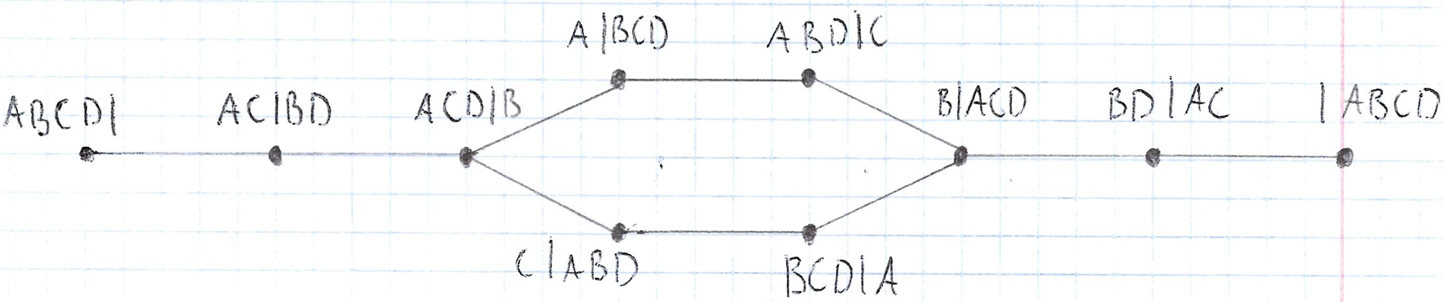
Patryk Maciąg 331542 Lista 9

Zad. 1.

A - wilk, B - koza, C - kapusta, D - przewoźnik

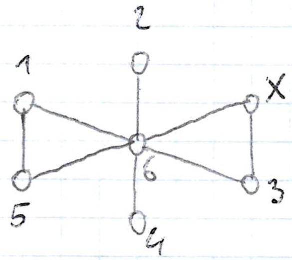
| - rzeka, litery po danej stronie oznaczają położenie obiektów po danej stronie rzeki

Czyli zaczynamy: ABCD|, a nasz cel, to: |ABCD.



Zad. 2.

a)



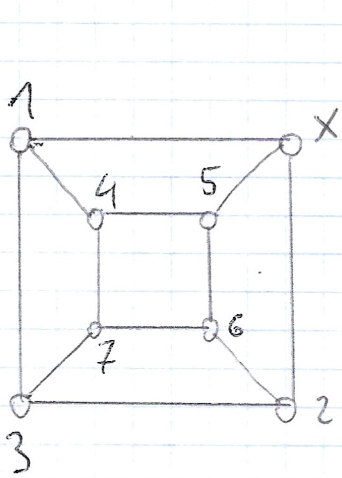
$|O_x| = |\{1, x, 3, 5\}| = 4$ (gdzie można przenieść x)

$|G_x| = |\{id, (1,5), (2,4), (1,5)(2,4)\}| = 4$

(stabilizatory, permutacje grafu dla których x zostaje na swoim miejscu)

$|G| = |G_x||O_x| = 16$

b)

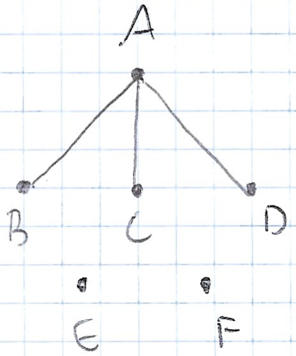


$|O_x| = |\{1,2,3,4,5,6,7,x\}| = 8$

$|G_x| = 3!$ (są to permutacje sąsiadów x-a, a reszta jest wyznaczona jednoznacznie)

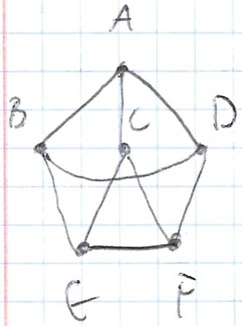
$|G| = |G_x||O_x| = 48$

Zad. 5.



Weźmy dowolny wierzchołek A. Łączymy go z 3 sąsiadami (żeby zachować 3-regularność!). Pozostają jeszcze 2 wierzchołki.

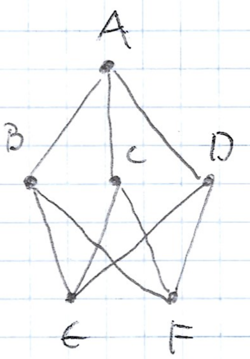
1) E i F mają wspólną krawędź



Czyli mamy do rozdania 4 krawędzie, z zasady szufladkowej 2 przypadną jednemu z wierzchołków B, C, D. (obojętnie któremu, zawsze graf można przekształcić)

Resztę łączymy tak, aby zachować 3-regularność.

2) E i F nie mają wspólnej krawędzi



Czyli ich sąsiadami są B, C, D, żeby zachować 3-regularność.

Zad. 8.

Weźmy dowolny graf dwudzielny o n wierzchołkach.

$V = V_1 \cup V_2$

Jeśli $|V_1| = k$, to $|V_2| = n-k$. Czyli maksymalna liczba krawędzi to $k(n-k)$. Szukamy ekstremum:

$(kn - k^2)' = n - 2k \Rightarrow k = \frac{n}{2}$

$|E| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ■

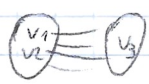
Zad. 9.

1) Graf G jest spójny - koniec.

2) Graf G nie jest spójny — są przynajmniej dwie spójne składowe. W G między wierzchołkami z różnych wspomnianych składowych istnieją krawędzie (ponieważ jest to dopełnienie G).

Czyli dla dowolnych wierzchołków v_1 i v_2:

- są w różnych składowych → istnieje między nimi krawędź w $\overline{G}$.
- są w tej samej składowej → istnieje v_3 w innej składowej, który łączy v_1 i v_2 w $\overline{G}$



Zad. 6.

$n(Q_k) = 2^k$, bo ciągów k-el. jest 2^k

$m(Q_k) = k2^{k-1}$

Graf to k-wymiarowa kostka, czyli jest k-regularny. A zatem z lematu o uściskach dłoni:

$$\sum_{i=1}^{2^k} deg(v_i) = \sum_{i=1}^{2^k} k = 2m \Rightarrow m = \frac{k2^k}{2} = k2^{k-1}$$

Dwudzielność:

$V = V_1 \cup V_2$

V_1 - wierzchołki różniące się między sobą na parzystej liczbie współrzędnych ($\forall_{v,w \in V_1}$)

$V_2 = V \setminus V_1$

W V_1 nie ma krawędzi między wierzchołkami, ponieważ 1 jest nieparzyste (a różnią się na parzystej liczbie pozycji).

Zał., że w V_2 jest para wierzchołków v, w połączonych krawędzią. Wtedy różnią się one na 1 pozycji, a zatem w V_1 musi istnieć wierzchołek, który różni się z v lub w na parzystej liczbie pozycji. Czyli ten wierzchołek (v lub w) musi być w V_1, a z zał. jest w V_2.

Sprzeczność! Σ