# Teoria dos Grafos e Computabilidade
# Resumos

Pedro Marçal Lima

# Contents

# Chapter 1

# Introdução

## 1.1 O Que é um Grafo?

**Definition 1.1: Grafo**

Um grafo é um conjunto de pontos (vértices) e suas relações (arestas):

$$G = (V, E)$$

onde:

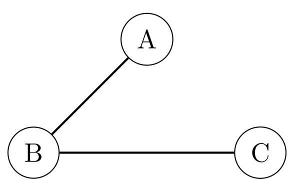
$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \quad E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots\}$$

## 1.2 Grafo não-direcionado

Um grafo não-direcionado, se trata de um grafo

$$G = (V, E)$$

em que suas arestas $(v_i, v_j)$ e $(v_j, v_i)$ são idênticas, ou seja, não importa a direção da aresta, qualquer aresta pode ser tanto de "ida" quanto de "volta".




**Definição 1.2.1: Grafo Não Direcionado**

$$G = (V, E)$$

onde:

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ E &= \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V\} \\ E &\subseteq V \times V \end{aligned}$$

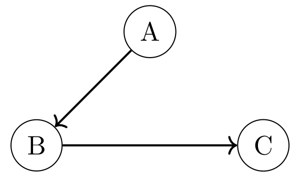
$$\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$$

## 1.3 Grafo direcionado

Um grafo direcionado, se trata de um grafo

$$G = (V, E)$$

em que suas arestas $(v_i, v_j)$ e $(v_j, v_i)$ são diferentes, ou seja, a direção da aresta é relevante, sendo assim, considerada uma aresta de saída ou entrada em relação a um vértice.




**Definição 1.3.1: Grafo Direcionado**

$$G = (V, E)$$

onde:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$
$$E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$$
$$E \subseteq V \times V$$

$$(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$$

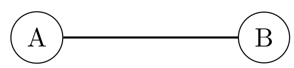
**Note:-**

Importante notar que, na representação de arestas, utiliza-se de {} para represenar um par não ordenado(a ordem não importa), e () para representar um par ordenado(a ordem importa)

## 1.4 Conceitos de vértices

### 1.4.1 Vértices adjacentes(vizinhos)

Vértices podem ser considerandos adjacentes ou vizinhos caso possuam uma aresta de ligação entre eles




**Definition 1.2: Vértices adjacentes**

Dado dois vértices:

$$v_i \text{ e } v_j$$

onde:

$$v_i \wedge v_j \in V$$

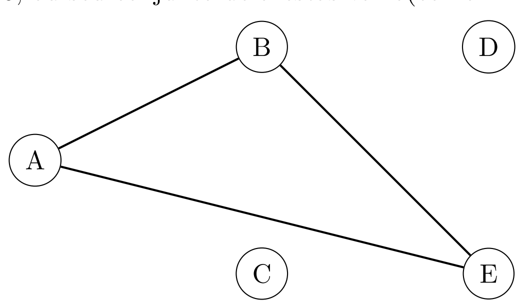
$$(v_i, v_j) \in E$$

Entende-se que:

$$v_i \leftrightarrow v_j$$

### 1.4.2 Vértice isolado

É um vértice v que possui $d(v) = 0$, ou seu conjunto de arestas vazio(como D e C no grafo abaixo).



**Definition 1.3: Vértice Isolado**

Dado um grafo

$$G = (V, E)$$

onde:

$$v \in V$$

temos que:

$$\begin{cases} \forall u \in V, \quad \{v, u\} \notin E & \text{(se } G \text{ é não direcionado)} \\ \forall u \in V, \quad (u, v) \notin E \land (v, u) \notin E & \text{(se } G \text{ é direcionado)} \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} d(v) = 0 & \text{(se } G \text{ é não direcionado)} \\ d^+(v) + d^-(v) = 0 & \text{(se } G \text{ é direcionado)} \end{cases}$$

Portanto, podemos concluir que $v$ é um vértice isolado, pois:

$$N(v) = \emptyset$$

**Note:-**

A expressão $N(v)$ se refere ao conjunto vizinhança de um vértice (neighborhood), ou seja, os vértices que ele possui ligação por uma aresta

## 1.5 Aresta incidente

Caso um vértice v, seja o vértice final de uma aresta $e = u, v$, $e$ é incidente em $v$ a partir de $u$

**Definition 1.4: Aresta incidente**

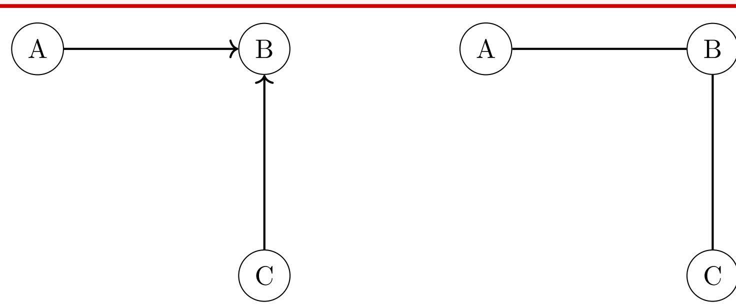
Em um grafo G = (V, E), uma aresta incidente $e$ em $v$, é uma aresta $e = (u, v)$


## 1.6 Arestas adjacentes(vizinhas)

Arestas não paralelas podem ser consideradas adjacentes ou vizinhas caso sejam incidentes em um vértice comum

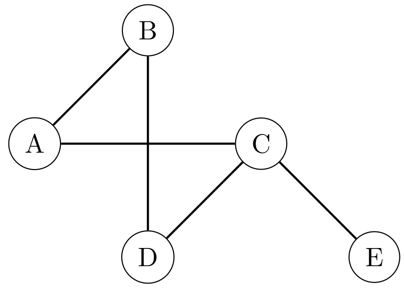
**Definition 1.5: Arestas adjacentes**

Em um grafo $G = (V, E)$ é um par de arestas $e_1 = (u, v)$ $e_2 = (x, v) \mid e_1 \land e_2 \in E$




## 1.7 Grafo Simples

Um grafo simples é um grafo que não possui nem loops nem arestas parelelas



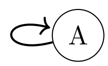

### 1.7.1 Loop

Um loop se trata de uma aresta associada a um par de vértices $(v_i, v_i)$

**Definition 1.6: Loop**

Considerando um vértice $v_i$, um loop será definido por:

$$E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \mid v_i = v_j\}$$




### 1.7.2 Arestas Parelelas

Arestas Paralelas ocorrem quando existe mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices

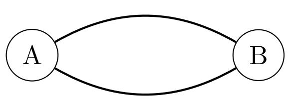
**Definição 1.7.1: Arestas Paralelas**

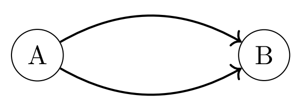
Para um Vértice $V_i$

$$E = \{(v_i, v_j), (v_i, v_j), \dots\}$$

Onde $E$ é o conjunto de arestas tal que:

$$E \subseteq V \times V$$

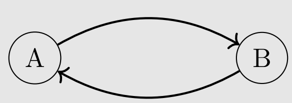



**Note:-**

Importante ressaltar que as arestas para serem consideradas paralelas em um grafo direcionado, devem possuir o mesmo sentido/direção

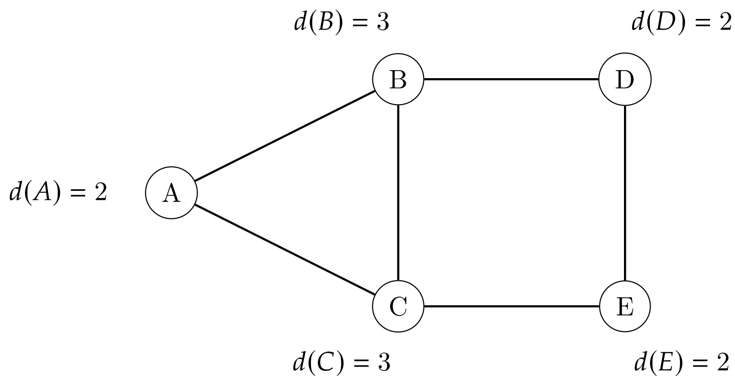
Exemplo de grafo sem arestas parelelas:




## 1.8 Graus

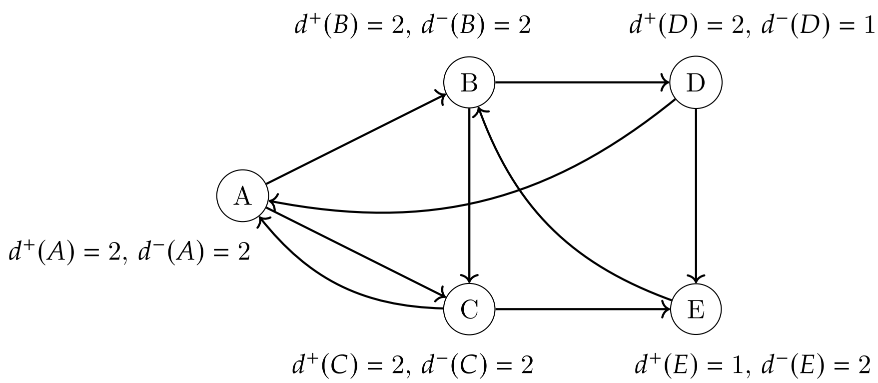
### 1.8.1 Grafo não direcionado

Em um grafo não direcionado G =(V, E) , a quantidade de arestas em um vértice determina o seu grau $d(v)$




### 1.8.2 Grafo direcionado

Em um grafo direcionado, existem dois tipos de graus, os de saída, que se referem as arestas que saem do determinado vértice $d^+(v)$, e de entrada, que se referem as arestas que chegam ao vértice $d^-(v)$




## 1.9 Fecho Transitivo Direto

Para se falar de fecho transitivo direto, é a mesma coisa que falar da atingibilidade de um vértice, ou seja, quem é alcançavél a partir de um vértice $v$

**Definition 1.7: Fecho Transitivo Direto**

Dado um grafo $G = (V, E)$
o seu fecho = v — vi, vj C E

## 1.10 Caminho

Caminho é uma sequência de vértices e arestas que começa e termina em um determinado vértice, que casso possua determinada características, possuirá um nome diferente, que são:

### 1.10.1 Walk (Caminho)

Um caminho é considerado ”Walk”, para qualquer caminho dentro de um grafo, sem nenhuma restrição além da definição básica de caminho.

**Definition 1.8: Walk**

Dado um caminho

$$P = v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k$$

onde:

$$v_i \in V, \quad e_i \in E,$$

conclui-se que:

$$P = W$$

### 1.10.2 Trail (Trilha)

Um caminho é considerado "Trail", caso não possua repetição de arestas

**Definition 1.9: Trail**

Dado um caminho:

$$P = v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k,$$

onde:

$$v_i \in V, \quad e_i \in E,$$

se:

$$e_i \neq e_j, \forall i \neq j,$$

então:

$$P = T.$$

### 1.10.3 Path (Caminho simples)

Um caminho é considerado Path, caso não possua repetição nem de vértices nem de arestas

**Definition 1.10: Path**

Dado um caminho:

$$P = v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k,$$

onde:

$$v_i \in V, \quad e_i \in E,$$

se:

$$e_i \neq e_j, \forall i \neq j,$$

e:

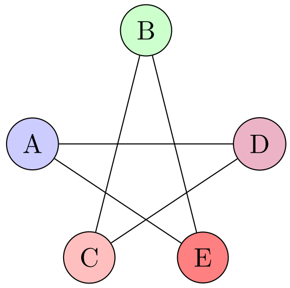
$$v_i \neq v_j, \forall i \neq j,$$

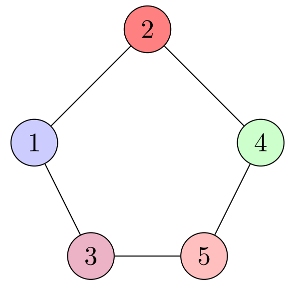
então:

$$P = P_{simples}.$$

## 1.11 Isomorfismo

Dois grafos $G$ e $H$ são considerados isomorfos caso seja possível fazer uma relação de vértice para vértice e suas arestas entre todos os vértice de V, com as incidências também se mantendo




**Definition 1.11: Isomorfismo**

Dado dois grafos

$$G = (V, E) \text{ e } H = (V, E)$$

que possuem:

$$\text{Seq}_G = (d(u_1), d(u_2), \ldots, d(u_n))$$
$$\text{Seq}_H = (d(u_1), d(u_2), \ldots, d(u_n))$$

com as seguintes propriedades:

$$|V_G| = |V_H|$$
$$|E_G| = |E_H|$$
$$\text{Seq}_G = \text{Seq}_H$$
$$f : V_G \to V_H$$

tal que, para quaisquer vértices $u, v \in V_G$, temos:

$$\{u, v\} \in E_G \iff \{f(u), f(v)\} \in E_H.$$

apesar de não ser o suficiente para garantir, conclui-se que existe a possibilidade de:

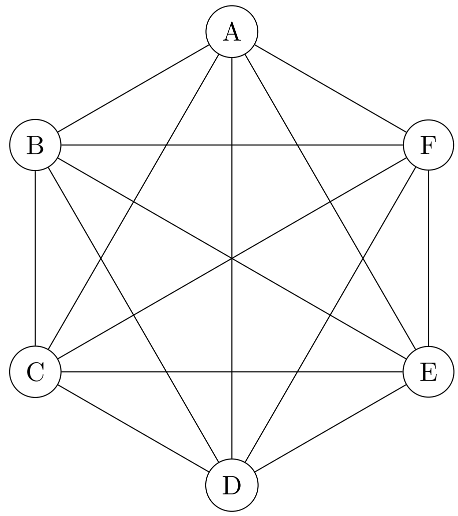
$$G \cong H$$

**Note:-**

Essa definição apresenta propriedades necessárias, mas não suficientes, para garantir o isomorfismo. Mesmo que a correspondência dos vértices, arestas e graus seja necessária, não é suficiente para concluir o isomorfismo sem a condição de preservação de adjacência(relação entre arestas).

## 1.12 Grafo Completo

Um grafo completo é um grafo que possui em seu conjunto de arestas E todas arestas possíveis do grafo.




**Definition 1.12: Grafo Completo**

Dado um grafo

$$G = (V, E)$$

onde:

$$\mid E \mid = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

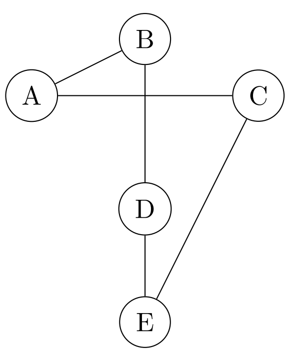
$$\forall v \in V, \quad d(v) = n - 1$$

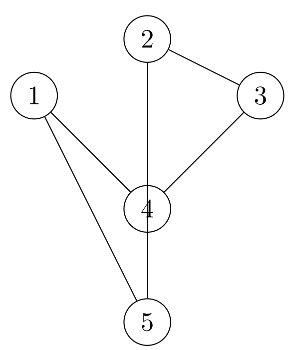
Conclui-se que:

$$G = K_n$$

## 1.13 Grafo Complementar

Um grafo complementar de um Grafo $G = (V, E)$ é um grafo $G' = (V, E')$ em que suas arestas correpondem a todas arestas faltantes em G para se ter um grafo completo.




**Definition 1.13: Grafo Complementar**

Dado dois grafos

$$G = (V, E) \text{ e } G' = (V, E')$$

onde:

$$E \cap E' = \emptyset$$

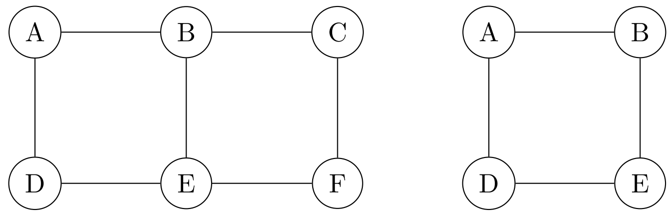
$$|E| + |E'| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

conclui-se que:

$$E' = \overline{E}$$

## 1.14 Subgrafo

Dizemos que um Grafo é subgrafo de outro grafo, caso todos elementos(vértices e arestas) do subgrafo façam parte do outro Grafo




**Definition 1.14: Subgrafo**

Dado dois grafos

$$G = (V, E) \text{ e } H = (V, E)$$

onde:

$$V_H \subseteq V_G$$

$$E_H \subseteq E_G$$

ou:

$$\forall e \in E_H,\ e \in E_G$$

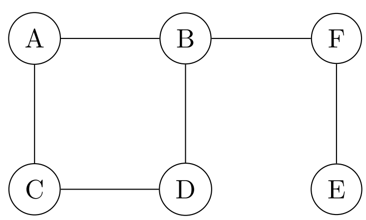
$$\forall v \in V_H,\ v \in V_G$$

Conclui-se que:

$$H \subseteq G$$

## 1.15 Ciclos

Um grafo possui ciclos caso caso possua um caminho que possui o mesmo vértice de início e fim Por exemplo o caminho: $P = A, AC, C, CD, D, DB, B, BA, A$




**Definition 1.15: Ciclo**

Dado um grafo

$$G = (V, E)$$

onde:

$$P = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \ldots, v_k, e_k, v_1$$

$$V' = \{v_2, v_3, \ldots, v_k\} \text{ (todos vértices menos o } v_1\text{)}$$

$$v_i \neq v_j,\ \forall v_i, v_j \in V',\ i \neq j$$

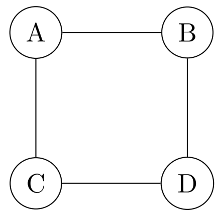
$$e_i \neq e_j,\ \forall e_i, e_j \in E,\ i \neq j$$

então:

$$P = C$$

## 1.16 Grafo Ciclo

Um grafo Ciclo é um grafo que possui um caminho ciclo com todos seus vértices, ou seja, ele inteiro é um ciclo.




**Definition 1.16: Grafo Ciclo**

Dado um grafo

$$G = (V, E)$$

onde:

$$G = \text{k-regular}$$

$$k = 2$$

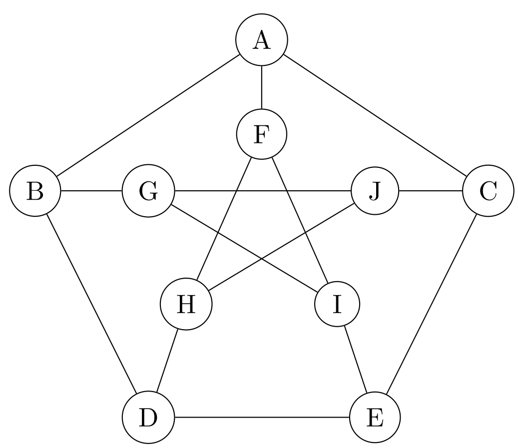
então:

$$G = C_n$$

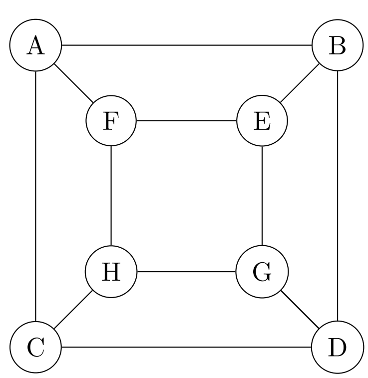
## 1.17 Grafo Regular

Um grafo regular é um grafo onde todos os vértices possuem o mesmo grau total

Grafo de Petersen(3-regular)




Grafo Cúbico(3-regular)



**Definition 1.17: Grafo K Regular**

Dado um grafo:

$$G = (V, E)$$

onde:

$$\forall v \in V, d(v) = k$$

ou seja:

$$\delta(G) = \Delta(G)$$

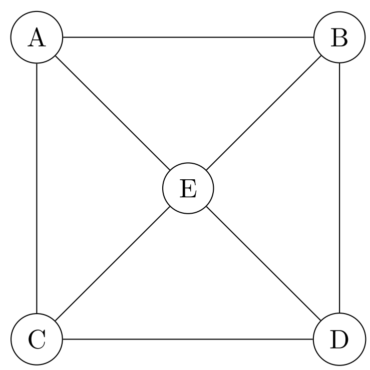
$$|E| = \frac{n \times k}{2}$$

Então:

$$G = \text{ k-regular graph(k é o grau)}$$

## 1.18 Grafo Roda

Um grafo roda é um grafo ciclo, que é adicionado um vértice novo ligado a todos os outros vértices do ciclo, se assemelhando a uma roda




**Definition 1.18: Grafo Roda**

Dado um grafo

$$G = (V, E)$$

em que

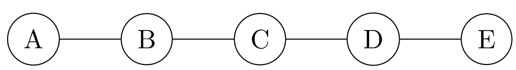
$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_c\}$$

$$v_c \in V,\ d(v_c) = \Delta(G) = n - 1,\ G[V \setminus \{v_c\}] = C_{n-1}$$

$$|E| = 2n - 2$$

## 1.19 Grafo Caminho

Um grafo caminho(Grafo Linear) é um grafo que pode ser representao linearmente, ou seja, é um grafo que a partir de uma de suas pontas(terminais) você alcança o outro terminal por meio de um caminho em linha reta.



**Definition 1.19: Grafo Caminho**

Dado um grafo

$$G = (V, E)$$

onde:

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

$$|E| = n - 1$$

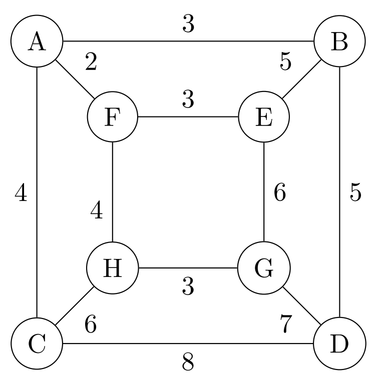
$$E' = \{\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}\}$$

$$\forall v \in E', d(v) = 2$$

$$d(v_1) = d(v_n) = 1$$

## 1.20 Grafo Ponderado

Um grafo ponderado é um grafo onde as arestas possuem um peso, ou seja, um valor atribuido a ela




**Definition 1.20: Grafo Ponderado**

Um grafo ponderado

$$G = (V, E, w)$$

Ocorre quando:

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$$

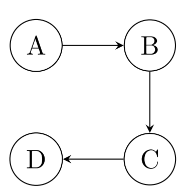
$$w : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w(v_1, v_2) = x, \quad w(v_2, v_3) = y$$

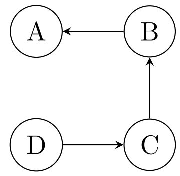
## 1.21 Grafo Transposto

Em um grafo direcionado(dirigido), o grafo transposto é o grafo obtido ao inverter a direção de todas arestas do grafo original.

**Grafo $G$:**




**Grafo $G^T$:**




**Definition 1.21: Grafo Transponsto**

Dado um grafo direcionado

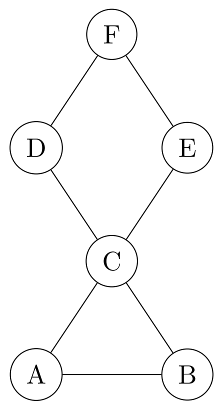
$$G = (V, E)$$

onde:

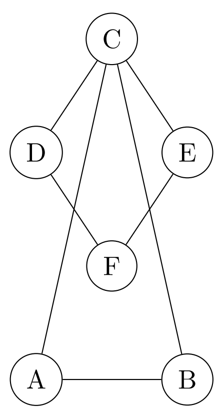
## 1.22 Planaridade

A planaridade em um Grafo, está associada a capacidade de representar um Grafo visualmente sem o cruzamento de arestas, o que garante que ele possa ser "desenhado" em um plano

**Grafo Planar:**




**Grafo Planar, porém representado de forma Não Planar:**




**Definition 1.22: Cruzamento de arestas**

Dado um grafo

$$G = (V, E)$$

## 1.23 Termos

# Chapter 2

# Algortimos

## 2.1 Busca em profundidade(DFS)

A busca em profundidade

# Chapter 3

## 3.1 Random Examples

**Definição 3.1.1: Limit of Sequence in $\mathbb{R}$**

Let $\{s_n\}$ be a sequence in $\mathbb{R}$. We say

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

where $s \in \mathbb{R}$ if $\forall$ real numbers $\epsilon > 0$ $\exists$ natural number $N$ such that for $n > N$

$$s - \epsilon < s_n < s + \epsilon \text{ i.e. } |s - s_n| < \epsilon$$

**Questão 1**

Is the set $x-$axis$\setminus\{$Origin$\}$ a closed set

***Solução:*** We have to take its complement and check whether that set is a open set i.e. if it is a union of open balls

**Note:-**

We will do topology in Normed Linear Space (Mainly $\mathbb{R}^n$ and occasionally $\mathbb{C}^n$)using the language of Metric Space

**Claim 3.1.1** Topology

Topology is cool

**Example 3.1.1** (Open Set and Close Set)

Open Set:
- $\phi$
- $\bigcup\limits_{x\in X} B_r(x)$ (Any $r > 0$ will do)
- $B_r(x)$ is open

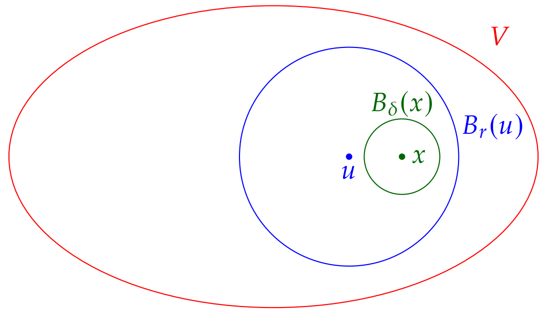
Closed Set:
- $X,\ \phi$
- $\overline{B_r(x)}$

$x-$axis $\cup$ $y-$axis

**Theorem 3.1.1**

If $x \in$ open set $V$ then $\exists$ $\delta > 0$ such that $B_\delta(x) \subset V$

***Proof:*** By openness of $V$, $x \in B_r(u) \subset V$




Given $x \in B_r(u) \subset V$, we want $\delta > 0$ such that $x \in B_\delta(x) \subset B_r(u) \subset V$. Let $d = d(u,x)$. Choose $\delta$ such that $d + \delta < r$ (e.g. $\delta < \frac{r-d}{2}$)

If $y \in B_\delta(x)$ we will be done by showing that $d(u,y) < r$ but

$$d(u,y) \leqslant d(u,x) + d(x,y) < d + \delta < r$$

😄

**Corollary 3.1.1**

By the result of the proof, we can then show...

**Lenma 3.1.1**

Suppose $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ is subspace of $\mathbb{R}^n$.

**Proposition 3.1.1**

$1 + 1 = 2$.

## 3.2 Random

**Definição 3.2.1: Normed Linear Space and Norm $\|\cdot\|$**

Let $V$ be a vector space over $\mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$). A norm on $V$ is function $\|\cdot\|$ $V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ satisfying

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0 \ \forall \ x \in V$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}(\text{or } \mathbb{C}),\ x \in V$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \ \forall \ x, y \in V$ (Triangle Inequality/Subadditivity)

And $V$ is called a normed linear space.
• Same definition works with $V$ a vector space over $\mathbb{C}$ (again $\|\cdot\| \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$) where 2 becomes $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \ \lambda \in \mathbb{C}$, $x \in V$, where for $\lambda = a + ib$, $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Example 3.2.1** ($p-$Norm)

$V = \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Define for $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_p = \left( |x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(In school $p = 2$)

**Special Case $p = 1$**: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$ is clearly a norm by usual triangle inequality.

**Special Case $p \to \infty$ ($\mathbb{R}^m$ with $\|\cdot\|_\infty$):** $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_m|\}$
For $m = 1$ these $p-$norms are nothing but $|x|$. Now exercise

**Questão 2**

Prove that triangle inequality is true if $p \geqslant 1$ for $p-$norms. (What goes wrong for $p < 1$ ?)

***Solução:*** **For Property 3 for norm-2**

**When field is $\mathbb{R}$ :**

We have to show

$$\begin{aligned}
&\sum_i (x_i + y_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_i x_i^2} + \sqrt{\sum_i y_i^2}\right)^2 \\
\implies &\sum_i (x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) \leqslant \sum_i x_i^2 + 2\sqrt{\left[\sum_i x_i^2\right]\left[\sum_i y_i^2\right]} + \sum_i y_i^2 \\
\implies &\left[\sum_i x_iy_i\right]^2 \leqslant \left[\sum_i x_i^2\right]\left[\sum_i y_i^2\right]
\end{aligned}$$

So in other words prove $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ where

$$\langle x, y\rangle = \sum_i x_iy_i$$

**Note:-**

- $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- $\langle \cdot, \cdot\rangle$ is $\mathbb{R}-$linear in each slot i.e.

$$\langle rx + x', y\rangle = r\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle \text{ and similarly for second slot}$$

Here in $\langle x, y\rangle$ $x$ is in first slot and $y$ is in second slot.

Now the statement is just the Cauchy-Schwartz Inequality. For proof

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

expand everything of $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle$ which is going to give a quadratic equation in variable $\lambda$

$$\begin{aligned}
\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle &= \langle x, x - \lambda y\rangle - \lambda\langle y, x - \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \lambda\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

Now unless $x = \lambda y$ we have $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle > 0$ Hence the quadratic equation has no root therefore the discriminant is greater than zero.

**When field is $\mathbb{C}$ :**

Modify the definition by

$$\langle x, y\rangle = \sum_i \overline{x_i}y_i$$

Then we still have $\langle x, x\rangle \geqslant 0$

## 3.3 Algorithms

**Algorithm 1:** what

```
Input: This is some input
Output: This is some output
/* This is a comment */

some code here;
x ← 0;
y ← 0;
if x > 5 then
|   x is greater than 5 ;                         // This is also a comment
else
|   x is less than or equal to 5;
end
foreach y in 0..5 do
|   y ← y + 1;
end
for y in 0..5 do
|   y ← y − 1;
end
while x > 5 do
|   x ← x − 1;
end
return Return something here;
```