

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 14

- Co można powiedzieć o macierzy sąsiedztwa grafu i jego dopełnienia? Podaj interpretację wektorów AI i A^2I , gdzie I jest wektorem jednostkowym oraz A jest macierzą sąsiedztwa grafu G (działaniem jest mnożenie macierzy i wektorów o wsp. całkowitych).
- Hiperkostką wymiaru k nazywamy graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \{0, 1\}^k$ (wszystkie ciągi k bitów), a krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ich zapis binarny różni się na dokładnie jednej pozycji. Pokaż, że między dwoma różnymi wierzchołkami k -wymiarowej hiperkostki istnieje k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.
- (Grafy Mycielskiego) Graf M_2 to dwa wierzchołki połączone krawędzią. Graf M_{k+1} konstruujemy z M_k w ten sposób, że dokładamy dla każdego $v \in V(M_k)$ wierzchołek v' i łączymy go z wszystkimi sąsiadami v w M_k ; następnie dodajemy jeszcze jeden wierzchołek w i łączymy go z wszystkimi wierzchołkami v' . Pokaż przez indukcję po k , że
 - graf M_k nie ma trójkątów (klik K_3);
 - graf M_k jest k -kolorowalny;
 - graf M_k nie jest $(k-1)$ -kolorowalny.
- Niech G będzie grafem o $2n$ wierzchołkach, którego wszystkie stopnie wierzchołków wynoszą co najmniej n . Pokaż, że G ma pełne skojarzenie tzn. skojarzenie n -krawędziowe.
- Podaj wielomianowy algorytm znajdujący liczbę chromatyczną G , jeśli $\deg(G) \leq 3$.
- Mamy daną grupę n dziewcząt i m chłopców. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by k dziewcząt mogło znaleźć męża (wewnątrz grupy), jest to, by każde r dziewcząt znało przynajmniej $k+r-n$ chłopców.
Wsk.: Dodaj $n-k$ chłopców akceptowanych przez wszystkie dziewczyny i zastosuj tw. Halla
- W niektórych krajach mężczyzna może mieć do czterech żon. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym w takim kraju na to, aby n dziewcząt mogło znaleźć mężów, jest to by każde k z nich znało w sumie przynajmniej $k/4$ chłopców.
- Udowodnij, że drzewo ma co najwyżej jedno pełne skojarzenie.
- Niech A będzie macierzą sąsiedztwa grafu dwudzielnego $G = (V_1, V_2; E)$, w którym $|V_1| = |V_2|$. W macierzy A wiersze odpowiadają wierzchołkom z V_1 , a kolumny wierzchołkom z V_2 i $a_{ij} = 0, 1$ w zależności od tego, czy istnieje połączenie między odpowiednimi wierzchołkami. Jaka jest zależność między skojarzeniami w G i wartością permanentu

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \text{ - permutacja}} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}?$$
- Pokaż, że dwudzielny graf d -regularny posiada pełne skojarzenie.
- Pokaż, że graf 3-regularny posiadający cykl Hamiltona ma indeks chromatyczny równy 3.
- Niech wszystkie wierzchołki G poza v mają stopień d i niech indeks chromatyczny G wynosi d . Pokaż, że $n = |V(G)|$ jest nieparzyste i $\deg(v) = 0$.
 - Pokaż, że graf d -regularny G posiadający wierzchołek rozcinający ma indeks chromatyczny równy $d+1$.
- Pokaż, że indeks chromatyczny $\chi'(K_n)$ jest równy $n-1$, gdy n jest parzyste i n , gdy n jest nieparzyste.
- Pokaż wielomianową redukcję problemu istnienia w grafie G pokrycia wierzchołkowego rozmiaru k do problemu istnienia w grafie H kliki rozmiaru k' .
- Pokaż, że jeśli można rozstrzygnąć, czy graf dowolny graf jest 4-kolorowalny w czasie wielomianowym, to da się również rozstrzygnąć, czy dowolny graf jest 3-kolorowalny w czasie wielomianowym.
- Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem izomorfizmu grafów do problemu izomorfizmu grafów dwudzielnych.
- Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem istnienia drogi Hamiltona w grafie do problemu istnienia w nim drzewa spinającego o stopniu nie większym, niż 2023.
- Pokaż wielomianową transformację sprowadzającą problem istnienia cyklu Hamiltona w dowolnym digrafie do problemu istnienia cyklu Hamiltona w nieskierowanym grafie dwudzielnym.