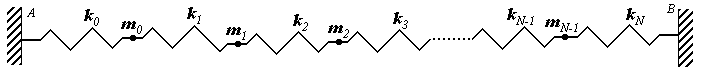
МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦЕПОЧКИ СВЯЗАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Модели, представляющие собой линейные цепочки (рис. 1), состоящие из конечного или бесконечного числа связанных осцилляторов, оказались весьма эффективными и в настоящее время используются в различных областях физики: физике твердого тела, физике сплошных сред, химической физике, радиофизике и др. (Например, в [1] для описания системы трех связанных электрических колебательных контуров использована модель, представляющая собой систему шариков с массами *m1*, *m2*, *m3*, cвязанных между собой пружинками одинаковой жесткости *k*.) Используя модели линейных цепочек, оказывается возможным естественным образом осуществить переход к волновым процессам и ввести такие понятия как длина волны, групповая скорость, фазовая скорость, дисперсия и др.



*Рис. 1*

Отмеченные обстоятельства определяют целесообразность рассмотрения данных моделей в соответствующих курсах физики и компьютерного моделирования. Однако необходимо отметить два важных обстоятельства. Во-первых, аналитические решения уравнений движения длинных линейных цепочек () могут быть получены только для относительно небольшого числа случаев [2]: 1) **, **; 2) , ; ; 3) **, , ; 4) , , 5) , . Во-вторых, большинство этих решений оказываются весьма громоздкими и для их последующего анализа приходится использовать ПК.

Запишем уравнения движения для каждой массы колебательной системы, представленной на рис. 1:

 (1)

Для удобства дальнейшего решения запишем уравнение (1), введя обозначение, в следующем виде:

­ (2)

Следуя общему подходу к решению рассматриваемой задачи, изложенному в [3], ищем решение системы дифференциальных уравнений (2) в виде:

(3)

Подставив (3) в систему (2), сгруппировав члены, пропорциональные *Ai*, и записав систему в матричном виде, получим:

, (4)

где

,

***B*** − трехдиагональная матрица, элементы которой вычисляются по следующим правилам:

,

,, (5)

,

Необходимым и достаточным условием существования решения системы уравнений (4) является равенство нулю определителя матрицы ***B***

(6)

Уравнение (6), называемое характеристическим уравнением, является уравнением степени *N* **−** 1 относительно . Оно имеет в общем случае *N* **−** 1 различных вещественных положительных корней . Каждому собственному числу соответствует собственный вектор, являющийся решением уравнения

, (7)

где **Ω** − трехдиагональная матрица элементы которой вычисляются по следующим правилам:

,

,, (8)

,

Частоту называют частотой нормальных колебаний, а вектор − вектором нормального колебания, отвечающего α-ой частоте. Вектор нормального колебания  меняется во времени по закону

. (9)

Общее решение системы дифференциальных уравнений (2) , есть суперпозиция всех векторов нормальных колебаний :

, (10)

Где − произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Скорость движения масс, можно определить, продифференцировав (10) по времени:

. (11)

Для решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений (2) необходимо задать значения координат и скоростей каждого тела системы в начальный момент времени и решить систему уравнений

(12)

относительно неизвестных .

###### Запишем (12) в матричном виде

, (13)

где

, (14)

, (15)

, (16)

, (17)

**Z** − нулевая матрица, размерности *N−*1×*N* **−**9.

Система уравнений (13) оказывается нелинейной, однако, блочная структура матрицы, позволяет найти решение данной системы не прибегая к численным методам. Для этого, сначала, решив две линейные системы уравнений

(18)

, (19)

найдем векторы ,, затем координаты вектора ***С***

, (20)

и далее значения начальных фаз каждого нормального колебания:

. (21)

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 2. К выбору правильного значения угла |

Отметим, что функция arctan на интервале [0;2π] является двузначной (рис. 2), поэтому для выбора правильных значений данной функции необходимо контролировать знаки числителя и знаменателя дроби в выражении (20). Как очевидно из рис. 2, правильное значение угла выбирается по следующим правилам:

(22)

# Предваряя описание решения задачи об описании колебаний цепочки связанных осцилляторов, приведем алгоритм ее решения:

1. Задать число тел, образующих цепочку *N*.
2. Задать массы тел , *i*=0,1…, *N*−9.
3. Задать значения коэффициентов жесткости пружин , *i*=0,1…, *N*.
4. Вычислить элементы матрицы **Ω** в соответствие с (8).
5. Найти собственные числа матрицы **Ω**.
6. Найти собственные векторы , соответствующие набору собственных частот .
7. Задать начальные условия .
8. Решить систему линейных уравнений (18), (19), относительно векторов ***С***1 и ***С***2, соответственно.
9. Вычислить координаты вектора ***С*** в соответствии с (20).
10. Вычислить значения начальных фаз нормальных колебаний *ϕi* в соответствии с (21).