Полигоны с тождествами в решётке конгруэнций

И.Б. Кожухов, А.М. Пряничников

Введение

Решётка конгруэнций $\mathrm{Con}\,A$ универсальной алгебры A является важной характеристикой этой алгебры. Наименьшим элементом этой решётки является отношение равенства $\Delta_A = \{(a,a)|a \in A\}$, а наибольшим – универсальное отношение $\nabla_A = A \times A$. Одним из направлений общей алгебры является изучение универсальных алгебр с теми или иными условиями на конгруэнции. Например, условие тривиальности решётки конгруэнций ($\mathrm{Con}\,A = \{\Delta_A, \nabla_A\}$) определяет простые алгебры (простые группы, кольца, конгруэнц-простые полугруппы и т.д.), условие максимальности или минимальности – соответственно нётеровы и артиновы алгебры. В работе [1] исследовался класс алгебр, противоположный классу простых алгебр, а именно, алгебры, у которых всякое отношение эквивалентности является конгруэнцией (т.е. $\mathrm{Con}A = \mathrm{Eq}A$, где $\mathrm{Eq}\,A$ – решётка отношений эквивалентности на множестве A). Большое количество работ посвящено подпрямо неразложимым алгебрам, т.е. таким алгебрам A, что либо $|A| = 1$, либо решётка $\mathrm{Con}A$ содержит наименьший отличный от Δ_A элемент.

Универсальные алгебры, у которых решётка конгруэнций модулярна, или дистрибутивна, или является цепью, тоже привлекали большое внимание специалистов. Можно отметить работы по дистрибутивным и цепным кольцам и модулям, полигонам (над полугруппами) с дистрибутивной или модулярной решёткой конгруэнций [2, 3]. Интересно отметить, что, хотя полигон над полугруппой – аналог модуля над кольцом, но решётка конгруэнций модуля (т.е. решётка подмодулей) всегда модулярна, а для решётки конгруэнций полигона модулярность является редким явлением.

Дистрибутивные и модулярные решётки образуют многообразия, задаваемые соответственно тождеством $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ и тождеством $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (z \wedge (x \vee y))$ (см. [4, глава 5, теорема 347]). Цепи образуют класс решёток, не являющийся многообразием, но замкнутым относительно подрешёток и гомоморфных образов.

Пусть $\mathcal{V}$ – многообразие всех решёток, а $\mathrm{Var}\,L$ – многообразие, порождаемое решёткой L.

Решёточное тождество называется *нетривиальным*, если оно выполняется не во всех решётках. Обозначим через $FL(n)$ свободную решётку с n свободными образующими. Следующие 3 леммы представляют собой хорошо известные утверждения, их доказательства мы приводим для полноты изложения.

Лемма 1. *В конечной решётке выполняется хотя бы одно нетривиальное тождество.*

Доказательство. Пусть L – конечная решётка и $\mathrm{Var}\, L$ – многообразие, порождённое решёткой L. Многообразие, порождённое конечной алгеброй, локально конечно (см. [5, следствие 3.14]). Поэтому $\mathrm{Var}\, L$ состоит из локально конечных алгебр. Вместе с тем, не все решётки локально конечны: результат Ф. Уитмена (см. [6, §5, теорема 3]) показывает, что для любого n решётка $FL(n)$ изоморфно вкладывается в $FL(3)$, поэтому $FL(n)$ – бесконечная решётка. Следовательно, $\mathrm{Var}\, L$ содержит не все решётки, а значит, существует нетривиальное тождество, выполняющееся для всех решёток, содержащихся в $\mathrm{Var}\, L$, и в частности, для L. □

Лемма 2 ([7]). *Всякое решёточное тождество, выполняющееся в решётке $\mathrm{Eq}\, M$ для некоторого бесконечного множества M, тривиально.*

Лемма 3. *Если решётка L содержит в качестве подрешётки $\mathrm{Eq}\, M$ для какого–либо бесконечного множества M, то $\mathrm{Var}\, L = \mathcal{V}$.*

Доказательство. Если в L выполняется нетривиальное решёточное тождество, то оно должно выполняться и в $\mathrm{Eq}\, M$, но это не так по лемме 2. Следовательно, в L выполняются только тривиальные решёточные тождества, т.е. $\mathrm{Var}\, L = \mathcal{V}$. □

В связи с вышесказанным кажется естественным изучение универсальных алгебр, у которых решётка конгруэнций удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству. Цель данной работы состоит в доказательстве следующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть X – полигон над конечной полугруппой. Тогда решётка конгруэнций $\mathrm{Con}\, X$ удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.*

Теорема 2. *Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа и $|G| < \infty$, $|I| < \infty$. Тогда для любого полигона X с нулём над полугруппой S выполняется следующее: решётка конгруэнций $\mathrm{Con}\, X$ удовлетворяет какому-либо нетривиальному решёточному тождеству в том и только том случае, если X конечен.*

Если I – бесконечное множество, то утверждение теоремы 2 неверно, как показывает предложение 1.

Предложение 1. *Существует вполне 0-простая полугруппа $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и бесконечный полигон X с нулём над S такие, что решётка $\mathrm{Con}\, X$ двухэлементна (а значит, удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству).*

Основные сведения из универсальной алгебры можно найти в [8, 5], из теории полугрупп – в [9], полигонов над полугруппами – в [10], теории решёток – в [4].

Напомним, что *полигоном над полугруппой* называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in$

X, $s,t \in S$ (см. [10]). Полигон можно рассматривать как унарную алгебру, т.е. алгебру, у которой все операции унарны (операциями полигона X над полугруппой S являются умножения на элементы полугруппы, т.е. $x \mapsto xs$ $(s \in S)$).

Если полигон X является объединением своих подполигонов X_i $(i \in I)$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то мы называем X *копроизведением* полигонов X_i и пишем $X = \coprod_{i \in I} X_i$. Для любой полугруппы S мы будем обозначать через S^1 наименьшую полугруппу с единицей, содержащую S, т.е.

$$S^1 = \begin{cases} S, \text{ если } S \text{ имеет единицу,} \\ S \cup \{1\}, \text{ если } S \text{ не имеет единицы.} \end{cases}$$

Пусть X – полигон над полугруппой S. Для элементов $x, y \in X$ положим $x \leqslant y \Leftrightarrow y \in xS^1$. Очевидно, отношение $\leqslant$ является отношением квазипорядка на множестве X. Полигон X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существует последовательность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{2k} \in X$ такая, что

$$x \geqslant x_0 \leqslant x_1 \geqslant x_2 \leqslant \ldots \geqslant x_{2k} \leqslant y.$$

Нетрудно видеть, что связность полигона X над полугруппой S – это в точности связность графа с множеством вершин X и рёбрами (x, xs), где $x \in X$, $s \in S$ и $x \neq xs$. Кроме того, всякий полигон является копроизведением связных подполигонов (компонент связности).

Нулём полигона X над полугруппой S назовём такой элемент $z \in X$, что $zs = z$ при всех $s \in S$.

Пусть X – полигон над полугруппой S и Y – его подполигон. Конгруэнция $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \Delta_X$ наывается *конгруэнцией Риса*. Для фактор-полигона X/ρ_Y будем использовать также обозначение X/Y. Следующее утверждение хорошо известно, доказательство мы приведём лишь для полноты изложения.

Лемма 4. *Пусть X – полигон, Y – его подполигон. Тогда решётки $\operatorname{Con} Y$ и $\operatorname{Con} X/Y$ изоморфно вкладываются в решётку $\operatorname{Con} X$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что отображение $\rho \mapsto \rho \cup \Delta_X$ является изоморфным вложением решётки $\operatorname{Con} Y$ в решётку $\operatorname{Con} X$. $\square$

Утверждение о том, что $\operatorname{Con} X/Y$ – подрешётка решётки $\operatorname{Con} X$, следует из общеалгебраического факта: Если ρ – конгруэнция алгебры A, то существует взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями алгебры A/ρ и теми конгруэнциями на A, которые содержат ρ; при этом это соответствие сохраняет операции $\vee$ и $\wedge$, поэтому решётка $\operatorname{Con} A/\rho$ изоморфна отрезку $[\rho, \nabla_A]$ решётки $\operatorname{Con} A$ (см. Биркгоф, гл. VI, теорема 7).

Полигоны над конечными полугруппами

Пусть X – полигон над полугруппой S. Ранее был определён квазипорядок на X: $x \leqslant y \Leftrightarrow y \in xS^1$. По квазипорядку стандартным образом определяются отношения эквивалентности и отношение порядка. А именно, пусть

$$x \sim y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge y \leqslant x.$$

Тогда $\sim$ – отношение эквивалентности на множестве X. На фактор-множестве $X/\sim$ квазипорядок $\leqslant$ индуцирует порядок, который мы также будем обозначать через $\leqslant$. А именно, пусть K_1, K_2 – два класса эквивалентности отношения $\sim$. $K_1 \leqslant K_2$ означает, что $x \leqslant y$ при каких-либо (а значит, и при всех) $x \in K_1$, $y \in K_2$.

Для $x, y \in X$ полагаем

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \nsim y.$$

Лемма 5. *Отношение $<$ на X транзитивно.*

Доказательство. Пусть $x < y$ и $y < z$. Тогда $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$. Ввиду транзитивности отношения $\leqslant$ мы получаем: $x \leqslant z$. Предположим, что $x \sim z$. Тогда $z \leqslant x$. Отсюда $x \leqslant y \leqslant z \leqslant x$, т.е. $x \sim y$, а это противоречит предположению. □

Лемма 6. *Пусть X – полигон над конечной полугруппой S, причём $|S| = n$. Если $x_k < x_{k-1} < \ldots < x_1 < x_0$ – последовательность элементов из X, то $k \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $k > n$. Мы имеем:

$$x_{k-1} = x_k s_{k-1}, x_{k-2} = x_{k-1} s_{k-2}, \ldots, x_1 = x_2 s_1, x_0 = x_1 s_0$$

при некоторых $s_0, \ldots, s_{k-1} \in S^1$. Так как $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, то $s_0, \ldots, s_{k-1} \in S$. Очевидно,

$$x_i = x_k s_{k-1} s_{k-2} \ldots s_i \tag{1}$$

при всех $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Элементы $s_{k-1}, s_{k-1}s_{k-2}, \ldots, s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_1 s_0$ принадлежат полугруппе S, так как $|S| = n$ и $k > n$, то среди этих элементов есть совпадающие, т.е. $s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_i = s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_j$ при некоторых $i \neq j$. Будем считать, что $i < j$. Из формулы (1) видно, что в этом случае $x_i = x_j$, однако, это противоречит неравенству $x_j < x_i$. □

Только что доказанная лемма позволяет ввести понятие длины элемента и длины полигона. Пусть X – полигон над конечной полугруппой S. Положим

$$Z_0 = \{x \in X \mid \forall y \in X \; x \leqslant y \to x \sim y\}.$$

Длиной $l(x)$ элемента $x \in X$, назовём наибольшее число k такое, что существует цепочка элементов

$$x = x_k < x_{k-1} < \ldots < x_1 < x_0.$$

Так как эта цепочка наибольшей длины, то $x_0 \in Z_0$. По лемме 6 $k \leqslant n$. *Длиной полигона X* назовём число $l(X) = \max\{l(x) \mid x \in X\}$. Таким образом, $l(x) \leqslant n$ при всех $x \in X$. Очевидно, $l(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Z_0$. Ясно, что $l(X) \leqslant n$.

Доказательство теоремы 1. Пусть X – полигон над конечной полугруппой S и $|S| = n$. Если X – конечный полигон, то решётка $\operatorname{Con} X$ также конечна, а значит, по лемме 1 она содержится в некотором собственном подмногообразии многообразия $\mathcal{V}$.

Осталось доказать, что если X бесконечен, то решётка $\mathrm{Con}\, X$ не содержится ни в каком собственном подмногообразии многообразия $\mathcal{V}$. Доказательство проведём индукцией по длине $l(X)$ полигона X.

Базис индукции. Пусть $l(X) = 0$. Тогда $X = Z_0$, и мы имеем:

$$\forall x \in X \ \forall s \in S \ \exists t \in S \ \ xst = x.$$

Очевидно, что в этом случае отношение $\sim$ является конгруэнцией, классами которой являются множества xS^1 $(x \in X)$. Эти множества конечны, поэтому $X/\!\sim$ – бесконечный полигон, состоящий целиком из нулей. Отсюда следует, что $\mathrm{Con}\,(X/\!\sim) = \mathrm{Eq}\,(X/\!\sim)$, и по лемме 2 $\mathrm{Con}\,(X/\!\sim)$ не удовлетворяет никакому нетривиальному решёточному тождеству. Из леммы 4 следует, что решётка $\mathrm{Con}\, X$ также не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.

Индуктивный переход. Пусть $l(X) = m > 0$. Если Z_0 – бесконечный подполигон, то по только что доказанному решётка $\mathrm{Con}\, Z_0$ не содержится ни в каком собственном подмногообразии многообразия $\mathcal{V}$. По лемме 4 решётка $\mathrm{Con}\, X$ содержит изоморфную копию решётки $\mathrm{Con}\, Z_0$, следовательно, решётка $\mathrm{Con}\, X$ также не содержится ни в каком собственном подмногообразии.

Далее будем считать, что $|Z_0| < \infty$. Положим $X' = X/Z_0$. Тогда X' – бесконечный полигон.

Пусть $Z_1 = \{x \in X' \mid \forall y \in X' \ x < y \to y = z_0\}$. Проверим, что Z_1 - подполигон. Пусть $x \in Z_1$, $s \in S$. Если $x = z_0$, то $xs = z_0$ (очевидно, z_0 – нуль). Пусть $x \neq z_0$. Имеем: $x \leqslant xs$. Если $xs = z_0$, то $xs \in Z_1$. Если $xs \neq z_0$, то $x \not< xs$. Следовательно, $xs \sim x$. Пусть $xs < y$. Тогда $x \leqslant y$. Если $x < y$, то $y = z_0$ - то, что требуется доказать. Если $x \not< y$, то $x \sim y$, а значит, $y \sim xs$. Таким образом, $xs \in Z_1$.

Предположим, что Z_1 бесконечен. Рассмотрим следующие отношения на полигоне Z_1:

$$\alpha = \{(x, y) \in Z_1 \times Z_1 \mid xS^1 = yS^1\},$$

$$\beta = \{(x, y) \in Z_1 \times Z_1 \mid \forall s \in S^1 \ xs = z_0 \leftrightarrow ys = z_0\}.$$

Ранее отношение α было обозначено символом $\sim$. Докажем, что отношение $\alpha \cap \beta$ – отношение эквивалентности. Пусть $s \in S$, $(x, y) \in \alpha \cap \beta$. Если $xs = z_0$, то ввиду включения $(x, y) \in \beta$ мы имеем также $ys = z_0$. Следовательно, $(xs, ys) \in \alpha \cap \beta$. Пусть $xs \neq z_0$. Тогда также $ys \neq z_0$. Мы имеем: $x \leqslant xs$. Так как $x \in Z_1$ и $xs \neq z_0$, то $x \not< xs$. Следовательно, $xs \sim x$. Аналогично $ys \sim y$. Так как $x \sim y$, то $xs \sim ys$, т.е. $(xs, ys) \in \alpha$. Докажем, что $(xs, ys) \in \beta$. Так как $xs \sim ys$, то $xs \cdot 1 = z_0 \leftrightarrow ys \cdot 1 = z_0$. Проверим, что также $xs \cdot t = z_0 \leftrightarrow ys \cdot t = z_0$ при $t \in S$. Пусть $xst = z_0$. Так как $(x, y) \in \beta$, то $yst = z_0$. Теперь ясно, что $(xs, ys) \in \beta$. Таким образом, доказано, что $\alpha \cap \beta$ – конгруэнция.

Для $s \in S^1$ обозначим через ρ_S отношение эквивалентности, имеющее не более двух классов: $K_1 = \{x \in Z_1 \mid xs = z_0\}$, $K_2 = \{x \in Z_1 \mid xs \neq z_0\}$ (один из классов может быть пустым). Очевидно, классами отношения эквивалентности β являются пересечения классов отношений ρ_S. Таким образом, β имеет не более, чем 2^{n+1} классов. Так как Z_1 бесконечно, то существует хотя бы один бесконечный класс, скажем, K.

Так как классы отношения α конечны, то то же верно для классов отношения $\alpha \cap \beta$. Следовательно, $Y = Z_1/\alpha \cap \beta$ – бесконечный полигон. Для любых $y \in Y$ и $s \in S$ мы имеем: $ys = y$ или $ys = z_0$. Пусть K' – множество классов отношения $\alpha \cap \beta$, содержащихся в множестве K. Очевидно, K' – бесконечное подмножество полигона Y. Возьмём любое $\tau \in \operatorname{Eq} K'$. Положим $\rho(\tau) = \tau \cup \Delta_{Y \setminus K'}$. Проверим, что $\rho(\tau) \in \operatorname{Con} Y$. Действительно, пусть $(y, y') \in \rho(\tau)$ и $s \in S$. Если $(y, y') \notin \tau$, то $y = y'$, а значит, $ys = y's$. Пусть $(y, y') \in \tau$. Тогда $ys \in \{y, z_0\}$, $y' \in \{y', z_0\}$, причём $ys = z_0 \leftrightarrow y's = z_0$. Это означает, что либо $(ys.y's) = (y, y')$, либо $(ys, y's) = (z_0, z_0)$. В любом случае $(ys, y's) \in \rho(\tau)$. Нетрудно видеть, что $\{\rho(\tau) \mid \tau \in \operatorname{Eq} K'\}$ – подрешётка решётки $\operatorname{Con} Y$, изоморфная решётке $\operatorname{Eq} K'$. Так как K' бесконечно, то решётка $\operatorname{Con} Y$ не удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось рассмотреть случай, когда Z_1 – конечное множество. Положим $X'' = X'/Z_1$.

Докажем, что $l(X'') < m$. Пусть

$$x_k < x_{k-1} < \ldots < x_1 < x_0$$

– цепь наиольшей длины в X''. Предположим, что $k \geqslant m$, и приведём это предположение к противоречию. Так как $X'' = (X' \setminus Z_1) \cup \{0\}$, то $x_1 \neq Z_1$. По определению Z_1 это означает, что существует такое $y \in X'$, что $x_1 < y$ и $y \neq 0$. Если $y \notin Z_1$, то $y < z$ при некотором $z \neq 0$, и мы можем получить цепочку

$$x_k < x_{k-1} < \ldots < x_1 < y < z$$

элементов из X, которая показывает, что $l(X) \geqslant k + 1 > m$ – противоречие с условием. Таким образом, $y \in Z_1$ и $y \neq z_0$ в X', т.е. $y \notin Z_0$ в X. Так как $y \notin Z_0$, то $y < z$ при некотором $z \in X$. Мы снова получаем цепочку

$$x_k < x_{k-1} < \ldots < x_1 < y < z,$$

существование которой приводит к противоречию.

Таким образом, $l(X'') < m$. Так как X'' бесконечен, то по предположению индукции решётка $\operatorname{Con} X''$ не удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству. Так как X'' – гомоморфный образ полигона X, то по лемме 4 $\operatorname{Con} X''$ – подрешётка решётки $\operatorname{Con} X$. Отсюда получаем, что решётка $\operatorname{Con} X$ не удовлетворяет нетривиальному тождеству. $\square$

Полигоны над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами

Вполне простой полугруппой называется полугруппа S, не имеющая нетривиальных идеалов и имеющая хотя бы один примитивный идемпотент (т.е. идемпотент, минимальный относительно естественного порядка на множестве идемпотентов: $e \leqslant f \Leftrightarrow ef = fe = e$). Полугруппа S с нулём называется *вполне 0-простой*, если выполнены условия: 1) S не имеет идеалов, отличных от $\{0\}$ и S; 2) S имеет 0-минимальный (т.е. минимальный среди ненулевых) идемпотент; 3) $S^2 \neq 0$.

Рисовская матричная полугруппа $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ (здесь G – группа, I и Λ – множества, $P = \|p_{\lambda i}\|$ ($\lambda \in \Lambda, i \in I$) – матрица с элементами из $G \cup \{0\}$) определяется как множество, состоящее из элемента 0 и элементов вида

$(g)_{i\lambda}$, где $g \in G,\ i \in I,\ \lambda \in \Lambda$, с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = \begin{cases} (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}, \text{ если } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, \text{ если } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Рисовская матричная полугруппа $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где G, I, Λ, P такие же, как и выше, но $p_{\lambda i} \in G$ при всех $i \in I, \lambda \in \Lambda$ – это множество элементов вида $(g)_{i\lambda}$ с умножением

$$(g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu} = (gp_{\lambda j}h)_{i\mu}.$$

Хорошо известная теорема Сушкевича – Риса утверждает, что вполне простые полугруппы — это в точности полугруппы, изморфные полугруппе $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, а вполне 0-простые — изоморфные рисовской матричной полугруппе $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, при условии, что матрица P не содержит нулевых строк или столбцов (см. [9], теорема 3.5 и замечания перед леммой 3.1).

Для полугрупп S с нулём мы будем рассматривать полигоны X с нулём и накладывать требование $0 \cdot s = x \cdot 0 = 0$ для любых $s \in S,\ x \in X$.

Все полигоны над полугруппой $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и все полигоны с нулём над полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ были описаны в работе [11]. Приведём это описание, но сначала надо сделать несколько предварительных рассуждений.

Пусть S – полугруппа с единицей e. Полигон X над S называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$. Полигон X над полугруппой S (необязательно имеющей единицу) называется *циклическим*, если $X = aS^1$ для некоторого $a \in X$. Всякая полугруппа S является полигоном на собой, при этом конгруэнции этого полигона — это в точности правые конгруэнции полугруппы. Нетрудно проверить, что правая конгруэнция группы G — это в точности разложения в правые смежные классы по подгруппе группы G. Если H – подгруппа группы G, через G/H мы будем обозначать множество правых смежных классов Hg, где $g \in G$. G/H является G – полигоном относительно операции $Hg \cdot g' = Hgg'$. Пусть $\{H_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ – семейство подгрупп группы G. Положим

$$Q = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} (G/H_\gamma).$$

Нетрудно видеть, что написанное выражение – это общий вид любого унитарного полигона над группой G, а G/H – общий вид унитарного циклического полигона.

Следующие два утверждения дают описание полигонов над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами.

Предложение 2 ([11], теорема 5)**.** *Пусть X – множество, $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – вполне простая полугруппа, $\{H_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ – семейство подгрупп группы G, $Q = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma}(G/H_\gamma)$ – унитарный полигон над G. Пусть для $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ определены отображения $\pi_i : X \to Q$, $\varkappa_\lambda : Q \to X$ такие, что $q\varkappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при любых $q \in Q,\ i \in I,\ \lambda \in \Lambda$. Для $x \in X$ и $(g)_{i\lambda} \in S$ положим $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\varkappa_\lambda$. Тогда X будет являться полигоном над S. Кроме того, всякий полигон над вполне простой полугруппой изоморфен полигону, устроенному таким образом.*

Предложение 3 ([11], теорема 4)**.** *Пусть X – множество с выделенным в нём элементом 0, $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простая полугруппа,*

$\{H_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ – семейство подгрупп группы G, $Q = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma}(G/H_\gamma)$ – полигон над G. $Q^0 = Q \cup \{0\}$. Пусть для $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ определены отображения $\pi_i : X \to Q^0$, $\varkappa_\lambda : Q^0 \to X$ такие, что $0\pi_i = 0$, $0\varkappa_\lambda = 0$, $q\varkappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при $q \in Q^0$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Положим $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\varkappa_\lambda$ при $x \in X$, $(g)_{i\lambda} \in S \setminus \{0\}$. Тогда X – полигон с нулём над S. Кроме того, любой полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой изоморфен полигону, устроенному таким образом.

Пусть X – полигон с нулём и X_i $(i \in I)$ – его подполигоны. Если $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ и $X_i \cap X_j = \{0\}$ при $i \neq j$, то мы говорим, что X является 0-копроизведением полигонов X_i, и пишем $X = \bigsqcup^0_{i\in I} X_i$.

Теперь пусть X – полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, полученный вышеописанной конструкцией, т.е. $Q^0, \varkappa_\lambda, \pi_i$ имеют тот же смысл, что и в предложении 3. Положим $Q_\gamma = (G/H_\gamma) \cup \{0\}$. Для $q \in Q^0$, $\gamma \in \Gamma$ положим $X_q = \bigcup\{q\varkappa_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $X^{(\gamma)} = \bigcup\{X_q | q \in Q\}$. Нам понадобится ряд свойств этих множеств, проверка не составляет труда.

Предложение 4 ([11], леммы 1–4 и предл. 1)**.**

(1) $X^{(\gamma)}$ – подполигон полигона X;

(2) $X^{(\gamma)} \cap X^{(\delta)} = \{0\}$ при $\gamma \neq \delta$;

(3) $XS = \bigsqcup^0_{\gamma\in\Gamma} X^{(\gamma)}$;

(4) $xS = X^{(\gamma)}$ для всех $x \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$;

(5) $X = (X \setminus XS) \cup \bigsqcup^0_{\gamma\in\Gamma} z_\gamma S$, причём $z_\gamma \neq 0$ и $z_\gamma \in xS$ при всех $x \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Если X – конечный полигон, то решётка $\mathrm{Con}\, X$ конечна, а значит, удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству.

Достаточность. Пусть X – полигон над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, где $|I|, |\Lambda| < \infty$, и решётка $\mathrm{Con}\, X$ удовлетворяет нетривиальному решёточному тождеству. Заметим вначале, что $|X \setminus XS| < \infty$. Действительно, если $X \setminus XS$ – бесконечное множество, то X/XS – бесконечный полигон с нулевым умножением. Поэтому $\mathrm{Con}\,(X/XS) = \mathrm{Eq}\,(X/XS)$. Так как X/XS бесконечно, то по лемме 2 $\mathrm{Eq}\,(X \setminus XS)$ не удовлетворяет нетривиальному тожджеству. По лемме 4 решётка $\mathrm{Con}\, X$ содержит подрешётку, изоморфную $\mathrm{Con}\,(X/XS)$. Следовательно, решётка $\mathrm{Con}\, X$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству, что противоречит предположению.

Итак, $|X \setminus XS| < \infty$. Пользуясь предложением 4, представим X в виде $X = (X \setminus XS) \cup \bigsqcup^0_{\gamma\in\Gamma} z_\gamma S$. Осталось доказать, что Γ – конечное множество и полигоны $z_\gamma S$ конечны.

Рассмотрим какое-либо z_γ. По предожению 4 $z_\gamma S$ порождается любым своим ненулевым элементом, в частности, $z_\gamma = z_\gamma s$ при некотором $s \in S$. Так как $z_\gamma \neq 0$, то $s = (g)_{i\lambda}$. Имеем: $z_\gamma = z_\gamma (g)_{i\lambda}$. Найдём такое $j \in I$, что $p_{\lambda j} \neq 0$. Тогда будем иметь: $z_\gamma = z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda} = z_\gamma \cdot ((g)_{i\lambda} \cdot (p^{-1}_{\lambda j})_{j\lambda}) = (z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda}) \cdot (p^{-1}_{\lambda j})_{j\lambda} = z_\gamma \cdot (p^{-1}_{\lambda j})_{j\lambda})$. Нетрудно видеть, что $(p^{-1}_{\lambda j})_{j\lambda}$ – идемпотент.

По условию I – конечное множество. Для каждого $i \in I$ выберем $\lambda \in \Lambda$ так, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Положим $e_i = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Таким образом, если $I = \{i_1, \dots, i_m\}$, то мы имеем набор идемпотентов $e_1 = (p_{\lambda_1 i_1}^{-1})_{i_1\lambda_1}, \dots, e_m = (p_{\lambda_m i_m}^{-1})_{i_m\lambda_m}$. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ выберем какое-либо одно $i \in I$ такое, что $z_\gamma = z_\gamma e_i$. Соответственно этому Γ разобьётся на m подмножеств: $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, где Γ_i – множество таких γ, для которых выбрано e_i. Так как Γ бесконечно, то хотя бы одно из Γ_i также бесконечно. Без ограничения общности можно считать, что Γ_1 бесконечно. Положим $Y = \bigsqcup^0_{\gamma\in\Gamma_1} z_\gamma S$. Так как Y – подполигон полигона X, то решётка $\mathrm{Con}\, Y$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Проверим, что для $\gamma \in \Gamma_1$ имеет место эквивалентность (при $s \in S$):

$$e_i s = 0 \Leftrightarrow z_\gamma e_i s = 0.$$

Действительно, импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем обратную импликацию. Пусть $z_\gamma e_i s = 0$. Если $e_i s \neq 0$, то по свойствам вполне 0-простой полугруппы мы будем иметь $e_i st = e_i$ при некотором $t \in S$. Отсюда получаем: $z_\gamma = z_\gamma e_i = z_\gamma e_i st = z_\gamma e_i s \cdot t = 0$, что противоречит выбору элемента z_γ.

Из только что доказанной эквивалентности слеует ещё одна эквивалентность:

$$z_\gamma s = 0 \Leftrightarrow z_\delta s = 0 \tag{2}$$

при $\gamma, \delta \in \Gamma_1$ и $s \in S$.

Пусть σ – произвольное отношение эквивалентности на множестве Γ_1. Обозначим через $\rho(\sigma)$ конгруэнцию полигона Y, порождённого парами (z_γ, z_δ), где $(\gamma, \delta) \in \sigma$. Докажем, что отображение $\varphi : \sigma \to \rho(\sigma)$ является вложением решёток $\varphi : \mathrm{Eq}\,\sigma \longrightarrow \mathrm{Con}\, Y$. Тот факт, что φ сохраняет решёточные операции $\vee$ и $\wedge$, очевиден. Требуется доказать, что φ – вложение. Для этого покажем, что $(z_\xi, z_\eta) \in \rho(\sigma) \Rightarrow (\xi, \eta) \in \sigma$ при $\xi, \eta \in \Gamma_1$. Так как $(z_\xi, z_\eta) \in \rho(\sigma)$, то мы имеем цепочку равенств

$$\begin{array}{lllllllll}
z_\xi & = & u_1 s_1, & & & & & & \\
 & & v_1 s_1 & = & u_2 s_2, & & & & \\
 & & & & v_2 s_2 & = & u_3 s_3, & & \\
 & & & & & \dots & & & \\
 & & & & & & v_{n-1}s_{n-1} & = & u_n s_n, \\
 & & & & & & & & v_n s_n \; = \; z_\eta,
\end{array}$$

где $s_1, \dots, s_n \in S^1$, а $\{u_i, v_i\} = \{z_{\gamma_i}, z_{\delta_i}\}$ при $(\gamma_i, \delta_i) \in \sigma$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Так как $z_\eta \neq 0$, то $u_1 s_1 \neq 0$.

Очевидно, $u_1 s_1 \neq 0$. Ввиду 2 также $v_1 s_1 \neq 0$, отсюда $u_2 s_2 \neq 0$. И т.д. Получаем, что $u_i s_i, v_i s_i \neq 0$ при всех i. Так как $z_\xi = u_1 s_1$ и $u_1 = z_{\xi_1}$, при некотором $\xi_1 \in \Gamma_1$, то $\xi_1 = \xi$. Тогда $v_1 = z_{\eta_1}$ где $(\xi, \eta_1) \in \sigma$. Так как $u_2 s_2 \neq 0$ и $u_2 = z_{\xi_2}$, то $\xi_2 = \eta_1$. Продолжим рассуждать аналогичным образом. В результате получим: если $u_i = z_{\xi_i}$, $v_i = z_{\eta_i}$, то $\xi = \xi_1, (\xi_1, \eta_1) \in \sigma$, $\xi_2 = \eta_1$, $(\xi_2, \eta_2) \in \sigma$, $\dots$, $\xi_n = \eta_{n-1}$, $(\xi_n, \eta_n) \in \sigma$, $\eta_n = \eta$. Так как σ транзитивно, то $(\xi, \eta) \in \sigma$.

Мы доказали, что отображение $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$ является вложением решётки $\mathrm{Eq}\,\Gamma_1$ в решётку $\mathrm{Con}\, Y$. Наличие такого вложения показывает, что решётка $\mathrm{Con}\, X$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству, а значит, решётка $\mathrm{Con}\, X$ тоже не удовлетворяет, но это противоречит условию. Полученное противоречие показывает, что $|\Gamma| < \infty$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что полигоны $z_\gamma S$ конечны. Предположим, что $z_\gamma S$ бесконечен. Так как $z_\gamma \in z_\gamma S$ и $z_\gamma \neq 0$, то $z_\gamma = z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda}$ при некоторых $g \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Отсюда получаем: $z_\gamma = z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda} \cdot (g)_{i\lambda}$, а значит, $(g)_{i\lambda} \cdot (g)_{i\lambda} \neq 0$, т.е. $p_{\lambda i} \neq 0$. Положим $e_i = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Тогда будем иметь: $z_\gamma = z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda} = z_\gamma \cdot ((g)_{i\lambda} \cdot e_i) = (z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda})e_i = z_\gamma e_i$. Следовательно, $z_\gamma S = z_\gamma e_i S$.

Очевидно $e_i S = R_i$, где $R_i = \{(g)_{i\eta} \mid g \in G, \eta \in \Lambda\} \cup \{0\}$. Множество R_i – это правый идеал полугруппы S, а значит, R_i – это правый идеал полугруппы S, а значит, R_i – подполигон полигона S, если S рассматривать как полигон над S с естественный действием.

По условию множество I конечно. Будем считать, что $I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Строка с индексом λ сэндвич-матрицы P имеет вид $(p_{\lambda 1}, \ldots, p_{\lambda m})$, где $p_{\lambda i} \in G \cup \{0\}$. Так как множество G конечно, то различных строк может быть лишь конечное число. Так как $z_\gamma S = z_\gamma R_i$ – бесконечное множество, то множество R_i также бесконечно, а значит, Λ бесконечно. Разобьём множество Λ на классы, относя к одному классу такие λ и η, у которых $(p_{\lambda 1}, \ldots, p_{\lambda m}) = (p_{\eta 1}, \ldots, p_{\eta m})$. Тогда мы получим разбиение множества Λ на конечное число подмножеств: $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_k$. Так как множество $z_\gamma R_i$ бесконечно, то найдётся такое $g \in G$, что множество $\{z_\gamma (g)_{i\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$ бесконечно. Следовательно, можно составить последовательность попарно различных элементов $z_\gamma (g)_{i\lambda_1}, z_\gamma (g)_{i\lambda_2}, \ldots$.
Пусть $\Lambda' = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$. Это множество бесконечно. Следовательно, существует такое t, что $\Lambda' \cap \Lambda_t$ бесконечно. Множество $\Lambda' \cap \Lambda$ можно рассматривать как подпоследовательность последовательности Λ'. Пусть $\Lambda' \cap \Lambda_t = \{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$. Тогда мы будем иметь:

$$z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda_k} \neq z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda_l} \text{ при } k \neq l, \tag{3}$$

$$p_{\lambda_k j} = p_{\lambda_l j} \text{ при любых } j \in I \text{ и } k, l \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Положим $u_k = z_\gamma \cdot (g)_{i\lambda_k}$ для $k \in \mathbb{N}$. Из 3 следует, что $u_1, u_2, u_3, \ldots$ – различные элементы полигона $z_\gamma S$. Из 4 следует, что $u_k s = u_l s$ при любых $k, l \in \mathbb{N}$ и $s \in S$ Пусть σ – произвольное отношение эквивалентности на множестве $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$. Тогда $\sigma \cup \Delta_{z_\gamma S}$ будет являться конгруэнцией полигона $z_\gamma S$. Таким образом, мы имеем вложение решёток $\mathrm{Eq}\, U \to \mathrm{Con}\,(z_\gamma S)$. Так как множество U бесконечно, то решётка $\mathrm{Con}\,(z_\gamma S)$ не удовлетворяет нетривиальным решёточным тождествам, а значит, решётка $\mathrm{Con}\, X$ тоже не удовлетворяет, а это противоречит предположению. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2. □

Доказательство предложения 1. Рассмотрим вполне 0-простую полугруппу $S = \mathcal{M}^0(\{1\}, \mathbb{N}, \mathbb{N}, P)$, где

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Докажем, что правый идеал

$$R = \{(1)_{1i} | i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

является бесконечным полигоном над S, у которого решётка конгруэнций двухэлементна, а именно, $\mathrm{Con}\, R = \{\Delta_R, \nabla_R\}$, т.е. R – конгруэнц-простой полигон. В этом случае решётка $\operatorname{Con} R$ конечна, а значит, удовлетворяет нетривиальному тождеству (например, тождеству дистрибутивности).

Для доказательства того, что $\operatorname{Con} R = \{\Delta_R, \nabla_R\}$, достаточно доказать, что конгруэнция, порождённая парой (x, y), где $x, y \in R$ и $x \neq y$, совпадает с ∇_R.

Пусть ρ – конгруэнция, порождённая парой $(0, (1)_{1i})$. Так как $(0, (1)_{1i}) \cdot (1)_{ij} = (0, (1)_{1j})$, то $(0, (1)_{1j}) \in \rho$. Аналогично $(0, (1)_{1k}) \in \rho$ при любом k. Следовательно, $((1)_{1j}, (1)_{1k}) \in \rho$. Таким образом, $\rho = \nabla_R$. Также несложно доказывается, что $\rho = \nabla_R$, если ρ порождается парой $((1)_{1i}, (1)_{1j})$, где $i \neq j$. $\square$

Часть 2

Полигон U над полугруппой S называется *простым*, если $uS = U\ \forall u \in U$, и *конгруэнц-простым*, если $|\mathrm{Con}\, U| \leqslant 2$.

Лемма 7. *Пусть U – простой полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Тогда $U = uS = uR_i$ для любого $u \in U$, $i \in I$. Кроме того, $u \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u$ при некотором $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство. Так как uS и uR_i – подполигоны и U – простой, то $U = us = uR_i$. Так как U – простой, то $u \in uR_i$. Следовательно, $u = u \cdot (g)_{i\lambda}$ при некотором $\lambda \in \Lambda$. Имеем: $u \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u \cdot (g)_{i\lambda} \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. □

Лемма 8. *Пусть U – простой полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Тогда для любого $i \in I$ существует такая конгруэнция ρ полигона R_i, что $U \cong R_i/\rho$.*

Доказательство. По предыдущей лемме при некотором $\lambda \in \Lambda$ мы имеем $u = ue_i$, где $e_i = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Рассмотрим отображение $\varphi : R_i \to U$, $r \to ur$, $r \in R_i$. Очевидно, φ – гомоморфизм полигонов. Так как U – простой, то $R_i\varphi = U$. Теперь по теореме об изоморфизме $U \cong R_i/\rho$ для некоторого $\rho \in \mathrm{Con}\, R_i$. □

В работе [12] были описаны все правые конгруэнции вполне простой полугруппы $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Так как $S_S \cong \coprod_{i\in I} R_i$, то можно с помощью теоремы 2 из [12] найти все конгруэнции полигона R_i. Однако, для дальнейшего нам не нужно будет полное описание, а потребуется лишь установить некоторые свойства конгруэнций на R_i. Это мы сделаем независимо от работы [12].

Лемма 9. *Пусть ρ – конгруэнция полигона R_i. Полигон R_i рассмотрим как дизъюнктное объединение подмножеств: $R_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (G)_{i\lambda}$, где $(G)_{i\lambda} = \{(g)_{i\lambda} | g \in G\}$ при $\lambda \in \Lambda$. Тогда существует подгруппа H группы G такая, что*

$$((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Ha = Hb. \tag{5}$$

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим отношение $\rho' = ((G)_{i\lambda} \times (G)_{i\lambda}) \cap \rho$ на множестве $(G)_{i\lambda}$. Нетрудно видеть, что $(G)_{i\lambda}$ – группа, изоморфная группе G (изоморфизмом является отображение $g \mapsto (gp_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$). Очевидно, ρ' является правой конгруэнцией группы $(G)_{i\lambda}$. Пусть σ – отношение на группе G, определённое правилом

$$(g, g') \in \sigma \Leftrightarrow ((g)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda}) \in \rho. \tag{6}$$

Проверим, что σ – правая конгруэнция группы G. Действительно, пусть $(g, g') \in \sigma$ и $a \in G$. Тогда из 6 следует, что $((g)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda}) \in \rho$. Умножив на $(p_{\lambda i}^{-1}a)_{i\lambda}$ получим:

$$((g)_{i\lambda} \cdot (p_{\lambda i}^{-1}a)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda} \cdot (p_{\lambda i}^{-1}a)_{i\lambda}) \in \rho,$$

т.е. $((ga)_{i\lambda}, (g'a)_{i\lambda}) \in \rho$. Ввиду 6 это означает, что $(ga, g'a) \in \sigma$. Таким образом, σ – правая конгруэнция группы G. Хорошо известно, что правая конгруэнция на группе соответствует разложению группы G на правые смежные классы по некоторой подгруппе H. Следовательно, $(g, g') \in \sigma \Leftrightarrow Hg = Hg'$.

Итак, для каждого $\lambda \in \Lambda$ мы имеем:

$$((g)_{i\lambda}, (g')_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Hg = Hg'$$

для некоторой подгруппы H группы G. Для доказательства утверждения 5 осталось показать, что подгруппа H не зависит от $\lambda \in \Lambda$.

Пусть H, H' – подгруппы, $\lambda, \mu \in \Lambda$ и

$$((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Ha = Hb,$$
$$((a)_{i\mu}, (b)_{i\mu}) \in \rho \Leftrightarrow Ha' = Hb'.$$

Пусть $h \in H$. Тогда $((e)_{i\lambda}, (h)_{i\lambda}) \in \rho$. Умножив справа на $(e)_{i\mu}$, получим: $((p_{\lambda i})_{i\mu}, (hp_{\lambda i})_{i\mu}) \in \rho$, а значит, $H'p_{\lambda i} = H'hp_{\lambda i}$. Отсюда получаем: $h \in H'$. Нами доказано, что $H' \subseteq H$. □

Лемма 10. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – вполне простая полугруппа, $R_i = \{(g)_{i\lambda} | g \in G, \lambda \in \Lambda\}$ – главный правый идеал полугруппы S, рассматриваемый как правый полигон над S. Пусть ρ – конгруэнция полигона R_i и H – подгруппа группы G, определённая в лемме 9. Если $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$, то $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$ при всех $j \in I$.*

Доказательство. Возьмём любые $j \in I$, $\nu \in \Lambda$. тогда получим: $((a)_{i\lambda} \cdot (e)_{j\nu}, (b)_{i\mu} \cdot (e)_{j\nu}) \in \rho$, т.е. $((ap_{\lambda j})_{i\nu}, (bp_{\mu j})_{i\nu}) \in \rho$. По лемме 9 $Hap_{\lambda i} = Hbp_{\mu j}$. Следовательно, $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$. □

Лемма 11. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ – вполне простая полугруппа. Возьмём любое $i \in I$ и подгруппу H группы G. Для $(a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu} \in R_i$ положим*

$$((a)_{i\lambda}, (b)_{j\mu}) \in \rho \Leftrightarrow \forall j \in I \; p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb. \tag{7}$$

Тогда ρ является конгруэнцией полигона R_i. Кроме того, ρ – наибольшая конгруэнция на R_i, удовлетворяющая условию 5.

Доказательство. Проверим, что формула 7 определеяет конгруэнцию. При $\lambda = \mu$ мы получим $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho \Leftrightarrow e \in a^{-1}Hb$, то есть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Ha = Hb$. Поэтому на каждом множестве $(G)_{i\lambda}$ полигона R_i мы получаем разбиение группы G на правые смежные классы по H. Отсюда следует рефлексивность отношения ρ.

Пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$. Тогда $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$ при всех $j \in I$. Следовательно, $(p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1})^{-1} \in a^{-1}Hb$, т.е. $p_{\mu j}p_{\lambda j}^{-1} \in b^{-1}Ha$ при всех j. Это означает, что $((b)_{i\mu}, (a)_{i\lambda}) \in \rho$. Этим доказана симметричность отношения ρ. Покажем транзитивность.

Пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}), ((b)_{i\mu}, (c)_{i\nu}) \in \rho$. Тогда $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$, $p_{\mu j}p_{\nu j}^{-1} \in b^{-1}Hc$ при всех $j \in I$. Перемножив эти соотношения, получим: $p_{\lambda j}p_{\nu j}^{-1} \in a^{-1}Hc$. Так как это выполняется при всех $j \in I$, то ρ транзитивно.

Докажем, что ρ выдерживает умножение на элементы полугруппы S. Пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$. Умножив на $(c)_{j\nu}$, получим пару $((ap_{\lambda j})_{i\nu}, (bp_{\mu j})_{i\nu})$. Так как $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in a^{-1}Hb$, то $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$. Следовательно, $((ap_{\lambda j})_{i\nu}, (bp_{\mu j})_{i\nu}) \in \rho$.

Докажем, что конгруэнция ρ наибольшая среди тех, которые соответствуют подгруппе H. Пусть $\rho' \in \operatorname{Con} R_i$ такова, что $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\lambda}) \in \rho \Leftrightarrow Ha = Hb$ и пусть $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho'$. Тогда $((a)_{i\lambda} \cdot (e)_{j\nu}, (b)_{i\mu} \cdot (e)_{j\nu}) \in \rho'$. То есть $((ap_{\lambda j})_{i\nu}, (bp_{\mu j})_{i\nu}) \in \rho'$. Поэтому $Hap_{\lambda j} = Hbp_{\mu j}$, а значит, $p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} \in H$, так как это выполнено для всех $j \in I$, то ввиду (7) $((a)_{i\lambda}, (b)_{i\mu}) \in \rho$. Таким образом, $\rho' \subseteq \rho$. Этим доказана максимальность конгруэнции ρ. $\square$

Покажем теперь, что существует конечная группа G и бесконечные множества I и Λ такие, что над полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ при подходящем выборе сэндвич-матрицы P можно построить бесконечный полигон X над S, у которого решётка конгруэнций тривиальна, т.е. $\operatorname{Con} X = \{\Delta_X, \nabla_X\}$, а значит, решётка $\operatorname{Con} X$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Возьмём в качестве группы G симметрическую группу на 3-элементном множестве: $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Положим $a = (13)$, $b = (23)$, $h = (12)$, $H = \langle(12)\rangle = \{e, h\}$. Далее, пусть $I = \Lambda = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Сэндвич-матрицу $P = \|p_{\lambda i}\|$ будем строить из следующих соображений. Рассмотрим $I \times \Lambda$ таблицу T

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \Lambda & & & \\
 & ha & b & a & b & a & b & \ldots \\
 & a & hb & a & b & a & b & \ldots \\
I & a & b & ha & b & a & b & \ldots \\
 & a & b & a & hb & a & b & \ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Таблица 1: Таблица T

то есть

$$t_{j\lambda} = \begin{cases} a, \text{ если } \lambda \text{ чётно и } j \neq \lambda, \\ ha, \text{ если } \lambda \text{ чётно и } j = \lambda, \\ b, \text{ если } \lambda \text{ нечётно и } j \neq \lambda, \\ hb, \text{ если } \lambda \text{ нечётно и } j = \lambda. \end{cases}$$

Элементы матрицы P определим рекуррентно, полагая $p_{0j} = e$ для всех $j \in \mathbb{N}_0$ и $p_{\lambda+1,j} = t_{j\lambda}^{-1} p_{\lambda j}$ $(\lambda, j \in \mathbb{N}_0)$.

Пусть $S = \mathcal{M}(S_3, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0, P)$, где P определена выше. Правый идеал

$$R_0 = \{(g)_{0\lambda} | g \in G, \lambda \in \Lambda\}$$

полугруппы S будем рассматривать как полигон над S. Рассмотрим конгруэнцию ρ над R_0, определённую по формуле 7, которую мы в нашем случае перепишем в виде

$$((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\mu}) \in \rho \Leftrightarrow \forall j \in I \ p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} \in g_1^{-1} H g_2. \tag{8}$$

Положим $X = R_0/\rho$.

Предложение 5. *X – бесконечный полигон над полугруппой $S = \mathcal{M}(S_3, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0, P)$, причём $\operatorname{Con} X = \{\Delta_X, \nabla_X\}$.*

Доказательство. Докажем вначале, что X бесконечен. Для этого достаточно доказать, что $((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\mu}) \notin \rho$ при $|\lambda - \mu| \geqslant 2$ и любых $g_1, g_2 \in G$. Можно считать, что $\mu = \lambda + k$, где $k \geqslant 2$. Рассмотрим выражение $p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1}$. Преобразуем его: $p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1} = p_{\lambda j} p_{\lambda+k,j}^{-1} = p_{\lambda j} p_{\lambda+1,j}^{-1} \cdot p_{\lambda+1,j} p_{\lambda+2,j}^{-1} \cdot \ldots \cdot p_{\lambda+k-1,j} p_{\lambda+k,j}^{-1} =$

$t_{j\lambda}t_{j,\lambda+1}\dots t_{j,\lambda+k-1}$. Возьмём следующие значения индекса j: $j = \lambda, j = \lambda+1, j = \lambda+2$. Будем считать, что λ – чётное число (случай нечётного λ рассматривается аналогично). Рассмотрим фрагмент таблицы T:

$$\begin{array}{lccccc} & \lambda & & & & \lambda+k \\ j=\lambda & ha & b & a & b & \dots \\ j=\lambda+1 & a & hb & a & b & \dots \\ j=\lambda+2 & a & b & ha & b & \dots \end{array}$$

Имеем:

$$p_{\lambda\lambda}p_{\mu\lambda}^{-1} = ha \cdot b \cdot a \cdot w,$$

$$p_{\lambda,\lambda+1}p_{\mu,\lambda+1}^{-1} = a \cdot hb \cdot a \cdot w,$$

$$p_{\lambda,\lambda+2}p_{\mu,\lambda+2}^{-1} = a \cdot b \cdot ha \cdot w,$$

где w – некоторый элемент группы G. Нетрудно проверить, что элементы $haba$, $ahba$ и $abha$ различны. Следовательно, при $|\lambda-\mu| \geqslant 2$ множество $\{p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} | i \in I\}$ содержит 3 различных элемента, поэтому $\{p_{\lambda j}p_{\mu j}^{-1} | i \in I\} \not\subseteq \rho$. таким образом, X – бесконечный полигон.

Докажем теперь, что X конгруэнц-простой. По лемме 10 ρ – наибольшая конгруэнция полигона R_0, соответствующая подгруппе H. Пусть $\rho' \in \operatorname{Con} R_0$ и $\rho' \supset \rho$. Тогда ρ' соответствует некоторой подгруппе $H' \supset H$. Нетрудно видеть, что H – максимальная собственная подгруппа группы S_3, поэтому $H' = S_3$.

Из таблицы T видно, что

$$\{p_{\lambda j}p_{\lambda+1,j}^{-1} | j \in I\} = \begin{cases} \{a, ha\} \text{ при чётном } \lambda, \\ \{b, hb\} \text{ при нечётном } \lambda. \end{cases}$$

Значит, при чётном λ мы имеем: $p_{\lambda j}p_{\lambda+1,j}^{-1} \in Ha$ при всех $j \in I$, а при нечётном λ имеем включение $p_{\lambda j}p_{\lambda+1,j}^{-1} \in Hb$ при всех $j \in I$. Таким образом, для любого $\lambda \in \Lambda$ существуют $g_1, g_2 \in G$ такие, что $((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\lambda+1}) \in \rho$. Так как $\rho' \supset \rho$ и ρ – наибольшая конгруэнция, соответствующая подгруппе H, то по лемме 10 существуют элементы $\lambda \in \Lambda$ и $g_1, g_2 \in G$ такие, что $((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\lambda}) \in \rho'$ и $Hg_1 \neq Hg_2$. Лемма 9 показывает теперь, что существует подгруппа H' группы G такая, что

$$((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\lambda}) \in \rho' \Leftrightarrow H'a = H'b.$$

Так как $\rho' \supset \rho$, то $H' \supset H$. Но H – максимальная собственная подгруппа, следовательно, $H' = G$. Таким образом, $((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\lambda}) \in \rho'$ при любых $\lambda \in \Lambda$ и $g_1, g_2 \in G$. Ранее мы доказали, что $((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0,\lambda+1}) \in \rho$ при любом λ и подходящем выборе элементов $g_1, g_2 \in G$. Подводя итог этим рассуждениям, мы получаем, что $((g_1)_{0\lambda}, (g_2)_{0\mu}) \in \rho'$ при любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $g_1, g_2 \in G$. Таким образом, $\rho' = \nabla_{R_0}$. Переходя к полигону $X = R_0/\rho$, мы заключаем, что полигон X не имеет нетривиальных конгруэнций. То есть $\operatorname{Con} X = \{\Delta_x, \nabla_x\}$.

Следствие 1. *Существует вполне простая полугруппа $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ с конечной группой G и бесконечными множествами I и Λ и бесконечный полигон X над S такой, что решётка $\operatorname{Con} X$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.*

В заключение скажем несколько слов о вполне простых полугруппах $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, у которых группа G бесконечна. Здесь бесконечные полигоны X с решёткой конгруэнций $\mathrm{Con}\, X$, удовлетворяющей нетривиальному тождеству, существуют даже в случае когда $|I|$, $|\Lambda| < \infty$. Действительно, пусть $|I| = |\Lambda| = 1$ и $G = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ – квазициклическая группа. Тогда $S \cong G$, и решётка конгруэнций полигона S (над S) изоморфна решётке подгрупп группы G. Хорошо известно, что решётка $\mathrm{Sub}\, \mathbb{Z}_{p^\infty}$ является бесконечной цепью, а значит, удовлетворяет нетривиальному тождеству (скажем, тождеству дистрибутивности). Впрочем, любая абелева группа имеет модулярную решётку конгруэнций, а значит, в ней выполняется нетривиальное тодлество. $\square$

Список литературы

[1] И.Б. Кожухов А.В. Решетников. Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями. *Фундамент. и прикл. матем.*, 16(3):161–192, 2010.

[2] А.А. Степанова Д.О. Птахов. Решётки конгруэнций полигонов. *Дальневосточный математический журнал*, 13(1):107–115, 2013.

[3] А.Р. Халиуллина. Условия модулярности решётки конгруэнций полигонов над полугруппой правых или левых нулей. *Дальневосточный математический журнал*, 15(1):102–120, 2015.

[4] George Gratzer. *Lattice Theory: Foundation.* Birkhauser, 2011.

[5] Кон П. *Универсальная алгебра.* М.:Мир, 1969.

[6] Скорняков Л.А. *Элементы теории структур.* М.: Наука, 1970.

[7] Sachs D. Identities in finite partition lattices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(6):944–945, 1961.

[8] Мальцев А.И. *Алгебраические системы.* М.:Наука, 1970.

[9] Клиффорд А. Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп.* М.:Мир, 1964.

[10] Kilp M., Knauer U., and Mikhalev A.V. *Monoids, acts and categories.* N.Y. – Berlin, Walter de Gruyter, 2000.

[11] Avdeyev A.Yu. Kozhukhov I.B. Acts over completely 0-simple semigroups. *Acta Cybernetica*, 14(4):523–531, 2000.

[12] Robert H. Oehmke. Right congruences and semisimplicity for rees matrix semigroups. *Pacific Journal of Mathematics*, 54(2):143–163, 1974.