## Character tables of $S_8$ and $A_8$

2022年1月31日 1117137 Kota Watanabe

## 0. 指標表

指標表を先に載せておく.

| 1日伝化                     | 22<br>22  | - 単X で C ·<br>  40320                  | かく.<br>1440                    | 360   | 192                           | 96                        | 36  | 30  | 96                                     | 36 1                 | 6            | 12                 |   |  |   |                          |
|--------------------------|---|--|--------------------------------|---|-------------------------------|---------------------------|---|---|--|----------------------|--------------|--------------------|---|--|---|--------------------------|
| $S_8$                    | C   | (1)                                    | (2)                            |   | (2,2)                         | (4)                       | (3,2)   |   |  | (4, 3, 3)            |              | (6)                |   |  |   |                          |
| 40320                    | #C  | 1                                      | 28                             | 112   | 210                           | 420                       | 1120  | 1344  |  | 1120 25              |              | 360                |   |  |   |                          |
| 0                        | $\chi_S$  | 28                                     | 16                             | 10  | 8                             | 6                         | 4   | 3   | 4                                      | 1 2                  | 2            | 1                  |   |  |   |                          |
| 1                        | 1   | 1                                      | 1                              | 1   | 1                             | 1                         | 1   | 1   | 1                                      |                      |              | 1                  |   |  |   |                          |
| 2                        | $\operatorname{sgn}$  | 1                                      | -1                             | 1   | 1                             | -1                        | -1  | 1   | -1                                     |                      |              | -1                 |   |  |   |                          |
| 3                        | $\chi_3$  | 7                                      | 5_                             | 4   | 3                             | 3                         | 2   | 2   | 1                                      |                      |              | 1                  |   |  |   |                          |
| 4                        | $\chi_4$  | 7                                      | -5                             | 4   | 3                             | -3                        | -2  | 2   | -1                                     |                      |              | -1                 |   |  |   |                          |
| 5                        | $\chi_5$  | 21                                     | 9                              | 6   | 1                             | 3                         | 0   | 1   | -3                                     |                      |              | 0                  |   |  |   |                          |
| 6                        | $\chi_6$  | 21                                     | -9                             | 6   | 1                             | -3                        | 0   | 1   | 3                                      |                      |              | 0                  |   |  |   |                          |
| 7<br>8                   | $\chi_7$  | 20<br>20                               | $10 \\ -10$                    | 5<br>5  | $\frac{4}{4}$                 | $\frac{2}{-2}$            | 1<br>-1   | 0<br>0  | $\begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array}$ |                      |              | -1<br>1            |   |  |   |                          |
| 9                        | $\chi_8$  | 14                                     | -10                            | -1  | 2                             | $-2 \\ -2$                | $\frac{-1}{1}$  | -1  | $\frac{-2}{0}$                         |                      |              | 0                  |   |  |   |                          |
| 10                       | $\chi_9$  | 14                                     | -4                             | -1  | $\frac{2}{2}$                 | $\frac{-z}{2}$            | -1  | -1  | 0                                      |                      |              | 0                  |   |  |   |                          |
| 11                       | $\chi_{10}$ $\chi_{11}$   | 28                                     | 10                             | $\frac{-1}{1}$  | $\frac{2}{4}$                 | -2                        | 1   | $-1 \\ -2$  | 2                                      |                      |              | -1                 |   |  |   |                          |
| 12                       | $\chi_{12}$   | 28                                     | -10                            | 1   | 4                             | 2                         | -1  | -2  | -2                                     |                      |              | 1                  |   |  |   |                          |
| 13                       | $\chi_{13}$   | 35                                     | 5                              | 5   | -5                            | 1                         | -1  | 0   | -3                                     |                      |              | 0                  |   |  |   |                          |
| 14                       | $\chi_{14}$   | 35                                     | -5                             | 5   | -5                            | -1                        | 1   | 0   | 3                                      | 2 -                  | -1           | 0                  |   |  |   |                          |
| 15                       | $\chi_{15}$   | 42                                     | 0                              | -6  | 2                             | 0                         | 0   | 2   | 0                                      | 0 -                  | -2           | 0                  |   |  |   |                          |
| 16                       | $\chi_{16}$   | 56                                     | 4                              | -4  | 0                             | 0                         | -2  | 1   | 4                                      | -1 (                 |              | 1                  |   |  |   |                          |
| 17                       | $\chi_{17}$   | 56                                     | -4                             | -4  | 0                             | 0                         | 2   | 1   | -4                                     |                      |              | -1                 |   |  |   |                          |
| 18                       | $\chi_{18}$   | 64                                     | 16                             | 4   | 0                             | 0                         | -2  | -1  | 0                                      |                      |              | 0                  |   |  |   |                          |
| 19                       | $\chi_{19}$   | 64                                     | -16                            | 4_  | 0                             | 0                         | 2   | -1  | 0                                      |                      |              | 0                  |   |  |   |                          |
| 20                       | $\chi_{20}$   | 70                                     | 10                             | -5  | 2                             | -4                        | 1   | 0   | -2                                     |                      |              | 1                  |   |  |   |                          |
| $\frac{21}{22}$          | $\chi_{21}$   | 70<br>90                               | $-10 \\ 0$                     | $-5 \\ 0$   | $\frac{2}{-6}$                | $\frac{4}{0}$             | $-1 \\ 0$   | 0<br>0  | $\frac{2}{0}$                          |                      |              | $-1 \\ 0$          |   |  |   |                          |
|                          | $\chi_{22}$   |  |                                |   |                               |                           |   |   |  |                      |              |                    | 0   |  |   |                          |
| 8                        | C   | (3, 2, 2)                              | $\frac{12}{(4,3)}$             | 10<br>(5, 2   |                               |                           | 384 $(2, 2, 2, 2)$  | 36  | 32 $(4,2,2)$                           | 32                   | 15<br>(5.2)  | 12 $(6,2)$         | 8<br>(8)  |  |   |                          |
| $\frac{S_8}{40320}$      | #C  | 1680                                   | 3360                           |   |                               |                           | $\frac{1,2,2,2,2}{105}$   | (3, 3, 2) $1120$                                    | $\frac{(4,2,2)}{1260}$                 | $\frac{(4,4)}{1260}$ | (5,3) $2688$ | 3360               | 5040  | -  |   |                          |
| 0                        | $\chi_S$  | 2                                      | 0                              | 1   | 0                             |                           | 4   | 1   | 2                                      | 0                    | 0            | 1                  | 0   | -  |   |                          |
| 1                        | 1   | 1                                      | 1                              | 1   | 1                             |                           | 1   | 1   | 1                                      | 1                    | 1            | 1                  | 1   |  |   |                          |
| 2                        | sgn   | 1                                      | -1                             | -1  | 1                             |                           | 1   | -1  | -1                                     | 1                    | 1            | 1                  | -1  |  |   |                          |
| 3                        | $\chi_3$  | 0                                      | 0                              | 0   | 0                             |                           | -1  | -1  | -1                                     | -1                   | -1           | -1                 | -1  |  |   |                          |
| 4                        | $\chi_4$  | 0                                      | 0                              | 0   | 0                             | ı                         | -1  | 1   | 1                                      | -1                   | -1           | -1                 | 1   |  |   |                          |
| 5                        | $\chi_5$  | -2                                     | 0                              | -1  | 0                             | 1                         | -3  | 0   | -1                                     | 1                    | 1            | 0                  | 1   |  |   |                          |
| 6                        | $\chi_6$  | -2                                     | 0                              | 1   | O                             | 1                         | -3  | 0   | 1                                      | 1                    | 1            | 0                  | -1  |  |   |                          |
| 7                        | $\chi_7$  | 1                                      | -1                             | 0   | _                             |                           | 4   | 1   | 2                                      | 0                    | 0            | 1                  | 0   |  |   |                          |
| 8                        | $\chi_8$  | 1                                      | 1                              | 0   | _                             |                           | 4   | -1  | -2                                     | 0                    | 0            | 1                  | 0   |  |   |                          |
| 9                        | $\chi_9$  | -1                                     | 1                              | -1  | 0                             |                           | 6   | -2  | 2                                      | 2                    | -1           | 0                  | 0   |  |   |                          |
| 10                       | X10   | -1                                     | $-1 \\ 1$                      | 1   | 0                             |                           | 6   | 2   | $-2 \\ -2$                             | 2                    | -1           | 0                  | 0   |  |   |                          |
| 11<br>12                 | $\chi_{11}$   | 1<br>1                                 | -1                             | 0   | 0                             |                           | $-4 \\ -4$  | 1<br>-1   | $\frac{-2}{2}$                         | 0                    | 1<br>1       | $-1 \\ -1$         | 0   |  |   |                          |
| 13                       | $\chi_{12}$ $\chi_{13}$   | 1                                      | 1                              | 0   | 0                             |                           | 3   | $\frac{-1}{2}$                                      | 1                                      | -1                   | 0            | 0                  | -1  |  |   |                          |
| 14                       | $\chi_{13}$ $\chi_{14}$   | 1                                      | -1                             | 0   | 0                             |                           | 3   | -2  | -1                                     | -1                   | 0            | 0                  | 1   |  |   |                          |
| 15                       | $\chi_{14}$   | 2                                      | 0                              | 0   | 0                             |                           | -6  | 0   | 0                                      | 2                    | -1           | 0                  | 0   |  |   |                          |
| 16                       | $\chi_{16}$   | 0                                      | 0                              | -1  | 0                             |                           | 8   | 1   | 0                                      | 0                    | 1            | -1                 | 0   |  |   |                          |
| 17                       | $\chi_{17}$   | 0                                      | 0                              | 1   | 0                             | 1                         | 8   | -1  | 0                                      | 0                    | 1            | -1                 | 0   |  |   |                          |
| 18                       | $\chi_{18}$   | 0                                      | 0                              | 1   | 1                             |                           | 0   | -2  | 0                                      | 0                    | -1           | 0                  | 0   |  |   |                          |
| 19                       | $\chi_{19}$   | 0                                      | 0                              | -1  | 1                             |                           | 0   | $^2$  | 0                                      | 0                    | -1           | 0                  | 0   |  |   |                          |
| 20                       | $\chi_{20}$   | -1                                     | -1                             | 0   | 0                             |                           | -2  | 1   | 0                                      | -2                   | 0            | 1                  | 0   |  |   |                          |
| 21                       | $\chi_{21}$   | -1                                     | 1                              | 0   | 0                             |                           | -2  | -1  | 0                                      | -2                   | 0            | 1                  | 0   |  |   |                          |
| 22                       | $\chi_{22}$   | 0                                      | 0                              | 0   | _                             |                           | -6  | 0   | 0                                      | 2_                   | 0            | 0                  | 0   |  |   | _                        |
| 8                        | 14  | 20160                                  | 180                            | 96  | 15                            | 18                        | 8   | 12  | 7                                      | 7                    |              | 192                | 16  | 15   | 15  | 6                        |
| A <sub>8</sub>           | <i>C</i>  | (1)                                    |                                | (2,2)   | (5)                           | (3,3)                     | (4,2)   | (3, 2, 2)   |  | (7) <sub>2</sub>     |              | (2, 2, 2)          | (4,4)   | $(5,3)_1$  | $(5,3)_2$   | (6, 2)                   |
| 20160                    | #C  | 1                                      | 112                            | 210   | 1344                          | 1120                      | 2520  | 1680  | 2880                                   | 2880                 | )            | 105                | 1260  | 1344   | 1344  | 3360                     |
| $\frac{1}{2}$            | $\frac{1}{\phi_2}$  | 1<br>7                                 | $\frac{1}{4}$                  | $\frac{1}{3}$   | $\frac{1}{2}$                 | 1<br>1                    | 1 $1$   | $\frac{1}{0}$                                       | $\frac{1}{0}$                          | $\frac{1}{0}$        |              | $\frac{1}{-1}$     | $\frac{1}{-1}$  | $\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}$   | $\frac{1}{-1}$  | 1 $-1$                   |
| 3                        | $\phi_3$  | 21                                     | 6                              | 3<br>1  | 1                             | 0                         | -1  | -2  | 0                                      | 0                    |              | $-1 \\ -3$         | 1   | 1  | $\frac{-1}{1}$  | 0 - 1                    |
| 4                        | $\phi_4$  | 20                                     | 5                              | 4   | 0                             | -1                        | 0   | 1   | -1                                     | -1                   |              | 4                  | 0   | 0  | 0   | 1                        |
| 5                        |   | 14                                     | -1                             | 2   | -1                            | 2                         | 0   | -1  | 0                                      | 0                    |              | 6                  | $\frac{\circ}{2}$   | -1   | -1  | 0                        |
| 6                        | $\omega_5$  |  | -                              | $\frac{2}{4}$   | -2                            | 1                         | 0   | 1   | 0                                      | 0                    |              | -4                 | 0   | 1  | 1   | -1                       |
|                          | $\phi_5 \ \phi_6$   | 28                                     | 1                              | 4   |                               |                           | -   |   |  |                      |              |                    |   |  |   |                          |
| 7                        | $\phi_6 \ \phi_7$   |  | 1<br>5                         | -5  | 0                             | 2                         | -1  | 1   | 0                                      | 0                    |              | 3                  | -1  | 0  | 0   | 0                        |
|                          | $\phi_6 \ \phi_7$   | 28<br>35                               | 5                              | -5  | 0                             |                           |   |   |  |                      |              | 3<br>-3            |   | $0$ $\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$   | $0$ $\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$  | 0                        |
| 8                        | $\phi_6 \ \phi_7 \ \phi_8$  | 28<br>35<br>21                         | $\frac{5}{-3}$                 | -5 1  | 0<br>1                        | 0                         | -1  | 1   | 0                                      | 0                    |              | 3<br>-3<br>-3      | 1   | $0$ $\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$ $\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$  | $0$ $\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$ $\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$   | 0                        |
| 8<br>9                   | $egin{array}{c} \phi_6 \ \phi_7 \ \phi_8 \ \phi_9 \end{array}$                  | 28<br>35<br>21<br>21                   | 5 $-3$ $-3$                    | -5 1 1  | 0<br>1<br>1                   | 0<br>0                    | $-1 \\ -1$  | 1<br>1  | 0                                      | 0<br>0               |              | 3<br>-3<br>-3<br>8 | 1<br>1  | $   \begin{array}{r}     0 \\     -1 + \sqrt{15} \\     \hline     2 \\     -1 - \sqrt{15} \\     \hline     1 \\   \end{array} $        | $0 \\ \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \\ \frac{-1 + \sqrt{15}}{2} \\ 1$  | 0<br>0                   |
| 8<br>9<br>10             | $\phi_6$ $\phi_7$ $\phi_8$ $\phi_9$ $\phi_{10}$                                 | 28<br>35<br>21<br>21<br>56             | 5<br>-3<br>-3<br>-4            | $     \begin{array}{c}       -5 \\       1 \\       1 \\       0     \end{array} $            | 0<br>1                        | $0 \\ 0 \\ -1$            | -1 $-1$ $0$   | 1<br>1<br>0   | 0<br>0<br>0<br>1                       | 0<br>0<br>0<br>1     |              | -3<br>-3<br>8<br>0 | 1<br>1<br>0   | $\frac{\frac{-1+\sqrt{15}}{2}}{\frac{-1-\sqrt{15}}{2}}$  | $\frac{\frac{-1-\sqrt{15}}{2}}{\frac{-1+\sqrt{15}}{2}}$ 1   | $0 \\ 0 \\ -1$           |
| 8<br>9<br>10<br>11       | $ \phi_6 $ $ \phi_7 $ $ \phi_8 $ $ \phi_9 $ $ \phi_{10} $ $ \phi_{11} $         | 28<br>35<br>21<br>21                   | 5 $-3$ $-3$                    | -5 1 1  | 0<br>1<br>1<br>1              | 0<br>0                    | $-1 \\ -1$  | 1<br>1<br>0<br>0                                    | 0<br>0<br>0<br>1                       | 0<br>0<br>0<br>1     |              | -3<br>-3<br>8<br>0 | 1<br>1<br>0<br>0  | $ \begin{array}{c} 0 \\                                   $  | $ \begin{array}{c} 0 \\                                   $   | 0<br>0                   |
| 8<br>9<br>10<br>11<br>12 | $\phi_{6}$ $\phi_{7}$ $\phi_{8}$ $\phi_{9}$ $\phi_{10}$ $\phi_{11}$ $\phi_{12}$ | 28<br>35<br>21<br>21<br>56<br>64<br>70 | 5<br>-3<br>-3<br>-4<br>4<br>-5 | $     \begin{array}{c}       -5 \\       1 \\       0 \\       0 \\       2     \end{array} $ | $0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0$ | $0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1$ |   | $egin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array}$ | 0<br>0<br>0<br>1                       | 0<br>0<br>0<br>1     | <u>7</u>     | -3<br>-3<br>8<br>0 | $     \begin{array}{c}       1 \\       1 \\       0 \\       0 \\       -2     \end{array} $ | $   \begin{array}{r}     -1 + \sqrt{15} \\     \hline     2 \\     -1 - \sqrt{15} \\     \hline     1 \\     -1 \\     0   \end{array} $ | $ \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \\ -1 + \sqrt{15} \\ 1 \\ -1 \\ 0 $  | $0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1$ |
| 8<br>9<br>10<br>11       | $\phi_{6}$ $\phi_{7}$ $\phi_{8}$ $\phi_{9}$ $\phi_{10}$ $\phi_{11}$             | 28<br>35<br>21<br>21<br>56<br>64       | 5<br>-3<br>-3<br>-4<br>4       | $     \begin{array}{c}       -5 \\       1 \\       1 \\       0 \\       0     \end{array} $ | 0<br>1<br>1<br>1<br>-1        | $0 \\ 0 \\ -1 \\ -2$      | $     \begin{array}{r}       -1 \\       -1 \\       0 \\       0   \end{array} $ | 1<br>1<br>0<br>0                                    | 0<br>0<br>0<br>1                       | 0<br>0<br>0          | <u>7</u>     | -3<br>-3<br>8      | 1<br>1<br>0<br>0  | $ \begin{array}{r} -1+\sqrt{15} \\ 2 \\ -1-\sqrt{15} \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{array} $   | $   \begin{array}{r}     -1 - \sqrt{15} \\     \hline     2 \\     -1 + \sqrt{15} \\     \hline     1 \\     -1   \end{array} $ | $0 \\ 0 \\ -1 \\ 0$      |

- S<sub>n</sub>の指標表を求めるにあたって以下の事実を用いた.
- 1. 自明な指標と符号関数は既約指標である。
- 2. 既約指標の数は置換の型の数、n の分割数、n の分割に対するヤング図形の数と同じである.
- 3. 既約指標の次元はヤング図形とフック長から求められる.
- 4. 既約指標の直交性.
- 5. 次元が同じ既約指標の数が奇数のとき、 $\mathrm{sgn}(\mathrm{g}) = -1$  となる全ての  $\mathrm{g}$  で  $\chi(\mathrm{g}) = 0$  となる指標  $\chi$  が奇数個存在する.
- 6.(固定点) 1 は既約指標である.
- 7. 既約指標と符号関数の積はまた既約指標になる.
- $.S_n$  の既約指標の  $S_m(m < n)$  への制限は  $S_m$  の指標になる (既約とは限らない).

## 指標1

・自明な指標.

指標 sgn

•符号関数.

指標  $\chi_3$ 

・(固定点) - 1.

指標 γ₄

・指標  $\chi_3$  と符号関数の積.

指標  $\chi_5$ 

・指標  $\chi_3$  の反対称テンソル積. $(\chi_3^2(g) - \chi_3(g^2))/2$ .

指標  $\chi_6$ 

・指標 χ<sub>5</sub> と符号関数の積.

指標  $\chi_7$ 

•  $(\chi_3^2(g) + \chi_3(g^2))/2 - 1 - \chi_3$ .

指標  $\gamma_8$ 

・指標  $\chi_7$  と符号関数の積.

 $n\leq 5$  のとき、 $S_n$  の全ての既約指標は上の 8 つのどれかで求められる.n>5 のとき、上の指標は相異なる既約指標である. n=6 のときは、列の直交関係からすぐに残りの既約指標も求まる。列及び行の直交関係を用いて既約指標を求める前に既約指標の数を求めることを考える。既約指標の数は共役類の数に等しく、さらに置換の型の数、n の分割数、n の分割に対するヤング図形の数にも等しい。求めるのが簡単な n の分割数を考える. $(a_1,\cdots,a_k)$  with  $a_s>1(1\leq s\leq k)$  を m(<n) の分割とすると $(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+n-m})$  with  $a_s=1(s>k)$  は n の分割である。よって (int)n/2 重のループで求められる. $n\leq 8$  は以下の通り。

直交関係を用いて次元を求めることもできるが、ここではヤング図形、フック公式から求める.一例を挙げる.

| 6 | 4 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 1 |   |
| 1 |   |   |   |

$$Deg = \frac{8!}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 70$$

## 同様にして、

 ${\rm sgn}(g_i){\rm sgn}(g_j)=-1$  ならば i 列目と j 列目は必ず直交するので、指標  ${\rm sgn}$  の値で二分してみる. 次元が既にわかっているので 偶置換から. 以下 n=8.8 つの既約指標は求められているとする. 1 列目との直交性、列の二乗和が群の位数を共役類の位数で 割ったものに等しいことから、候補を選出すると、i=15 が一択であり、決定できる. さらにこれとの直交性を利用して i=21 が 4 つの候補を持つことを得る.  $i=20,12,10,\cdots$  とこれを繰り返す. 実際は i=10 の時点で決定できた.

| $col^{row}$ | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 20          | -1 | -1 | 1  | 1  | 0  | 0  | -1 | 1  | 1  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  |
| 12<br>12    | -1 | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 2  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  |
| 12          | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | -2 | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
|             |    | ÷  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

| $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | 12 | -1 | -1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 2  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  |
| $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | 10 | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 2  |
| $ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$   | $ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$   | 10 | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 1  | 1  | 0  |
| $ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$   | $ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$   |    |    | :  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 19     2     2     0     0     -1     -1     2     0     0     0     0     -2     -2     2       9     2     2     1     1     2     2     0     -1     -1     -2     -2     1     1     0       4     2     2     4     4     -5     -5     2     0     0     0     0     2     2     -6       3     -1     -1     1     1     5     5     -6     -4     -4     4     4     -5     -5     0 | 19     2     2     0     0     -1     -1     2     0     0     0     0     -2     -2     2       9     2     2     1     1     2     2     0     -1     -1     -2     -2     1     1     0       4     2     2     4     4     -5     -5     2     0     0     0     0     2     2     -6       3     -1     -1     1     1     5     5     -6     -4     -4     4     4     -5     -5     0 | 10 | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | -2 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 2  |
| $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | 7  | -1 | -1 | -2 | -2 | 0  | 0  | 2  | 1  | 1  | -1 | -1 | 0  | 0  | 0  |
| $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | 19 | 2  | 2  | 0  | 0  | -1 | -1 | 2  | 0  | 0  | 0  | 0  | -2 | -2 | 2  |
| $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | $\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$  | 9  | 2  | 2  | 1  | 1  | 2  | 2  | 0  | -1 | -1 | -2 | -2 | 1  | 1  | 0  |
|  |  | 4  | 2  | 2  | 4  | 4  | -5 | -5 | 2  | 0  | 0  | 0  | 0  | 2  | 2  | -6 |
| 16 6 6 -4 -4 3 3 -6 8 8 0 0 -2 -2 -6   | $16 \mid 6  6  -4  -4  3  3  -6  8  8  0  0  -2  -2  -6$   |    | 1  | _1 | 1  | 1  | 5  | 5  | -6 | -4 | -4 | 4  | 4  | -5 | -5 | 0  |
|  |  | 3  | -I | 1  | _  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

この時点(未決定箇所は暫定で 0)で行の直交関係を調べると、ほぼ全てで正しい値に一致している.一致してない箇所は、例えば  $\chi_9$  と  $\chi_9$ 、  $\chi_9$  と  $\chi_{10}$  など次元が同じ既約指標のペアができるもので値は 20160、群の位数の半値である.(小数を嫌って内積に群の位数を掛けたものを使用.)n=7,6 でも同じ結果を得られた.このことから、

$$\sum_{\mathbf{m}(g)=\pm 1} |g^G| \chi_i(g) \chi_j(g) = \begin{cases} \delta_{ij} \cdot |G|/2 &, where \ \chi_i(1) \neq \chi_j(1) \\ \pm |G|/2 &, otherwise \end{cases}$$
 (複合同順) · · · · · ( $\alpha$ )

がわかる. つまり、行の直交関係も指標  $\operatorname{sgn}$  の値で二分した中で探索することができる. よって、 $i=1,2,\cdots,8,j$  と j に対して  $(\alpha)$  を満たす  $\chi_j$  を探索する. 得られたものは以下の 12.

未決定の数 12 と一致しているので、これが残りの部分かと予想したが実際そうなっている.しかしどの順番で埋めればいいのかわからなく、(lpha) から  $S_8$  の中だけでは決定できないと考え、指標表が既知の  $S_6$  への制限を使って決定することを考えた. $(S_7$  は、このことから、間違いがあることに気づき使えなかった.) 過程は省き結果のみ.

| $S_6$ | C           | (1)   | (2)         | (3)   | (2, 2) | (4) | (3, 2) | (5) | (2, 2, 2) | (3, 3) | (4, 2) | (6) |   |   |   |
|-------|-------------|-------|-------------|-------|--------|-----|--------|-----|-----------|--------|--------|-----|---|---|---|
| 720   | 1           | 1     | 15          | 40    | 45     | 90  | 120    | 144 | 15        | 40     | 90     | 120 |   |   |   |
| 1     | 1           | 1     | 1           | 1     | 1      | 1   | 1      | 1   | 1         | 1      | 1      | 1   |   |   |   |
| 2     | sgn         | 1     | -1          | 1     | 1      | -1  | -1     | 1   | -1        | 1      | 1      | -1  | 24-   8-  | _ | als 1 als -   |
| 3     | $\psi_3$    | 5     | 3           | 2     | 1      | 1   | 0      | 0   | -1        | -1     | -1     | -1  | $\chi_9 \downarrow S_6$   | = | $\psi_7 + \psi_{10}$                                      |
| 4     | $\psi_4$    | 5     | -3          | 2     | 1      | -1  | 0      | 0   | 1         | -1     | -1     | 1   | $\begin{array}{c} \chi_{11} \downarrow S_6 \\ \chi_{13} \downarrow S_6 \end{array}$ | = | $\psi_3 + 2\psi_7 + \psi_{10}  \psi_3 + 2\psi_5 + \psi_6$ |
| 5     | $\psi_5$    | 10    | 2           | 1     | -2     | 0   | -1     | 0   | -2        | 1      | 0      | 1   | $\chi_{13} \downarrow S_6$<br>$\chi_{16} \downarrow S_6$                            | = |   |
| 6     | $\psi_6$    | 10    | -2          | 1     | -2     | 0   | 1      | 0   | 2         | 1      | 0      | -1  |   |   | $\psi_5 + \psi_7 + \psi_9 + 2\psi_{11}$                   |
| 7     | $\psi_7$    | 9     | 3           | 0     | 1      | -1  | 0      | -1  | 3         | 0      | 1      | 0   | $\chi_{18} \downarrow S_6$  | = | $2\psi_3 + 2\psi_5 + 2\psi_7$                             |
| 8     | $\psi_8$    | 9     | -3          | 0     | 1      | 1   | 0      | -1  | -3        | 0      | 1      | 0   | $\chi_{20} \downarrow S_6$  | _ | $\psi_5 + 2\psi_7 + 2\psi_{10} + 2\psi_{11}$              |
| 9     | $\psi_9$    | 5     | -1          | -1    | 1      | 1   | -1     | 0   | 3         | 2      | -1     | 0   |   |   |   |
| 10    | $\psi_{10}$ | 5     | 1           | -1    | 1      | -1  | 1      | 0   | -3        | 2      | -1     | 0   |   |   |   |
| 11    | $\psi_{11}$ | 16    | 0           | -2    | 0      | 0   | 0      | 1   | 0         | -2     | 0      | 0   |   |   |   |
| NL    | C           | n 🛆 🤈 | <b>一</b> の田 | (火)十七 | 価よい出   | 2 4 | ht-    |     |           |        |        |     |   |   |   |

以上、 $S_8$  の全ての既約指標が求められた.

 $S_8$  を  $A_8$  に制限する際に分裂する共役類を求めるプログラミングの作成が間に合ったので  $A_8$  の Character Table も求めることにした. 1 0 の既約指標は 2 0 章から  $\chi_{15}$  と  $\chi_{22}$  を除く 2 0 の既約指標の制限ですぐにもとまる.分裂する共役類は型が (7), (5,3) のもの.ここを除いた場所の値は  $S_8$  の半値.よって残りの 1 6 の、しかし実際は順番の違いを除いて 4 つの値を求めればいい. $x \in (7)_1, y \in (5,3)_1$  として、 $a = \phi_8(x), b = 1/2 + \phi_8(y), c = 1/2 + \phi_{13}(x), d = \phi_{13}(y)$  と定める.直交関係から、 $a^2 + c^2 = 7/4, b^2 + d^2 = 15/4, (4/7)a^2 + (4/15)b^2 = (4/7)c^2 + (4/15)d^2 = 1, ab + cd = 0$ .これを代入法で解こうとしたが、求めることができず、直接法に切り替えてもできなかった. 2 0 章の例と違って特定できないのは、自由度が大きいせいか.仕方なく、 $A_7$  の既約指標を求め制限をして a,c の値を求めた. $\phi_8$  の制限は既約指標で  $\phi_8 \downarrow A_7(x) = 0$ 、よって a = 0 を、それに伴い  $b = \sqrt{15}/2, c = \sqrt{7}/2, d = 0$  を得る.

求め始めた時期的に、基本的に直交関係から求めている $n \geq 7$  では直交関係のみでは求めることができず、制限を使わざるを得なかった。直交関係は如何せん計算量が多く、手計算では無理だろう。実際n = 8 ですらコンピュータでも数分かかるほど。誘導を使って $S_7$  を求めたと言っていた人がいたので、誘導を使って求めようとしたが、共役が部分群の元かどうかの判定が必要で、今それの作成中で、ついでに $A_8$  までの共役類が求められたので $A_8$  までの指標表も求めてみた。ただn = 9 がメモリ不足で実行できなかったので、メモリを多く使わずに出せる方法を模索中である。時間があれば誘導もやってみたい。誘導に関しては、軌道を求める際に同じ元が登場する回数は同じなので、簡単に作れそうではある。よく見てみたら、共役類の分裂も、分裂する(しない)部分の指標の値は奇数または0(偶数)で、すぐに出せそうだと最後ながらに気づいた。無念。

 $\mathbf{H}=S_n$ 、 $\mathbf{G}=S_m$  (n< m) とする. $S_l$  の共役類は同じ型を持つ元全てで構成されているので、 $x^\mathbf{H} \leq x^\mathbf{G}$  for all  $x \in \mathbf{H}$  である. このことから、 $\psi$  を  $\mathbf{H}$  の既約指標とすると、

$$\psi \uparrow G(g) = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{y \in \mathcal{G}} \dot{\psi}(y^{-1}gy) = \frac{|\mathcal{G}|}{|\mathcal{H}||g^{\mathcal{G}}|} \sum_{y \in g^{\mathcal{G}}} \dot{\psi}(y) = \frac{|\mathcal{G}|}{|\mathcal{H}||g^{\mathcal{G}}|} \left( \sum_{y \in g^{\mathcal{H}}} \psi(y) + \sum_{y \in g^{\mathcal{G}} \backslash g^{\mathcal{H}}} 0 \right) = \frac{|\mathcal{G}|}{|\mathcal{H}|} \frac{|g^{\mathcal{H}}|}{|g^{\mathcal{G}}|} \psi(g) = \frac{|\mathcal{C}_{\mathcal{G}}(g)|}{|\mathcal{C}_{\mathcal{H}}(g)|} \psi(g)$$

,if  $g \in H$ , 0 if  $g \notin H$ .

 $\chi_i,\psi_j$  を G,H の既約指標とすると、 $\psi_j$  ↑  $G=\sum_i a_{ij}\chi_i$  となる unsigned int  $a_{ij}$  が存在する. この  $a_{ij}$  を特定できれば、 $\langle \psi \uparrow G,\chi \rangle_G = \langle \psi,\chi \downarrow H \rangle_H$  から、 $\chi_i \downarrow H = \sum_i a_{ij}$  で求めることができる. m=9,n=8 での結果は以下の通り.

| $_{j}^{i}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1          | 1 |   | 1 |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2          |   | 1 |   | 1 |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3          |   |   | 1 |   | 1 |   | 1 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4          |   |   |   | 1 |   | 1 |   | 1 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 5          |   |   |   |   | 1 |   |   |   |   |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 6          |   |   |   |   |   | 1 |   |   |   |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 7          |   |   |   |   |   |   | 1 |   |   |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 8          |   |   |   |   |   |   |   | 1 |   |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 9          |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 10         |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1  |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 11         |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |
| 12         |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1  |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    |    |
| 13         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    | 1  |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |
| 14         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |
| 15         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  |    |    |    |    |
| 16         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    | 1  |    |    | 1  |    |
| 17         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    | 1  |    |    |    |    | 1  |
| 18         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    | 1  |    | 1  |    |    |    | 1  |    |    |    |
| 19         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    | 1  |    | 1  |    |    |    | 1  |    |    |
| 20         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    | 1  |    | 1  |    |    |    | 1  |    |
| 21         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |    | 1  |    | 1  |    |    |    | 1  |
| 22         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  |

残りの23列目から30列目の値は、行の直交関係を用いて求めた。符号関数によってできるペアを除いて以下の表のとおり、行番号は上の表のiと対応している。

| $col^{row}$ | 1 | 2  | 3  | 5  | 7  | 9  | 11 | 12 | 14 | 16  | 17 | 19  | 21  | 23  | 25  | 27  | 29  |
|-------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1           | 1 | 1  | 8  | 28 | 27 | 42 | 42 | 48 | 56 | 70  | 84 | 105 | 120 | 162 | 168 | 189 | 216 |
| 2           | 1 | -1 | 6  | 14 | 15 | 14 | 0  | 20 | 14 | 0   | 14 | 35  | 20  | 36  | 6   | 21  | 14  |
| 3           | 1 | 1  | 5  | 10 | 9  | 0  | -6 | 6  | 11 | 10  | -6 | 15  | 0   | 0   | -15 | 9   | -9  |
| 4           | 1 | 1  | 4  | 4  | 7  | 6  | 2  | 8  | -4 | -10 | 4  | 5   | 0   | 6   | 4   | -11 | -4  |
| 5           | 1 | -1 | 4  | 6  | 5  | -4 | 0  | 0  | 4  | 0   | -6 | 5   | 0   | -6  | -4  | 1   | -4  |
| 6           | 1 | -1 | 3  | 2  | 3  | 2  | 0  | 2  | -1 | 0   | 2  | -1  | -4  | 0   | 3   | -3  | -1  |
| 7           | 1 | 1  | 3  | 3  | 2  | -3 | 2  | -2 | 1  | 0   | -1 | 0   | 0   | -3  | 3   | -1  | 1   |
| 8           | 1 | -1 | 2  | -2 | 3  | 2  | 0  | 4  | -6 | 0   | -2 | -1  | 4   | 0   | -6  | -3  | 2   |
| 9           | 1 | 1  | 2  | 1  | 0  | 3  | 0  | 0  | 2  | 4   | 3  | -3  | -3  | 0   | 0   | 0   | 0   |
| 10          | 1 | 1  | 2  | 0  | 1  | 0  | -2 | 0  | -2 | -2  | 0  | -1  | 0   | 0   | -2  | 1   | 2   |
| 11          | 1 | -1 | 2  | 1  | 0  | -1 | 0  | -2 | 0  | 0   | 1  | -1  | 1   | 0   | 0   | 0   | 2   |
| 12          | 1 | 1  | 1  | -2 | 1  | 0  | 2  | 2  | -1 | 2   | -2 | -1  | 0   | 0   | 1   | 1   | -1  |
| 13          | 1 | -1 | 1  | 0  | -1 | 2  | 0  | 0  | 1  | 0   | 0  | -1  | 0   | 0   | -1  | 1   | -1  |
| 14          | 1 | -1 | 1  | -1 | 0  | -1 | 0  | 0  | -1 | 0   | -1 | 0   | 0   | 1   | 1   | 1   | -1  |
| 15          | 1 | 1  | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | -1 | 0  | 0   | 0  | 0   | 1   | 1   | 0   | 0   | -1  |
| 16          | 1 | 1  | 0  | -4 | 3  | 2  | -6 | 0  | 0  | 6   | 4  | 1   | 8   | -6  | 0   | -3  | 0   |
| 17          | 1 | -1 | 0  | -1 | 0  | -1 | 0  | 2  | 2  | 0   | -1 | -1  | -1  | 0   | 0   | 0   | 2   |
| 18          | 1 | -1 | 0  | -2 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 2  | 1   | 0   | -2  | 0   | 1   | 0   |
| 19          | 1 | 1  | 0  | 0  | -1 | 2  | 2  | 0  | 0  | -2  | 0  | 1   | 0   | -2  | 0   | 1   | 0   |
| 20          | 1 | 1  | 0  | 0  | -1 | 0  | -1 | 1  | 1  | 0   | -1 | 0   | 0   | 0   | 0   | -1  | 1   |
| 21          | 1 | 1  | 0  | -1 | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0   | 1  | 1   | -1  | 0   | 0   | 0   | 0   |
| 22          | 1 | -1 | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 1   | 0   | 0   | 0   | -1  | 0   |
| 23          | 1 | -1 | -1 | -2 | 3  | 2  | 0  | -2 | 3  | 0   | -2 | -1  | 4   | 0   | 3   | -3  | -1  |
| 24          | 1 | 1  | -1 | 1  | 0  | -3 | 6  | 3  | 2  | -2  | 3  | -3  | 3   | 0   | -3  | 0   | 0   |
| 25          | 1 | 1  | -1 | 0  | 1  | 0  | -2 | 0  | 1  | -2  | 0  | -1  | 0   | 0   | 1   | 1   | -1  |
| 26          | 1 | 1  | -1 | -1 | 2  | 1  | 2  | -2 | 1  | 0   | -1 | 0   | 0   | 1   | -1  | -1  | 1   |
| 27          | 1 | -1 | -1 | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | -1 | 0   | -1 | 0   | 0   | -1  | 1   | 1   | 1   |
| 28          | 1 | -1 | -1 | 1  | 0  | -1 | 0  | 1  | 0  | 0   | 1  | -1  | 1   | 0   | 0   | 0   | -1  |
| 29          | 1 | -1 | -1 | 0  | 1  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0   | 0  | 0   | -1  | 1   | -1  | 0   | 0   |
| 30          | 1 | 1  | -1 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 1   | 0  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |

これにて、S<sub>9</sub> の指標表が求まった. 直交関係だけから求めようとした時に比べて、圧倒的に楽だった.