

Задача А. Разбор утверждения

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	2 секунды
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На вход вашей программе дается утверждение в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Файл} \rangle &::= \langle \text{Выражение} \rangle \\
 \langle \text{Выражение} \rangle &::= \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \text{'->'} \langle \text{Выражение} \rangle \\
 \langle \text{Дизъюнкция} \rangle &::= \langle \text{Конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{Дизъюнкция} \rangle \text{'|'} \langle \text{Конъюнкция} \rangle \\
 \langle \text{Конъюнкция} \rangle &::= \langle \text{Отрицание} \rangle \mid \langle \text{Конъюнкция} \rangle \text{'\&'} \langle \text{Отрицание} \rangle \\
 \langle \text{Отрицание} \rangle &::= \text{'!'} \langle \text{Отрицание} \rangle \mid \langle \text{Переменная} \rangle \mid \text{'('} \langle \text{Выражение} \rangle \text{'\>'} \\
 \langle \text{Переменная} \rangle &::= (\text{'A'} \dots \text{'Z'}) \{ \text{'A'} \dots \text{'Z'} \mid \text{'0'} \dots \text{'9'} \mid \text{'\>'} \}^*
 \end{aligned}$$

Имена переменных не содержат пробелов. Между символами оператора ‘->’ нет пробелов. В остальных местах пробелы могут присутствовать. Символы табуляции и возврата каретки должны трактоваться как пробелы. Символ апострофа (‘’) имеет код 39.

Вам требуется написать программу, разбирающую утверждение и строящую его дерево разбора, и выводящую полученное дерево в единственной строке без пробелов в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Файл} \rangle &::= \langle \text{Вершина} \rangle \\
 \langle \text{Вершина} \rangle &::= \text{'('} \langle \text{Знак} \rangle \text{'\>'} \langle \text{Вершина} \rangle \text{'\>'} \langle \text{Вершина} \rangle \text{'\>'} \\
 &\quad \mid \text{'('} \langle \text{Вершина} \rangle \text{'\>'} \\
 &\quad \mid \langle \text{Переменная} \rangle \\
 \langle \text{Знак} \rangle &::= \text{'->'} \mid \text{'|'} \mid \text{'\&'} \\
 \langle \text{Переменная} \rangle &::= (\text{'A'} \dots \text{'Z'}) \{ \text{'A'} \dots \text{'Z'} \mid \text{'0'} \dots \text{'9'} \mid \text{'\>'} \}^*
 \end{aligned}$$

Формат входных данных

В единственной строке входного файла дано утверждение в грамматике из условия. Размер входного файла не превышает 100 КБ.

Формат выходных данных

В единственной строке выходного файла выведите дерево разбора утверждения без пробелов.

Примеры

стандартный ввод
!A&!B->!(A B)
стандартный вывод
(->,(&,(!A),(!B)),(!(,A,B)))
стандартный ввод
P1'->!QQ->!R10&S !T&U&V
стандартный вывод
(->,P1',(->,(!QQ),(,(&,(!R10),S),(&,(&,(!T),U),V))))

Задача В. Формализация метаязыка

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	15 секунд
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Для записи доказательств классического исчисления высказываний часто используется метаязык, позволяющий сильно сократить текст доказательства в ущерб его формальности. Давайте попробуем формализовать этот метаязык, хотя бы частично.

Доказательство на формализуемом метаязыке состоит из строк вида $\Gamma \vdash \alpha$, при этом каждая строчка либо (а) аксиома (если часть строки за турникетом – аксиома), либо (б) гипотеза (формула за турникетом взята из контекста), либо (в) результат применения Modus Ponens к предыдущим строкам $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ (гипотезы во всех трёх строках должны совпадать с точностью до перестановки), либо (г) результат применения теоремы о дедукции.

Поясним пункт (г) подробнее: будем говорить, что формула является результатом применения теоремы о дедукции, если она может быть получена из некоторой строки, указанной выше в доказательстве, путём применения теоремы о дедукции, возможно, многократного. Не переносимые через турникет теоремой о дедукции гипотезы должны совпадать с точностью до перестановки. Например, вторая строка есть результат применения теоремы о дедукции к первой строке:

$$\begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma, \zeta \vdash \delta \rightarrow \zeta \\ \zeta, \delta, \alpha \vdash \gamma \rightarrow \beta \rightarrow \zeta \end{array}$$

Другие мета-операции, помимо перечисленных, например, размножение или удаление гипотез, в данной формализации для простоты не допускаются.

Формат входных данных

На вход подаётся доказательство в следующем формате:

```

<Файл> ::= { <Строка> '\n' }+
<Строка> ::= <Контекст> '|-' <Выражение>
<Контекст> ::= <Выражение> [' , ' <Выражение>]*
|
<Выражение> ::= <Выражение> '&' <Выражение>
|
| <Выражение> '|' <Выражение>
| <Выражение> '->' <Выражение>
| '!' <Выражение>
| '(' <Выражение> ')'
| <Переменная>
<Переменная> ::= ('A' ... 'Z') {'A' ... 'Z' | '0' ... '9' | ','}*

```

Операторы '&' и '|' левоассоциативны. Оператор '->' правоассоциативен. Операторы в порядке уменьшения приоритета: '!', '&', '|', '->'.

Имена переменных не содержат пробелов. Между символами одного оператора нет пробелов ('->' и '|-'). В остальных местах пробелы могут присутствовать. Символы табуляции (9, '\t') и возврата каретки (13, '\r') должны трактоваться как пробелы.

Гарантируется, что входной файл синтаксически корректен и содержит как минимум одну строку с формулой, однако, в нём могут найтись недоказанные строки, то есть строки, не получаемые ни одним из указанных выше способов. Объём входного файла – не более 3 Мб.

Формат выходных данных

Выведите проаннотированное входное доказательство: к каждой строке входного файла дополнительно в квадратных скобках укажите её порядковый номер и правило, использованное для вывода. Посимвольного равенства формул в выходном файле соответствующим формулам во входном

файле не требуется, достаточно любого эквивалентного написания. Порядок гипотез в строке также должен совпадать с порядком гипотез в соответствующей строке исходного файла. Если строка не является доказанной, укажите это. Ошибки не распространяются транзитивно и некорректная строка может быть использована для обоснования других строк. Если корректных обоснований может быть несколько, укажите любое.

Схема аксиом	Номер
$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$	1
$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	2
$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ \& \ \beta$	3
$\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \alpha$	4
$\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \beta$	5
$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$	6
$\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$	7
$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$	8
$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$	9
$\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$	10

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
$\mid \neg A \& B \rightarrow A$	[1] $\mid \neg (A \& B) \rightarrow A$ [Ax. sch. 4]
$\mid \neg A \& B \rightarrow B$	[2] $\mid \neg (A \& B) \rightarrow B$ [Ax. sch. 5]
$A \& B \mid \neg A$	[3] $A \& B \mid \neg A$ [Ded. 1]
$A \& B \mid \neg B$	[4] $A \& B \mid \neg B$ [Ded. 2]
$A \& B \mid \neg B \rightarrow A \rightarrow B \& A$	[5] $A \& B \mid \neg B \rightarrow A \rightarrow (B \& A)$ [Ax. sch. 3]
$A \& B \mid \neg A \rightarrow B \& A$	[6] $A \& B \mid \neg A \rightarrow (B \& A)$ [M.P. 4, 5]
$A \& B \mid \neg B \& A$	[7] $A \& B \mid \neg B \& A$ [M.P. 3, 6]
$\mid \neg A \& B \rightarrow B \& A$	[8] $\mid \neg (A \& B) \rightarrow (B \& A)$ [Ded. 7]
$A \rightarrow B, C, D \mid \neg E \rightarrow D$	[1] $A \rightarrow B, C, D \mid \neg E \rightarrow D$ [Incorrect]
$A \rightarrow B, C, D, D \mid \neg D$	[2] $A \rightarrow B, C, D, D \mid \neg D$ [Hyp. 4]
$A \rightarrow B, C, D, D \mid \neg D \rightarrow E$	[3] $A \rightarrow B, C, D, D \mid \neg D \rightarrow E$ [Incorrect]
$A \rightarrow B, C, D \mid \neg E$	[4] $A \rightarrow B, C, D \mid \neg E$ [Incorrect]
$D, A \rightarrow B, C, D \mid \neg E$	[5] $D, A \rightarrow B, C, D \mid \neg E$ [M.P. 2, 3]
$E, D, C \mid \neg (A \rightarrow B) \rightarrow D$	[6] $E, D, C \mid \neg (A \rightarrow B) \rightarrow D$ [Ded. 1]

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
$A \mid \neg A$ $\mid \neg A \rightarrow A$	$\mid \neg A \rightarrow A$ $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ $A \rightarrow A \rightarrow A$ $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$ $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$ $A \rightarrow A$
$A, B, C \mid \neg A$ $A \mid \neg C \rightarrow B \rightarrow A$	$A \mid \neg C \rightarrow B \rightarrow A$ $A \rightarrow B \rightarrow A$ $(A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$ $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$ A $A \rightarrow C \rightarrow A$ $C \rightarrow A$ $(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ $(C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A) \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ $C \rightarrow B \rightarrow A$
$\mid \neg A \& B \rightarrow A$ $A \& B \mid \neg A$ $A \& B \mid \neg A \rightarrow A \mid B$ $A \& B \mid \neg A \mid B$	$A \& B \mid \neg A \mid B$ $A \& B$ $(A \& B) \rightarrow A$ A $A \rightarrow (A \mid B)$ $A \mid B$

Задача D. Полнота исчисления высказываний

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

В данной задаче требуется построить доказательство выражения классического исчисления высказываний (в варианте натурального вывода), если оно существует.

Формат входных данных

На вход дается единственная строка — высказывание, записанное в соответствии со следующей грамматикой:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Выражение} \rangle &::= \langle \text{Выражение} \rangle \& \langle \text{Выражение} \rangle \\
 &| \langle \text{Выражение} \rangle \mid \langle \text{Выражение} \rangle \\
 &| \langle \text{Выражение} \rangle \rightarrow \langle \text{Выражение} \rangle \\
 &| (\langle \text{Выражение} \rangle) \\
 &| _ \mid _ \\
 &| \langle \text{Переменная} \rangle \\
 \langle \text{Переменная} \rangle &::= (A \dots Z) \{ A \dots Z \mid 0 \dots 9 \mid ' ' \}^*
 \end{aligned}$$

Операторы $\&$ и \mid левоассоциативны. Оператор \rightarrow правоассоциативен. Операторы в порядке уменьшения приоритета: $\&$, \mid , \rightarrow .

Будьте внимательны! В случае копирования грамматики из PDF-файла помните, что ASCII код апострофа — 39. Код символов в PDF-файле часто отличается от желаемой кодировки.

Имена переменных не содержат пробелов. Между символами одной связки/константы нет пробелов (\rightarrow и $_ \mid _$). В остальных местах пробелы могут присутствовать. Символы табуляции должны трактоваться как пробелы.

Общая длина выражения не превышает 255 символов. Всего в выражении не будет использовано больше семи различных переменных.

Формат выходных данных

Если высказывание опровержимо (не является общезначимым), укажите этот факт в единственной строке выдачи, приведя опровергающую оценку:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Опровержима} \rangle &::= \text{Formula is refutable } [\langle \text{Оценка} \rangle] \\
 \langle \text{Оценка} \rangle &::= \langle \text{Переменная} \rangle \text{ := } \langle \text{Значение} \rangle [, \langle \text{Оценка} \rangle] \\
 \langle \text{Значение} \rangle &::= T \mid F
 \end{aligned}$$

Иначе выведите доказательство. Каждая строка доказательства — узел дерева, пустых строк быть не должно (кроме последней строки). Дочерние узлы указываются перед родительским узлом. В начале строки — уровень узла в квадратных скобках, потом через пробел — формула, в конце строки — обозначение правила, также через пробел и в квадратных скобках. Для обозначения лжи используйте комбинацию $_ \mid _$: подчёркивание (ASCII 95), вертикальная черта (ASCII 124), подчёркивание (ASCII 95). В остальном следуйте формату из примеров.

Доказанное во входном файле высказывание должно быть заключением самого верхнего правила. В данном высказывании отрицание термов ($\neg \varphi$) передавайте как $(\varphi \rightarrow _)$. В доказательстве вы можете пользоваться следующими правилами. Посылки правил должны идти в указанном порядке, переставлять их нельзя — однако, гипотезы в контексте могут быть произвольно переставлены.

Обозначение	Посылки	Заклучение
Ax		$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$
$E \rightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \varphi$	$\Gamma \vdash \psi$
$I \rightarrow$	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
$I \&$	$\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$	$\Gamma \vdash \varphi \& \psi$
$E \&$	$\Gamma \vdash \varphi \& \psi$	$\Gamma \vdash \varphi$
$E r \&$	$\Gamma \vdash \varphi \& \psi$	$\Gamma \vdash \psi$
$I \vee$	$\Gamma \vdash \varphi$	$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$
$I r \vee$	$\Gamma \vdash \psi$	$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$
$E \vee$	$\Gamma, \varphi \vdash \rho, \Gamma, \psi \vdash \rho, \Gamma \vdash \varphi \vee \psi$	$\Gamma \vdash \rho$
$E !!$	$\Gamma, \varphi \rightarrow \perp \vdash \perp$	$\Gamma \vdash \varphi$

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
$A \rightarrow (A \& (A \rightarrow A))$	$[2] \ A \mid \neg A \ [Ax]$ $[3] \ A, A \mid \neg A \ [Ax]$ $[2] \ A \mid \neg A \rightarrow A \ [I \rightarrow]$ $[1] \ A \mid \neg A \& (A \rightarrow A) \ [I \&]$ $[0] \ \mid \neg A \rightarrow (A \& (A \rightarrow A)) \ [I \rightarrow]$
$_ \mid _ \rightarrow A$	$[2] \ _ \mid _, A \rightarrow _ \mid _ \mid _ \ [Ax]$ $[1] \ _ \mid _ \mid \neg A \ [E !!]$ $[0] \ \mid _ \mid _ \rightarrow A \ [I \rightarrow]$
$A \rightarrow (A \rightarrow _ \mid _)$	Formula is refutable $[A:=T]$

Задача Е. Свобода для подстановки

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На вход подаётся некоторое выражение в синтаксисе выражений исчисления предикатов.

Проверьте, что это выражение соответствует 11 или 12 схеме аксиом исчисления предикатов. А именно, имеет вид $(\forall x.\varphi) \rightarrow (\varphi[x := \theta])$, либо $(\varphi[x := \theta]) \rightarrow (\exists x.\varphi)$, причём имеется свобода для подстановки терма θ вместо переменной x .

Формат входных данных

$\langle \text{Файл} \rangle$::=	$\langle \text{выражение} \rangle$
$\langle \text{выражение} \rangle$::=	$\langle \text{дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle '->' \langle \text{выражение} \rangle$
$\langle \text{дизъюнкция} \rangle$::=	$\langle \text{конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle ' \mid ' \langle \text{конъюнкция} \rangle$
$\langle \text{конъюнкция} \rangle$::=	$\langle \text{унарное} \rangle \mid \langle \text{конъюнкция} \rangle '&' \langle \text{унарное} \rangle$
$\langle \text{унарное} \rangle$::=	$\langle \text{предикат} \rangle \mid '!' \langle \text{унарное} \rangle \mid '(' \langle \text{выражение} \rangle ')'$ $\mid '@' '?' \langle \text{переменная} \rangle . \langle \text{выражение} \rangle$
$\langle \text{переменная} \rangle$::=	$'a' \dots 'z' \{ 'a' \dots 'z' \mid '0' \dots '9' \}^*$
$\langle \text{предикат} \rangle$::=	$'A' \dots 'Z' \{ 'A' \dots 'Z' \mid '0' \dots '9' \}^* ['(' \langle \text{терм} \rangle \{ ' , ' \langle \text{терм} \rangle \}^* ')'$
$\langle \text{терм} \rangle$::=	$'(' \langle \text{терм} \rangle ')'$ $\mid \langle \text{переменная} \rangle ['(' \langle \text{терм} \rangle \{ ' , ' \langle \text{терм} \rangle \}^* ')'$

Будьте внимательны! Вертикальная черта (|) имеет код 0x7c. Размер входной строки не превышает 8192 символов.

Все имена предикатных и функциональных символов имеют по независимому пространству имён для каждого числа параметров: $P(x, y)$ и $P(x)$ обозначают разные предикатные символы. Мы не делаем различий между предикатными символами с пустыми скобками и без скобок: $P()$ и P обозначают один и тот же предикат. Однако, функциональный символ без скобок – это всегда переменная, нульместный же функциональный символ обязан иметь пустые скобки: $f()$.

Формат выходных данных

Выведите **Axiom scheme 11**, **phi** = φ , **x** = x , **theta** = θ , если выражение соответствует 11 схеме аксиом (соответственно, число 12 – если 12 схеме аксиом). Вместо φ , θ и x укажите такие выражение, терм и переменную, чтобы входная строка совпала с соответствующей аксиомой после подстановки. Если таких термов и переменных несколько, укажите любые. Если выражение соответствует как 11 так и 12 схеме аксиом, 11 схема предпочтительней.

Если текст не соответствует схемам аксиом, но мог бы соответствовать без проверки свойства свободы для подстановки, выведите **Similar to axiom scheme s**, **phi** = φ , **x** = x , **theta** = θ . Вместо φ , θ и x подставьте соответствующие выражение, терм и переменную, вместо s подставьте 11 или 12 (номер схемы аксиом). Если выражение могло бы соответствовать как 11 так и 12 схеме аксиом, 11 схема предпочтительней.

Если ничего из вышеприведённого не имеет места, выведите **Not an axiom scheme 11 or 12**.

Примеры

стандартный ввод
$(?y.P(f(x, g14))) -> ?x. ?y.P(x)$
стандартный вывод
Axiom scheme 12, phi = $(?y.P(x))$, x = x , theta = $f(x, g14)$

стандартный ввод
$(\lambda x. \lambda y. P(x)) \rightarrow \lambda y. P(y)$
стандартный вывод
Similar to axiom scheme 11, $\phi = (\lambda y. P(x))$, $x = x$, $\theta = y$
стандартный ввод
$(\lambda x. P(t)) \rightarrow (\lambda y. \lambda x. P(t))$
стандартный вывод
Axiom scheme 12, $\phi = (\lambda x. P(t))$, $x = y$, $\theta = y$

Задача F. Минимизация вывода в формальной арифметике

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На вход программе даётся вывод утверждения $\Gamma \vdash \alpha$ в формальной арифметике. Найдите в нём избыточные строки и проаннотируйте все строки доказательства.

А именно, избыточной формулой мы называем:

- формулу, совпадающую с другой в формулой в выводе (неизбыточной может быть только одна из них); также заметьте, что после минимизации завершающая формула вывода может оказаться где-то в середине исходного вывода, а последняя формула в исходном выводе тоже может оказаться избыточной.
- не использующуюся (согласно указанным аннотациям) в другом месте вывода формулу. При этом, аннотации не будут анализироваться на предмет их оптимальности, главное, чтобы они были корректны.

Избыточные строки должны помечаться словом **Redundant**. Гарантируется, что доказательство, поданное на вход, корректное.

Формат входных данных

⟨Файл⟩	::=	⟨заголовок⟩'⟨n⟩'⟨доказательство⟩
⟨заголовок⟩	::=	⟨выражение⟩ {, ⟨выражение⟩}* '⟨-⟩' ⟨выражение⟩
⟨доказательство⟩	::=	{⟨выражение⟩'⟨n⟩'} ⁺
⟨выражение⟩	::=	⟨дизъюнкция⟩ ⟨дизъюнкция⟩'⟨-⟩'⟨выражение⟩
⟨дизъюнкция⟩	::=	⟨конъюнкция⟩ ⟨дизъюнкция⟩'⟨'⟩'⟨конъюнкция⟩
⟨конъюнкция⟩	::=	⟨унарное⟩ ⟨конъюнкция⟩'⟨&⟩'⟨унарное⟩
⟨унарное⟩	::=	⟨предикат⟩ '⟨!⟩'⟨унарное⟩ '⟨'⟩'⟨выражение⟩'⟨'⟩' '⟨@⟩'⟨'⟩'⟨переменная⟩.⟨выражение⟩
⟨переменная⟩	::=	'a'... 'z' { 'a'... 'z' '0'... '9' }*
⟨предикат⟩	::=	⟨терм⟩'⟨=⟩'⟨терм⟩
⟨терм⟩	::=	⟨слагаемое⟩ ⟨терм⟩'⟨+⟩'⟨слагаемое⟩
⟨слагаемое⟩	::=	⟨умножаемое⟩ ⟨слагаемое⟩'⟨*⟩'⟨умножаемое⟩
⟨умножаемое⟩	::=	⟨переменная⟩ '⟨'⟩'⟨терм⟩'⟨'⟩' '0' ⟨умножаемое⟩'⟨'⟩'

Будьте внимательны! Коды символов: символ апострофа (') — 0x27, вертикальная черта (|) — 0x7c. Текст в pdf-файле может иметь другие коды для символов.

Формат выходных данных

Первая строка должна повторять строку из входного файла, остальные строки доказательства должны быть предварены аннотацией:

- [n. Нур. k], где n — номер выражения, а k — номер гипотезы.
- [n. Ax. sch. k], где k — номер схемы аксиом: либо число от 1 до 12, либо A9.
- [n. Ax. k], где k — значение от A1 до A8.
- [n. M.P. k, l], [n. ?-rule k], [n. @-rule k] — для правил вывода. Смысл индексов для M.P.: если доказательство представлено формулами δ_i , то запись слева означает $\delta_l \equiv \delta_k \rightarrow \delta_n$.
- [n. Redundant], если данная формула из доказательства может быть удалена.

Аннотация может быть любой, соответствующей правилу. Нумерацию и вид аксиом используйте из следующего списка, для избежания разночтений:

Список схем аксиом

Номер	Схема аксиом
1	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
3	$\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
4	$\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
5	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
6	$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7	$\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8	$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10	$\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$
11	$(\forall x. \varphi) \rightarrow (\varphi[x := \theta])$
12	$(\varphi[x := \theta]) \rightarrow (\exists x. \varphi)$
A9	$\varphi(0) \& (\forall x. \varphi(x) \rightarrow \varphi(x')) \rightarrow \varphi(x)$

Список аксиом

Номер	Аксиома
A1	$a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$
A2	$a = b \rightarrow a' = b'$
A3	$a' = b' \rightarrow a = b$
A4	$\neg a' = 0$
A5	$a + 0 = a$
A6	$a + b' = (a + b)'$
A7	$a \cdot 0 = 0$
A8	$a \cdot b' = (a \cdot b) + a$

Примеры

стандартный ввод
$ -0=0 \rightarrow 0=0$ $0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0$ $0=0 \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0$ $(0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0)$ $(0=0 \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0)$ $0=0 \rightarrow 0=0$
стандартный вывод
$ -0=0 \rightarrow 0=0$ [1. Ax. sch. 1] $0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0$ [2. Ax. sch. 1] $0=0 \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0$ [3. Ax. sch. 2] $(0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0)$ [4. M.P. 1, 3] $(0=0 \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0)$ [5. M.P. 2, 4] $0=0 \rightarrow 0=0$

стандартный ввод
$\neg 0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$ $0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$ $(0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$ $0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0$ $0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$
стандартный вывод
$\neg 0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$ [1. Redundant] $0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$ [2. Ax. sch. 1] $(0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow 0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$ [3. Ax. sch. 1] $0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0$ [4. M.P. 3, 2] $0=0 \& (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0) \rightarrow (0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0)$
стандартный ввод
$0=0 \mid \neg 0=0$ $0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0$ $0=0$ $0=0 \rightarrow 0=0$ $0=0$ $0=0$
стандартный вывод
$0=0 \mid \neg 0=0$ [1. Redundant] $0=0 \rightarrow 0=0 \rightarrow 0=0$ [2. Hyp. 1] $0=0$ [3. Redundant] $0=0 \rightarrow 0=0$ [4. Redundant] $0=0$ [5. Redundant] $0=0$

Задача G. Решение линейного уравнения

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

На вход вашей программе даются два числа $a, b \in \mathbb{N}_0$. Решите линейное уравнение $ax = b$ — и докажете, корректность результата. А именно:

- $\forall x. \bar{a} \cdot x = \bar{b} \rightarrow x = \overline{x_0}$ в случае единственного решения x_0 при $a \neq 1$;
- $\forall x. x = \bar{b} \rightarrow x = \overline{x_0}$ в случае единственного решения x_0 при $a = 1$;
- $\forall x. \neg \bar{a} \cdot x = \bar{b}$ при отсутствии решения;
- $\forall x. \bar{a} \cdot x = \bar{b}$, когда x — любое значение из \mathbb{N}_0 .

Формат входных данных

Два натуральных числа, a и b , разделённых пробелом.

Формат выходных данных

На выходе должно быть приведено доказательство в формальной арифметике формулы, определяющей множество решений уравнения. Доказываемая формула должна быть указана в точности как в условии (возможно, с точностью до расстановки незначащих скобок). Доказательство должно соответствовать следующей грамматике:

$\langle \text{Файл} \rangle$::=	$\langle \text{заголовок} \rangle ' \backslash n ' \langle \text{доказательство} \rangle$
$\langle \text{заголовок} \rangle$::=	$\langle \text{выражение} \rangle \{ , \langle \text{выражение} \rangle \}^* ' - ' \langle \text{выражение} \rangle$
$\langle \text{доказательство} \rangle$::=	$\{ \langle \text{выражение} \rangle ' \backslash n ' \}^+$
$\langle \text{выражение} \rangle$::=	$\langle \text{дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle ' - > ' \langle \text{выражение} \rangle$
$\langle \text{дизъюнкция} \rangle$::=	$\langle \text{конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle ' ' \langle \text{конъюнкция} \rangle$
$\langle \text{конъюнкция} \rangle$::=	$\langle \text{унарное} \rangle \mid \langle \text{конъюнкция} \rangle ' \& ' \langle \text{унарное} \rangle$
$\langle \text{унарное} \rangle$::=	$\langle \text{предикат} \rangle \mid ' ! ' \langle \text{унарное} \rangle \mid ' (' \langle \text{выражение} \rangle ') '$ $\mid ' (@ ' ' ? ') \langle \text{переменная} \rangle ' . ' \langle \text{выражение} \rangle$
$\langle \text{переменная} \rangle$::=	$' a ' \dots ' z ' \{ ' a ' \dots ' z ' \mid ' 0 ' \dots ' 9 ' \}^*$
$\langle \text{предикат} \rangle$::=	$\langle \text{терм} \rangle ' = ' \langle \text{терм} \rangle$
$\langle \text{терм} \rangle$::=	$\langle \text{слагаемое} \rangle \mid \langle \text{терм} \rangle ' + ' \langle \text{слагаемое} \rangle$
$\langle \text{слагаемое} \rangle$::=	$\langle \text{умножаемое} \rangle \mid \langle \text{слагаемое} \rangle ' * ' \langle \text{умножаемое} \rangle$
$\langle \text{умножаемое} \rangle$::=	$\langle \text{переменная} \rangle \mid ' (' \langle \text{терм} \rangle ') ' \mid ' 0 ' \mid \langle \text{умножаемое} \rangle ' , '$

Будьте внимательны! Символ $' , '$ имеет код 0x27.

Пример

стандартный ввод
1 2
стандартный вывод
$ - @ x . x = 0 ' , - > x = 0 ' , '$ $x = 0 ' , - > x = 0 ' , - > x = 0 ' , '$ $x = 0 ' , - > (x = 0 ' , - > x = 0 ' ,) - > x = 0 ' , '$ $(x = 0 ' , - > x = 0 ' , - > x = 0 ' ,) - > (x = 0 ' , - > (x = 0 ' , - > x = 0 ' ,) - > x = 0 ' ,) - > (x = 0 ' , - > x = 0 ' ,)$ $(x = 0 ' , - > (x = 0 ' , - > x = 0 ' ,) - > x = 0 ' ,) - > (x = 0 ' , - > x = 0 ' ,)$ $x = 0 ' , - > x = 0 ' , '$ $(x = 0 ' , - > x = 0 ' ,) - > (0 = 0 - > 0 = 0 - > 0 = 0) - > (x = 0 ' , - > x = 0 ' ,)$ $(0 = 0 - > 0 = 0 - > 0 = 0) - > (x = 0 ' , - > x = 0 ' ,)$ $(0 = 0 - > 0 = 0 - > 0 = 0) - > (@ x . x = 0 ' , - > x = 0 ' ,)$ $0 = 0 - > 0 = 0 - > 0 = 0$ $@ x . x = 0 ' , - > x = 0 ' , '$