Patryk Maciąg 331542 Lista 10

Zad. 2.

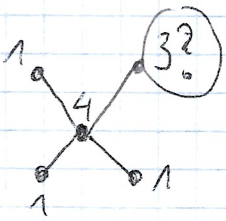
a) ciąg stopni wierzchołków: 1, 2, 2, 3, 3

Z lematu o uściskach dłoni: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E| = 2m$.

Czyli $2 \mid (1+2+2+3+3)$, sprzeczność ↯

Graf nie istnieje.

b) ciąg stopni wierzchołków: 1, 1, 1, 3, 4



Weźmy wierzchołek o stopniu 4. Skoro wszystkich wierzchołków jest 5, to musi się łączyć z pozostałymi 4. Teraz weźmy wierzchołek o stopniu 3. Brakuje 2 wierzchołków do połączenia. Czyli taki graf nie istnieje.

c) graf dwudzielny, ciąg stopni wierzchołków: 2, 2, 2, 2, 2

Dla każdego wierzchołka muszą istnieć 2 wierzchołki w przeciwnej spójnej składowej, a jest to niemożliwe. Jedyny sposób na podział to stosunek 3 : 2, ale wtedy dla 1 wierzchołka brakuje wierzchołka w drugiej grupie. Czyli sprzeczność. Graf nie istnieje.

Zad. 4.

$d(G) = 2$

$\max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\} = n-2$

Niech $v \in V(G)$ i $\deg(v) = n-2$. Połączmy go z $n-2$ wierzchołkami. Został jeszcze 1 wierzchołek bez krawędzi w. Połączmy go z jednym z sąsiadów v, czyli $d(v,w) = 2$. Czyli od wszystkich pozostałych sąsiadów v, w jest odległy o 3, ale $d(G) = 2$. Więc tworzymy kolejne krawędzie dla $n-3$ sąsiadów v. Krawędzie te mogą wychodzić bezpośrednio z w, lub jego sąsiada. Niezależnie od tego, dodajemy łącznie $(n-3)$ krawędzie. Dlatego całkowita liczba krawędzi wynosi $(n-2)+1+(n-3) = 2n-4$.
Ale możemy dodać więcej krawędzi pomiędzy sąsiadami v jeśli chcemy. Finalnie otrzymujemy nierówność:
$m \geq 2n-4$ ∎

Zad. 6.

$a, b, c, d \in V(G)$

Załóżmy że drogi $a \rightsquigarrow b$ i $c \rightsquigarrow d$ oraz $a \rightsquigarrow c$ i $b \rightsquigarrow d$ istnieją i są rozłączne.

Czyli ~~z~~ wierzchołka a możemy dojść do c na 2 sposoby:

1) korzystając z drogi $a \rightsquigarrow c$
2) $a \rightsquigarrow b \rightsquigarrow d \rightsquigarrow c$

Założyliśmy, że drogi $b \rightsquigarrow d$ i ~~d~~ c są rozłączne, czyli na drodze $a \rightsquigarrow c$ nie ma ~~a~~ b i d. Zatem w grafie istnieje cykl, przez c graf nie jest drzewem. Sprzeczność?! ∎

Zad. 11.

Tw. Cayley'a: liczba drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$ wynosi n^{n-2}.

Czyli po zabraniu wierzchołka 1, na zbiorze $\{2, \dots, n\}$ jest $(n-1)^{n-3}$ drzew.

Następnie dodajemy wierzchołek 1 z powrotem, jako liść. Możemy otrzymać $(n-1) \cdot (n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}$ takich drzew (1 połączony się z którymś z $(n-1)$ wierzchołków). Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi:

$$\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{\frac{n-2}{-n}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{-n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Zad. 1.

t(n) = {0} //tablica zainicjowana zerami
dla każdego wierzchołka i = 1, 2, ..., n:
    licznik = 0
    dla każdego sąsiada j wierzchołka i w G1
        t(j) = 1
        licznik += 1
    dla każdego sąsiada j wierzchołka i w G2
        jeśli t(j) == 0 zwróć fałsz
        w.p.p.
            t(j) = 0
            licznik -= 1
    jeśli licznik != 0 zwróć fałsz
zwróć prawda

Zad. 3.

$d(G) = \max\{d(x,y) \mid x,y \in V(G)\}$

Teraz: $d(G) > 3 \Rightarrow d(\bar{G}) < 3$

Zał. $d(G) > 3$

Weźmy dowolne dwa wierzchołki $v_1, v_2 \in V(G)$

1) $d(v_1,v_2) > 1$, czyli w G nie istnieje krawędź między v_1 i v_2.
Wtedy w $\bar{G}$ taka krawędź istnieje, zatem $d(v_1,v_2)=1$ dla $\bar{G}$

2) $d(v_1,v_2) = 1$, czyli w G istnieje krawędź między v_1 i v_2, zatem w $\bar{G}$ takiej krawędzi nie ma.

Pokażmy, że istnieje w G wierzchołek w taki, że $(v_1,w) \notin E(G)$ i $(v_2,w) \notin E(G)$. Zał., że nie ma takiego wierzchołka. Wtedy:

$\neg(\exists w\ (v_1,w) \notin E(G) \wedge (v_2,w) \notin E(G))$

$\forall w\ (v_1,w) \in E(G) \vee (v_2,w) \in E(G)$

To by oznaczało, że dla ~~dowolnych~~ dow wierzchołków $w_1, w_2 \in V(G)$, możemy przejść z w_1 do w_2 po maksymalnie 3 krawędziach

$w_1\ v_1\ v_2\ w_2$, $w_1\ v_1\ w_2$, $w_1\ v_2\ w_2$, $w_1\ v_2\ v_1\ w_2$, $w_1\ w_2$

Czyli $d(w_1,w_2) \leq 3$, dla z zał. $d(G) > 3$, czyli sprzeczność.

Zatem istnieje wierzchołek w taki, że $d(v_1,w) > 1 \wedge d(v_2,w) > 1$, a wtedy w $\bar{G}$ $d(v_1,v_2) = 2$. Czyli $d(\bar{G}) \leq 3$

(bo dla dow v_1 i v_2 $d'(v_1,v_2)=1 \vee d'(v_1,v_2)=2$)