Wstęp do informatyki

Wykład 4

Uniwersytet Wrocławski
Instytut Informatyki

Plan na dziś

1. Pseudokod/schemat blokowy – język programowania – kod maszynowy
2. O translacji programów na kod maszynowy
3. Programujemy wydajnie i analizujemy programy!

Schematy blokowe a języki programowania

Przykład 1

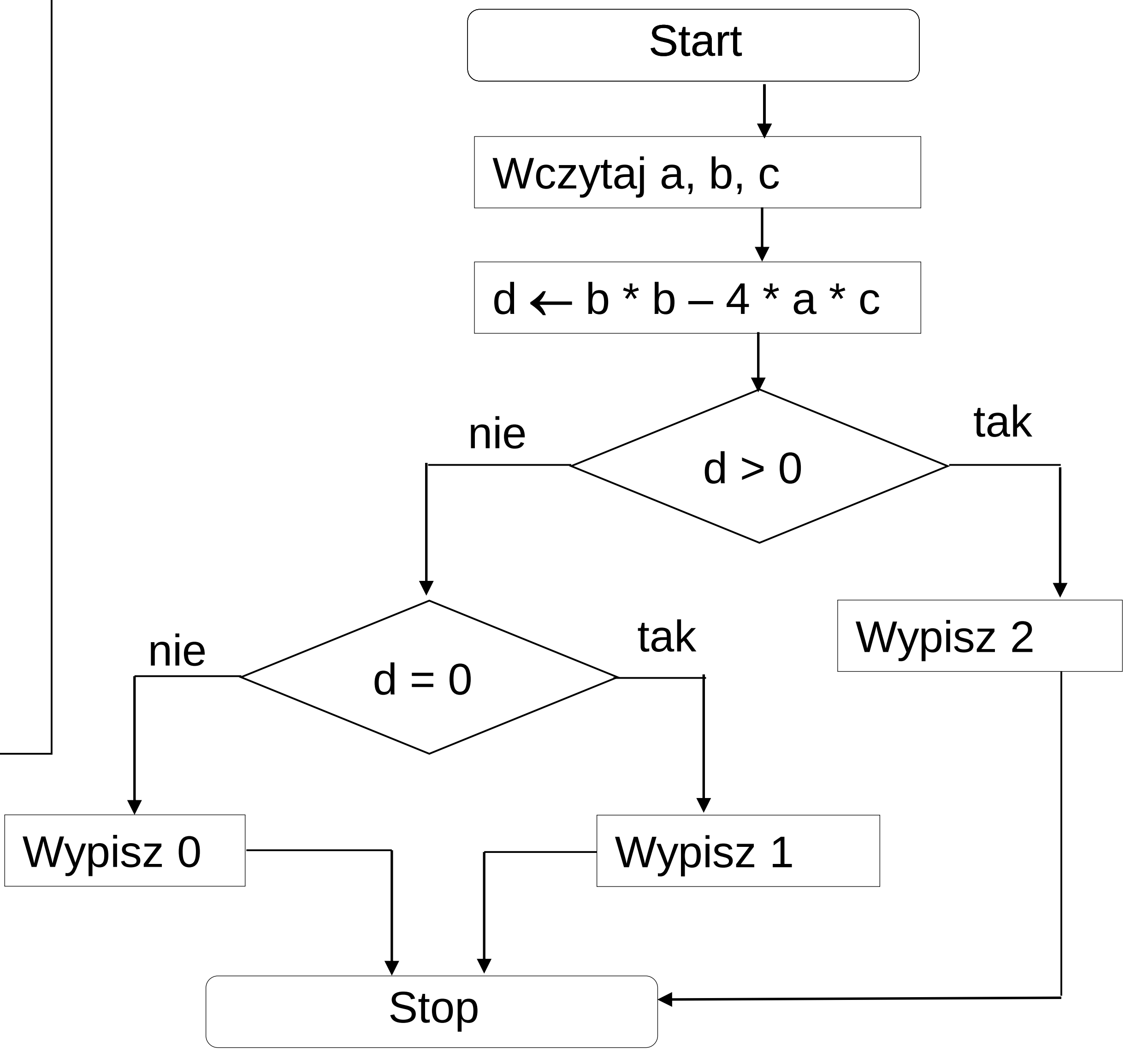
Specyfikacja

Wejście:

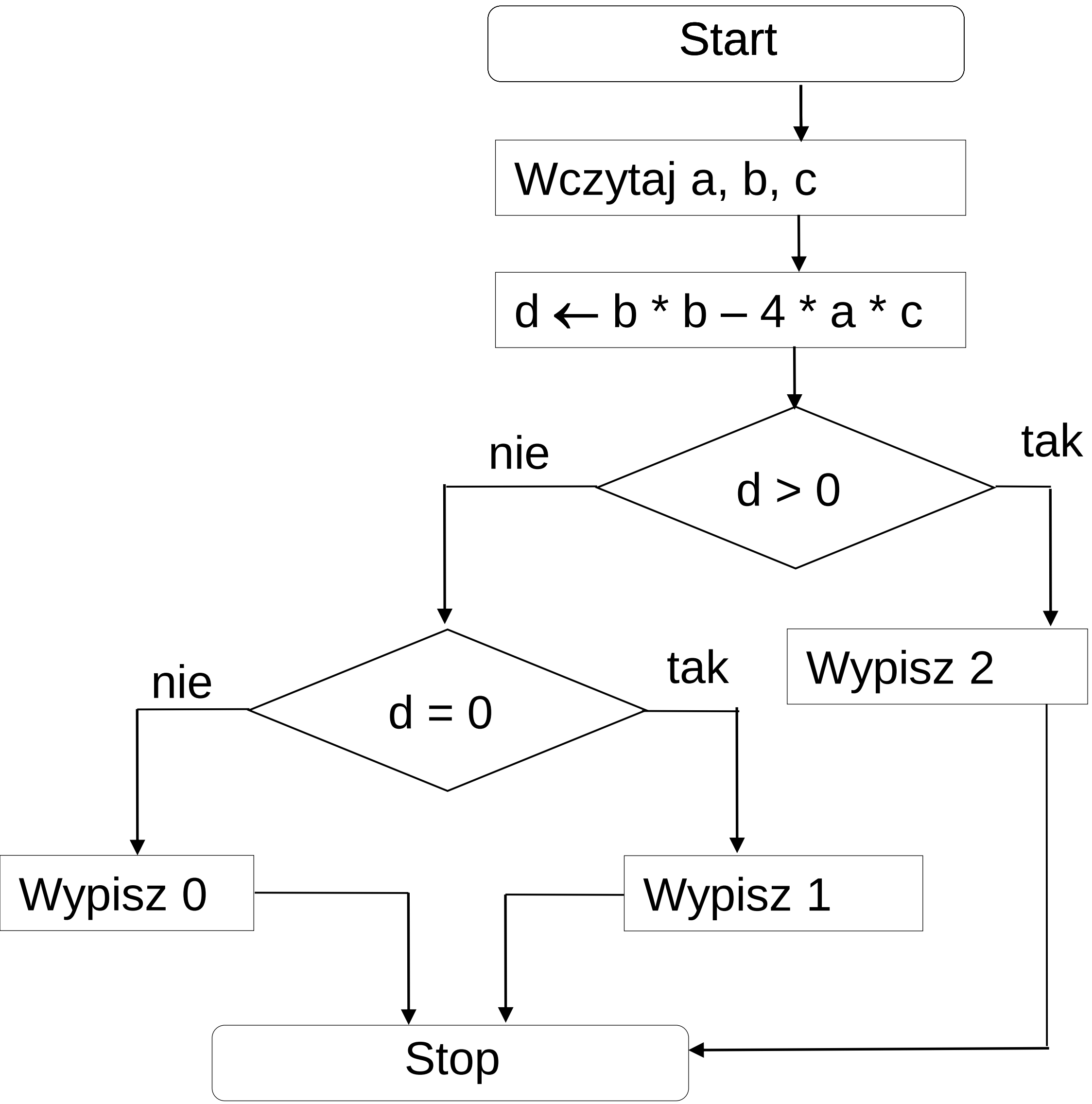
a, b, c – liczby rzeczywiste, $a \neq 0$

Wyjście:

liczba rozwiązań równania $ax^2+bx+c=0$



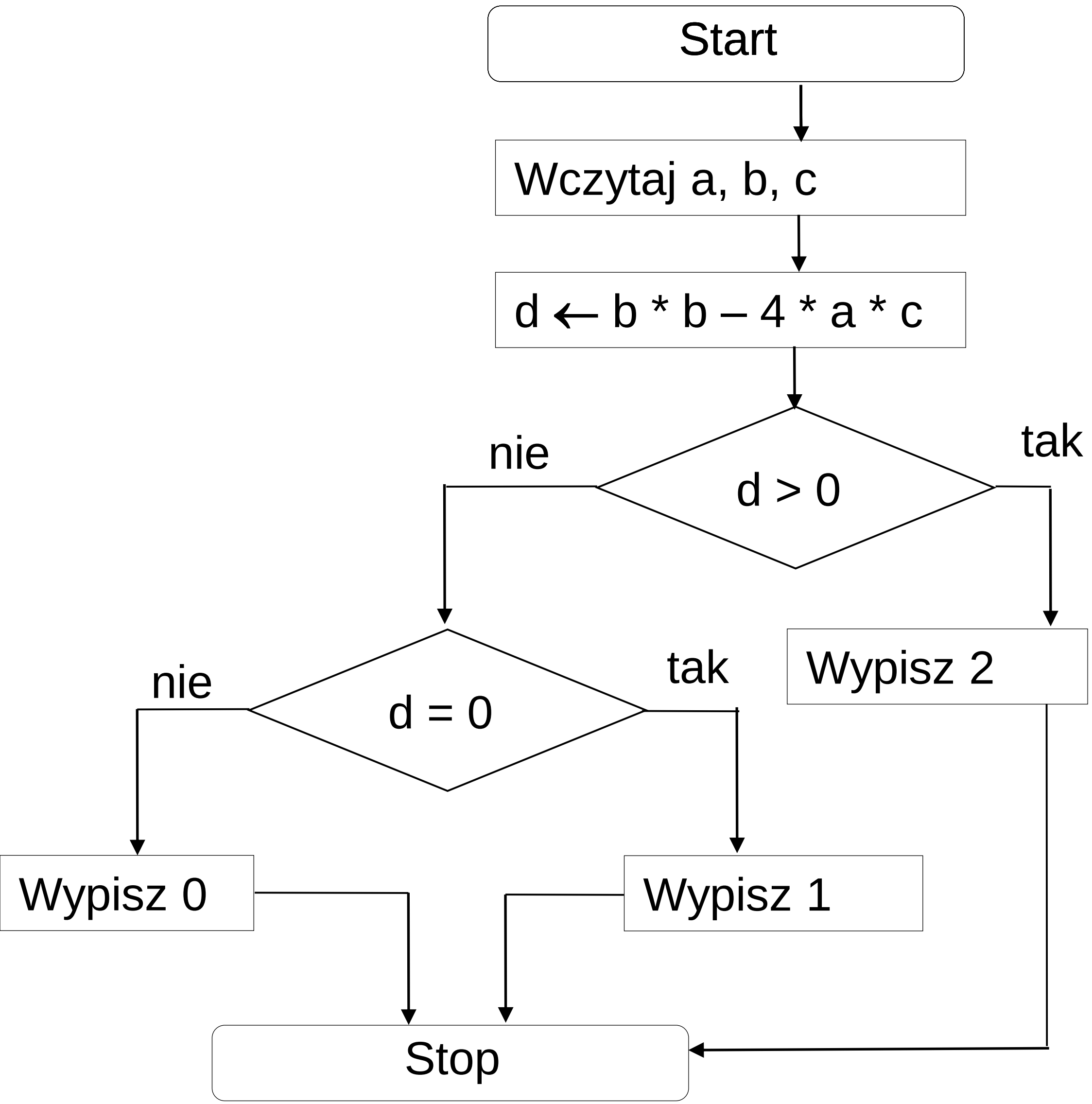
Przykład 1: Ansi C




```
main()
{
int  a, b, c, d;

scanf("%d %d %d",&a,&b, &c);
d = b * b – 4 * a * c;
if (d>0) printf("%d\n", 2);
else
  if (d==0) printf("%d\n", 1);
  else printf("%d\n", 0);
}
```

Przykład 1: Python



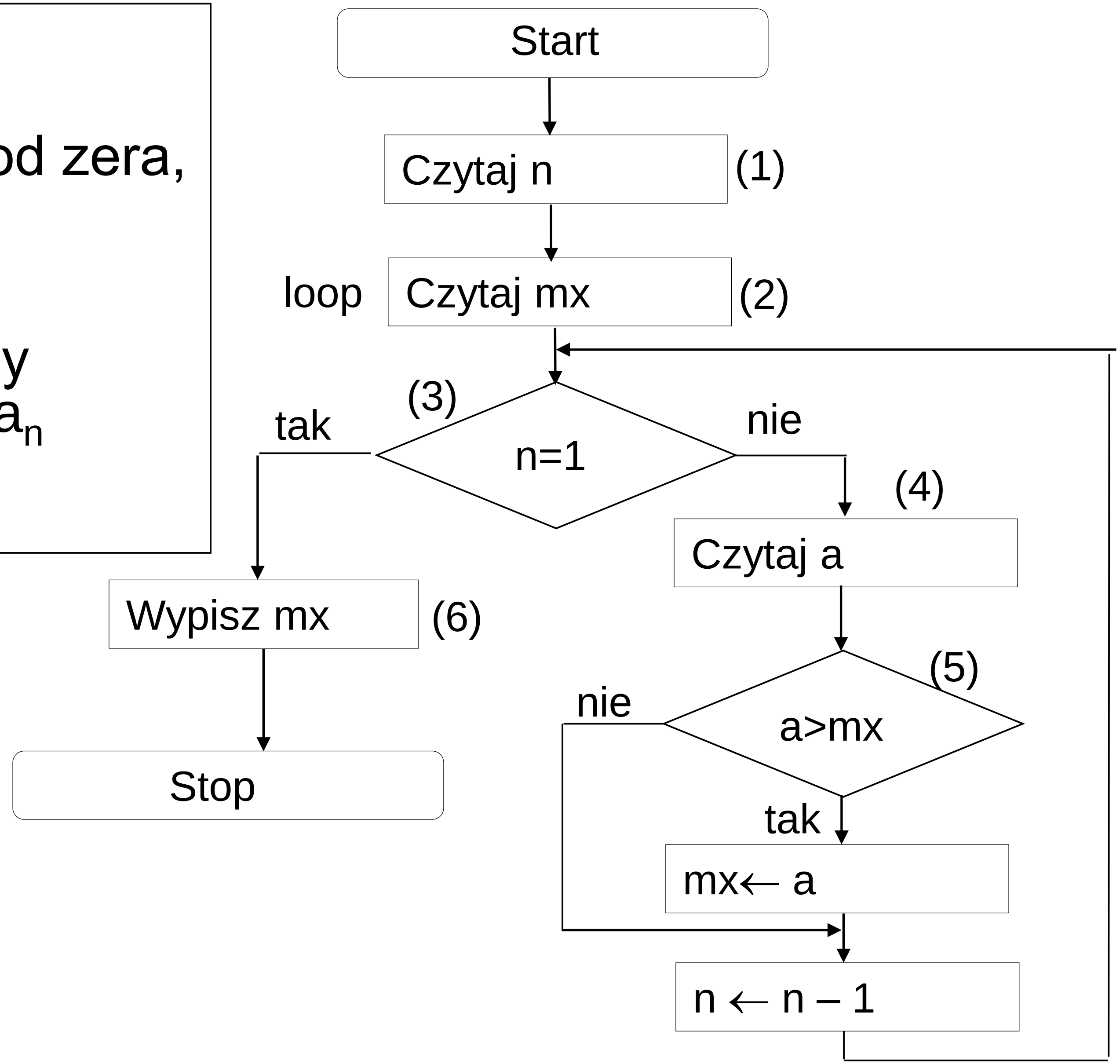

```
a=input("Podaj liczbe a\n")
b=input("Podaj liczbe b\n")
c=input("Podaj liczbe c\n")
d = b * b - 4 * a * c;
if d>0:
    print "2"
else:
    if d==0:
        print "1"
    else:
        print "0"
```

Przykład 2

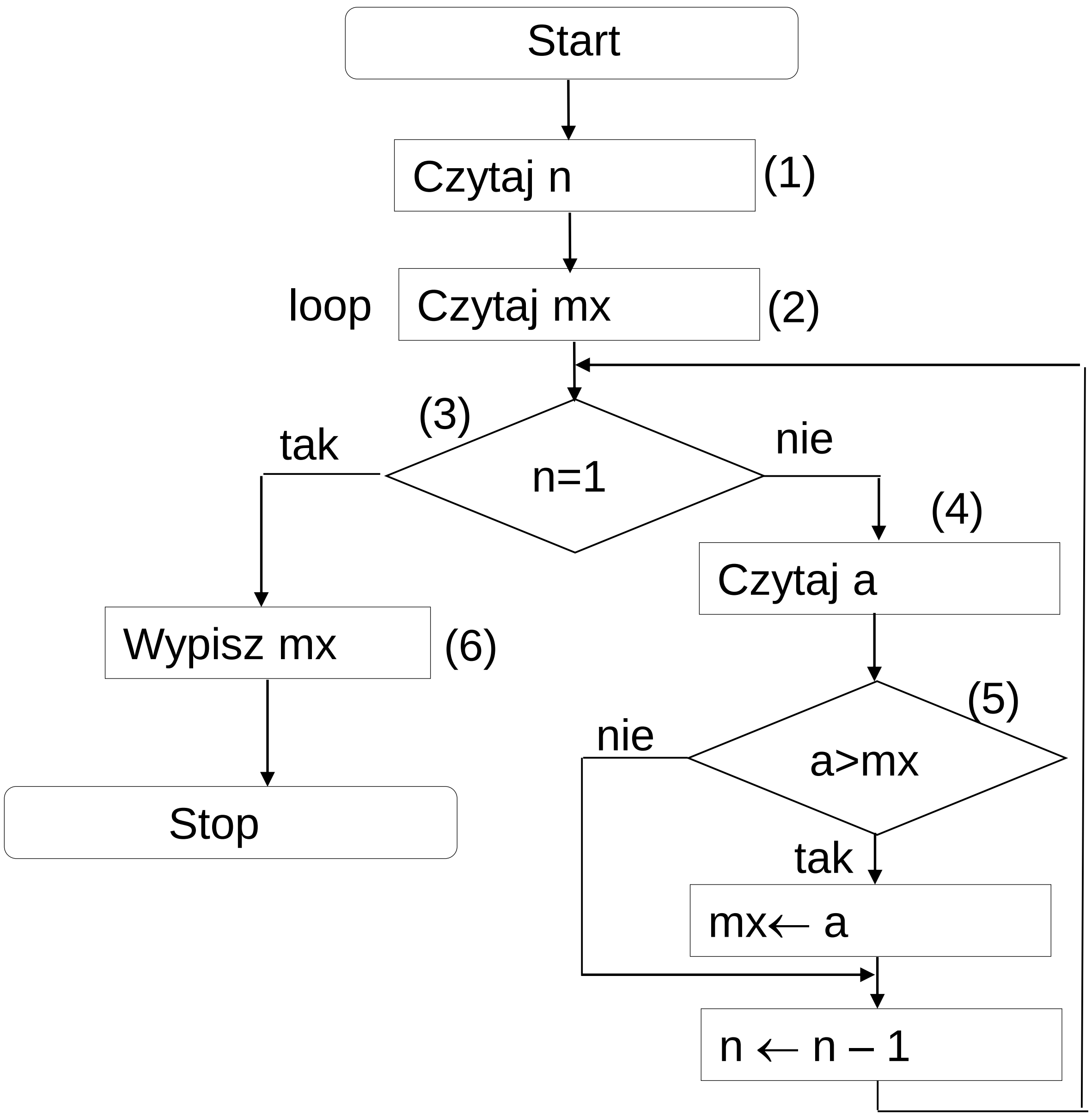
<u>Specyfikacja</u>

Wejście: n – liczba naturalna większa od zera, $a_1,\ldots a_n$ – ciąg liczb

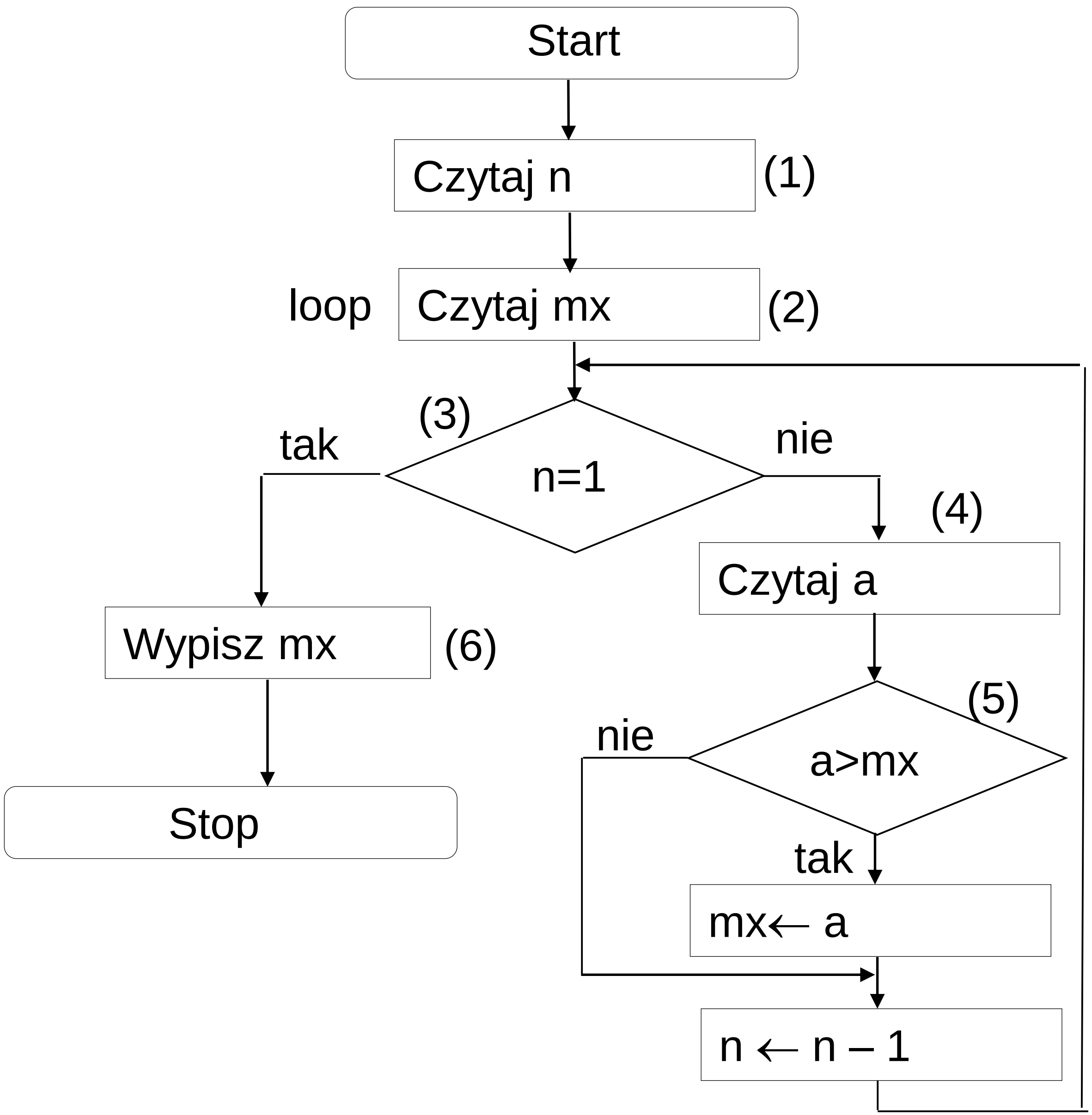
Wyjście: największy element ciągu $a_1\ldots a_n$



Przykład 2: Ansi C



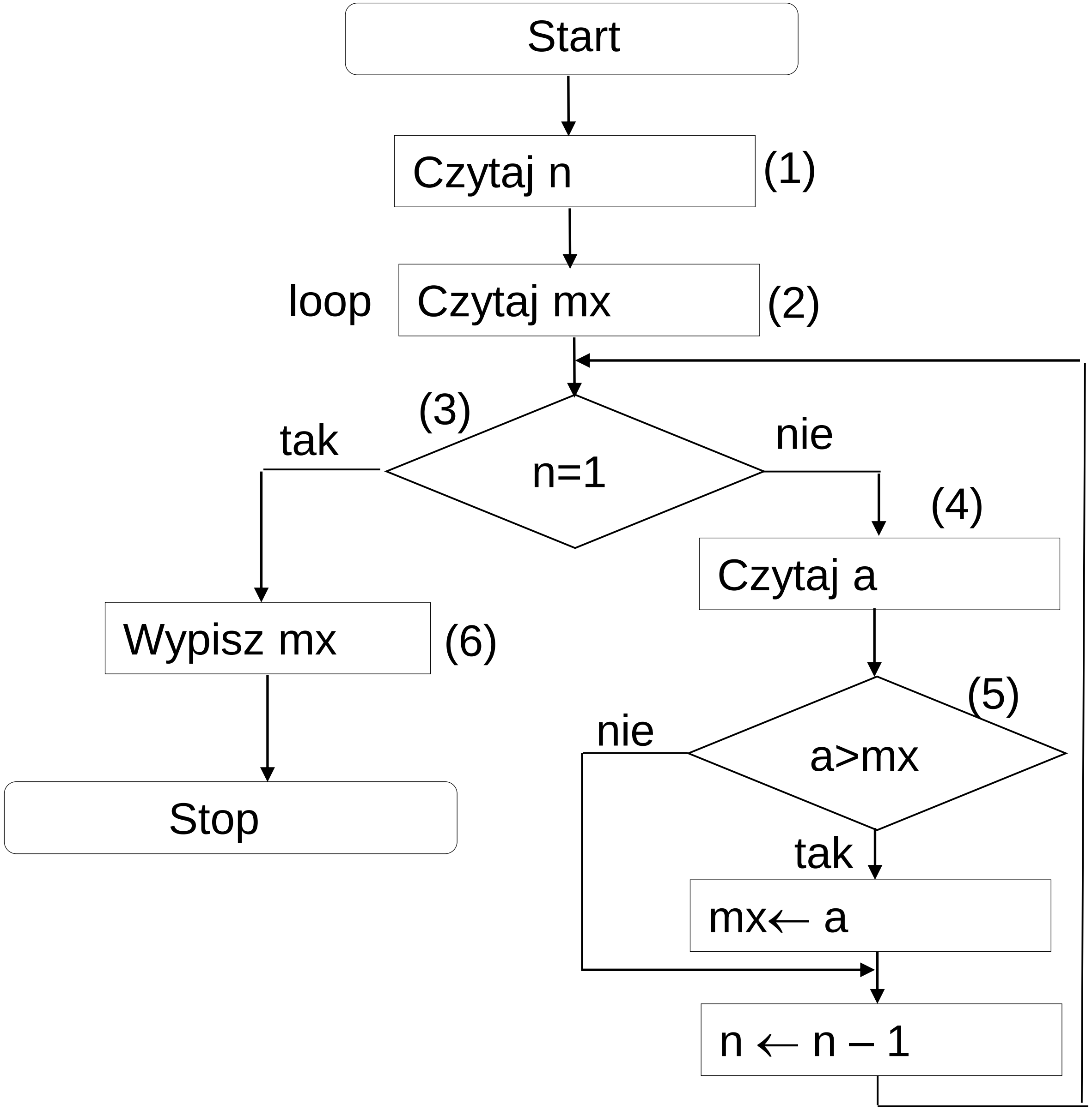
Przykład 2: Ansi C




```
main()
{
int  n, mx, a;

scanf("%d %d",&n,&mx);
while (n != 1) {
   scanf("%d",&a);
   if (a>mx) mx = a;
   n - -;
 }
 printf("Max=%d\n",mx);
}
```

Przykład 2: Python




```
n=input("Podaj dlugosc
ciagu:\n")
mx=input("Podaj liczbe:\n")
while n != 1:
   a=input("Podaj  :\n")
   if a>mx:
          mx = a
   n=n-1

print "Max=", mx
```

Nieformalne wprowadzenie do translacji programów

Program w C a kod maszynowy

Kompilacja: „tłumaczenie" programu (napisanego w języku wysokiego poziomu) do postaci wykonywalnej przez komputer.

Kompilator: program służący do kompilacji.

Interpreter: program tłumaczący i „wykonujący" pojedyncze instrukcje programu napisane w języku wysokiego poziomu (np. Python, C), w trakcie jego uruchamiania.

Postać wykonywalna przez komputer: program w kodzie maszynowym (z podobnym zestawem instrukcji do kodu RAM), np. wynik działania kompilatora.

Tłumaczenie programu na kod RAM

Kompilacja – przykład poglądowy:

1. Uproszczenie kodu źródłowego programu.
2. Skojarzenie zmiennych z komórkami (obszarami pamięci)
3. Automatyczne metody tłumaczenia instrukcji podstawienia / warunkowych… pętli i in.

Kompilację programu rozkładamy na „tłumaczenie” jego poszczególnych instrukcji.

Tłumaczenie programu na kod RAM

Przykład poglądowy, etap 1 – uproszczenie:

```
main()
{
  int m, k, rez, i;

  rez = 1;
  scanf("%d %d", &m, &k);
  for(i=0; i<k; i++)  rez *= m;
  printf("%d\n",rez);
 }
```

```
main()
{
  int m, k, rez, i;

  rez = 1;
  scanf("%d", &m);
  scanf("%d", &k );
  i = 0;
  while (k – i > 0) {
    rez = rez * m;
    i = i +1; }
  printf("%d",rez);
 }
```

Tłumaczenie programu na kod RAM

Przykład poglądowy, etap 2 – skojarzenie zmiennych z kom.:

```
main()
{
  int m, k, rez, i;

  rez = 1;
  scanf("%d", &m);
  scanf("%d", &k );
  i = 0;
  while (k – i > 0) {
    rez = rez * m;
    i = i +1; }
  printf("%d",rez);
 }
```

```
rez = 1
m=input("Podstawa:\n")
k=input("Wykladnik:\n")
i = 0
while k - i > 0:
    rez = rez * m
    i = i +1
print "Wynik:", rez
```

Komórka	Zmienna
1	
2	m
3	k
4	rez
5	i

Tłumaczenie programu na kod RAM

Przykład poglądowy, etap 3 – tłumaczenie:

```
main()
{
  int m, k, rez, i;

  rez = 1;
  scanf("%d", &m);
  scanf("%d", &k );
  i = 0;
  while (i – k < 0) {
    rez = rez * m;
    i = i +1; }
  printf("%d",rez);
 }
```

```
rez = 1
m=input("Podstawa:\n")
k=input("Wykladnik:\n")
i = 0
while k - i > 0:
    rez = rez * m
    i = i +1
print "Wynik:", rez
```

```
        load  =1
        store 4
        read  2
        read  3
        load  =0
        store 5
petla:  load  5
        sub   3
        jzero wypisz
        jgtz wypisz
        load  4
        mult  2
        store 4
        load  5
        add   =1
        store 5
        jump  petla
wypisz: write 4
```

Komórka	Zmienna
1	
2	m
3	k
4	rez
5	i

Kompilacja w praktyce…

Problemy:

- Pamięć zajmowana przez kod („treść”) programu a pamięć zajmowana przez zmienne?
- Tłumaczenie i uruchamianie funkcji?
- Zmienne globalne (wspólne dla całego programu) a zmienne lokalne?

Pamięć programu

Pamięć programu podzielona jest na kilka obszarów, m.in.:

1. obszar zajmowany przez zmienne globalne (inaczej zewnętrzne);
2. obszar zajmowany przez instrukcje programu (jego „treść”);
3. obszar przeznaczony na *stos wywołań funkcji*;
4. obszar przeznaczony na obiekty dynamiczne (tzw. *sterta*).

Zmienna globalna:

•(zadeklarowana) poza funkcjami

•wspólna dla całego programu (wszystkich funkcji)

Program:

•zbiór funkcji i struktur danych

•„program główny” (funkcja main w Ansi C)

Stos wywołań funkcji

Stos wywołań przechowuje :
- informacje o tym jakie funkcje są aktualnie uruchomione i w jakiej kolejności (hierarchia)
- informacje o tym co należy zrobić gdy uruchomione funkcje zakończą działanie
- zmienne lokalne wywołanych funkcji
- parametry uruchomionych funkcji

Stos wywołań funkcji

Kompilator przekłada instrukcję wywołania funkcji na ciąg rozkazów, który m.in.:

1. Rezerwuje na szczycie stosu wywołań odpowiedni dla danej funkcji fragment pamięci, w którym zostanie przydzielone miejsce m.in. na:
   - Parametry funkcji
   - Zmienne lokalne
   - Poprzednią wartość *wskaźnika szczytu stosu* wywołań
   - *Adres powrotu* (…po wykonaniu funkcji)
2. Oblicza wartości wyrażeń z wywołania funkcji, przypisuje je odpowiednim parametrom.
3. Uaktualnia wskaźnik szczytu stosu wywołań.
4. Zmienia *licznik rozkazów* tak, by wskazywał na pierwszą instrukcję funkcji (adres w pamięci, w którym znajduje się pierwsza instrukcja funkcji).

Stos wywołań – przykład (f1)

```
int f1(int x, int y)
{ int z;
  f2( x + y );          ⇐2
  return 1;
}
int f2(int a)
{ int b;
  f3( 2 * a );
  return 1;
}
int f3(int m)
{ int n;
 return 1;
}

main(){
 f1( 5, 7 )             ⇐⇐ 1
 printf(”koniec”);
}
```

→→1

f1	x = 5, y = 7, z=?, ⇐1, →1

⇐⇐ – pozycja licznika rozkazów

→→ - pozycja wskaźnika szczytu stostu

Stos wywołań – przykład (f2)

```
int f1(int x, int y)
{ int z;
  f2( x + y );          ⇐ ⇐2
  return 1;
}
int f2(int a)
{ int b;
  f3( 2 * a );          ⇐3
  return 1;
}
int f3(int m)
{ int n;
 return 1;
}

main(){
 f1( 5, 7 )             ⇐1
 printf(”koniec”);
}
```

f2	a = 12, b=?, $\Leftarrow_2$, $\rightarrow_2$
f1	x = 5, y = 7, z=?, $\Leftarrow_1$, $\rightarrow_1$

$\rightarrow\rightarrow_2$

$\rightarrow_1$

$\Leftarrow\Leftarrow$ – pozycja licznika rozkazów

$\rightarrow\rightarrow$ - pozycja wskaźnika szczytu stostu

Stos wywołań – przykład (f3)

int f1(int x, int y)
{ int z;
  f2(x + y); $\Leftarrow_2$
  return 1;
}
int f2(int a)
{ int b;
  f3(2 * a); $\Leftarrow\Leftarrow_3$
  return 1;
}
int f3(int m)
{ int n;
  return 1; $\Leftarrow$
}

main(){
 f1(5, 7) $\Leftarrow_1$
 printf(”koniec”);
}

$\rightarrow\rightarrow_3$	f3	m = 24, n=?, $\Leftarrow_3$, $\rightarrow_3$
$\rightarrow_2$	f2	a = 12, b=?, $\Leftarrow_2$, $\rightarrow_2$
$\rightarrow_1$	f1	x = 5, y = 7, z=?, $\Leftarrow_1$, $\rightarrow_1$

$\Leftarrow\Leftarrow$ – pozycja licznika rozkazów

$\rightarrow\rightarrow$ - pozycja wskaźnika szczytu stostu

Zakończenie wykonania funkcji

Zakończenie wykonywania funkcji (poprzez instrukcje **return** czy też poprzez wykonanie ostatniej instrukcji) powoduje m.in.:

1. Przywrócenie wskaźnikowi szczytu stosu wartości jaką miał przed wywołaniem tej funkcji.
2. Przypisanie licznikowi rozkazów wartości adresu powrotu zapamiętanego w trakcie wywołania funkcji.

Stos wywołań – zakończ. f3

int f1(int x, int y)
{ int z;
  f2(x + y); $\Leftarrow_2$
  return 1;
}
int f2(int a)
{ int b;
  f3(2 * a); $\Leftarrow_3$
  return 1;
}
int f3(int m)
{ int n;
  return 1; $\Leftarrow\Leftarrow$
}

main(){
 f1(5, 7) $\Leftarrow_1$
 printf(”koniec”);
}

$\rightarrow\rightarrow$		
$\rightarrow_3$	f3	m = 24, n=?, $\Leftarrow_3$, $\rightarrow_3$
$\rightarrow_2$	f2	a = 12, b=?, $\Leftarrow_2$, $\rightarrow_2$
$\rightarrow_1$	f1	x = 5, y = 7, z=?, $\Leftarrow_1$, $\rightarrow_1$

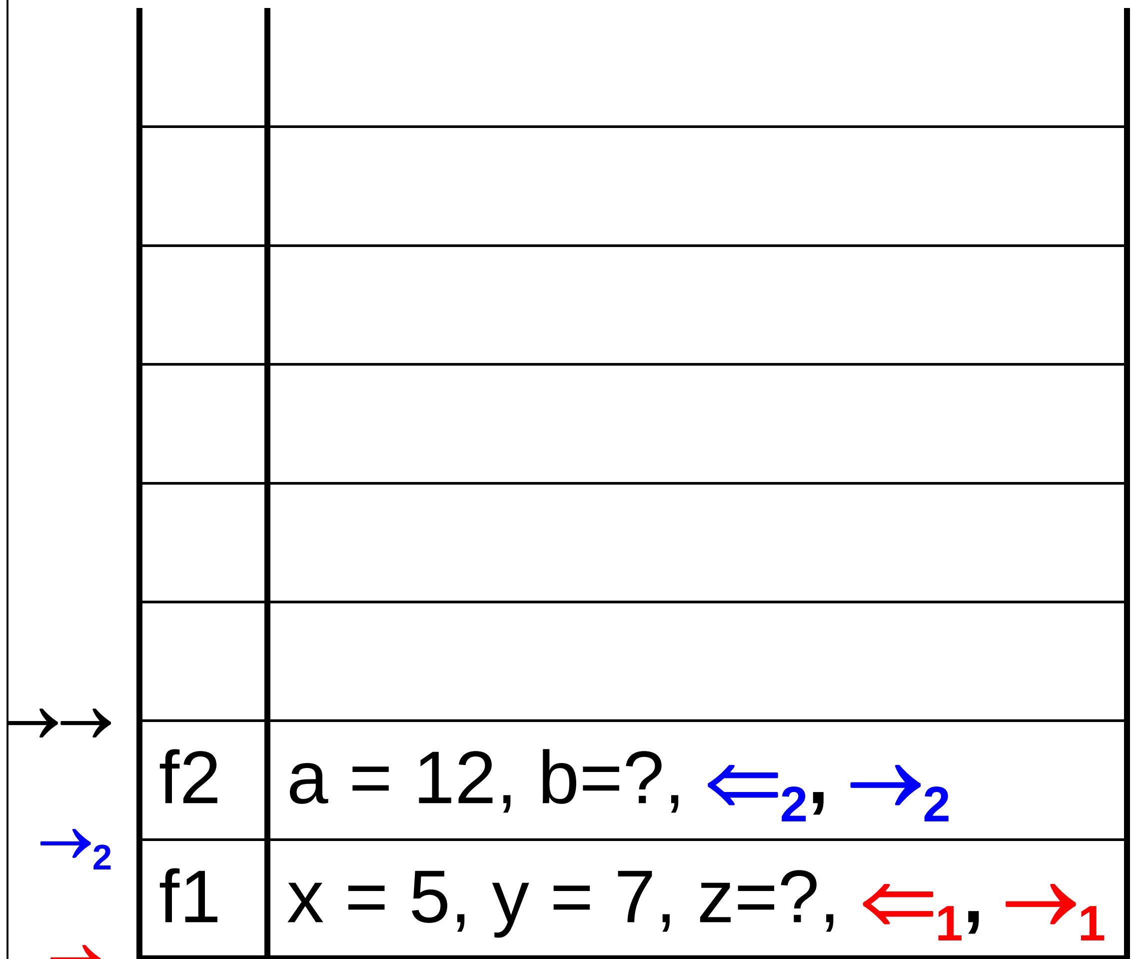
$\Leftarrow\Leftarrow$ – pozycja licznika rozkazów

$\rightarrow\rightarrow$ - pozycja wskaźnika szczytu stostu

Stos wywołań – zakończ. f2

```
int f1(int x, int y)
{ int z;
  f2( x + y );        ⇐2
  return 1;
}
int f2(int a)
{ int b;
  f3( 2 * a );
  return 1;           ⇐⇐
}
int f3(int m)
{ int n;
  return 1;
}

main(){
 f1( 5, 7 )           ⇐1
 printf(”koniec”);
}
```



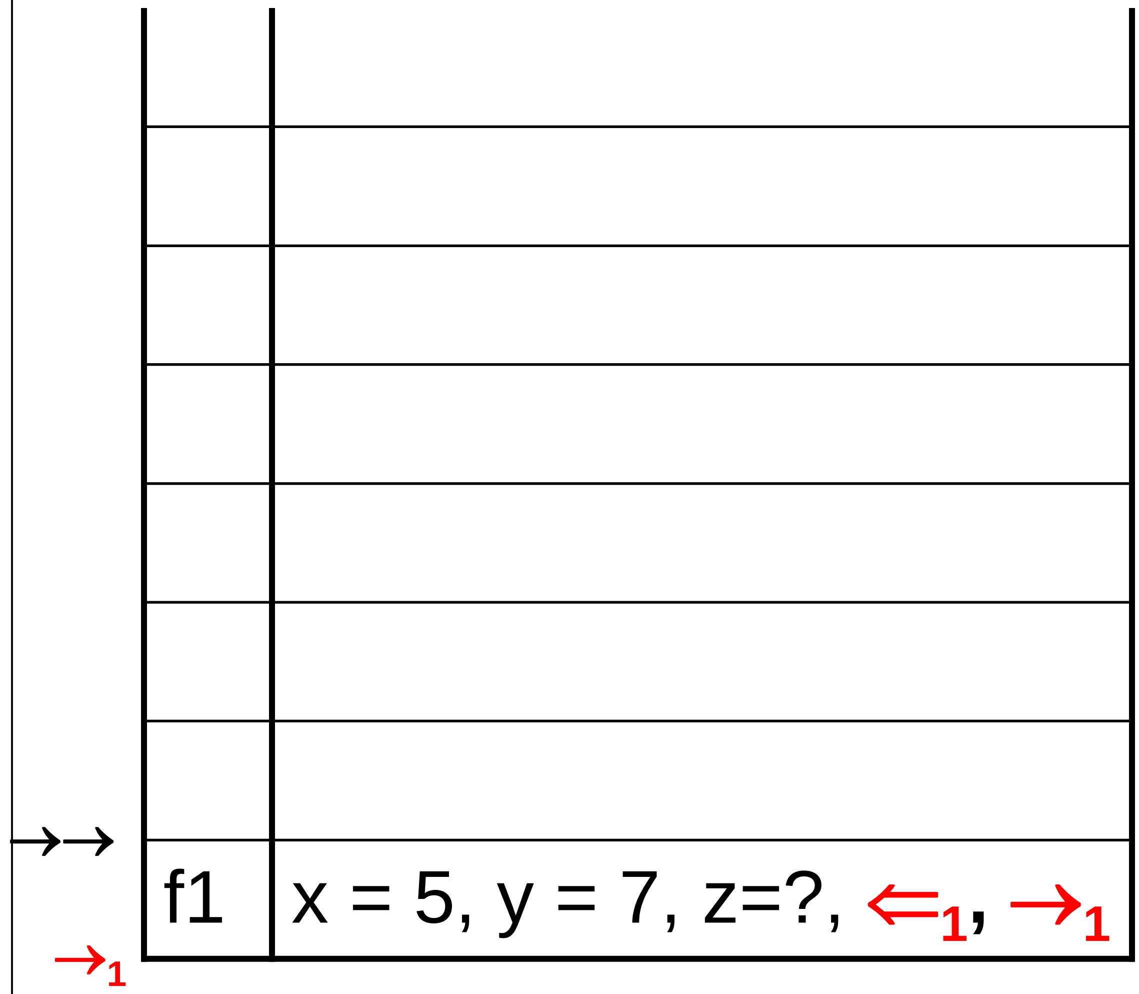
⇐⇐ – pozycja licznika rozkazów

→→ - pozycja wskaźnika szczytu stostu

Stos wywołań – zakończ. f1

```
int f1(int x, int y)
{ int z;
  f2( x + y );          ⇐2
  return 1;             ⇐⇐
}
int f2(int a)
{ int b;
  f3( 2 * a );
  return 1;
}
int f3(int m)
{ int n;
  return 1;
}

main(){
 f1( 5, 7 )             ⇐1
 printf(”koniec”);
}
```



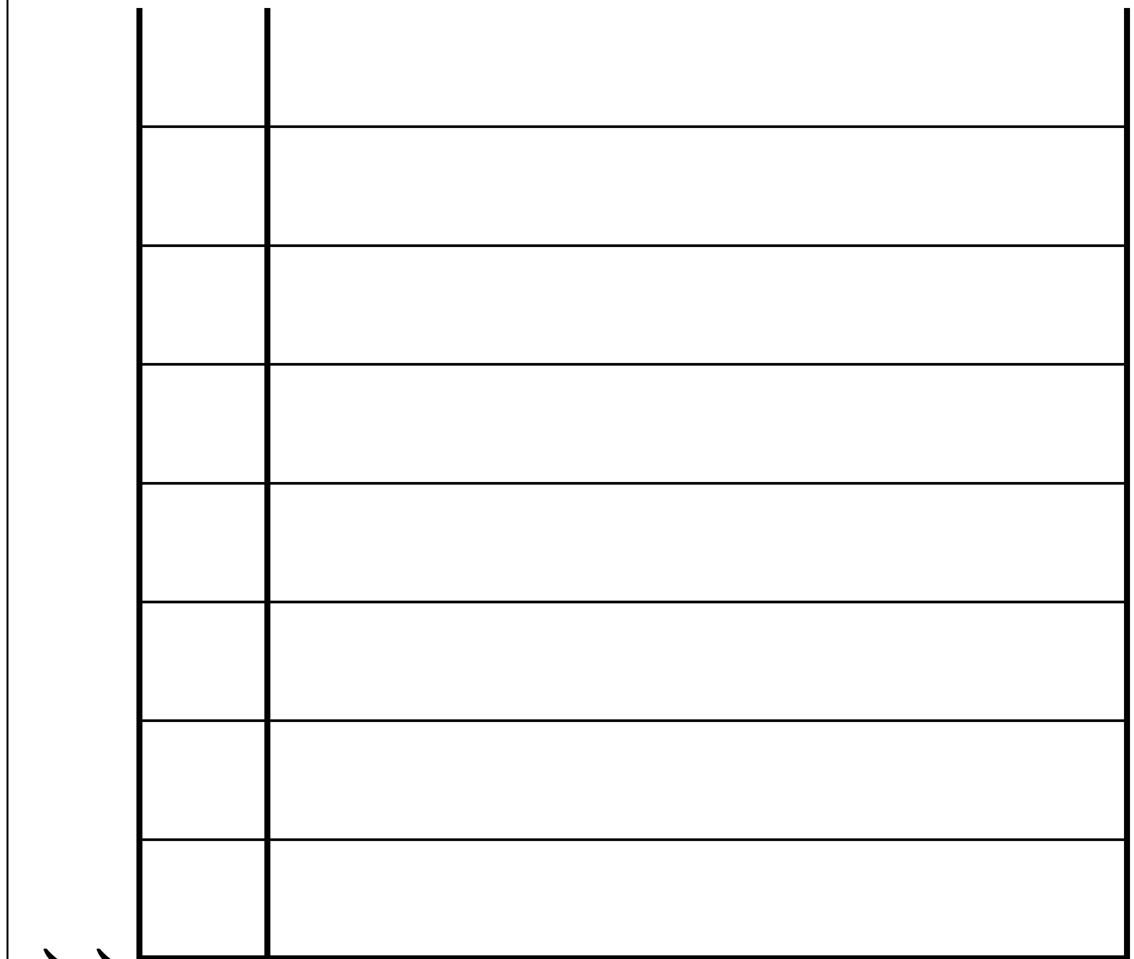
⇐⇐ – pozycja licznika rozkazów

→→ - pozycja wskaźnika szczytu stostu

Stos wywołań – zakończ. main

```
int f1(int x, int y)
{ int z;
  f2( x + y );
  return 1;
}
int f2(int a)
{ int b;
  f3( 2 * a );
  return 1;
}
int f3(int m)
{ int n;
  return 1;
}

main(){
 f1( 5, 7 )              ⇐1
 printf(”koniec”); ⇐⇐
}
```



⇐⇐ – pozycja licznika rozkazów

→→ - pozycja wskaźnika szczytu stostu

Piszemy wydajne programy…

Największy wspólny dzielnik (nwd)

Specyfikacja:

Wejście: n, m – liczby naturalne większe od 0

Wyjście: największy wspólny dzielnik n i m

(czyli max { p : p | n oraz p | m })

Dodatkowa definicja (podzielność):

a | b dla naturalnych dodatnich a, b gdy istnieje naturalna liczba c taka, że b = c · a

nwd: rozwiązanie naiwne

Przypomnienie:

a | b: b jest podzielne przez a

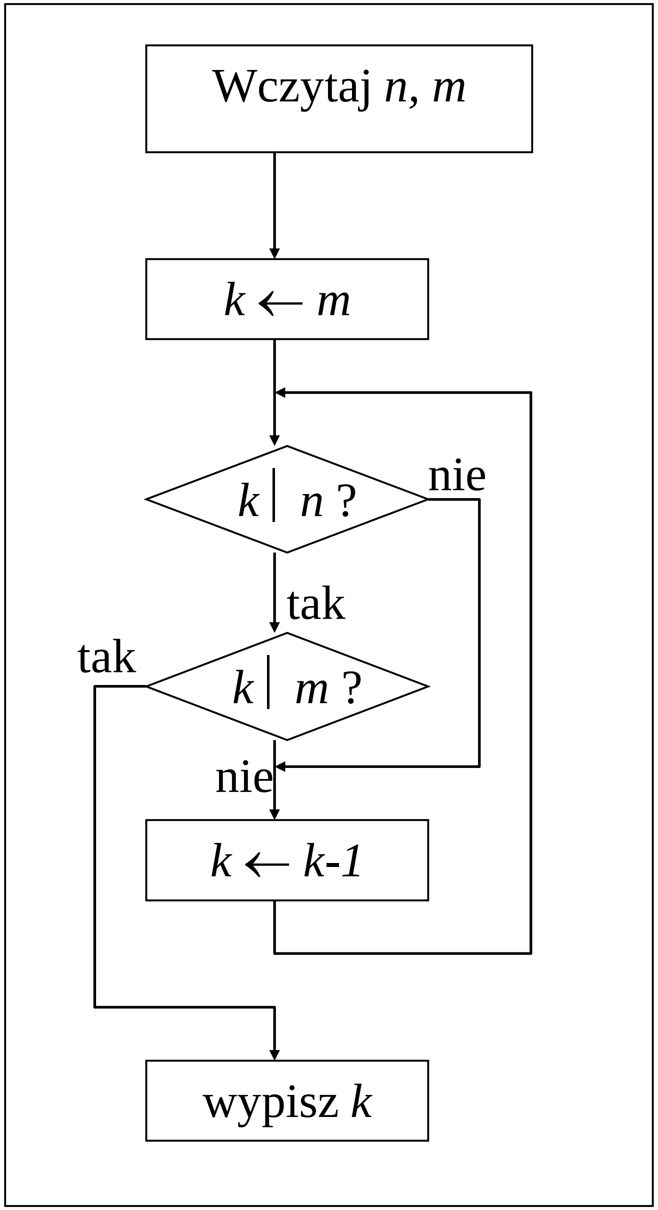
Algorytm:

wczytaj *n, m*

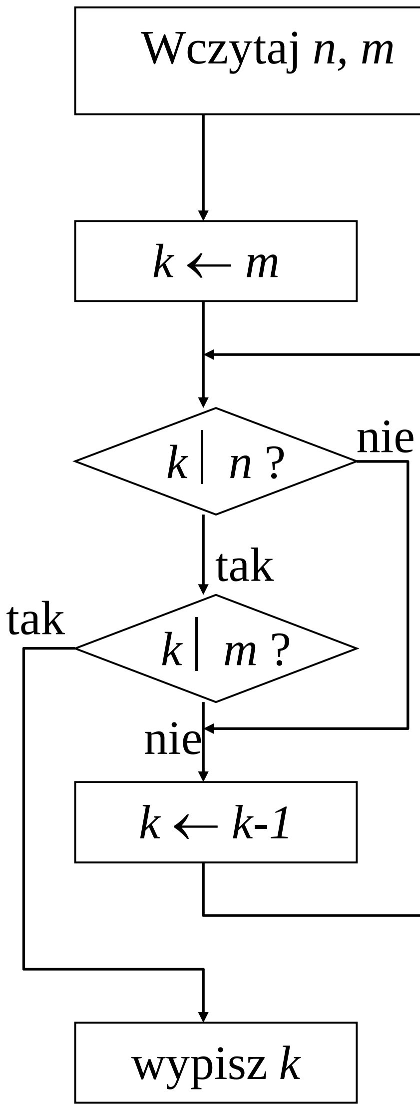
$k \leftarrow m$

powtarzaj:

- jeśli k | n oraz k | m to
  wypisz *k* i STOP
- $k \leftarrow k - 1$



nwd: rozwiązanie naiwne




```c
main()
{
  int n,m,k;
  scanf("%d %d", &n, &m);
  k = m;
  while (n% k!=0 ||  m %  k != 0)
        k--;
  printf("Wynik: %d\n", k);
}
```

```python
n=input("pierwsza:\n")
m=input("druga:\n")
k = m
while n%k!=0 or  m%k != 0:
    k=k-1
print "Wynik: ", k
```

nwd w C: rozwiązanie naiwne (while/for)

```
main()
{
  int n,m,k;
  scanf("%d %d", &n, &m);
  k = m;
  while (n% k!=0 ||  m %  k != 0)
        k--;
  printf("Wynik: %d\n", k);
}
```

```
main()
{
  int n,m,k;
  scanf("%d %d", &n, &m);
  for( k = m; n% k!=0 ||  m %  k != 0; k- -) ;
  printf("Wynik: %d\n", k);
}
```

nwd: rozwiązanie naiwne

Złożoność:

•Pamięć: O(1)

•Czas: O(m)

Modyfikacja:

jeśli n<m, zamień n z m przed pętlą.

Wówczas:

•Czas: O(min(n,m))

nwd: algorytm Euklidesa v.1

Obserwacja (kluczowa)

Niech d, m, n to liczby naturalne takie, że $m \leq n$. Wówczas

1. Jeśli $d \mid m$ oraz $d \mid n$, to $d \mid (n - m)$.
2. Jeśli $d \mid m$ oraz $d \mid (n - m)$, to $d \mid n$.

Dowód:

1. Jeśli $d \mid m$ oraz $d \mid n$ *to:*

- *$m = ad$, $n = bd$ dla naturalnych $a \leq b$;*
- *zatem $n - m = (b - a)d$, czyli $d \mid (n - m)$.*

2. Jeśli $d \mid m$ oraz $d \mid (n - m)$:

  - *$m = ad$, $(n - m) = bd$ dla naturalnych a oraz b;*
  - *zatem $n = m + (n - m) = (a + b)d$, czyli $d \mid n$.*

nwd: algorytm Euklidesa v.1

Obserwacja (kluczowa)

Niech *d*, *m*, *n* to liczby naturalne takie, że $m<n$.

Wówczas

1. Jeśli $d \mid m$ oraz $d \mid n$, to $d \mid (n - m)$.
2. Jeśli $d \mid m$ oraz $d \mid (n - m)$, to $d \mid n$.

czyli zbiór wspólnych dzielników n i m oraz zbiór wspólnych dzielników n – m i m są równe!

Wniosek

1. nwd(m,m) = m
2. nwd(n,m) = nwd(n-m, m) dla n > m > 0.
3. nwd(n,m) = nwd(m, n).

nwd: algorytm Euklidesa v.1

Wniosek

1. nwd(m,m) = m
2. nwd(n,m) = nwd(n-m, m) dla n > m > 0.
3. nwd(n,m) = nwd(m, n).

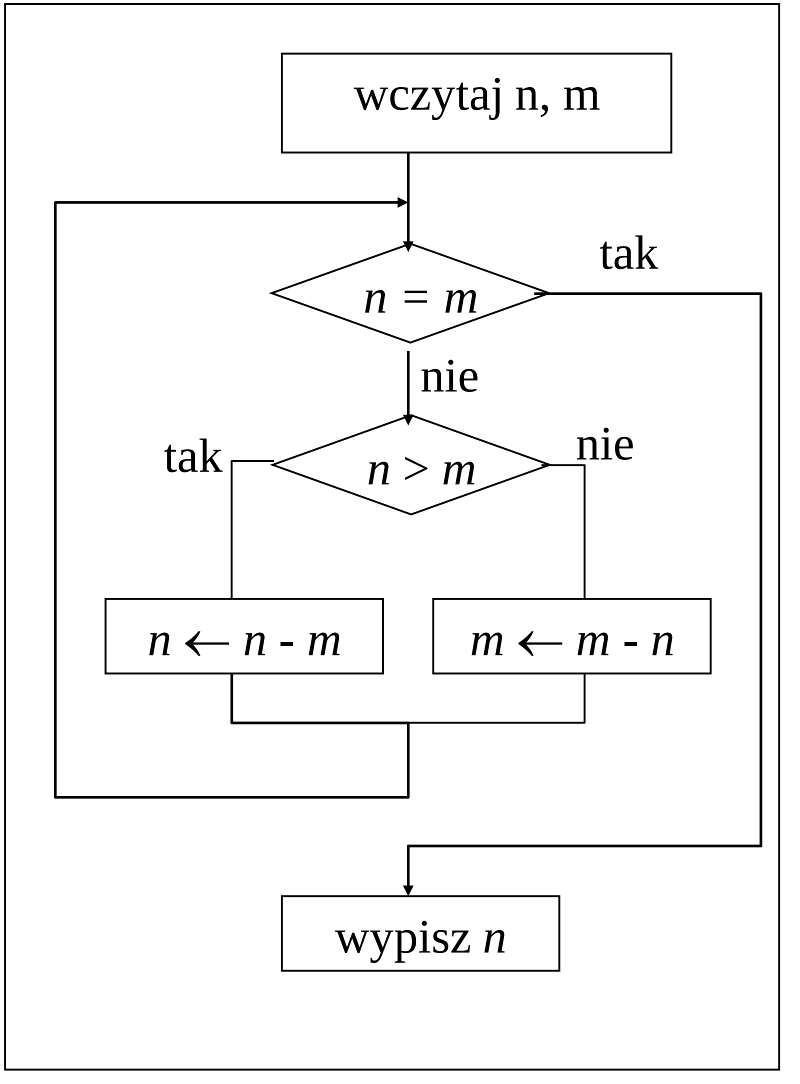
Algorytm:

1. Wczytaj n,m
2. Dopóki $n \neq m$
   - Jeśli n>m: $n \leftarrow n - m$
   - w przeciwnym przypadku: $m \leftarrow m - n$
3. Wypisz n

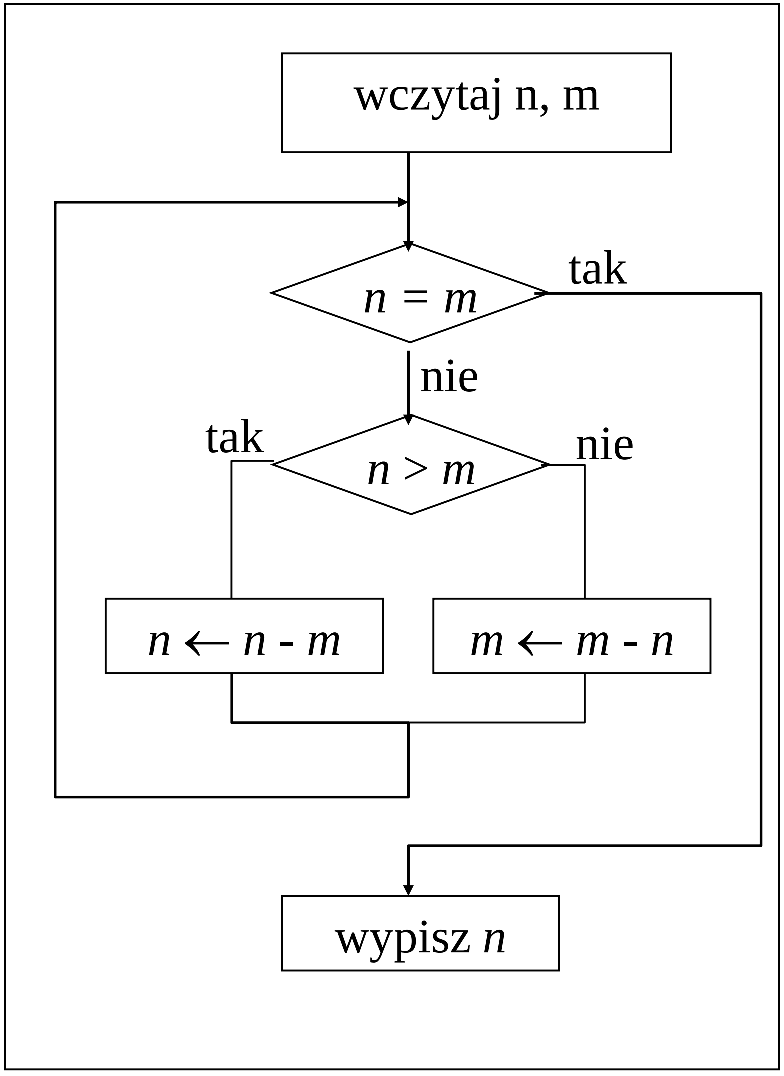
nwd: algorytm Euklidesa v.1

Algorytm:

1. Wczytaj n,m
2. Dopóki n≠m
   - jeśli n>m: n ← n – m
   - w przec. przyp.: m ← m – n
   - wypisz n



nwd: algorytm Euklidesa v.1




```c
main()
{
int n,m;

 scanf("%d %d", &n, &m);
 while (n != m)
   if (n>m) n = n - m;
   else m = m - n;
 printf(„Wynik: %d\n", n);
}
```

```python
n=input("pierwsza:\n")
m=input("druga:\n")
while n != m:
    if n>m:
        n = n - m
    else:
        m = m - n
print "Wynik: ", n
```

Alg.Euklidesa v.1: złożoność czasowa

- jeden obrót pętli: parę (n', m') zastępujemy przez
    - $(m'-n', n')$ gdy $m'>n'$ oraz
    - $(n'-m', m')$ gdy $m'<n'$
- niech $\underline{R} = \underline{\mathbf{n'+m'}}$
- wówczas obrót pętli powoduje zmniejszenie

  $\underline{R}$ o $\min(n',m') \geq 1$
- na koniec działania algorytmu:

  $n'=m'=nwd(n,m)$,

  więc $\underline{R} = 2 \cdot nwd(n,m) \geq \underline{\mathbf{2}}$
- CZAS: $O(n+m-2)=\mathbf{O(n+m)}$

Alg.Euklidesa v.1: złożoność

Najgorszy przypadek: n duże, $m=1$:

- redukcja w jednym kroku $(n,1) \to (n-1, 1)$
- liczba iteracji (obrotów pętli): $n+m-2 = n-2$

Uwaga!

- Poprzedni slajd uzasadnia, że złożoność alg. Euklidesa v.1 jest $O(n+m)$
  (nie jest większa!)
- Powyższy przykład ilustruje, że rzeczywiście ta złożoność może być aż tak duża, czyli „rzędu” $O(n+m)$.
  (w przyszłości poznacie notację Ω opisującą tą kwestię)

nwd: algorytm Euklidesa v.2

Obserwacja

Jeśli $n = a \cdot m + b$ dla naturalnych a, b oraz $b < m$ to:

$$\mathrm{nwd}(n,m) = \mathrm{nwd}(n-m,m) = \mathrm{nwd}(n-2m,m) =$$
$$= \mathrm{nwd}(n-3m,m) = \ldots = \mathrm{nwd}(n-am,m) = \mathrm{nwd}(b,m)$$

Czyli: dla wejścia $n = a \cdot m + b$ oraz m:

Algorytm Euklidesa v.1 a-krotnie „odejmuje m”!

Z drugiej strony:

- $a = \lfloor n / m \rfloor$ // *dzielenie całkowite*
- $b = n \bmod m$ // reszta z dzielenia

nwd: algorytm Euklidesa v.2

Wniosek

Niech $m<n$ to liczby naturalne. Wówczas

$$\mathrm{nwd}(n,m) = \mathrm{nwd}(n \bmod m, m)$$

Przykład

nwd(46, 18) = nwd(46 mod 18, 18) =
nwd(18, 10) = nwd(18 mod 10, 10) =
nwd(10, 8) = nwd(10 mod 8, 8) =
nwd(8, 2) = nwd(2, 0)

nwd: algorytm Euklidesa v.2

Wniosek

1. nwd(m,0) = nwd(0,m)=m
2. nwd(n,m) = nwd(n mod m, m) gdy n > m > 0.
3. nwd(n,m) = nwd(m, n).

Algorytm (pseudokod)

1. wczytaj n, m
2. jeśli n<m: zamień(n,m)
3. dopóki m>0:
    - n ← n mod m
    - zamień(n,m)
4. wypisz n

nwd: algorytm Euklidesa v.2

Algorytm (pseudokod)

1. wczytaj n, m
2. jeśli $n<m$: zamień(n,m)
3. dopóki $m>0$:
    - $n \leftarrow n \bmod m$
    - zamień(n,m)
4. wypisz n

nwd: algorytm Euklidesa v.2

Algorytm (pseudokod)

1. wczytaj n, m
2. jeśli n<m: zamień(n,m)
3. dopóki m>0:
   - n ← n mod m
   - zamień(n,m)
4. wypisz n

```
main()
{
int  n,m,k;

 scanf("%d %d", &n, &m);
 if (n<m) {
          k = m; m = n; n = k; }
  while (m>0) {
          n = n % m;
          k = n;
          n =m;
          m =k;
  }
  printf(“Wynik: %d\n”, n);
}
```

nwd: algorytm Euklidesa v.2

Algorytm (pseudokod)

1. wczytaj n, m
2. jeśli n<m: zamień(n,m)
3. dopóki m>0:
   - n ← n mod m
   - zamień(n,m)
4. wypisz n

```
n=input("pierwsza:\n")
m=input("druga:\n")
if n<m:
    k = m
    m = n
    n = k
while m>0:
    n = n % m
    k = n
    n =m
    m =k
print "Wynik: ", n
```

nwd: algorytm Euklidesa v.2 (sprytniej)

Algorytm (pseudokod)

1. wczytaj n, m
2. jeśli n<m: zamień(n,m)
3. dopóki m>0:
   - n ← n mod m
   - zamień(n,m)
4. wypisz n

```
main()
{
int  n,m,k;

 scanf("%d %d", &n, &m);
 if (n<m) {
          k = m; m = n; n = k; }
while (m!=0) {
          k = n % m;
          n = m;
          m = k;
 }
 printf(“Wynik: %d\n”, n);
}
```

nwd: algorytm Euklidesa v.2 (sprytniej)

Algorytm (pseudokod)

1. wczytaj n, m
2. jeśli n<m: zamień(n,m)
3. dopóki m>0:
   - n ← n mod m
   - zamień(n,m)
4. wypisz n

```
n=input("pierwsza:\n")
m=input("druga:\n")
if n<m:
    k = m
    m = n
    n = k
while m>0:
    k = n % m
    n = m
    m = k
print "Wynik: ", n
```

Uwaga:

Instrukcja

n, m = m, n

nie wykonuje się „magicznie” bez pomocniczej „komórki”

nwd: alg. Euklidesa v.2

Kwestia implementacyjna

- **Pyt.**: Dlaczego zamieniamy n z m w każdej iteracji?

Odp.: ponieważ (n mod m) < m dla każdego n, m

- **Pyt.**:Dlaczego sprawdzamy warunek $n>m$ tylko raz?

Odp.: Zamiana w pętli gwarantuje spełnienie: $m < n$

Alg. Euklidesa v. 2.0 - złożoność

Pamięć: O(1)

Czas:

Fakt. Jeśli $n \geq m$ to $n \bmod m \leq n/2$.

Dowód.

Przypadek 1: $n \geq 2m$

$n \bmod m < m = 2m/2 \leq n/2$

Przypadek 2: $m \leq n < 2m$

$n \bmod m = n - m \leq n - n/2 = n/2$

Alg. Euklidesa v. 2.0 - złożoność

Obserwacja 1

Każde iteracja (obrót) pętli „zamienia” parę (n, m) na taką parę, że:

•jedna z liczb to minimum z n, m;

•druga z liczb jest nie większa od połowy z maksimum z n i m.

Obserwacja 2

Alg. Euklidesa v.2.0 kończy działanie gdy mniejsza z liczb n, m to zero.

Alg. Euklidesa v. 2.0 - złożoność

Wniosek

Alg. Euklidesa v.2.0 działa w czasie

$$O(\log_2 n + \log_2 m) =$$
$$O(\log_2 (n \cdot m)) =$$
$$O(\log_2 (n+m))$$

Pytania kontrolne:

- Potrafisz uzasadnić powyższe równości?
- Potrafisz uzasadnić, że po O(log n) „dzieleniach przez 2 liczby n” uzyskamy zero?

Podsumowanie

1. Uruchamianie programów napisanych w językach wysokiego poziomu:
   1. Kompilacja lub translacja
   2. Stos wywołań funkcji
2. Algorytm Euklidesa jako przykład nieoczywistego rozwiązania problemu algorytmicznego
   1. Złożoność czasowa algorytmu Euklidesa jest „logarytmiczna”, rozwiązania naiwnego „liniowa” [to baaardzo duża różnica]