Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 2

- 1. Niech a będzie liczbą niewymierną i n liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że $\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n-1$. Jak wygląda analogiczna równość dla powały?
- 2. Oblicz dla dowolnych naturalnych $x \in \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{N}$ wyrażenie $\lfloor x/m \rfloor + \lfloor (x+1)/m \rfloor + \cdots + \lfloor (x+m-1)/m \rfloor$.
- 3. Dla każdej z następujących zależności rekurencyjnych określ liczbę warunków początkowych niezbędnych do jednoznacznego określenia wartości elementów ciągu dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(a)
$$a_n = na_{n-2}$$
, (b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, (c) $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n$.

- 4. Rozwiąż następujące zależności:
 - (a) $f_n = f_{n-1} + 3^n$ dla n > 1 i $f_1 = 3$;
 - (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla n > 1 i $h_1 = 1$;
 - (c) $l_n = l_{n-1}l_{n-2}$ dla n > 2 i $l_1 = l_2 = 2$.
- 5. Rozwiąż zależności rekurencyjne
 - (a) $a_0 = 1$, $a_n = 2/a_{n-1}$,
 - (b) $b_0 = 0$, $b_n = 1/(1 + b_{n-1})$,
 - (c) $c_0 = 1$, $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$,
 - (d) $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}$.
- 6. Rozwiąż zależności rekurencyjne
 - (a) $y_0 = y_1 = 1$, $y_n = (y_{n-1}^2 + y_{n-2})/(y_{n-1} + y_{n-2})$
 - (b) $z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $z_n = (z_{n-1}^2 1)/z_{n-2}$
 - (c) $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n = (t_{n-1} t_{n-2} + 3)^2/4$
- 7. Rozwiąż zależności rekurencyjne
 - (a) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$,
 - (b) $b_0 = 1/2$, $nb_n = (n-2)b_{n-1} + 1$,
 - (c) $c_0 = 0$, $nc_n = (n+2)c_{n-1} + n + 2$,
 - (d) $d_0 = 1, d_1 = 2, nd_n = (n-2)!d_{n-1}d_{n-2}$.
- 8. Rozwiąż zależność rekurencyjną $a_n = (1 + a_{n-1})/a_{n-2}$ przy warunkach początkowych $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$. Jakie muszą być α, β , żeby ciąg a_n był określony dla wszystkich n?
- 9. Rozwiąż zależności rekurencyjne
 - (a) f(1) = 1, $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1$,
 - (b) g(0) = 0, $g(n) = g(|n/2|) + |\log_2 n|$.
- 10. Podwójna wieża Hanoi składa się z 2n krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych by przenieść wieżę z pręta A na B, gdy krążki równej wielkości nie są rozróżnialne.
- 11. Na płaszczyznie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Rozwiąż zadanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
- 12. Ile najwięcej kawałków sera można uzyskać z pojedynczego grubego kawałka za pomocą n cięć nożem? Zakładamy że każde cięcie jest wyznaczone przez płaszczyznę przecinającą kawałek sera.
- 13. Sprawdź, że liczby harmoniczne $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ spełniają zależność rekurencyjną $H_n=\frac{1}{n}(H_{n-1}+H_{n-2}+\ldots+H_1)+1$ dla n>1.
- 14. Wykaż prawdziwość równości (F.Lucas, 1842-1891):
 - (a) $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} 1$,
 - (b) $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ dla $n \ge 1$,
 - (c) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, (d) $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$.
- 15. Pokaż, że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$. Dla jakich n mamy $F_n = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \right|$?