

Wstęp do informatyki

Wykład 9

Przeszukiwanie z nawrotami

Instytut Informatyki UWr

Temat wykładu

- Przeszukiwanie z nawrotami, na przykładach:
 - problem (ośmiu) hetmanów
 - przeszukiwanie labiryntu, obszaru, ...

Problem (ośmiu) hetmanów

Problem:

Ośmiu hetmanów należy rozmieścić na szachownicy w taki sposób, że żadne dwa nie atakują się nawzajem.

Uogólnienie:

n hetmanów należy rozmieścić na szachownicy rozmiaru $n \times n$ w taki sposób, że żadne dwa nie atakują się nawzajem.

Atakowanie pól

Hetman atakuje każde pole leżące w tym samym wierszu, kolumnie lub na tej samej „przekątnej”.

	○		○		○		
		○	○	○			
○	○	○	Q	○	○	○	○
		○	○	○			
	○		○		○		
○			○			○	
			○				○
			○				

Przykład.

Q oznacza pozycję hetmana, kółka oznaczają pola przez niego atakowane.

Czy istnieje rozwiązanie?

$n=2$:

Brak rozwiązania

Q	o
o	o

$n=3$:

Brak rozwiązania

Q	o	o
o	o	
o		o

„wolne” pola w drugim i trzecim wierszu atakują się nawzajem

o	o	
Q	o	o
o	o	

brak wolnego pola w drugiej kolumnie

Czy istnieje rozwiązanie (cd) ?

$n \geq 4$: istnieje (wiele) rozwiązań

Przykład:

$n=4$

	Q		
			Q
Q			
		Q	

$n=5$

		Q		
				Q
	Q			
			Q	
Q				

Problem

Wejście

Liczba naturalna n

Wyjście

Rozwiązanie (dowolne) dla problemu hetmanów na szachownicy $n \times n$ lub informacja, że rozwiązanie nie istnieje.

Uwaga: przez rozwiązanie problemu hetmanów należy rozumieć rozmieszczenie n hetmanów zgodne ze specyfikacją problemu hetmanów.

Problem hetmanów

UWAGI

- Istnieją efektywne (szybkie) algorytmy rozwiązujące ten problem. Bazują one na obserwacji, że jeśli istnieją rozwiązania, to są wśród nich takie, w których hetmany rozmieszczone są „regularnie”.
- Na dzisiejszym wykładzie NIE będziemy szukać takich „regularności”.
- Nasz cel: znaleźć rozwiązanie (o ile istnieje) metodą „nawrotów” (czyli zorganizowanego „przeszukiwania” możliwości).

Rozwiązanie 1

Rozwiązanie naiwne

Struktura danych:

`int b[n][n]`

$b[i][j] = 1$ gdy hetman umieszczony na polu (i,j)

$b[i][j] = 0$ w przeciwnym przypadku

Rozwiązanie 1

Przykład

$n = 5$

Struktura danych:

`int b[n][n]`

szachownica

4			Q		
3					Q
2		Q			
1				Q	
0	Q				
	0	1	2	3	4

tablica `b [] []`

4	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0
	0	1	2	3	4

Rozwiązanie 1

Rozwiązanie naiwne

Struktura danych:

int b[n][n]

Algorytm:

1. Dla każdego możliwego rozmieszczenia n hetmanów na szachownicy $n \times n$:
 - Sprawdź czy jakaś para hetmanów atakuje się nawzajem (jeśli nie – zwróć rozwiązanie i **zakończ**)
2. Zwróć informację o braku rozwiązania

Ile rozmieszczeń? Bardzo dużo... $\binom{n^2}{n}$

Rozwiązanie 2

(trochę mniej) naiwne

Struktura danych:

int **b[n][n]**

Algorytm:

1. Dla każdego możliwego rozmieszczenia n hetmanów na szachownicy $n \times n$ **takiego, że w każdej kolumnie jest jeden hetman:**
 - Sprawdź czy jakaś para hetmanów atakuje się nawzajem (jeśli nie – zwróć rozwiązanie i **zakończ**)
2. Zwróć informację o braku rozwiązania

Ile rozmieszczeń? Bardzo dużo... n^n

Rozwiązanie 2'

(trochę mniej) naiwne

Struktura danych:

int $b[n]$

$b[i]$ jest równe pozycji (wierszowi) hetmana z kolumny i .

Algorytm:

1. Dla każdego możliwego rozmieszczenia n hetmanów na szachownicy $n \times n$ **takiego, że w każdej kolumnie jest jeden hetman:**
 - Sprawdź czy jakaś para hetmanów atakuje się nawzajem (jeśli nie
 - zwróć rozwiązanie i **zakończ**)
2. Zwróć informację o braku rozwiązania

Rozwiązanie 2'

Struktura danych:

`int b[n]`

$b[i]$ jest równe pozycji
(wierszowi) hetmana z
kolumny i .

Przykład

$n = 5$

i	0	1	2	3	4
$a[i]$	0	2	4	1	3

Szachownica:

4			Q		
3					Q
2		Q			
1				Q	
0	Q				
	0	1	2	3	4

Rozwiązanie 3: nawroty

Algorytm (idea):

1. Próbuje **stopniowo** rozmieszczać hetmany w kolejnych kolumnach, **zaczynając od skrajnie lewej**.
2. Umieszczając hetmana w kolumnie i , znajdź pierwszą pozycję („**od dołu**”) która **nie** jest atakowana przez hetmany z kolumn $0, 1, \dots, i - 1$
3. Jeśli **nie ma** takiej „**wolnej**” pozycji w kolumnie i , **wrót** do kolumny $i - 1$ i spróbuj ustawić hetmana na innej pozycji w tej kolumnie (wyżej niż poprzednio); jeśli to niemożliwe, wrót do kolumn $i - 2, i - 3, \dots$
4. Jeśli udało się ustawić hetmana w ostatniej kolumnie – zwróć wynik i zakończ działanie!
5. Jeśli **nie ma** już „nowych” (wyższych) pozycji **w skrajnie lewej kolumnie** – zakończ z informacją o braku ustawienia hetmanów.

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 0

Struktura danych ($b[i] = -1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	-1	-1	-1

3	•			•
2	•		•	
1	•	•		
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 1

Struktura danych ($b[i] = -1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	2	-1	-1

3	•	•	•	•
2	•	Q	•	•
1	•	•	•	
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 2

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	2	-1	-1

3	•	•	•	•
2	•	Q	•	•
1	•	•	•	
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Problem!

Brak wolnej pozycji w kolumnie 2!
Wróć do kolumny 1!

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 1

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	3	-1	-1

3	•	Q	•	•
2	•	•	•	
1	•	•		•
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$$n = 4$$

Kolumna: 2

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	3	1	-1

3	•	Q	•	•
2	•	•	•	•
1	•	•	Q	•
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$$n = 4$$

Kolumna: 3

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	3	1	-1

3	•	Q	•	•
2	•	•	•	•
1	•	•	Q	•
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Problem!

Brak wolnej pozycji w kolumnie 3!
Wróć do kolumny 2!

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 2

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	3	1	-1

3	•	Q	•	•
2	•	•	•	
1	•	•		•
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Problem!

Brak wolnej „wyższej” pozycji w kolumnie 2!

Wróć do kolumny 1!

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 1

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	0	3	-1	-1

3	•			•
2	•		•	
1	•	•		
0	Q	•	•	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Problem!

Brak wolnej „wyższej” pozycji w kolumnie 1!

Wróć do kolumny 0!

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$$n = 4$$

Kolumna: 0

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	1	-1	-1	-1

3	•		•	
2	•	•		
1	Q	•	•	•
0	•	•		
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$$n = 4$$

Kolumna: 1

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	1	3	-1	-1

3	•	Q	•	•
2	•	•	•	
1	Q	•	•	•
0	•	•		
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 2

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	1	3	0	-1

3	•	Q	•	•
2	•	•	•	
1	Q	•	•	•
0	•	•	Q	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Rozwiązanie 3: nawroty

Przykład

$n = 4$

Kolumna: 3

Struktura danych ($b[i]=-1$ oznacza brak hetmana w i -tej kolumnie):

i	0	1	2	3
b[i]	1	3	0	2

3	•	Q	•	•
2	•	•	•	Q
1	Q	•	•	•
0	•	•	Q	•
	0	1	2	3

Znak „•” oznacza pozycję atakowaną przez któryś z ustawionych już hetmanów

Przeszukiwanie z nawrotami

Algorytm (idea trochę dokładniej):

1. Umieść -1 w komórkach $b[0]$, $b[1]$, ..., $b[n - 1]$ //hetmany „pod szachownicą”
2. $k \leftarrow 0$; // k oznacza „bieżącą” kolumnę
3. dopóki ($k < n$ oraz $k \geq 0$) // $k == n$: znaleziono rozw.; $k < 0$: brak rozw.
 1. Jeśli istnieje **wolne** pole i w kolumnie k powyżej pozycji $b[k]$:
 - Umieść hetmana na (najniższym wolnym powyżej $b[k]$) polu i w kolumnie k , przejdź do kolejnej kolumny:
 $b[k] \leftarrow i$
 $k \leftarrow k + 1$
 2. w przeciwnym przypadku:
 - Usuń hetmana z kolumny k , wróć do kolumny $k - 1$:
 $b[k] \leftarrow -1$ //usuń hetmana z kolumny k
 $k \leftarrow k - 1$ //wróć do poprzedniej kolumny

Przypomnienie: pole jest wolne, gdy nie jest atakowane przez żadnego hetmana.

Problem hetmanów - implementacja

Jak sprawdzić czy pole jest atakowane przez hetmana?

Wejście

(x, y) – sprawdzana pozycja;

(a, b) – pozycja hetmana, $a \neq x$. (inna kolumna)

Wyjście

1: gdy hetman na (a, b) atakuje (x, y) ,

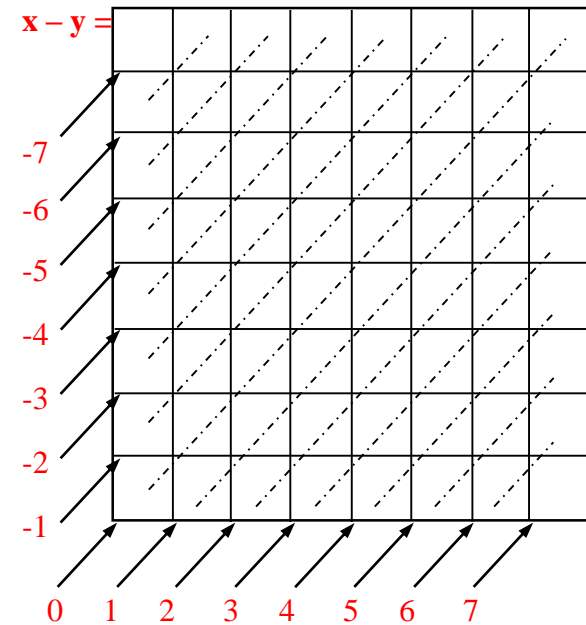
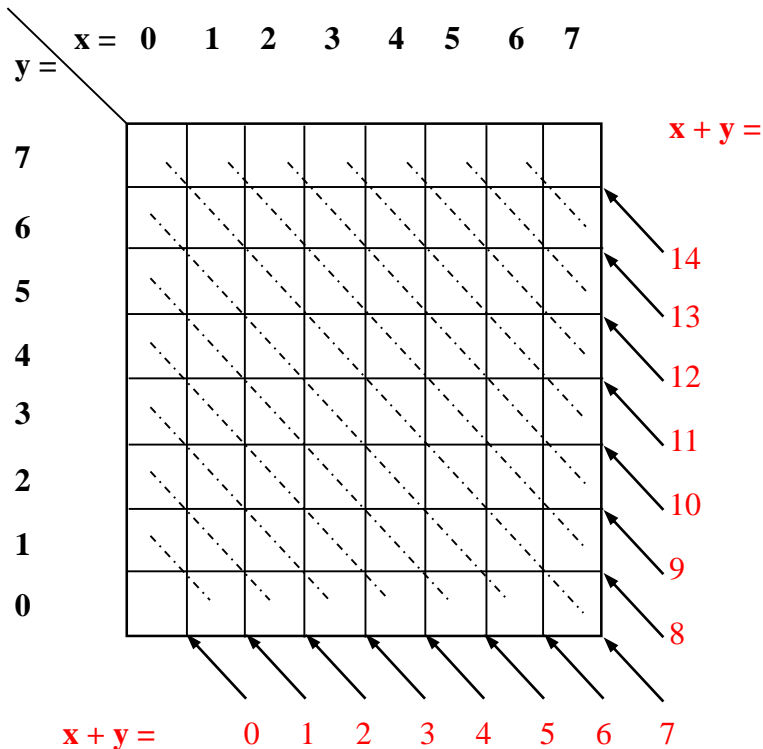
0: w przeciwnym przypadku.

Musimy sprawdzić:

- czy (x, y) i (a, b) są w tym samym wierszu: $y == b$?
- czy (x, y) i (a, b) są na tej samej przekątnej???

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Jak sprawdzić czy (x,y) i (a,b) są na tej samej **przekątnej**?



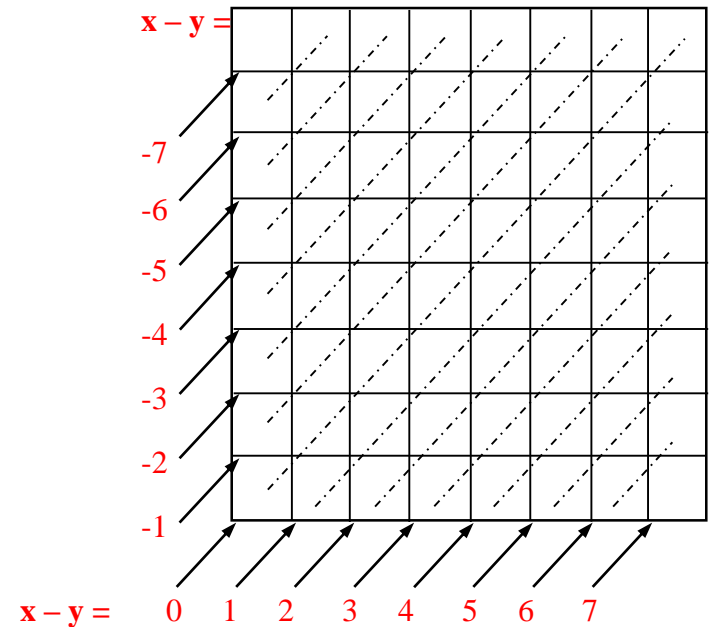
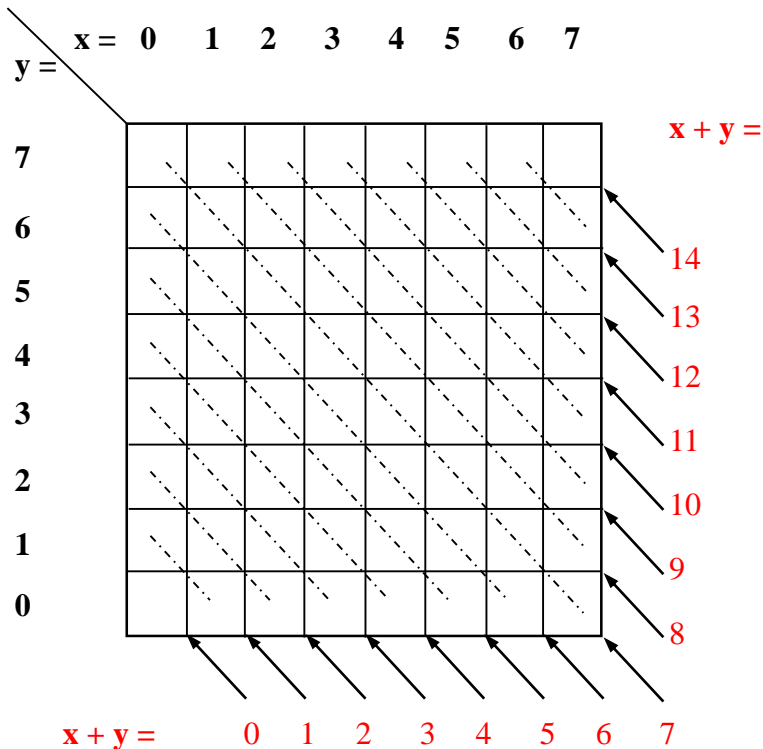
Obserwacja:

Wszystkie pola na (tej samej) przekątnej mają:

- równą **sumę** współrzędnych (lewa przekątna) **LUB**
- równą **różnicę** współrzędnych (prawa przekątna)

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Jak sprawdzić czy (x,y) i (a,b) są na tej samej przekątnej?



Wniosek

(x,y) i (a,b) znajdują się na tej samej przekątnej \Leftrightarrow

$$x + y = a + b \text{ LUB } x - y = a - b$$

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Inicjalizacja

```
void init()  
//Umieść -1 w komórkach b[0], b[1], ..., b[n - 1]  
{   int i;  
    for (i=0; i<n; i++) b[i]=-1; //wszystkie hetmany są „pod” szachownicą  
}
```

```
def init():  
#Umieść -1 w komórkach b[0], b[1], ..., b[n - 1]  
    for i in range(n):  
        b[i]=-1; #wszystkie hetmany są „pod” szachownicą
```


Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Nawroty:

1. $k \leftarrow 0$; // k oznacza „bieżącą” kolumnę
2. dopóki ($k < n$ oraz $k \geq 0$) // $k == n$: znaleziono rozw.; $k < 0$: brak rozw.
 1. Jeśli jest **wolne** pole i w kolumnie k powyżej pozycji $b[k]$:
 - Umieść hetmana na (najniższym wolnym powyżej $b[k]$) polu i w kolumnie k , przejdź do kolejnej kolumny:
 $b[k] \leftarrow i$
 $k \leftarrow k + 1$
 2. w przeciwnym przypadku:
 - Usuń hetmana z kolumny k , wróć do kolumny $k - 1$:
 $b[k] \leftarrow -1$ //usuń hetmana z kolumny k
 $k \leftarrow k - 1$ //wróć do poprzedniej kolumny

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Nawroty

```
int queens()  
// algorytm z nawrotami  
// queens() = n gdy znalezione rozwiązanie  
// queens() = -1 gdy brak rozwiązania  
{   int k;  
    b[0]=0; // umieść pierwszego hetmana w „lewym dolnym” narożniku (na dole kolumny 0)  
    k=1; // przejdź do kolumny numer 1  
    while (k<n && k>=0)  
    {   do //poszukiwanie „wolnego” pola w kolumnie k, idąc w górę od b[k]  
        { b[k]++; }  
        while (b[k]<n && !isfree(k,b[k]));  
        if (b[k]<n) k++;           //wolne pole znalezione, przejście do nast. kolumny!!!  
        else {b[k]=-1; k--;}      //brak wolnego pola, powrót do poprzedniej kolumny!  
    }  
    return k;  
}
```

Uwaga: k oznacza aktualnie „badaną” kolumnę.

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Nawroty

```
def queens() :  
    # algorytm z nawrotami  
    # queens() = n gdy znalezione rozwiązanie  
    # queens() = -1 gdy brak rozwiązania  
    b[0]=0; #umieść pierwszego hetmana w „lewym dolnym” narożniku (na dole kolumny 0)  
    k=1 # przejdź do kolumny numer 1  
    while k<n and k>=0:  
        #poszukiwanie „wolnego” pola w kolumnie k, idąc w górę od b[k]  
        b[k]+=1  
        while b[k]<n and not isfree(k,b[k]):  
            b[k]+=1  
        if b[k]<n: k+=1          #wolne pole znalezione, przejście do następnej kolumny!!!  
        else:  
            b[k]=-1; k-=1      #brak wolnego pola, powrót do poprzedniej kolumny  
    return k
```

Uwaga: k oznacza aktualnie „badaną” kolumnę.

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Nawroty

```
int queens()
{
    int k;
    b[0]=0;
    k=1;
    while (k<n && k>=0)
    {
        do //poszukiwanie wolnego pola w kolumnie k, zaczynając „od dołu”
            { b[k]++; }
        while (b[k]<n && !isfree(k,b[k]));
        if (b[k]<n) k++;
        else {b[k]=-1; k--;}
    }
    return k;
}
```

Uwaga: wartość $b[k]$ po „niebieskiej” pętli jest równa:

- najniższemu polu (powyżej pól dotychczas „sprawdzonych”) w kolumnie k , które nie jest atakowane przez hetmany z wcześniejszych kolumn, LUB
- n , gdy nie ma „wolnego” pola w kolumnie k (powyżej pól dotychczas „sprawdzonych”), czyli nieatakowanego przez hetmany z wcześniejszych kolumn.

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Nawroty

```
int queens()
{
    int k;
    b[0]=0; k=1;
    while (k<n && k>=0)
    {
        do
        {
            b[k]++;
        }
        while (b[k]<n && !isfree(k,b[k]));
        if (b[k]<n) k++;           //wolne pole znalezione!
        else {b[k]=-1; k--;}      //brak wolnego pola, powrót do poprzedniej kolumny
    }
    return k;
}
```

Uwagi:

- $k++$ i $k--$ opisują przejście do następnej/poprzedniej kolumny
- Po przejściu do „poprzedniej” kolumny (z k do $k - 1$), zaczynamy ponowne „sprawdzanie” wszystkich pól w tej kolumnie. Stąd $b[k] = -1$; (umieść hetmana z kolumny k „pod” szachownicą)

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Sprawdź czy pozycja (x,y) jest atakowana przez hetmany z kolumn $0,1,\dots,x-1$:

```
int isfree(int x, int y)
// isfree(x,y) = 1 wtw (x,y) nie jest atakowane
// przez hetmany z kolumn 0,1,2,...,x-1
{ int i;
  for (i=0; i<x; i++)
    if (b[i]-i==y-x || b[i]+i==y+x || b[i]==y) return 0;
  return 1;
}
```

```
def isfree( x, y):
# isfree(x,y) = 1 wtw (x,y) nie jest atakowane
# przez hetmany z kolumn 0,1,2,...,x-1
    for i in range(x):
        if b[i]-i==y-x or b[i]+i==y+x or b[i]==y:
            return 0
    return 1
```

Przypomnienie

Pozycja hetmana z kolumny i jest równa $(i, b[i])$.

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

Prezentacja wyników

```
void drawresult()
{ int i, j;
  printf("\n");
  for (i=0; i<n; i++) // prosty opis
    printf("%d ", b[i]);

  printf("\n\n");
  for(i=0; i<n; i++) // cała szachownica
  { for(j=0; j<n; j++)
    { if (b[j]==i) printf("x ");
      else printf("o ");
    }
    printf("\n");
  }
}
```

```
def drawresult():
    print("\n");
    for i in range(n): # prosty opis
        print b[i],

    print "\n"
    for i in range(n): #cała szach.
        for j in range(n):
            if b[j]==i: print "x ",
            else: print "o ",
        print
```

Problem hetmanów - nawroty - implementacja

```
#define n 6 //rozmiar szachownicy

int b[n];

void init()
{int i;
  for (i=0; i<n; i++) b[i]=-1;
}

int isfree(int x, int y)
{int i;
  for (i=0; i<x; i++)
    if (b[i]-i==y-x || b[i]+i==y+x ||
        b[i]==y) return 0;
  return 1;
}

int queens()
{int k=1; b[0]=0;
  while (k<n && k>=0)
  {do
    {b[k]++;}
    while (b[k]<n && !isfree(k,b[k]));
    if (b[k]<n) k++; else {b[k]=-1;k--;}
  }
  return k;
}
```

```
void drawresult()
{ int i, j;
  printf("\n");
  for (i=0; i<n; i++)
    printf("%d ", b[i]);
  printf("\n\n");
  for(i=0; i<n; i++)
  { for(j=0; j<n; j++)
    if (b[j]==i) printf("x ");
    else printf("o ");
    printf("\n");
  }
}

main()
{
  init();
  if (queens()==n) drawresult();
  else printf("brak rozwiazania");
  system("pause");
}
```


Problem hetmanów - nawroty - implementacja

```
def init():
    for i in range(n):
        b[i]=-1;

def isf( x, y):
    for i in range(x):
        if b[i]-i==y-x or b[i]+i==y+x or
            b[i]==y:
            return 0;
    return 1;

def queens():
    b[0]=0
    k=1
    while k<n and k>=0:
        b[k]+=1
        while b[k]<n and not isf(k,b[k]):
            b[k]+=1
        if b[k]<n: k+=1
        else: b[k]=-1; k-=1
    return k
```

```
def drawresult():
    print("\n");
    for i in range(n):
        print b[i],

    print

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if b[j]==i: print "x",
            else: print "o",
        print

n=6 # rozmiar szachownicy
b=Array(n)
init()
if queens()==n:
    drawresult()
else: print("brak rozwiazania")
```

Hetmany – przeszukiwanie z nawrotami - złożoność

$O(n^n)$... można lepiej oszacować (przez mniejszą funkcję)?

Problem hetmanów – rekurencyjnie...

Idea rozwiązania:

- ustawiamy hetmany w kolejnych kolumnach
- ustawienie w kolumnach $k, k+1, \dots, n$ to:
 - ustawienie w kolumnie k -tej
 - ustawienie w kolumnach $k+1, k+2, \dots, n$
(rekurencja) – o ile k nie jest ostatnią kolumną

Wejście:

- n – rozmiar szachownicy
- k – pozycja kolumny od której jeszcze nie ustawiliśmy hetmanów
- a – tablica opisująca pozycje już ustawionych hetmanów (czyli w kolumnach $0, 1, \dots, k-1$)

Problem hetmanów – rekurencyjnie...

Idea rozwiązania – dokładniej:

1. ustawiamy hetmany w kolejnych kolumnach
2. ustawienie w kolumnach $k, k+1, \dots, n$ gdy $k < n$:
dla kolejnych poprawnych ustawień w kolumnie k -tej....
 - sprawdzamy rekurencyjnie czy możliwe jest poprawne ustawienie w kolumnach $k+1, k+2, \dots, n$.
3. ustawienie w kolumnach $k, k+1, \dots, n$ gdy $k = n$:
ustawiliśmy już wszystkie hetmany, koniec!

Uwaga: numery kolumn to $0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Problem hetmanów – rekurencyjnie...

```
int hetmany(int n, int k, int a[])
{
    if (k==n) return 1;
    for(int i=0; i<n; i++) {
        if isf(k,i) {
            a[k]=i;
            if (hetmany(n,k+1,a)) return 1;
        }
    }
    return 0;
}
```

```
def hetmany(n, k, a):
    if k==n: return 1
    for i in range(n):
        if isf(k,i):
            a[k]=i
            if hetmany(n,k+1,a): return 1
    return 0
```

Problem hetmanów – rekurencyjnie...

Pytania:

- Jak zastąpić w naszym programie funkcję `queens` przez funkcję `hetmany`?
- Z jakimi parametrami wywołać funkcję `hetmany`?
- Która wersja szybsza?
- Która wersja łatwiejsza w implementacji?

```
int hetmany(int n, int k, int a[])
```

```
int queens()
```

Problem hetmanów – rekurencyjnie...

Pytania:

- Jak zastąpić w naszym programie funkcję queens przez funkcję hetmany?
- Z jakimi parametrami wywołać funkcję hetmany?

```
int queens()  
{  int k;  
  b[0]=0; k=1;  
  while (k<n && k>=0)  
  {  do  
      { b[k]++; }  
      while (b[k]<n && !isfree(k,b[k]));  
      if (b[k]<n) k++;  
      else {b[k]=-1; k--;}  
  }  
  return k;  
}
```

```
int queensRek()  
{  int k;  
    if hetmany(n,0,b)  
        return n;  
    else return -1;  
}
```