Patryk Maciąg 331542 Lista 11

Zad. 8

Teza: W każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze skierowanej długości co najwyżej 2 do każdego innego.

D-d:

Niech $v \in V(G)$ i $\text{outdeg}(v) = \max\{\text{outdeg}(w) \mid w \in V(G)\}$

1) $\text{outdeg}(v) = m \ (= |E(G)|)$, wtedy z tego wierzchołka istnieje droga o długości 1 do każdego innego, czyli ok.

2) $\text{outdeg}(v) < m$

Zał. (nie wprost), że istnieje $u \in V(G)$, do którego nie da się dojść z v po ścieżce o max. 2 krawędziach.
Wierzchołek u z zał. ma łuki, do każdego innego wierzchołka, również do v i każdego z którego da się dojść do v po ścieżce długości 1.
Wszystkie te wierzchołki muszą być połączone krawędziami wychodzącymi z u, aby dojście z v do u w max. 2 krokach było niemożliwe. Czyli $\text{outdeg}(u) = \text{outdeg}(v) + 1$.
A skoro tak, to v nie jest wierzchołkiem o maksymalnej liczbie łuków wychodzących, czyli sprzeczność ↯

Zad. 9.

Tera: Każdy turniej zawiera (skierowaną) drogę Hamiltona, tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

D-d:

Indukcja

$n = 1 \to$ trywialne

Zał. że działa dla n. Pokażemy dla $n+1$.

Niech $n+1 = |V(G)|$ i usuńmy z G dowolny wierzchołek w.
Z zał. graf powstały po usunięciu w ma drogę Hamiltona
$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$

Dołóżmy z powrotem w. (w ma kr. z każdym innym wierzchołkiem)

1) istnieje krawędź (w, v_1) lub (v_n, w) $\Rightarrow$ jest ok

2) nie istnieje krawędź (w, v_1) ani (v_n, w)

Niech i będzie najmniejszym i takim, że $w \to v_i$.
Czyli $v_{i-1} \to w$.
Podmienimy na drodze Hamiltona $v_{i-1} \to v_i$ na $v_{i-1} \to w \to v_i$. Teraz mamy drogę Hamiltona, czyli jest ok.

Zad. 10.

1)

1	24	19	14	3
18	13	2	9	20
23	8	25	4	15
12	17	6	21	10
7	22	11	16	5

2) Nie, Koń zawsze zaczyna i kończy ruch na polach o różnych kolorach. Jeśli pól jest $5 \times 5 = 25$, to przy nieparzystej liczbie ruchów na pole trafimy na pole o różnym kolorze, względem pola na którym początkowo stał skoczek, a powinniśmy skończyć na tym samym kolorze.

Zad. 12.

Zał.

$n = |V(G)| \geq 3$

Dla dow. $u, v, w \in V(G)$ istnieją conajmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u, v\}$, $\{v, w\}$, $\{w, u\}$.

Teza: w G istnieje cykl Hamiltona

D-d:)

Tw. Orego: jeśli dla dowolnych dwóch niepołączonych bezpośrednio wierzchołków v_1 i v_2 $\deg(v_1) + \deg(v_2) \geq n$ to w grafie istnieje cykl Hamiltona.

Graf pełny - trywialne

Niech $n = |V(G)|$ i niech u, v będą dow. niepołączonymi bezpośrednio wierzchołkami G.

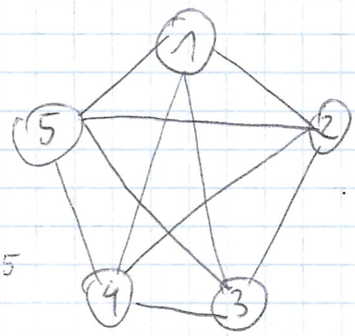
→

Niech w to dowolny z n-2 pozostałych wierzchołków.
Skoro nie ma krawędzi $\{u,v\}$, to z zał. muszą istnieć $\{u,w\}$ oraz $\{v,w\}$. Czyli u i w są połączone bezpośrednio z każdym z n-2 pozostałych wierzchołków.
Zatem:

$$\deg(u) = \deg(v) = n-2 \Rightarrow \deg(u) + \deg(v) = 2n-4 \geq n$$

Z tw. Orego istnieje cykl Hamiltona. ■

Zad. 7.



K_5

Liczby 1, 2, 3, ..., n możemy przedstawić jako graf K_n.

Pytanie, na które chcemy znać odpowiedź, to czy w K_n istnieje cykl Eulera?

Z wykładu:

Graf jest eulerowski $\iff$ jest spójny i wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty

W K_n każdy wierzchołek ma stopień n-1, czyli aby istniał cykl Eulera, to n musi być nieparzyste.

Patryk Maciąg 331542 Lista 11

Zad. 2.

Samodopełniający graf n wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4.

$\Rightarrow$

Zał., że G jest samodopełniający.
Zatem G i $\bar{G}$ mają tyle samo krawędzi, bo są izomorficzne.

$$|E(G)| + |E(\bar{G})| = \frac{n(n-1)}{2}, \quad |E(G)| = |E(\bar{G})| \Rightarrow |E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$$

Suma G i $\bar{G}$ to graf pełny

Liczba krawędzi to liczba całkowita, więc $4|n$ lub $4|(n-1)$.
Czyli $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4.

$\Leftarrow$

Zał., że $n = |V(G)|$ i $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4.

1) $n \equiv 0 \mod 4$

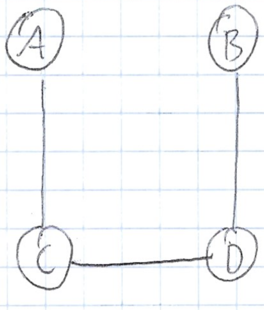
Podzielmy n na 4 równoliczne grupy A, B, C, D.

A - graf pełny (każde 2 dow. wierzchołki są połączone krawędzią)

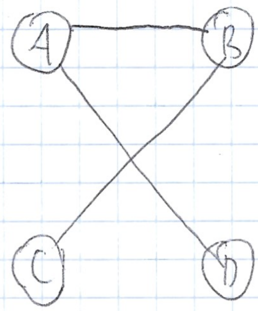
B - — || —

C - graf pusty

D - — || —



Każdy wierzchołek z A łączymy z każdym wierzchołkiem z C.
Każdy wierzchołek z B łączymy z każdym wierzchołkiem z D.
Każdy wierzchołek z C łączymy z każdym wierzchołkiem z D.

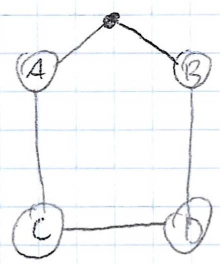


Rozważmy dopełnienie opisanego wyżej grafu. Łatwo zauważyć, że grafy te są izomorficzne (A zmieniło się z D, B z C, A i B są puste, a C i D są pełne).

Zatem graf jest samodopełniający.

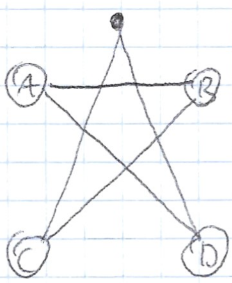
2) $n \equiv 1 \mod 4$

Rozważmy ten sam graf co opisany we wcześniejszym przypadku.
Mamy jeszcze 1 dodatkowy wierzchołek.
Łączymy go ze wszystkimi wierzchołkami z A i B.



W dopełnieniu pojawią się podobne zmiany co wcześniej oraz znikną krawędzie z naszego nowego wierzchołka do A i B, zastąpione krawędziami do wierzchołków z C i D.

Dopełnienie:



Te grafy są izomorficzne, zatem graf ten jest samodopełniający.

Zad. 1.

Niech $n = |V(T)|$.

$n = 1 \to$ 1 automorfizm (identyczność)

$n = 2 \to$ jedyna krawędź przechodzi na samą siebie

Zał., że dla wszystkich drzew o co najwyżej n wierzchołkach zachodzi teza. Pokażemy dla $n+1$.

Niech $|V(T)| = n+1$

Zauważmy, że w dowolnym automorfizmie liście przechodzą na liście. Czyli dla ϕ, jeśli $\deg(v) = 1$ to $\deg(\phi(v)) = 1$. (inaczej wierzchołek stopnia 1 przeszedł by na wierzchołek stopnia co najmniej 2 i wtedy ϕ nie było by automorfizmem)

Usuńmy z T wszystkie liście. Wtedy jeśli ϕ' jest automorfizmem na $\bar{T}$ po usunięciu liści, to na mocy zał. ind. ϕ' spełnia tezę.
Jeśli rozszerzymy ϕ' do całego T (z liśćmi), to wiemy, że liście przejdą na liście, co nie zaprzecza tezie. ∎