Подготовка к экзамену

Математический анализ

Над файлом работали:
fiixii, pluttan

Оглавление

49. *Достаточное условие точки перегиба*

Используются определения 50, 88 из списка

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и непрерывна в указанной точке. Тогда, если в соответствующей проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 есть точка перегиба функции $y = f(x)$.

Доказательство

Пусть для определенности вторая производная $f''(x)$ положительна при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и отрицательна при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда на $(x_0 - \delta, x_0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x_0, x_0 + \delta)$ выпукла вверх, т.е. при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что x_0 - точка перегиба функции $f(x)$.
Теорема доказана.

Определения и понятия

1. $\mathbb{N}$ - **множество натуральных чисел**, состоит из чисел, возникающих при счёте.
2. $\mathbb{Z}$ - **множество целых чисел**, состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.
3. $\mathbb{Q}$ - **множество рациональных чисел**, состоит из чисел, представимых в виде $\dfrac{z}{n}, z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$.
4. $\mathbb{I}$ - **множество иррациональных чисел**, состоит из чисел, которые не представимы в виде $\dfrac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$, такие как $e, \pi, \sqrt{3}$ и т.д..
5. $\mathbb{R}$ - **множество действительных чисел**, состоит из рациональных и иррациональных чисел.
6. $\overline{\mathbb{R}}$ - **расширенное множество действительных чисел**, состоит из действительных чисел с добавлением $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.
7. **Окрестностью** $U(x)$ **точки** x называют любой интервал, содержащий эту точку.
8. **Проколотой окрестностью** $\overset{\circ}{U}(x)$ **точки** x называют окрестность этой точки $U(x)$, за исключением самой точки x.
9. ε**-окрестностью точки** x_0 (при положительном ε) называют интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$.

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}:\ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$$

10. **Правой (правосторонней)** δ**-окрестностью точки** x_0 называют полуинтервал $[x_0,\ x_0 + \delta),\ \delta > 0$.

$$U_\delta^+(x_0) = \{x \in \mathbb{R}:\ x_0 \leqslant x < x_0 + \delta\},\ \delta > 0$$

11. **Левой (левосторонней)** δ**-окрестностью точки** x_0 называют полуинтервал $(x_0-\delta,\ x_0],\ \delta > 0$.

$$U_\delta^-(x_0) = \{x \in \mathbb{R}:\ x_0 - \delta < x \leqslant x_0\},\ \delta > 0$$

12. **Окрестностью точки** $+\infty$ называют интервал $(a, +\infty),\ a > 0$.

$$U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ x > a\},\ a > 0$$

13. **Окрестностью точки** $-\infty$ называют интервал $(-\infty, -a),\ a > 0$.

$$U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ x < -a\},\ a > 0$$

48. *Необходимое условие точки перегиба*

Используются определения 64, 88 из списка

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если x_0 - точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство
Предположим, $f''(x_0) \neq 0$, и пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 существует окрестность $U_\delta(x_0)$ этой точки такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности по теореме о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. Тогда на обоих интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке x_0. Поэтому предположение $f''(x_0) \neq 0$ неверное, $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.
Теорема доказана.

14. **Окрестностью** ∞ (бесконечности без знака) называют объединение двух интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty),\ a > 0.$

$$U(\infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| > a\},\ a > 0$$

15. **Последовательностью** $\{X_n\}$ называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу n при этом поставлено в соответствие число x_n, то это число называется n-м элементом последовательности; n называют номером элемента x_n.

16. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **неубывающей**, если $x_{n+1} \geqslant x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

17. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **возрастающей**, если $x_{n+1} > x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

18. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **невозрастающей**, если $x_{n+1} \leqslant x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

19. Последовательность чисел $\{X_n\}$ называется **убывающей**, если $x_{n+1} < x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

20. Неубывающие, невозрастающие, убывающие и возрастающие последовательности называют **монотонными**.

21. Последовательность называется **постоянной**, если $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n = c,\ c \in \mathbb{R}$.

22. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если $\exists M\ \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \leqslant M$.

23. Последовательность $\{X_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если $\exists M\ \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ x_n \geqslant M$.

24. Последовательность, ограниченная и сверху и снизу, называют **ограниченной**: $\exists M\ > 0,\ M \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} :\ |x_n| \leqslant M$.

25. Число a называется **пределом числовой последовательности** $\{X_n\}$, если для любого, сколь угодно малого положительного ε существует такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

26. Числовая последовательность называется **сходящейся**, если существует предел этой последовательности, и он конечен.

27. Последовательность $\{X_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

28. Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ (определение по Коши).

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

47. *Достаточное условие выпуклости функции*

Используются определения 64, 86, 87 из списка

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b), причем в каждой точке $x \in (a,b)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ выпукла вниз на указанном интервале. Если же во всех точках интервала (a,b) вторая производная $f''(x)$ отрицательна, то функция f(x) выпукла вверх на этом интервале.

Доказательство

Докажем лишь первое утверждение теоремы (второе доказывается аналогично). Рассмотрим касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$. Уравнение такой касательной имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Пусть для определенности $x_0 < x < b$. Тогда разность ординат точки касательной $\big(x, f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)$ и точки графика $\big(x, f(x)\big)$ равна $\Delta y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x0)$. Поэтому $\Delta y = \big(f'(x_0) - f'(c)\big) \cdot (x - x_0),\ c \in (x_0, x)$. Применим еще раз теорему Лагранжа: $\Delta y = -f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0),\ c_1 \in (x_0, c)$. Здесь $f''(c_1) > 0,\ c - x_0 > 0,\ x - x_0 > 0$, поэтому $\Delta y < 0$, и точка касательной лежит ниже соответствующей точки графика функции. Аналогично можно доказать это утверждение и в случае $a < x < x_0$. Таким образом, точки касательной лежат ниже соответствующих точек графика функции, и функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a,b). Теорема доказана.

29. Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{X_n\}$ точек из $\overset{\circ}{U}(x_0)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = a$ (определение по Гейне).

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0),\ n\in\mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 :\ \lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} = a$$

30. Число a называется **правым (правосторонним) пределом функции** f(x) при $x \to x_0+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0)$ (т.е. $x_0 < x < x_0 + \delta$), выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

31. Число a называется **левым (левосторонним) пределом функции** f(x) при $x \to x_0-$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(x_0)$, (т.е. $x_0 - \delta < x < x_0$) выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{-}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

32. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной на множестве** D, если существует такое число $M > 0$, что для любых $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

33. Функцию $f(x)$ называют **ограниченной** (на области определения D_f), если существует такое число $M > 0$, что для любых $x \in D_f$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

34. Функцию $f(x)$ называют **локально ограниченной в окрестности точки** a, если существует такое число $M > 0$ и такая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$, что для любых $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

35. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой** при $x \to x_0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

36. Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой** при $x \to x_0,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$ - **первый замечательный предел**.

38. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ - **второй замечательный предел**.

39. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **сравнимыми** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

40. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **несравнимыми** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения при $x \to x_0$.

41. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **бесконечно малыми одного порядка** при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = O(\beta(x))$, если существует отличный от нуля конечный предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

46. *Второе достаточное условие экстремума (по второй производной)*

Используются определения 64, 74, 75, 81 из списка

Если точка $x = x_0$ - стационарная точка функции $y = f(x)$, а функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в $x = x_0$ и $f''(x_0) > 0$ $\big(f''(x_0) < 0\big)$, тогда точка $x = x_0$ - точка локального минимума (максимума).

Доказательство

По условию $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ функция $f'(x_0)$ является возрастающей в $U(x_0)$

По условию x_0 - стационарная точка функции $y = f(x) \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0$ Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} f'(x) < 0 \text{ при } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ при } x > x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{по первому достаточному условию экстремума}$$

$$x_0 - \text{ точка локального минимума}$$

Для $f''(x_0) < 0$ аналогично.

Теорема доказана.

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

42. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$ и записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$.

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

43. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой более низкого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, при $x \to x_0$, равен бесконечности.

44. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **эквивалентными** бесконечно малыми при $x \to x_0$, если предел их отношения при $x \to x_0$ равен 1.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

45. Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой k-ого порядка** малости относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, а число k $(k > 0)$ - **порядком малости** $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если функции $\alpha(x)$ и $\beta^k(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

46. Функцию $u(x)$ называют **бесконечно большой k-ого порядка** роста относительно $w(x)$ при $x \to x_0$, а число k $(k > 0)$ - **порядком роста** $u(x)$ относительно $w(x)$ при $x \to x_0$, если функции $u(x)$ и $w^k(x)$ являются бесконечно большими одного порядка при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{w^k(x)} = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

47. **Главная часть суммы бесконечно малых функций** - это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

48. **Приращением аргумента** в точке x_0 называется изменение аргумента функции от значения x_0 к другому значению x,

$$\Delta x = x - x_0$$

49. **Приращением функции** в точке x_0 называется $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

50. *(опр. 1)* Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

45. *Первое достаточное условие экстремума (по первой производной)*

Используются определения 54, 64, 76, 77 из списка

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, а если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через x_0, то функция $f(x)$ имеет в этой точке строгий локальный максимум. Если же $f'(x)$ сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0, то экстремума в этой точке нет.

Доказательство

Рассмотрим первое утверждение теоремы. Если $f'(x) < 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ функция $f(x)$ убывает, и для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ имеем $f(x) > f(x_0)$. На полуинтервале $[x_0, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Мы видим, что x_0 и в самом деле есть точка строгого локального минимума. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы. В случае последнего утверждения функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает на интервале $(x0 - \delta, x0 + \delta)$ в зависимости от знака производной $f'(x)$; экстремума в точке x_0 в обоих случаях нет.
Теорема доказана.

51. *(опр. 2)* Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 $(\Delta x \to 0)$.

52. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 **справа**, если в этой точке существует конечный *правый* предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

53. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 **слева**, если в этой точке существует конечный левый предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

54. Функция $f(x)$ **непрерывна на интервале** (a, b), если она непрерывна в каждой его точке.

55. Функция $f(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b), в точке a - непрерывна справа, т.е. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$, в точке b - непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

56. Если данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.

57. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

58. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).

59. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или $f(x)$ не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку x_0 - **точкой устранимого разрыва первого рода**.

60. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку x_0 **- точкой неустранимого разрыва первого рода**.

61. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется **производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

62. Если $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки x_0 и если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **правой производной функции** $f(x)$ **в** x_0 и обозначается $f'_+(x)$.

63. Если $f(x)$ определена в левосторонней окрестности точки x_0, и если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется **левой производной функции** $f(x)$ **в** x_0 и обозначается $f'_-(x)$.

44. *Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции*

Используются определения 64, 69 из списка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Для того, чтобы эта функция была невозрастающей на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x) \leqslant 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Доказательство
$(\Rightarrow)$
По условию $f(x)$ не возрастает на интервале (a, b). Тогда в точке $x \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем

- $\Delta x > 0 \Rightarrow f(x + \Delta x) \leqslant f(x) \Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leqslant 0$
- $\Delta x < 0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x + \Delta x) \Rightarrow f'(x) = f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leqslant 0$

Таким образом, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$.
$(\Leftarrow)$
По условию во всех точках интервала (a, b), в которых $f(x)$ дифференцируема, выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$. Пусть x_1 и $x_2, \ a < x_1 < x_2 < b,$ — произвольные точки этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Лагранжа, $\Rightarrow \exists c \in (x1, x2)$, такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$
Т.к. $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$, и $x_2 > x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) \leqslant 0 \iff f(x_2) \leqslant f(x_1)$
А значит, функция $y = f(x)$ - неубывающая на (a, b) по определению.
Теорема доказана.

64. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция называется **дифференцируемой в точке** x_0, если ее приращение Δy в точке x_0 представимо в следующем виде: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где A - некоторое число, не зависящее от Δx, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

65. **Дифференциалом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента Δx.

66. **Дифференциалом** n**-го порядка** называется дифференциал от дифференциала $n - 1$ порядка, т.е.
$$d^{\,n}y = d(d^{\,n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$$

67. **Производная** n**-ого порядка** от функции $y = f(x)$, есть производная от производной $n - 1$ порядка, т.е.
$$f^{(n)} = (f^{n-1}(x))'$$

68. Функция $f(x)$ называется **возрастающей на интервале** (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

69. Функция $f(x)$ называется **невозрастающей на интервале** (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \leqslant f(x_1)$.

70. Функция $f(x)$ называется **убывающей на интервале** (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

71. Функция $f(x)$ называется **неубывающей на интервале** (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

72. Функция $f(x)$ называется **монотонной**, если она невозрастающая или неубывающая.

73. Функция $f(x)$ называется **строго монотонной**, если она возрастающая или убывающая.

74. Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0): \ f(x_0) \leqslant f(x)$.

75. Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0): \ f(x_0) \geqslant f(x)$.

76. Точка x_0 называется **точкой строгого локального минимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0): \ f(x_0) < f(x)$.

77. Точка x_0 называется **точкой строгого локального максимума** функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0): \ f(x_0) > f(x)$.

78. **Точками локального экстремума** называются точки локального максимума и строгого локального максимума, локального минимума и строгого локального минимума.

79. **Точками строгого локального экстремума** называются точки строгого локального максимума и минимума.

43. *Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции*

Используются определения 64, 71 из списка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Для того, чтобы эта функция была неубывающей на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна $\forall x \in (a, b)$.

Доказательство
$(\Rightarrow)$
По условию $f(x)$ не убывает на интервале (a, b). Тогда в точке $x \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем

- $\Delta x > 0 \Rightarrow f(x + \Delta x) \geqslant f(x) \Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$
- $\Delta x < 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x + \Delta x) \Rightarrow f'(x) = f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$

Таким образом, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$.
$(\Leftarrow)$
По условию во всех точках интервала (a, b), в которых $f(x)$ дифференцируема, выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$. Пусть x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, — произвольные точки этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Лагранжа, $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$, такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$
Т.к. $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$, и $x_2 > x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0 \iff f(x_2) \geqslant f(x_1)$
А значит, функция $y = f(x)$ - неубывающая на (a, b) по определению.
Теорема доказана.

80. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **критической**, если производная в ней равна 0 или не сущестует вовсе.

81. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **стационарной**, если $f'(x_0) = 0$.

82. Прямая $Ax + By + C = 0$ называется **асимптотой** графика $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к 0 при бесконечном удалении точки M от начала координат.

83. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+(-)} f(x) = \infty$

84. Прямая $y = kx + b$ называется **правой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

85. Прямая $y = kx+b$ называется **левой наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $k, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to -\infty$.

86. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость вверх**, если он лежит не выше любой касательной к графику на (a, b).

87. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость вниз**, если он лежит не ниже любой касательной к графику на (a, b).

88. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если $\exists\delta > 0$ такое, что направления выпуклостей функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

42. *Формула Маклорена для функции* $y = (1+x)^a$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*

Найдем производные функции $y = (1+x)^a$ до n-го порядка:

$$f(x) = (1+x)^a,\ f(0) = 1$$

$$f'(x) = a \cdot (1+x)^{a-1},\ f'(0) = a$$

$$f''(x) = a \cdot (a-1) \cdot (1+x)^{a-2},\ f''(0) = a \cdot (a-1)$$

$$...$$

$$f^{(n)}(x) = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot ... \cdot (a-(n-1)) \cdot (1+x)^{a-n},$$

$$f^{(n)}(0) = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot ... \cdot (a-(n-1))$$

Таким образом, получаем

$$(1+x)^a = 1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4+...$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)...(a-(n-1))}{n!}x^n + \underbrace{\frac{a(a-1)...(a-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\theta x)^{a-(n+1)} \cdot x^{n+1}}_{\text{остаточный член}},$$

$$\theta \in (0,1)$$

Вопросы для подготовки к экзамену

1. *Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности)*

Используются определения 15, 25, 26 из списка

Если последовательность имеет предел, то этот предел - единственный.

Доказательство (от противного)

Пусть $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$, где a и b - пределы сходящейся последовательности $\{X_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = b,\ a \neq b$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Примем $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{3}$ и при $n > max(N_1,\ N_2)$ получим

$$|b-a| = |x_n - a + b - x_n| \leqslant |x_n - a| + |b - x_n| = |x_n - a| + |x_n - b| \Rightarrow |b-a| < 2\varepsilon$$

Или $|b-a| < 2 \cdot \dfrac{|b-a|}{3}$, т.е. $|b-a| < \dfrac{2}{3}|b-a|$, $\dfrac{1}{3}|b-a| < 0$, чего не может быть $\Rightarrow a \neq b$ - неверно, т.е. $a = b \Rightarrow$ предел единственный.

Теорема доказана.

41. *Формула Маклорена для функции* $y = ln(1+x)$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*

Найдем производные функции $y = ln(1+x)$ до n-го порядка:

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(0) = -1 = -1!$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ f'''(0) = 2 = 2!$$

$$f^{IV}(x) = \frac{-3 \cdot 2}{(1+x)^4},\ f^{IV}(0) = -3 \cdot 2 = -3!$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \cdot (-1)^{n-1},\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \cdot (-1)^n,\ f^{(n+1)}(0) = (-1)^n \cdot n!$$

Таким образом, получаем

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}}_{\text{остаточный член}},$$

$$\theta \in (0,1)$$

2. *Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности)*

Используются определения 15, 24, 25, 26 из списка

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Доказательство

Пусть $\{X_n\}$ - сходящаяся последовательность. Тогда по определению, у нее существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon + a < x_n < \varepsilon + a$$

Обозначим через A максимальное число среди $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|$, т.е.

$$A = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|)$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| < A, \Rightarrow$ последовательность ограничена.
Теорема доказана.

40. *Формула Маклорена для функции* $y = cos(x)$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*

Найдем производные функции $y = cos(x)$ до n-го порядка:

$$f(x) = cos(x),\ f(0) = 1$$
$$f'(x) = -sin(x) = cos(x + \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -cos(x) = cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = -1$$
$$f'''(x) = sin(x) = cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 0$$
$$\dots$$
$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot cos(x),\ f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$
$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot sin(x),\ f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Таким образом, получаем

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$
$$+ \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot cos\left(\theta x + (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{остаточный член}},\ \theta \in (0, 1)$$

3. *Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)*

Используются определения 28, 34 из списка

Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$, то $f(x)$ локально ограничена.

Доказательство

По условию $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $|f(x)| - |a| \leqslant |f(x) - a| < 1$, а значит

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| < 1 + |A| = const \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$$

$f(x)$ является локально ограниченной в окрестности точки x_0.

Теорема доказана.

39. *Формула Маклорена для функции* $y = sin(x)$ *с остаточным членом в форме Лагранжа*

Найдем производные функции $y = sin(x)$ до n-го порядка:

$$f(x) = sin(x),\ f(0) = 0$$
$$f'(x) = cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -sin(x) = sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 0$$
$$f'''(x) = -cos(x) = sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = -1$$
$$\dots$$
$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot cos(x),\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$
$$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot sin(x),\ f^{(2n+2)}(0) = 0$$

Таким образом, получаем

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$
$$+ \underbrace{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot sin\left(\theta x + (2n+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{остаточный член}},\ \theta \in (0, 1)$$

4. *Теорема (о сохранении функцией знака своего предела)*

Используются определения 28 из списка

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, то $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ функция $f(x)$ сохраняет знак своего предела.

Доказательство

По условию $\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

- в случае $a > 0$ выбираем $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2}$$
$$-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2}$$
$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$$

Следовательно $f(x) > \dfrac{a}{2} > 0$, т.е. данная функция положительна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

- в случае $a < 0$ выбираем $\varepsilon = -\dfrac{a}{2}$, тогда

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2}$$
$$\frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2}$$
$$\frac{3a}{2} < f(x) < \frac{a}{2}$$

Следовательно $f(x) < \dfrac{a}{2} < 0$, т.е. данная функция отрицательна при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Теорема доказана.

38. ***Формула Маклорена для функции*** $y = e^x$ ***с остаточным членом в форме Лагранжа***

Найдем производные функции $y = e^x$ до n-го порядка:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = ... = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$$

Таким образом, получаем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}}_{\text{остаточный член}},\ \theta \in (0, 1)$$

5. *Теорема (о предельном переходе в неравенстве)*

Используются определения 28 из списка

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, причем для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то $a \geqslant b$.

Доказательство

По условию $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) : \ f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0$, тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = a - b \geqslant 0, \Rightarrow a \geqslant b$$

Теорема доказана.

37. *Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков до n-го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \underbrace{o\big((x-x_0)^n\big)}_{R_{n+1}},\ x \to x_0, \text{где}$$

R_{n+1} – остаточный член в форме Пеано

Равенство, которое требуется доказать, означает, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0$$

Мы имеем здесь дело с неопределенностью $\{\frac{0}{0}\}$. Чтобы раскрыть её, применим n - 1 раз правило Лопиталя-Бернулли

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} \cdot (x-x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} \right) = f^{(n)}(x_0)$.
Теорема доказана.

6. *Теорема (о пределе промежуточной функции)*

Используются определения 28 из списка

Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, равные одному и тому же числу a. Тогда и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

Доказательство

По условию $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, тогда по определению предела функции,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon$$

$$\text{т.е. } a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

Тогда при $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0),\ \delta = min(\delta_1, \delta_2)$, выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$|g(x) - a| < \varepsilon$$

Таким образом, получаем

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon \iff \lim_{x\to x_0} g(x) = a$$

Теорема доказана.

$$\varphi'(x) = -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + f'(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n,$$

Т.е.

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n$$

Далее, $\psi'(t) = -(n+1) \cdot (x-t)^n$, и непосредственно видно, что производная $\psi'(t)$ на интервале (x_0, x) отлична от нуля. К паре функций $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке $[x0, x]$ применим теорему Коши. Имеем

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{\psi'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}, \text{ где } \theta \in (0, 1).$$

Таким образом, $0 < \theta < 1 \iff 0 < \theta(x - x_0) < x - x_0 \iff x_0 < x_0 + \theta(x - x_0) < x, \Rightarrow$ $c = x_0 + \theta(x - x_0) \in (x_0, x)$

Учитывая результаты проведенных вычислений, получаем отсюда:

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{n!} \cdot \big(x - x_0 - \theta(x - x_0)\big)^n \times$$

$$\times \frac{1}{-(n+1)\big(x - x_0 - \theta(x - x_0)\big)^n} = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!},$$

Т.е.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы при $x > x_0$. При $x < x_0$ рассуждения аналогичны; если $x = x_0$, то утверждение теоремы очевидно.

Теорема доказана.

7. *Теорема (о пределе произведения функций)*

Используются определения 28, 35 из списка

Если $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство

По условию $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой имеем

$$f(x) = a + \alpha(x),\ \text{где } \alpha(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \to x_0$$

$$g(x) = b + \beta(x),\ \text{где } \beta(x) - \text{бесконечно малая функция при } x \to x_0$$

Тогда

$$f(x) \cdot g(x) = (a + \alpha(x)) \cdot (b + \beta(x)) = a \cdot b + a \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot b + \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} (a \cdot b + \underbrace{a \cdot \beta(x)}_{\text{б.м. при } x\to x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot b}_{\text{б.м. при } x\to x_0} + \underbrace{\alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\text{б.м. при } x\to x_0}) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} (a \cdot b) = a \cdot b = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема доказана.

36. *Вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет в этой окрестности производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Тогда для любого $x \in U(x_0)$ справедливо равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}},$$

где $\theta \in (0,1)$, $R_{n+1} -$ остаточный член в форме Лагранжа.

Пусть $x \in U(x_0)$, и пусть для определенности $x > x_0$. Рассмотрим на отрезке $[x0, x]$ две функции

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k$$

$$\psi(t) = (x-t)^{n+1}$$

Для этих функций имеем

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (x-x)^k = f(x) - f(x) = 0,$$

$$\varphi(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k,$$

$$\psi(x) = (x-x)^{n+1} = 0,$$

$$\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}.$$

Вычислим производные

$$\varphi'(t) = \left(f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k\right)' =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(f^{(k+1)}(t) \cdot (x-t)^k - k \cdot f^{(k)}(t) \cdot (x-t)^{k-1}\right) =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1}$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования $l = k-1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l = f'(t) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (x-t)^l$$

Следовательно

8. *Теорема (о пределе сложной функции)*

Используются определения 25, 29 из списка

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ конечный предел, равный b, и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ этой точки, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c, то сложная функция $g(f(x))$ имеет $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Доказательство

По определению предела функции по Гейне имеем:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \iff \{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(a),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} x_n = a : \lim_{n\to\infty} \{f(x_n)\} = b$$

$$\exists \lim_{y\to b} g(y) = c \iff \{\forall y_n \in \overset{\circ}{U}(b),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} y_n = b : \lim_{n\to\infty} \{g(y_n)\} = c$$

Пусть $\{X_n\}$ - произвольная последовательность, стремящаяся к точке a и $x_n \neq a\, \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \{f(x_n)\} = b$, но $f(x_n) \neq b\, \forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $y_n = f(x_n)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \{y_n\} = b$ и $y_n \neq b\, \forall n \in \mathbb{N}$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \{g(y_n)\} = c$, т.е.

$$\{\forall x_n \in \overset{\circ}{U}(a),\ n \in \mathbb{N}\} \cap \lim_{n\to\infty} x_n = a : \lim_{n\to\infty} \{g(f(x_n))\} = c \iff \lim_{n\to\infty} g(f(x)) = c$$

Теорема доказана.

35. ***Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.***

Используются определения 36 из списка

1. Сравним рост показательной функции $y = a^x$ и степенной функции $y = x^n$ ($a > 1$, $n > 0$):

   Так как при $x \to +\infty$ функции $y = a^x$ и $y = x^n$ являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли n раз:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(a)\cdot a^x}{n\cdot x^{n-1}} = ... = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln^n(a)\cdot a^x}{n!} = +\infty$$

   Таким образом, показательная функция $y = a^x$ растет быстрее степенной функции $y = x^n$.

2. Сравним рост логарифмической функции $y = log_a(x)$ и степенной функции $y = x^n(a > 1, n > 0)$:

   Так как при $x \to +\infty$ функции $y = log_a(x)$ и $y = x^n$ являются бесконечно большими, воспользуемся правилом Лопиталя-Бернулли:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{log_a(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\cdot ln(a)}}{n\cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n\cdot ln(a)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

   Таким образом, степенная функция $y = a^x$ растет быстрее логарифмической функции $y = x^n$.

   Вывод:

   Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная - быстрее логарифмической.

9. *Вывод первого замечательного предела*

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$$

Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A, и пусть угол $\angle AOB$ равен x (радиан). Пусть, далее, CA — перпендикуляр к этой оси, C — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда

$$S_{\triangle OAB} < S_{\ OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2}R^2 sin(x) < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tg(x)$$

$$sin(x) < x < tg(x)$$

$$1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$$

$$1 > \frac{sin(x)}{x} > cos(x),\ \text{при } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Рассмотрим $x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0)$. Сделаем замену $\beta = -x$, таким образом $\beta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, а значит справедливо следующее неравенство:

$$1 > \frac{sin(\beta)}{\beta} > cos(\beta)$$

Вернемся к замене $\beta = -x$

$$1 > \frac{sin(-x)}{-x} > cos(-x)$$

$$1 > \frac{-sin(x)}{-x} > cos(x)$$

$$1 > \frac{sin(x)}{x} > cos(x) \text{ при } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

Таким образом, полученное неравенство справедливо для $x \in (-\dfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \dfrac{\pi}{2})$. Перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} cos(x) = 1\\ &\lim_{x\to 0} 1 = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(по т. о пределе промежуточной функции) } \lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$$

34. *Теорема Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций*

Используются определения 35, 36, 64 из списка

Пусть $f(x)$ и $g(x)$:

1. Являются бесконечно малыми или бесконечно большими функциями при $x \to x_0$
2. Дифференцируемы в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
3. $g'(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
4. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство (для б.м.ф)

По условию $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to x_0$, тогда по определению

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0+} g(x) = \lim_{x\to x_0-} g(x) = 0$$

По условию $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \iff \lim\limits_{x\to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to x_0-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Рассмотрим пределы при $x \to x_0+$ (для $x \to x_0-$ доказывается аналогично)

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = x_0$, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в $U^+(x_0)$. Рассмотрим отрезок $[x_0, x]$, где $x > x_0$.

По условию $g'(x) \neq 0$ в (x_0, x).

Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию теоремы Коши, а значит, $\exists c \in (x_0, x)$, такая, что $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

1. Так как $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
2. Так как $x_0 < c < x$, то, если $x \to x_0+$, то и $c \to x_0+$

Таким образом,

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ т.е. } \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Аналогично $\lim\limits_{x\to x_0-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Таким образом, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема доказана.

10. *Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)*

Используются определения 28, 35 из списка

Равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ имеет место $\iff$ $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство

($\Rightarrow$)

По условию $\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$. Тогда $|\alpha(x)| < \varepsilon \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, т.е. $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Но $\alpha(x) = f(x) - a \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

($\Leftarrow$)

По условию $f(x) = a + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Но по условию $f(x) = a + \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = f(x) - a$, отсюда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Теорема доказана.

33. *Теорема Коши*

Используются определения 55, 64 из списка

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируемы на интервале (a, b)
3. $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a, b)$

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство

Сначала заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, т.к. если бы $g(b) - g(a) = 0$, то $g(a) = g(b)$ и функция $g(x)$, в результате, удовлетворяла бы условию теоремы Ролля, согласно которой $\exists c \in (a, b)$, такая, что $g'(c) = 0$, что противоречит 3 условию теоремы.

Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big(g(x) - g(a)\big)$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), поскольку этими свойствами обладают $f(x)$ и $g(x)$.
2. $$\left.\begin{aligned} F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big(g(a) - g(a)\big) = f(a) \\ F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big(g(b) - g(a)\big) = f(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля $\Rightarrow$ существует точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Теорема доказана.

11. *Теорема (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную)*

Используются определения 34, 35 из списка

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, $f(x)$ - ограниченная функция, то $\alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство

По условию $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}_1(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$$

$f(x)$ - ограниченная функция, тогда

$$|f(x)| < c, \text{ где } c = const, \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(x_0)$$

Таким образом,

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) = \overset{\circ}{U}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_2(x_0) :$$
$$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c \Rightarrow$$

$|\alpha(x) \cdot f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \alpha(x) \cdot f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$

Теорема доказана.

32. *Теорема Лагранжа*

Используются определения 55, 64 из списка

Пусть функция $f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

1. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), поскольку этими свойствами обладает $f(x)$.
2. $$\left.\begin{aligned} F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a) \\ F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$$

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля $\Rightarrow$ существует точка $c \in (a, b)$, для которой $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$$

Теорема доказана.

12. *Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой)*

Используются определения 28, 35, 36 из списка

$\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

$f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Выберем произвольное $E > 0$. Тогда

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{E} > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}_1(x_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_1(x_0) \Rightarrow 0 < |\alpha(x)| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{|\alpha(x)|} > E, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \frac{1}{\alpha(x)} \text{ - бесконечно большая функция при } x \to x_0$$

Пусть $f(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\text{для } E = \frac{1}{\varepsilon} \ \exists \overset{\circ}{U}(x_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > E, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{E} = \varepsilon, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)} \text{ - бесконечно малая функция при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

31. *Теорема Ролля*

Используются определения 55, 64, 74, 75 из списка

Пусть функция $y = f(x)$:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$
2. Дифференцируема на интервале (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство
По условию $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b], \Rightarrow$ по (второй) теореме Вейерштрасса функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения, обозначим

$$M = \underset{[a,b]}{max}\big(f(x)\big)$$

$$m = \underset{[a,b]}{min}\big(f(x)\big)$$

тогда $\forall x \in [a, b] :\ m \leqslant f(x) \leqslant M$
Если $m = M$, то $\forall x \in [a, b]\ \ m = M = f(x) = const \Rightarrow \forall x \in [a, b]\ \ f'(x) = 0$
Если $m \neq M$, то

- $f(a) = f(b) = m$. Тогда функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего значения внутри $[a, b]$, т.е. $a < x_0 < b$

  Таким образом, точка x_0 - точка локального максимума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точке x_0. В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$

- $f(a) = f(b) = M$. Тогда функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего значения внутри $[a, b]$, т.е. $a < x_0 < b$

  Таким образом, точка x_0 - точка локального минимума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точке x_0. В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$

- $y = f(x)$ достигает своего минимального и максимального значения внутри $[a, b]$ в точках x_0 и x_1.

Точки x_0 и x_1 - точки экстремума. Также по условию, $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b) \Rightarrow f(x)$ дифференцируема в точках x_0 и x_1. В итоге, по теореме Ферма, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_1) = 0$.
Теорема доказана.

13. ***Теорема (о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела)***

Используются определения 35, 44 из списка

Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, и $f(x)$ - некоторая функция, определенная в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Тогда:

- если существует предел при $x \to x_0$ произведения $\alpha(x) \cdot f(x)$, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \to x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$
- если существует предел при $x \to x_0$ частного $\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}$, то он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \to x_0$ бесконечно малую функцию $\beta(x)$

Доказательство

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тогда по определению $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

- $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot f(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (\beta(x) \cdot f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} (\beta(x) \cdot f(x))$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x) \cdot f(x)}{\alpha(x) \cdot \beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\beta(x)}$.

Теорема доказана.

30. *Теорема Ферма*

Используются определения 61, 64, 75 из списка

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, и точка x_0 - есть точка локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

Пусть x_0 - точка локального максимума функции $y = f(x)$, тогда по определению

$$\exists U_\delta(x_0):\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$$

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, $\Rightarrow$ в точке $x = x_0$ существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0),\ x_0 + \Delta x \in U_\delta(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0$$

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0$$

По теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$\text{Если } \Delta x > 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \leqslant 0$$

$$\text{Если } \Delta x < 0, \text{ то } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geqslant 0$$

Таким образом, $f'(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

14. *Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых)*

Используются определения 35, 42, 44 из списка

Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ эквивалентны $\iff$ их разность имеет больший порядок малости при $x \to x_0$ по сравнению с каждой из них.

Доказательство

$(\Rightarrow)$

По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, тогда по определению $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Таким образом,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x)-\beta(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x)-\beta(x) = o(\alpha(x)) \text{ при } x \to x_0$$

$(\Leftarrow)$

По условию $\alpha(x)-\beta(x) = o(\beta(x))$ при $x \to x_0,\ \alpha(x)-\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \to x_0$. Тогда

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

29. *Теорема (свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка)*

Используются определения 65 из списка

Дифференциал функции $y = f(u)$ не зависит от того, является ли u - независимой переменной, или функцией от другой независимой переменной.

Доказательство

1. Пусть $y = f(u)$, где u - независимая переменная. Тогда

$$dy = f'(u) \cdot du$$

2. Пусть $y = f(u)$, где $u = g(x)$ - некоторая функция, имеющая производную. Тогда

$$dy = y'_x \cdot du = y'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx}_{du} = y'_u \cdot du = f'(u) \cdot du.$$

Теорема доказана.

15. *Теорема (о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков)*

Используются определения 35, 44 из списка

Сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ эквивалентна своей главной части.

Доказательство

Пусть $\alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ ...,\ \alpha_n(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to x_0$, и $\alpha_1(x)$ - главная часть суммы $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0, \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} = 0,\ ...,\ \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 0,$$

Тогда рассмотрим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1 + \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} + \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} + ... + \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$$

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + ... + \alpha_n(x) \sim \alpha_1(x) \text{ при } x \to x_0$$

Теорема доказана.

28. *Теорема (о производной обратной функции)*

Используются определения 51, 61 из списка

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и дифференцируема в точке $x = x_0$, то обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y = f(x_0)$ и $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Доказательство

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, $\Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, $\Rightarrow$ Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$ т.е. $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Тогда

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = x'_y \overset{\text{по опр.}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Теорема доказана.

16. *Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций)*

Используются определения 50 из списка

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (последнее при $g(x) \neq 0$) - также непрерывны в точке x_0.

Доказательство

По условию $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, тогда по определению

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0), \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} f(x) \pm g(x)$ - непрерывна в точке x = x_0.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0), \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна в точке x = x_0.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке x = x_0 при условии $g(x) \neq 0$.

Теорема доказана.

27. *Теорема (о производной сложной функции)*

Используются определения 51, 61, 64 из списка

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0 и функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, и $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'_u \cdot g'_x$.

Доказательство

По условию

- функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, тогда по определению существует конечный $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x_0)$
- функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = u_0$, тогда по определению существует конечный $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$
- функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0, \Rightarrow$ Функция $u = g(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0,$ т.е. $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0.$

Таким образом,

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta u \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$$

17. *Теорема (о непрерывности сложной функции)*

Используются определения 50 из списка

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Доказательство

По условию функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, функция $g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\exists \lim_{y\to b} g(y) = g(b)$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = g(b) = g(f(a)), \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} \text{ функция } g(f(x)) \text{ непрерывна в точке } x = a$$

Теорема доказана.

26. *Теорема (о производной частного двух дифференцируемых функций)*

Используются определения 61, 64 из списка

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ тоже дифференцируема в этой точке $\big($при условии $g(x) \neq 0\big)$ и $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство

По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x = x_0, \Rightarrow$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0)$$

Вычислим $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - g(x+\Delta x) \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - g(x+\Delta x) \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x)}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x)\right) \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}\right) =$$

$$= \Bigg(\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} g(x)}_{g(x)} - \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x)}_{f(x)}\Bigg) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}}_{g^{-2}(x)} =$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Теорема доказана.

18. ***Теорема (о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки)***

Используются определения 50 из списка

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Доказательство

По условию $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. Тогда по определению

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$$

Тогда по теореме о сохранении функцией знака своего предела функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0, т.е.

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Так как $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$, то

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$$

Теорема доказана.

25. *Теорема (о производной произведения двух дифференцируемых функций)*

Используются определения 61, 64 из списка

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x) \cdot g(x)$ тоже дифференцируема в этой точке и $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Доказательство

По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x = x_0, \Rightarrow$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x_0)$$

Вычислим $\big(f(x) \cdot g(x)\big)'$:

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\big(f(x) \cdot g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}_{g(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'(x)} =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Теорема доказана.

19. ***Функция, непрерывная в точке. Теорема о непрерывности элементарных функций.***

(опр. 1) Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с значением функции в этой точке, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(опр. 2) Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если приращение функции в этой точке есть бесконечно малая функция при стремлении приращения аргумента к 0 ($\Delta x \to 0$).
Теорема (о непрерывности элементарных функций)
Все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

Доказательство (для $y = sin(x)$ и $y = cos(x)$)

Рассмотрим $y = sin(x)$:
Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = sin(x + \Delta x) - sin(x) =$$
$$= 2sin\Big(\frac{x + \Delta x - x}{2}\Big) \cdot cos\Big(\frac{x + \Delta x + x}{2}\Big) = 2sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot cos\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot cos\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big)\right) = 0,$$

Т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} y = sin(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

Рассмотрим $y = cos(x)$:
Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = cos(x + \Delta x) - cos(x) =$$
$$= 2sin\Big(\frac{x + \Delta x + x}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{x - \Delta x - x}{2}\Big) = -2sin\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-2sin\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{\Delta x}{2}\Big)\right) = 0,$$

Т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} y = cos(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

24. *Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности функции)*

Используются определения 51, 64 из списка

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, тогда по определению

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \big(A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\big) = 0, \overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow} y = f(x) \text{ непрерывна в точке } x = x_0$$

Теорема доказана.

20. *Свойства функций, непрерывных на отрезке*

1. *Первая теорема Вейерштрасса*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

2. *Вторая теорема Вейерштрасса*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение.

3. *Первая теорема Больцано-Коши*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой значение функции $f(c) = 0$.

4. *Вторая теорема Больцано-Коши*

   Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(a) < f(c) < f(b)$.

5. *Теорема о непрерывности обратной функции*

   Если функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на $[a, b]$, то существует и определена на отрезке $[f(a), f(b)]$ обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная и возрастающая (убывающая) на этом отрезке.

23. *Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции)*

Используются определения 61, 64 из списка

Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$ в этой точке.

Доказательство
($\Rightarrow$).
По условию функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда по определению дифференцируемости:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

После деления на Δx получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

Таким образом производная $f'(x_0)$ существует (и равна A) по определению.
($\Leftarrow$)
По условию существует $f'(x_0)$. Тогда по определению производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

После умножения на Δx получаем:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 по определению.
Теорема доказана.

21. *Точки разрыва функции и их классификация. Примеры*

Если данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.

1. **Точкой разрыва первого рода** называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

   Пример: $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$. Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{sin(x)}{x} = 1 \\ \exists \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{sin(x)}{x} = 1 \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ точка } x = 0 \text{ - точка разрыва первого рода.}$$

2. **Точкой разрыва второго рода** называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции не существует (в частности, равен бесконечности).

   Пример: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \exists \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ x = 0 \notin D_f, \text{ т.е. } \nexists f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ точка } x = 0 \text{ - точка разрыва второго рода.}$$

3. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке равны между собой, но не равны значению функции в этой точке или $f(x)$ не определена в этой точке, то такой разрыв называют **устранимым**, а точку x_0 - **точкой устранимого разрыва первого рода**.

   Пример: $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$:

   Из соображений выше, точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода функции $f(x)$. При этом, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$, тогда по определению, точка $x = 0$ - точка устранимого разрыва первого рода.

   Если доопределить функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

   то функция $f(x)$ по определению будет непрерывной.

22. *Теорема (о необходимом и достаточном условии существования наклонной асимптоты)*

Используются определения 35, 84, 85 из списка

Прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$$

Доказательство
$(\Rightarrow)$
По условию прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика $y = f(x)$. Тогда по определению

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}},\ \text{при } x \to +(-)\infty$$

Отсюда $\dfrac{f(x)}{x} = k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x} \to k,\ f(x)-kx = b+\alpha(x)$, при $x \to +(-)\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+(-)\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k,\ \lim\limits_{x\to+(-)\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$
$(\Leftarrow)$
По условию существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to+(-)\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$$

тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$f(x) - kx = b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}},\ \text{при } x \to +(-)\infty$$

$$f(x) = kx + b + \underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.ф.}},\ \text{при } x \to +(-)\infty$$

Таким образом, прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ по определению.
Теорема доказана.

4. Если x_0 — точка разрыва функции первого рода и односторонние пределы функции в этой точке не равны между собой, то такой разрыв называют **неустранимым**, а точку x_0 - **точкой неустранимого разрыва первого рода**.

   Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \ x \leqslant 0 \\ x+1, \ x > 0 \end{cases}$$

   Рассмотрим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\exists \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \\ &\exists \lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \\ &\exists f(0) = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка $x = 0$ - точка неустранимого разрыва первого рода по определению.