

# TP1 X01

Philippe Marchner

5 October 2017

## 1 Introduction

### 1.1 Question 1

Soit le problème de Poisson:

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que:

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x, y) \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ A(x, y) \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1)$$

avec  $f \in L^2(\Omega)$ .

Formulation variationnelle:

Soit  $v \in H^1(\Omega)$ , en multipliant l'équation (1) par  $v$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , il vient:

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} uv \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (A(x, y) \nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (2)$$

En supposant que  $u$  et  $v$  soient suffisamment régulières (pour appliquer le théorème de Green), une intégration par parties donne:

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A(x, y) \nabla u \nabla v \, d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} A(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma}_{= 0 \text{ sur } \partial\Omega} = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad (3)$$

où  $\gamma$  est la mesure de Lebesgue sur  $\partial\Omega$ . La formulation variationnelle s'écrit alors:

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que:

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A(x, y) \nabla u \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (4)$$

Cette formulation peut se réécrire:

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que:

$$\forall v \in H^1(\Omega), a(u, v) = l(v). \quad (5)$$

Pour montrer que le problème est bien posé au sens de Hadamard, il faut vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. D'abord,  $a$  et  $l$  sont des opérateurs respectivement bilinéaire et linéaire par linéarité des opérateurs intégration et dérivation.

Continuité de  $l$ :

$$\forall v \in H^1(\Omega), |l(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, d\Omega \right| \stackrel{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \sup_{(x,y) \in \Omega} \text{ess } f(x, y) \|v\|_{L^2} \leq K \|v\|_{H^1} \quad (6)$$

Coercivité de  $a$ :

$$\forall u \in H^1(\Omega), a(u, u) = \int_{\Omega} A(x, y) |\nabla u|^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} |u|^2 \, d\Omega \geq c \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \geq \min(c, 1) \|u\|_{H^1}^2$$

Continuité de  $a$ :

$$\begin{aligned}
\forall u, v \in H^1(\Omega), |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A(x, y) \nabla u \nabla v \, d\Omega \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} uv \, d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} A(x, y) \nabla u \nabla v \, d\Omega \right| \\
&\leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\
&\leq (C + 1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Les hypothèses sont vérifiées, le problème est bien posé.

## 1.2 Questions 2 et 3

La formulation variationnelle discrète est:

Trouver  $u_h \in V_h$  tel que:

$$\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad (7)$$

où  $V_h \subset H^1(\Omega)$  est un espace de dimension finie.

Avec les notations de l'énoncé, il vient:

$$\forall v_h \in V_h, \int_{\Omega} u_h v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} A(x, y) \nabla u_h \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega. \quad (8)$$

Puis en considérant  $v_h = w_J$ ,

$$\int_{\Omega} \sum_{I=1}^N u_h(S_I) w_I w_J \, d\Omega + \int_{\Omega} A(x, y) \nabla \left( \sum_{I=1}^N u_h(S_I) w_I \right) \nabla w_J \, d\Omega = \int_{\Omega} f w_J \, d\Omega, \quad 1 \leq J \leq N. \quad (9)$$

L'équation peut se mettre sous la forme suivante:

$$\sum_{I=1}^N \left( \underbrace{\int_{\Omega} w_I w_J \, d\Omega}_{\mathbb{M}_{IJ}} + \underbrace{\int_{\Omega} A(x, y) \nabla w_I \nabla w_J \, d\Omega}_{\mathbb{K}_{IJ}} \right) \underbrace{u_h(S_I)}_{\vec{U}_I} = \underbrace{\int_{\Omega} f w_J \, d\Omega}_{\vec{L}_J}, \quad 1 \leq J \leq N. \quad (10)$$

La formulation variationnelle discrete s'écrit alors sous la forme d'un système linéaire:

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K}) \vec{U} = \vec{L}. \quad (11)$$

## 2 Maillages

### 2.1 Questions 4 et 5

Cinq maillages de taille différentes sont générés via MATLAB. Les trois maillages les plus larges sont montrés sur la figure 1. Les maillages pour  $h = 0.02$  et  $h = 0.01$  contiennent respectivement 13470 et 53263 points.

## 3 Calcul des matrices elementaires

### 3.1 Question 6

L'aire du triangle est notée  $A$  et vaut  $A = |D|/2$ . Pour  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $w_I|_{T_I} = \lambda_I$ . Avec l'aide de la formule de quadrature pour  $\mathbb{P}^2$ , on obtient apres calculs,

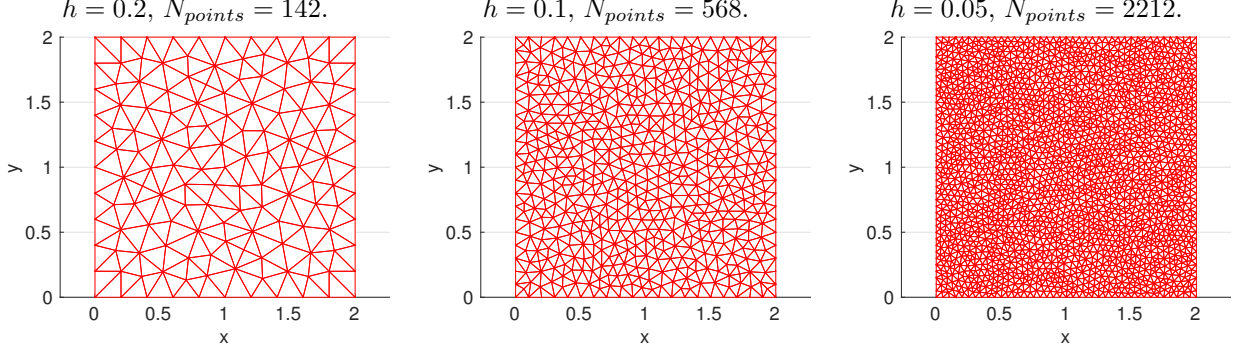


Figure 1: Maillages considérés pour la résolution du problème (1).

$$\int_{T_i} w_I w_J = \int_{T_i} \lambda_I \lambda_J = \begin{cases} A/6, & i = j \\ A/12, & i \neq j \end{cases} \quad (12)$$

La matrice de masse élémentaire s'écrit:

$$\mathbb{M} = \frac{|D|}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Pour la matrice de rigidité, on calcule les gradients des  $\lambda_I$  pour  $I = \{1, 2, 3\}$  afin d'évaluer les intégrales  $\int_{T_i} \nabla \lambda_I \nabla \lambda_J$ . Avec la formule de quadrature pour  $\mathbb{P}^0$ , on trouve alors la matrice de rigidité:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2|D|} \begin{pmatrix} y_{23}^2 + x_{23}^2 & y_{23} y_{31} + x_{23} x_{31} & y_{23} y_{12} + x_{23} x_{12} \\ y_{23} y_{31} + x_{23} x_{31} & y_{31}^2 + x_{31}^2 & y_{31} y_{12} + x_{31} x_{12} \\ y_{23} y_{12} + x_{23} x_{12} & y_{31} y_{12} + x_{31} x_{12} & y_{12}^2 + x_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

## 4 Assemblage des matrices

### 4.1 Question 9 et 10

En remplaçant  $f$  par son interpolée  $\pi_h f$ , il est possible d'écrire le second membre de la formulation variationnelle avec la matrice de masse:

$$\text{pour } 1 \leq J \leq N, \quad \vec{L} = \int_{\Omega} (\pi_h f) w_J d\Omega = \int_{\Omega} \left( \sum_{I=1}^N \pi_h f(S_I) w_I \right) w_J d\Omega = \sum_{I=1}^N \mathbb{M}_{IJ} \pi_h f(S_I) = \mathbb{M} \overrightarrow{\pi_h f} \quad (15)$$

## 5 Validation

### 5.1 Question 10

En remplaçant la solution exacte  $u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$  dans (1), le calcul de  $f$  donne:

$$f(x, y) = (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}. \quad (16)$$

## 5.2 Question 11 et 12

Le calcul de l'erreur pour la norme  $L^2(\Omega)$  donne:

$$\begin{aligned}
\|\pi_h u - u_h\|_{L^2}^2 &= \langle \pi_h u - u_h, \pi_h u - u_h \rangle_{L^2}^2 \\
&= \left\langle \sum_{I=1}^N (\pi_h u - u_h)_I w_I, \sum_{J=1}^N (\pi_h u - u_h)_J w_J \right\rangle_{L^2}^2 \\
&= \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N (\pi_h u - u_h)_I (\pi_h u - u_h)_J \langle w_I, w_J \rangle_{L^2}^2 \\
&= {}^t(\pi_h U - U_h) \mathbb{M}(\overrightarrow{U - U_h})
\end{aligned}$$

Un calcul similaire conduit à:

$$|\pi_h u - u_h|_1^2 = {}^t(\pi_h U - U_h) \mathbb{K}(\overrightarrow{U - U_h})$$

Sur la figure (2), on vérifie que l'erreur décroît proportionnellement à  $h$  avec la semi-norme  $H^1(\Omega)$  et à  $h^2$  avec la norme  $L^2(\Omega)$ .

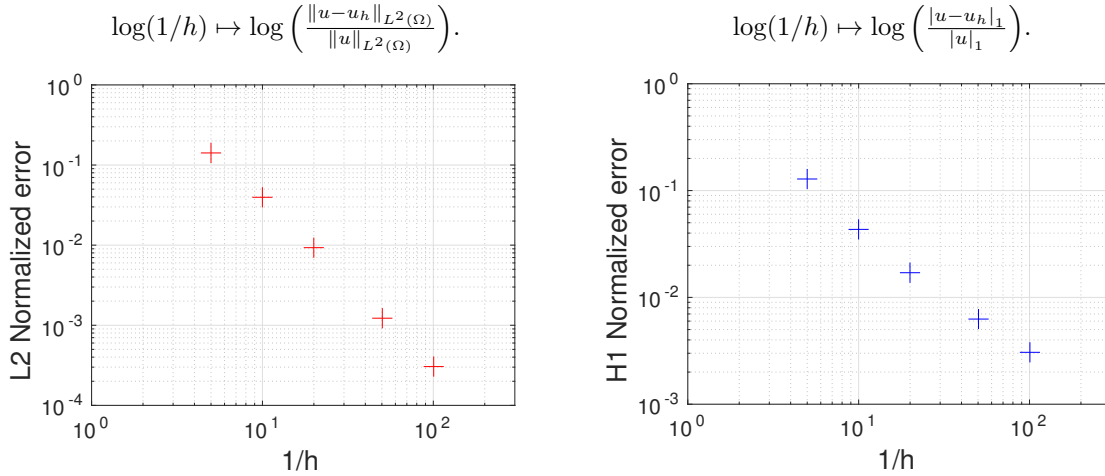


Figure 2: Erreurs selon la norme  $L^2$  et la semi-norme  $H^1$  entre la solution approchée et la solution exacte en fonction du pas de maillage.

## 6 Cas variable

Cf code MATLAB pour la construction de la nouvelle matrice élémentaire. Pour la validation, on considère la même solution exacte que pour la partie précédente. Le second membre est calculé de manière formelle. Le terme source a la forme suivante:

$$A(x, y) = \sin(\psi \pi x) \sin(\psi \pi y) + 2 \quad (17)$$

La solution approchée ainsi que les erreurs  $L^2$  et semi- $H^1$  respectives sont tracées sur la figure (4) pour différentes valeurs de  $\psi$ .

Remarques sur les figures obtenues:

- l'erreur  $L^2$  entre la solution approchée et la solution exacte semble croître lorsque  $\psi$  croît (sauf pour le cas  $\psi = 1/2$ , où l'erreur est encore plus grande).
- lorsque  $\psi$  est suffisamment petit, la solution approchée tend vers la solution exacte et on retrouve un comportement similaire au cas sans terme source.

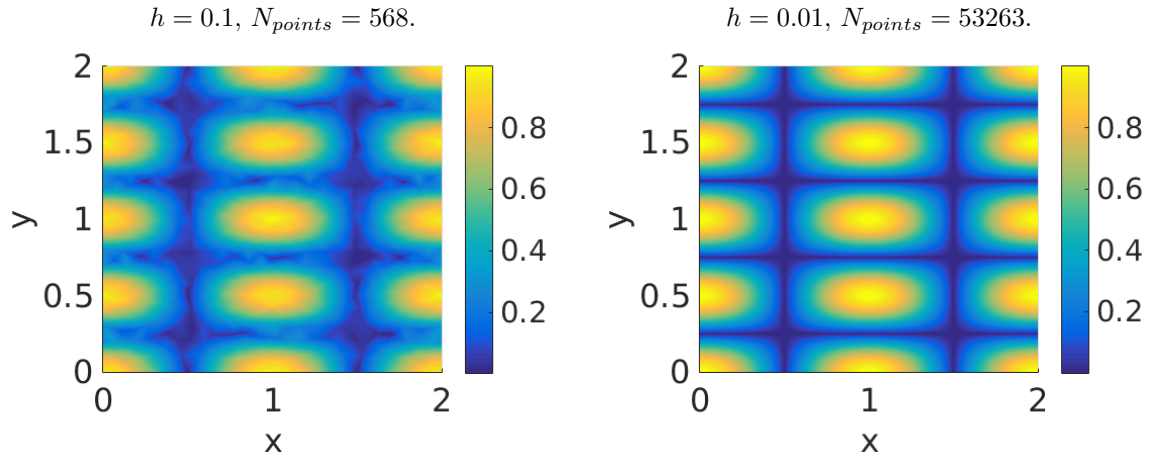


Figure 3: Solution approchée  $u_h$  du problème (1) sans terme source pour deux tailles de maille différentes.

La solution approchée semble "se déformer" à cause de l'ajout du terme source. Le terme source semble induire des oscillations dans la solution approchée et le second membre  $f$  devient de plus en plus complexe. Il faudra raffiner le maillage si la fréquence des oscillations du terme source augmente.

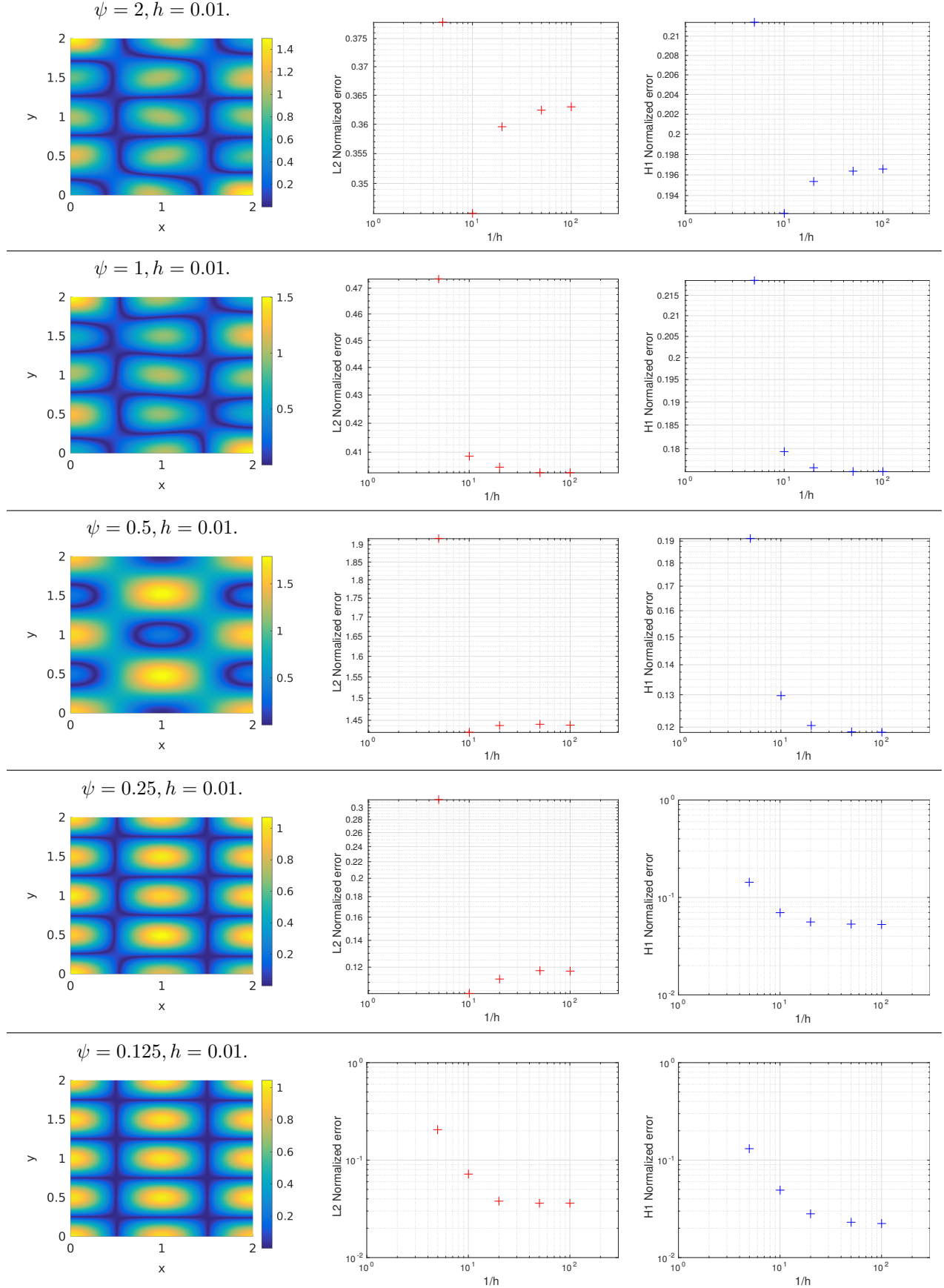


Figure 4: Résolution du problème (1) avec  $\delta$  ferme source: solution approchée et erreurs.