Лекция 2-2022. Работа и потенциал электростатического поля

0. Описание векторных полей.
1. Работа электростатического поля при перемещении заряда.
2. Циркуляция вектора напряженности.
3. Связь напряженности и потенциала.
4. Уравнение Пуассона.

Мир каждый видит в облике ином, и каждый прав – так много смысла в нем.

Иоганн Вольфганг Гёте

Математическое описание полей подробно изучить самостоятельно

Видеоролики Чирцова

https://www.youtube.com/watch?v=D5n_Z2VoXjc

https://www.youtube.com/watch?v=r6heaCmxPCY

Характеристики векторных полей

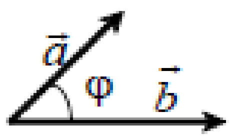
1. Поток (П).
2. Циркуляция (Ц).
3. Дивергенция $(div\vec{A})$.
4. Ротор или вихрь ($\overline{rotA}$).
5. Линии тока.

При этом поток и циркуляция являются суммарными (интегральными) характеристиками, а дивергенция и ротор – дифференциальными (точечными) характеристиками поля.

Вектор.

Геометрический вектор $\vec{a}$ – это направленный отрезок в пространстве. Длина вектора $\vec{a}$ называется его ***модулем*** и обозначается $a = |\vec{a}|$. В ***прямоугольной декартовой системе*** координат каждый вектор $\vec{a}$ можно однозначно представить в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (***орты***) по осям координат x, y, z. Числа a_x, a_y, a_z называются *прямоугольными декартовыми* ***координатами*** вектора $\vec{a}$.

Скалярное произведение векторов.

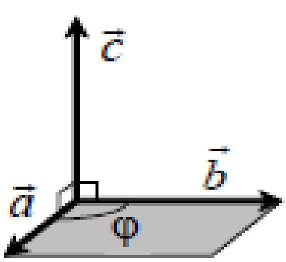


Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть **число**

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = ab\cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_y,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение векторов.



Под векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимают **вектор** $\vec{c}$, имеющий длину $c = ab\sin\varphi$ (площадь параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах) и направленный перпендикулярно к $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют ***правую тройку векторов***.

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \equiv \vec{a} \times \vec{b}$.

Скалярное и векторное поле

Скалярное поле.

Если каждой точке M пространства ставится в соответствие скалярная величина U, то возникает ***скалярное поле*** $U(M)$ (например, поле температуры неравномерно нагретого тела, поле плотности в неоднородной среде, поле электростатического потенциала). Если M имеет декартовы координаты (x,y,z), то пишут $U=U(x,y,z)$ или $U=U(\vec{r})$ с векторным аргументом (радиусом вектором) $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Векторное поле.

Если каждой точке M ставится в соответствие вектор $\vec{A}$, то говорят о ***векторном поле*** $\vec{A}(M)$ (например, поле скоростей движущейся жидкости, гравитационное поле Солнца, поле электрической напряженности, поле магнитной напряженности). В декартовых координатах

$$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)=\vec{A}(\vec{r})=A_x(x,y,z)\vec{i}+A_y(x,y,z)\vec{j}+A_z(x,y,z)\vec{k},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор. Компоненты A_x, A_y, A_z образуют ***три скалярных поля*** и однозначно определяют $\vec{A}(\vec{r})$ – векторную функцию векторного аргумента.

Описание свойств векторных полей

Градиент.

Градиентом поля $U(\vec{r})$ называется *вектор*, определяемый в каждой точке поля соотношением $\operatorname{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$.

Тогда $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial s} = \vec{n}\operatorname{grad}U$, где $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении $\vec{s}$.

Часто вектор $\operatorname{grad}U$ обозначают также $\frac{\partial U}{\partial \vec{s}}$ или ∇U, где ∇ ("набла") обозначает символический вектор, называемый ***оператором Гамильтона*** или ***набла-оператором*** $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

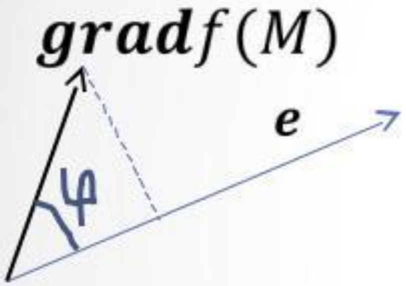
Понятие производной по направлению

Определение. ***Производной*** z'_l ***по направлению*** $\boldsymbol{l}$ функции $f(x,y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю, т.е.

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta l}$$

Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ **называется вектор**, координаты которого равны частным производным, взятым в точке. Обозначают $gradf(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

<u>Взаимосвязь градиента и производной по направлению</u>**:**



Выражение для производной по направлению можно представить как скалярное произведение вектора градиента и единичного вектора направления $\boldsymbol{e}$ или как проекцию градиента на это направление:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{grad}f(M), \boldsymbol{e}) = |\boldsymbol{grad}f(M)| \cos\varphi = \text{Пр}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{grad}f(M)$$

<u>Скорость изменения функции максимальна в направлении градиента:</u> $\varphi = 0$

$$\cos\varphi = 1 \longrightarrow \frac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{grad}f(M)} = |\boldsymbol{grad}f(M)|$$

Пример: градиент $z = x^2y + xy^3$ в точке $M(1,1)$ равен $gradf(M) = (3,\ \ 4)$.

Скорость изменения функции в направлении градиента $|gradf(M)| = 5$

Теорема Остроградского – Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S dS = \frac{4\pi r^2 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sum_i q_i$$

Устремив объем замкнутой поверхности к нулю ($V \to 0$), и поделив поток вектора напряженности на этот объем, получим дивергенцию электростатического поля:

$$divE = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_E}{V} = \frac{Q}{\varepsilon_0 V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где ρ – плотность электрического заряда.

Определения дивергенции.
Второе считается эквивалентным первому

1) $$\operatorname{div}\vec{A}(M)=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\limits_{S}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{S}}{V}$$

2) $$\operatorname{div}\ \vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\vec{A}$$

Чуев: Дивергенция – это изменение вектора в своем собственном направлении (по модулю)

$$\operatorname{div}\ \vec{F}=\frac{\mathrm{d}\left|\vec{F}\right|}{\mathrm{d}\vec{\tau}_{\vec{F}}}$$

Ротор – это изменение вектора по направлению.

Дифференциальные операции удобно записывать через векторный оператор « набла» (оператор Гамильтона):

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial \ldots}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \ldots}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \ldots}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial \ldots}{\partial x};\ \frac{\partial \ldots}{\partial y};\ \frac{\partial \ldots}{\partial z}\right)$$

1. Действие оператора на скалярную функцию $U(x, y, z)$ определяет операцию градиента $\boldsymbol{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}$

2. Скалярное произведение оператора и векторного поля определяет **дивергенцию (**расходимость) **векторного поля**

$$div\boldsymbol{A} = (\nabla, \boldsymbol{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. Векторное произведение оператора и векторного поля определяют **ротор векторного поля** $\boldsymbol{rot A} = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\boldsymbol{\partial \ldots}}{\boldsymbol{\partial x}} & \frac{\boldsymbol{\partial \ldots}}{\boldsymbol{\partial y}} & \frac{\boldsymbol{\partial \ldots}}{\boldsymbol{\partial z}} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

Для удобства можно формально представлять ротор как векторное произведение оператора набла (слева) и векторного поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

(Последнее равенство формально представляет векторное произведение как определитель).

Формула Гаусса-Остроградского.

Для пространственной области G, ограниченной замкнутой поверхностью S:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{A}\, dV = \oiint\limits_S \vec{A}\, d\vec{S}$$

Оператор Лапласа.

Пусть $U(M)$ – *скалярное* поле, тогда оператор Лапласа ΔU определяется следующим образом:

$$\Delta U(M) = \operatorname{div} \operatorname{grad} U(M)$$

или в декартовых координатах:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Оператор Лапласа векторного поля: $\Delta \vec{A}(M) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(M) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(M)$

$$\boxed{\Delta = \nabla^2}$$

РОТОР И ЦИРКУЛЯЦИЯ

Ротор $\operatorname{rot}\ \mathbf{a}$ векторного поля $\mathbf{a}$ — есть вектор, проекция которого $\operatorname{rot}_{\mathbf{n}}\ \mathbf{a}$ на каждое направление **n** есть предел отношения циркуляции векторного поля по контуру *L*, являющемуся краем плоской площадки Δ*S*, перпендикулярной этому направлению, к величине этой площадки (площади), когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку :

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{n}}\ \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{dr}}{\Delta S}.$$

Направление обхода контура выбирается так, чтобы, если смотреть в направлении $\mathbf{n}$, контур *L* обходился по часовой стрелке

Циркуля́цией ве́кторного по́ля по данному замкнутому контуру Г называется криволинейный интеграл второго рода, взятый по **Г**. По определению

$$C = \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint\limits_{\Gamma} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

где $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ — векторное поле (или вектор-функция), определенное в некоторой области D, содержащей в себе контур **Г**, $d\mathbf{l} = \{dx, dy, dz\}$ — бесконечно малое приращение радиус-вектора $\mathbf{l}$ вдоль контура. Окружность на символе интеграла подчёркивает тот факт, что интегрирование производится по замкнутому контуру. Приведенное выше определение справедливо для трёхмерного случая, но оно, как и основные свойства, перечисленные ниже, прямо обобщается на произвольную размерность пространства.

РОТОР И ЦИРКУЛЯЦИЯ

Ротор векторного поля.

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{A}(M)$ называют следующую производную по объему поля в точке M:

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\limits_{S}[\vec{A},\mathrm{d}\vec{S}]}{V}$$

Обозначается:

$$\operatorname{rot}\vec{A} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial\vec{r}},\vec{A}\right] \equiv [\nabla,\vec{A}]$$

Теорема Стокса.

Циркуляция векторного поля $\vec{A}(M)$ по замкнутой кривой L равна потоку ротора этого поля через поверхность S, опирающуюся на кривую L:

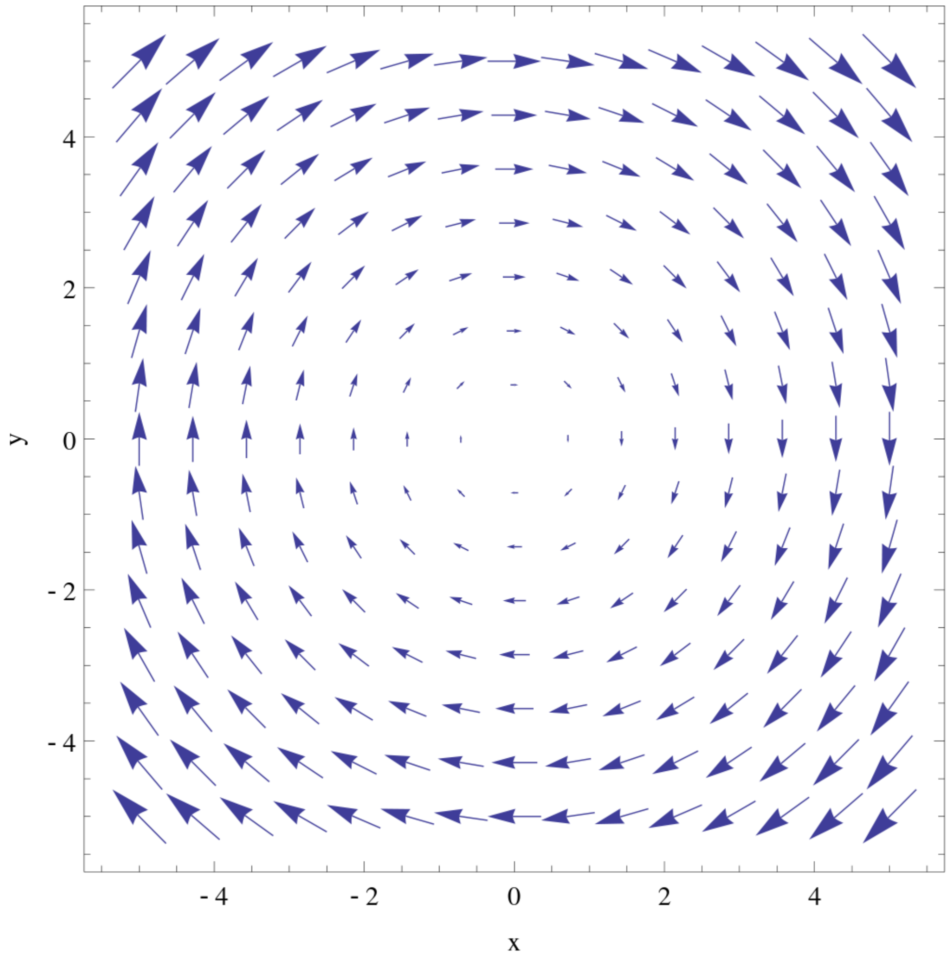
$$\oint\limits_{L}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{S}\operatorname{rot}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

Какой вектор первичен **A** или rot**A**?

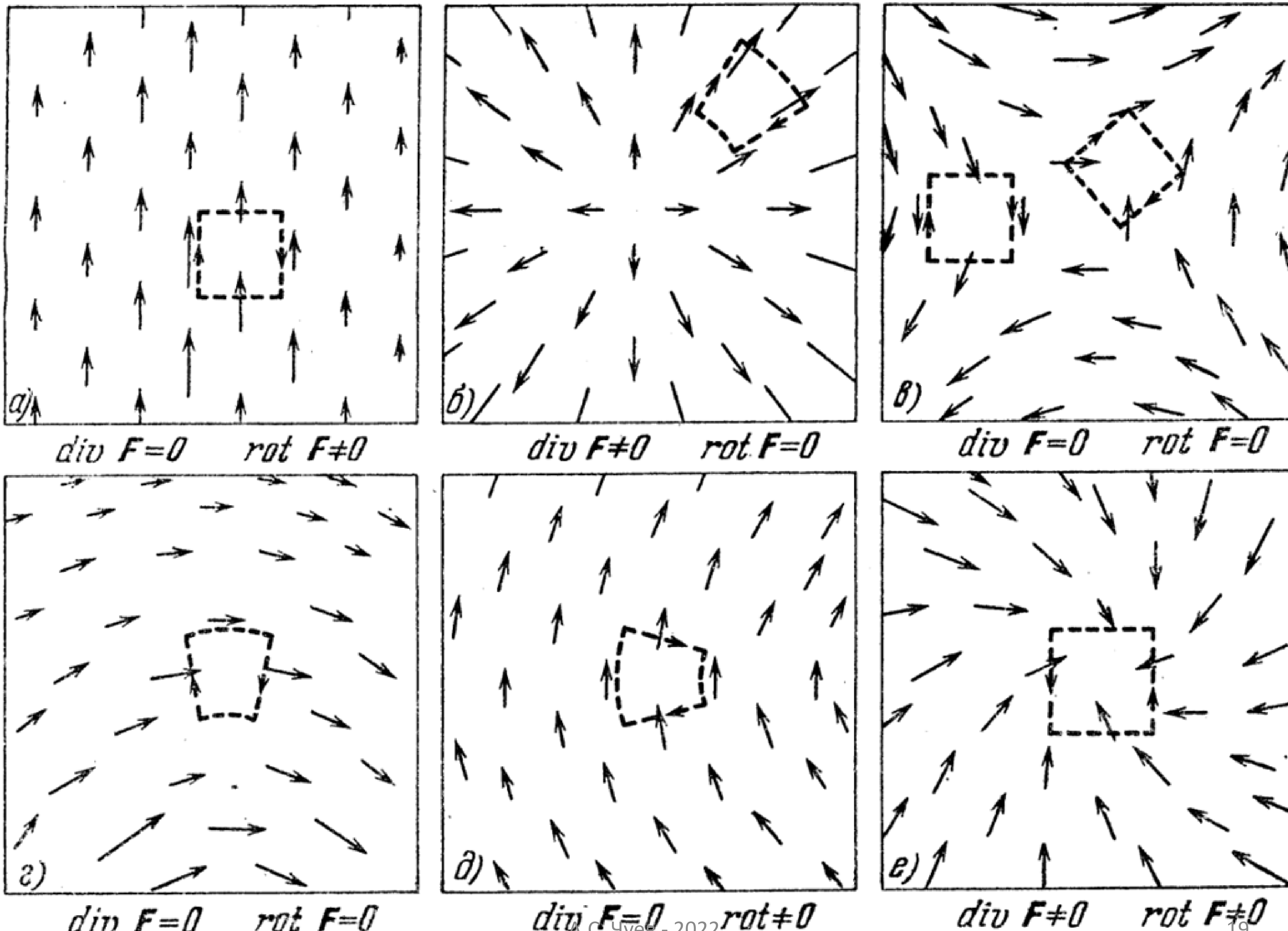
О понятии ротора. *Из википедии*

- Когда речь идет о векторном поле, являющемся полем скоростей некоторой среды, ротор этого векторного поля в заданной точке равен удвоенному вектору углового вращения элемента среды с центром в этой точке.
- Для векторного поля **v** скоростей движения точек вращающегося твёрдого тела, **rot v** одинаков всюду по объёму этого тела и равен (вектору) удвоенной угловой скорости вращения.

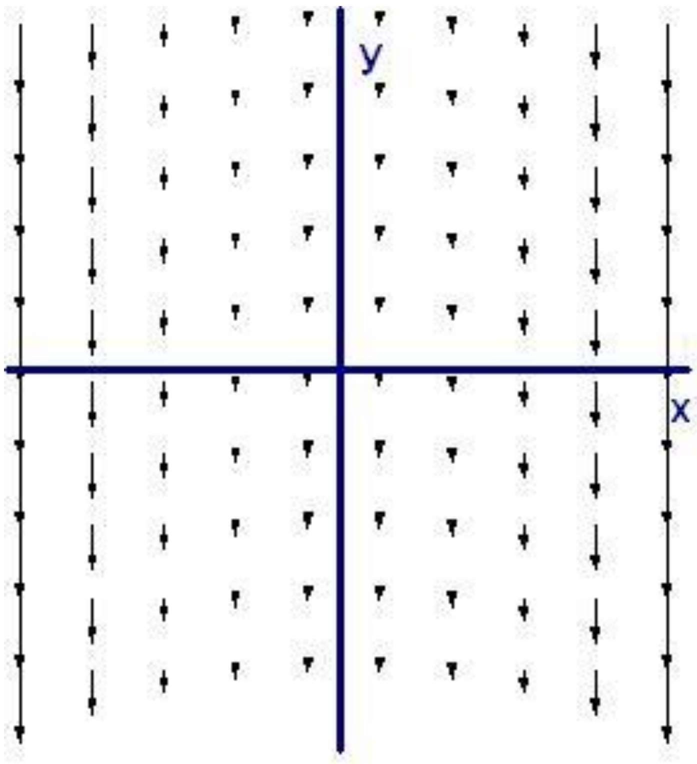
Равномерное вращение твёрдого тела. Ротор поля линейных скоростей во всех точках одинаков и равен удвоенной угловой скорости.

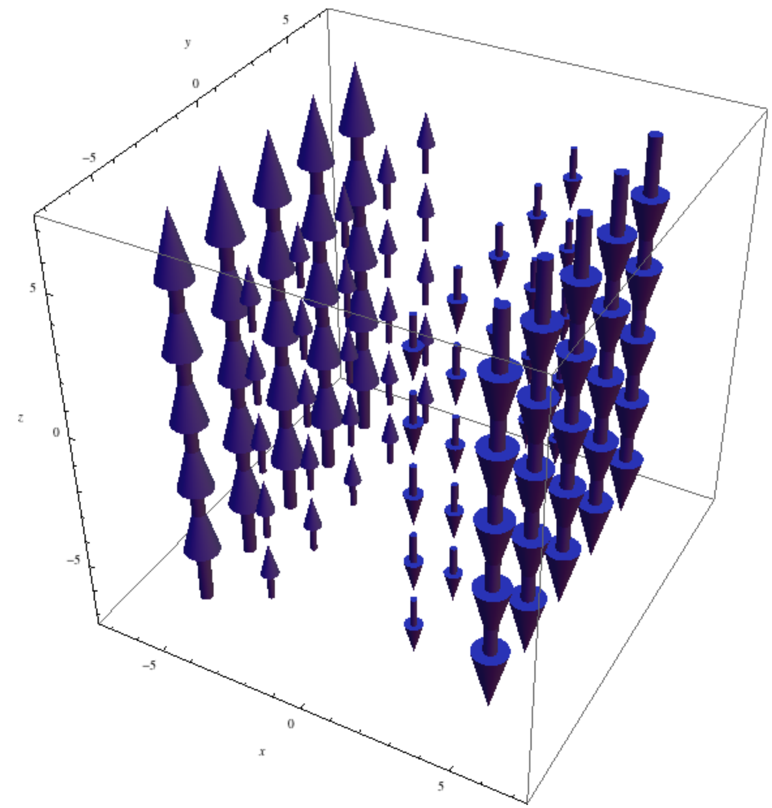


Значения дивергенции и ротора в выделенной области векторного поля



Ротор векторного поля $\boldsymbol{F}(x, y) = - x^2\boldsymbol{e}_y$

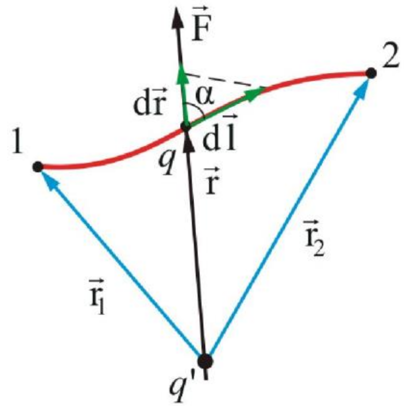




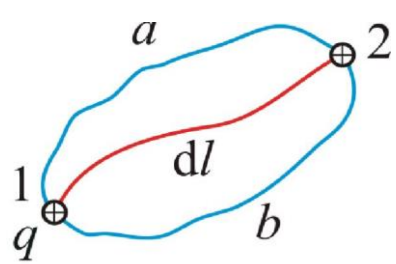
Векторное поле.

График ротора не зависит от *y* или *z* и направлен по -*z* для положительных *x* и в направлении +*z* для отрицательных *x*.

Работа в потенциальном поле по перемещению электрического заряда



Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения. Следовательно, силы поля ***консервативны, а само поле – потенциально.***



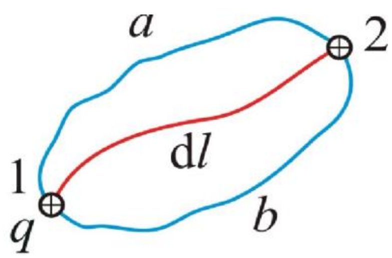
$$\vec{F} = q\vec{E},\qquad \boxed{dA = q\vec{E}\,d\vec{r}}$$

Потенциал можно определить соотношением:

$$d\varphi = -\vec{E}\,d\vec{r} = -\left(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz\right)$$

Циркуляция вектора Е

Интеграл от вектора по замкнутому контуру называется циркуляцией этого вектора.



$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Работа по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю

$$A = q\oint \vec{E} d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} - q\int_2^1 \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Напряженность в векторной форме:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right).}$$

Величина, стоящая в скобках, есть не что иное, как градиент потенциала φ (grad φ или $\nabla\varphi$).

В компактной форме записи

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi,}$$

∇ - оператор «набла» (оператор Гамильтона)

$$\boxed{\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.}$$

Это вектор!

Соотношение потенциала и напряженности

$$\boxed{-\,d\varphi = \mathbf{E}\,d\mathbf{l}.}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.}$$

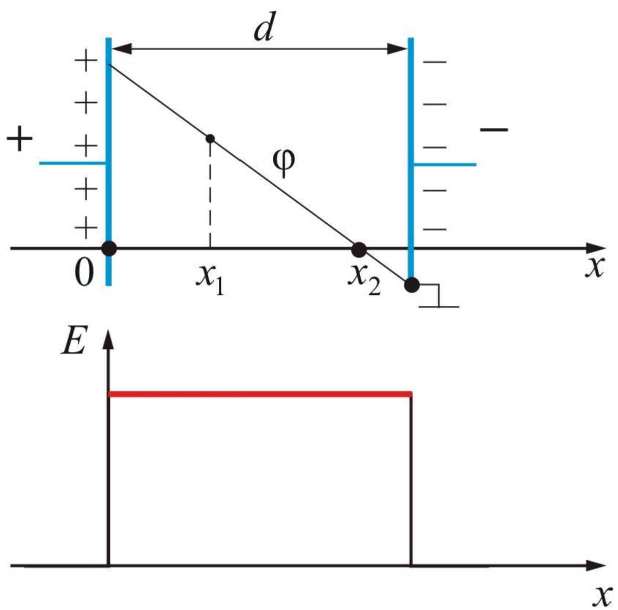
Потенциал поля системы зарядов.

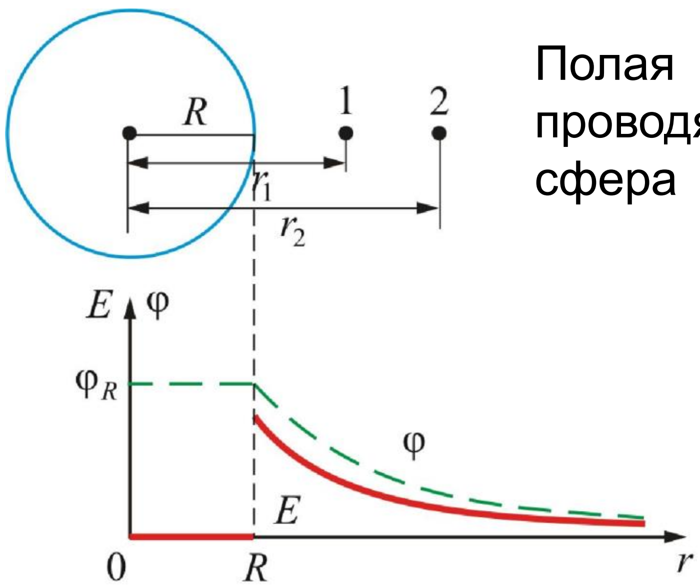
$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i},}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\,dV}{r},}$$

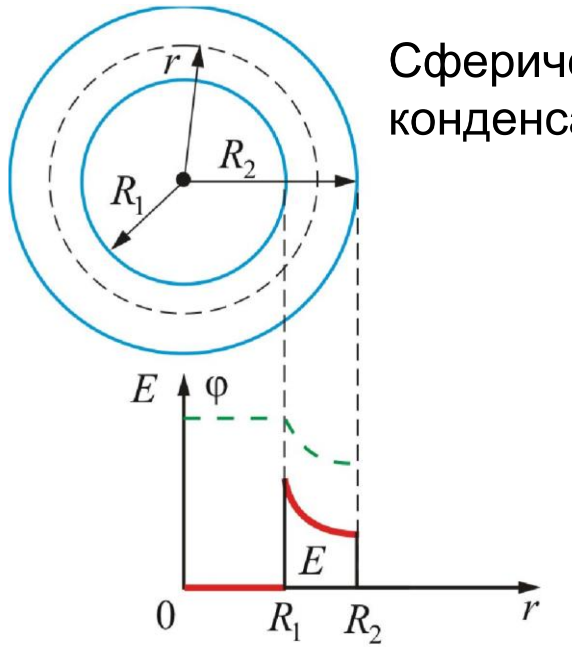
$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma\,dS}{r},}$$

Визуальные соотношения напряженности и потенциала

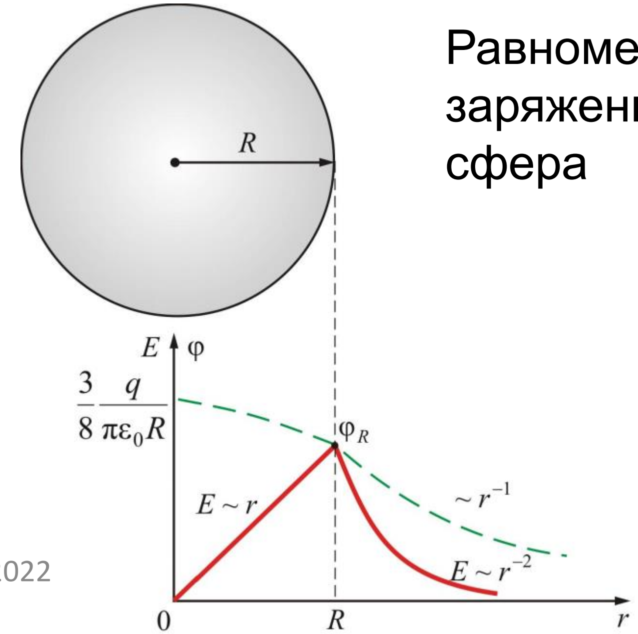




Полая проводящая сфера



Сферический конденсатор



Равномерно заряженная сфера

Из учебника Савельева

Отношение потока Φ_v к объему V, из которого он вытекает:

$$\Phi_v/V, \tag{11.11}$$

дает среднюю удельную мощность источников, заключенных в объеме V. В пределе при стремлении V к нулю, т. е. при стягивании объема V к точке P, выражение (11.11) даст удельную мощность источников в точке P, которую называют **дивергенцией** (или **расхождением**) вектора **v** (обозначается div **v**). Итак

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_v}{V}.$$

Аналогично определяется дивергенция любого вектора **a**:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathbf{a}\,d\mathbf{S}. \tag{11.12}$$

Интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности S, окружающей точку P [2]); V — объем, ограниченный этой поверхностью.

Другое определение дивергенции

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Остроградского — Гаусса. Зная дивергенцию вектора **a** в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую замкнутую поверхность конечных размеров. Сделаем это сначала для потока вектора **v** (потока жидкости). Произведение $\operatorname{div}\mathbf{v}$ на dV дает мощность источников жидкости, заключенных в объеме dV. Сумма таких произведений, т. е. $\int \operatorname{div}\mathbf{v}\cdot dV$, дает суммарную алгебраическую мощность источников, заключенных в объеме V, по которому осуществляется интегрирование. Вследствие несжимаемости жидкости суммарная мощность источников должна равняться потоку жидкости, вытекающему наружу через поверхность S, ограничивающую объем V. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\oint_S \mathbf{v}\,d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV.$$

Аналогичное соотношение выполняется для векторного поля любой природы:

$$\oint_S \mathbf{a}\,d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV. \qquad (11.15)$$

Это соотношение носит название **теоремы Остроградского — Гаусса**. Интеграл в левой части соотношения вычисляется по произвольной замкнутой поверхности S, интеграл в правой части — по объему V, ограниченному этой поверхностью.

Связь напряженности и потенциала

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k} \right)$$

Дивергенция вектора E

Общая формула для дивергенции

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \vec{A}}$$

$$\boxed{\Delta = \nabla^2}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi}$$

Оператор «набла»

$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

Оператор	Обозна-чение	На кого действует	Что получается	Запись	Пример	В декарт. координатах
градиент	$grad$	на скаляр (напр. φ)	вектор	$grad\varphi$ или $\nabla\varphi$	$\vec{\mathbf{E}} = -grad\varphi$	$\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$
дивергенция	div	на вектор (напр. $\vec{\mathbf{E}}$)	скаляр	$div\vec{\mathbf{E}}$ или $\nabla\cdot\vec{\mathbf{E}}$	$div\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$
ротор	rot	на вектор (напр. $\vec{\mathbf{E}}$)	вектор	$rot\vec{\mathbf{E}}$ или $\nabla\times\vec{\mathbf{E}}$	$rot\vec{\mathbf{E}} = 0$	$\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

Теорема Гаусса в дифференциальной форме (в вакууме). Уравнение Пуассона

$$q_{\text{внутр}} = \int \rho \, dV$$

$$\frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{V} = \frac{1}{V}\frac{q}{\varepsilon_0}$$

при $V \to 0$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Уравнение Пуассона $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Уравнение Пуассона в иной форме записи

$$\boxed{\Delta\varphi = \rho / \varepsilon_0}$$

Уравнение Лапласа:

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$

В потенциальном электрическом поле $\mathit{rot}\mathbf{E} = 0$

В однородном электрическом поле

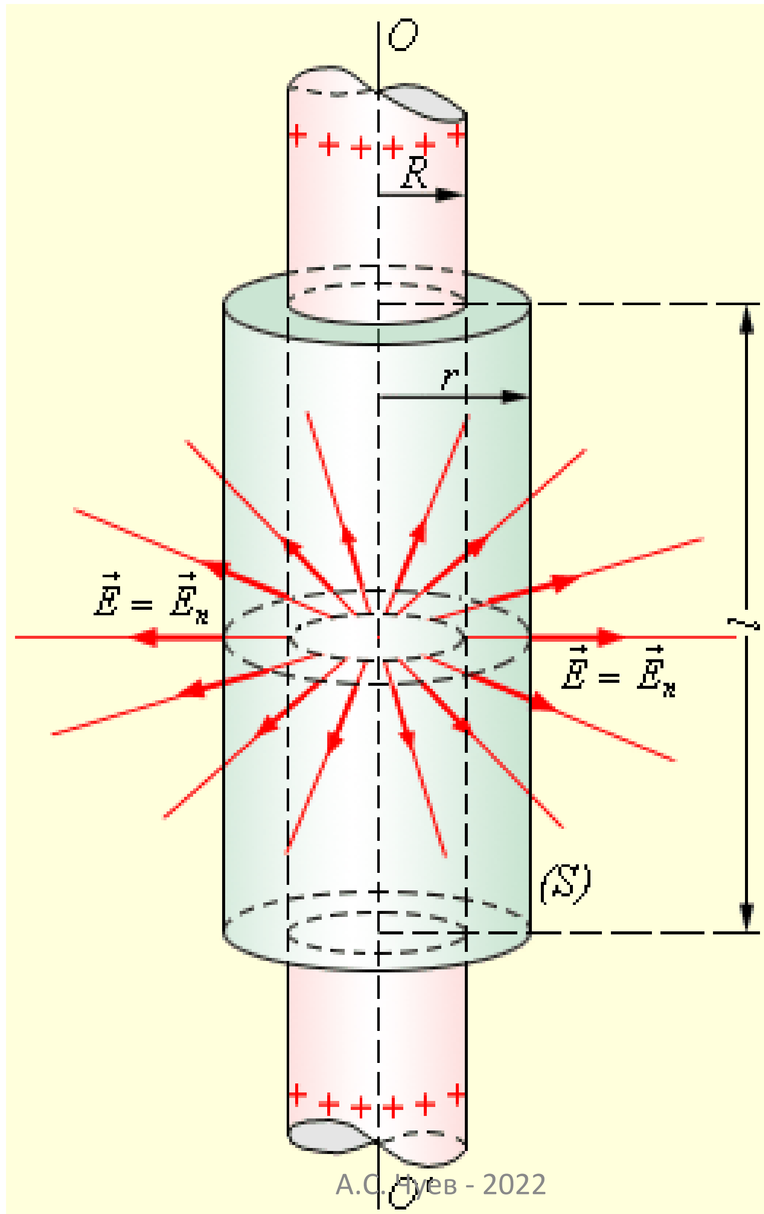
grad E = 0

$\mathit{div}\,\mathbf{E} = 0$

$\mathit{rot}\,\mathbf{E} = 0$

Примеры на теорему Гаусса

Вычисление поля однородно заряженного цилиндра. *OO'* – ось симметрии.



$$E_r 2\pi r \cdot h = \lambda h / \varepsilon_0$$

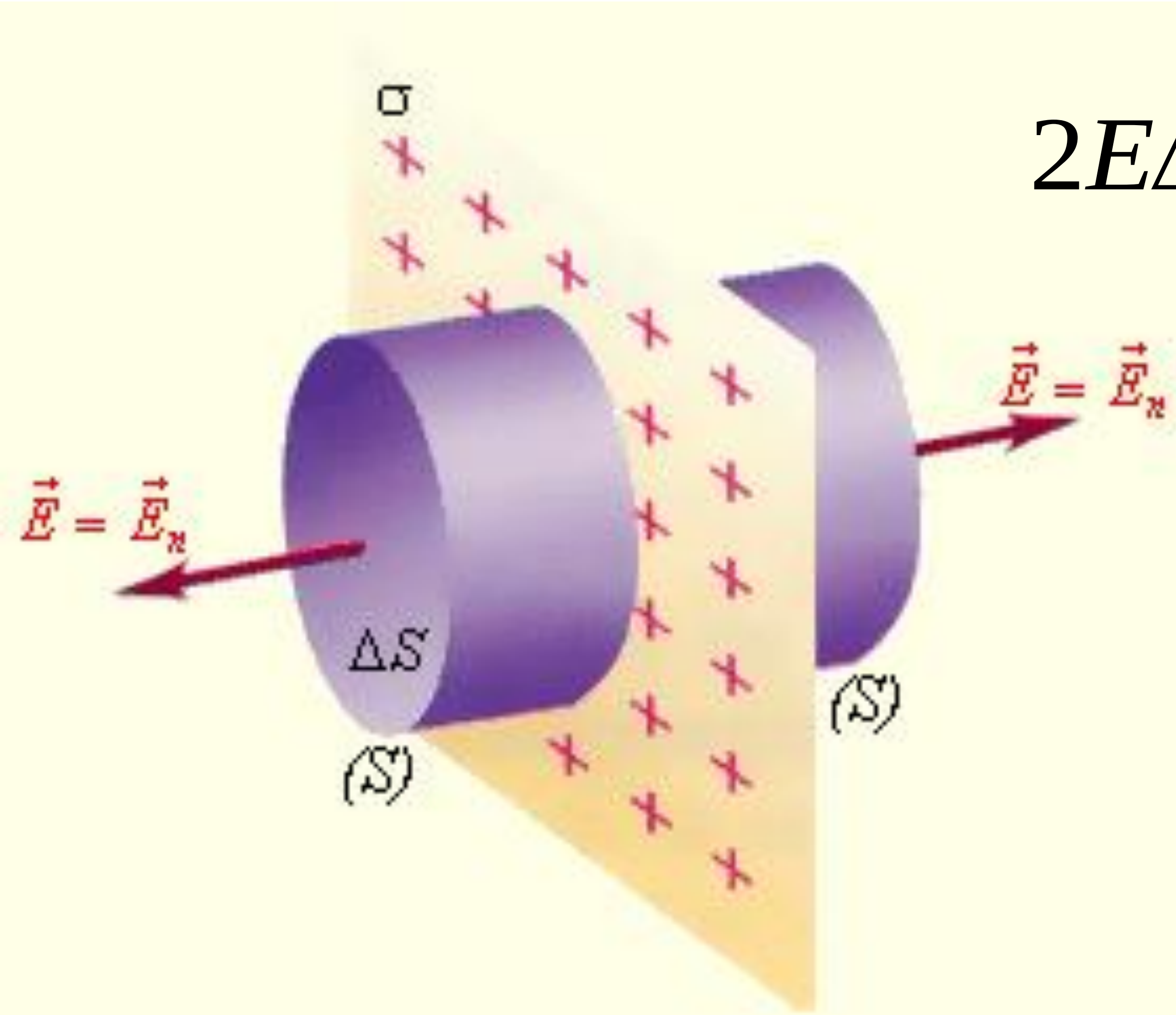
$$\boxed{E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}}$$

$$l = h$$

$$E = 0$$

при $r \langle R$

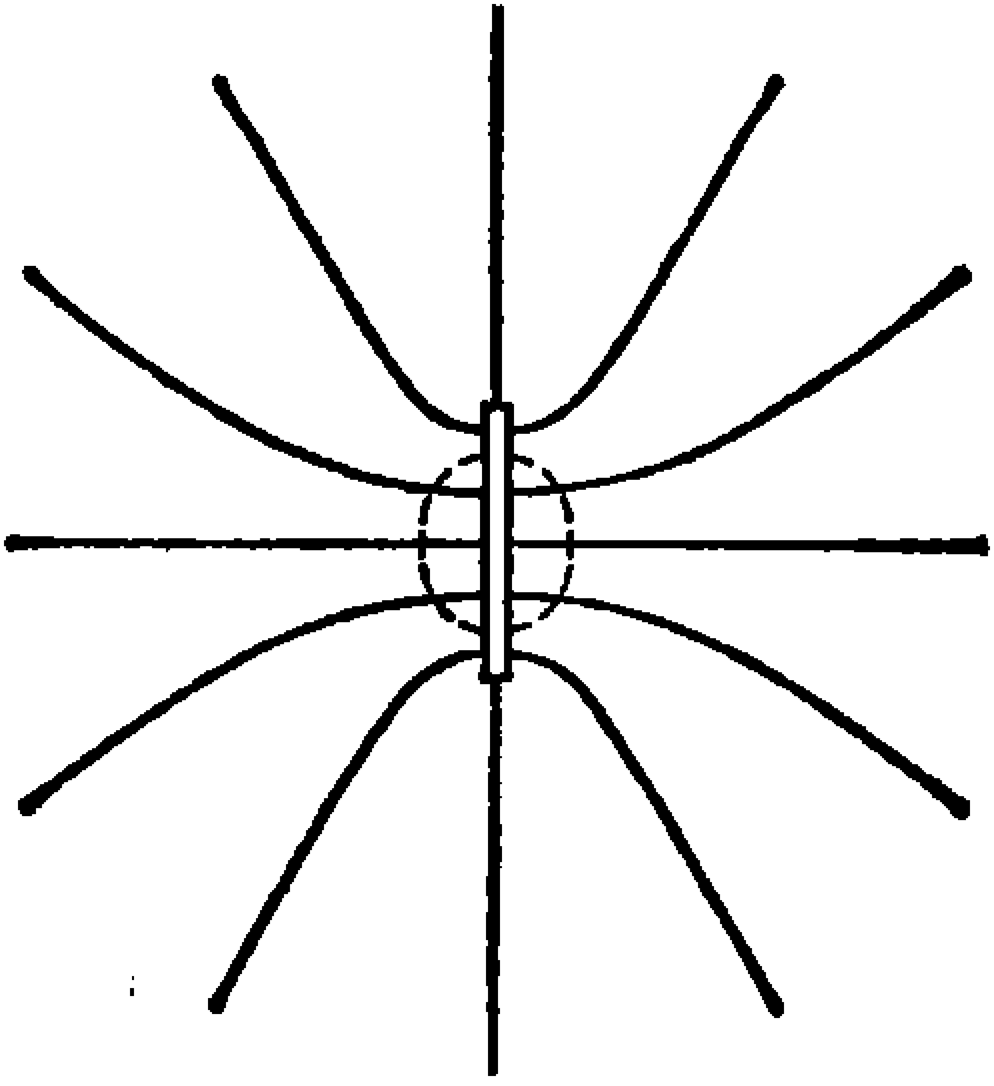
Поле равномерно заряженной плоскости. σ – поверхностная плотность заряда. *S* – замкнутая гауссова поверхность.



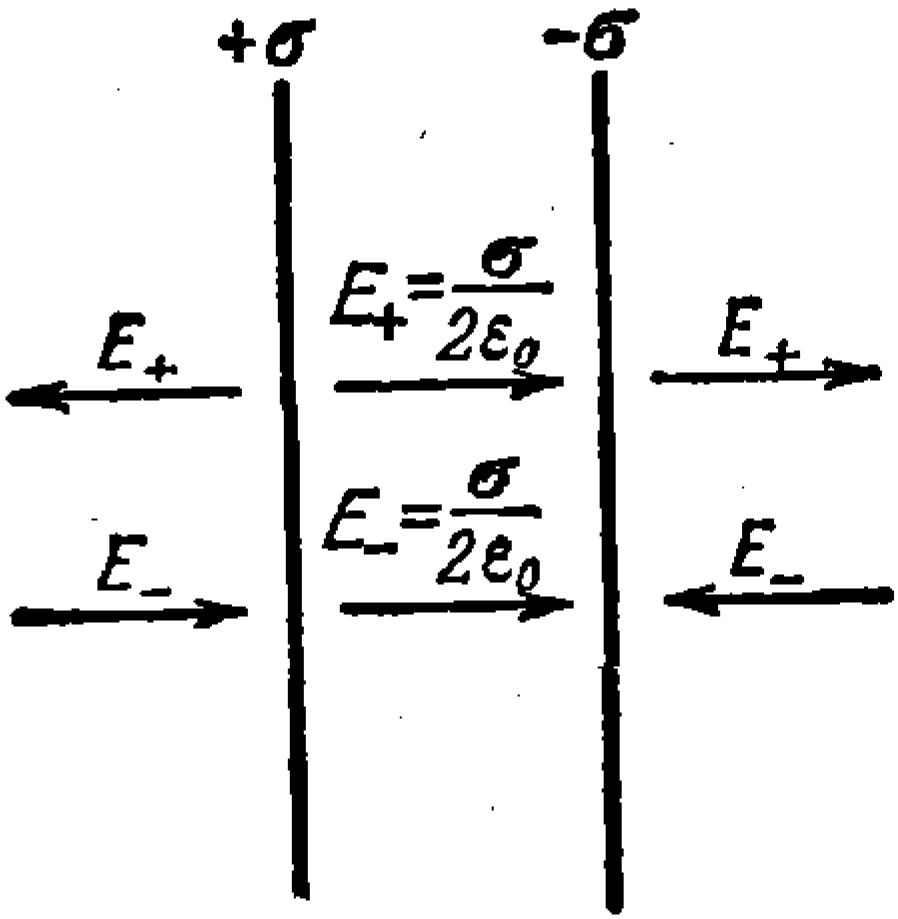
$$2E\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Поле заряженной пластины, ограниченной в размерах

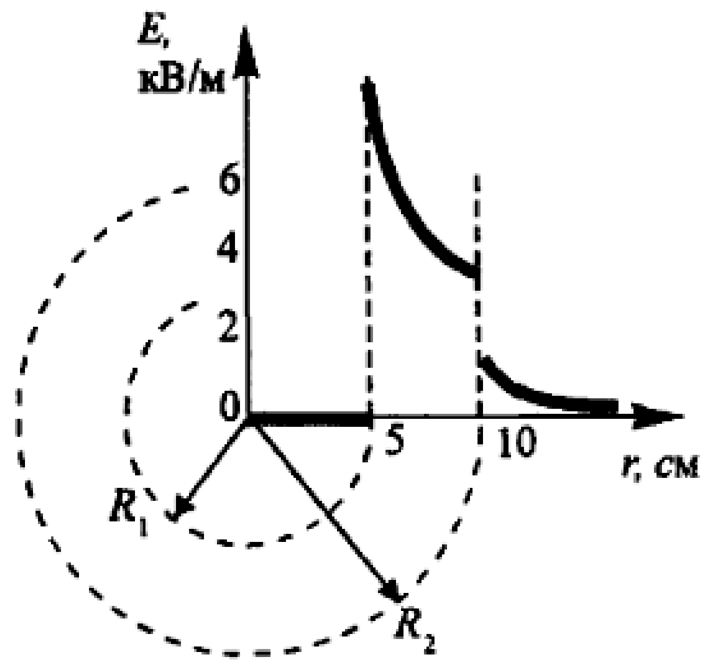


Поле двух пластин с противоположными зарядами



3.18 Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 8$ см. Заряды сфер соответственно равны $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -1$ нКл. Определите напряженность электростатического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстояниях: 1) $r_1 = 3$ см; 2) $r_2 = 6$ см; 3) $r_3 = 10$ см. Постройте график зависимости $E(r)$.

Дано	*Решение*
$R_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $R_2 = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м $Q_1 = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл $Q_2 = -1$ нКл $= -10^{-9}$ Кл $r_1 = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м $r_2 = 6$ см $= 6 \cdot 10^{-2}$ м $r_3 = 10$ см $= 0{,}1$ м E_1, E_2, E_3 — ? $E(r)$ — ?	$\oint_S E_n \, ds = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, $E_1 = 0$, $E_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$, $E_3 = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}$.



Ответ $E_1 = 0$, $E_2 = 5$ кВ/м, $E_3 = 0{,}9$ кВ/м.

Подробнее о циркуляция вектора напряженности

Полезная информация о циркуляции вектора (из учебника Савельева)

Циркуляция. Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию — контур Г. Предположим, что каким-то способом мы заморозим мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением очень тонкого замкнутого канала постоянного сечения, включающего в себя контур Г (рис. 11.8). В зависимости от характера поля вектора скорости жидкость в образовавшемся канале окажется либо неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений. В качестве меры этого движения возьмем величину, равную произведению скорости жидкости в канале на длину контура l. Эту величину назвали **циркуляцией** вектора **v** по контуру Г. Итак,

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = vl$$

(поскольку канал по предположению имеет постоянное сечение, модуль скорости $v=\text{const}$).

В момент затвердевания стенок у каждой из частиц жидкости в канале будет погашена составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, и останется лишь составляющая скорости, касательная к контуру, т. е. v_l. С этой составляющей связан импульс $d\mathbf{p}_l$, модуль которого для частицы жидкости, заключенной в отрезке канала длины dl, имеет величину $\rho\sigma v_l\, dl$ (ρ — плотность жидкости, σ — площадь поперечного сечения канала). Так как жидкость идеальна, действие стенок может изменить лишь направление вектора $d\mathbf{p}_l$, но не его величину. Взаимодействие между частицами жидкости вызовет такое перераспределение импульса между ними, которое выровняет скорости всех частиц. При этом алгебраическая сумма тангенциальных составляющих импульсов не может измениться: импульс, приобретаемый одной из взаимодействующих частиц, равен импульсу, теряемому второй частицей. Это означает, что

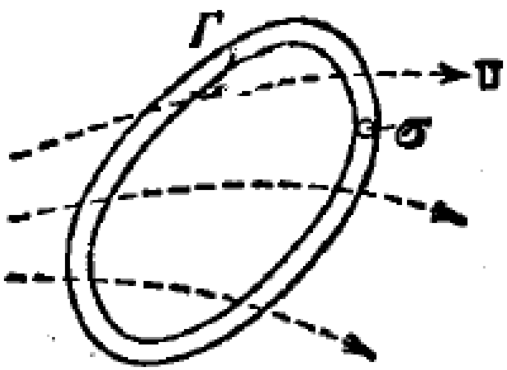


Рис. 11.8.

$$\rho\sigma v l = \oint_{\Gamma} \rho\sigma v_l\, dl,$$

где v — скорость циркуляции, v_l — касательная составляющая скорости жидкости в объеме $\sigma\, dl$ в момент времени, предшествующий затвердеванию стенок канала [1]). Сократив на $\rho\sigma$, получим, что

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = vl = \oint_{\Gamma} v_l\, dl.$$

Аналогично определяется циркуляция любого вектора $\mathbf{a}$ по произвольному замкнутому контуру Γ:

$$\text{циркуляция } \mathbf{a} \text{ по } \Gamma = \oint_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} a_l\, dl. \qquad (11.16)$$

Может показаться, что для отличия циркуляции от нуля векторные линии должны быть замкнутыми или хотя бы как-то изогнутыми в направлении обхода по контуру. Легко убедиться в ошибочности такого предположения. Рассмотрим ламинарное течение жидкости в реке. Скорость жидкости непосредственно у дна равна нулю и возрастает при приближении к поверхности воды (рис. 11.9). Линии тока (линии вектора $\mathbf{v}$) прямолинейны. Несмотря на это, циркуляция вектора $\mathbf{v}$ по изображенному пунктиром контуру, очевидно, отлична от нуля. Вместе с тем в поле с изогнутыми линиями циркуляция может оказаться равной нулю.

Циркуляция обладает свойством аддитивности. Это означает, что сумма циркуляций по контурам Γ_1 и Γ_2, ограничивающим смежные поверхности S_1 и S_2 (рис. 11.10), равна циркуляции по контуру Γ, ограничивающему поверхность S, являющуюся суммой поверхностей S_1 и S_2. Действительно, циркуляция C_1 по контуру,

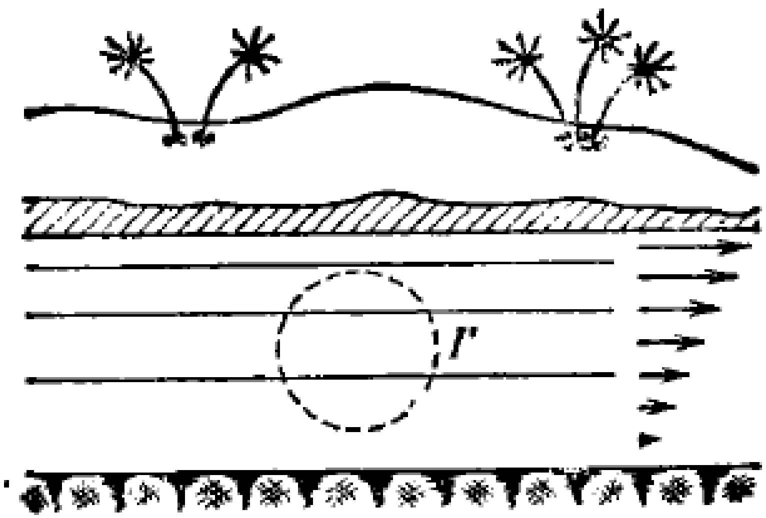


Рис. 11.9.

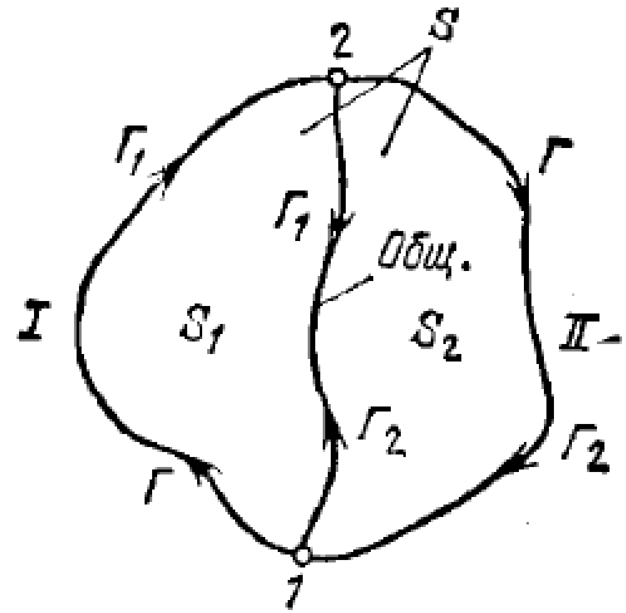


Рис. 11.10.

ограничивающему поверхность S_1, может быть представлена как сумма интегралов:

$$C_1 = \oint\limits_{\Gamma_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{\substack{1\\(\mathrm{I})}}^{2} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{\substack{2\\(\text{Общ.})}}^{1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \qquad (11.17)$$

$$C = \sum \Delta C_i. \tag{11.21}$$

Ротор. Аддитивность циркуляции позволяет ввести понятие удельной циркуляции, т. е. рассматривать отношение циркуляции C к величине поверхности S, «обтекаемой» циркуляцией. При конечных размерах поверхности S отношение C/S дает среднее значение удельной циркуляции. Это значение характеризует свойства поля, усредненные по поверхности S. Чтобы получить характеристику поля в точке P, нужно уменьшать размеры поверхности, стягивая ее в точку P. При этом отношение C/S стремится к некоторому пределу, который характеризует свойства поля в точке P.

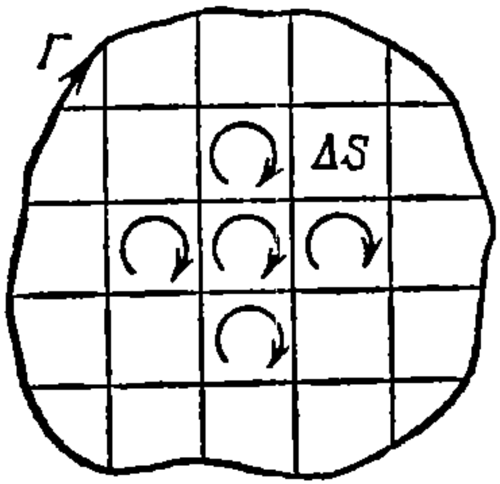
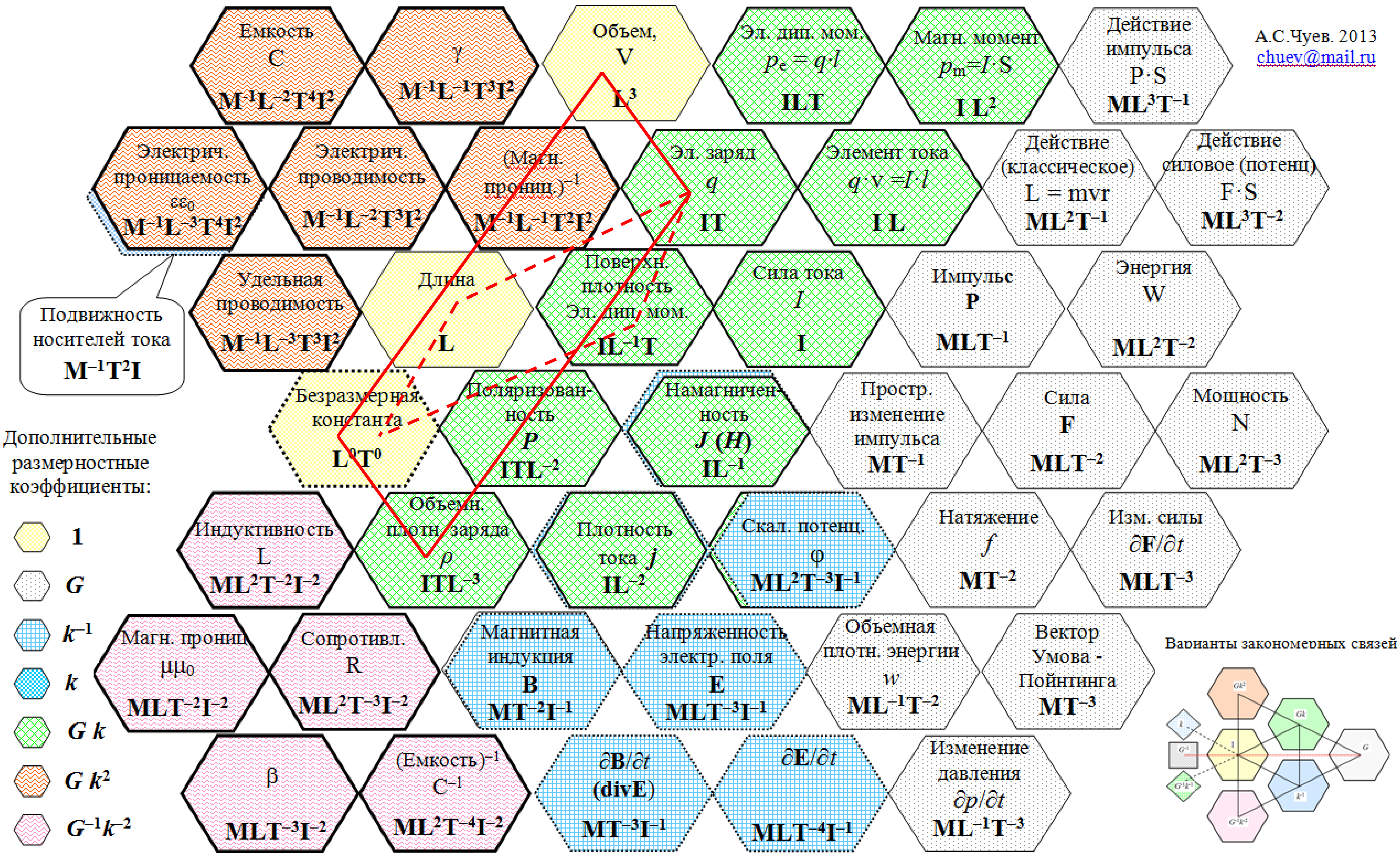


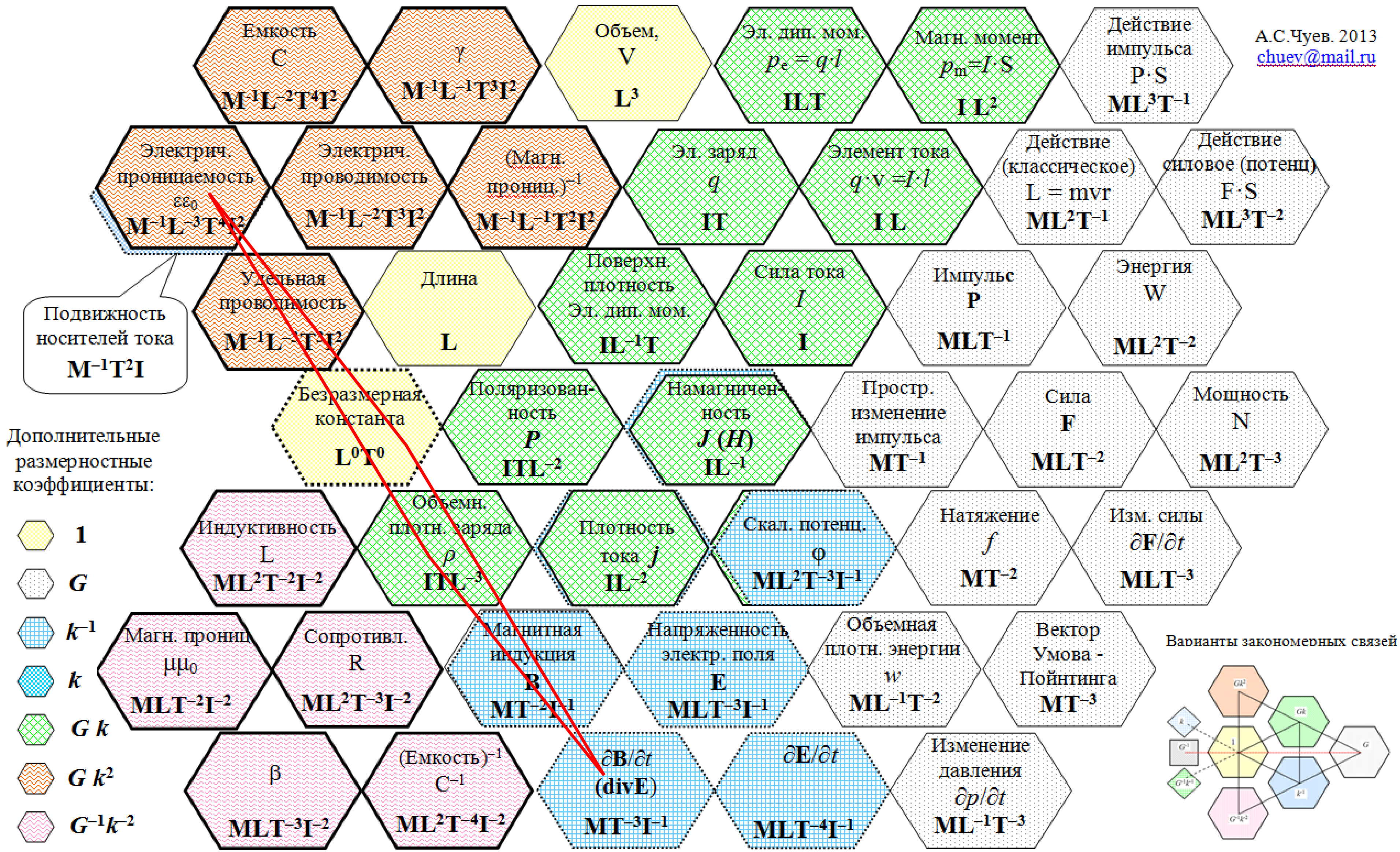
Рис. 11.11.

Примеры поиска закономерных соотношений ФВ

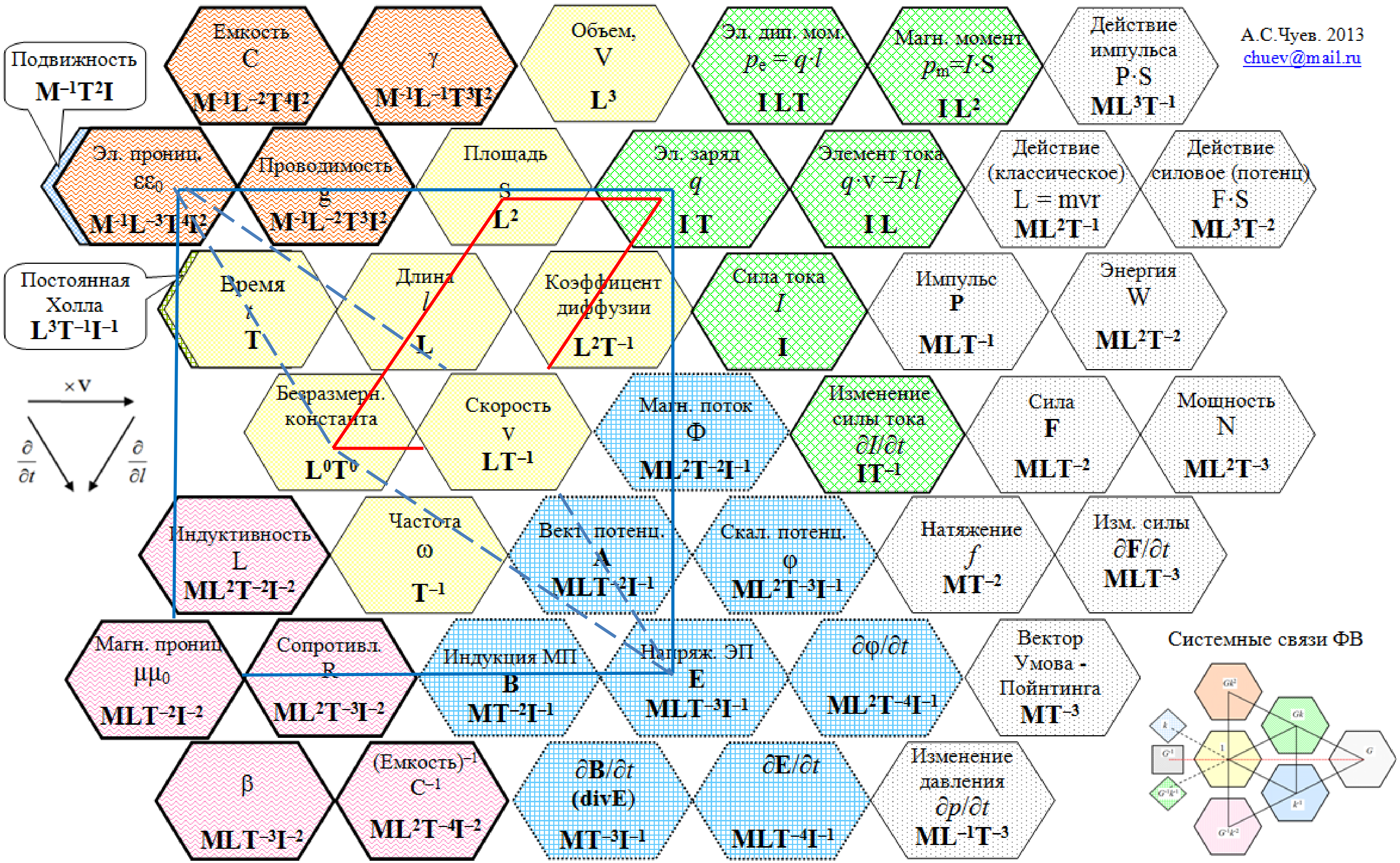
Система электромагнитных величин и их взаимосвязей



Система электромагнитных величин и их взаимосвязей

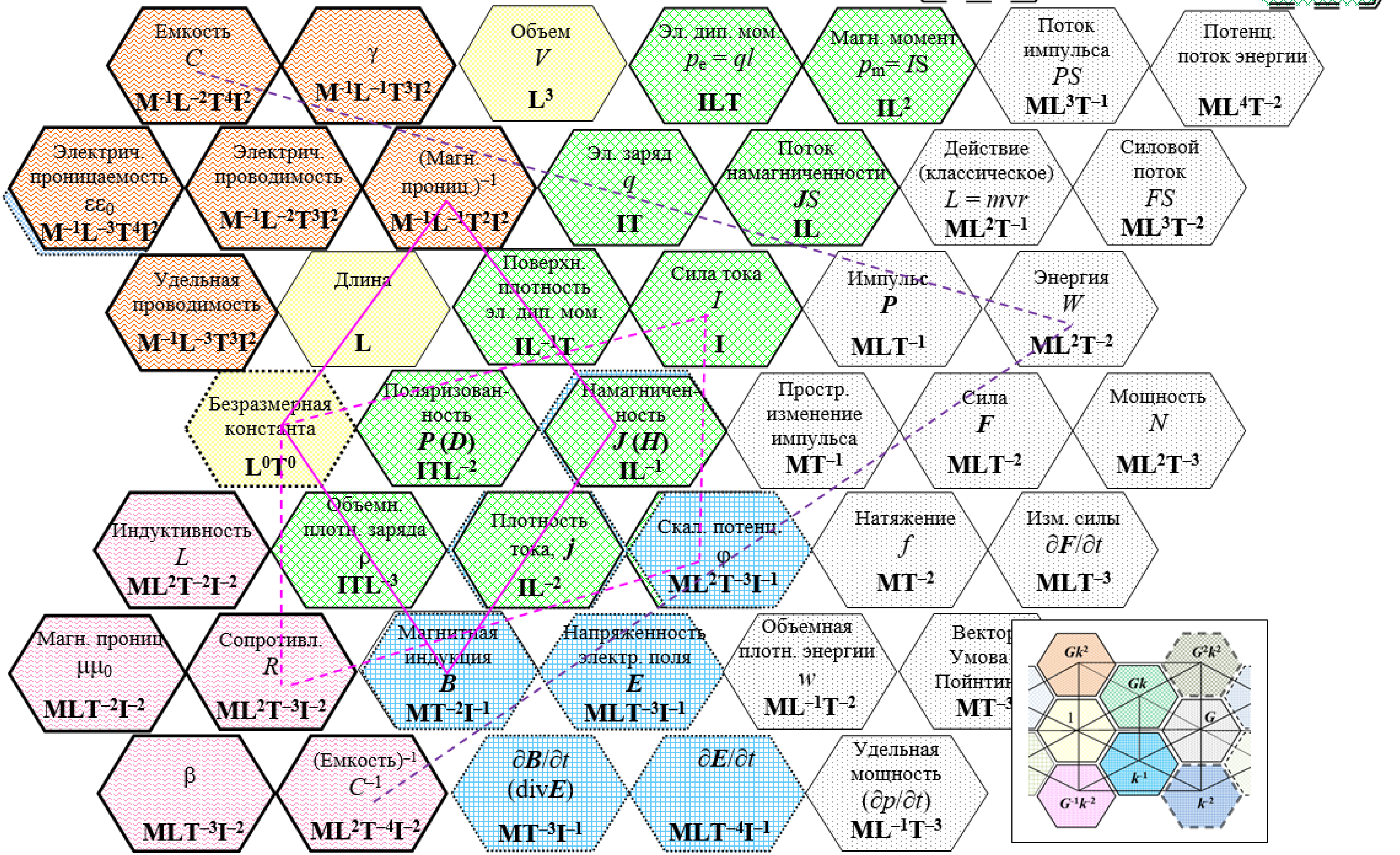


СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ



$$\boxed{\varepsilon_0 E = q/S = \sigma}$$

Электромагнитные величины
в системе ФВиЗ



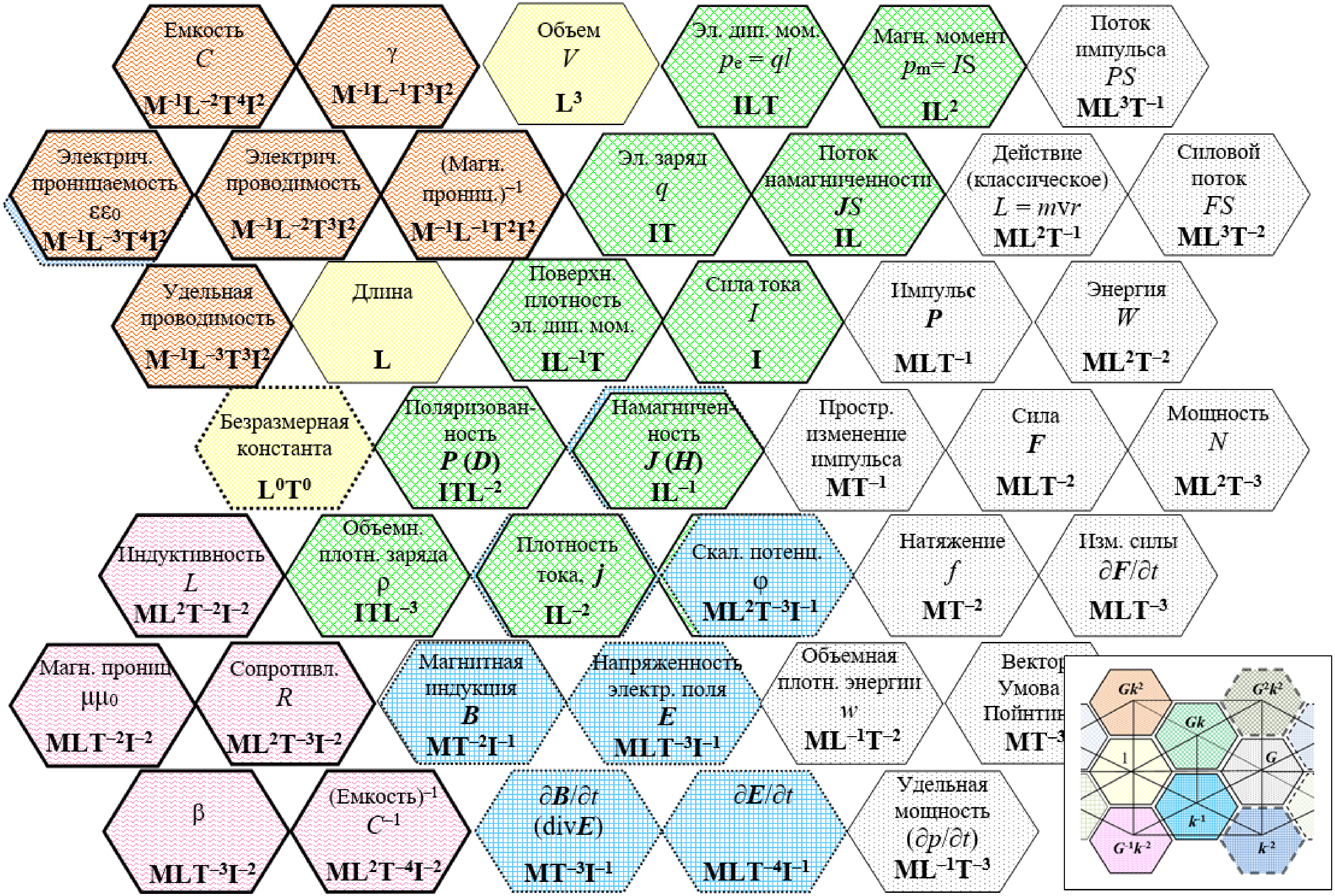
Размерностные связи основных механических ФВ с зарядом и основными кинематическими величинами

	$F = ma$	$P = m\text{v}$	$W = Fl$	$N = F\text{v}$	$\text{L}_{мех} = m\text{v}r$	$\Pi = FS = \text{L}_{мех}\,c$
q	$\frac{F}{q} = E$	$\frac{P}{q} = A$	$\frac{W}{q} = \varphi$	$\frac{N}{q} = \frac{\varphi}{t} = Ec$	$\frac{\text{L}}{q} = \Phi$	$\frac{\Pi}{q} = \Delta\varphi l$
$q\text{v}$	$\frac{F}{q\text{v}} = B$	$\frac{P}{q\text{v}} = \frac{A}{c}$	$\frac{W}{q\text{v}} = A$	$\frac{N}{q\text{v}} = E$	$\frac{\text{L}}{q\text{v}} = \frac{\Phi}{\text{c}}$	$\frac{\Pi}{q\text{v}} = \Phi$
qa	$\frac{F}{qa} = \frac{E}{a} = \frac{A}{c} = \frac{B}{\omega}$	$\frac{P}{qa} = \frac{A}{q} = \frac{\Phi}{\text{c}^2}$	$\frac{W}{qa} = \frac{\Phi}{c}$	$\frac{N}{qa} = A$	$\frac{\text{L}}{qa} = \frac{\Phi}{a}$	$\frac{\Pi}{qa} = \frac{\Phi}{\omega} = \frac{A}{R}$
ql	$\frac{F}{ql} = \Delta E = B\omega$	$\frac{P}{ql} = \frac{A}{l} = B$	$\frac{W}{ql} = E$	$\frac{N}{ql} = \frac{dE}{dt}$	$\frac{\text{L}}{ql} = A = rot\Phi$	$\frac{\Pi}{ql} = \varphi$
$q\omega$	$\frac{F}{q\omega} = A$	$\frac{P}{q\omega} = \frac{A}{\omega} = \frac{\Phi}{\text{c}} = \frac{B}{\xi}$	$\frac{W}{q\omega} = \Phi$	$\frac{N}{q\omega} = \varphi$	$\frac{\text{L}}{q\omega} = \frac{\Phi}{\omega} = \frac{A}{\xi}$	$\frac{\Pi}{q\omega} = AS = \Phi l$

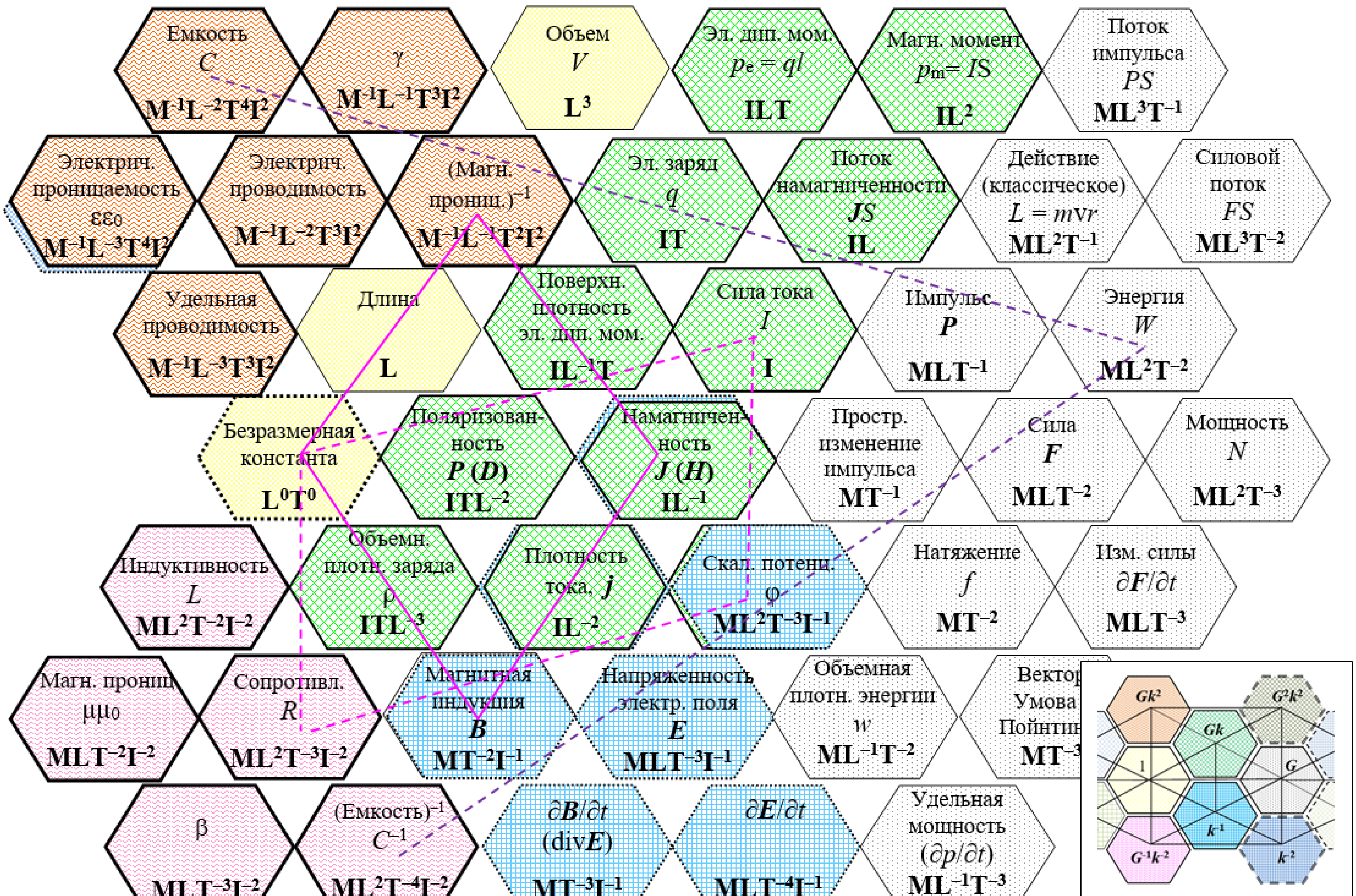
Размерностные связи полевых электромагнитных ФВ с зарядом и основными кинематическими величинами

	φ	A	E	B	Φ	Примечание
q	$q\varphi = W$	$qA = P$	$qE = F$	$qB = \frac{\text{L}_{мех}}{S}$	$q\Phi = nh$	
$q\text{v}$	$q\varphi = W$	$q\text{v}A = W$	$q\text{v}E = N$	$q\text{v}B = F$	$q\text{v}\Phi = FS = nhc$	
qa	$q\varphi = W$	$qaA = N$	$qE = F$	$qaB = F\omega$	$q\Phi = nh$	
ql	$ql\Delta\varphi = FS$	$qlA = nh$	$qlE = W$	$qlB = P$	$ql\Phi = PS$	
$q\omega$	$q\omega\varphi = N$	$q\omega A = F$	$qE = F$	$q\omega B = f$	$q\omega\Phi = W$	

Электромагнитные величины в системе ФВиЗ



Электромагнитные величины в системе ФВиЗ



Конец лекции 2