19 grudnia 2022

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 11

1. Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ. Udowodnij, że istnieje wierzchołek v, taki że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u, v\}$, taka że $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$.

2. Graf prosty G jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swym dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf n wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4.

   Wsk.: Gdy $n \equiv 0$ możesz oprzeć konstrukcję na podziale zbioru V na cztery części. Gdy $n \equiv 1$ do poprzedniej konstrukcji można dodać jeden wierzchołek.

3. Niech $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n-1}$ będą zbiorami krawędzi wszystkich $m - n + 1$ cykli otrzymanych poprzez dodanie do drzewa spinającego T grafu prostego G jednej krawędzi G która nie należy do T. Pokaż, że zbiór krawędzi dowolnego cyklu w G jest różnicą symetryczną pewnej liczby zbiorów wybranych spośród $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n-1}$.

4. W grafie skierowanym $\text{indeg}(v)$ i $\text{outdeg}(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę łuków wchodzących i wychodzących z wierzchołka v. Pokaż,że digraf zawiera skierowany cykl Eulera dokładnie, gdy jest spójny (po wymazaniu skierowań łuków) i dla wszystkich $v \in V : \text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$.

5. *Minimalnym cięciem* nazywamy zbiór krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego zbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja tego grafu. Wykaż, że spójny graf jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

6. Pokaż, że jeżeli graf spójny G ma dokładnie $2k$ wierzchołków o nieparzystych stopniach ($k > 0$), to zbiór jego krawędzi można rozbić na k rozłącznych krawędziowo marszrut, a na $k - 1$ nie można.

7. Liczby $1, 2, 3, 4, 5$ mogą być rozmieszczone na kole w porządku 1234531425, który zapewnia, że każde dwie z nich są sąsiednie dokładnie raz. Scharakteryzuj dla jakich n można znaleźć podobne rozmieszczenie dla liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

8. *Turniejem* nazywamy graf skierowany, którego każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jednym łukiem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze skierowanej długości co najwyżej 2 do każdego innego.

9. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) drogę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

10. Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5×5 ruchem konika szachowego (na każdym polu stajemy dokładnie raz)? A co jeśli wymagamy żeby po obejściu szachownicy konik wrócił na to samo pole?

11. Wierzchołkami grafu G są wszystkie ciągi złożone z jednej litery a, jednej litery b i czterech liter c. Dwa wierzchołki łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się transpozycją dwóch sąsiednich liter. Pokaż, że G ma drogę Hamiltona, ale nie ma cyklu Hamiltona.

12. Dany jest graf prosty G, w którym $n = |V(G)| > 3$ i dla dowolnych trzech wierzchołków u, v, w istnieją co najmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}$. Wykaż, że w G istnieje cykl Hamiltona.

13. Pokaż, że w grafie 3-regularnym G jest parzysta liczba dróg Hamiltona łączących ustalone sąsiednie wierzchołki u i v.

14. Znajdź n krawędziowo rozłącznych dróg Hamiltona w K_{2n} i n krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona w K_{2n+1}.

15. Pokaż, że jeśli G jest grafem prostym i dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków u, v

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n(G) - 1,$$

    to w G istnieje droga Hamiltona.

16. Niech G będzie grafem prostym. Pokaż, że G zawiera drogę o długości równej co najmniej $2m/n$.

17. Niech G będzie grafem zawierającym cykl C i drogę długości k łączącą dwa wierzchołki z C. Pokaż, że G zawiera cykl długości przynajmniej $\sqrt{k}$.

18. Dla wszystkich k podaj przykład grafu G o najdłuższym cyklu C długości mniejszej niż $4\sqrt{k}$, który zawiera drogę łączącą dwa wierzchołki z C o długości k.