Patryk Maciąg 331542 Lista 6

Zad. 1.

$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ – do delegacji wybieramy k z n osób oraz 1 z k osób na przewodniczącego

$n2^{n-1}$ – wybieramy przewodniczącego na n sposobów, a dla reszty czy są w delegacji czy nie $(0,1)$

Zad. 3.

A – liczby podzielne przez 2

B – '' —— 3

C – '' —— 5

D – '' —— 7

$$|(A\cup B)| - |((A\cap(C\cup D))\cup(B\cap(C\cup B))|$$

$$\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{2\cdot3}\right\rfloor\right) - \left(\left(\left\lfloor\frac{n}{2\cdot5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2\cdot7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{2\cdot5\cdot7}\right\rfloor\right)\right.$$
$$\left. + \left(\left\lfloor\frac{n}{3\cdot5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{3\cdot7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{3\cdot5\cdot7}\right\rfloor\right) - \left(\left\lfloor\frac{n}{2\cdot3\cdot5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2\cdot3\cdot7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right\rfloor\right)\right)$$

Zad. 4.

Zasada włączeń i wyłączeń

$k \le n$, $n! - |$suma ~~kb~~ kombinacji gdzie i-ta liczba jest na i-tej pozycji$|$

$$\binom{k}{0}n! - \binom{k}{1}(n-1)! + \binom{k}{2}(n-2)! - \binom{k}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^k\binom{k}{k}(n-k)! =$$
$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(n-i)!$$

Zad. 6.

Podobnie jak zad. 4., zasada włączeń i wyłączeń

$5 \times 4 = 20$

$$\binom{5}{0} 20^n - \binom{5}{1}(20-4\cdot 1)^1 + \binom{5}{2}(20-4\cdot 2)^2 - \ldots - \binom{5}{5}(20-4\cdot 5)^5 =$$

$$= \sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{5}{i} (20-4i)^i$$

Zad. 12.

a i b tworzą podgrupę S_5 (są zamknięte na działanie składania funkcji (przestawień) i mają elementy odwrotne)

c nie jest podgrupą S_5, bo rząd c (7) nie jest dzielnikiem rzędu S_5 (120) (tw. Lagrange'a).

$$(12)(345)(135)(24) = (14)(25) \notin C$$

~~Zad. 14.~~

$$\cancel{|G| = 10 \times |G_x| = 12 \times (5+5) = 120}$$

~~1. ścian~~

Zad. 13.

$|O_x|$ - liczba orbit x

$|G_x|$ - liczba stabilizatorów x

$|G| = 2^k$

$2 \nmid |X|$ $\qquad |O_x| = \frac{\overset{=2^k}{|G|}}{|G_x|} = 2^l \vee 1$

$$X = \bigcup \{ O_x : x \in X \}$$

X is rozłączna suma orbit → musi istnieć orbita jednoelementowa, bo inaczej wszystkie orbity byłyby parzyste, czyli $|X|$ byłoby parzyste.

Zad. 15.

8 ścian, przypisujemy 1, 2, 3, ..., 8, czyli 8! możliwości

$|O_x| = 8$, $|G_x| = 3$ bo w podstawie jest trójkąt równoboczny, 3 obroty

Czyli $|G| = |O_x| \cdot |G_x| = 24$ (moc grupy)

Rozw. I: Teraz odliczamy kostki identyczne, które można uzyskać przez obrót. Czyli $\underline{\underline{\frac{8!}{24}}}$.

Prawidłowe:

1. ściana na 8 sposobów, a nie przecież 1 konkretny sposób

3. ściana - 6, 5. ściana - 4, 7 ściana - 2

$$\underline{\underline{\frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{24}}}$$