

TP3 X01

Philippe Marchner

November 2017

Ce TP s'intéresse au problème de Poisson suivant: Trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$ et A_ε un tenseur 1-périodique et uniformément coercif. On note par ε le paramètre tel que $A_\varepsilon(\mathbf{x}) = A(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$, où $\mathbf{x} \in \Omega$. On prend $\Omega = \mathbb{R}^2$.

1 Solution exacte

1.1 Validation du code

Pour résoudre ce problème, on utilise la routine principale du TP2 pour le problème de Dirichlet. On change la matrice globale à inverser: $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K}$ devient $\mathbb{A} = \mathbb{K}$. On doit aussi recalculer le second membre f .

Pour ce faire, on considère une solution exacte $u_{ex}(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$ où $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ et $A = \text{Id}$. Le second membre f se calcule avec l'équation associée à la formulation variationnelle (1). C'est à dire: $f = -\nabla \cdot (A \nabla u_\varepsilon)$. Pour ce premier cas ($A = \text{Id}$), la donnée correspondante est $f = 2\pi^2 u_{ex}$. Pour un maillage donné, la figure 1 montre que les solutions exactes et discrètes sont similaires pour différentes de valeurs de A . Les cas traités sont:

Cas	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
A =	Id	$\begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & 4 + \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$	$(2 + \sin(2\pi x)) \cdot (4 + \sin(2\pi y)) \cdot \text{Id}$

Table 1: Cas traités.

L'analyse d'erreur a été abordée lors du TP précédent. L'erreur est en $\mathcal{O}(h^2)$ selon la norme L^2 et en $\mathcal{O}(h)$ selon la semi-norme H^1 . D'après la figure 1, on peut conclure que ce premier code est validé. Les codes matlab correspondants sont dans le dossier TP3/sol.pb_ex/

2 Solution du problème homogénéisé

2.1 Les problèmes de cellule

Le problème de cellule est le suivant: Pour $i = \{1, 2\}$, trouver $w_i \in V$ tel que:

$$\forall \phi \in V, \int_Y (A(y) \nabla_y w_i(y), \nabla_y \phi(y)) dy = - \int_Y (A(y) e_i, \nabla_y \phi(y)) dy, \quad (2)$$

où $Y = (0, 1)^2$, $y = (y_1, y_2)$ et $V = \{\psi \in H_{\#}^1(Y), \int_Y \psi(y) dy = 0\}$.

Dans cet espace V particulier, on dispose de l'inégalité de Poincaré (car les fonctions de cet espace sont à moyenne nulles). On peut alors montrer que ce problème est bien posé avec le théorème de Lax-Milgram. Les étapes principales de la démonstration sont:

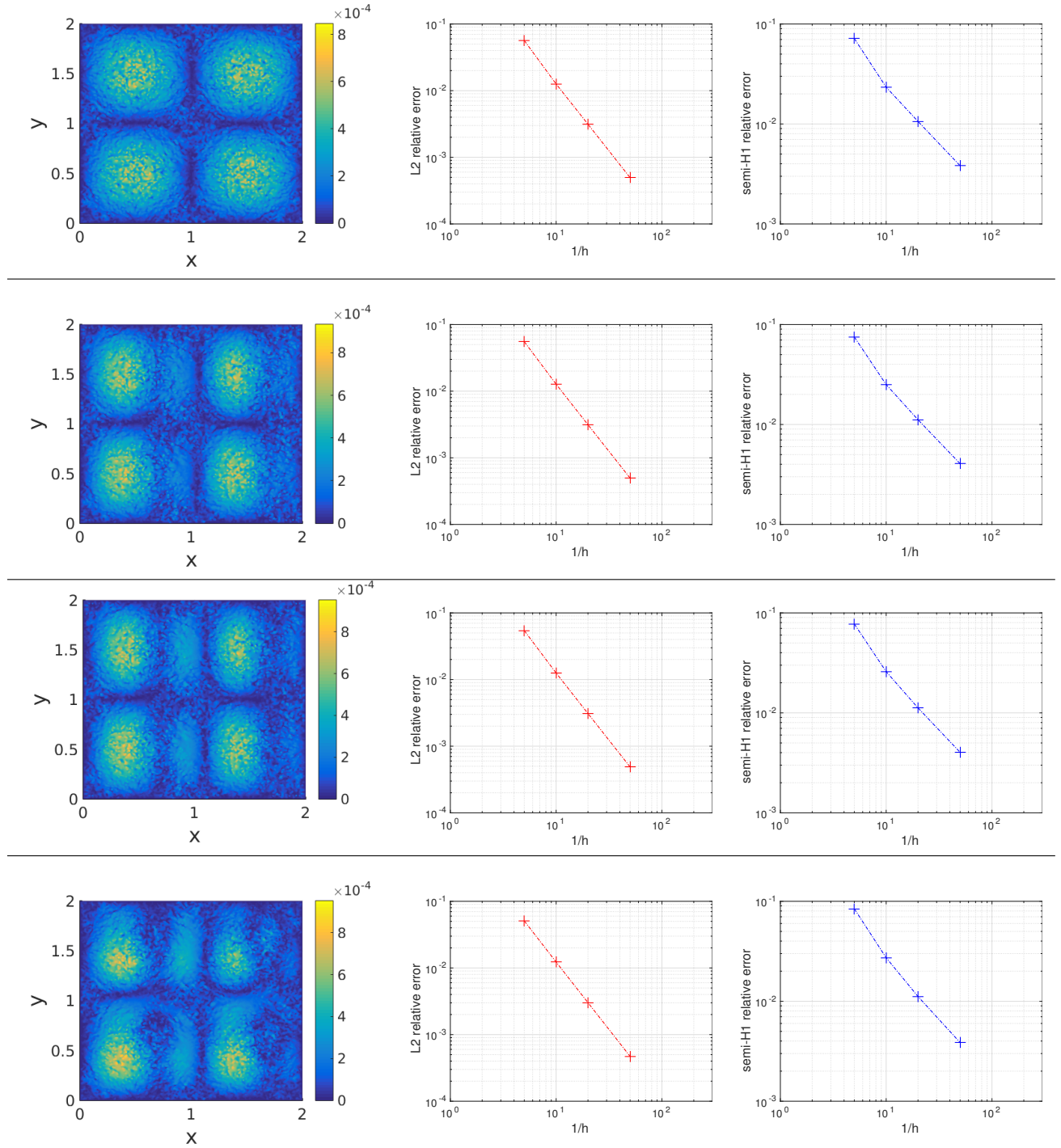


Figure 1: De haut en bas: résolution du problème (1) pour les cas (i) à (iv) du terme source A : $|u_{ex} - u_\varepsilon|$ pour $h = 0.02$ (gauche), erreur relative L^2 (milieu) et H^1 (gauche) pour différentes valeurs de h .

- continuité de la forme bilinéaire: par le caractère uniformément borné du tenseur A et l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- coercivité de la forme bilinéaire: par le caractère uniformément coercif du tenseur A et l'inégalité de Poincaré.
- continuité du second membre: par le caractère uniformément borné du tenseur A et l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

On s'intéresse maintenant au problème de pénalisation: cette méthode permet de s'affranchir des difficultés numériques à la résolution de la formulation (2). Elle conduit au problème suivant: Pour $i = \{1, 2\}$, trouver $w_i^\eta \in H_{\#}^1(Y)$ tel que:

$$\forall \phi \in H_{\#}^1(Y), \int_Y (A(y) \nabla_y w_i^\eta(y), \nabla_y \phi(y)) dy + \eta \int_Y w_i^\eta \phi(y) dy = - \int_Y (A(y) e_i, \nabla_y \phi(y)) dy \quad (3)$$

On va montrer que ce problème est bien posé dans le cas où $\eta > 0$. Pour cela, il faut à nouveau vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

- continuité de la forme bilinéaire:

$$\begin{aligned} \forall (\psi, \psi') \in H_{\#}^1(Y), |a(\psi, \psi')| &\leq \int_Y |(A \nabla_y \psi, \nabla_y \psi')| + \eta \int_Y |\psi \psi'| && \text{(Inégalité triangulaire)} \\ &\leq \|A\|_{\infty} \|\nabla \psi\|_{L^2(Y)} \|\nabla \psi'\|_{L^2(Y)} + \eta \|\psi\|_{L^2(Y)} \|\psi'\|_{L^2(Y)} && \text{(Cauchy-Schwartz)} \\ &\leq (\|A\|_{\infty} + \eta) \|\psi'\|_{H_{\#}^1(Y)} \|\psi\|_{H_{\#}^1(Y)} && \text{(majoration par la norme } H_{\#}^1) \end{aligned}$$

- continuité du second membre:

$$\forall \psi \in H_{\#}^1(Y), |l(\psi)| \leq \int_Y |(A e_i, \nabla_y \psi)| \leq \|A\|_{\infty} \|\nabla_y \psi\|_{L^2(Y)} \leq \|A\|_{\infty} \|\psi\|_{H_{\#}^1(Y)}$$

- coercivité de la forme bilinéaire: on note par c la constante inférieure pour la propriété de coercivité uniforme du tenseur A.

$$\forall \psi \in H_{\#}^1(Y), a(\psi, \psi) = \int_Y A \cdot (\nabla_y \psi)^2 dy + \eta \int_Y \psi^2 dy \geq c \|\nabla_y \psi\|_{L^2(Y)}^2 + \eta \|\psi\|_{L^2(Y)}^2 \geq \min(c, \eta) \|\psi\|_{H_{\#}^1(Y)}^2$$

Quand $\eta > c$, la constante de coercivité augmente lorsque η augmente. On peut penser qu'un choix de η trop grand entraînera des imprécisions sur la résolution du problème, et qu'un choix de η trop petit donnera une matrice éléments finis mal conditionnée.

On va maintenant montrer un résultat d'erreur entre w_i^η et w_i .

1) Montrons d'abord que $w_i^\eta - w_i$ est une fonction à moyenne nulle. En appliquant $\phi = 1 \in H_{\#}^1(Y)$ à la formulation variationnelle (3), on trouve:

$$\eta \int_Y w_i^\eta(y) dy = 0$$

comme $\eta > 0$, on déduit que w_i^η est à moyenne nulle. Par linéarité et par définition de w_i , on voit que $w_i^\eta - w_i$ est aussi à moyenne nulle.

2) On soustrait la formulation (3) de (2) et on l'applique à la fonction $\phi = w_i^\eta - w_i$ qui est bien à moyenne nulle d'après le point précédent. Ce qui donne:

$$\int_Y (A(y) \cdot (\nabla_y w_i^\eta(y) - \nabla_y w_i(y)), (\nabla_y w_i^\eta(y) - \nabla_y w_i(y))) dy + \eta \int_Y w_i^\eta \cdot (w_i^\eta(y) - w_i(y)) dy = 0.$$

on note $e_i^\eta = w_i^\eta - w_i$ et on soustrait $\eta \int_Y w_i e_i^\eta$ de part et d'autre:

$$\int_Y (A(y) \cdot \nabla_y e_i^\eta(y), \nabla_y e_i^\eta(y)) dy + \eta \int_Y (e_i^\eta(y))^2 dy = -\eta \int_Y w_i e_i^\eta(y) dy.$$

On minore le terme de gauche:

$$\begin{aligned} & \int_Y (A(y) \cdot \nabla_y e_i^\eta(y), \nabla_y e_i^\eta(y)) dy + \eta \int_Y (e_i^\eta(y))^2 dy \\ & \geq \int_Y (A(y) \cdot \nabla_y e_i^\eta(y), \nabla_y e_i^\eta(y)) dy \quad (\eta > 0) \\ & \geq c \|\nabla_y e_i^\eta\|_{L^2(Y)}^2 \quad (\text{Coercivité de la forme bilinéaire, } c > 0) \\ & \geq c C_p \|e_i^\eta\|_{H^1(Y)}^2 \quad (\text{Inégalité de Poincaré, } C_p > 0) \end{aligned}$$

On majore le terme de droite avec Cauchy-Schwartz. De plus, w_i^η est bornée dans L^2 (on peut le démontrer en prenant $\phi = w_i^\eta$ dans l'équation 3). Le calcul donne:

$$\left| \eta \int_Y w_i e_i^\eta(y) dy \right| \leq \eta \|e_i^\eta\|_{L^2(Y)} \|w_i^\eta\|_{L^2(Y)} \leq \eta K \|e_i^\eta\|_{H^1(Y)}. \quad (K > 0 \text{ si } w_i^\eta \neq 0)$$

En regroupant les termes, on trouve:

$$c C_p \|e_i^\eta\|_{H^1(Y)}^2 \leq \eta K \|e_i^\eta\|_{H^1(Y)}, \quad (4)$$

ce qui conduit au résultat:

$$\|e_i^\eta\|_{H^1(Y)} \leq C \eta, \quad C > 0. \quad (5)$$

2.2 Discrétisation des problèmes de cellule

Pour discrétiser les problèmes de cellules, on va construire la matrice $\mathbb{K} + \eta \mathbb{M}$ sous matlab (voir dans `sol_pb_hom/main.m`). Cette matrice tend vers la matrice \mathbb{K} associée au problème de cellule quand $\eta \rightarrow 0$. Le second membre est calculé sous matlab à partir de la matrice de rigidité. C'est à dire:

$$-\int_Y (A(y) e_i, \nabla_y \phi(y)) dy = -\int_Y (A(y) \nabla_y y_i, \nabla_y \phi(y)) dy = -\mathbb{K} y_i \quad (\text{en assimilant } y_i \text{ à son interpolée})$$

Enfin, la pseudo-élimination est faite dans la routine matlab `sol_pb_hom/assemblefem.m`.

2.3 Première validation

pour $A = Id$, les solutions exactes des problèmes de cellule de l'équation (3) vérifient:

$$\int_Y (\nabla_y w_i(y) + e_i) \nabla_y \phi(y) dy = 0. \quad (6)$$

On peut faire une intégration par parties (le terme de bord s'annule car ϕ est périodique):

$$\int_Y \nabla_y (\nabla_y w_i(y) + e_i) \phi(y) dy = 0. \quad (7)$$

Ce qui donne:

$$\int_Y \Delta w_i(y) \phi(y) dy = 0 \quad (8)$$

Comme ϕ est suffisamment régulière, on en déduit que:

$$\forall \phi \in V, \forall y \in Y, \Delta w_i(y) = 0.$$

Comme la solution de ce problème est unique et que w_i est à moyenne nulle, la seule possibilité est que $w_i = 0$. Ce résultat est valide tant que A est indépendant de y . Les solutions calculées sont représentées sur la figure (2) pour $A = Id$. Le resultat est identique pour les cas où A est indépendant de y .

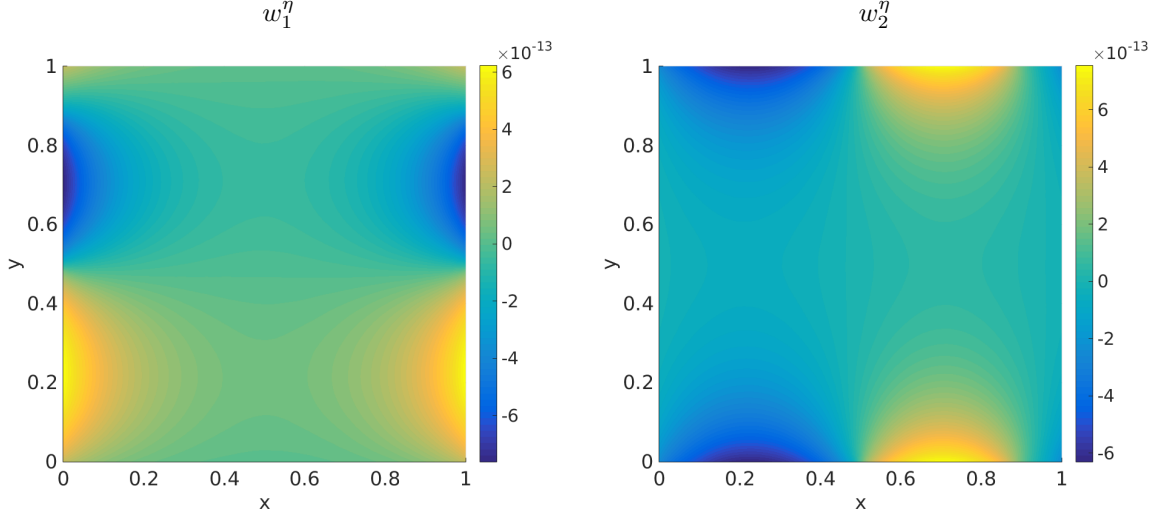


Figure 2: Résolution des problèmes de cellule pour $A = Id$ et $h = 0.02$.

2.4 Deuxième validation

Le tenseur homogénéisé peut se reformuler de manière à être facilement implémenté sous matlab:

$$\begin{aligned} A_{jk}^{hom} &= \int_Y (A \cdot (e_k + \nabla w_k), e_j + \nabla w_j) = \int_Y (A \cdot \nabla (y_k + w_k), \nabla (y_j + w_j)) \\ &= a(y_k + w_k, y_j + w_j) = {}^t (y_j + w_j) \mathbb{K} (y_k + w_k). \end{aligned}$$

Le tenseur A_{jk}^{hom} est calculé dans la routine principale de matlab (voir `sol_pb_hom/main.m`). On retrouve bien les tenseurs homogénéisés théoriques sous matlab pour les différents cas.

2.5 Calcul de la solution du problème homogénéisé

En utilisant le même code que celui développé pour le TP2 avec les conditions aux limites de Dirichlet, on calcule numériquement la solution du problème homogénéisé $u_{0,h}$ pour un maillage fixé à $h = 0.02$. On choisit un second membre f égal à 1.

3 Comparaison solution exacte - solution homogénéisée

Comparaison qualitative: On compare maintenant la solution du problème initial avec le problème homogénéisé. Par exemple pour le cas (iii) avec $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.5$, on observe les solutions sur la figure (3). Les solutions discrètes exactes et homogénéisées sont similaires à première vue. La solution homogénéisée semble cependant plus conforme à la solution initiale pour $\varepsilon = 0.1$.

Comparaison quantitative: On choisit de fixer la taille du maillage avec $h = 0.02$. On choisit des valeurs décroissantes pour ε . Les erreurs relatives en norme L^2 et H^1 sont tracées sur la figure 4.

Théoriquement, l'erreur se comporte en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pour la norme L^2 est en $\mathcal{O}(1)$ pour la semi-norme H_1 . En effet, d'après le développement multi-échelle, on a:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, y) - u_0(x) &= \varepsilon u_1(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \nabla u_\varepsilon(x, y) - \nabla u_0(x) &= \varepsilon \nabla_y u_1(x, y) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Numériquement, on observe cette tendance pour l'exemple particulier $f = 1$ et le cas (iii) du tenseur A sur la figure 4. De même pour un exemple avec $f(x_1, x_2) = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ et le cas (iv) du tenseur A sur la figure 5.

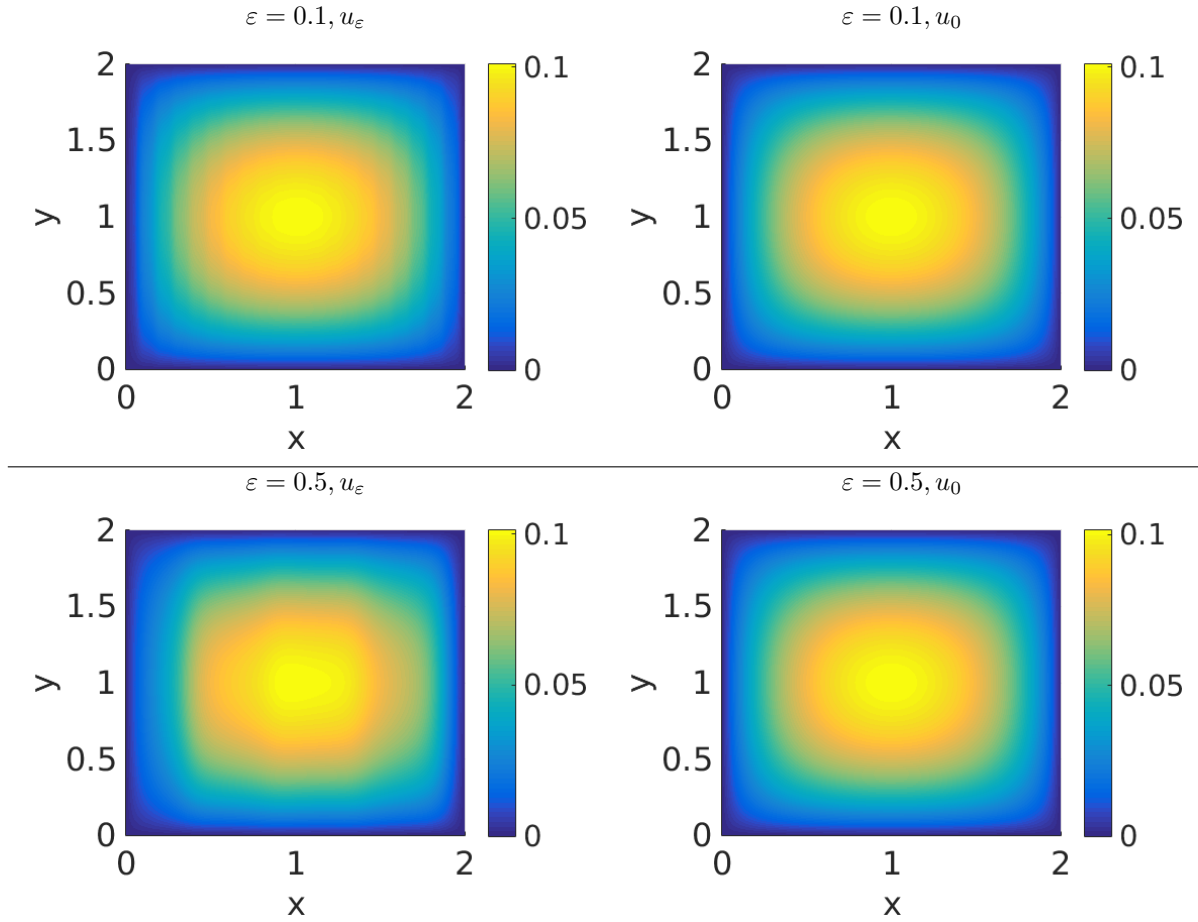


Figure 3: Solution du problème initial (gauche) et homogénéisé (droite) pour le cas (iii) et $h = 0.02$. $\varepsilon = 0.1$ (haut) et $\varepsilon = 0.5$ (bas).

Pour améliorer le calcul de l'erreur en semi-norme H^1 , il faudrait calculer la quantité $\nabla u_\varepsilon - \nabla u_0 - \varepsilon \nabla_y u_1$. L'erreur théorique est alors en $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Pour calculer u_1 , l'idée est d'utiliser la relation suivante:

$$u_1(x, y) = \sum_i w_i(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \quad (9)$$

Je n'ai pas réussi à aller au bout de l'implémentation de ce calcul pour ce TP.

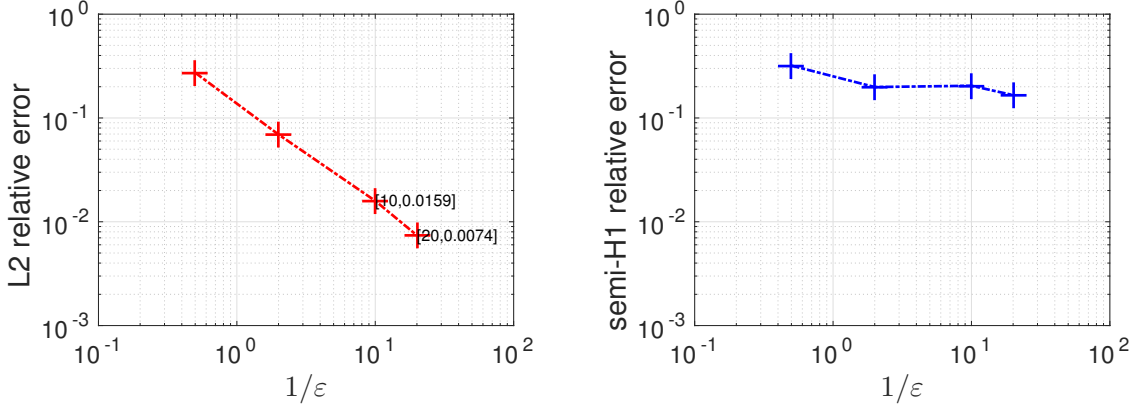


Figure 4: Erreurs L^2 et semi- H^1 pour $f = 1$ et le cas (iii) avec $h = 0.02$ pour différentes valeurs de ε .

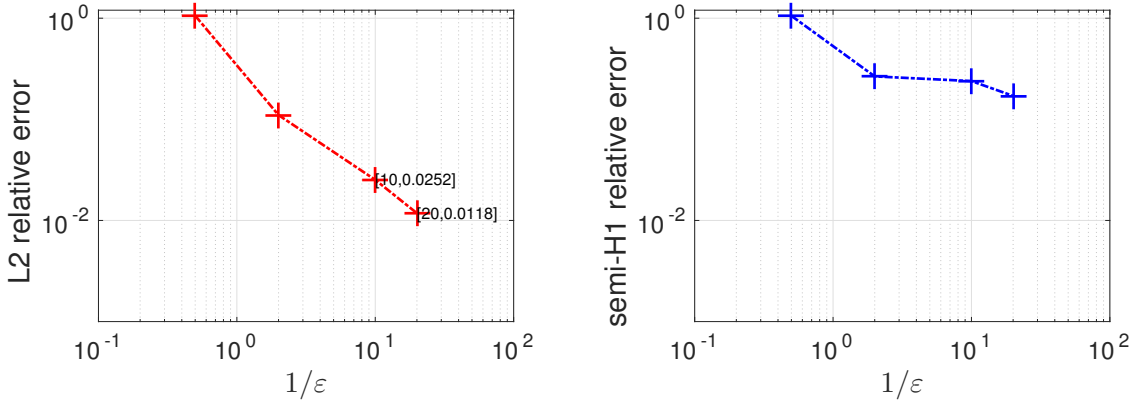


Figure 5: Erreurs L^2 et semi- H^1 pour $f(x_1, x_2) = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ et le cas (iv) avec $h = 0.02$ pour différentes valeurs de ε .