## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 5

1. Niech  $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s},\,\phi$  będzie funkcją Eulera i

$$\psi(n) = \operatorname{lcm}\left(\phi\left(p_{1}^{n_{1}}\right), \phi\left(p_{2}^{n_{2}}\right), \dots, \phi\left(p_{s}^{n_{s}}\right)\right).$$

Udowodnij, że dla  $a \perp n$  zachodzi  $n|a^{\psi(n)}-1$ .

- 2. Pokaż, że  $\sum_{d:d|n} \phi(d) = n$ .
- 3. Pokaż, że iloczyn dowolnych k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez k!.
- 4. Udowodnij następujące stwierdzenia za pomocą zasady szufladkowej
  - (a) W turnieju każda drużyna gra z każdą inną dokładnie raz. W każdym momencie trwania turnieju istnieją dwie drużyny, które rozegrały tyle samo meczów.
  - (b) Wśród pięciu punktów wybranych w trójkącie równobocznym o boku 1, istnieje przynajmniej jedna para punktów odległych od siebie o co najwyżej  $\frac{1}{2}$ .
  - (c) Każdy wielościan wypukły zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.
- 5. Dane są liczby całkowite  $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ . Pokaż, że wtedy istnieją takie i, j, że  $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$  jest podzielne przez n.
- 6. Pokaż, że w dowolnym zbiorze S złożonym z 10 liczb naturalnych mniejszych od 100, zawsze istnieją dwa podzbiory o tej samej sumie.
- 7. Niech  $n, k, r, s \in \mathbb{N}$  i  $0 \le r, s < n$ . Mamy nk + r kulek rozmieszczonych w n szufladkach. Pokaż, że w pewnych s szufladkach znajduje się w sumie co najmniej  $sk + \min\{r, s\}$  kulek.
- 8. Na szachownicy  $n \times m$  dla  $n \le m$  umieszczono m(k-1)+1 wież. Pokaż, że istnieje takich k wież które nie atakują się wzajemnie.
- 9. Ile jest pięciocyfrowych numerów telefonów, w których **dokładnie jedna** cyfra występuje więcej niż jeden raz? A ile jest, gdy **przynajmniej jedna** cyfra występuje więcej niż jeden raz?
- 10. Ile jest różnych rozłożeń wszystkich białych i czarnych figur i pionków szachowych na szachownicy? Ile jest rozłożeń w których para gońców każdego z kolorów zajmuje pola różnych kolorów.
- 11. Pokaż, że liczba przedstawień n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi  $\binom{n-1}{k-1}$ , jeśli przedstawienia na różniące się kolejnością składników uważamy za różne. Ile jest przedstawień n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?
- 12. Na teren fabryki, w której pracuje n osób prowadzi k wejść. Przy każdym wejściu jest wyłożona lista obecności, na którą kolejno wpisują się pracownicy wchodzący tym wejściem w danym dniu (każdy wpisuje się na dokładnie jedną listę). Na ile sposobów mogą zostać wypełnione listy obecności w tym dniu (liczy sie również kolejność na listach)? Ile jest takich sposobów, w których żadna z list nie jest pusta?
- 13. Udowodnij następujące wzory
  - (a) tożsamość absorpcyjna:  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ , dla  $k \neq 0$ .
  - (b) wzór na sumowanie po górnym wskaźniku:  $\sum_{0 \le k \le n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \text{ dla } m, n \ge 0.$
- 14. Podaj interpretację w terminach zbiorów następujących tożsamości
  - (a) tożsamość Cauchy'ego:  $\binom{m+n}{r} = \sum_{s=0}^r \binom{m}{s} \binom{n}{r-s}$
  - (b)  $\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-k}$ .
- 15. Udowodnij indukcyjnie małe twierdzenie Fermata mówiące, że dla dowolnej liczby pierwszej p i naturalnej a

$$a^p \equiv a \mod p$$
.

Wsk.: rozwiń  $(a+1)^p$  posługując się wzorem dwumiennym i określ kiedy  $\binom{p}{2}$  dzieli się przez p.