

Wstęp do informatyki

Wykład 2

Uniwersytet Wrocławski

Instytut Informatyki

Realizacja algorytmu przez komputer

Tydzień temu:

- opis algorytmu w języku zrozumiałym dla człowieka: schemat blokowy, pseudokod.

Dziś:

- schemat logiczny komputera,
- zapis algorytmu w formie umożliwiającej wykonanie go przez komputer.

Schemat logiczny komputera

1. **urządzenia („układy”) wejścia i wyjścia:** komunikacja ze światem
2. **procesor:** przetwarza informacje (wykonuje instrukcje), steruje pozostałymi elementami
3. **pamięć:** przechowuje informacje (dane i programy)
4. **magistrale komunikacyjne:** łączą pozostałe elementy

Maszyna RAM

1a. taśma wejściowa: ciąg liczb całkowitych

1b. taśma wyjściowa : ciąg liczb całkowitych, wypisywanych przez program

2. procesor: wykonuje instrukcje

3a. pamięć: komórki 0, 1, 2, 3,...; przechowują liczby całkowite

- Komórka 0: **akumulator** / **rejestr**

3b. program: ciąg instrukcji do wykonania

Licznik rozkazów: wskazuje na instrukcję, która aktualnie powinna być wykonana

Maszyna RAM

taśma wejściowa

The screenshot shows the RAM Machine 2006 software interface. The title bar reads "RAM Machine 2006 [Łukasz Szkup, Institute of Computer Science, Wrocław University, Poland]". The menu bar includes File, View, Program, Data, Tools, and Help. The toolbar contains icons for file operations and execution. The main window is divided into several sections:

- PROCESSOR**: Contains fields for "Instruction:" and "Argument:".
- MEMORY**: A table with columns "Address" and "Value".
- PROGRAM**: A table with columns "LN", "Label", "Instruction", "Argument", and "Comment".

The **MEMORY** table contains the following data:

Address	Value
0	23
1	10
2	13
3	?
4	?

The **PROGRAM** table contains the following data:

LN	Label	Instruction	Argument	Comment
1		read	1	
2		read	2	
3		load	1	
4		add	2	
5		write	0	

At the bottom of the interface, there are two horizontal tapes. The top tape, labeled "taśma wejściowa" (input tape), has five slots with values 1, 2, 3, 4, and 5. The bottom tape, labeled "taśma wyjściowa" (output tape), has five slots with values 1, 2, 3, 4, and 5. A yellow arrow points to the value 23 in the Memory table, and another yellow arrow points to the value 3 in the output tape.

taśma wyjściowa

RAM: szczegóły

- **Pamięć:** nieskończona liczba komórek etykietowanych 0, 1, 2,...
- Komórka 0 nazywana **rejestrem** lub **akumulatorem**
- Każda komórka może przechowywać **dowolną** liczbę całkowitą
- **Taśma wejściowa i wyjściowa** to urządzenia **sekwencyjne**:
 - taśma wejściowa: dane dla programu (wejście)
 - taśma wyjściowa: wyniki programu (wyjście)
 - urządzenie sekwencyjne: dostęp tylko w jednym kierunku, każdy element czytany tylko **jeden** raz.

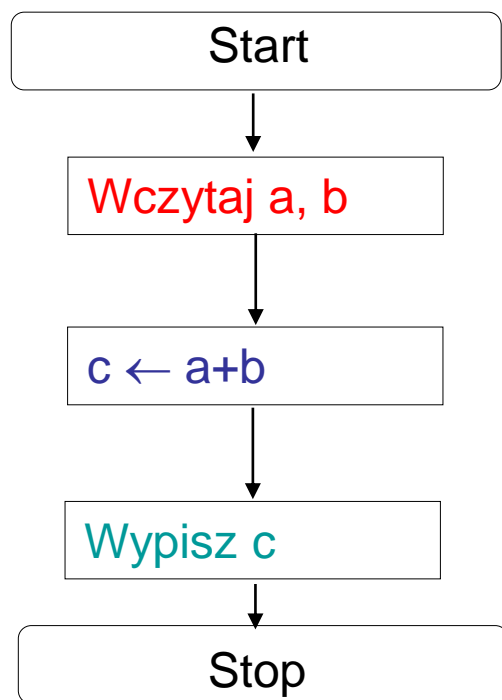
RAM: cykl główny procesora

- Pobierz instrukcję do wykonania – wskazywaną przez **licznik rozkazów**
- Pobierz argumenty instrukcji do wykonania
- Wykonaj instrukcję
- Uaktualnij **licznik rozkazów** (o ile nie został zmieniony przez instrukcję...)

Kod RAM: przykład

Wejście: a, b – liczby

Wyjście: a + b



Skojarzenie zmiennych z komórkami pamięci:

1 – a

2 – b

3 – c

Translacja na kod RAM:

Read 1

Read 2

Load 1

Add 2

Store 3

Write 3

Halt

Wykonanie programu

Powtarzaj **cykl główny procesora** aż do momentu gdy:

- Licznik rozkazów nie wskazuje na żadną instrukcję
LUB
- Wykonana została instrukcja HALT

RAM: instrukcje

Składnia: `<etykieta> <instrukcja> <argument>`

Instrukcje wejścia/wyjścia:

Read	Czytaj kolejną liczbę z taśmy wejściowej
Write	Wypisz liczbę na końcu taśmy wyjściowej

Przesłanie do/z akumulatora:

Load	Prześlij do akumulatora
Store	Prześlij zawartość akumulatora do innej komórki

RAM: instrukcje cd.

Instrukcje arytmetyczne:

Add	Dodaj zawartość akumulatora i argument
Sub	Od zawartości akumulatora odejmij argument
Mult	Pomnóż zawartość akumulatora przez argument
Div	Podziel zawartość akumulatora przez argument (wynik zaokrąglony w dół)

Rezultat jest **zawsze** umieszczany w **akumulatorze**.

RAM: instrukcje cd.

Halt: zakończ działanie programu

Uwaga:

- **Halt** nie zawsze jest konieczne, gdyż:
 - jeśli licznik rozkazów wskazuje na pozycję niezawierającą żadnej instrukcji, program również się zatrzymuje.

RAM: argumenty

Argument	Znaczenie
$\langle \text{liczba} \rangle$	zawartość komórki o numerze liczba
$= \langle \text{liczba} \rangle$	wartość liczba
$\wedge \langle \text{liczba} \rangle$	adresowanie pośrednie: zawartość komórki, której numer znajduje się w komórce o numerze liczba
$\langle \text{etykieta} \rangle$	etykieta instrukcji

Argumenty instrukcji: przykład

- **load 5:**

pobierz (skopiuj) do akumulatora zawartość
komórki numer 5

- **load =5:**

umieść liczbę 5 w akumulatorze

- **load ^5:**

do akumulatora pobierz (skopiuj) zawartość
komórki, której numer znajduje się w komórce 5

Argumenty instrukcji: przykład

div 5: podziel zawartość akumulatora przez zawartość komórki numer 5

div =5: podziel zawartość akumulatora przez liczbę 5

div ^5: podziel zawartość akumulatora przez zawartość komórki, której numer znajduje się w komórce 5

WYNIK jest zawsze umieszczany w akumulatorze!

Argumenty instrukcji: przykład

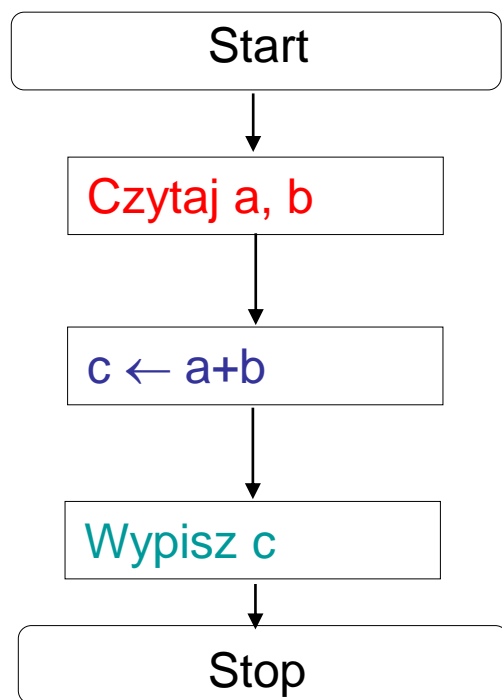
Komórka	Wartość
0	90
1	
2	
3	15
4	
5	3
6	
7	

Instrukcja	Nowa wartość komórki 0
div 5	30 (=90/3)
div =5	18 (=90/5)
div ^5	6 (=90/15)

Kod RAM: przykład

Wejście: a, b – liczby

Wyjście: a + b



**Skojarzenie z
komórkami pamięci:**

1 – a

2 – b

3 – c

Translacja na kod RAM:

Read 1

Read 2

Load 1

Add 2

Store 3

Write 3

Halt

Instrukcje RAM: skoki

Jump	Skok bezwarunkowy
Jzero	Skok pod warunkiem, że w akumulatorze znajduje się zero
Jgtz	Skok pod warunkiem, że w akumulatorze znajduje się liczba większa od zera

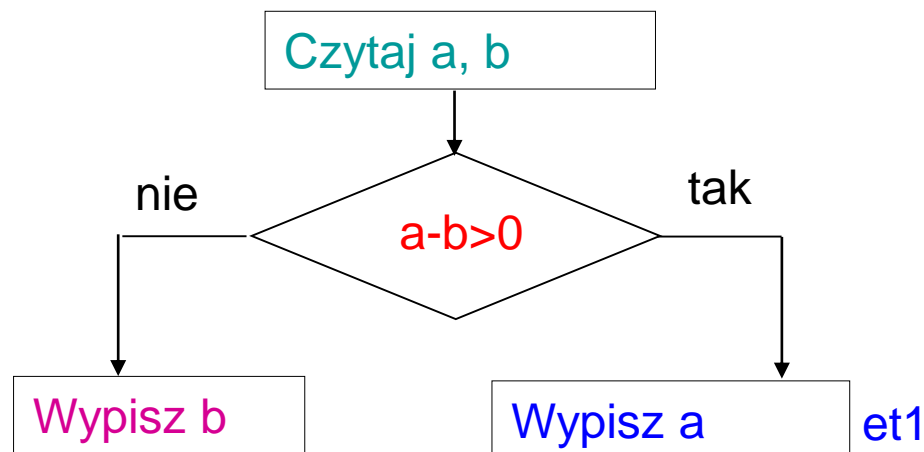
Argument: **etykieta** instrukcji

Etykieta: napis umieszczony „z lewej strony” instrukcji (nie jest wymagana).

RAM przykład: maksimum z dwóch liczb

Wejście: a, b – liczby

Wyjście: maksimum liczb a, b



Skojarzenie:

1 – a

2 – b

Ćwiczenie. Uzupełnij powyższy schemat o bloki Start i Stop.

```
READ 1
READ 2
LOAD 1
SUB 2
JGTZ et1
WRITE 2
HALT

et1 WRITE 1
HALT
```

Translacja schematu blokowego na kod RAM

1. Skojarz zmienne z komórkami pamięci
2. Translacja każdego bloku schematu blokowego **osobno!** Zaznacz instrukcje kodu RAM odpowiadające każdemu blokowi!
3. Przekształć warunki sprawdzane w schemacie blokowym do jednej z postaci

$\langle \text{wyrażenie} \rangle = 0$

$\langle \text{wyrażenie} \rangle > 0$

Używaj **skoków** aby zmienić odpowiednio licznik rozkazów (przejsć do odpowiedniego fragmentu programu).

Translacja schematu blokowego na kod RAM

UWAGA!

Na **ćwiczeniach należy** prezentować kod RAM tworząc go w sposób opisany na poprzednim slajdzie:

- Najpierw tworzymy schemat blokowy
- Potem wykonujemy translację schematu blokowego na kod RAM

Schemat blokowy \Rightarrow kod RAM

$x \leftarrow \langle \text{expr1} \rangle + \langle \text{expr2} \rangle$

Skojarzona z
komórką numer **k**

- oblicz $\langle \text{expr1} \rangle$, zachowaj w pewnej komórce **i**
- oblicz $\langle \text{expr2} \rangle$, zachowaj w pewnej komórce **j**
- dodaj $\langle \text{expr1} \rangle$ do $\langle \text{expr2} \rangle$:

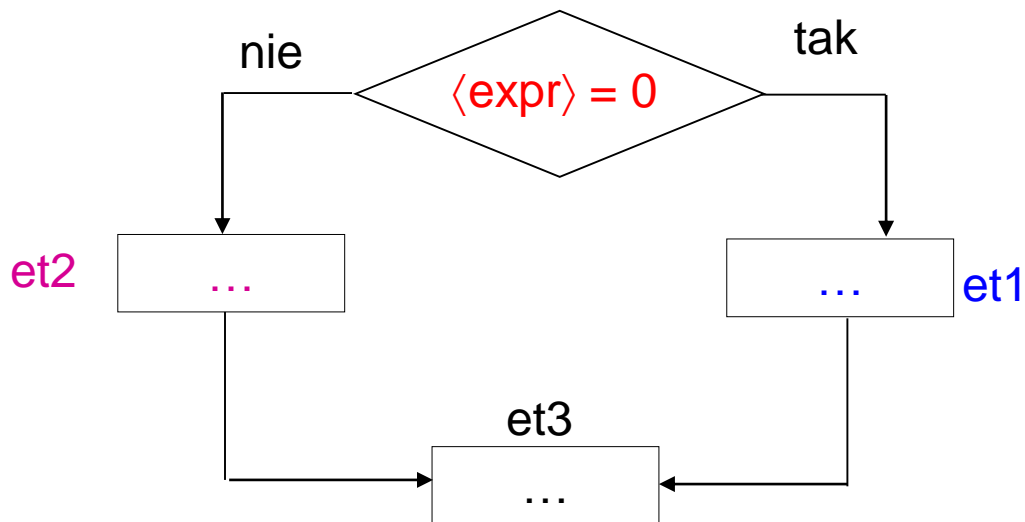
load i

add j

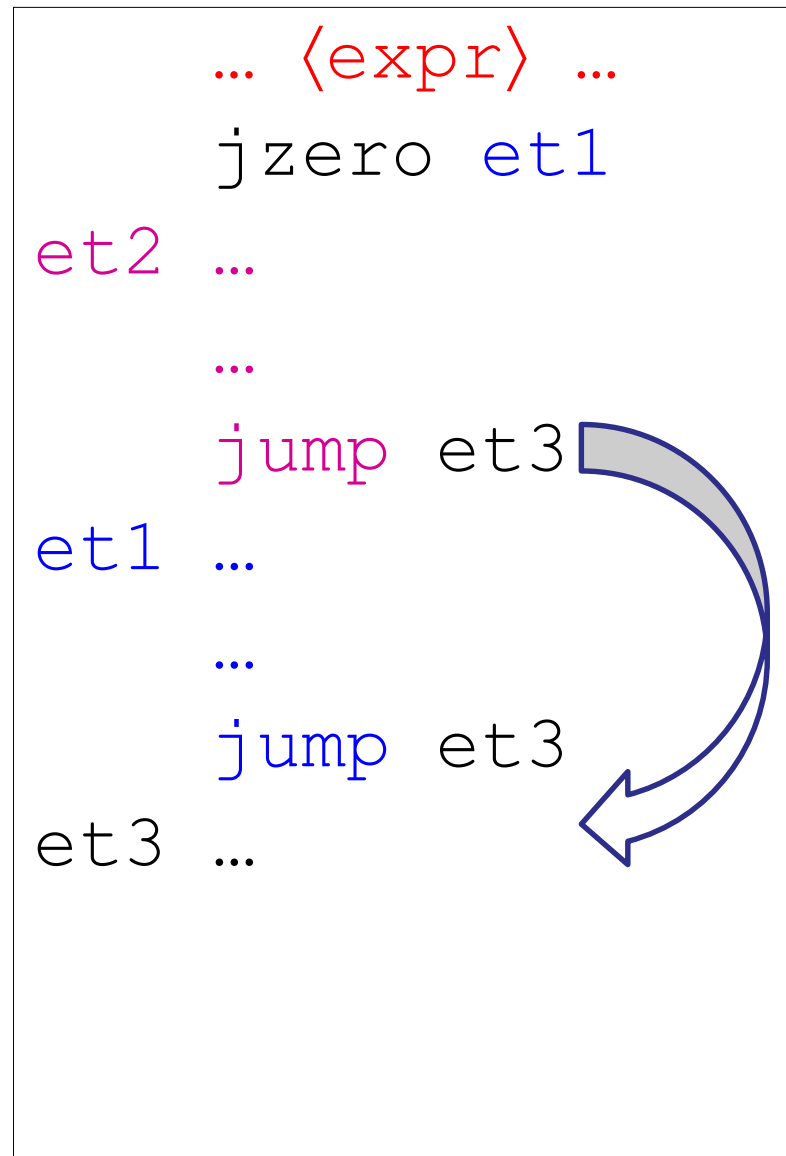
- zachowaj wynik w komórce **k**:

store k

Schemat blokowy \Rightarrow RAM



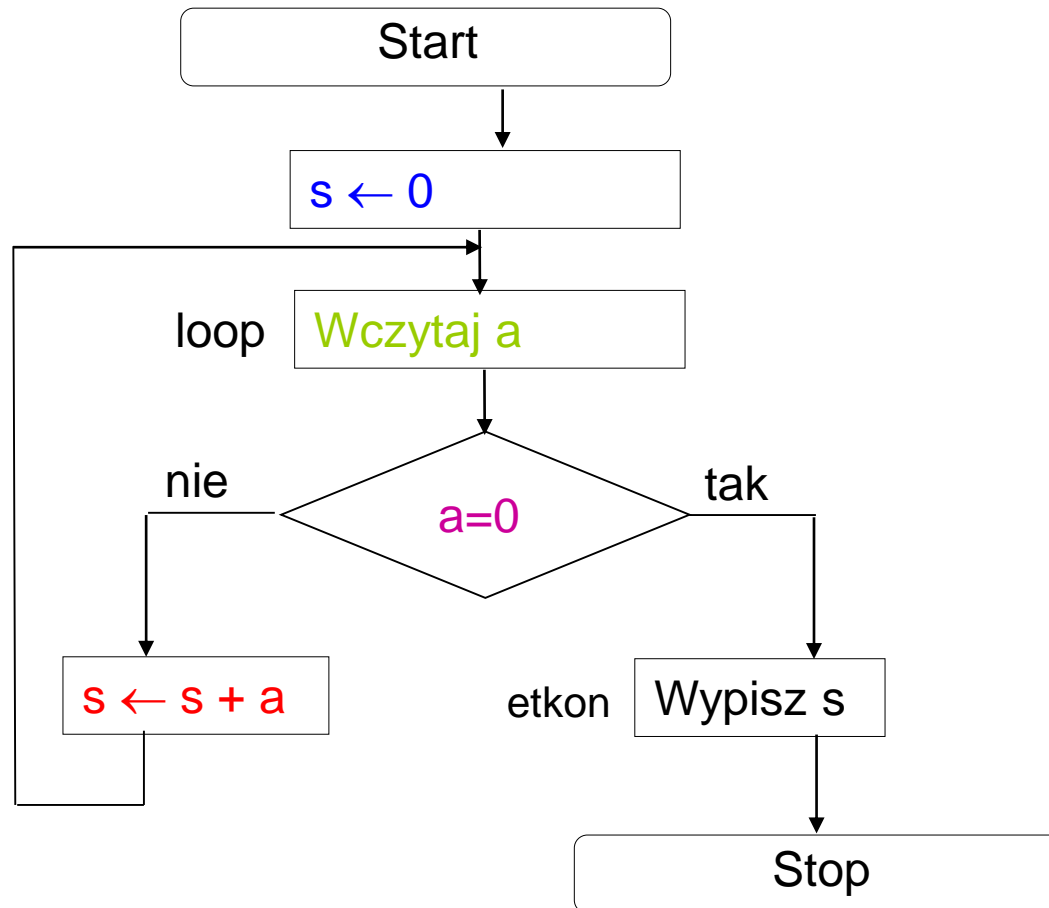
- oblicz **<expr>**, wynik masz w akumulatorze;
- wykonaj skok warunkowy:
jzero **et1**
- Kod odpowiadający „nie”
podaj pod instrukcją skoku



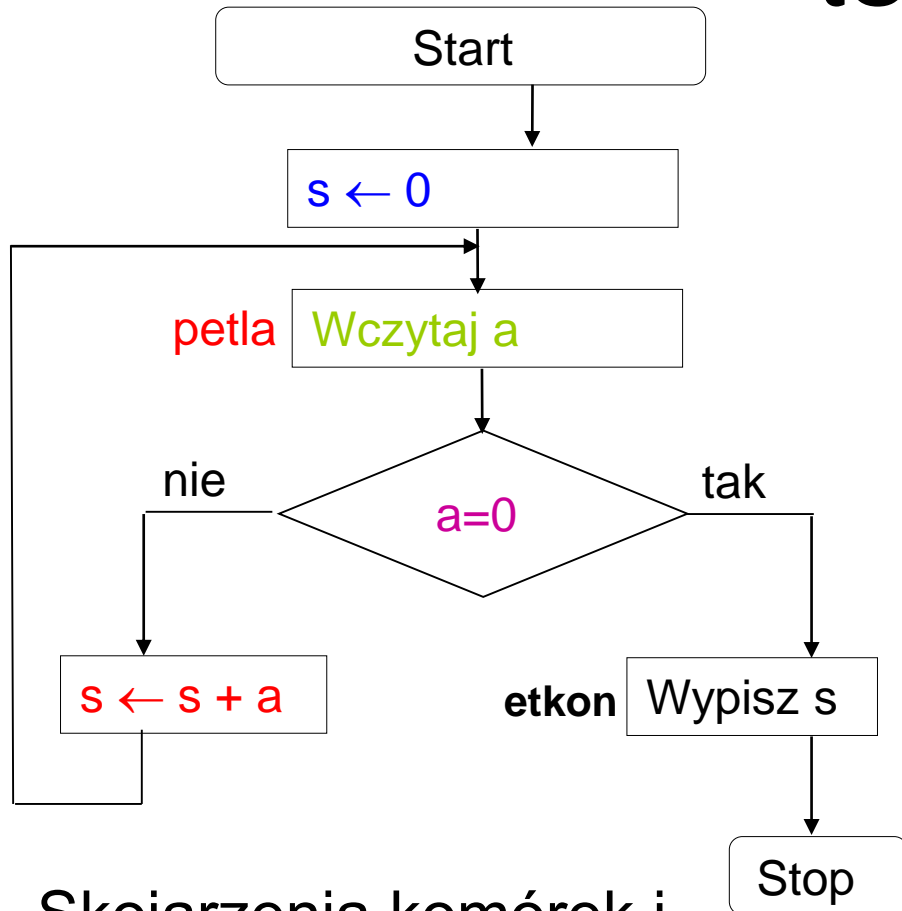
Suma ciągu liczb

Wejście: ciąg liczb zakończony zerem!

Wyjście: suma wszystkich liczb w ciągu



Suma ciągu liczb, cd.



Skojarzenia komórek i zmiennych:

1 – a

2 – s

```
load =0
store 2
petla read 1
load 1
jzero etkon
load 2
add 1
store 2
jump petla
etkon write 2
```

Suma ciągu liczb – złożoność czasowa

Rozmiar danych:

n – liczba elementów do zsumowania (bez ostatniego zera)

„Złożoność” czasowa schematu blokowego:

$$1 + 3n + 3 = \mathbf{3n + 4} \text{ [} n \text{ – długość ciągu, bez końcowego zera]}$$

„Złożoność” czasowa programu w kodzie RAM:

$$2 + 7n + 4 = \mathbf{7n + 6}$$

„Która złożoność poprawna”?

Złożoność asymptotyczna

Złożoność **asymptotyczna**

Notacja „dużego O”:

- ignorujemy **stałe** (konkretne liczby) zależne od zapisu algorytmu / modelu obliczeń;
- np. $10n$, $n+7$, $112n$ są „podobne” (funkcje liniowe);
- Lecz $100n$ i $2n^2$ istotnie się różnią!

Pyt.: Która z nich jest „większa”?

Odp.: $2n^2$

Pyt.: Dlaczego?

Odp.: Szybciej rośnie!

Złożoność **asymptotyczna**

Notacja „dużego O” formalnie:

$$f(n) = O(g(n))$$

wtedy i tylko wtedy gdy (wtw)

istnieje stała **c**>0 i liczba naturalna **m**>0
takie, że $f(n) \leq c \cdot g(n)$ dla każdego $n > m$.

Złożoność asymptotyczna - intuicja

$$f(n) = O(g(n))$$

wtw

$g(n)$ rośnie co najmniej tak samo szybko jak
 $f(n)$ dla $n \rightarrow \infty$

Złożoność asymptotyczna – przykłady

$100 \cdot n = O(n^2)$, gdyż

$100 \cdot n \leq 100 \cdot n^2$ dla każdego $n > 0$.

$55 \cdot n^2 + 100n - 10 = O(n^2)$, gdyż

$55 \cdot n^2 + 100n - 10 \leq 57 \cdot n^2$ dla każdego $n > 60$.

$n^2 = O(2^n)$, gdyż

$n^2 \leq 1 \cdot 2^n$ dla każdego $n > 5$. [jak to pokazać?]

Złożoność asymptotyczna – przykłady

$n^2 / 1000 \neq O(n)$, gdyż dla **każdego** $c > 0$ mamy:

$$n^2 / 1000 > c \cdot n$$

dla nieskończenie wielu n .

W szczególności, nierówność

$$n^2 / 1000 > c \cdot n$$

zachodzi dla każdego n spełniającego warunek

$$n > 2 \cdot 1000 \cdot \max(c, 1).$$

Złożoność asymptotyczna – przykłady

$$100 \cdot n = O(n)$$

$$100 \cdot n = O(n^2)$$

$$n^2 / 1000 \neq O(n)$$

$$77 \cdot n + 333 = O(n)$$

$$55 \cdot n^2 + 100n - 10 = O(n^2)$$

$$55 \cdot n^2 + 100n - 10 = O(n^3)$$

$$55 \cdot n^2 + 100n - 10 \neq O(n)$$

$$n^2 = O(2^n)$$

$$2^n \neq O(n^2)$$

Złożoność asymptotyczna – narzędzia

(zał. $f(n), g(n) \geq 0$ dla każdego $n > 0$)

Fakt. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$ to $f(n) = O(g(n))$.

Fakt. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ to $f(n) \neq O(g(n))$.

Uwaga: może zachodzić $f(n) = O(g(n))$ gdy granica wyrażenia $f(n)/g(n)$ nie istnieje.

Suma ciągu liczb – złożoność czasowa

Rozmiar danych:

n – liczba elementów do zsumowania (bez ostatniego zera)

„Złożoność” czasowa schematu blokowego:

$$1 + 3n + 3 = \mathbf{3n + 4}$$

„Złożoność” czasowa programu w kodzie RAM:

$$2 + 7n + 4 = \mathbf{7n + 6}$$

Złożoność asymptotyczna: $O(n)$

Sortowanie przez zliczanie

Sortowanie przez zliczanie

Problem

Wejście:

n – liczba naturalna;

a_1, a_2, \dots, a_n – ciąg liczb naturalnych z przedziału $[0, 9]$

Wyjście: elementy a_1, a_2, \dots, a_n wypisane w porządku niemalejącym

Przykład

Wejście: **11**; 0, 7, 9, 9, 2, 1, 6, 7, 6, 5, 5

Wyjście: 0, 1, 2, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9, 9

Sortowanie przez zliczanie

Algorytm

- Nadaj licznikom $K[0], \dots, K[9]$ wartość zero.
- Wczytaj n
- Dla $i=1, 2, \dots, n$ powtarzaj:
 - Wczytaj a
 - $K[a] \leftarrow K[a] + 1$
- Dla $i=0, 1, 2, \dots, 9$ powtarzaj:
 - Powtórz $K[i]$ razy:
 - Wypisz i

licznik: „zlicza” liczbę wystąpień pewnego zdarzenia

Sortowanie przez zliczanie

Implementacja liczników $K[0], \dots, K[9]$ na maszynie RAM:

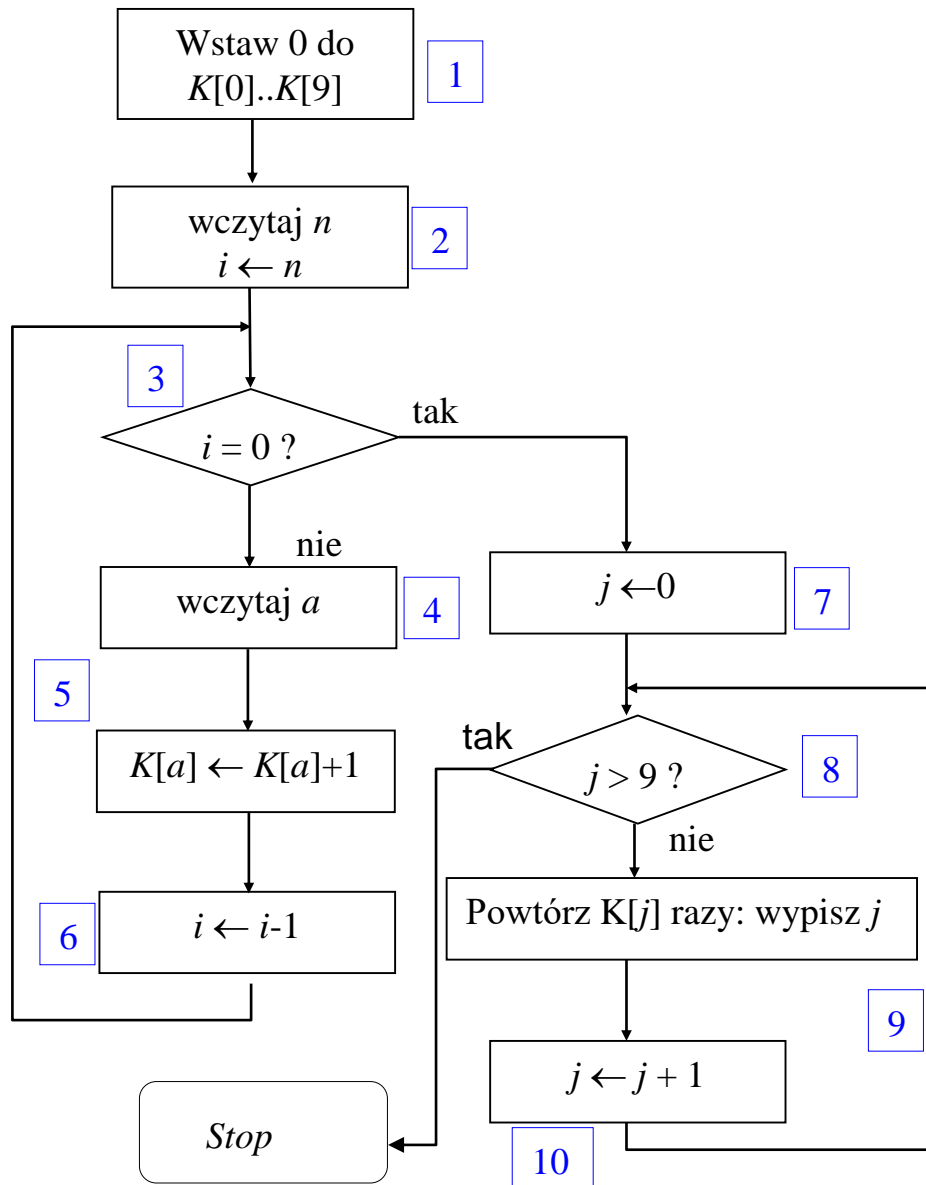
- $K[0], \dots, K[9]$ to sąsiednie komórki pamięci

Co to daje?

- Adres komórki odpowiadającej licznikowi $K[i]$ jest równy adresowi $K[0]$ plus i

x	$K[0]$
x+1	$K[1]$
x+2	$K[2]$
x+3	$K[3]$
x+4	$K[4]$
x+5	$K[5]$
x+6	$K[6]$
x+7	$K[7]$
x+8	$K[8]$
x+9	$K[9]$

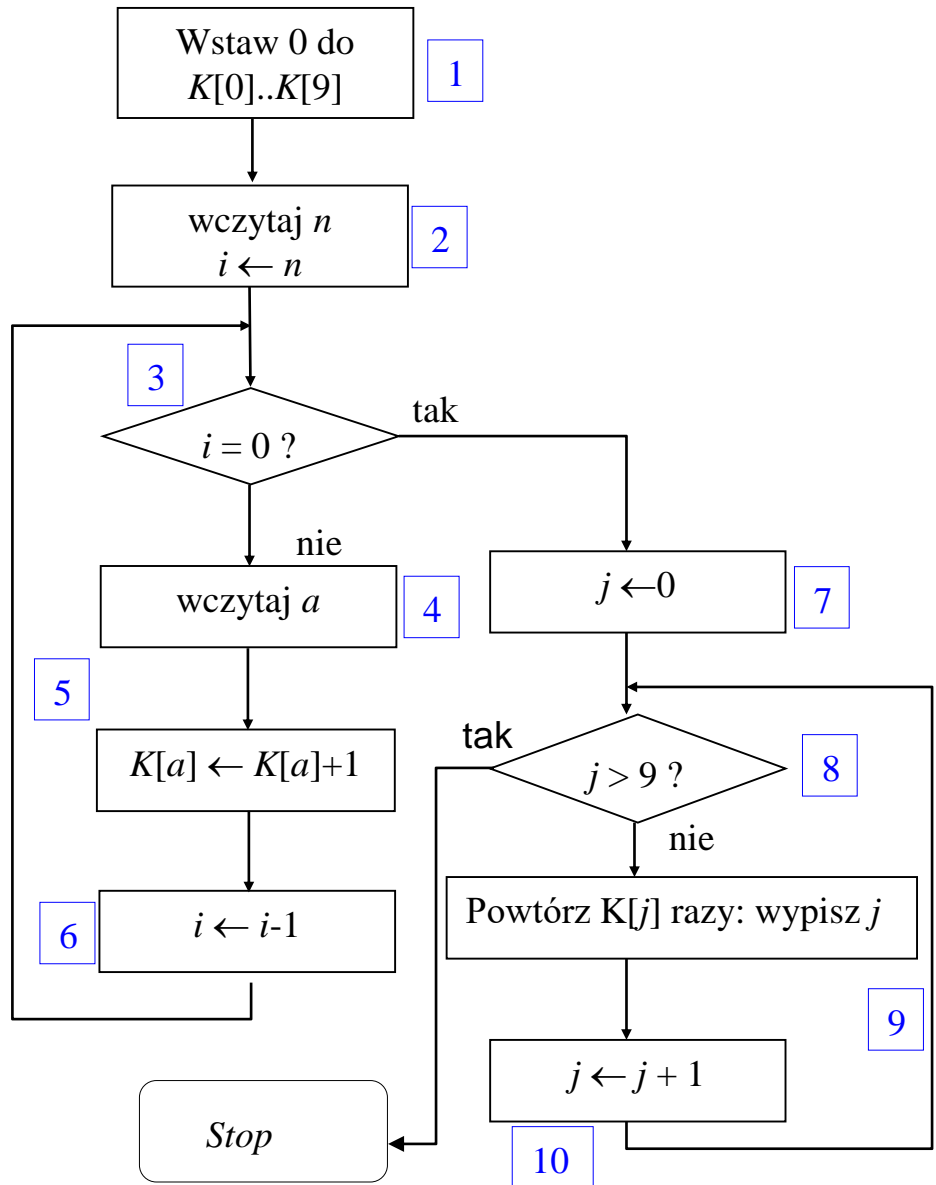
Sortowanie przez zliczanie



Algorytm

- Nadaj licznikom $K[0], \dots, K[9]$ wartość zero.
- Wczytaj n
- Dla $i=1, 2, \dots, n$ powtarzaj:
 - Wczytaj a
 - $K[a] \leftarrow K[a] + 1$
- Dla $j=0, 1, 2, \dots, 9$ powtarzaj:
 - Powtórz $K[j]$ razy:
 - Wypisz j

Sortowanie przez zliczanie



Skojarzenia:

$K[0]..K[9]$:

komórki 15..24

n : C2

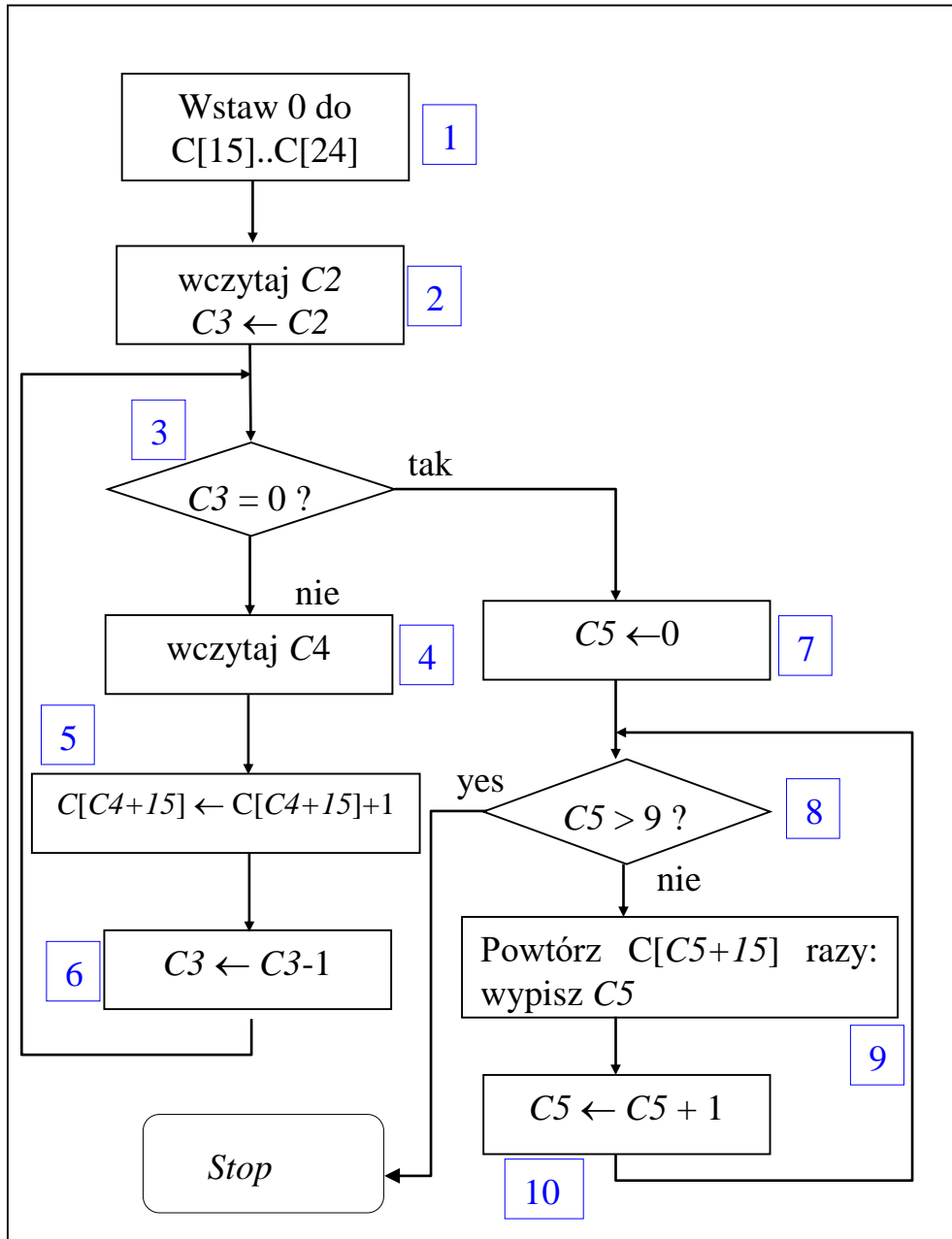
i : C3

a : C4

j : C5

Uwaga: komórkę C_i
będziemy też oznaczać
przez $C[i]$

Sortowanie przez zliczanie



Skojarzenia:

$K[0]..K[9]$:

komórki 15..24

n : $C2$

i : $C3$

a : $C4$

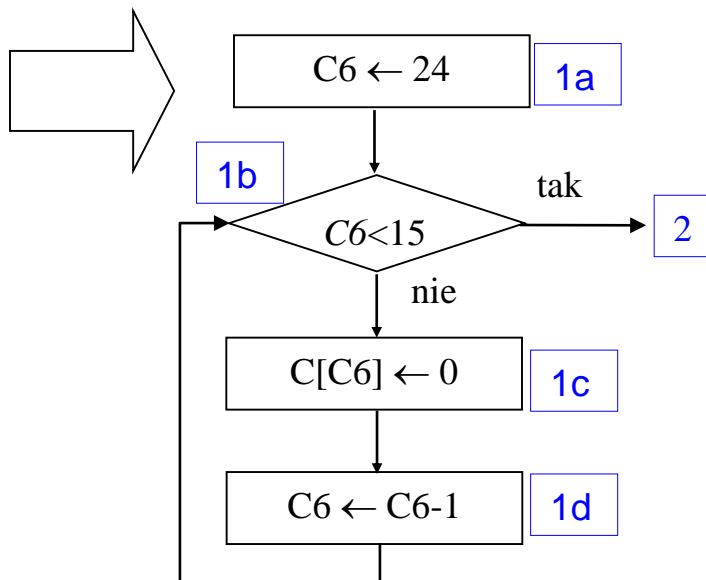
j : $C5$

Uwaga: komórkę C_i
będziemy też oznaczać
przez $C[i]$

Sortowanie przez zliczanie

Wstaw 0 do
C[15]..C[24]

1

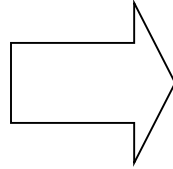


```
load    =24  #1a
store   6
L1b:    load  =15  #1b
        sub   6
        jgtz  L2
        load  =0   #1c
        store ^6
        load  6    #1d
        sub   =1
        store 6
        jump  L1b
```

Sortowanie przez zliczanie

$C[C4+15] \leftarrow C[C4+15]+1$

5

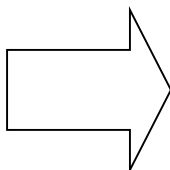


```
load  4    #5
add    =15
store  7
load   ^7
add    =1
store  ^7
```

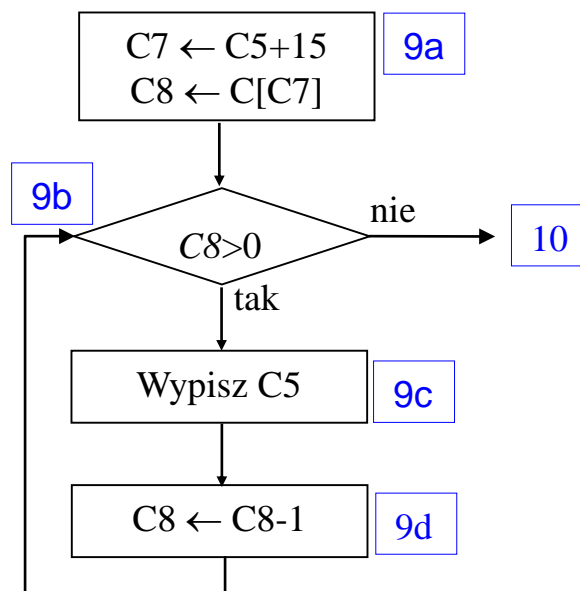
Sortowanie przez zliczanie

9

Powtórz $C[C5+15]$ razy:
wypisz $C5$



```
        load  5    #9a
        add   =15
        store  7
        load  ^7
        store  8
L9b:    load  8    #9b
        jgtz  L9c
        jump  L10
L9c:    write  5    #9c
        load  8    #9d
        sub   =1
        store  8
        jump  L9b
```



Sortowanie przez zliczanie ogólniej

Problem

Wejście:

n, k – liczby naturalne;

a_1, a_2, \dots, a_n – ciąg liczb całkowitych z zakresu $[0, k]$.

Wyjście:

elementy ciągu a_1, a_2, \dots, a_n wypisane w porządku niemalejących

Rozwiązanie

Zamiast liczników $K[0], \dots, K[9]$, użyj liczników $K[0], \dots, K[k]$.

Sortowanie przez zliczanie – złożoność

Rozmiar danych:

n

Pamięć:

proporcjonalna do k , czyli $O(k)$

Czas:

proporcjonalny do $n+k$, czyli $O(n+k)$:

- gdy $n > k$: $O(n + k) = O(n)$
- gdy $n \leq k$: $O(n + k) = O(k)$

Sortowanie przez zliczanie – złożoność

Czas:

proporcjonalny do $n+k$, czyli $O(n+k)$:

gdy $k = O(n)$: $O(n+k) = O(n)$

gdy $n = O(k)$: $O(n+k) = O(k)$

Uwaga

Jeśli $k \gg n$ (czyli k jest „istotnie większe” od n):

- potrzebujemy większej pamięci niż długość ciągu!
- czas obliczeń proporcjonalny do k , czyli znacznie większy od n (czy taki algorytm jest „praktyczny”?).

Podsumowanie (1)

1. Maszyna RAM – model komputera:

- „Zmienna” – komórka w pamięci
- Operacje arytmetyczne – wykonaj operację na akumulatorze i (ewentualnie) zawartości innej komórki
- Cykl główny procesora
- Pętle – skoki – licznik rozkazów.

2. Adresowanie pośrednie i jego zastosowania!

3. Notacja asymptotyczna w szacowaniu złożoności

4. Problem sortowania; sortowanie przez zliczanie: jak działa? kiedy przydatne?

Podsumowanie (2)

Pamiętaj na ćwiczeniach, aby kod blokowy tłumaczyć na kod RAM w następujący sposób:

- Skojarz zmienne z komórkami pamięci
- „Tłumacz” każdy element schematu blokowego **osobno!** Zaznacz instrukcje kodu RAM odpowiadające każdemu blokowi!
- Przekształć warunki sprawdzane w schemacie blokowym do jednej z postaci

$\langle \text{wyrażenie} \rangle = 0$

$\langle \text{wyrażenie} \rangle > 0$

Używaj **skoków** aby zmienić odpowiednio licznik rozkazów (przejsć do odpowiedniego fragmentu programu).

Podsumowanie (3)

Rozmiar danych:

- Rozmiar danych wynika ze specyfikacji **problemu**, nie konkretnego algorytmu
- Rozmiar danych można ustalić na podstawie opisu **wejścia** w specyfikacji podanego problemu

Złożoność pamięciowa:

- Złożoność pamięciowa **algorytmu** to rozmiar wykorzystanej pamięci (liczba zmiennych lub komórek maszyny RAM)
- Złożoność pamięciowa może być zarówno mniejsza od rozmiaru danych jak i od niego większa