



Master Fortgeschrittenen Praktikum

---

AG.RBK

# Rayleigh-Bénard-Konvektion

---

Praktikant: Philip Marszal  
Matrikelnummer: 21212455

Prüfer: Prof. A. Tilgner

Betreuer: M. Kellner

Durchgeführt: 03.02.16

E-Mail: philip.marszal@stud.uni-goettingen.de



# Inhaltsverzeichnis

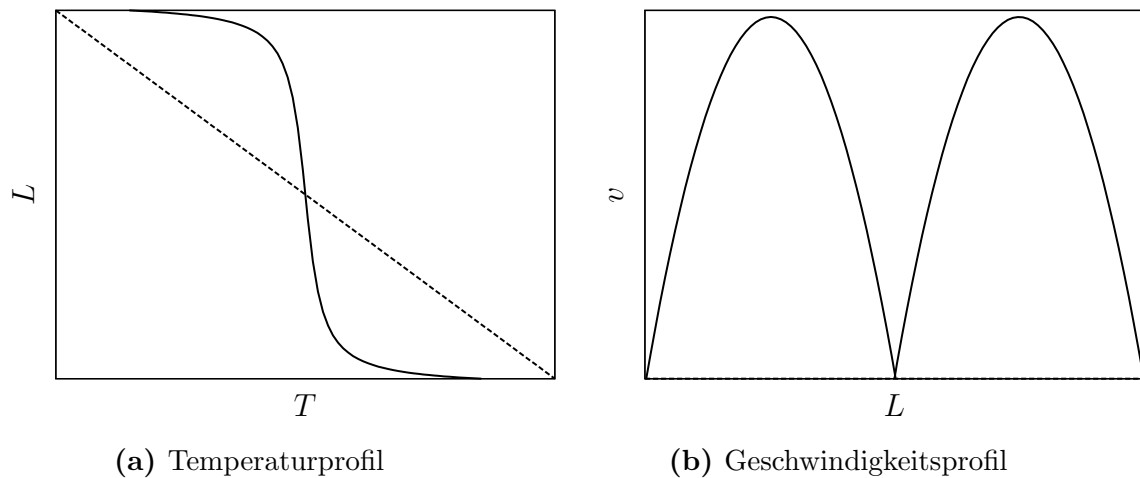
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
2.1	Rayleigh-Bénard-Konvektion . . . . .	2
2.2	Fluidmechanik und Wärmetransport . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Aufbau</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
4.1	Simulation . . . . .	5
4.2	Experimentelle Betrachtung . . . . .	5
4.2.1	Schattenwurfmethode . . . . .	5
4.2.2	Beweglicher Thermistor . . . . .	6
4.2.3	Thermistorarray . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
5.1	Schattenspiel . . . . .	6
5.2	Vorbereitung: Thermistor . . . . .	6
5.3	Temperaturmessungen . . . . .	7
5.4	Geschwindigkeitsprofile . . . . .	9
5.5	Bestimmung der Nusselt-Zahl . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>16</b>
6.1	Schattenwurfmethode . . . . .	16
6.2	Temperaturprofile . . . . .	16
6.3	Geschwindigkeitsprofile . . . . .	17
6.4	Bestimmung der Nusseltzahl . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Stoffkonstanten</b>	<b>20</b>

# 1 Einleitung

Konvektion durch Temperaturunterschiede ist mit Abstand die häufigste Art von Fluidbewegung im Universum. Sie tritt in Sternen, Atmosphären und Planetenkernen auf. Aber die Untersuchung der Konvektion beschränkt sich nicht nur auf diese Phänomene. Modellbasierte Realisierungen von Konvektion erlauben Rückschluss auf chaotische Dynamik und Komplexität von hydrodynamischen Prozessen.

Ein oft herangezogenes Modell für die Konvektion von von unten beheizten Flüssigkeiten ist die Rayleigh-Bénard-Konvektion. Sie veranschaulicht unter Anderem, die spontane Ausbildung von makroskopischen Strömungsmustern.

In diesem Versuch wird die Rayleigh-Bénard-Konvektion sowohl numerisch als auch experimentell untersucht.



**Abbildung 1:** In (a) beschreibt die durchgezogene Kurve das Temperaturprofil bei konvektivem Wärmetransport, i.e. in einer Konvektionswalze. Die gestrichelte Linie entspricht dem Temperaturprofil bei ausschließlich diffusivem Wärmetransport. (b) zeigt das Geschwindigkeitsprofil entlang einer Achse durch das Zentrum der Konvektionswalze.

## 2 Theorie

### 2.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion

Rayleigh-Bénard-Konvektion ist eine Form von Konvektion, die durch einen Dichtegradienten und Gravitation verursacht wird. Sie tritt zum Beispiel auf wenn eine Flüssigkeit von unten erhitzt wird, wie es in einem Kochtopf der Fall ist. Der Temperaturgradient führt zu Dichteunterschieden im Fluid. Durch diese und die Gravitation wird wärmeres Fluid durch die Auftriebskraft nach oben gedrückt, während kaltes Fluid aus dem selben Grund nach unten sinkt. Oben angekommen kühlt das warme Fluid ab, und sinkt wieder nach unten. Das Zusammenspiel von steigendem und sinkendem Fluid führt zur Entstehung von sogenannten Konvektionswalzen (auch *large scale circulations*). Diese Konvektionswalzen führen zu einer Durchmischung der Flüssigkeit und damit zu einer homogenen Temperatur im Inneren der Walze. Der schematische Temperaturverlauf ist in Abb. 1a zu sehen. Konvektionswalzen können abhängig von Randbedingungen, wie der Form des Gefäßes indem sich das Fluid befindet, unterschiedliche Strukturen bilden wie z.B. rechteckige und hexagonale Prismen und Spiralen [1].

Neben den Walzen der Rayleigh-Bénard-Konvektion treten auch sogenannte *Plumes* auf. Dabei handelt es sich um lokale Wolken, die eine von ihrer unmittelbaren Umgebung verschiedene Temperatur haben. Durch den Temperaturunterschied zur Umgebung, bewegt sich ein Plume in der Regel schneller durch das Fluid, als die Konvektionswalze sich dreht. Allerdings wird im Zuge dieses Versuchs angenommen, dass die Plumes der Konvektionswalze folgen und eine sehr ähnliche Geschwindigkeit besitzen.

## 2.2 Fluidmechanik und Wärmetransport

Grundlage für die theoretische Beschreibung der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist die Navier-Stokes-Gleichung. Sie beschreibt das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  eines Fluides unter der Wirkung von Druck-, Reibungs- und -unter Umständen- externer Kraft. Für die Rayleigh-Bénard-Konvektion wird die Navier-Stokes-Gleichung durch die Boussinesq-Näherung vereinfacht [6]. Diese Näherung besteht in der Annahme, dass die Dichte  $\rho$  des Fluides nicht vom Druck  $p$  abhängt, sondern lediglich linear mit der Temperatur  $T$  verbunden ist über die Gleichung (1):

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0). \quad (1)$$

Hierbei ist  $\rho_0$  die Dichte der Flüssigkeit bei einer Referenztemperatur  $T_0$ . Der Koeffizient  $\alpha$  bezeichnet den thermischen Ausdehnungskoeffizienten. Zudem wird angenommen, dass alle anderen physikalischen Größen unabhängig von der Temperatur sind.

Mit dieser Näherung ergibt sich die Navier-Stokes-Gleichung zu Gleichung (2) [1]:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \text{Ra} \mathbf{e}_z \quad (2)$$

Hierbei ist die Gleichung in eine dimensionslose Form gebracht worden. Neben der Navier-Stokes-Gleichung spielen die Kontinuitätsgleichung und die Wärmetransportgleichung eine Rolle für die Realisierung der Rayleigh-Bénard-Konvektion in diesem Versuch. Die beiden dimensionslosen Kennzahlen in Gleichung (2) bezeichnen die Rayleigh- und die Prandtl-Zahl, die sich jeweils als

$$\text{Ra} = \frac{g \alpha \Delta T L^3}{\kappa \nu}, \quad (3)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (4)$$

ergeben [1]. Mit Erdbeschleunigung  $g$ , Temperaturunterschied  $\Delta T = T - T_0$ , charakteristischer Länge  $L$ , thermischer Diffusivität  $\kappa$  und kinematischer Viskosität  $\nu$ .

Wie man bereits aus Gleichung (4) entnehmen kann, beschreibt die Prandtl-Zahl das Verhältnis von Viskosität zu Diffusivität. Die Rayleigh-Zahl gibt Aussage darüber ob der Wärmetransport in einem Fluid diffusiv oder konvektiv erfolgt. Unterhalb einer kritischen Rayleigh-Zahl  $\text{Ra}_{\text{crit}}$  findet der Wärmetransport nur durch Diffusion statt. Für diesen Versuch ergibt sich etwa ein Wert von  $\text{Ra}_{\text{crit}} = 1700$  [4]. Ein kurzer Überblick der Kennzahlen für Systeme, in denen Konvektion stattfindet ist in Tabelle 1 zu sehen.

Wird die Konvektion durch einen Temperaturunterschied verursacht, und nicht etwa einen chemischen Gradienten, so lässt sich die Konvektion anhand einer weiteren Kennzahl klassifizieren. Die Nusselt-Zahl beschreibt das Verhältnis des gesamten Wärmetransports zum rein diffusiven Transport eines ruhenden Fluids Gleichung (5).

$$\text{Nu} = \frac{\text{gesamter Wärmetransport}}{\text{idealer diffusiver Transport}}. \quad (5)$$

**Tabelle 1:** Typische Rayleigh- und Prandtl-Zahlen im Vergleich. Da das Innere des Erdkerns fest ist, kann nur im äußeren Erdkern RBK stattfinden. Bei der Atmosphäre gibt es lediglich in der Troposphäre den für RBK erforderlichen Temperaturverlauf. Stoffkonstanten dargestellt in Anhang A.

	Erdkern	Erdmantel	Atmosphäre	Zelle
Ra	$1.0 \times 10^{31}$	$2.3 \times 10^7$	$2.4 \times 10^{22}$	$1.1 \times 10^9$
Pr	$2.7 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{23}$	$5.7 \times 10^{-1}$	7.0

Der gesamte Wärmetransport entspricht dem Integral des Wärmestroms über die Grenzen des betrachteten Volumens. Für einen hauptsächlich advektiven Wärmetransport lässt sich die Nusselt-Zahl auch mit Gleichung (6) bestimmen.

$$\text{Nu} = \frac{L}{2\delta}. \quad (6)$$

Hierbei bezeichnet  $\delta$  die Dicke der thermischen Grenzschicht. Diese ist definiert als das Regime des diffusiven Wärmetransports in unmittelbarer Nähe des Randes der Konvektionszelle. Sie kann auch in der schematischen Darstellung aus ?? erkannt werden. Aus Messwerten lässt sich die Dicke der Grenzschicht bestimmen, indem die Temperatur im diffusiven Regime und im konvektiven Regime durch zwei lineare Funktionen genähert wird. Der Schnittpunkt der Funktion entspricht der Dicke der Grenzschicht.

Die Haftbedingung der Fluidmechanik bedingt ein besonderes Geschwindigkeitsprofil. Die Geschwindigkeit an den Grenzen der Konvektionszelle muss verschwinden. Zugleich verschwindet die Geschwindigkeit aber auch im Zentrum der Rotation. Dadurch ergibt sich das in Abb. 1b zu sehende Geschwindigkeitsprofil.

### 3 Aufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer 20 cm hohen Box, gefüllt mit Wasser. Am Boden der Zelle befindet sich eine Heizplatte, die eine Temperatur von ca. 20 °C besitzt. Nach oben hin wird die Zelle durch eine ca. 10 °C kalte Kühlplatte begrenzt.

Zur Messung der Temperatur werden Halbleiter-Thermistoren verwendet, die einen temperaturabhängigen Widerstand besitzen. Mit der über die Thermistoren abfallenden Spannung kann die Temperatur bestimmt werden.

Zum Einsatz kommt ein Thermistor im Zentrum der Konvektionszelle, dessen Höhe verstellt werden kann. Außerdem kann die Temperatur an mehreren Stellen gleichzeitig über ein Thermistorarray an der Seite der Zelle gemessen werden. Das Thermistorarray besteht aus sechs Thermistoren mit einem Abstand von 3 cm, wobei der Abstand der mittleren beiden Thermistoren 4 cm beträgt.

## 4 Durchführung

### 4.1 Simulation

Mithilfe des Programms *Comsol Multiphysics* [2] wird die Rayleigh-Bénard-Konvektion in einer zweidimensionalen Box simuliert. Die Simulation wird für die Rayleigh-Zahlen  $10^3, 10^4, 10^5, 10^6$  und  $10^7$  durchgeführt. Ausgegeben werden dabei die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile entlang der Achse durch die Mitte der Box.

Zudem wird die Nusselt-Zahl als das Integral des Wärmegradienten über die Grenzfläche der Box bestimmt.

### 4.2 Experimentelle Betrachtung

#### 4.2.1 Schattenwurfmethode

Zunächst wird die Dynamik des Fluids im Versuchsaufbau, visuell beschrieben. Dazu wird die Zelle so beleuchtet, dass auf einer Seite durch die Plumes erzeugte Schatten zu erkennen sind. Die Schatten entstehen durch die Brechung des Lichts an starken Dichtegradienten des Fluids, welche Folge von Temperaturunterschieden sind.

Die Geschwindigkeit der Plumes wird mithilfe einer Stoppuhr gemessen. Es werden sowohl auf einer Seite aufsteigende warme Plumes, als auch auf der anderen Seite fallende kalte Plumes gemessen.

Die Strecke über die gemessen wird beträgt ca. 2.5 cm. Für jede Seite werden 10 Messwerte gesammelt.



### 4.2.2 Beweglicher Thermistor

Das Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil des Fluids wird nun mit einem einzelnen Thermistor bestimmt. Der Thermistor wird zunächst direkt an der warmen Platte in der Mitte der Box positioniert. Mit einem bereitgestellten Messprogramm werden nun 2048 Messwerte der Temperatur mit einer Abtastfrequenz von 11.5 Hz aufgenommen.

Dann wird der Thermistor um 1 cm nach oben verschoben, und eine Messung für die neue Höhe gestartet. Dies wird bis zu einer Höhe von 10 cm durchgeführt.

Für die ersten 1.5 cm werden die Messungen alle 0.1 cm durchgeführt. Für die Bestimmung der thermischen Grenzschicht wird zudem eine noch höhere Auflösung benötigt, weswegen zusätzliche Messwerte bei 0.05, 0.15, 0.25 und 0.35 cm aufgenommen werden, die allerdings nur aus 512 Messpunkten bestehen.

### 4.2.3 Thermistorarray

Anschließend wird eine lange Messung mit dem Thermistorarray durchgeführt. Mit allen Thermistoren wird über 30 Stunden hinweg die Temperatur gemessen. Aus der zeitlichen Korrelation der Messwerte der einzelnen Thermistoren lässt sich die Geschwindigkeit von Plumes bestimmen.

## 5 Auswertung

### 5.1 Schattenspiel

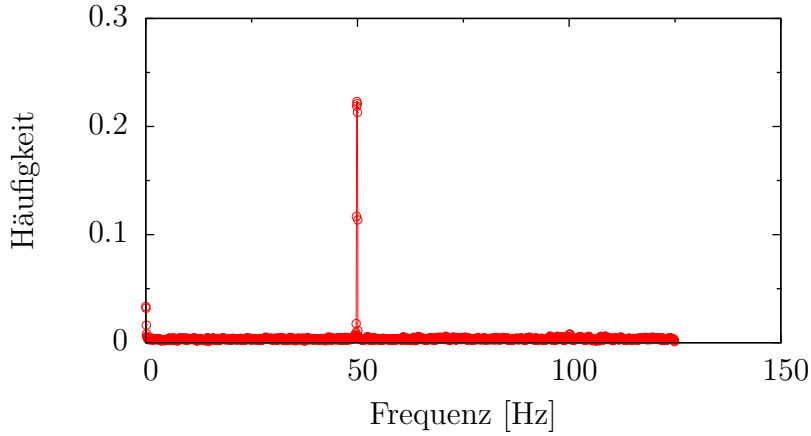
Die Temperaturen der Heiz- und Kühlplatte wurden zu 11.05 °C und 19.84 °C bestimmt. Daraus und aus den Abmessungen der Zelle wird die Rayleigh-Zahl nach Gleichung (3) zu ca.  $Ra = 1.01 \cdot 10^9$  bestimmt.

Die Messung der Geschwindigkeiten der Plume-Schatten ergibt für aufsteigende Plumes  $0.50(1) \text{ cm s}^{-1}$ , und für fallende Plumes ergibt sich eine mittlere Geschwindigkeit von  $0.71(2) \text{ cm s}^{-1}$ . Für die Berechnung der Reynoldszahl wird nur die Messung für die aufsteigenden Plumes herangezogen, da es bei der Messung der fallenden Plumes zu einem systematischen Fehler durch die Fokusebene der Beleuchtung kommt. Es ergibt sich eine Reynoldszahl von  $Re = 10^3$ .

### 5.2 Vorbereitung: Thermistor

Da Geschwindigkeit der Plumes über eine Fouriertransformation der gemessenen Temperatur bestimmt wird, können Fehler in der Messung durch den Einfluss von Störfrequenzen auf die Thermistoren auftreten. Um mögliche Störfrequenzen zu identifizieren, wird zunächst eine Messung mit einer Abtastfrequenz von 250 Hz durchgeführt. Diese kann Störfrequenzen von 0 bis 250 Hz aufdecken.

Eine starke, wenn auch zu erwartende, Störung tritt bei 50 Hz auf, und wird durch das Stromnetz verursacht (siehe Abb. 2). Durch Gleichung (7) kann nun



**Abbildung 2:** Ergebnis der Suche nach Störfrequenzen mit einer Abtastrate von 250 Hz. Die einzige erkennbare Störfrequenz liegt bei 50 Hz und wird durch das Stromnetz verursacht.

eine Abtastfrequenz gewählt werden, die das Auftreten der Störfrequenz in der Messung so verschiebt, dass die Messergebnisse unbeeinflusst bleiben. Deswegen wurde die Abtastfrequenz als 11.5 Hz gewählt.

$$|f_{\text{real}} - f_{\text{measured}}| = \left\lfloor \frac{f_{\text{real}}}{f_{\text{max}}} \right\rfloor \cdot f_{\text{max}}. \quad (7)$$

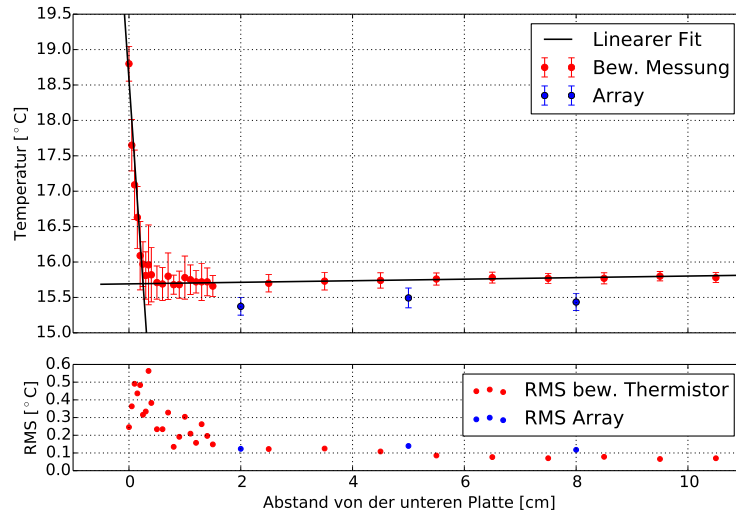
### 5.3 Temperaturmessungen

Aus den Messungen der Temperatur als Funktion des Abstandes ergibt sich das in Abb. 3 dargestellte Temperaturprofil. Es ist sowohl das Ergebnis der Messung mit dem beweglichen Thermistor, als auch die Messung der Temperatur mit dem Thermistor-Array zu sehen. Abb. 4 hingegen zeigt allein die Messung mit dem Thermistorarray.

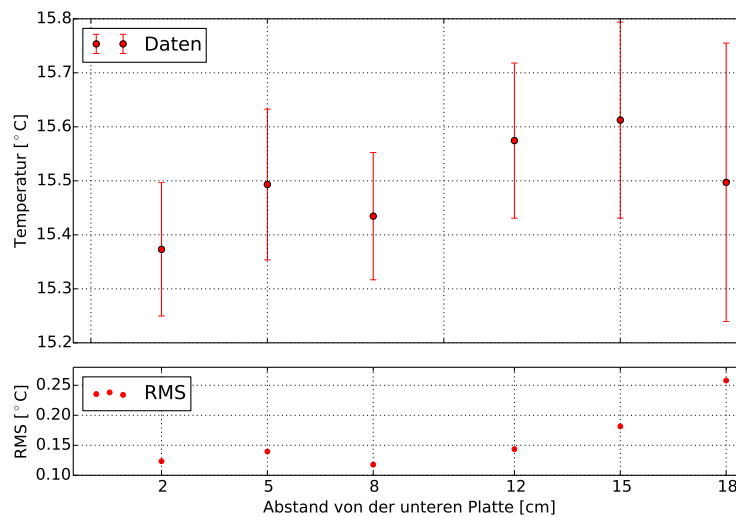
Aus dem Temperaturprofil lässt sich die Nusselt-Zahl, über die thermische Grenzschicht bestimmen. Der bestimmte Schnittpunkt der beiden in Abb. 3 zu sehenden Fits liegt bei einem Abstand von 0.25(40) cm. Nach Gleichung (6) ergibt sich dies zu einer Nusselt-Zahl von  $Nu = 40(7)$ .

Die in Abb. 3 und 4 dargestellten Profile lassen sich mit den aus der Simulation gewonnenen Profilen für unterschiedliche Rayleigh-Zahlen vergleichen. Diese sind in Abb. 5 dargestellt.

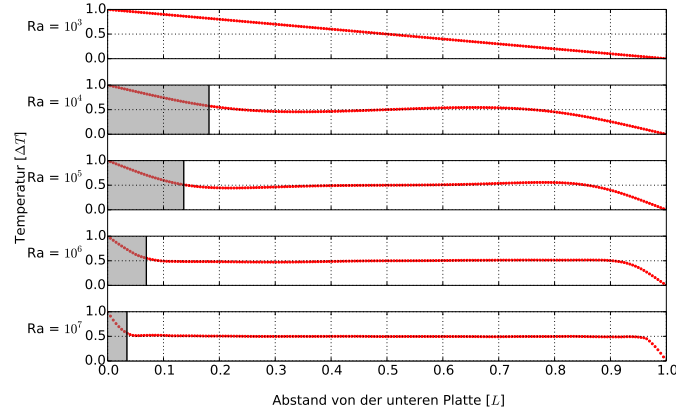
Für die 30-stündige Messung ist es interessant die Verteilung der Messwerte zu betrachten. Abb. 6 zeigt Histogramme der gemessenen Werte über die gesamte Messreihe hinweg. Man erkennt, dass das Maximum der Verteilungen für jeden Thermistor in etwa bei der gleichen Temperatur 15.5 °C liegt. Allerdings kommt es durch die Nähe zur Heiz- bzw. Kühlplatte zu häufigen Messungen von Temperaturen mit einer starken Abweichung vom Maximum. Der Thermistor in der Nähe



**Abbildung 3:** Temperaturprofil der unteren Hälfte der Zelle, als Funktion des Abstandes von der Heizplatte. Zu sehen ist die vollständige Messreihe mittels beweglichem Thermistor, und die ersten drei Messwerte des Thermistorarrays. Zur Bestimmung der thermischen Grenzschicht wurde der Schnittpunkt zweier linearer Fits bestimmt.



**Abbildung 4:** Messungen des Temperaturprofils mithilfe des Thermistorarrays. Zu sehen sind die Mittelwerte der 30-stündigen Messung, für jeden Thermistor bzw. seine Position.



**Abbildung 5:** Temperaturprofile einer Rayleigh-Bénard-Zelle zu verschiedenen Rayleigh-Zahlen. Unterlegt ist die mittels der Methode aus Abschnitt 2.2 ermittelte Grenzschicht. Für die Simulation bei  $Ra = 10^3$  lässt sich kein sinnvoller Wert für die Grenzschicht angeben, da das gesamte Temperaturprofil linear verläuft, d.h. der gesamte Wärmetransport diffusiv erfolgt. Dies entspricht der Theorie nach einer Nusselt-Zahl von 1.

der Heizplatte misst häufiger Temperaturen über der Durchschnittstemperatur, während beim Thermistor an der Kühlplatte häufiger niedrigere Temperaturen gemessen werden. Dieser Effekt lässt sich abgeschwächt auch in den weiter entfernten Thermistoren erkennen.

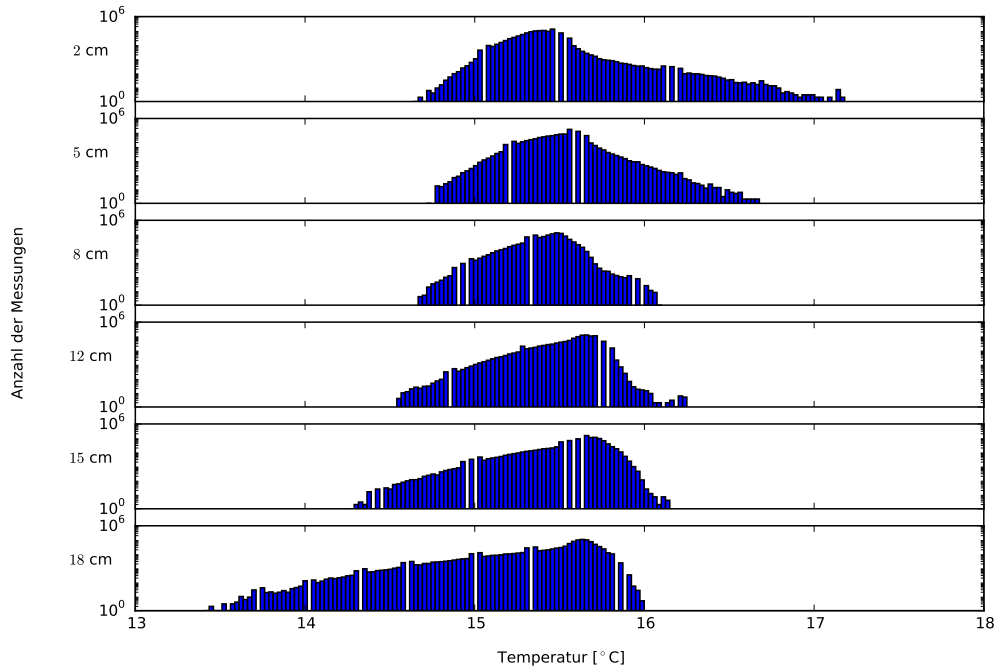
## 5.4 Geschwindigkeitsprofile

Über die Messung der Temperatur mit dem beweglichen Thermistor lässt sich das Geschwindigkeitsprofil der Zelle ermitteln. Dazu wird ausgenutzt, dass entstehende Plumes in etwa dem Verlauf der Konvektionswalze folgen, und in erster Näherung die gleiche Geschwindigkeit besitzen.

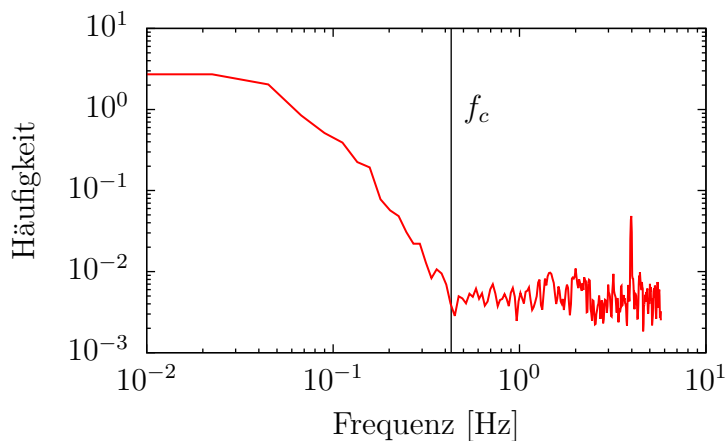
In der mit dem Thermistor an einer Höhe aufgenommenen Zeitreihe sind Plumes als ein vorübergehender Anstieg bzw. Abfall der Temperatur zu erkennen. Die Geschwindigkeit des Plumes ist invers proportional zur Breite der Senke bzw. des Hügels. Diese ist wiederum charakterisiert, durch die Frequenzzusammensetzung des Plumes im Fourierraum. In Abb. 7 ist eindeutig die größte Frequenz des Plume-Bündels zu erkennen. Diese Abbruchfrequenz ist direkt proportional zur durchschnittlichen Geschwindigkeit der Plumes in diesem Abstand von der Heizplatte.

Das Geschwindigkeitsprofil der unteren 10 cm ist in in Abb. 8 zu sehen. Das Profil der Abbruchfrequenzen  $f_c$  entspricht hier dem Verlauf des Geschwindigkeitsprofils. Der lineare Fit der ersten Werte zeigt, dass selbst an der Heizplatte eine Geschwindigkeit messbar ist.

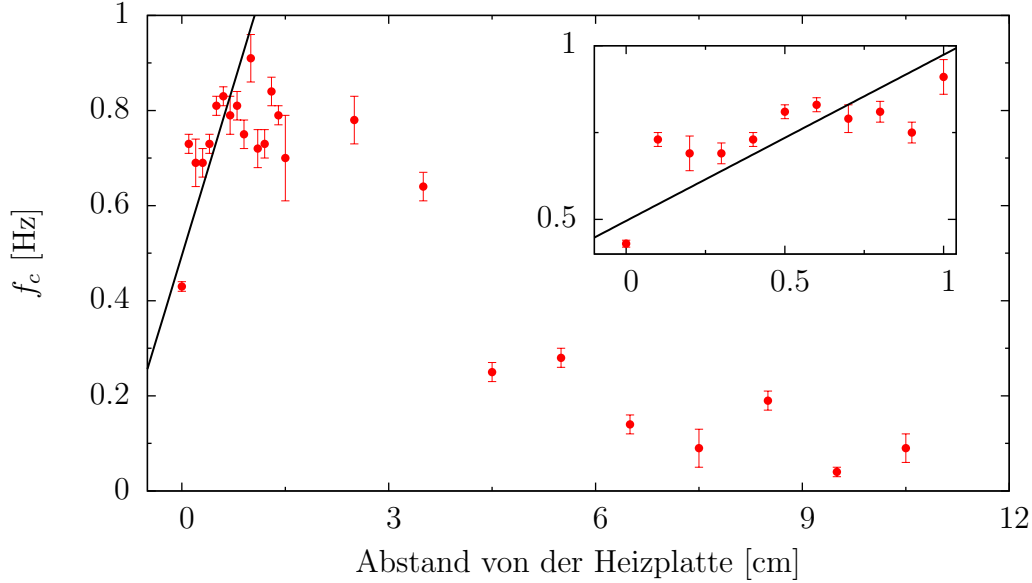
Aus der 30-stündigen Messung lässt sich die Geschwindigkeit an fünf Stellen der Zelle bestimmen. Dazu wird aus den Temperaturmesswerten die Korrelation je-



**Abbildung 6:** Verteilung der Messwerte der einzelnen Thermistoren als Funktion der Temperatur. Der Abstand bezeichnet den Abstand von der Heizplatte. Die Histogramme sind auf einer logarithmischen Skala aufgetragen. Bei den Lücken in den Histogrammen, handelt es sich um Fehler, die Messwerte aus diesen Boxen auf die benachbarten Boxen verteilen.



**Abbildung 7:** Ermittlung der Abbruchfrequenz einer Messung. Dieses Beispiel zeigt die Bestimmung der Abbruchfrequenz für die Messung der Temperatur in unmittelbarer Nähe der Platte.

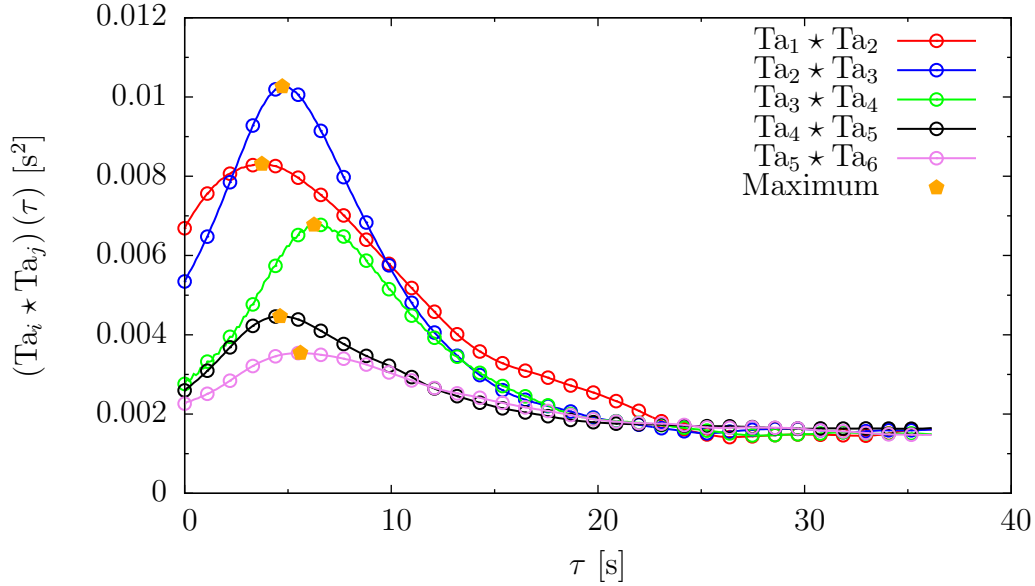


**Abbildung 8:** Zu sehen ist die Abhängigkeit der Abbruchfrequenz  $f_c$  in Abhängigkeit von dem Abstand von der Heizplatte. Dieser Verlauf entspricht auch dem Geschwindigkeitsprofil in der Zelle, da die Geschwindigkeit proportional zur Abbruchfrequenz ist.

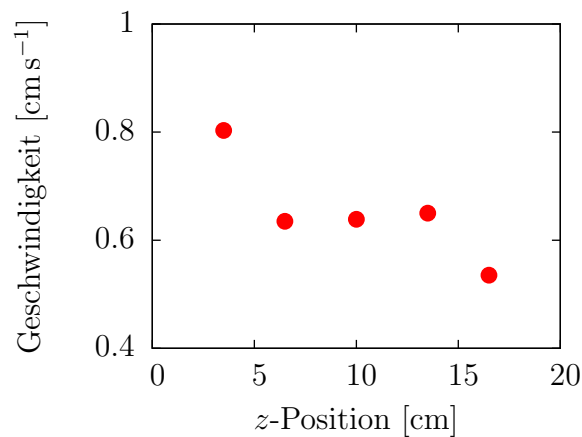
weils zweier Thermistoren gebildet. Die Zeit  $\tau$  des Maximums einer Korrelation entspricht der mittleren Zeit, die ein Plume braucht um von einem Thermistor zum anderen zu fließen. Mit dieser Zeit und dem Abstand zwischen der betrachteten Thermistoren lässt sich die Geschwindigkeit zwischen diesen bestimmen. In Abb. 9 sind die Korrelationen zwischen jeweils benachbarten Thermistoren zu sehen. Aus den Maxima der Korrelationen ergeben sich die mittleren Geschwindigkeiten in Abb. 10. Das Geschwindigkeitsprofil aus den Korrelationsmessungen spiegelt kein erwartetes Profil mit eindeutigem Minimum im Zentrum der Zelle wieder.

In der Simulation lässt sich das Geschwindigkeitsprofil direkt bestimmen, ohne Plumes zur Bestimmung heranziehen zu müssen. Die gemessenen Profile sind in Abb. 11a bis 11e zu sehen. Eine Ausbildung zweier Maxima ist ab einer Rayleigh-Zahl von  $10^4$  deutlich zu erkennen. Bei einer Rayleigh-Zahl von  $10^3$  jedoch ist die Geschwindigkeit  $\approx 0$ . In Abb. 11a sind demnach nur durch Diffusion verursachte Schwankungen zu sehen.

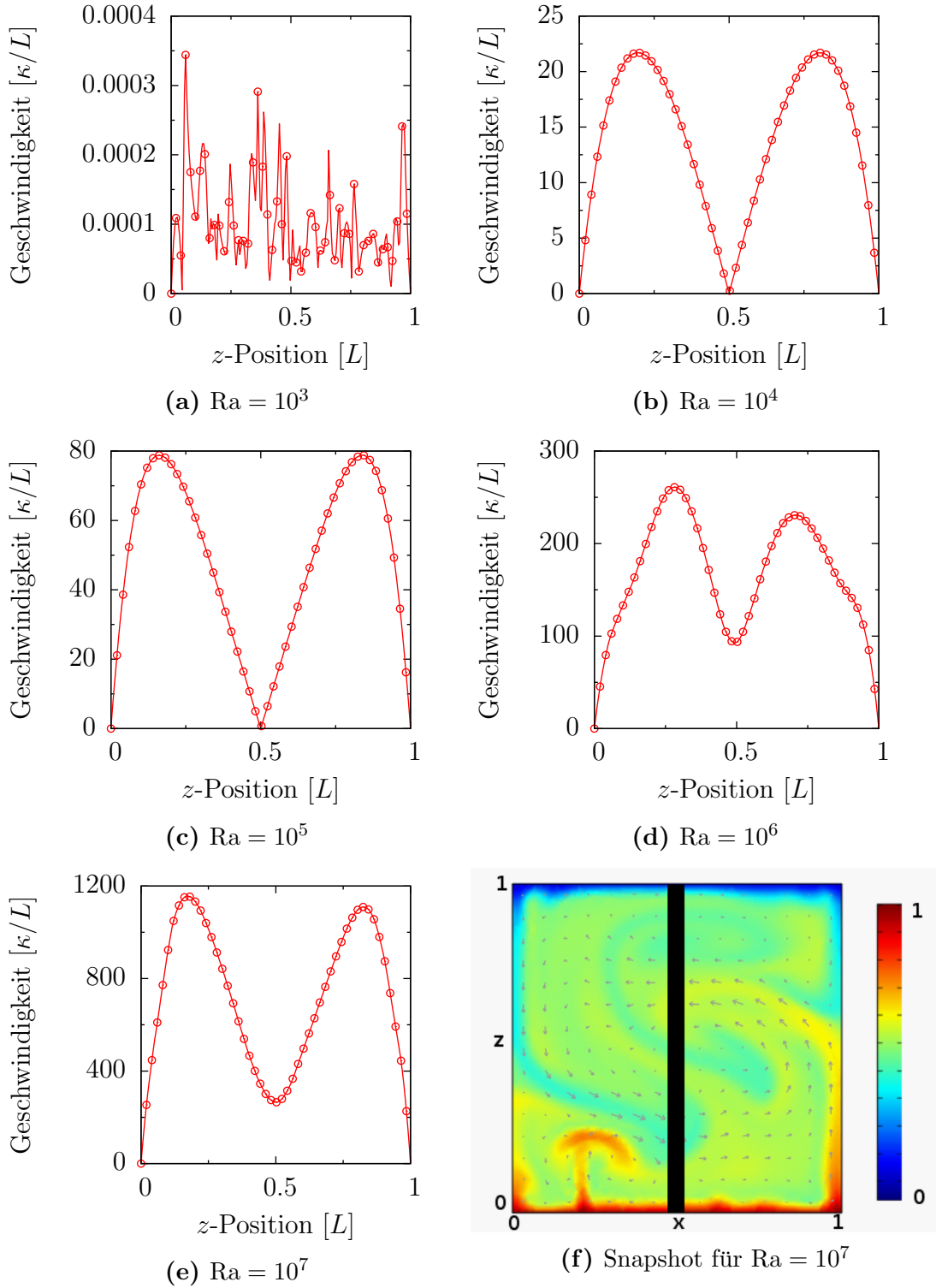
Abb. 11f zeigt eine farbkodierte Momentaufnahme des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes.



**Abbildung 9:** Korrelation benachbarter Thermistoren. Die Zeit der Maximums entspricht der Zeit, die ein Plume im Mittel braucht um die Strecke zwischen den Thermistoren zu überwinden. Zwischen dritten und viertem Thermistor liegt das Maximum bei einer größeren Zeit als erwartet, da der Abstand des dritten und vierten Thermistors größer ist.



**Abbildung 10:** Aus den Korrelationen bestimmte Werte für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand von der Kühlplatte. Das erwartete Profil mit Minimum in der Mitte, wie in Abb. 11 ist nicht zu erkennen.



**Abbildung 11:** Ergebnisse der numerischen Bestimmung der Geschwindigkeitsprofile für die Rayleighzahlen von  $10^3$  bis  $10^7$ . Zu sehen ist das zeitliche Mittel über die Achse durch das Zentrum der Box, wie sie in (f) hervorgehoben ist. Es wird nur jeder vierte Messwert durch einen Punkt dargestellt.



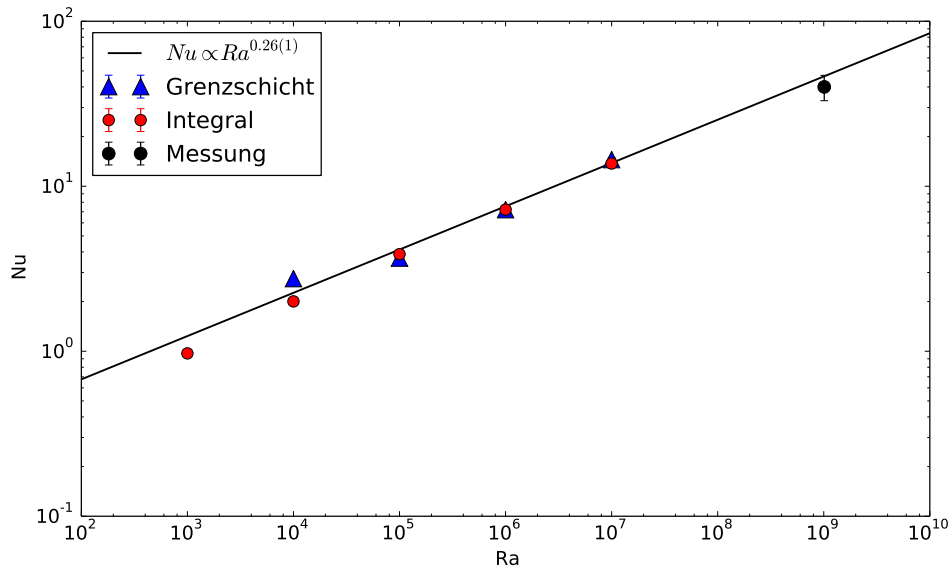
## 5.5 Bestimmung der Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl der Simulationen wurde auf zwei unterschiedliche Arten bestimmt. Mithilfe von *Comsol Multiphysics* wurde das Integral des Wärmegradienten über die obere Kante der Simulationsbox bestimmt. Da der Wärmefluss in diesem Aufbau der Kontinuitätsgleichung unterliegt, kann die Linie über die integriert wird frei gewählt werden. Es bietet sich an eine Linie zu wählen, welche in der thermischen Grenzschicht liegt, da der Temperaturgradient dort nahezu konstant ist (siehe Abb. 3). Die Ergebnisse für jede Rayleigh-Zahl lassen sich Abb. 12 entnehmen.

Die zweite Methode mit der die Nusselt-Zahl bestimmt wurde benutzt Gleichung (6) und die dafür nötige Bestimmung der Grenzschicht. Eine Methode der Grenzschichtbestimmung ist der Fit zweier linearer Funktionen an das Temperaturprofil. Da in der thermischen Grenzschicht nur diffusiver Wärmetransport stattfindet, kann das Temperaturprofil durch eine Gerade beschrieben werden. Das Ende der Grenzschicht wird durch den Schnittpunkt mit einer Gerade durch die konstante Temperatur im Zentrum der Zelle markiert. Für diesen Versuch wurde das Temperaturprofil außerhalb der Grenzschicht nicht mit einer Konstanten, sondern ebenfalls mit einer linearen Funktion angenähert.

Diese Methode wurde sowohl auf die simulierten Messwerte angewandt, als auch auf die experimentell ermittelten. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Abb. 12 aufgetragen.

Es ist ersichtlich, dass die Nusselt-Zahl über ein Potenzgesetz mit der Rayleigh-Zahl verknüpft ist. Der Fit einer Geraden durch den doppelt-logarithmischen Plot in Abb. 12 liefert ein Potenzgesetz der Form  $Nu \propto Ra^{0.26(1)}$ . Für den Fit wurde die Gesamtheit der Messwerte verwendet.



**Abbildung 12:** Nusselt-Zahl aufgetragen gegen die Rayleigh-Zahl. Der Fit ergibt ein Potenzgesetz für die Beziehung zwischen Nusselt-Zahl und Rayleigh-Zahl:  $Nu \propto Ra^{0.26(1)}$ . Die Fehler der Messwerte ergeben sich aus der Standardabweichung der jeweiligen linearen Fits und verschwinden für den Großteil der der Messwerte in der logarithmischen Darstellung. Die Werte der Grenzschichtmessung unterliegen zudem einem unbestimmten systematischen Fehler, durch die Wahl der Messwerte für den Fit der linearen Funktionen.

## 6 Diskussion

### 6.1 Schattenwurfmethode

Die Schattenwurfmethode ermöglicht eine sehr simple Bestimmung der Geschwindigkeit in der Zelle. Allerdings erlaubt sie keine Bestimmung eines Geschwindigkeitsprofils. Sie eignet sich jedoch um die Größenordnung der in der Zelle herrschenden Geschwindigkeiten zu schätzen.

Dadurch, dass die Konvektionszelle schräg präpariert wurde, sodass die Richtung der Konvektionswalze bei jedem F-Praktikumsversuch gleich ist, tritt ein systematischer Fehler auf. Es können nicht beide Seiten der Walze gleichzeitig scharfgestellt werden. Dadurch kommt es zu einer Überschätzung der Geschwindigkeit auf der unscharfen Seite der Zelle (bei uns die Seite der fallenden Plumes). Aufgrund des schlechteren Kontrastes werden nur die dunkelsten Plumes erkannt. Diese aber sind gleichzeitig die Plumes der größten Temperaturdifferenz zu ihrer Umgebung, und dadurch auch die schnellsten.

Bereits im Vorraus des Versuches lässt sich die Größenordnung der Geschwindigkeiten eingrenzen. Die Obergrenze entspricht dem freien Fall mit der Beschleunigung  $g\alpha\Delta T$ . Über 20 cm führt dies zu einer Geschwindigkeit von  $9.1\text{ cm s}^{-1}$ . Nach unten hin ist die Geschwindigkeit durch die Navier-Stokes-Gleichung beschränkt. Eine Dimensionsanalyse des Kräftegleichgewichts liefert eine Untergrenze von  $5 \times 10^{-3}\text{ cm s}^{-1}$ . Dies entspricht auch dem Ergebnis der Geschwindigkeit im diffusiven Regime in Abb. 11a.

Der gemessene Wert von  $0.50(1)\text{ cm s}^{-1}$  liegt damit im erwarteten Bereich.

### 6.2 Temperaturprofile

Das mit dem beweglichen Thermistor bestimmte Temperaturprofil spiegelt das erwartete Profil gut wieder. Ein lineares Verhalten in der Grenzschicht ist deutlich zu erkennen. Auch der konstante Temperaturverlauf im Zentrum der Zelle ist erkennbar (siehe Abb. 3). Die große Standardabweichung der Messwerte nah an der Heizplatte wird durch Plumes verursacht. Diese haben vor allem nah an der Heizplatte eine stark unterschiedliche Temperatur im Vergleich zur theoretischen Umgebungstemperatur des Thermistors. Verlässt man die Grenzschicht so verringert sich auch die Fluktuation der Temperatur durch Plumes.

Der Vergleich der 30-stündigen Temperaturmessung mit der Messung des beweglichen Transistors, liefert eine gute Übereinstimmung bezüglich der Konstanz der Temperatur im Zentrum der Zelle. Allerdings sind die Messwerte der Thermistorarrays geringfügig kleiner als die des einzelnen Thermistors. Dies kann durch eine Reihe von Gründen verursacht worden sein, von technischen Unterschieden zwischen Array und Einzelthermistor bis hin zur Temperaturschwankung durch den Tag-Nacht-Zyklus. Der wahrscheinlichste Grund für den niedrigeren Wert stammt jedoch daher, dass die für die Array-Messung verwendeten Messwerte von einem früheren F-Praktikumspaar stammen.

Die numerisch erzeugten Temperaturprofile zeigen die Abhängigkeit der Rayleigh-

Bénard-Konvektion von der Rayleighzahl klar auf. Der Überschlag von diffusiver zu konvektiver Wärmeleitung bei Übergang von  $Ra = 10^3$  zu  $Ra = 10^4$  ist sehr deutlich zu erkennen. Anzumerken ist jedoch, dass die Temperatur mit Abstand der Heizplatte leicht anwächst für  $Ra = 10^4$  und  $Ra = 10^5$ .

Abb. 6 zeigt die Schwankungen der Temperatur in der Nähe der Grenzschicht überaus gut auf. Im Zentrum der Zelle scheinen die Messwerte normalverteilt zu sein. Je näher man allerdings zum Rand der Zelle gelangt, desto länger wird der Schwanz der Verteilung. Der Median trennt sich vom Maximum der Verteilung. Dies stimmt auch mit der Beobachtung der großen Standardabweichung in Nähe der Grenzschicht in Abb. 3 überein.

### 6.3 Geschwindigkeitsprofile

Das über die Frequenzanalyse bestimmte Geschwindigkeitsprofil folgt dem erwarteten Profil relativ gut. Ein Problem jedoch ist die Messung einer Geschwindigkeit während der Thermistor in Kontakt mit der Heizplatte ist. Vermutlich wird dies durch die endliche Ausdehnung des Thermistors ermöglicht, da dies die Auflösung der Messung verschlechtert. Trotz dieses Problems lässt sich noch eine Grenzschicht im Geschwindigkeitsprofil erkennen, wie es in ?? durch den linearen Fit verdeutlicht wird.

Noch problematischer scheint auf den ersten Blick die Geschwindigkeitsmessung durch die Korrelation zu sein. Das so ermittelte Profil ähnelt den simulierten Profilen in keiner Weise. Der Grund für diese Form des Profils ist jedoch eng mit dem Problem der Schattenwurfmethode verbunden. Zunächst befindet sich das Thermistorarray nicht im Zentrum der Zelle sondern wesentlich näher am Rand. Dadurch befindet es sich zwangsläufig in entweder einem Aufstrom oder Abstrom (in diesem Fall einem Aufstrom) der Walze. Bei der gemessenen Geschwindigkeit handelt es sich also nur um die Geschwindigkeit aufsteigender Plumes. Diese kühlen jedoch auf dem Weg nach oben ab. Kühlere Plumes haben weniger Einfluss auf die gesamte Korrelationsfunktion. Die Plumes, die an den oberen Thermistoren jedoch noch mit hoher Auflösung erkannt werden, sind die wärmsten Plumes und damit die schnellsten. So wird mit dieser Methode keine symmetrische Geschwindigkeitsverteilung gemessen.

## 6.4 Bestimmung der Nusseltzahl

Für Rayleighzahlen ab  $Ra = 10^5$  stimmen die Ergebnisse für die Nusseltzahl für die Grenzschichtmethode und die Integralmethode gut überein. Die einzige Abweichung ist bei kleineren Rayleighzahlen (hier nur  $10^4$ ) festzustellen. Die relative Abweichung des Integralergebnisses vom Grenschichtergebnis beträgt dabei ca. 25 %. Betrachtet man die Temperaturprofile in Abb. 5 so lässt sich vermuten, dass die Grenzschichtmethode bei kleinen Rayleighzahlen ungenauer wird, da das lineare Regime der Temperatur schwerer einzugrenzen ist.

Insgesamt ergibt sich allerdings ein guter Wert für den Exponenten im ermittelten Potenzgesetz. In der Literatur wird hier ein Wert von 0.309 [3] damit eine relative Abweichung von ca. 16 %.

## Literatur

- [1] Getling A.V. *Rayleigh-Benard Convection: Structures and Dynamics*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics. World Scientific, 1997.
- [2] Comsol Multiphysics. <http://www.comsol.com/>.
- [3] J. J. Niemela and K. R. Sreenivasan. Confined turbulent convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 481:355–384, April 2003.
- [4] W. H. Reid and D. L. Harris. Some further results on the Bénard problem. *Physics of Fluids*, 1(2):102–110, 1958.
- [5] Frank D. Stacey and Paul M. Davis. *Physics of the Earth*. Cambridge University Press, 4th edition, 2008.
- [6] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publ. Clarendon Press, 1988.

## A Stoffkonstanten

Stoffkonstanten für den äußeren Erdkern, Erdmantel, Troposphäre und die Zelle im Versuch, größtenteils entnommen aus [5] und Wikipedia.

	äußerer Erdkern	Erdmantel	Troposphäre	Zelle
$\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]	$1.2 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-4}$
$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	12 000	5000	1.29	1000
$c_p$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	800	1200	1000	4187
$\lambda$ [W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	30	10	0.03	0.6
$\nu$ [Pa s]	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-21}$	$1.7 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-3}$
$\kappa$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$3.1 \times 10^{-6}$	$1.67 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-7}$
$L$ [m]	$225 \times 10^4$	$250 \times 10^4$	$15 \times 10^3$	0.2
$\Delta T$ [K]	2000	3400	60	10