

TP2 X01

Philippe Marchner

19 October 2017

1 Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet et coefficients variables

1.1 Formulation variationnelle - Caractère bien posé

Soit le problème de Poisson:

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que:

$$\forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} u(x, y) - \nabla \cdot (A(x, y) \nabla u(x, y)) = f & \text{dans } \Omega \\ u(x, y) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, Ω un ouvert borné à frontière polygonale de \mathbb{R}^2 .

Formulation variationnelle:

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, en multipliant l'équation (1) par v et en intégrant sur le domaine Ω , il vient:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} uv \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (A \nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega. \quad (2)$$

En supposant que u et v soient suffisamment régulières (pour appliquer le théorème de Green), une intégration par parties donne:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v \, d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} A \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma}_{= 0 \text{ car } v \in H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad (3)$$

où γ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$. Le terme de bord en $\partial\Omega$ est nul car l'espace des fonctions tests est choisi de sorte à rendre nulles les fonctions tests au bord du domaine de calcul. La formulation variationnelle s'écrit alors:

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \underbrace{\int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v \, d\Omega}_{a(u, v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, d\Omega}_{l(v)}. \quad (4)$$

Cette formulation peut se réécrire:

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = l(v). \quad (5)$$

Pour montrer que le problème est bien posé au sens de Hadamard, il faut vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. D'abord, a et l sont des opérateurs respectivement bilinéaire et linéaire par linéarité des opérateurs intégration et dérivation.

Comme Ω est borné, l'inégalité de Poincaré suivante est valable:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \exists D > 0; \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq D \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6)$$

On peut alors choisir la norme dans $H_0^1(\Omega)$ telle que: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

Continuité de l :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v \, d\Omega \right| \underset{(\text{Cauchy-Schwartz})}{\leq} \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{(x,y) \in \Omega} f(x,y) \|v\|_{L^2} \leq K \|v\|_{L^2} \\ &\underset{(\text{Poincaré})}{\leq} K' \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Coercivité de a :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), a(u, u) = \int_{\Omega} A |\nabla u|^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} |u|^2 \, d\Omega \geq c \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \geq c \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Continuité de a :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H_0^1(\Omega), |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v \, d\Omega \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} uv \, d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v \, d\Omega \right| \\ &\underset{(\text{Cauchy-Schwartz})}{\leq} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\underset{(\text{Poincaré})}{\leq} D' \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + C \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \\ &\leq (D' + C) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Les hypothèses sont vérifiées, le problème est bien posé.

1.2 Formulation variationnelle discrète

La formulation variationnelle discrète est:

Trouver $u_h \in V_h^0$ tel que:

$$\forall v_h \in V_h^0, a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad (7)$$

où $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$ est un espace de dimension finie.

Avec les notations de l'énoncé, il vient:

$$\forall v_h \in V_h^0, \int_{\Omega} u_h v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} A \nabla u_h \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega. \quad (8)$$

Puis en considérant $v_h = w_J$ et en exprimant u_h dans sa base d'interpolation,

$$\int_{\Omega} \sum_{I=1, \text{Refneu}(S_I)=0}^N u_h(S_I) w_I w_J \, d\Omega + \int_{\Omega} A \nabla \left(\sum_{I=1, \text{Refneu}(S_I)=0}^N u_h(S_I) w_I \right) \nabla w_J \, d\Omega = \int_{\Omega} f w_J \, d\Omega, \quad 1 \leq J \leq N. \quad (9)$$

L'équation peut se mettre sous la forme suivante:

$$\sum_{I=1, \text{Refneu}(S_I)=0}^N \left(\underbrace{\int_{\Omega} w_I w_J \, d\Omega}_{\mathbb{M}_{IJ}^0} + \underbrace{\int_{\Omega} A \nabla w_I \nabla w_J \, d\Omega}_{\mathbb{K}_{IJ}^0} \right) \underbrace{u_h(S_I)}_{\tilde{U}_I^0} = \underbrace{\int_{\Omega} f w_J \, d\Omega}_{\tilde{L}_J^0}, \quad 1 \leq J \leq N. \quad (10)$$

La formulation variationnelle discrete s'écrit alors sous la forme d'un système linéaire:

$$(\mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0) \tilde{U}^0 = \tilde{L}^0. \quad (11)$$

1.3 Maillages

Quatre maillages de taille différentes sont générés via MATLAB. Les trois maillages les plus larges sont montrés sur la figure 1. Le maillage pour $h = 0.02$ contient 13470 points.

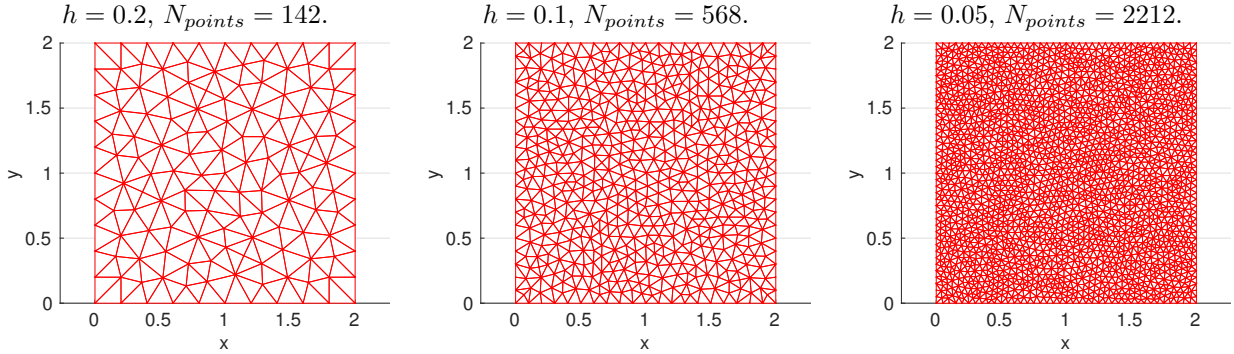


Figure 1: Maillages considérés pour la résolution de la formulation variationnelle discrète (7).

1.4 Assemblage des matrices et vecteur second membre

Cf code MATLAB. On construit la matrice de projection \mathbb{P} de taille $N_0 \times N$ de sorte que:

$$\underbrace{\mathbb{P}}_{N_0 \times N} = \left[\underbrace{0}_{N_0 \times N - N_0}, \underbrace{\mathbb{I}}_{N_0 \times N_0} \right],$$

avec N_0 le nombre de noeuds avec la référence 0. La matrice de projection est composée d'une matrice identité de taille N_0 est d'une matrice nulle de taille $N_0 \times N - N_0$. Lorsque cette matrice sera multipliée par un vecteur de taille N , tous les termes de 1 à $N - N_0$ (qui sont les termes de bords) seront supprimés.

1.5 Validation du code

On résout le problème avec $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$ comme solution exacte. On choisit le terme source tel que:

$$A(x, y) = (\sin(\psi\pi x)\sin(\psi\pi y) + 2)\mathbb{I}_2,$$

où \mathbb{I}_2 est la matrice identité.

Dans ce cas, pour $\psi = 0$, le second membre f vaut:

$$f(x, y) = (1 + 10\pi^2)\sin(\pi x)\sin(2\pi y).$$

On trace les erreurs relatives en norme L^2 et semi-norme H^1 pour différentes valeurs de h . lorsque $\psi = 0$, l'erreur décroît bien en fonction de h , de manière linéaire selon la semi-norme H^1 et quadratique selon la norme L^2 . La figure (3) montre l'allure de la solution approchée u_h pour différentes valeurs de ψ . Contrairement au compte rendu du TP1, le second membre f reste cette fois constant.

2 Problème de Poisson dans un carré avec conditions périodiques et coefficients variables

Le problème à résoudre est:

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que:

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x, y)\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ A(x, y)\nabla u \cdot e_x|_{x=0} = A(x, y)\nabla u \cdot e_x|_{x=L} \\ A(x, y)\nabla u \cdot e_y|_{y=0} = A(x, y)\nabla u \cdot e_y|_{y=L} \\ u|_{y=0} = u|_{y=L} \text{ et } u|_{x=0} = u|_{x=L} \end{cases},$$

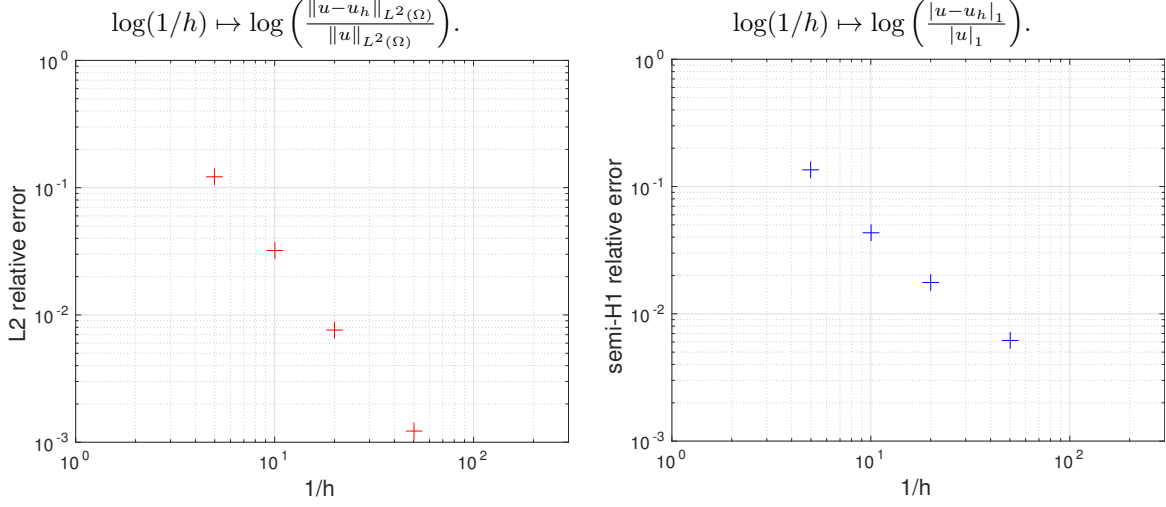


Figure 2: Erreurs selon la norme L^2 et la semi-norme H^1 entre la solution approchée et la solution exacte en fonction du pas de maillage.

avec $\Omega = [0, L]^2$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note par $H_{\#}^1(\Omega)$ l'espace H^1 des fonctions périodiques sur Ω . La norme dans $H_{\#}^1(\Omega)$ est choisie telle que: $\|u\|_{H_{\#}^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

2.1 Formulation variationnelle

Pour écrire la formulation variationnelle, on procède de la même manière que pour le problème de Dirichlet. Il faut seulement expliciter le terme de bord de l'équation (3):

$$\int_{\partial\Omega} A \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma = \int_{x=0} -A \nabla u \cdot e_x v d\gamma + \int_{x=L} A \nabla u \cdot e_x v d\gamma + \int_{y=0} -A \nabla u \cdot e_y v d\gamma + \int_{y=L} A \nabla u \cdot e_y v d\gamma. \quad (12)$$

En utilisant les conditions aux limites de périodicité sur le gradient de u , le terme de bord devient nul. La formulation variationnelle est:

$$\forall v \in H_{\#}^1(\Omega), \underbrace{\int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v \, d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, d\Omega}_{l(v)}. \quad (13)$$

La preuve du caractère bien posé de ce problème est alors en tout point similaire à celle faite pour le problème de Neumann lors du TP1. C'est à dire:

Continuité de l :

$$\forall v \in H_{\#}^1(\Omega), |l(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, d\Omega \right| \underset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \sup_{(x,y) \in \Omega} |f(x,y)| \|v\|_{L^2} \leq K \|v\|_{H_{\#}^1}$$

Coercivité de a :

$$\forall u \in H_{\#}^1(\Omega), a(u, u) = \int_{\Omega} A |\nabla u|^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} |u|^2 \, d\Omega \geq c \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \geq \min(c, 1) \|u\|_{H_{\#}^1}^2$$

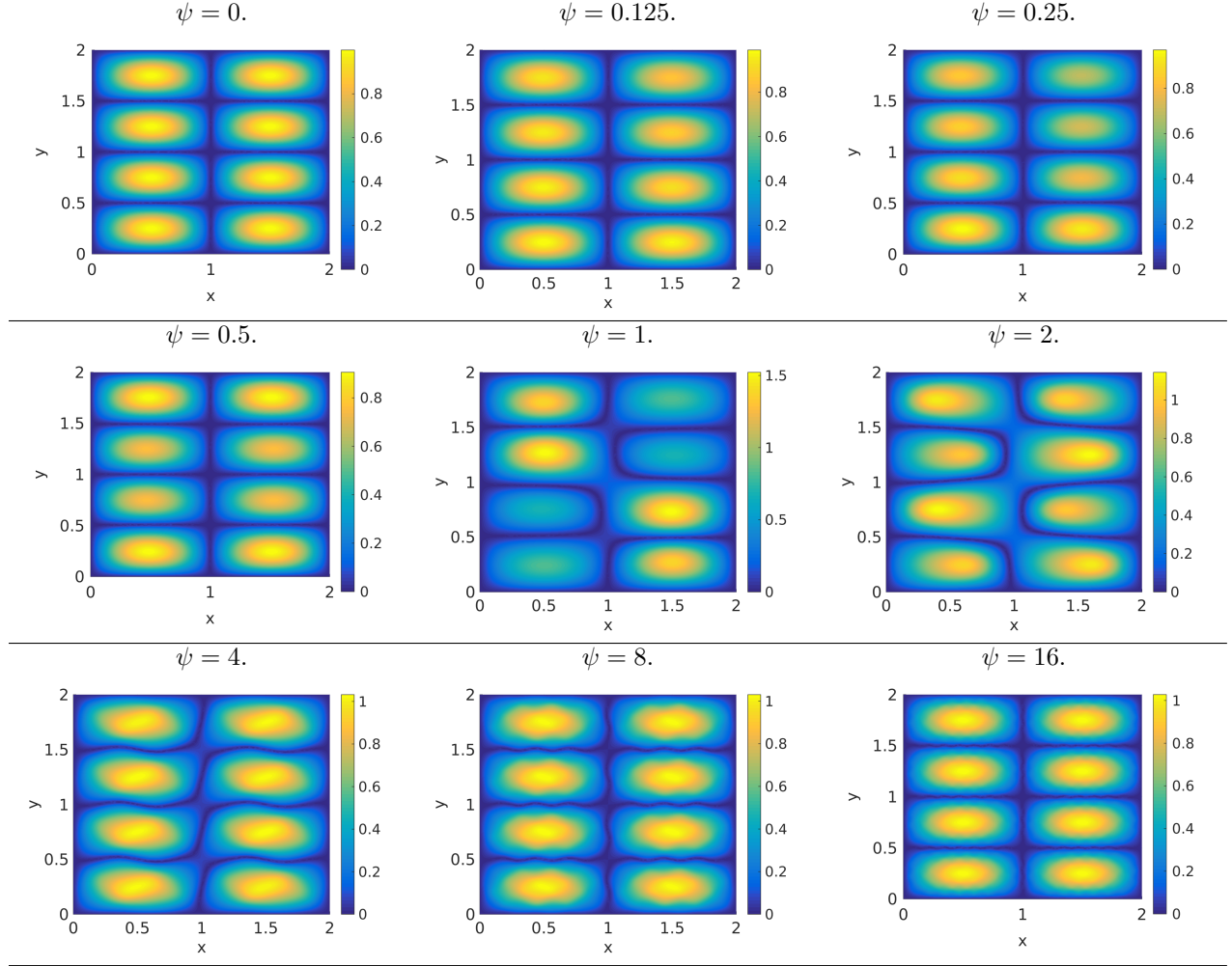


Figure 3: Résolution du problème (1) pour $h = 0.02$ et avec terme source: solution approchée u_h .

Continuité de a :

$$\begin{aligned}
\forall u, v \in H_{\#}^1(\Omega), |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v \, d\Omega \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} uv \, d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v \, d\Omega \right| && \text{(Inégalité triangulaire)} \\
&\leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} && \text{(Cauchy-Schwartz)} \\
&\leq \max(C, 1) \|u\|_{H_{\#}^1} \|v\|_{H_{\#}^1} && \text{(Par définition de la norme } H_{\#}^1)
\end{aligned}$$

Le problème est ainsi bien posé dans l'espace $H_{\#}^1(\Omega)$.

2.2 Assemblage des matrices et vecteur second membre

La formulation variationnelle discrète est identique à celle du problème de Dirichlet. Seule la matrice de projection change. Elle est construite de la manière suivante:

les noeuds au coin ont un poids de $1/4$ et les noeuds du bord un poids $1/2$. A chaque bord ou coin, on associe une référence aux noeuds. La matrice de projection est construite comme pour le problème de Dirichlet, mais le nombre de lignes de la matrice de projection sera cette fois: $N' = N_0 + 1$ (pour le coin) + card(noeuds de deux bords).

Le code MATLAB explicite la construction de la matrice. Le systeme linéaire équivalent est le même que dans la partie précédente, seule la matrice de projection change.

2.3 Validation du code

On résout le problème avec $u(x, y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)$ comme solution exacte. Cette solution vérifie les conditions aux limites du problème initial. Puis on choisit le terme source tel que:

$$A(x, y) = (\sin(\psi\pi x)\sin(\psi\pi y) + 2)\mathbb{I}_2,$$

où \mathbb{I}_2 est la matrice identité.

Dans ce cas, pour $\psi = 0$, le second membre f vaut:

$$f(x, y) = (1 + 10\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y).$$

On trace les erreurs relatives en norme L^2 et semi-norme H^1 pour différentes valeurs de h . Lorsque $\psi = 0$, l'erreur décroît bien en fonction de h , de manière linéaire selon la semi-norme H^1 et quadratique selon la norme L^2 . On fait maintenant varier ψ en on regarde l'allure de la solution approchée u_h . Le second membre

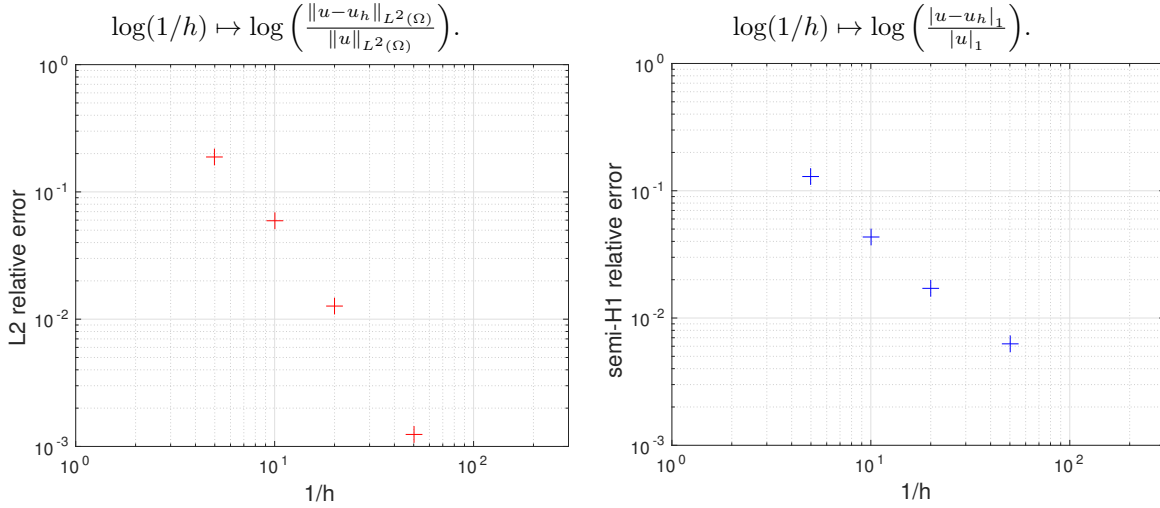


Figure 4: Erreurs selon la norme L^2 et la semi-norme H^1 entre la solution approchée et la solution exacte en fonction du pas de maillage.

reste constant.

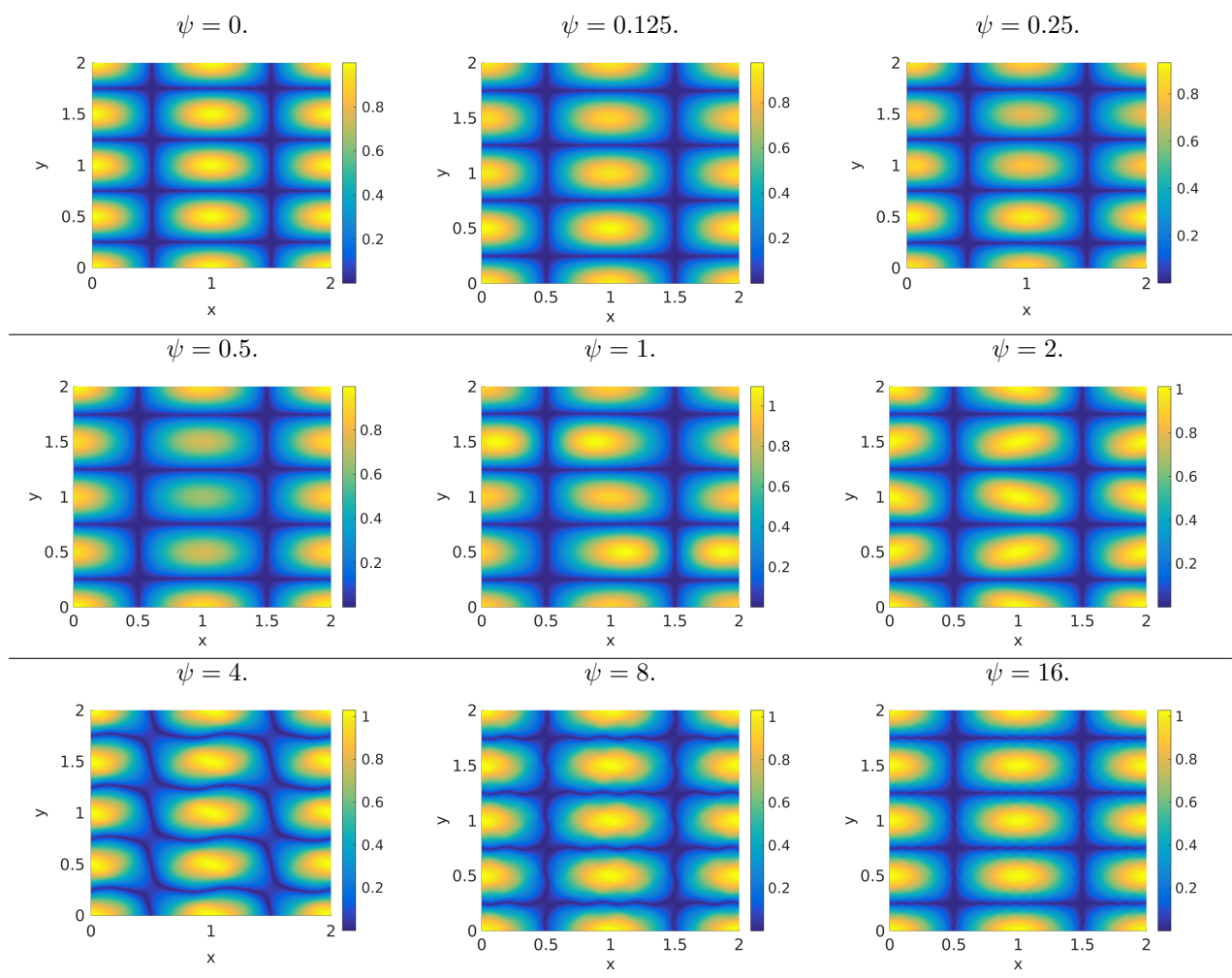


Figure 5: Résolution du problème périodique pour $h = 0.02$ et avec terme source: solution approchée u_h .