中国馒头问题

在几十年前的中国偏远乡村地区，每当春节等重要的节日期间，人们会互送礼物以表祝福。在经济条件受限的情况下，人们互送的礼物可能是馒头、煎饼等自产的且每家每户都有需求的物品。有时，收到礼物者要给送礼物者回礼，且回礼的礼物不能与收到的礼物相同。

如果把这种送礼问题当作网络中的一种信息传播问题，把问题中的户（人）视为网络中的节点，人们之间的送礼关系视为网络中的弧，送出的礼物视为网络中传播的信息，送礼和回礼行为视为发出信息的任务。问题目标是在一定的网络中，在保证各节点完成信息发送任务的前提下，选择最少的信息源点，使信息遍布图中的每一个节点。

这个该问题与常见的经典图论问题中的中国邮递员问题、旅行商问题和航线规划问题都有着本质上的区别。

中国邮递员问题是指邮递员从邮局出发送信，要求对辖区内每条街都至少通过一次，再回到邮局。在此条件下，选择一条最优路线，每邮递员此对送信出行经过的总路程最短。可见中国邮递员问题是在寻找一条最优回路。如果问题街道构成的图是欧拉图，那么欧拉回路就是最优回路。如果问题中的图不是欧拉图，则需要在图中适当添加一些重复边构造欧拉图。用图论的语言可描述为：在一个赋权图G中找一条回路C，使C包含G中每一条边最少一次，且C的长度为最短。

旅行商问题是指假设有一个商人从某个城市出发，要拜访若干个城市且只能拜访一次之后，再回到出发的城市。他需要选择一条最优的路线，使他经历的路程最短。旅行商问题也是在寻找一条最优的回路。用图论的语言可描述为：在一个赋权无向图G中，找一个权值最小的哈密而顿回路H(通过图G的每个节点一次，且仅一次的回路)。

一般的航线规划问题是指给定若干个城市以及城市间直通航线的信息，指定两个城市作为起点终点（通常是分别位于图中两端的点），要求找出一条从起点到终点间满足条件的航行路线，常见的条件和目标是：（1）从起到点终点经过指定的某几个城市，使航线最短里程最短。（2）在满足城市间直通航线条件的情况下，从起点出发到经过若干城市到达终点；再从终点出发，经过另一些城市到达起点。在此航线中，除起点城市外，其他城市最多只能访问一次，要求航线经过的城市数量最多。问题（1）实质是在求满足条件的一条最短路。问题（2）的实质是在求图中两条不同的初等链（没有重复的点），使两条链的总长度最长（链上的边数最多）。

考虑以下两种情形。

（1）为了简化问题描述，暂时不考虑回礼的情况，则可以把该问题看作一个非赋权有向图问题。如图1所示，图G1（V,A）中每段弧的起点有发出信息的任务，问题的目标是找出最少的节点作为信息源点，使信息遍布图中所有的节点。



**图 1**

求解思路：若建立邻接矩阵，描述节点间的关系。图1的邻接矩阵为:



矩阵中元素（）取值规则为：



第i行元素的和为节点Vi的度，即发出信息的任务数；

第i列元素的和为节点Vi接收信息任务数。

根据邻接矩阵建立可达矩阵



从邻接矩阵来看，基本的优化原则是选择度最大的点作为信息源点。若某节点的发出信息任务数不为零，而接收信息数为零，则该节点必须作为信息源点，如图1中节点V15。

从可达矩阵来看，基本的优化原则是比较行元素和，选择其中和最大的行，作为信息源点。

（2）若考虑回礼的情况，则图中有些边为重复边。

如图2中，图G2（V,A）中V3和V15之间，V8和V9之间有重复边。

尝试建立关联矩阵，好像表达效果并不好。

[关联矩阵.xlsx](file:///D:\2020年10月由笔记本电脑向新台式机传数据\D\工作文档\科研\CSBP\关联矩阵.xlsx)

仍然采用邻接矩阵和可达矩阵，见以下链接。

[邻接矩阵2.xlsx](file:///D:\wechat%20storage\WeChat%20Files\wxid_kecdph3wior852\FileStorage\File\2024-12\邻接矩阵2.xlsx)

[可达矩阵2.xlsx](file:///D:\wechat%20storage\WeChat%20Files\wxid_kecdph3wior852\FileStorage\File\2024-12\可达矩阵2.xlsx)



图 2