

### Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 3

1. Niech  $f(n) = \sum_{k=1}^n \lceil \log_2 k \rceil$ . Wykaż, że

$$f(n) = n - 1 + f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor)$$

dla wszystkich  $n \geq 1$ . Pokaż, że jeśli w powyższej zależności wymagamy, by  $f(1) = 0$ , to  $f$  jest jedyną funkcją spełniającą tę zależność.

Wsk.: Rozbij  $\sum \lceil \log_2 k \rceil$  na sumy po  $k$  parzystych i nieparzystych

2. Wyznacz zwartą postać funkcji  $f(n)$  z poprzedniego zadania (bez symboli „ $\sum$ ” i „ $\cdot$ ”).
3. Przedstawieniem liczby naturalnej  $n$  w układzie liczb Fibonacciego nazywamy taki ciąg współczynników  $a_2, \dots, a_k$  równych 0 lub 1, że  $a_2 F_2 + \dots + a_k F_k = n$  oraz  $a_i + a_{i+1} \leq 1$  dla wszystkich  $i$ . Pokaż, że każda liczba naturalna ma jednoznaczne przedstawienie w układzie liczb Fibonacciego.
4. Niech  $x, k, n$  będą liczbami całkowitymi. Skonstruuj algorytm obliczający  $x^k$  modulo  $n$ . Algorytm powinien korzystać z wzorów:  $x^{2l} = x^l \cdot x^l$ ,  $x^{2l+1} = x \cdot x^{2l}$ . Określ liczbę mnożeń wykonywanych przez ten algorytm.
5. Znajdź wzór na  $n$ -tą potęgę macierzy  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Napisz szybki algorytm wyliczający z tego wzoru  $n$ -tą liczbę Fibonacciego  $F_n$ . Oszacuj złożoność tego algorytmu, jeśli używa on procedury mnożących dwie liczby  $k$ -cyfrowe w czasie  $M(k)$  (Założ, że  $M(k) \geq 2M(k/2)$ ).
6. Pokaż, że

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Skonstruuj algorytm który dla danych  $p_1, \dots, p_k, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  wylicza szybko  $a_n$  zadane zależnością rekurencyjną  $a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_k a_{n-k}$ .

7. Skonstruuj algorytm mnożący dwie  $n$ -cyfrowe liczby całkowite  $a$  i  $b$  poprzez rozbitcie każdej z nich na trzy równe części,  $a_1, a_2, a_3$  i  $b_1, b_2, b_3$ . Powinien się on zadowalać pięcioma wywołaniami rekurencyjnymi samego siebie obliczającymi:  $m_1 = a_1 \cdot b_1$ ,  $m_2 = a_3 \cdot b_3$ ,  $m_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3)$ ,  $m_4 = (a_1 - a_2 + a_3) \cdot (b_1 - b_2 + b_3)$ ,  $m_5 = (a_1 + 2a_2 + 4a_3) \cdot (b_1 + 2b_2 + 4b_3)$ . Oszacuj złożoność obliczeniową  $T(n)$  tego algorytmu.

Wsk.: Skorzystaj z tego, że liczbę długości  $n$  można podzielić przez niewielką stałą w czasie  $O(n)$  (jak?).

8. Dany jest algorytm typu „dziel i zwyciężaj” wywołujący sam siebie (rekurencyjnie)  $a$  razy dla podproblemów rozmiaru  $n/b$  i wykonujący poza tym  $c \cdot n^d$  operacji. Czas  $T(n)$  działania takiego algorytmu spełnia zależność rekurencyjną:  $T(n) = aT(n/b) + cn^d$ . Korzystając z tej zależności oszacuj  $T(n)$  jako  $O(\cdot)$  w zależności od  $a, b, d$ . Możesz założyć, że  $n = b^k$ .

Wsk.: Rozważ trzy przypadki:  $a > b^d, a = b^d, a < b^d$

9. Niech

$$T(n) \leq T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lceil 7n/10 \rceil) + cn$$

Pokaż używając indukcji, że  $T(n) < c'n$  dla pewnej stałej  $c'$ .

10. Udowodnij, że jeśli  $a, b \in \mathbb{N}$  oraz  $x$  i  $y$  są niezerowymi liczbami całkowitymi spełniającymi równanie diofantyczne  $ax + by = 1$ , to

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, y) = \gcd(x, b) = \gcd(x, y).$$

Wykaż ponadto, że dokładnie jedna z liczb  $x$  i  $y$  musi być ujemna.

11. (a) Przedstaw  $\gcd(448, 721)$  w postaci  $721x + 448y$ , dla  $x, y \in \mathbb{Z}$ .  
 (b) Oblicz takie całkowite  $x, y$ , że  $333x + 1234y = 1$ . Ile się równa  $333^{-1}$  w pierścieniu  $\mathbb{Z}_{1234}$ .  
 (c) Oblicz  $-69^{-1} \bmod 1313$ .
12. Pokaż, że  $\gcd(F_{n-1}, F_n) = 1$ . Udowodnij indukcyjnie, że  $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m, n)}$ .
13. Udowodnij, że jeśli  $a \perp b$  i  $a > b$ , to  $\gcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{\gcd(m, n)} - b^{\gcd(m, n)}, 0 \leq m < n$ .
14. Pokaż, że dla każdego  $n$  istnieje dokładnie jedna potęga 2, która w układzie dziesiętnym ma  $n$  cyfr z najbardziej znaczącą cyfrą 1.
15. Niech  $ax_0 + by_0 = c$  dla pewnych  $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ . Określ zbiór wszystkich rozwiązań  $(x, y)$  równania

$$ax + by = c.$$