Patryk Maciąg 331542 Lista 5

Zad. 3.

$n \in \mathbb{N}$

Teza: $k! \mid n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$

D-d:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$k! \mid n \cdot \ldots \cdot (n+k-1) \quad \blacksquare$$

Zad. 6.

~~$LS \in \mathbb{N}$~~

$$\left.\begin{aligned} & S \subset \mathbb{N} \\ & |S| = 10 \\ & \forall_{x \in S}\ 0 < x < 100 \end{aligned}\right\} \quad \exists_{A,B \subseteq S}\ \sum A = \sum B \qquad \begin{aligned} & A \neq B \\ & A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

Mamy $2^{|S|} = 2^{10} = 1024$ podzbiorów S, ale nie więcej niż $10 \cdot 100$ różnych sum podzbiorów S (max. suma $= 945$), Z zasady szufladkowej Dirichleta, będą istnieć 2 różne podzbiory o takiej samej sumie.

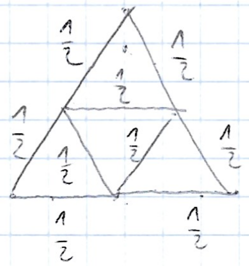
Zad. 4.

a) kulki - drużyny (n)
szufladki - liczba przegranych meczy $(n-1)$

Jeśli jakaś drużyna przegrała już $n-1$ meczy, to nie może istnieć drużyna, która nie przegrała żadnego meczu.
Czyli możliwe liczby przegranych meczy wynoszą $0 \ldots n-2$ lub od 1 do $n-1$.

Z zasady szufladkowej Dirichleta, muszą istnieć 2 drużyny, które przegrały tyle samo meczy.

b) kulki - punkty (5)
szufladki - trójkąty równoboczne o boku $\frac{1}{2}$, powstałe z podziału trójkąta równobocznego o boku 1 (4)



Z zasady szufladkowej Dirichleta, przynajmniej 2 punkty trafią do tego samego trójkąta o boku $\frac{1}{2}$, a maksymalna odległość w takim trójkącie to $\frac{1}{2}$.

c) kulki - ściany (n)
szufladki - liczba krawędzi $(n-2)$

Ściana n-ścianu musi mieć min. 3 krawędzie, a max. $n-1$ krawędzi (dla n-tej krawędzi powstałaby nowa ściana, czyli inny wielościan). Czyli mamy $n-2$ szufladek (od 3 do n) oraz n kulek. Z zasady szufladkowej Dirichleta przynajmniej 2 ściany mają taką samą liczbę krawędzi.

Zad. 9.

1) dokładnie 1 cyfra występuje więcej niż jeden raz

- 5 razy – 10 możliwości
- 4 razy – $10 \cdot 9 \cdot \binom{5}{1} = 450$ możliwości
- 3 razy – $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \binom{5}{2} = 7200$ możliwości
- 2 razy – $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \binom{5}{3} = 50400$ możliwości

Łącznie istnieje 58060 takich numerów.

2) przynajmniej 1 cyfra występuje więcej niż jeden raz

$$10^5 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 10^5 - 30240 = 69760$$

Zad. 10.

1) szachownica 8x8

	analogicznie 2. kolor
• król – 64 opcje	48
• hetman – 63 opcje	47
• 2 skoczki – $\binom{62}{2}$ opcje	$\binom{46}{2}$
• 2 gońce – $\binom{60}{2}$ opcje	$\binom{44}{2}$
• 2 wieże – $\binom{58}{2}$ opcje	$\binom{42}{2}$
• 8 pionków – $\binom{56}{8}$ opcji	$\binom{40}{8}$

$$64 \cdot 63 \cdot \binom{62}{2} \cdot \binom{60}{2} \cdot \binom{58}{2} \cdot \binom{56}{8} \cdot 48 \cdot 47 \cdot \binom{46}{2} \cdot \binom{44}{2} \cdot \binom{42}{2} \cdot \binom{40}{8}$$

2) Para gońców każdego z kolorów zajmuje pola różnych kolorów.

Najpierw gońce / reszta analogicznie do 1)

$$32 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 31 \cdot 60 \cdot 59 \cdot \binom{58}{2} \cdot \binom{56}{2} \binom{54}{8} \cdot 46 \cdot 45 \cdot \binom{44}{2} \cdot \binom{42}{2} \binom{40}{8}$$

Zad. 13.

a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, $k \neq 0$

b) Indukcja po n:

$n = m$

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \underbrace{\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \ldots +}_{0} \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$$

Zał. że dla n $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Pokażemy dla $n+1$:

$$\sum_{0 \leq k \leq n+1} \binom{k}{m} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \overset{zał}{=} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1}$$

tożsamość Pascala