Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 7

- 1. Ile jest takich rozłożeń (dowolnej liczby) pionków na szachownicy $n \times n$, że dla każdych dwóch pionków jeden z nich jest na lewo i niżej od drugiego?
- 2. Pokaż, że $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$. Pokaż też, że $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m}$ jest liczbą Fibonacciego (którą?).
- 3. Znajdź wzór na liczbę ciągów długości 2n, w których każda liczba ze zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ występuje dokładnie dwa razy i takich, że sąsiednie liczby są różne.
- 4. Znajdź zwartą postać ciągu a_n określonego wzorem:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

- 5. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą metody anihilatorów:
 - (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} a_n + 3^n 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$
 - (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$
 - (c) $a_{n+2} = 2^{n+1} a_{n+1} a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$

Rozwiąż jedno z nich do końca.

- 6. Rozwiązując zależność $a_n = a_{n-3}$ metodą anihilatorów wyraź $n \mod 3$ jako kombinację liniową pierwiastków trzeciego stopnia z 1. Korzystając z tego wzoru znajdź analogiczny wzór na $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.
- 7. Ile jest ciągów n liter należących do 26-literowego alfabetu łacińskiego zawierających parzystą liczbę liter 'a' (zero też jest parzyste).

Wsk.: Ułóż zależność rekurencyjną opisującą tę liczbę i rozwiąż ją np. za pomocą metody anihilatorów

- 8. Za pomocą metody anihilatorów oblicz $s_n = \sum_{i=1}^n i2^i$ rozwiązując zależność $s_n = s_{n-1} + n2^n$.
- 9. Niech c_n oznacza liczbę ciągów n znaków ze zbioru $\{0,1,2\}$ nie zawierających dwóch sąsiednich jedynek ani dwóch sąsiednich dwójek. Ułóż zależność rekurencyjną i rozwiąż ją wyznaczając jawny wzór na c_n .
- 10. Przez linię komunikacyjną przesyłamy 0 lub 1. Prawdopodobieństwo, że adresat dostanie oryginalną wiadomość wynosi 1-p a prawdopodobieństwo że dostanie jej negację wynosi p. Niech p_n będzie prawdopodobieństwem otrzymania 0 po przesłanu 0 przez p kolejnych linii komunikacyjnych. Znajdź zależność rekurencyjną na p_n i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.
- 11. (Problem ruiny gracza). Gracz A ma k złotych a gracz B ma n-k złotych. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez gracza A wynosi p (przegrywający przekazuje wygrywającemu złotówkę). Gra kończy się w momencie gdy któryś z graczy pozostanie bez pieniędzy. Napisz zależność rekurencyjną na prawdopodobieństwo p_k wygranej gracza A i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.
- 12. Policz sumę

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)2^k$$
 (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2(-1)^k$ (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

- 13. Niech A(x) będzie funkcją tworzącą ciągu a_n . Wylicz funkcje tworzące ciągów:
 - (a) $b_n = na_n$
 - (b) $c_n = a_n/n, c_0 = 0$
 - (c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

(d)
$$d_n = \begin{cases} a_n & \text{gdy} & n = 2k \\ 0 & \text{gdy} & n = 2k+1 \end{cases}$$

Wsk.: W (c) skorzystaj ze wzoru na iloczyn szeregów potęgowych dla A(x) i $1+x+x^2+\cdots$

14. Wylicz funkcje tworzące ciągów

(a)
$$a_n = n^2$$
 (b) $a_n = n^3$ (c) $a_n = \binom{n+k}{k}$

- 15. Oblicz funkcje tworzące ciągów
 - (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n.
 - (b) $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n \ (H_0 = 0)$