Подготовка к экзамену

Математический анализ

Над файлом работали:
pluttan

Оглавление

1 Определения и понятия 3

2 Вопросы для подготовки к экзамену 9

2.1 *Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности)* 9
2.2 *Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности)* 10
2.3 *Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)* . . 10
2.4 *Теорема (о сохранении функцией знака своего предела)* 10
2.5 *Теорема (о предельном переходе в неравенстве)* 11
2.6 *Теорема (о пределе промежуточной функции)* 11
2.7 *Теорема (о пределе произведения функций)* 12
2.8 *Теорема (о пределе сложной функции)* 12
2.9 *Вывод первого замечательного предела* 13
2.10 *Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)* 14
2.11 *Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную)* 14
2.12 *Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой)* 15
2.13 *Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)* . . 15
2.14 *Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых)* 16
2.15 *Теорема (о непрерывности сложной функции)* 17
2.16 *Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)* . . . 17
2.17 *Теорема (о непрерывности элементарных функций)* 18
2.18 *свойства функций, непрерывных на отрезке* 18

1 Определения и понятия

1. $\mathbb{N}$ - **Множество натуральных чисел**, состоит из чисел, возникающих при счёте.

2. $\mathbb{Z}$ - **множество целых чисел**, состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

3. $\mathbb{Q}$ - **множество рациональных чисел**, состоит из чисел, представимых в виде $\frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$.

4. $\mathbb{I}$ - **множество иррациональных чисел**, состоит из чисел, которые не представимы в виде $\frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$, такие как $e, \pi, \sqrt{3}$ и т.д..

5. $\mathbb{R}$ - **множество действительных чисел**, состоит из рациональных и иррациональных чисел.

6. $\overline{\mathbb{R}}$ - **расширенное множество действительных чисел**, состоит из действительных чисел с добавлением $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.

7. **Окрестностью** $U(x)$ **точки** x называют любой интервал, содержащий эту точку.

8. **Проколотой окрестностью** $\overset{\circ}{U}(x)$ **точки** x называют окрестность этой точки $U(x)$, за исключением самой точки x.

9. ε**-окрестностью точки** x_0 (при положительном ε) называют интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$.

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} :\ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$

10. **правой (правосторонней)** δ**-окрестностью точки** x_0 называют полуинтервал $[x_0,\ x_0 + \delta),\ \delta > 0$.

$$U_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R} :\ x_0 \leqslant x < x_0 + \delta\},\ \delta > 0$$

11. **левой (левосторонней)** δ**-окрестностью точки** x_0 называют полуинтервал $(x_0 - \delta,\ x_0],\ \delta > 0$.

$$U_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R} :\ x_0 - \delta < x \leqslant x_0\},\ \delta > 0$$

12. **Окрестностью точки** $+\infty$ называют интервал $(a, +\infty),\ a > 0$.

$$U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ x > a\},\ a > 0$$

13. **Окрестностью точки** $-\infty$ называют интервал $(-\infty, -a),\ a > 0$.

$$U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ x < -a\},\ a > 0$$

14. **Окрестностью** ∞ (бесконечности без знака) называют объединение двух интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty),\ a > 0$.

$$U(\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| > a\},\ a > 0$$

15. **Последовательностью** $\{X_n\}$ называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу n при этом поставлено в соответствие число x_n, то это число называется n-м элементом последовательности; n называют номером элемента x_n.

16. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **неубывающей**, если $x_{n+1} \geqslant x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

17. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **возрастающей**, если $x_{n+1} > x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

18. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **невозрастающей**, если $x_{n+1} \leqslant x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

19. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **убывающей**, если $x_{n+1} < x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

20. Неубывающие, невозрастающие, убывающие и возрастающие последовательности называют **монотонными**.

21. Последовательность называется **постоянной**, если $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n = c,\ c \in \mathbb{R}$.

22. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \leqslant M$.

23. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если $\exists M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \geqslant M$.

24. Последовательность, ограниченная и сверху и снизу, называют **ограниченной**: $\exists M > 0,\ M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ |x_n| \leqslant M$.

25. Число a называется **пределом числовой последовательности** $\{X_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного ε существует такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

26. Числовая последовательность называется **сходящейся**, если существует предел этой последовательности, и он конечен.

27. Последовательность $\{X_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

28. Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ (определение по Коши).

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

29. Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{X_n\}$ точек из $\overset{\circ}{U}(x_0)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = a$ (определение по Гейне).

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 :\ \lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = a$$

30. Число a называется **правым (правосторонним) пределом функции** f(x) при $x \to x_0+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0)$ $(..\ x_0 < x < x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

31. Число a называется **левым (левосторонним) пределом функции** f(x) при $x \to x_0-$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(x_0)$, $(..\ x_0 - \delta < x < x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

32. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной на множестве** D, если существует такое число $M > 0$, что для любых $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

33. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной** (на области определения D_f), если существует такое число $M > 0$, что для любых $x \in D_f$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

34. Функцию $f(x)$ называют **локально ограниченной в окрестности точки** a, если существует такое число $M > 0$ и такая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$, что для любых $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

35. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой** при $x \to x_0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

36. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой** при $x \to x_0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

37. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ - **первый замечательный предел**.

38. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ - **второй замечательный предел**.

39. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **сравнимыми** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

40. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **несравнимыми** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения при $x \to x_0$.

41. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **бесконечно малыми одного порядка** при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = O(\beta(x))$, если существует отличный от нуля конечный предел отноше-

ния $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

42. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

43. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более низкого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$, равен бесконечности.

44. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **эквивалентными** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если предел их отношения при $x \to x_0$ равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

45. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой k-ого порядка** малости относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, а число k $(k > 0)$ - **порядком малости** $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если функции $\alpha(x)$ и $\beta^k(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

46. Функцию $u(x)$ называют **бесконечно большой k-ого порядка** роста относительно $w(x)$ при $x \to x_0$, а число k $(k > 0)$ - **порядком роста** $u(x)$ относительно $w(x)$ при $x \to x_0$, если функции $u(x)$ и $w^k(x)$ являются бесконечно большими одного порядка при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{w^k(x)} = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

47. **Главная часть суммы бесконечно малых функций** - это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

48. **Приращением аргумента** в точке x_0 называется изменение аргумента функции от значения x_0 к другому значению x,

$$\Delta x = x - x_0$$

49. **Приращением функции** в точке x_0 называется $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

50. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

51. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 **справа**, если в этой точке существует конечный *правый* предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
52. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 **слева**, если в этой точке существует конечный левый предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.
53. Функция $f(x)$ **непрерывна на интервале** (a, b), если она непрерывна в каждой его точке.
54. Функция $f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b), в точке a - непрерывна справа, т.е. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, в точке b - непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$.
55. Если данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.
56. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны, но они не равны между собой.
57. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).
58. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку x_0 - **точкой устранимого разрыва**.
59. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку x_0 - **точкой неустранимого разрыва**.
60. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется **производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0 и обозначается $f'(x0)$.
61. Если $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки x_0 и если $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **правой производной функции** $f(x)$ **в** x_0 и обозначается $f'_+(x)$.
62. Если $f(x)$ определена в левосторонней окрестности точки x_0, и если $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **левой производной функции** $f(x)$ **в** x_0 и обозначается $f'_-(x)$.
63. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция называется **дифференцируемой в точке** x_0, если ее приращение Δy в точке x_0 представимо в следующем виде: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где A - некоторое число, не зависящее от Δx, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.
64. Линейная от Δx функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом функции** $f(x)$ **в точке** x_0.

65. **Дифференциалом n-го порядка** называется дифференциал от дифференциала $n-1$ порядка, т.е.
$$d^{\,n}y = d(d^{\,n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$$

66. **Производная n-ого порядка** от функции $y = f(x)$, есть производная от производной $n-1$ порядка, т.е.
$$f^{(n)} = (f^{n-1}(x))'$$

67. Функция $f(x)$ называется **возрастающей на интервале** (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

68. Функция $f(x)$ называется **невозрастающей на интервале** (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \leqslant f(x_1)$.

69. Функция $f(x)$ называется **убывающей на интервале** (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

70. Функция $f(x)$ называется **неубывающей на интервале** (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

71. Функция $f(x)$ называется **монотонной**, если она невозрастающая или неубывающая.

72. Функция $f(x)$ называется **строго монотонной**, если она возрастающая или убывающая.

73. Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0):\ f(x_0) \leqslant f(x)$.

74. Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0):\ f(x_0) \geqslant f(x)$.

75. Точка x_0 называется **точкой строгого локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ f(x_0) < f(x)$.

76. Точка x_0 называется **точкой строгого локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ f(x_0) > f(x)$.

77. **Точками локального экстремума** называются точки локального максимума и строгого локального максимума, локального минимума и строгого локального минимума.

78. **Точками строгого локального экстремума** называются точки строгого локального максимума и минимума.

79. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **критической**, если производная в ней равна 0 или не сущестует вовсе.

80. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **стационарной**, если $f'(x_0) = 0$.

81. Прямая $Ax + By + C = 0$ называется **асимптотой** графика $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к 0 при бесконечном удалении точки M от начала координат.

82. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+(-)} f(x) = \infty$

83. Прямая $y = kx + b$ называется **правой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

84. Прямая $y = kx+b$ называется **левой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to -\infty$.

85. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость вверх**, если он лежит не выше любой касательной к графику на (a, b).

86. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость вниз**, если он лежит не ниже любой касательной к графику на (a, b).

87. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если $\exists\delta > 0$ такое, что направления выпуклостей функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

2 Вопросы для подготовки к экзамену

2.1 *Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности)*

Если последовательность имеет предел, то этот предел - единственный.
Доказательство (от противного)
Пусть $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$, где a и b - пределы сходящейся последовательности $\{X_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = b,\ a \neq b$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Примем $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ и при $n > max(N_1,\ N_2)$ получим

$$|b - a| = |x_n - a + b - x_n| \leqslant |x_n - a| + |b - x_n| = |x_n - a| + |x_n - b| \Rightarrow |b - a| < 2\varepsilon$$

Или $|b-a| < 2 \cdot \frac{|b-a|}{3}$, т.е. $|b-a| < \frac{2}{3}|b-a|$, $\frac{1}{3}|b-a| < 0$, чего не может быть $\Rightarrow a \neq b$ - неверно, т.е. $a = b \Rightarrow$ предел единственный. Теорема доказана.

2.2 *Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности)*

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.
Доказательство
Пусть $\{X_n\}$ - сходящаяся последовательность. Тогда по определению, у нее существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon + a < x_n < \varepsilon + a$$

Обозначим через A максимальное число среди $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|$, т.е.

$$A = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|)$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| < A, \Rightarrow$ последовательность ограничена. Теорема доказана.

2.3 *Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)*

Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$, то $f(x)$ локально ограничена.
Доказательство
По условию $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $|f(x)| - |a| \leqslant |f(x) - a| < 1$, а значит

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| < 1 + |A| = const \Rightarrow$$

$f(x)$ является локально ограниченной в окрестности точки x_0. Теорема доказана.

2.4 *Теорема (о сохранении функцией знака своего предела)*

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, то $\exists\mathring{U}_\delta(x_0)\ :\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ функция $f(x)$ сохраняет знак своего предела.
Доказательство
По условию $\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0 \Rightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

- в случае $a > 0$ выбираем $\varepsilon = \frac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2}$$

$$-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$$

Следовательно $f(x) > \frac{a}{2} > 0$, т.е. данная функция положительна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

- в случае $a < 0$ выбираем $\varepsilon = -\frac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2}$$

$$\frac{3a}{2} < f(x) < \frac{a}{2}$$

Следовательно $f(x) < \frac{a}{2} < 0$, т.е. данная функция отрицательна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Теорема доказана.

2.5 *Теорема (о предельном переходе в неравенстве)*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, причем для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $b = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то $a \geqslant b$.
Доказательство
По условию $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) : \ f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0$, тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = a - b \geqslant 0, \Rightarrow a \geqslant b$$

Теорема доказана.

2.6 *Теорема (о пределе промежуточной функции)*

Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, равные одному и тому же числу a. Тогда и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.
Доказательство
По условию $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a, \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, тогда по определению предела функции,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } \ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } \ a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

Тогда при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0),\ \delta = min(\delta_1, \delta_2)$, выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$|g(x) - a| < \varepsilon$$

Таким образом, получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x \to x_0} g(x) = a$$

Теорема доказана.

2.7 *Теорема (о пределе произведения функций)*

Если $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
Доказательство
По условию $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой имеем

$$f(x) = a + \alpha(x),\ \text{где}\ \alpha(x) - \text{бесконечно малая функция при}\ x \to x_0$$

$$g(x) = b + \beta(x),\ \text{где}\ \beta(x) - \text{бесконечно малая функция при}\ x \to x_0$$

Тогда

$$f(x) \cdot g(x) = (a + \alpha(x)) \cdot (b + \beta(x)) = a \cdot b + a \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot b + \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} (a \cdot b + \underbrace{a \cdot \beta(x)}_{..\ \ x \to x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot b}_{..\ \ x \to x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot \beta(x)}_{..\ \ x \to x_0}) = \lim_{x \to x_0} (a \cdot b) = a \cdot b = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема доказана.

2.8 *Теорема (о пределе сложной функции)*

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ конечный предел, равный b, и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ этой точки, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c, то сложная функция $g(f(x))$ имеет $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.
Доказательство
По определению предела функции по Гейне имеем:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = b \iff \{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(a),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \to \infty} x_n = a :\ \lim_{n \to \infty} \{f(x_n)\} = b$$

$$\exists \lim_{y \to b} g(y) = c \iff \{\forall y_n \in \overset{\circ}{U}(b),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n \to \infty} y_n = b :\ \lim_{n \to \infty} \{g(y_n)\} = c$$

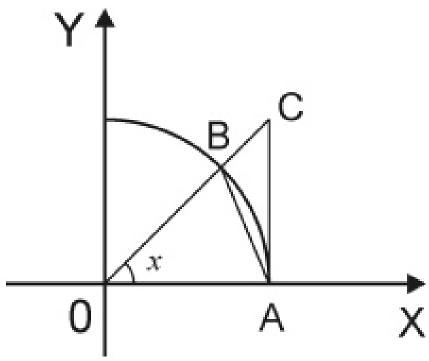
Пусть $\{X_n\}$ - произвольная последовательность, стремящаяся к точке a и $x_n \neq a \, \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \{f(x_n)\} = b$, но $f(x_n) \neq b \, \forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $y_n = f(x_n)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \{y_n\} = b$ и $y_n \neq b \, \forall n \in \mathbb{N}$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \{g(y_n)\} = c$, т.е.

$$\{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(a),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} x_n = a : \lim_{n\to\infty} \{g(f(x_n))\} = c \iff \lim_{n\to\infty} g(f(x)) = c$$

Теорема доказана.

2.9 *Вывод первого замечательного предела*

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$



Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A, и пусть угол $\angle AOB$ равен x (радиан). Пусть, далее, CA — перпендикуляр к этой оси, C — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда

$$S_{\triangle OAB} < S_{OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2}R^2 sin(x) < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tg(x)$$

$$sin(x) < x < tg(x)$$

$$1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$$

$$1 > \frac{sin(x)}{x} > cos(x), \text{ при } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Рассмотрим $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, а значит справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{sin(\beta)}{\beta} > cos(\beta)$$

Вернемся к замене $\beta = -x$

$$1 > \frac{sin(-x)}{-x} > cos(-x)$$

$$1 > \frac{-sin(x)}{-x} > cos(x)$$

$$1 > \frac{sin(x)}{x} > cos(x) \text{ при } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} cos(x) = 1 \\ &\lim_{x\to 0} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ (по т. о пределе промежуточной функции) } \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

2.10 *Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)*

Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ имеет место $\iff f(x) = a+\alpha(x)$, где $\alpha(x)-$бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство

$(\Rightarrow)$

По условию $\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, тогда по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$. Тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, т.е. $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Но $\alpha(x) = f(x) - a \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$

$(\Leftarrow)$

По условию $f(x) = a + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, тогда по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Но по условию $f(x) = a + \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = f(x) - a$, отсюда имеем

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Теорема доказана.

2.11 *Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную)*

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, $f(x)$ - ограниченная функция, то $\alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$. *Доказательство*

По условию $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}_1(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$$

$f(x)$ - ограниченная функция, тогда

$$|f(x)| < c, \text{ где } c = const,\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(x_0)$$

Таким образом,

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) = \overset{\circ}{U}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_2(x_0):$$

$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot c \Rightarrow |\alpha(x) \cdot f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$

Теорема доказана.

2.12 *Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой)*

$\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$.
$f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Выберем произвольное $E > 0$. Тогда по определению бесконечно малой функции,

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{E} > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}_1(x_0): \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_1(x_0) \Rightarrow 0 < |\alpha(x)| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{|\alpha(x)|} > E, \Rightarrow \frac{1}{\alpha(x)} \text{ - бесконечно большая функция при } x \to x_0$$

Пусть $f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению бесконечно большой функции,

$$\text{для } E = \frac{1}{\varepsilon} \ \exists \overset{\circ}{U}(x_0): \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > E, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{E} = \varepsilon, \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \text{ - бесконечно малая функция при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

2.13 *Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)*

Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, и $f(x)$ - некоторая функция, определенная в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Тогда:

- если существует предел при $x \to x_0$ произведения $\alpha(x) \cdot f(x)$, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \to x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$
- если существует предел при $x \to x_0$ частного $\frac{f(x)}{\alpha(x)}$, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \to x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$

Доказательство

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тогда по определению $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

- $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot f(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (\beta(x) \cdot f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} (\beta(x) \cdot f(x))$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x) \cdot f(x)}{\alpha(x) \cdot \beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)}$ Теорема доказана.

2.14 *Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых)*

Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ эквивалентны $\iff$ их разность имеет больший порядок малости при $x \to x_0$ по сравнению с каждой из них.

Доказательство

$(\Rightarrow)$

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тогда по определению $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0, \Rightarrow \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \Rightarrow \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \text{ при } x \to x_0$$

$(\Leftarrow)$

По условию $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$ при $x \to x_0,\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \to x_0$. Тогда

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков) Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ эквивалентна своей главной части.

Доказательство

Пусть $\alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ ...,\ \alpha_n(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to x_0$, и $\alpha_1(x)$ - главная часть суммы $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0, \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} = 0,\ ...,\ \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 0,$$

Тогда рассмотрим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1 + \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} + ... + \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \Rightarrow \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha$$

Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$ (последнее при $g(x) \neq 0$) - также непрерывны в точке x_0.

Доказательство

По условию $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, тогда по определению

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\pm g(x_0), \Rightarrow f(x)\pm g(x)$ - непрерывна в точке x = x_0.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0), \Rightarrow f(x)\cdot g(x)$ - непрерывна в точке x = x_0.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке x = x_0 при условии $g(x)\neq 0$.

Теорема доказана.

2.15 *Теорема (о непрерывности сложной функции)*

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Доказательство

По условию функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, функция $g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\exists \lim_{y\to b} g(y) = g(b)$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = g(b) = g(f(a)), \Rightarrow \text{функция } g(f(x)) \text{ непрерывна в точке } x = a$$

Теорема доказана.

2.16 *Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Доказательство

По условию $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$$

Тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0, т.е.

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Так как $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, то

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0):\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0):\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Теорема доказана.

2.17 *Теорема (о непрерывности элементарных функций)*

Все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

Доказательство (*для* $y = sin(x)$ *и* $y = cos(x)$)

§$d243$§ Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = sin(x+\Delta x) - sin(x) = 2sin\Big(\frac{x+\Delta x - x}{2}\Big)\cdot cos\Big(\frac{x+\Delta x + x}{2}\Big) = 2sin\Big(\frac{\Delta x}{2}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big)\cdot cos\Big(x+\frac{\Delta x}{2}\Big)\right) = 0,$$

Т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \Rightarrow y = sin(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

$$y = cos(x)$$

Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = cos(x+\Delta x) - cos(x) = 2sin\Big(\frac{x+\Delta x + x}{2}\Big)\cdot sin\Big(\frac{x-\Delta x - x}{2}\Big) = -2sin\Big(x+\frac{\Delta x}{2}\Big)\cdot s$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-2sin\Big(x+\frac{\Delta x}{2}\Big)\cdot sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big)\right) = 0,$$

Т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \Rightarrow y = cos(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

2.18 *свойства функций, непрерывных на отрезке*

1. *Первая теорема Вейерштрасса*

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

1. *Вторая теорема Вейерштрасса*

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение.

1. *Первая теорема Больцано-Коши*

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b) < 0$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой значение функции $f(c) = 0$.

1. *Вторая теорема Больцано-Коши*

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(a) < f(c) < f(b)$.

1. *Теорема о непрерывности обратной функции*

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на $[a, b]$, то существует и определена на отрезке $[f(a), f(b)]$ обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и возрастающая (убывающая) на этом отрезке.