
GitHub: https://github.com/pluttan
VK: https://vk.com/pluttan
VK: https://vk.com/f_i_i_x_i_i

https://t.me/botva_its6

Подготовка к РК2

Математический анализ

Над файлом работали:
pluttan & fiixii

1 Определения

1.1 Сформулируйте определение наклонной асимптоты.

Пусть функция $y = f(x)$ определена при x > x0 (x < x0). Если функция при $x \to +\infty(-\infty)$ представима в виде: f(x) = Ax + B + o(1), то прямую y = Ax + B называют наклонной правой (левой) асимптотой графика функции f(x).

1.2 Сформулируйте определение производной функции в точке.

Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и пусть $\Delta x \neq 0$ таково, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности. Если $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной $f(x)$ в точке x_0.

1.3 Сформулируйте определение односторонней производной функции.

Если $f(x)$ определена в правосторонней (левосторонней) окрестности точки x_0, т.е. на полуинтервале $[x_0, x_0 + \eta)$ $(x_0, x_0 + \eta])$, $\eta > 0$ и если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0+(0-)} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется правой (левой) производной функции $f(x)$ в x_0.

1.4 Сформулируйте определение производной n-го порядка.

Производная n-ого порядка от функции $y = f(x)$, есть производная от производной $n - 1$ порядка $y^{(n)} = (f^{n-1}(x))$.

1.5 Сформулируйте определение дифференцируемой функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δy в точке x_0 представимо в следующем виде: $\Delta y = A\Delta x \neq \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $A = f'(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

1.6 Сформулируйте определение дифференциала первого порядка.

Линейная от Δx функция $A\Delta x(A = f'(x))$ называется дифференциалом функции $f(x)$ 1-ого порядка.

1.7 Сформулируйте определение дифференциала n-го порядка.

Дифференциал n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $n-1$ порядка $\partial^n y = \partial(\partial^{n-1} y) = f^{(n)}(x)\partial x^n$

1.8 Сформулируйте определение возрастающей функции.

Функция $f(x)$ называется возрастающей на интервале (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : f(x_2) > f(x_1)$.

1.9 Сформулируйте определение невозрастающей функции.

Функция $f(x)$ называется невозрастающей на интервале (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : f(x_2) \leqslant f(x_1)$.

1.10 Сформулируйте определение убывающей функции.

Функция $f(x)$ называется убывающей на интервале (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : f(x_2) < f(x_1)$.

1.11 Сформулируйте определение неубывающей функции.

Функция $f(x)$ называется неубывающей на интервале (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

1.12 Сформулируйте определение монотонной функции.

Функция $f(x)$ называется монотонной, если она невозрастающая или неубывающая.

1.13 Сформулируйте определение строго монотонной функции.

Функция $f(x)$ называется строго монотонной, если она возрастающая или убывающая.

1.14 Сформулируйте определение локального минимума.

Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если $\exists U_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in U_\delta(x_0)$: $f(x_0) \leqslant f(x)$

1.15 Сформулируйте определение строгого локального минимума.

Точка x_0 называется точкой строгого локального минимума функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$: $f(x_0) < f(x)$

1.16 Сформулируйте определение локального максимума.

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если $\exists U_f(x_0)$, такая что $\forall x \in U_f(x_0)$: $f(x_0) \geqslant f(x)$

1.17 Сформулируйте определение строгого локального максимума.

Точка x_0 называется точкой строгого локального минимума функции $f(x)$, если $\exists \overset{\circ}{U}_f(x_0)$, такая что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_f(x_0)$: $f(x_0) < f(x)$

1.18 Сформулируйте определение экстремума.

Точками локального экстремума называются точки локального максимума и строгого локального максимума, локального минимума и строгого локального минимума.

1.19 Сформулируйте определение строгого экстремума.

Точками строгого локального экстремума называются точки строгого локального максимума и минимума.

1.20 Сформулируйте определение стационарной точки.

Точки, в которых производная функции равна 0, называются стандартными.

1.21 Сформулируйте определение критической точки.

Точки, в которых производная функции равна 0 или не существует, называются критическими точками функции.

2.8 Сформулируйте теорему Ролля.

Пусть функция $f(x)$:

- непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- дифференцируема на интервале (a, b);
- $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что $f'(c) = 0$.

2.9 Сформулируйте теорему Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$:

- непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- дифференцируема на интервале (a, b);

Тогда на этом интервале существует точка c такая, что $f(b) \square f(a) = f'(c)(b \square a)$.

2.10 Сформулируйте теорему Коши.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

- непрерывны на отрезке $[a, b]$;
- дифференцируемы на интервале (a, b);
- $g'(x)$ отлична от нуля в каждой точке этого интервала.

Тогда на интервале (a, b) найдется точка c такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Заметочка: на РК2 очень часто встречаются формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

1.22 Сформулируйте определение выпуклости функции на промежутке.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Говорят, что $f(x)$ является выпуклой вверх(вниз) на этом интервале, если для $\forall$ касательной к графику этой функции каждая точка касательной, отличная от точки касания, лежит выше(ниже) точки графика функции с той же абсциссой.

1.23 Сформулируйте определение точки перегиба графика функции.

Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если $\exists \delta > 0$ такое, что направления выпуклостей $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ различны.

2 Формулировки теорем

2.1 Сформулируйте необходимое и достаточное условие наличия наклонной асимптоты.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0 (x < x_0)$. Прямая $y = Ax + B$ тогда и только является правой (левой) асимптотой графика данной функции, когда:
$\exists \lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = A,$
$\exists \lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} (f(x) - Ax) = B$

2.2 Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$ в этой точке.

2.3 Сформулируйте теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции.

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

2.4 Сформулируйте теорему о производной произведения.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда в этой точке дифференцируема также функция $f(x)g(x)$, причём $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

2.5 Сформулируйте теорему о производной частного.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $(g(x) \neq 0)$. Тогда в этой точке дифференцируема также функция $\frac{f(x)}{g(x)}$, причём $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

2.6 Сформулируйте свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка.

Дифференциал функции $y = f(u)$ не зависит от того, является ли u независимой переменной или функцией от другой независимой переменной.

2.7 Сформулируйте теорему Ферма.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке I и в некоторой внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (или наименьшее) значение на этом промежутке. Тогда, если существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю.