Estatística Aplicada

ano lectivo 2010/2011

A. Rita Gaio
Departamento de Matemática - FCUP
argaio@fc.up.pt

February 17, 2011

Índice Geral

Chapter 3

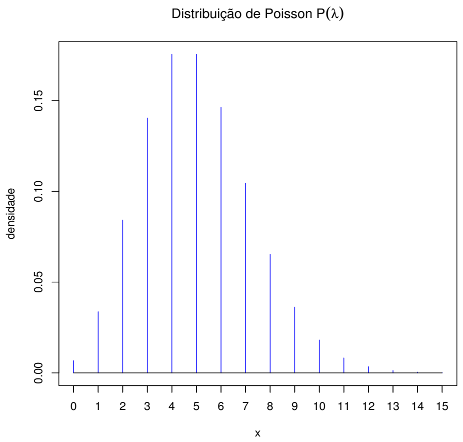
Distribuições de probabilidade especiais

3.1. Distribuições de probabilidade especiais

de uma v.a. **discreta**:

- distribuição uniforme discreta
- distribuição binomial
- distribuição de Poisson
- distribuição multinomial
- distribuição geométrica
- distribuição binomial negativa

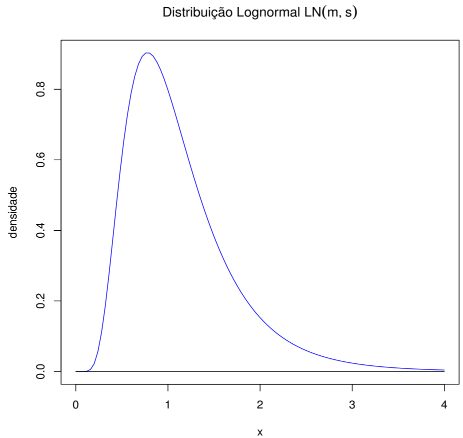
  ...



de uma v.a. **contínua**:

- distribuição uniforme
- distribuição normal
- distribuição lognormal
- distribuição exponencial
- distribuição χ^2
- distribuição t de Student
- distribuição F de Snedecor

  ...



Homepage

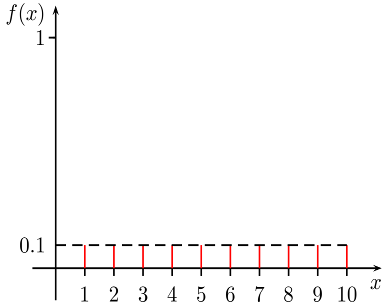
Página de Rosto

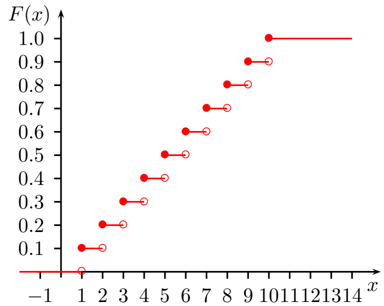
Índice Geral

3.1.1. Distribuição Uniforme Discreta: $U(N)$

N = tamanho da população
$f(x_i) = f(x_j), \quad i,j = 1, 2, \ldots, N$, *i.e.*, todos os resultados possíveis da experiência aleatória são equiprováveis.

Função de prob.	$f(x) = \frac{1}{N}$
Função de distrib.	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{[x]}{N}{}^{a}, & 1 \le x \le N \\ 1, & x > N \end{cases}$
Domínio	$1, 2, 3, \ldots, N$
Média	$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
Variância	$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2$





Exemplos:

1. Considere-se uma população com 10 indivíduos distintos numerados de 1 a 10 e a experiência que consiste da extracção aleatória de um indivíduo dessa população. A variável aleatória X que representa o indivíduo escolhido segue uma distribuição uniforme discreta em 10 pontos. Para $i = 1, 2, \ldots, 10$ tem-se

$$f(i) = P(X = i) = \frac{1}{10}.$$

2. A variável aleatória Y que representa a face voltada para cima resultante de um lançamento de uma moeda não viciada segue uma distribuição discreta uniforme em 2 pontos. Tem-se

$$f(\text{Cara}) = f(\text{Coroa}) = P(Y = \text{Coroa}) = \frac{1}{2}.$$

[a] $[x]$ é a *característica* de x, ie, o menor inteiro que não excede x

3.1.2. Distribuição Binomial $B(n,p)$

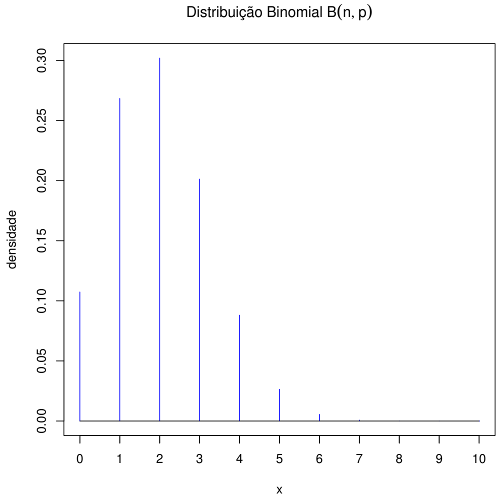
- $n = \#$ ensaios de Bernoulli (experiências independentes e identicamente distribuídas [a], i.i.d., para as quais existem precisamente 2 realizações possíveis - sucesso e insucesso)
- $p =$ probabilidade de sucesso [b]
- $X \sim B(n,p)$ se X representa o número de sucessos em n ensaios

Função de prob.	$b(x) = P(X = x)$ =probabilidade do sucesso acontecer x vezes em n ensaios de Bernoulli $=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \quad 0 < p < 1, \quad x = 0, 1, \ldots, n$
Função de distrib.	$B(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} b(k)$
Domínio	$0, 1, 2, 3, \ldots, n$
Média	$\mu = np$
Moda	$p(n+1) - 1 \leq M \leq p(n+1)$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
Coef. Assimetria	$\lambda = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$

[a] **independentes**: os resultados são v.a. independentes; **ident. distribuídas**: a probabilidade de sucesso é a mesma para cada experiência

[b] portanto $1-p$ é a probabilidade de insucesso

A distribuição binomial depende de 2 parâmetros, n e p, designados por **parâmetros da distribuição binomial**. Diferentes valores destes parâmetros correspondem a diferentes distribuições desta família.



Observação: Na expressão de $b(x)$ aparece o termo $\binom{n}{x}$ que representa o número de combinações de x elementos, de entre n, que se podem obter, nomeadamente

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

onde $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1.$

Exemplo 1: De um lote de 300 comprimidos em que 9 são defeituosos, são seleccionados aleatoriamente 5 comprimidos. Qual é a probabilidade de obter:

(a) pelo menos um comprimido defeituoso?

(b) no máximo 2 comprimidos defeituosos?

(c) nenhum comprimido defeituoso?

(d) exactamente 3 comprimidos defeituosos?

Resolução: Identifiquemos cada ensaio de Bernoulli como sendo a avaliação de cada comprimido do lote de 5 em defeituoso ou normal, e o sucesso desse ensaio como o facto de o comprimido extraído ser defeituoso. Seja X a variável aleatória que representa o número de comprimidos defeituosos, em 5 seleccionados. Como a probabilidade de extrair um comprimido defeituoso do lote é $9/300 = 0.03$ tem-se que

$$X \sim B(5; 0.03)$$

(a) Pretende-se calcular $P(X \geq 1)$. Ora

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{5}{0}(0.03)^0(0.97)^5 \\ &\approx 1 - 0.859 \\ &= 0.141. \end{aligned}$$

Para o cálculo de $P(X = 0)$ poderíamos ter usado a instrução

```
> dbinom(0,size=5,prob=0.03)
[1] 0.858734
```

(b) A probabilidade pretendida é $P(X \leq 2)$ que se obtem com a instrução para a função distribuição de probabilidade da distribuição binomial

```
> pbinom(2,size=5,prob=0.03)
[1] 0.999742
```

O resultado pode ser confirmado recorrendo à função de probabilidade. Como

$$\begin{aligned} &P(X \leq 2) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \end{aligned}$$

poder-se-ía ter feito

```
> dbinom(0,5,.03)+dbinom(1,5,.03)+dbinom(2,5,.03)
[1] 0.999742
```

(c) Trata-se de determinar $P(X = 0)$ que já foi calculada na alínea (a) e dá aproximadamente 0.859.

(d) Pretende-se determinar $P(X = 3)$, i.e., o valor da função de probabilidade em $X = 3$. O valor da resposta é 0.0003.

```
> dbinom(3, size=5, prob=0.03)
[1] 0.000254043
```

Resolução alternativa: Cada ensaio de Bernoulli continua a ser identificado com a avaliação de cada comprimido do lote de 5 como defeituoso ou normal mas consideramos agora como sucesso desse ensaio o facto de o comprimido extraído ser não defeituoso. Definindo Y como a v.a. que representa o número de comprimidos não defeituosos, em 5 seleccionados, resulta que

$$Y \sim B(5, 0.97).$$

Tem-se agora:

(a) $P(Y \leq 4)$ é obtida de

```
> pbinom(4,5,.97)
[1] 0.1412660
```

(b) $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y \leq 2)$ e $P(Y \leq 2)$ é determinado pela instrução

```
> pbinom(2,5,.97)
[1] 0.000258
```

portanto o resultado final é

$$1 - 0.000258 = 0.999742$$

(c) $P(Y = 5)$ corresponde a

```
> dbinom(5,5,.97)
[1] 0.858734
```

(d) $P(Y = 2)$

Exemplo 2: Suponha que um grupo de 100 homens com idades compreendidas entre os 60 e os 64 anos recebeu uma nova vacina contra a gripe.

(a) Sabendo que a taxa de mortalidade para homens dessa idade é aproximadamente 0.020, calcule a probabilidade de 10 ou mais homens, desses 100, virem a falecer durante o próximo ano.

(b) Suponha que de entre os 100 indivíduos vacinados se observou que 10 morreram no ano seguinte. Comente os efeitos produzidos pela vacina.

Resolução: Se representarmos por X a v.a. que conta o número de homens com idades compreendidas entre os 60 e os 64 anos, em 100, que morrem no ano seguinte (por qualquer causa), então

$$X \sim B(100, 0.020).$$

A probabilidade de **pelo menos** 10 desses homens (em 100) morrerem no ano seguinte é portanto

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9).$$

Dado que

```
> 1-pbinom(9,100,.02)
[1] 3.441681e-05
```

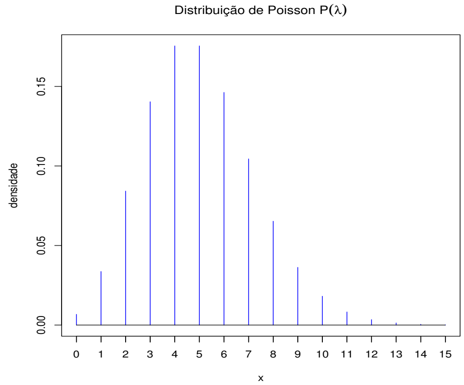
então a probabilidade $P(X \geq 10)$ é muito pequena (< 0.001 por exemplo) e a administração da vacina deveria portanto ser reavaliada por poder estar a induzir elevadas taxas de mortalidade.

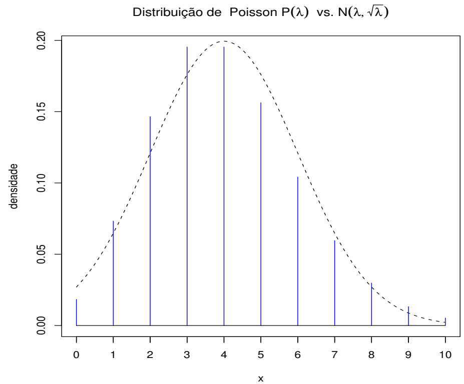
3.1.3. Distribuição de Poisson: $P(\lambda)$

A distribuição de Poisson é normalmente usada para modelar dados de contagens[1]. Geralmente, trata-se de contar o número de ocorrências de um determinado acontecimento, num período de tempo (ou num espaço) especificado, sempre que:

- os eventos ocorram independentemente
- a probabilidade de um evento ocorrer num período de tempo (ou num espaço) muito pequeno seja baixa (*i.e.*, os acontecimentos sejam *raros*)

Função de prob.	$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \lambda > 0$
Função de distrib.	$P(x) = \sum_{k=0}^{x} p(k)$
Domínio	$0, 1, 2, 3, \ldots$
Média	$\mu = \lambda$
Moda	maior inteiro $\leq \lambda \quad (= [\lambda])$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
Coef. Assimetria	$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Coef. Achatamento	$\kappa = 3 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$





[1] *count data*

Homepage
Página de Rosto
Índice Geral
Página 11 de 35
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Observações:

1. Uma v.a. que segue uma distribuição de Poisson tem variância igual à média.

2. É preciso ter algum cuidado com a interpretação de λ em situações reais. Muitas das vezes, λ é descrito como uma taxa, especificada em unidades de "exposição"; por exemplo, λ pode representar o número médio de pessoas que entram numa farmácia para comprar um produto específico, em cada 100 pessoas que entram na farmácia num trimestre. Outras vezes, λ pode corresponder ao número médio dos acontecimentos em causa num determinado período de tempo; por exemplo, λ pode representar o número médio de pessoas que entram numa farmácia para comprar um produto específico, por dia (numa situação em que o período de estudo é, por exemplo, o período natalício).

3. Definindo λ como uma taxa, a escala temporal deve ser sempre mencionada.

4. Assumir uma distribuição de Poisson para uma variável de contagem pode constituir uma hipótese demasiado simplista por causa dos factores que causam muita dispersão. Nesse caso, a **distribuição binomial negativa** será mais adequada pois permite efectuar contagens em situações em que a variância excede a média.

5. Existe um resultado importante sobre a soma de v.a. independentes seguindo, cada uma, uma distribuição de Poisson:

Proposição 3.1.1 *Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes seguindo distribuições de Poisson, digamos $X_1 \sim P(\lambda_1)$ e $X_2 \sim P(\lambda_2)$. Então*

$$X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Prova: Seja $X = X_1 + X_2$. Se x é um valor que X pode tomar, então podem existir vários $x_1 \in \mathrm{Im}(X_1)$ e $x_2 \in \mathrm{Im}(X_2)$ tais que

$$x = x_1 + x_2.$$

Para $x \in \mathrm{Im}(X)$ seja

$$\mathcal{S}_x = \{(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(X_1) \times \mathrm{Im}(X_2) \mid x = x_1 + x_2\}.$$

Estabelecida esta notação tem-se

$$\begin{aligned}
& P(X = x) \\
& = P(X_1 + X_2 = x) \\
& = \sum_{(x_1,x_2)\in\mathcal{S}_x} P(X_1 + X_2 = x_1 + x_2) \\
& = \sum_{(x_1,x_2)\in\mathcal{S}_x} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \\
& \text{(porque } X_1,\ X_2 \text{ são independentes)} \\
& = \sum_{(x_1,x_2)\in\mathcal{S}_x} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(x_1,x_2)\in\mathcal{S}_x} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{(x_1,x_2)\in\mathcal{S}_x} \frac{\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}}{(x_1+x_2)!} \frac{(x_1+x_2)!}{x_1!x_2!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{(x_1,x_2)\in\mathcal{S}_x} \frac{x!}{x_1!x_2!} \lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{x_1} \frac{x!}{x_1!(x-x_1)!} \lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x-x_1} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{x_1} \binom{x}{x_1} \lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x-x_1} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{x!} (\lambda_1+\lambda_2)^{x_1+x_2} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{x!} (\lambda_1+\lambda_2)^{x}
\end{aligned}
$$

portanto

$$X \sim P(\lambda_1+\lambda_2).$$

Exemplo 1: Suponha que o número médio de mortes por febre tifóide numa determinada comunidade num período de um ano foi de 4.6, que a probabilidade de um indivíduo morrer por febre tifóide por dia é muito baixa, e que o número de mortes ocorridas em períodos de tempo disjuntos são v.a. disjuntas. Qual é a probabilidade de:

(a) mais de 2 indivíduos morrerem por febre tifóide, num ano?

(b) mais de 2 indivíduos morrerem por febre tifóide, num período de 6 meses?

(c) existir mais de uma morte por febre tifóide, num período de 3 meses?

(d) não haver mortes por febre tifóide num período de 1 mês?

Resolução:

(a) Seja X a v.a. que representa o número de mortes por febre tifóide durante um período de 1 ano. Então

$$X \sim P(4.6)$$

e a probabilidade de ocorrerem mais de 2 mortes por febre tifóide num ano é

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2).$$

Ora $P(X \leq 2)$ corresponde ao valor da função distribuição $F_X(2)$ dado por

```
> ppois(2,lambda=4.6)
[1] 0.1626387
```

donde $P(X > 2) \approx 0.837$.

(b) Seja Y a v.a. que representa o número de mortes por febre tifóide num período de 6 meses. Tem-se

$$Y \sim P(2.3)$$

pois 6 meses é metade de 1 ano. Procedendo de forma análoga à da alínea anterior, determinamos

```
> 1-ppois(2,2.3)
[1] 0.4039612
```

A probabilidade pedida é $P(Y \geq 2) \approx 0.404$.

(c) Seja Z a v.a. que representa o número de mortes por febre tifóide num período de 3 meses. Tem-se

$$Y \sim P\left(\frac{4.6}{4}\right) = P(1.15)$$

pois 3 meses é um quarto de 1 ano. Para determinar $P(Z > 1)$ fazemos

```
> 1-ppois(1,1.15)
[1] 0.3192309
```

pois $P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1)$.

(d) Seja W a v.a. que representa o número de mortes por febre tifóide num período de 1 mês. O número médio de mortes por mês é $\frac{4.6}{12} \approx 0.383$ pelo que

$$Z \sim P(0.383).$$

A probabilidade de não existirem mortes num período de 1 mês é agora dada por

$$P(Z = 0)$$

que pode ser calculada através da instrução

```
> dpois(0,0.383)
[1] 0.6818129
```

Exemplo 2: Considere uma placa de agar de 100 cm^2 onde se estão a desenvolver algumas colónias de bactérias. Assuma que a probabilidade de encontrar uma colónia de bactérias num qualquer ponto do placa é muito baixa, e que encontrar colónias de bactérias em pontos diferentes do placa são acontecimentos independentes.
Supondo que se tem uma média de 0.02 colónias por cm^2, determine, para a placa de agar:

(a) a probabilidade de não encontrar nenhuma colónia

(b) a probabilidade de encontrar mais de 10 colónias

(c) a probabilidade de encontrar no máximo 3 colónias.

(d) o número de colónias com maior probabilidade de ocorrência.

Resolução: Seja X a v.a. que representa o número de colónias de bactérias na placa de agar. X segue uma distribuição de Poisson $P(\lambda)$ com parâmetro λ (igual à média) dado por $\lambda = 100 \times 0.02 = 2$.

(a) A probabilidade $P(X = 0)$ é dada por

```
> dpois(0,lambda=2)
[1] 0.1353353
```

(b) Pretende-se determinar $P(X > 10)$. Pode-se usar o acontecimento complementar e calcular então

```
> 1-ppois(10,2)
[1] 8.308224e-06
```

Trata-se de uma probabilidade muito baixa.

(c) A probabilidade $P(X \leq 3)$ corresponde ao valor da função distribuição em $X = 3$, $F_X(3)$, portanto a

```
> ppois(3,2)
[1] 0.8571235
```

(d) Para determinarmos o número de colónias que ocorre com maior frequência, listamos os primeiros valores da função de probabilidade. Tem-se

```
> dpois(0,2)
[1] 0.1353353
> dpois(1,2)
[1] 0.2706706
> dpois(2,2)
[1] 0.2706706
> dpois(3,2)
[1] 0.1804470
> dpois(4,2)
[1] 0.09022352
```

portanto a resposta será 1 ou 2 colónias de bactérias.

Exemplo 3: Um estudo realizado por (Ott *et al*) analisou a relação entre a exposição a etileno-dibromido (EDB) e morte por cancro. Seguiram-se 161 homens de raça branca, trabalhadores de duas fábricas no Texas e Michigan e expostos ao EDB, de 1940 a 1975. Foram observadas 7 mortes por cancro nessa amostra. Para o período em questão, o número esperado de mortes por cancro a partir de estudos sobre a taxa de mortalidade para indivíduos de raça branca nos EUA era de 5.8.
O número observado de 7 mortes no estudo de Ott *et al* foi excessivo?

Resolução: Seja X a v.a. que representa o número de mortes por cancro no perído 1940-1975. De estudos anteriores, tem-se então

$$X \sim P(5.8).$$

Para avaliar se o número de mortes observadas no estudo de Ott *et al* foi exageramente elevado, vamos calcular a probabilidade de encontrar nesse estudo pelo menos 7 mortes. Ora

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6)$$

e

```
> 1-ppois(6, lambda=5.8)
[1] 0.3616089
```

portanto, à primeira vista, não nos parece que o número de mortes tenha sido excessivo.

3.1.4. Distribuição Multinomial $M(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_k)$

- $A_1, A_2, \ldots, A_k$ acontecimentos mutuamente exclusivos, cuja reunião é todo o espaço amostral
- p_i = probabilidade do acontecimento A_i ocorrer
  $0 < p_i < 1, \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$
- $n = \#$ ensaios (experiências mutuamente independentes para as quais existem precisamente k realizações possíveis: A_1 ou A_2 ou ... ou A_k)
- n_i = número de ocorrências do acontecimento A_i
  $n_1 + n_2 + \ldots n_k = n$

$$m(n_1, n_2, \ldots, n_k; p_1, p_2, \ldots, p_k)$$

é a probabilidade de, em n ensaios, A_1 ocorrer n_1 vezes, A_2 ocorrer n_2 vezes, ..., A_k ocorrer n_k vezes.

Frequência	$m(n_1, \ldots, n_k)$ $=$ prob. A_i acontecer n_i vezes em n ensaios $=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k} \qquad (1 \leq i \leq k)$
Distribuição	$M(n_1, \ldots, n_k)$ $= \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n_k} m(i_1, \ldots, i_k)$
Domínio	$\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k : n_1 + \ldots + n_k = n\}$
Média	$E(n_i) = np_i \qquad (1 \leq i \leq k)$
Variância	$\mathrm{Var}(n_i) = np_i(1 - p_i) \qquad (1 \leq i \leq k)$

A distribuição multinomial é uma generalização da distribuição binomial ($k = 2$).

Exemplo: Suponhamos que, de estudos anteriores, se sabe que de entre a população feminina residente no Grande Porto com idade superior a 30 anos: 8% ingere uma quantidade elevada de carne vermelha, 52% ingere uma quantidade moderada de carne vermelha, e 40% ingere uma quantidade reduzida de carne vermelha. Foi considerada uma amostra de 100 mulheres residentes no Grande Porto, com mais de 30 anos. Determine a probabilidade de, nessa amostra:

(a) encontrar exactamente 8 mulheres com consumo elevado de carne vermelha, 52 com consumo moderado e 40 com consumo reduzido.

(b) encontrar apenas mulheres com consumo moderado.

Resolução: Na experiência em causa, cada ensaio de Bernoulli corresponde à avaliação de cada uma das 100 mulheres quanto à quantidade de carne ingerida. Tem-se $p_1 = 0.08, \quad p_2 = 0.52, \quad p_3 = 0.40$.

(a) Pretende-se determinar $m(8, 52, 40)$. Como o vector das probabilidades correspondentes é $(0.8, 0.52, 0.40)$ a instrução correspondente é

```
> dmultinom(c(8,52,40), prob=c(.8,.52,.4))
[1] 3.409089e-18
```

A probabilidade é aproximadamente zero.

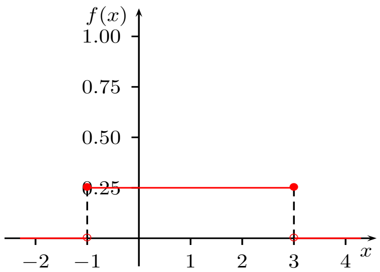
(b)
```
> dmultinom(c(0,100,0), prob=c(.8,.52,.4))
[1] 1.115552e-52
```

A probabilidade é aproximadamente zero.

3.1.5. Distribuição Uniforme Contínua: $U(a,b)$

A variável aletória toma qualquer valor de um intervalo real com a mesma probabilidade. Isto significa que a função densidade de probabilidade é constante e igual ao inverso da amplitude do intervalo.

Função dens. de prob.	$u(x) = \frac{1}{b-a}$
Função de distribuição	$U(x) = \frac{x-a}{b-a}$
Domínio	$a \leq x \leq b$
Média	$\frac{a+b}{2}$
Mediana	$\frac{a+b}{2}$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$
Amplitude	$R = b - a$
Coef. Assimetria	$\lambda = 0$



Exemplo: Suponha que a chegada de clientes ao balcão de uma determinada farmácia do Porto segue uma distribuição uniforme. Sabe-se que durante um período de 30 minutos um certo cliente chegou a essa farmácia.

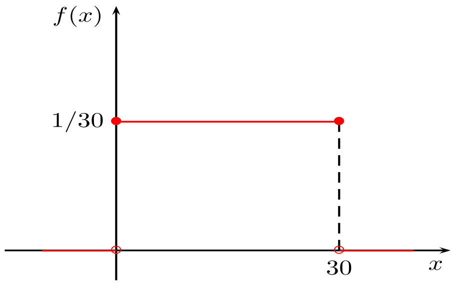
(a) Qual é a probabilidade de que esse cliente tenha chegado durante os últimos 5 minutos daquele período?

(b) Como é que relaciona a probabilidade de que esse cliente tenha chegado nos primeiros cinco minutos com a probabilidade anterior?

(c) Como é que relaciona a probabilidade de que esse cliente tenha chegado entre os primeiros cinco e os dez minutos com a probabilidade calculada em (a)?

Resolução: Por hipótese o tempo real de chegada à farmácia, X, segue uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 30]$. A f.d.p. de X é então

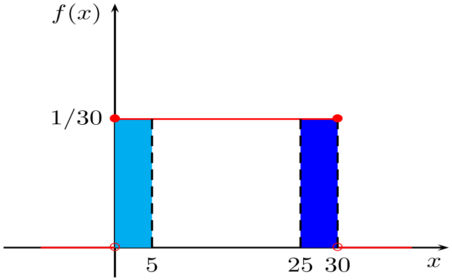
$$f(x) = \begin{cases} 1/30, & x \in [0,30] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



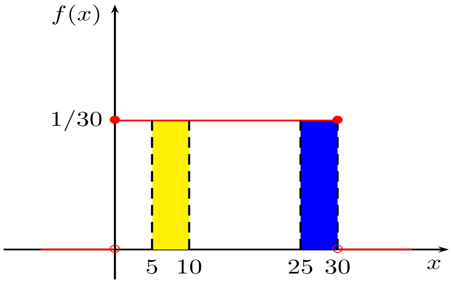
(a) O que se pretende é $P(25 < X < 30)$. Ora

$$\begin{aligned} P(25 < X < 30) &= F(30) - F(25) \\ &= \frac{(30-0)}{30} - \frac{(25-0)}{30} \\ &= \frac{5}{30} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(b) $P(0 < X < 5) = F(5) - F(0) = \frac{5-0}{30} - 0 = \frac{1}{6}$.
Portanto $P(0 < X < 5) = P(25 < X < 30)$.



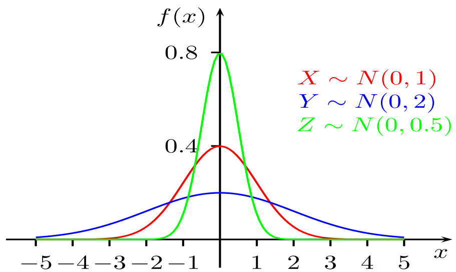
(c) $P(5 < X < 10)$
$= F(10) - F(5) = \frac{10-0}{30} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.
Portanto $P(5 < X < 10) = P(25 < X < 30)$.



3.1.6. Distribuição Normal: $N(\mu, \sigma^2)$

É uma das distribuições mais importantes no estudo das probabilidades e da estatística.

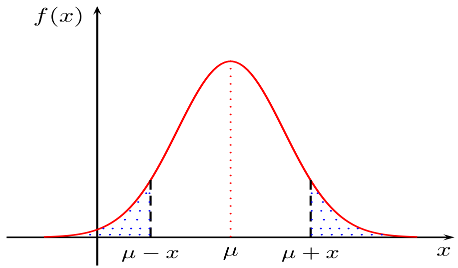
Densidade	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$
	$(\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0)$
Domínio	$-\infty < x < +\infty$
Média	μ
Mediana	μ
Desvio padrão	σ
Amplitude	∞
Coef. Assimetria	$\lambda = 0$



Propriedades da distribuição normal:

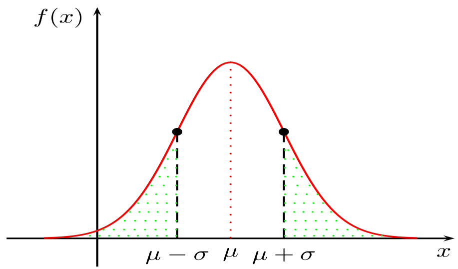
(a) fica completamente determinada pelos parâmetros μ e σ.

(b) é simétrica em relação à média:
$P(X > \mu + x) = P(X < \mu - x), \quad \forall x$



(c) a média, a moda e a mediana são iguais

(d) os pontos de abcissa $\mu \pm \sigma$ são os pontos de inflexão do gráfico da f.d.p.

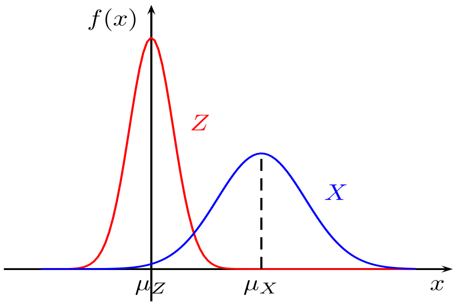


Esta propriedade permite estimar o valor de σ a partir do gráfico da f.d.p.

Redução de uma variável normal:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ então $Z \sim N(0,1)$.

A v.a. Z diz-se a **variável reduzida** ou **variável standardizada**.

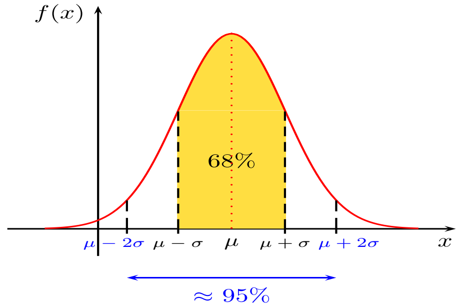


Os valores da função distribuição de uma v.a. que segue uma distribuição normal podem ser determinados através de uma tabela correspondente ou de um software apropriado. No caso de uma tabela, os valores aparecem sempre para a variável reduzida.

A redução de uma v.a. normal permite mostrar que:

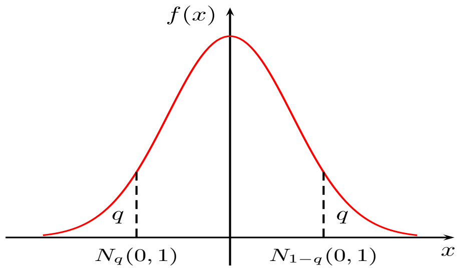
- 68% da área da f.d.p. pertence ao intervalo $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$
- 95% da área da f.d.p. pertence ao intervalo $[\mu-(1.96)\sigma, \mu+(1.96)\sigma]$.

  (aproximadamente 95% da massa probabilística pertence ao intervalo $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$)



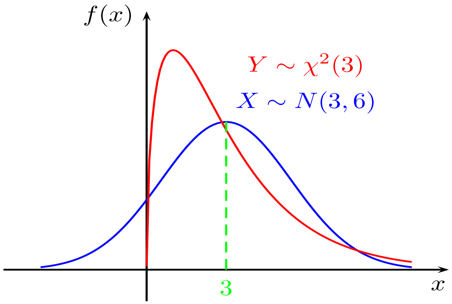
Em particular:

- $N_{0.5}(\mu, \sigma^2)$ [a] $= \mu$
- $N_{0.025}(\mu, \sigma^2) = \mu - (1.96)\sigma$
- $N_{0.975}(\mu, \sigma^2) = \mu + (1.96)\sigma$
- $N_{0.5}(0,1) = 0$
- $N_{0.025}(0,1) = (1.96)\sigma$
- $N_{0.975}(0,1) = (1.96)\sigma$
- $N_q(0,1) = -N_{1-q}(0,1)$



[a] $N_q(\mu,\sigma)$ representa o q-quantil de uma v.a. que segue uma distribuição $N(\mu,\sigma)$

Duas distribuições com a mesma média e variância podem ser muito diferentes...



Mas duas distribuições normais com a mesma média e variância têm necessariamente de coincidir!

Instruções em R:

- `dnorm(x, mean = ..., sd = ...)`
- `pnorm(q, mean = ..., sd = ...)`
- `qnorm(p, mean = ..., sd = ...)`

onde *mean* e *sd* representam, respectivamente, a média e o desvio-padrão da variável.

Exemplo 1: Para a distribuição normal reduzida, $X \sim N(0,1)$, tem-se

(a) $P(X < 2) = P(X \leq 2) \approx 0.9772$

Este valor pode ser obtido através da instrução

```
> pnorm(2,mean=0,sd=1)
[1] 0.9772499
```

no programa R, ou por consulta de uma tabela da distribuição normal (método em desuso).

Interpretação: Aproximadamente 97.72% dos valores de X estão entre $-\infty$ e 2; equivalentemente, um valor x escolhido aleatoriamente da população tem uma probabilidade de 0.9772 de estar entre $-\infty$ e 2.

(b) $P(X \geq 2.71) = 1 - P(X \leq 2.71)$
$= 1 - 0.9966 = .0034.$

```
> 1-pnorm(2.71,mean=0,sd=1)
[1] 0.003364160
```

(c) $P(-2.55 < X < 2.55)$
$= P(X \leq 2.55) - P(X \leq -2.55)$

```
> pnorm(2.55)-pnorm(-2.55)
[1] 0.9892277
```

ou
$= 1 - 2 \times P(X \leq -2.55)$

```
> 1-2*pnorm(-2.55)
[1] 0.9892277
```

(d) $P(0.84 \leq X \leq 2.45)$

```
> pnorm(2.45)-pnorm(0.84)
[1] 0.1933114
```

(e) $N_{0.90}(0,1)$

```
> qnorm(0.90)
[1] 1.281552
```

Trata-se do quantil 0.90 da distribuição $N(0,1)$, isto é, do ponto x para o qual

$$P(X \leq x) = 0.9.$$

(f) $N_{0.5}(0,1)$

```
> qnorm(0.50)
[1] 0
```

O quantil 0.5 da distribuição $N(0,1)$ corresponde ao número x para o qual

$$P(X \leq x) = 0.5.$$

Ora, por definição, tal ponto x é a mediana da distribuição. Como a distribuição normal é simétrica, a mediana coincide com a média e portanto $N_{0.5}(0,1) = 0.$

Exemplo 2: Supondo que os valores de colesterol total de uma determinada população seguem aproximadamente uma distribuição normal de média 200 mg/100 ml e desvio padrão 20 mg/100 ml, determine:

(a) a probabilidade de um indivíduo escolhido aleatoriamente desta população ter um valor de colesterol:

(a.1) inferior a 150 mg/100 ml

(a.2) superior a 225 mg/100 ml

(a.3) entre 180 e 200 mg/100 ml

(b) o valor de colesterol a partir do qual se observam apenas 10% dos valores da população.

(c) em que percentil se encontra um indivíduo com um valor de colesterol total de 213 mg/100 ml? Interprete o resultado.

Resolução: Seja X a v.a. que representa os valores de colesterol da população em questão. Por hipótese, $X \sim N(200, 20^2)$.

(a.1) $P(X < 150)$ [a]

```
> pnorm(150,mean=200,sd=20)
[1] 0.006209665
```

(a.2) $P(X > 225)$

```
> 1-pnorm(225,mean=200,sd=20)
[1]  0.1056498
```

(a.3) $P(180 < X < 200)$

```
> pnorm(200,mean=200,sd=20)-pnorm(180,mean=200,sd=20)
[1] 0.3413447
```

(b) Pretende-se determinar o 0.9-quantil.

```
> qnorm(0.9,mean=200, sd=20)
[1] 225.6310
```

(d) $P(X \leq 213) \approx 0.74$

```
> pnorm(213, mean=200, sd=20)
[1] 0.7421539
```

O indivíduo em causa pertence ao percentil 74.´ Isto significa que, em 100 indivíduos escolhidos aleatoriamente da população em causa, esperamos encontrar 74 com valores de colesterol total inferiores a 213 mg/100 ml. Em toda a população, exactamente 74% dos indivíduos têm um valor de colesterol inferior a 213 mg/100 ml.

[a] Recorrendo a uma tabela da distribuição normal teríamos de reduzir a variável, considerando $Z = \frac{X-200}{20}$, e fazer $P(X < 150) = P(Z < \frac{150-200}{20}) = P(Z < -2.5)$

3.1.7. Distribuição Normal - função geradora de momentos

Teorema: Seja $Z \sim N(0,1)$. Então $M_Z(t)$ existe e

$$M(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Demonstração: cálculos com integrais que envolvem mudanças de variável.

Teorema: Seja X uma v.a. seguindo a distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$. Então $M_X(t)$ existe e

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Demonstração: A variável reduzida Z de X é $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, e tem-se que $Z \sim N(0,1)$ e $X = \sigma Z + \mu$. Portanto

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{\mu t} M_Z(\sigma t) \\ &= e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \\ &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \end{aligned}$$

A primeira igualdade resulta de teoremas anteriores para a fgm de combinações lineares de v.a., enquanto que a segunda igualdade é uma consequência do teorema anterior.

3.1.8. Distribuição Gama: $\Gamma(a, b)$

A distribuição Γ surge muitas vezes no contexto de tempos de espera para ocorrências em processos de Poisson.

Função dens. prob.	$f(x) = \frac{x^{a-1}\exp(-x/b)}{b^a\Gamma(a)}$ $(a, b > 0)$
Domínio	$0 < x < +\infty$
Média	ab
Desvio padrão	$\sqrt{ab^2}$

onde

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$$

é designada por *função gama*.
Os parâmetros a e b são positivos e dizem-se os parâmetros da distribuição $\Gamma(a, b)$.

Teorema: Seja $X \sim \Gamma(a, b)$. A fgm de X é

$$M_X(t) = (1 - bt)^{-a}$$

para $t < b^{-1}$.

Definição: Diz-se que uma v.a. W segue uma **distribuição exponencial de média** μ se $W \sim \Gamma(1, \mu)$. Neste caso, para $w > 0$,

$$f(w) = \mu^{-1}\exp\left(\frac{-w}{\mu}\right).$$

Teorema: Seja W uma v.a. que segue uma distribuição exponencial de média μ. Então

(a) $E(W) = \mu$

(b) $\text{Var}(W) = \mu^2$

(c) $M(t) = (1 - \mu t)^{-1}$.

A aproximação da distribuição Γ à normal é dada pelo seguinte teorema.

Teorema: Se $X \sim \Gamma(a, b)$, então

$$\frac{X - ab}{ba^{1/2}} \sim_a N(0, 1), \qquad \text{para } a \text{ grande.}$$

3.1.9. Distribuição χ^2 de Pearson: $\chi^2(\nu)$

Função dens. prob.	$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} e^{-x/2} x^{(\nu/2)-1}$ $(\nu > 0)$
Domínio	$0 < x < +\infty$
Média	ν
Desvio padrão	$\sqrt{2\nu}$

onde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

é designada por *função gama*. O parâmetro ν diz-se o **número de graus de liberdade**.

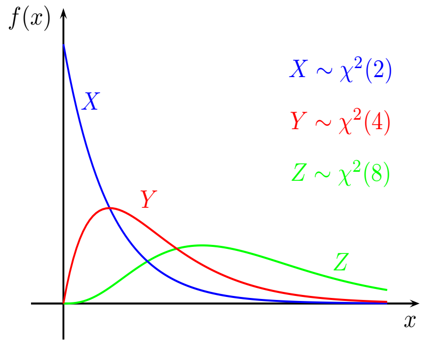
Teorema 3.1.2

(a) $Z_1, \ldots, Z_\nu$ *v.a. independentes,*
$Z_j \sim N(0,1), \quad j = 1, \ldots, \nu$
$\Longrightarrow Z_1^2 + \cdots + Z_\nu^2 \sim \chi^2(\nu)$ [a]

(b) $U_1, \ldots, U_k$ *v.a. independentes,*
$U_j \sim \chi^2(\nu_j), \quad j = 1, \ldots, \nu$
$\Longrightarrow U_1 + \cdots + U_k \sim \chi^2(\nu_1 + \cdots + \nu_k)$

(c) U_1, U_2 *v.a. independentes*
$U_1 + U_2 \sim \chi^2(\nu), \quad U_1 \sim \chi^2(\nu_1), \quad \nu > \nu_1$
$\Longrightarrow U_2 \sim \chi^2(\nu - \nu_1)$.

[a] Este resultado pode ser usado como definição da distribuição $\chi^2(\nu)$.



Uso mais comum: A distribuição do χ^2 é usada para aproximar as distribuições de estatísticas amostrais necessárias à realização de vários testes de hipóteses.

Aproximação: para ν suficientemente grande ($\nu \geq 60$), a distribuição $\chi^2(\nu)$ é aproximada pela distribuição normal $N(\nu, 2\nu)$:

$$\nu \geq 60 \implies \chi^2(\nu) \approx N(\nu, 2\nu).$$

Instruções em R:

- `dchisq(x, df)`
- `pchisq(q, df)`
- `qchisq(p, df)`

onde *df* representa o número de graus de liberdade (*degrees of freedom*).

Exemplos: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes seguindo a distribuição normal reduzida, $N(0,1)$, e Z a variável aleatória definida por

$$Z = X^2 + Y^2.$$

Determine:

(a) $P(X < -2) + P(X > 2)$

(b) $P(X^2 > 4)$ e justifique que este valor é igual ao obtido em (a)

(c) $P(Z \geq 0.5)$

(d) o 0.10-quantil de Z.

Resolução:

(a)
```
> pnorm(-2,0,1)+(1-pnorm(2,0,1))
[1] 0.04550026
```

Uma resolução alternativa consistiria na observação de que $P(X < -2) = P(X > 2)$, pela simetria da distribuição, e que portanto

$$P(X < -2) + P(X > 2) = 2\,P(X < -2).$$

(b) Por (a) do teorema anterior,

$$X^2 \sim \chi^2(1).$$

A instrução correspondente para a função distribuição em **R** dá 0.046.

```
> 1-pchisq(4,1)
[1] 0.04550026
```

O valor é igual ao obtido na alínea anterior porque

$$X^2 > 4 \iff X < -2 \ \vee\ X > 2$$

Basta agora considerar as distribuições adequadas a cada uma das v.a. X^2 e X.

(c) Por (a) do teorema anterior,

$$Z = X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2).$$

Obtem-se (porque a v.a. é contínua)

$$P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = 0.779.$$

```
> 1-pchisq(0.5,2)
[1] 0.7788008
```

(d) O 0.10-quantil corresponde ao valor z para o qual

$$P(Z \leq z) = 0.10.$$

A instrução em **R** correspondente dá

```
> qchisq(0.1, 2)
[1] 0.2107210
```

Homepage

Página de Rosto

Índice Geral

Página 28 de 35

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

3.1.10. Mais sobre a distribuição $\chi^2(\nu)$

Teorema: Seja $U \sim \chi^2(\nu)$. Então $U \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, 2\right)$.

Demonstração: Seja $Z \sim N(0,1)$ e $V = Z^2$. A função geradora de momentos de V é

$$
\begin{aligned}
M_V(t) &= E(e^{tV}) \\
&= E(e^{tZ^2}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz^2} f(z)\, dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}(1-2t)}\, dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} (1-2t)^{-1/2}\, du \\
&= (1-2t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du \\
&= (1-2t)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Na sexta igualdade usou-se a mudança de variável

$$u = z(1-2t),$$

e na última igualdade usou-se a função densidade de probabilidade de Z (cujo integral dá 1).

Sejam agora $Z_1, \ldots, Z_\nu$ v.a. independentes, cada uma seguindo a distribuição normal reduzida $N(0,1)$. Definimos, para $i = 1, \ldots, \nu$,

$$V_i = Z_i^2$$

e

$$U = \sum_{i=1}^{\nu} V_i = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 \sim \chi^2(\nu).$$

As variáveis aleatórias V_i são independentes e identicamente distribuídas, pelo que, para $t < 1/2$,

$$
\begin{aligned}
M_U(t) &= (M_{V_i}(t))^\nu \\
&= (M_V(t))^\nu \\
&= \left((1-2t)^{-1/2}\right)^\nu \\
&= (1-2t)^{-\nu/2}
\end{aligned}
$$

que é a função geradora de momentos da distribuição $\Gamma(\nu/2, 2)$. A conclusão do teorema resulta agora da unicidade das fgm's.

Corolário: Seja $U \sim \chi^2(\nu)$. Então $M(t)$ existe; para $t < 1/2$ tem-se

$$M(t) = (1-2t)^{-\nu/2}.$$

Homepage

Página de Rosto

Índice Geral

Página 29 de 35

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

3.1.11. Distribuição t de Student: $t(\nu)$

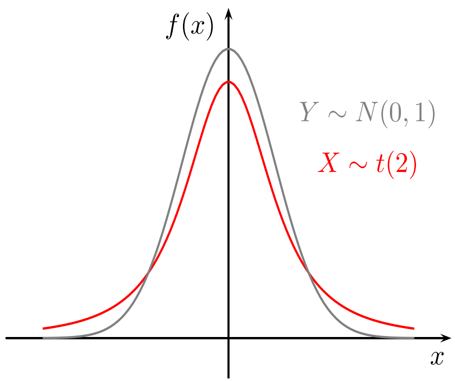
Função dens. prob.	$t(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$
Média	$\mu = 0 \qquad (\nu > 1)$
Desvio Padrão	$\sigma = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \qquad (\nu > 2)$

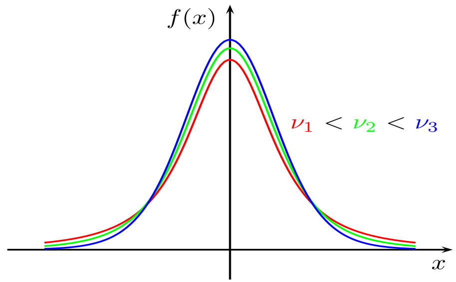
onde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

é a *função gama* e ν é chamado o **número de graus de liberdade**.

A distribuição t é simétrica em relação à média (zero). Graficamente é bastante parecida com a distribuição normal: apresenta contudo caudas mais altas e um valor máximo inferior e menos arredondado (mais "afiado") que o da distribuição normal.

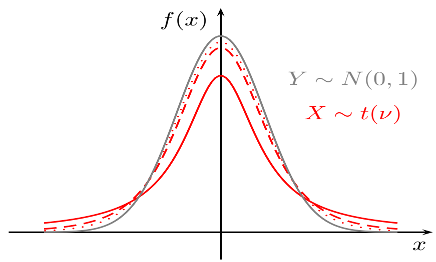




Teorema 3.1.3

(a) Z, U *v.a. independentes,*
$Z \sim N(0,1), \quad U \sim \chi^2(\nu)$
$\Longrightarrow T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim t(\nu).$ [a]

(b) $\nu > 60 \Longrightarrow t(\nu) \approx N(0, \frac{\nu}{\nu-2}) \quad (\approx N(0,1))$



Uso mais comum: A distribuição t é usada para aproximar as distribuições de estatísticas amostrais necessárias à realização de vários testes de hipóteses.

[a] Este resultado pode ser usado como definição da distribuição $t(\nu)$.

Homepage
Página de Rosto
Índice Geral
Página 30 de 35
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Instruções em R:

- `dt(x, df=...)`
- `pt(q, df=...)`
- `qt(p, df=...)`

onde *df* são os graus de liberdade da distribuição.

Exemplo 1: Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição t de Student com 15 graus de liberdade. Determine:

(a) $P(X \leq 0.975)$

(b) o 0.975-quantil.

(Observe que as alíneas (a) e (b) referem-se a valores diferentes).

Resolução: Por hipótese, $X \sim t(15)$.

(a) $P(X \leq 0.975)$ corresponde ao valor da função de distribuição em $X = 0.975$. A instruçao correspondente em **R** fornece o valor 0.827.

```
> pt(0.975, 15)
[1] 0.8274886
```

(b) Pretende-se determinar x tal que

$$P(X \leq x) = 0.975.$$

A instrução em **R** usa o inverso da função de distribuição. Obtém-se o valor $x \approx 2.131$.

```
> qt(0.975, 15)
[1] 2.131450
```

Homepage

Página de Rosto

Índice Geral

Página 31 de 35

Voltar

Full Screen

Fechar

Desistir

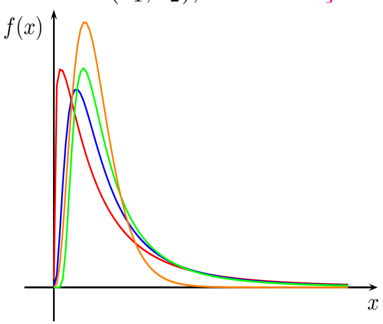
3.1.12. Distribuição F de Snedecor: $F(\nu_1, \nu_2)$

Função	$f(x)$
dens. prob.	$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\nu_1/2} \nu_2^{\nu_2/2} x^{(\nu_1/2)-1} (\nu_2 + \nu_1 x)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$
Domínio	$0 < x < +\infty$
Média	$\mu = \frac{\nu_2}{\nu_2-2} \quad (\nu_2 > 2)$
Variância	$\sigma^2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)(\nu_2-2)^2} \quad (\nu_2 > 4)$
Moda	$\left(\frac{\nu_1-2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2+2}\right) \quad (\nu_1 > 2)$

onde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

é a *função gama*. Os parâmetros (ν_1, ν_2) dizem-se os **graus de liberdade** da distribuição F. Independentemente dos valores de (ν_1, ν_2), a distribuição é assimétrica à direita.



Teorema 3.1.4

(a) *U_1, U_2 v.a. independentes*
$U_1 \sim \chi^2(\nu_1)$, $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$

$$\Longrightarrow U = \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2)^{a}$$

(b) $U \sim F(\nu_1, \nu_2) \Longrightarrow \frac{1}{U} \sim F(\nu_2, \nu_1)$

(c) *Relação entre a distribuição-t e a distribuição-F:*

$$Y \sim t(\nu) \Longrightarrow Y^2 \sim F(1, \nu).$$

Uso mais comum: A distribuição F é usada nos testes de hipóteses sobre variâncias de populações normais e, de um modo geral, nos métodos de análise da variância (ANOVA) e regressão.

As instruções em **SPSS** para obtenção dos valores da função densidade de probabilidade, função de distribuição e quantis são análogas às de uma qualquer distribuição contínua já estudada.

[a] Este resultado pode ser usado como definição da distribuição $\chi^2(\nu)$.

Homepage
Página de Rosto
Índice Geral
Página 32 de 35
Voltar
Full Screen
Fechar
Desistir

Demonstração:

(b) Escreva-se

$$U = \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$$

para variáveis aleatórias independentes $U_1 \sim \chi^2(\nu_1)$ e $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$. Tem-se então

$$U^{-1} = \frac{U_2/\nu_2}{U_1/\nu_1}$$

pelo que, pela definição de distribuição F, $U^{-1} \sim F(\nu_2, \nu_1)$.

(c) Por definição da distribuição $t(\nu)$, Escreva-se a v.a. Y na forma

$$Y = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}}$$

para v.a. independentes $Z \sim N(0,1)$ e $U \sim \chi^2(\nu)$. Então

$$Y^2 = \frac{Z^2}{U/\nu} = \frac{Z^2/1}{U/\nu}.$$

Como $Z^2 \sim \chi^2(1)$, $U \sim \chi^2(\nu)$, e Z^2 e U são independentes, então

$$Y^2 \sim F(1, \nu).$$

Homepage

Página de Rosto

Índice Geral

Página 33 de 35

Voltar

Full Screen

Fechar

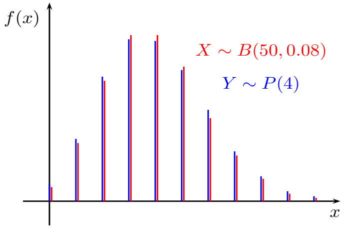
Desistir

3.2. Relações entre algumas distribuições - teoremas de aproximação

- **distribuição binomial e de Poisson**:

  $p \approx 0$ (sucesso raro) e n grande
  $n \geq 30$ e $np(1-p) \leq 5$

$$B(n,p) \approx P(np)$$

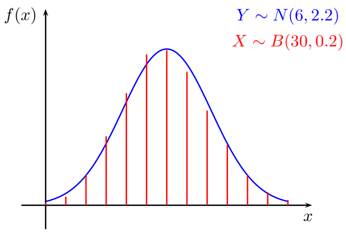


- **distribuição binomial e normal**:

  p e q não muito próximos de zero e n grande
  $n \geq 30$ e $np(1-p) > 5$

$$B(n,p) \approx N(np, np(1-p))$$

i.e., a distribuição binomial tende **assimptoticamente** para a normal quando $n \to +\infty$.

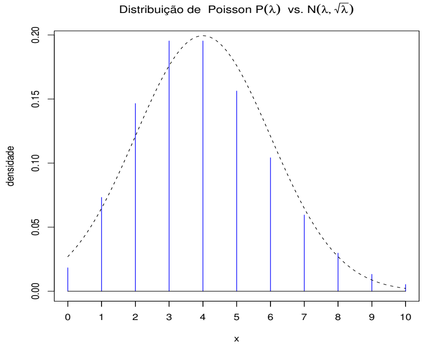


- **distribuição de Poisson e normal**:

  λ grande $\quad \lambda > 20$

$$P(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$$

i.e., a distribuição de Poisson tende **assimptoticamente** para a normal quando $\lambda \to +\infty$.



- **distribuição t e normal**:

$$\nu \text{ grande} \Longrightarrow t(\nu) \approx N\left(0, \frac{\nu}{\nu-2}\right)$$

i.e., a distribuição t tende **assimptoticamente** para a normal quando $\nu \to +\infty$.

- **distribuição χ^2 e normal**:

$$\nu \text{ grande} \Longrightarrow \chi^2(\nu) \approx N(\nu, 2\nu)$$

i.e., a distribuição χ^2 tende **assimptoticamente** para a normal quando $\nu \to +\infty$.

Observações: Nas aproximações de uma distribuição discreta por uma distribuição contínua (binomial por normal, ou poisson por normal) deve aplicar-se uma **correcção de continuidade**. Supostas satisfeitas as condições da aproximação:

- $P(X = x)$ quando X é uma v.a. discreta, pode ser calculado considerando

  $$P\left(x - \frac{1}{2} \leq \tilde{X} \leq x + \frac{1}{2}\right)$$

  onde $\tilde{X}$ é a v.a. contínua correspondente. A justificação de base para este raciocínio resulta de se ter

  $$P(X = x) = P(x - 1 < X < x + 1).$$

- $P(a \leq X \leq b)$ quando X é uma v.a. discreta, deve ser calculado considerando

  $$P\left(a - \frac{1}{2} \leq \tilde{X} \leq b + \frac{1}{2}\right)$$

  onde $\tilde{X}$ é a v.a. contínua correspondente. Mais uma vez, isto está relacionado com o facto de se ter

  $$P(a \leq X \leq b) = P(a - 1 < X < b + 1)$$

  para a v.a. discreta X.

Há alguns anos atrás, quando se usavam tabelas com os valores das distribuições, as aproximações de distribuições referidas atrás tinham de ser consideradas, ou porque os valores da distribuição exacta não apareciam tabelados, ou porque os cálculos para a distribuição exacta eram demasiado morosos. Actualmente, contudo, já dispomos de computadores com uma larga capacidade de cálculo, o que faz com que as aproximações anteriores ou se tornem desnecessárias ou estejam já incluídas nas rotinas dos softwares que calculam as distribuições de probabilidade.