}$ на угол $\frac{\pi}{2}$, длина которого $|\bar{A}_{B2}| = 2\beta\omega_B A_B$

Величине $\ddot{x}_B = -\omega_B^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B + \pi)$ соответствует вектор $\bar{A}_{B3}$, повернутый на угол π относительно вектора $\bar{A}_{B1}$ и $|\bar{A}_{B3}| = \omega_B^2 A_B$

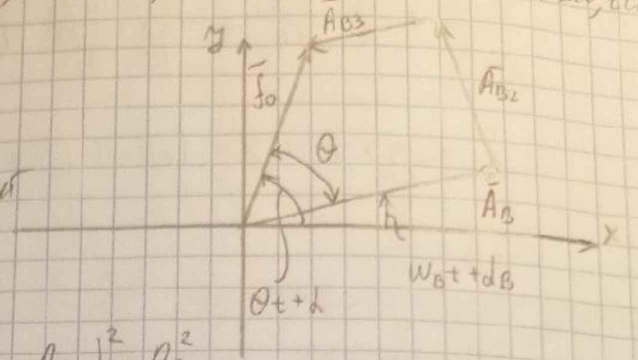
Величина $f_0\cos(\Theta t+\alpha)$ соответствует вектор $\bar{f_0}$.

Тогда перепишем (3) уравнение в векторной записи.

$$\bar{A}_{B1} + \bar{A}_{B2} + \bar{A}_{B3} = \bar{f_0}$$

Т.к. длины векторов const, то это равенство возможно только, если $\omega_B = \Theta$

Значит, вынужденные колебания проходят с частотой вынуждающей силы.



Из диаграммы: $f_0^2 = (A_{B1} - A_{B3})^2 + A_{B2}^2$

$$f_0^2 = (\omega_0^2 A_B - \Theta^2 A_B)^2 + (2\beta\Theta A_B)^2$$

$$A_B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Theta^2)^2 + 4\beta^2\Theta^2}}$$

$\theta = \alpha - \alpha_B$ — разность фаз вынуждающей силы и вынужденных колебаний

Из диаграммы: $tg\theta = \dfrac{A_{B2}}{A_{B1} - A_{B2}}$

$$tg\theta = \frac{2\beta\omega_B A_B}{\omega_0^2 A_B - \omega_B^2 A_B} = \frac{2\beta\Theta}{\omega_0^2 - \Theta^2}$$

При $\omega_0 > \Theta \Rightarrow \theta > 0$ — вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы

При $\omega_0 < \Theta$ — вынужденные колебания опережают по фазе вынуждающую силу.

Следствие: Под действием периодической силы тело совершает два вида колебаний - свободное затухающее с собственной частотой ω, и вынужденные - с частотой вынуждающей силы θ. Затухающие колебания с течением времени прекратятся и останутся только вынужденные колебания - их называют установившимися.