Corrigés des exercices du lycée à la prépa scientifique

9 janvier 2023

Résumé

Ce document fournit un corrigé aux exercices proposés par les professeurs des lycées Louis-Le-Grand et Henri-IV aux lycéennes et lycéens qui souhaitent se préparer aux CPGE scientifiques. Il n'est aucunement associé à ces établissements, et constitue un projet indépendant pour accompagner les élèves intéressés - à ce titre, il est fourni libre de droits, mais sans aucune garantie. Les énoncés des exercices sont disponibles ici.

Un exercice n'a de valeur pédagogique que s'il est activement cherché : ce document peut alors servir de vérification, ou aider les élèves bloqués "pour de bon".

Pas moins de 561 exercices sont proposés : c'est considérable, et toutes les contributions pour les corriger sont donc bienvenues et appréciées ! Pour participer ou consulter la dernière version, c'est ici !

Table des matières

1 Rédaction, modes de raisonnement

Exercice 1. Montrons le résultat par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

— *Initialisation* pour $n = 1$ le résultat est clair, $1^3 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2 = 1$

— *Hérédité* supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2\frac{n(n+1)^2}{2} + (n+1)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^3
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

Exercice 2. Montrons le résultat par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— *Initialisation* pour $n = 0$, $5^1 = 1 + 1 \times 2^2$ donc $\lambda_0 = 1$.

— *Hérédité* supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
5^{2^{n+1}} &= \left(5^{2^n}\right)^2 \\
&= \left(1 + \lambda_n 2^{n+2}\right)^2 \\
&= 1 + 2\lambda_n 2^{n+2} + \lambda_n^2 2^{2(n+2)} \\
&= 1 + \left(\lambda_n + \lambda_n^2 2^{n+1}\right) 2^{(n+1)+2}
\end{aligned}$$

or λ_n est impair et $\lambda_n^2 2^{n+1}$ est pair, donc leur somme est impaire, ce qui montre qur la propriété est vraie au rang $n+1$.

Exercice 3. a) Si $a = 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison b, et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + bn$$

b) Comme on suppose $a \neq 1$, $\ell = a\ell + b \Leftrightarrow \ell = \frac{b}{1-a}$
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= (au_n + b) - (a\ell + b) \\ &= a(u_n - \ell) \\ &= av_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison a. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 a^n \\ &= (u_0 - \ell)a^n \\ &= \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n \end{aligned}$$

et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$$

d) D'après l'expression analytique de (u_n), la suite converge si et seulement si $u_0 = \frac{b}{1-a}$ (suite constante) ou $|a| < 1$. Dans les deux cas, la suite tend vers son point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Exercice 4. On vérifie (par exemple par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$, donc on peut considérer la suite définie pour $u_n = \ln(t_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \ln(t_{n+1}) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{t_n}}{e}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(t_n) - 1 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite arithmético-géométrique. D'après l'exercice 3, et avec les mêmes notations, on obtient $\ell = -2$ et pour tout n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$$

et par conséquent :

$$t_n = e^{-2}e^{-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

et l'on conclut que $t_n \to e^{-2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. On remarque que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$... Montrons donc par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $x_n = 2^{n-1}$ (le cas $n = 0$ étant connu).

— *Initialisation* : pour $n = 1$, on a bien $1 = 2^{1-1}$.

— *Hérédité* : supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. Alors :

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k + x_n = 2x_n = 2^n = 2^{(n+1)-1}$$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 6.

Exercice 7.

— *Initialisation* : La propriété est immédiate pour $n = 0$ et $n = 1$

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 6u_{n-1} \\ &= 5(2^n + 3^n) - 6(2^{n-1} + 3^{n-1}) \\ &= 2^{n-1}(5 \times 2 - 6) + 3^{n-1}(5 \times 3 - 6) \\ &= 2^{n-1} \times 2^2 + 3^{n-1} \times 3^2 \\ &= 2^{n+1} + 3^{n+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

Remarque : on utilise l'hypothèse de récurrence aux rangs n et $n - 1$, donc l'initialisation doit porter sur les deux premiers termes.

Exercice 8. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

— *Initialisation* : La propriété est vraie par définition pour $n = 0$ et $n = 1$

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n^2}{u_{n-1}} \\ &= \frac{2^{2n}}{2^{n-1}} \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

Exercice 9. Les premiers termes de la suite valent 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3,... On va donc montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lfloor n/2 \rfloor$.

— *Initialisation* : D'après ce qui précède, la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq 1$, alors :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & n - u_n \\ & = & n - \lfloor n/2 \rfloor \end{array}$$

et l'on va séparer les cas pairs et impairs :

— Si $n = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = 2k - \lfloor k \rfloor = k = \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$

— Si $n = 2k+1$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = 2k+1 - \lfloor (2k+1)/2 \rfloor = 2k+1-k = k+1 = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$

donc dans tous les cas $u_{n+1} = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, ce qui achève la preuve.

Exercice 10. a) Les premiers termes de la suite valent -1, 1, -1, 1, -1,... On va donc montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.

— *Initialisation* : D'après ce qui précède, la propriété est vraie pour $n = 0$

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq 0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{n+1} & = & F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}^2 \\ & = & F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) - F_{n+2}(F_n + F_{n+1}) \\ & = & F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_{n+2} \\ & = & -\Delta_n \\ & = & (-1)^{n+2} \end{array}$$

ce qui achève la preuve.

b) Avec les notations du polycopié, pour tout entier naturel n, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$, et par suite :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_n & = & \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}} - \left(\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ & = & \dfrac{1}{5}\left(\alpha^{2n+2} - \alpha^n\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}\beta^n + \beta^{2n+2} - \alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}\right) \\ & = & \dfrac{1}{5}\left(-\alpha^n\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}\beta^n + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}\right) \\ & = & \dfrac{(\alpha\beta)^n}{5}\left(2\alpha\beta - (\alpha + \beta)\right) \end{array}$$

ici, on utilise le fait que α et β sont les racines de $x^2 - x - 1 = 0$, donc [1] leur somme vaut 1 et leur produit vaut -1. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{(\alpha\beta)^n}{5}(2\alpha\beta - (\alpha+\beta)) \\
&= \frac{(-1)^n}{5}(-4-1) \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

comme attendu.

Exercice 11. a) Soient α et β dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\
&= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\
&= a\left(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}\right) + b\left(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n\right) \\
&= au_{n+1} + bu_n
\end{aligned}$$

donc $(\alpha\lambda^n + \beta\lambda^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}$.

b) Quitte à échanger λ et μ, on peut supposer $\lambda \neq 0$. Comme $\alpha + \beta = u_0 \Leftrightarrow \lambda\alpha + \lambda\beta = \lambda u_0$, le système est équivalent à $\alpha+\beta = u_0$ et $\beta(\lambda - \mu) = \lambda u_0 - \mu$. Comme $\lambda \neq \mu$, on peut diviser par $\lambda - \mu$, et le système est équivalent à $\beta = \frac{\lambda u_0 - \mu}{\lambda - \mu}$ et $\alpha = u_1 - \frac{\lambda u_0 - \mu}{\lambda - \mu}$. [2]

c) On va montrer le résultat par récurrence.
- *Initialisation* : D'après b), la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- *Hérédité* : supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq 1$, alors la preuve de l'hérédité est identique au calcul mené au point a).

d) Les solutions λ, μ de $x^2 = 5x - 6$ sont $\{2; 3\}$ donc d'après c), il existe deux réels α, β tels que $u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$. Comme dans b), on obtient $\beta = \frac{\lambda u_0 - \mu}{\lambda - \mu} = 1$ et $\alpha = u_0 - \beta = 1$.

Exercice 12.

Exercice 13. a) Montrons le résultat par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$:
- *Initialisation* : comme $2^0 = 1 \in A$, la propriété est vraie pour $m = 0$.

1. Rappel : quand elles existent et $a \neq 0$, les racines réelles de $ax^2 + bx + c = 0$ ont pour somme $-b/a$ et pour produit produit c/a

2. en prépa, on écrira le problème sous forme matricielle, et il suffira de montrer que le déterminant de la matrice est non nul pour conclure : ici, il vaut $\mu - \lambda \neq 0$.

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie au rang $m \geq 0$. On a : $2^{m+1} = 2 \times 2^m$. Par hypothèse de récurrence, $2^m \in A$, donc par stabilité de A par doublement, $2^{m+1} \in A$, ce qui achève la preuve.

b) Comme par définition $A \subseteq \mathbb{N}^*$, on va montrer que $\mathbb{N}^* \subseteq A$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on souhaite montrer que $n \in A$. Comme $2^m \to +\infty$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel quel $n \leq 2^{m_0}$, et un entier $k \in \{0, \cdots, 2^{m_0} - 1\}$ tel que $n = 2^{m_0} - k$. Montrons par récurrence finie que pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^{m_0} - 1\}$, $2^{m_0} - k \in A$.

— *Initialisation* : comme $2^{m_0} - 0 = 2^{m_0} \in A$ d'après a), la propriété est vraie pour $k = 0$.

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie au rang $k \in \{0, \cdots, 2^{m_0} - 2\}$. Alors $2^{m_0} - (k+1) = (2^{m_0} - k) - 1$, et par hypothèse de récurrence $2^{m_0} - k \in A$, donc par propriété *ii)* on a $2^{m_0} - (k+1) \in A$.

Finalement, $n \in A$, ce qui prouve que $\mathbb{N}^* \subseteq A$, et par suite que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, donc $a - c = (d - b)\sqrt{2}$. Supposons $d - b \neq 0$, alors $\frac{a-c}{d-b} = \sqrt{2}$, et $\frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$: c'est une contradiction, puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On a donc $d = b$, ce qui entraîne immédiatement que $a = c$.

Exercice 18. Il suffit d'adapter la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$: supposons que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, alors il existe des entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, ce qui implique $a^2 = 3b^2$. Comme 3 est premier et divise a^2, d'après le lemme d'Euclide[3] 3 divise a. Il existe donc un entier k tel que $a = 3k$, et $3^2k^2 = 3b^2$, soit encore $b^2 = 3k^2$: on voit que 3 divise également b, en contradiction avec l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux.

Cette preuve s'étend directement pour montrer que pour tout nombre premier p, $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Plus généralement, on peut montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$: si un entier n'est pas un carré parfait, alors sa racine carrée est irrationnelle. Supposons $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, alors il existe des entiers a et b premiers entre eux, avec $b \neq 0$, tels que $a^2 = nb^2$. Comme a et b sont premiers entre eux, a^2 et b^2 le sont aussi. Comme a^2 divise nb^2, d'après le

3. *Lemme d'Euclide* : soient a et b deux entiers. Si un nombre premier p divise le produit ab, alors p divise a ou p divise b. Le *lemme de Gauss* en est une généralisation : pour trois entiers a, b, c, si a divise le produit bc et a est premier avec b, alors a divise c.

lemme de Gauss a^2 divise n. D'autre part, $a^2 \geq n$, donc $a^2 = n$ et $b = 1$: n est bien un carré parfait.

Exercice 19. Supposons $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \in \mathbb{Q}$, alors il existe des entiers a et $b \neq 0$ tels que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{a}{b}$, soit encore $a\ln(2) = b\ln(3)$. En prenant l'exponentielle, cela implique $2^a = 3^b$, mais 2 et 3 sont premiers entre eux donc $a = b = 0$, contradiction.

Exercice 20. a) Soit $u \in \mathbb{Q}$ et $v \notin \mathbb{Q}$. Supposons $u + v \in \mathbb{Q}$: alors $v = (u + v) - u$ est la différence de deux nombre rationnels, donc v est rationnel : contradiction.
b) Soit $u \in \mathbb{Q}^*$ et $v \notin \mathbb{Q}$. Supposons $uv \in \mathbb{Q}$: comme $u \neq 0$, il est inversible et son inverse est rationnel. alors $v = uv\frac{1}{u}$ est le produit de deux rationnels, donc $v \in \mathbb{Q}$: contradiction.
c) $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$. On a aussi $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pour le produit, $\sqrt{2}\sqrt{2} = 4 \in \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2}\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ car 6 n'est pas un carré parfait [4].

Exercice 21. $\sqrt{6}$ est irrationnel car 6 n'est pas un carré parfait (cf exercice 18). Supposons $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, alors il existe des entiers a, b avec $b \neq 0$ tels que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, donc en élevant au carré : $2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{a^2}{b^2}$, et $\sqrt{6} = \frac{a^2}{2b^2} - \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$: contradiction.

Exercice 22.

Exercice 23. a) pour $x = y = 0$, on a $2f(0) = 4f(0)$, donc $f(0) = 0$. Pour la parité, on considère $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $f(y)+f(-y) = 2(f(0)+f(y)) = 2f(y)$, donc $f(-y) = f(y)$, ce qui montre que f est paire.

b) Soit $(x, h) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{aligned}
f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = 2f(h) \quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{2f(h)}{h^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2} \\
&\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + f(-h) -}{h^2} \\
&\Rightarrow \quad f''(x) = f''(0)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que f'' est constante.

c) On déduit de b) qu'il existe a, b, c réels tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4. cf exercice 18

- $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, donc $f(x) = ax^2 + bx$
- Comme f est paire, sa dérivée est impaire (voir exercice 151), et en particulier $f'(0) = 0$. Comme $f'(x) = 2ax + b$, on obtient $b = 0$.
- On conclut avec la synthèse : s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, alors pour tous x, y réels $f(x+y) + f(x-y) = a(x+y)^2 + a(x-y)^2 = 2(ax^2 + ay^2)$, comme attendu. Finalement, on a bien caractérisé l'ensemble des solutions.

Exercice 24. a) En prenant $x = y = 0$, il vient $f(0) = 2f(x)$, donc $f(0) = 0$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$, ce qui prouve que f est impaire.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$:
- *Initialisation* : Fixons $n = 0$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x)$
- *Hérédité* : Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx + x) \\ &= f(nx) + f(x) \\ &= nf(x) + f(x) \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

  ce qui achève la preuve.

Puisque f est impaire, le résultat peut être étendu sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(kx) = kf(x)$$

en effet, si $k < 0$, alors pour tout x réel $f(kx) = -f((-k)x) = kf(x)$.

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$, d'après le point b) on remarque que :

$$f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

ce qui implique $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(1)}{q}$. Soit $x \in \mathbb{Q}$: il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$, et alors :

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1) = ax$$

d) Tout réel s'écrit comme limite d'une suite de nombres rationnels car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: en particulier, tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel [5]. Soit $x \in \mathbb{R}$: alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $\left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$ contient un rationnel r_n, et $|r_n - x| < \frac{1}{n}$ donc $r_n \to x$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après d), il existe une suite de rationnels (x_n) qui tend vers x. D'après c), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = ax_n \to ax$, et comme f est continue, $f(x_n) \to f(x)$. Par unicité de la limite, on conclut que $f(x) = ax$.

5. et même une infinité, mais un seul nous suffit ici !

2 Calcul algébrique

Exercice 25.

$$\begin{aligned} A &= \frac{ad}{bc} \\ B &= \frac{a}{bc} \\ C &= \frac{ac}{b} \end{aligned}$$

Exercice 26. a)

$$\begin{aligned} \ln(56) - \ln(7) + \ln(4) &= \ln(7 \times 2^3) - \ln(7) + \ln(2^2) \\ &= \ln(7) + 3\ln(2) - \ln(7) + 2\ln(2) \\ &= 5\ln(2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{216}) &= \ln(\sqrt{6^3}) \\ &= \ln(6^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{3}{2}\ln(6) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \ln(49) + \ln(21) - 3\ln(7) &= \ln(7^2) + \ln(3 \times 7) - 3\ln(7) \\ &= 2\ln(7) + \ln(3) + \ln(7) - 3\ln(7) \\ &= \ln(3) \end{aligned}$$

Exercice 27. Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i = \lambda b_i$. Mais alors,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{\lambda(b_1 + \cdots + b_n)}{b_1 + \cdots + b_n} = \lambda$$

Exercice 28. Comme les deux nombres sont positifs, il suffit de montrer que leurs carrés sont égaux :

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 &= 4(2+\sqrt{3}) \\ &= 2 + 4\sqrt{3} + 6 \\ &= \sqrt{2}^2 + 2(\sqrt{2}\sqrt{6}) + \sqrt{6}^2 \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 \end{aligned}$$

Exercice 29. Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^2$. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$. Alors :

- $x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$ et $(a + c, b + d) \in \mathbb{Q}^2$, donc $x + y \in \mathbb{K}$
- $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}$ et $(a - c, b - d) \in \mathbb{Q}^2$, donc $x + y \in \mathbb{K}$. On peut aussi simplement remarquer que $y \in \mathbb{K} \Rightarrow -y \in \mathbb{K}$ et se ramener au cas précédent.
- $xy = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$ et $(ac+2bd, ad+bc) \in \mathbb{Q}^2$, donc $xy \in \mathbb{K}$
- Supposons $x \neq 0$, alors on a aussi $a - b\sqrt{2} \neq 0$:
  - si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et le résultat est acquis.
  - si $b \neq 0$, on aurait $\sqrt{2} = a/b \in \mathbb{Q}$, contradiction.

  Reprenons l'énoncé, et utilisons la quantité conjuguée $a - b\sqrt{2} \neq 0$:

  $$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2}$$

  et $\frac{a}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$, donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{K}$.

Remarque : l'ensemble $\mathbb{K}$ est souvent noté $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, et l'on vient de démontrer qu'il est stable par addition et multiplication, et que chaque élément possède un opposé et un inverse (sauf 0). On verra en première année de prépa que ces propriétés sont liées à la structure d'anneau, et que cet exercice montre en fait que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 30.

Exercice 31. Calculons quelques exemples :

- $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2$
- $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2$
- $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2$
- $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 29^2$

On va donc montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1 = ((k + 1)(k + 2) - 1)^2$$

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned}
((k + 1)(k + 2) - 1)^2 &= (k + 1)^2(k + 2)^2 - 2(k + 1)(k + 2) + 1 \\
&= (k + 1)(k + 2)\left[(k + 1)(k + 2) - 2\right] + 1 \\
&= (k + 1)(k + 2)(k^2 + 3k) + 1 \\
&= k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1
\end{aligned}$$

Remarque : on a aussi $k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1 = (k(k + 3) + 1)^2$

Exercice 32. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= (x^2)^2 + (2y^2)^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy) \\ &= \left(y^2+(x+y)^2\right)\left(y^2+(x-y)^2\right) \end{aligned}$$

Exercice 33.

Exercice 34.

Exercice 35.

Exercice 36. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - n \\ &= 2\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Exercice 37. On a $u_0 = 0$ (par convention, une somme vide vaut 0). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \frac{n^2+n}{3} - \frac{(n-1)^2+(n-1)}{3} \\ &= \frac{2n}{3} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n}{3}$.

Exercice 38. Chaque élément de la table s'écrit $i \times j$ avec $1 \leq i, j \leq n$. La moyenne vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Remarque : la difficulté de l'exercice est de bien maîtriser le symbole Σ. Ici, on a pu mettre en facteur i dans la somme sur j, puis mettre en facteur toute la somme sur j dans la somme sur i.

Exercice 39.

Exercice 40. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Le cas $x = 1$ est connu :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Supposons maintenant $x \neq 1$, ce qui va permettre de diviser par $1 - x$ dans la suite. L'idée est de faire "apparaître" une dérivée : au lieu de kx^k, on voudrait kx^{k-1}, qui est la dérivée de $x \mapsto x^k$; on factorise donc par x :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kx^k &= x\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} \\
&= x\sum_{k=0}^{n} \left(x^k\right)' \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' \\
&= x\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' \\
&= x\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} \\
&= x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in]-1,1[$, $nx^{n+1} \to 0$ et $(n+1)x^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=0}^{n} kx^k \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{x}{(x-1)^2}$$

Exercice 41. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

de plus, $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$, donc $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{n}$ ce qui prouve que $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 42.

Exercice 43.

Exercice 44.

Exercice 45.

Exercice 46.

Exercice 47.

Exercice 48.

Exercice 49.

Exercice 50.

Exercice 51.

Exercice 52.

Exercice 53.

Exercice 54.

Exercice 55.

3 Inégalités, inéquations, trinôme du second degré réel

Exercice 56. Comme tout est strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} &\Rightarrow ab' > a'b \\
&\Rightarrow nab' > na'b \\
&\Rightarrow maa' + nab' > maa' + na'b \\
&\Rightarrow a(ma' + nb') > a'(ma + nb) \\
&\Rightarrow \frac{ma' + nb'}{ma + nb} < \frac{a}{a'}
\end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} &\Rightarrow ab' > a'b \\
&\Rightarrow mab' > ma'b \\
&\Rightarrow nbb' + mab' > nbb' + ma'b \\
&\Rightarrow b'(ma + nb') > b(ma' + nb') \\
&\Rightarrow \frac{b}{b'} < \frac{ma' + nb'}{ma + nb}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{b}{b'} < \frac{ma' + nb'}{ma + nb} < \frac{a}{a'}$$

Exercice 57. a) $(a, b) \in]0, 1]^2 \Rightarrow ab \in]0, 1] \Rightarrow ab - 1 \leq 0$. De même $bc - 1 \leq 0$ et $ac - 1 \leq 0$, donc on a le produit de trois nombres négatifs : $(ab - 1)(bc - 1)(ac - 1) \leq 0$.
b) Développons et divisons par $abc > 0$:

$$\begin{aligned}
(ab - 1)(bc - 1)(ac - 1) \leq 0 &\Leftrightarrow a^2b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 + ab + bc + ac - 1 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow a^2b^2c^2 + ab + bc + ac \leq 1 + a^2bc + ab^2c + abc^2 \\
&\Leftrightarrow abc + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \leq + \frac{1}{abc} + a + b + c
\end{aligned}$$

Exercice 58. Pour x et y réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$, on a :

$$\begin{aligned}
(1 - x)(1 - y) > 0 &\Rightarrow (1 + xy) - (x + y) > 0 \\
&\Rightarrow x + y < 1 + xy \\
&\Rightarrow \frac{x + y}{1 + xy} < 1
\end{aligned}$$

car $1+xy>0$. De plus,

$$\begin{aligned}(1+x)(1+y)>0 &\Rightarrow (1+xy)+(x+y)>0\\ &\Rightarrow 1+\frac{x+y}{1+xy}>0\\ &\Rightarrow \frac{x+y}{1+xy}>-1\end{aligned}$$

Finalement on a bien $-1<\frac{x+y}{1+xy}<1$

Exercice 59. a) x^2 décrit $[0,+\infty[$ et x^3 décrit $[-8,+\infty[$ quand x décrit $[-2,+\infty[$.
b) $\frac{1}{x}$ décrit $\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[$ quand x décrit $]-4,0[$, et $\left[\frac{1}{5},+\infty\right[$ quand x décrit $]0,5]$. Finalement, $\frac{1}{x}$ décrit $\mathbb{R}\backslash\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right[$ quand x décrit $]-4,5]\backslash\{0\}$.

Remarque : attention aux bornes !

Exercice 60.

Exercice 61. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}|x+y|\leq|x|+|y| &\Leftrightarrow (x+y)^2\leq(|x|+|y|)^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy\leq|x|^2+|y|^2+2|x||y|\\ &\Leftrightarrow xy\leq|xy|\end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai. De plus pour l'égalité, $xy=|xy|\Rightarrow xy\geq 0$ et donc que x et y sont de même signe.

Exercice 62. Pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}=|x|+|1-x|$$

On distingue trois cas :
— $x<0\Rightarrow|1-x|>1\Rightarrow|x|+|1-x|>1$
— $x>1\Rightarrow|x|>1\Rightarrow|x|+|1-x|>1$
— $x\in[0,1]\Rightarrow|x|+|1-x|=x+(1-x)=1$
Finalement, l'ensemble des solutions est $[0,1]$.

Interprétation géométrique et solution plus élégante : la valeur absolue mesure la distance "usuelle" (euclidienne) : $|x|=|x-0|$ est la distance de x à 0, et $|x-1|$ est la distance de x à 1. On cherche donc des points dont la distance à 0 plus la distance à 1 est identique. Si l'on prend le problème dans $\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire dans le plan au lieu de sur une droite, c'est la définition d'une ellipse de foyers (0,0) et (1,0).

— Ici, comme la constante est exactement la distance entre les foyers, l'ellipse est aplatie et devient le segment entre les foyers, c'est-a-dire $[0, 1]$: on a donc une solution sans calcul, mais qui demande une certaine culture géométrique !
— Si la constante était strictement inférieure a la distance entre les foyers, il n'y aurait aucune solution, ni sur la droite, ni dans le plan.
— Enfin, si la constante était strictement supérieure a la distance entre les foyers, les deux solutions réelles seraient l'intersection de l'ellipse avec l'axe des abscisses.

Exercice 63. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier non nul $k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

On utilise cette minoration pour montrer (avec un peu de travail pour recoller les morceaux !) que la somme des inverses des entiers tend vers l'infini.

Exercice 64. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]1, +\infty[$, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

Comme $a > 1$, pour tout entier $k \leq n - 1$, on a $a^k \leq a^{n-1}$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$$

Et finalement

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq na^{n-1}$$

Exercice 65. Soient deux réels positifs a et b. Par symétrie de l'énoncé, on peut supposer sans perte de généralité que $a \geq b$.

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a - b|} &\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \leq |a - b| \\ &\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \leq |a - b| \end{aligned}$$

Puisqu'on a supposé $a \geq b \geq 0$, $\sqrt{ab} \geq b$ et $|a - b| = a - b$:

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a - b|} &\Leftrightarrow a + b - 2b \leq a - b \\ &\Leftrightarrow a - b \leq a - b \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat.

Alternative : on peut aussi utiliser le fait que pour a et b positifs, $|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$, et $\min(a, b) \leq \sqrt{ab} \leq \max(a, b)$.

Exercice 66. On sait que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. En prenant $a = \sqrt{k+1}$ et $b = \sqrt{k}$ dans chaque terme de la somme, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \geq 2022 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} \geq 2022 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \geq 2022 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1} - 1 \geq 2022 \quad \text{par téléscopage} \\
&\Leftrightarrow \quad n \geq 2023^2 - 1
\end{aligned}$$

Finalement, le plus petit entier solution est $2023^2 - 1$.

Exercice 67.

Exercice 68. a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq m \leq n-1$, on rappelle que :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

et que la factorielle satisfait $(m+1)! = m!(m+1)$, donc en simplifiant :

$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} = \frac{n-m}{m+1} = 1 + \frac{n-2m-1}{m+1}$$

ce qui montre que

$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} \geq 1 \Leftrightarrow n-2m-1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

b) D'après le point a), on a toute de suite :

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \cdots \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1}$$

or $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ce qui permet de retrouver le résultat de l'énonce.

c) On rappelle la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

En prenant $x = y = 1$, et comme les coefficients binomiaux sont positifs [6], on a tout de suite la majoration :

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Reste la minoration : en se rappelant que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on voit que $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ majore en fait tous les $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$. Comme il y a exactement $n+1$ termes dans la formule du binôme, on a :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq (n+1) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

ce qui prouve finalement que $\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$.

Exercice 69. a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $f_k : x \mapsto |x-k|$, fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{k\}$ et sa dérivée vaut -1 si $x < k$, et +1 si $x > k$.
Par linéarité de la dérivation, on a donc que $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ est dérivable sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}\backslash\{1, 2, \cdots, 2022\}$, et sa dérivée au point $x \in \mathbb{K}$ vaut :

(nombre d'entiers naturels inferieurs à x)$-$(nombre d'entiers superieurs à x et inferieurs à 2022)

De façon informelle, on voit que ce nombre est négatif jusqu'à avoir autant d'entiers avant et après x ($x < 1011$), qu'alors il s'annule ($1011 < x < 1012$), et redevient positif ($x > 1012$). Plus formellement, on écrit pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2022 \quad \text{si } x < 1 \\
f'(x) &= +2022 \quad \text{si } x > 2022 \\
f'(x) &= \lfloor x \rfloor - (2022 - \lfloor x \rfloor) = 2\lfloor x \rfloor - 2022 \quad \text{si } x \in \mathbb{K} \cap]1, 2022[
\end{aligned}$$

Étudions le signe de f' sur $\mathbb{K} \cap]1, 2022[$ pour étudier les variations de f. On rappelle que $x \in \mathbb{K}$, donc x n'est jamais entier :

$$\begin{aligned}
2\lfloor x \rfloor - 2022 < 0 &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < 1011 \Leftrightarrow x < 1011 \\
2\lfloor x \rfloor - 2022 = 0 &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 1011 \Leftrightarrow x \in]1011, 1012[\\
2\lfloor x \rfloor - 2022 > 0 &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > 1011 \Leftrightarrow x > 1012
\end{aligned}$$

En recollant avec les autres intervalles, on conclut que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1011[$, constante sur $]1011, 1012[$, et strictement croissante sur $[1012, +\infty[$.

6. c'est important de le préciser, sinon la somme pour être inférieure à l'un de ses termes !

b) D'après ce qui précède, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f atteint son minimum en tout point de l'intervalle $]1011, 1012[$. Considérons donc $m \in]1011, 1012[$, et regroupons astucieusement les termes : à tout indice $1 \leq k \leq 1011$ on associe l'indice $k' = 2023 - k$. On observe que $k < m < k'$ donc $|m-k| + |m-k'| = |k'-k| = |2023 - 2k|$, donc :

$$f(m) = \sum_{k=1}^{1011} (2023 - 2k)$$

Effectuons le changement d'indice $j = 1012 - k$ (donc $k = 1012 - j$, ce qui revient simplement à sommer les termes "à l'envers") :

$$f(m) = \sum_{k=j}^{1011} (2j - 1) = 1011^2$$

car on se souvient, bien entendu, de la formule de la somme des nombres impairs ! Pour rappel, elle est démontrée dans l'exercice 36.
Finalement, le minimum de la fonction vaut 1011^2.

Exercice 70. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$, appelée *partie fractionnaire* de x. Alors $2x = 2\lfloor x \rfloor + 2F(x)$. Deux cas sont possibles :
— $F(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow 2F(x) \in [0, 1[\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$
— $F(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\Rightarrow 2F(x) \in [1, 2[\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$
Finalement, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Exercice 71.

Exercice 72. On va utiliser les notations et le résultat de l'exercice 70. On introduit en plus la notation "indicatrice" pour tout énoncé p : 1_p qui vaut 1 si p est vrai et 0 sinon. Dans l'exercice 70, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1_{F(x) \geq \frac{1}{2}}$ Comme $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor F(x) + F(y) \rfloor$, on obtient après simplification :

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 1_{F(x) \geq \frac{1}{2}} + 1_{F(y) \geq \frac{1}{2}} - \lfloor F(x) + F(y) \rfloor$$

On remarque ensuite que $\lfloor F(x) + F(y) \rfloor = 1_{\min(F(x), F(y)) \geq \frac{1}{2}}$ pour conclure : le résultat vaut $1 + 1 - 1 = 1$ si $\min(F(x), F(y) \geq \frac{1}{2}$, et $1_{F(x) \geq \frac{1}{2}} + 1_{F(y) \geq \frac{1}{2}} = 1_{\max(F(x), F(y)) \geq \frac{1}{2}} \in \{0, 1\}$ sinon. Dans tous les cas, $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Exercice 73.

Exercice 74.

Exercice 75.

Exercice 76.

Exercice 77.

Exercice 78. a) pour tous réels positifs a, b, c, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\begin{aligned}
(a+b)(b+c)(c+a) &= (ab+ac+b^2+bc)(c+a) \\
&= abc+ac^2+cb^2+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc \\
&= 2abc+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \\
&\leq 2abc+a(2bc)+b(2ac)+c(2ab) \\
&\leq 8abc
\end{aligned}$$

b) de la même façon :

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(ab+bc+ca) &= a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^c+abc+cab+bc^2+ac^2 \\
&= 3abc+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \\
&\leq 3abc+a(2bc)+b(2ac)+c(2ab) \\
&\leq 9abc
\end{aligned}$$

Exercice 79.

Exercice 80.

Exercice 81.

Exercice 82.

Exercice 83. Pour $m \in \mathbb{R}$, le discriminant vaut :

$$\Delta(m) = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$$

Donc :

— Si $m \in \{-2, +2\}$, $\Delta(m) = 0$ et p_m admet une racine réelle double.
— Si $|m| < 2$, $\Delta(m) < 0$ et p_m n'admet aucune racine réelle.
— Si $|m| > 2$, $\Delta(m) > 0$ et p_m admet deux racines réelles distinctes.

Exercice 84.

Exercice 85.

Exercice 86.

Exercice 87.

Exercice 88.

Exercice 89.

Exercice 90.

Exercice 91.

Exercice 92.

Exercice 93.

Exercice 94. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^n 1 \times x_i\right| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &\leq \sqrt{n}\sqrt{1} \end{aligned}$$

donc

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \sqrt{n}$$

4 Trigonométrie

Exercice 95. $\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ donc :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 96.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

car on sait que $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$

Exercice 97. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, donc le minimum sur $\mathbb{R}$ vaut $-\frac{1}{2}$ et le maximum $\frac{1}{2}$

Exercice 98. En posant $X = \cos(x)$, on cherche le minimum et maximum de $X(1-X)$ pour $X \in [-1, +1]$. On peut faire une etude formelle ; le maximum vaut $\frac{1}{4}$ (pour $X = \frac{1}{2}$, donc $x = \pm\frac{\pi}{3}$ modulo 2π) et le minimum -2 (pour $X = -1$, donc $x = \pi$ modulo 2π).

Exercice 99. Soit O le centre de Γ. Pour tout $0 \leq i \leq 5$, $OA_i = OA_{i+1} = A_iA_{i+1} = R$, donc OA_iA_{i+1} est un triangle équilatéral. Par suite, $\widehat{A_iOA_{i+1}} = \frac{\pi}{3}$ et :

$$\widehat{A_0OA_6} = \sum_{i=0}^{5} \widehat{A_iOA_{i+1}} = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

et comme $OA_0 = OA_6 = R$, cela prouve que $A_0 = A_6$.

Exercice 100. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin : Généraliser à $\cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et la formule du binôme. Le polynôme T_n tel que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ est appelé le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev de première espèce.

Exercice 101. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 &= 2\left(2\cos^2(x) - 1\right) + 4\cos(x) + 3 \\
&= 4\cos^2(x) + 4\cos(x) + 1 \\
&= (2\cos(x) + 1)^2
\end{aligned}$$

on en déduit que $2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 \geq 0$, et pour l'égalité :

$$\begin{aligned}
2\cos(2x) + 4\cos(x) + 3 = 0 &\Leftrightarrow (2\cos(x) + 1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\} \text{ modulo } 2\pi
\end{aligned}$$

Exercice 102. a) Calculons :

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= 2\cos^2(\alpha) - 1 \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{3 - \sqrt{5}}{4} - 1 \\
&= -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\cos(4\alpha) &= 2\cos^2(2\alpha) - 1 \\
&= 2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{3 + \sqrt{5}}{4} - 1 \\
&= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}
\end{aligned}$$

b) On a $\cos(\alpha) = \cos(4\alpha)$, ce qui implique bien $4\alpha = \pm\alpha$ modulo 2π.
c) D'après b), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4\alpha = \pm\alpha + 2k\pi$, donc $\alpha \in \left\{\frac{2k\pi}{5}, \frac{2k\pi}{3}\right\}$. Comme on cherche $\alpha \in [0, \pi]$, on a $\alpha \in \left\{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right\}$. Comme on sait que $\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{5} \leq \pi$, on peut exclure $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$ dont le cosinus est négatif. Enfin, comme $\cos(0) = 1$, il ne reste que $\alpha = \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 103. Pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) \geq \sin(x) &\Leftrightarrow \cos(x) - \sin(x) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ modulo } 2\pi \\
&\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ modulo } 2\pi
\end{aligned}$$

Finalement, comme on veut $x \in [0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions est $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

Exercice 104. Considérons la fonction $f : x \mapsto \cos(\sin(x)) - \sin(\cos(x))$, définie sur $\mathbb{R}$, et montrons qu'elle est à valeurs strictement positives. Comme elle est continue, il suffit de montrer qu'elle ne s'annule pas, et l'évaluer en un point quelconque pour connaître son signe[7]. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(\sin(x)) = \sin(\cos(x)) &\Rightarrow \cos(\sin(x)) = \cos\left(\cos(x) - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\Rightarrow \sin(x) = \pm\left(\cos(x) - \frac{\pi}{2}\right) \text{ modulo } 2\pi \\
&\Rightarrow \sin(x) \mp \cos(x) = \pm\frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi \\
&\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \mp \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \pm\frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi \\
&\Rightarrow \left|\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi \\
&\Rightarrow \left|\cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| = \pi\sqrt{2} \text{ modulo } 2\pi
\end{aligned}$$

mais le cosinus est a valeurs dans $[-1, 1]$ et $\pi\sqrt{2} > 1$, donc il n'y a pas de solution réelle. Ceci montre que f ne change pas de signe. Évaluons $f(0)$

7. C'est une application classique et pratique du théorème des valeurs intermédiaires

pour trouver le signe de f :

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & \cos(\sin(0)) - \sin(\cos(0)) \\ & = & 1 - \sin(1) \\ f(0) & > & 0 \end{array}$$

Ce qui prouve le résultat.

Exercice 105. Prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

— *Initialisation* : pour $n = 1$, on a bien $\sqrt{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

— *Hérédité* : Supposons la propriété vraie au range $n \geq 1$. Alors, en utilisant la formule de duplication du cosinus :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \sqrt{2 + u_n} \\ & = & \sqrt{2 + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ & = & \sqrt{2 + 2\left(2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1\right)} \\ & = & \sqrt{2 + 2\left(2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1\right)} \\ & = & \sqrt{4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \\ & = & 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{array}$$

car $0 \leq \frac{\pi}{2^{n+2}} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \geq 0$. Ce qui achève la preuve.

Exercice 106.

Exercice 107.

Exercice 108.

Exercice 109.

Exercice 110.

Exercice 111.

Exercice 112.

Exercice 113.

Exercice 114.

Exercice 115.

Exercice 116.

Exercice 117.

Exercice 118.

Exercice 119.

Exercice 120.

Exercice 121.

5 Calcul des limites

Exercice 122.

Exercice 123.

Exercice 124.

Exercice 125.

Exercice 126.

Exercice 127.

Exercice 128.

Exercice 129.

Exercice 130.

Exercice 131.

Exercice 132.

Exercice 133.

Exercice 134.

Exercice 135.

Exercice 136.

Exercice 137.

Exercice 138.

Exercice 139.

Exercice 140.

Exercice 141.

Exercice 142.

Exercice 143.

Exercice 144.

6 Dérivation

Exercice 145.

Exercice 146. D'après le cours, $h' = f' \cdot (g' \circ f)$, donc en dérivant le produit de deux fonctions :

$$h'' = f'' \cdot (g' \circ f) + (f')^2 \cdot (g'' \circ f)$$

Exercice 147. Prouvons l'énoncé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— *Initialisation* : La propriété est triviale au rang $n = 0$ ($\cos = \cos$).

— *Hérédité* : Supposons la propriété vérifiée au rang $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \cos^{(n+1)}(x) & = & \left(\cos^{(n)}(x)\right)' \\ & = & \left(\cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)\right)' \\ & = & -\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) \\ & = & \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ & = & \cos\left(x + \dfrac{(n+1)\pi}{2}\right) \end{array}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Remarque : on a utilisé le fait que $\cos' = -\sin$, et que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, qui se retrouve facilement en dessinant le cercle trigonométrique.

Exercice 148. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence finie que pour tout entier $0 \leq k \leq n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g^{(k)}(x) = a^k f^{(k)}(ax + b)$.

— *Initialisation* : pour $k = 0$, $g(x) = f(ax + b)$ pour tout réel x par définition.

— *Hérédité* : supposons la propriété vraie au rang $k \leq n - 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} g^{(k+1)}(x) & = & \left(g^{(k)}(x)\right)' \\ & = & \left(a^k f^{(k)}(ax + b)\right)' \\ & = & a^k \left(f^{(k)}(ax + b)\right)' \\ & = & a^{k+1} f^{(k+1)}(ax + b) \end{array}$$

Ce qui prouve le résultat.

Remarque : il est utile de calculer les premières dérivées à la main pour avoir l'intuition du résultat.

Exercice 149. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$.

— *Initialisation* : pour $n = 0$, $f(x) = x^{-1}$ pour tout réel non nul x par définition.

— *Hérédité* : supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \\ &= \left((-1)^n n! x^{-(n+1)}\right)' \\ &= (-1)^n n! \left(x^{-(n+1)}\right)' \\ &= (-1)^n n!(-1)(n+1)x^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)! x^{-((n+1)+1)} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat.

Remarque : il est utile de calculer les premières dérivées à la main pour avoir l'intuition du résultat.

Exercice 150. Montrons l'existence de P_n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— *Initialisation* : pour $n = 0$, on a clairement $P_0 = 1$.

— *Hérédité* : supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \\ &= \left(P_n(x)e^{-x^2}\right)' \\ &= P_n'(x)e^{-x^2} - 2xP_n(x)e^{-x^2} \\ &= \left(P_n'(x) - 2xP_n(x)\right)e^{-x^2} \end{aligned}$$

or P_n' et $x \mapsto -2xP_n(x)$ sont des polynômes, donc leur somme l'est aussi.

Calculons P_0, P_1, P_2 : on a vu que $P_0 = 1$. Puis, en utilisant la relation de récurrence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = -2x$, et $P_2(x) = (-2) - 2x(-2x) = 4x^2 - 2$.

Pour aller plus loin : calculer le degré de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 151. a) Supposons f paire, c'est-à-dire que pour tout x réel, $f(-x) = f(x)$. Soit $h > 0$, alors :

$$\frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\frac{f(x+\hat{h}) - f(x)}{\hat{h}}$$

en posant $\hat{h} = -h$, donc en faisant tendre h vers 0 on voit que $f'(-x) = -f'(x)$, donc f' est impaire.
b) De la même façon, si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$ et :

$$\frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \frac{f(x+\hat{h}) - f(x)}{\hat{h}}$$

ce qui montre, en faisant tendre h vers 0, que $f'(-x) = f'(x)$, donc f' est paire.
c) enfin, si f est T-périodique, $f(x+T) = f(x)$ donc :

$$\frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

et en faisant tendre h vers 0, on obtient que f' est T-périodique.

Alternative : pour a) et b) on peut aussi définir $g : x \mapsto -x$ et calculer $(f \circ g)'$ avec la formule de dérivation des fonctions composées. Pour c) on peut utiliser $g : x \mapsto x + T$

Exercice 152.

Exercice 153. a) comme $(uv)' = u'v + uv'$, la dérivée logarithmique de uv est

$$\frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

donc la derivée logarithmique du produit est la somme des dérivées logarithmiques.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$ et toutes fonctions $f_1, \cdots, f_n$ satsfaisant les mêmes conditions qu'en a), on a :

$$\frac{\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)'}{\prod_{k=1}^n f_k} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k'}{f_k}$$

- *Initialisation* : on vient de voir le cas $n = 2$ au point précédent.
- *Hérédité* : Si la propriété est vraie pour n facteurs $f_1, \cdots, f_n$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\prod_{k=1}^{n+1} f_k\right)'}{\prod_{k=1}^{n+1} f_k} &= \frac{f_{n+1}'\left(\prod_{k=1}^n f_k\right) + f_{n+1}\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)'}{\prod_{k=1}^{n+1} f_k} \\
&= \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} + \frac{\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)'}{\prod_{k=1}^n f_k} \\
&= \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{f_k'}{f_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k'}{f_k}
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat voulu.

Exercice 154.

Exercice 155.

Exercice 156. Il suffit de montrer que les droites ont la même pente :
- Celle de la tangente au point $\frac{x_1+x_2}{2}$ est la dérivée de f en ce point, soit :
$$2a\frac{x_1+x_2}{2} = a(x_1+x_2)$$
- Celle de la droite reliant $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ vaut :
$$\frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1} = a(x_1+x_2)$$

Finalement, les droites sont bien parallèles.

Exercice 157. a) soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\ln'(n) = \frac{1}{n}$, on a :
$$D_n : x \mapsto \ln(n) + \frac{x-n}{n}$$
b) $D_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = n(1 - \ln(n))$, donc on a $x_n \to -\infty$.

Exercice 158. Soit D la tangente commune, comme $(fg)' = f'g + fg'$, les trois équations correspondantes sont :
$$\begin{aligned}
D_1 &: x \mapsto f(0) + xf'(0) \\
D_2 &: x \mapsto g(0) + xg'(0) \\
D_3 &: x \mapsto \frac{f(0)g(0)}{2} + \frac{x}{2}(f(0)'g(0) + f(0)g'(0))
\end{aligned}$$

On voit que :
$$\frac{D_1(x)D_2(x)}{2} - D_3(x) = x^2\frac{f'(0)g'(0)}{2}$$
d'une part, et d'autre part,
$$x^2f'(0)g'(0) = (D_1(x)-f(0))(D_2(x)-g(0)) = D(x)^2 - D(x)(f(0)+g(0)) + f(0)g(0)$$
ce qui amène :
$$\frac{D(x)^2}{2} - D(x) = \frac{D(x)^2}{2} - \frac{D(x)(f(0)+g(0)) + f(0)g(0)}{2}$$

et après simplification,

$$D(x)\left(\frac{f(0)+g(0)}{2}-1\right)=\frac{f(0)g(0)}{2}$$

Comme f et g ont la même tangente en 0, $f(0)=g(0)$, et l'on note a leur valeur commune.

$$D(x)(a-1)=\frac{a^2}{2}$$

Nécessairement $a\neq 1$ donc $D(x)=\frac{a^2}{2(a-1)}$. On voit que $D(x)$ ne dépend pas de x : la tangente est parallèle a l'axe des abscisses. En particulier pour $x=0$:

$$a=\frac{a^2}{2(a-1)}\Leftrightarrow 2a(a-1)=a^2\Leftrightarrow a\in\{0;2\}$$

Alternative : on vient de voir une solution sophistiquée, mais il est possible de simplement identifier $f(0)=g(0)=f(0)g(0)/2\Rightarrow f(0)\in\{0;2\}$ et $f'(0)=g'(0)=2f(0)f'(0)/2\Rightarrow f'(0)=0$ et conclure.

Exercice 159.

Exercice 160.

Exercice 161.

Exercice 162.

Exercice 163.

Exercice 164.

Exercice 165.

Exercice 166.

Exercice 167.

Exercice 168.

Exercice 169.

Exercice 170.

Exercice 171.

Exercice 172.

Exercice 173.

Exercice 174.

Exercice 175.

Exercice 176.

Exercice 177.

Exercice 178.

Exercice 179.

Exercice 180.

Exercice 181.

Exercice 182.

Exercice 183.

Exercice 184.

Exercice 185.

Exercice 186.

Exercice 187.

Exercice 188.

Exercice 189.

Exercice 190.

Exercice 191.

Exercice 192.

Exercice 193.

Exercice 194.

Exercice 195.

Exercice 196.

Exercice 197.

Exercice 198.

7 Fonctions puissances

Exercice 199. a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \varphi_\alpha''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

φ_α est convexe si et seulement si $\varphi_\alpha'' \geq 0$, ce qui équivaut à $\alpha(\alpha-1) \geq 0$ donc $\alpha \leq 0$ ou $\alpha \geq 1$.

b) Soit $\alpha > 1$, alors φ_α est convexe. Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes, en particulier φ_α est au-dessus de sa tangente en 1, qui a pour équation pour $t > 0$:

$$D_1 : t \mapsto \varphi_\alpha(1) + \varphi_\alpha'(1) \cdot (t-1) = 1 + \alpha(t-1)$$

Ainsi :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad t^\alpha \geq 1 + \alpha(t-1)$$

On retrouve bien l'énoncé en posant $x = t - 1$, avec $x > -1$.

Exercice 200.

Exercice 201. Montrons par récurrence que $\varphi_\alpha^{(n)} = \left(\prod_{j=1}^n (\alpha - j + 1)\right) \varphi_{\alpha-n}$

- *Initialisation* : pour $n = 0$, on a bien $\varphi_\alpha^{(0)} = \varphi_\alpha$ (par convention, un produit sans facteur vaut 1).
- *Hérédité* : supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^{(n+1)} &= \left(\prod_{j=1}^{n} (\alpha - j + 1)\right) \varphi_{\alpha-n}' \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n} (\alpha - j + 1)\right) (\alpha - n)\varphi_{\alpha-n-1} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n+1} (\alpha - j + 1)\right) \varphi_{\alpha-(n+1)}\end{aligned}$$

  ce qui achève la preuve.

Remarque : si $\alpha \in \mathbb{N}$, le produit s'annule pour tout $n > \alpha$, comme attendu, et pour tout $n \leq \alpha$ on peut écrire :

$$\prod_{j=1}^{n} (\alpha - j + 1) = \frac{\alpha!}{(\alpha - n)!}$$

La notation "factorielle" ne s'applique qu'aux entiers, mais il existe une extension sur $\mathbb{R}$ appelée Γ (gamma) qui vérifie, pour tout n entier, $\Gamma(n+1) = n!$, et on peut écrire :

$$\varphi_\alpha^{(n)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} \varphi_{\alpha-n}$$

Exercice 202.

Exercice 203. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0^{\frac{1}{2^n}}$.

— Initialisation : Pour $n = 0$, le résultat est immédiat.

— Hérédité : Supposons la propriété vraie au range $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$u_{n+1} = (u_n)^{\frac{1}{2}} = \left(u_0^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} = u_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

ce qui prouve le résultat.

Ensuite, pour $n \to +\infty$ on a $\frac{1}{2^n} \to 0$, et par continuité cela entraîne $u_n \to 1$ car $u_0 > 0$.

Exercice 204.

Exercice 205.

Exercice 206.

Exercice 207.

Exercice 208.

Exercice 209.

Exercice 210.

Exercice 211.

Exercice 212.

Exercice 213.

Exercice 214.

Exercice 215.

Exercice 216.

Exercice 217.

Exercice 218.

Exercice 219.

Exercice 220.

Exercice 221.

8 Intégration

Exercice 222.

Exercice 223.

Exercice 224.

Exercice 225.

Exercice 226.

Exercice 227.

Exercice 228.

Exercice 229.

Exercice 230.

Exercice 231.

Exercice 232.

Exercice 233.

Exercice 234.

Exercice 235.

Exercice 236.

Exercice 237.

Exercice 238.

Exercice 239.

Exercice 240.

Exercice 241.

Exercice 242.

Exercice 243.

Exercice 244.

Exercice 245.

Exercice 246.

Exercice 247.

Exercice 248.

Exercice 249.

Exercice 250.

Exercice 251.

Exercice 252.

Exercice 253.

Exercice 254.

Exercice 255.

Exercice 256.

Exercice 257.

Exercice 258.

Exercice 259.

Exercice 260.

Exercice 261.

Exercice 262.

Exercice 263.

9 Probabilités

Exercice 264. La somme 9 peut s'obtenir comme 3+6, 4+5, 5+4, ou 6+3, soit 5 manières. La somme 10 peut s'obtenir comme 4+6, 5+5, ou 6+4, soit 3 manières : il est donc plus probable d'obtenir 9 que 10.

Exercice 265. Le premier dé peut prendre n'importe quelle valeur, soit 6 résultats possibles. Le deuxième dé est limité à 5 résultats possibles, le troisième à 4, etc... Finalement le nombre de cas possibles pour obtenir tous les chiffres de 1 à 6 est $6\,! = 720$, sur un total de $6^6 = 46656$ lancers possibles, donc la probabilité cherchée vaut $\frac{270}{46656} = \frac{5}{324} \approx 1,54\%$.

Alternative : sans tenir compte de l'ordre, la probabilité d'observer $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vaut $\frac{1}{6^6}$, et le nombre de combinaisons pour les observer vaut $\binom{6}{6} = 6!$, avec la même conclusion.

Exercice 266. On calcule la probabilité de l'événement complémentaire, n'obtenir aucun 6 en n lancers : $\bar{p}_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ puisque les lancers sont indépendants. Finalement, $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini car $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$.

Exercice 267. a) On montre comme dans l'exercice 266 que la probabilité d'obtenir au moins un 6 en 4 lancers vaut $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0,5177$.

b) La probabilité d'obtenir un double-six en un lancer est $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$, donc celle de ne pas l'obtenir est $\frac{35}{36}$ L'événement complémentaire de l'énoncé est de n'obtenir aucun double-six en 24 lancers, et a pour probabilité $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, donc la probabilité d'obtenir au moins un double-six vaut $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914$.

Exercice 268. a) Pour un lancer, la probabilité d'obtenir n fois 6 est de $\frac{1}{6^n}$, donc la probabilité de ne pas l'obtenir est $1 - \frac{1}{6^n}$. Alors, si l'on effectue $4 \cdot 6^{n-1}$ lancers, la probabilité de ne jamais obtenir n fois 6 est de $\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)^{4 \cdot 6^{n-1}} = \left(\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)^{6^n}\right)^{4/6}$, donc la probabilité d'observer au moins une fois n-fois-6 vaut

$$p_n = 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)^{6^n}\right)^{\frac{2}{3}}$$

b) On sait que $\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)^{6^n} \to e^{-1}$ quand n tend vers l'infini, donc par continuité $p_n \to 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.4865$

Exercice 269. À chaque réalisation (x, y, z) dont la somme vaut $s \leq 10$, on peut associer la réalisation "opposée" $(7-x, 7-y, 7-z)$ dont la somme vaut $21 - s$, donc 11 ou plus : on en déduit qu'il est autant probable d'obtenir 10 ou moins que 11 ou plus. Comme tous les résultats possibles sont couverts, on en déduit que cette probabilité commune vaut $\frac{1}{2}$.

Remarque : cette utilisation de la symétrie rappelle un peu l'astuce du jeune Gauss, qui calcula $S = 1+2+\cdots+99+100$ en associant chaque n à $101-n$, pour obtenir $2S = 101+101+\cdots+101+101 = 10100$ donc $S = 5050$. D'une manière générale, les arguments de symétrie permettent souvent d'éviter les calculs en probabilités.

Pour aller plus loin : Généraliser à $n \in \mathbb{N}^*$ dés lancés ensemble.

Exercice 270. On suppose que chaque match est la réalisation d'une variable aléatoire, et que tous les matchs sont indépendants (ce qui est manifestement faux, par exemple en raison de la fatigue accumulée). Pour s'imposer, A doit nécessairement remporter le deuxième match, et au moins l'un des deux autres.
On appelle p_{BA} la probabilité que B batte A, et p_{CA} la probabilité que C batte A. La probabilité de gagner au moins une fois contre le joueur $x \in \{B, C\}$ en 2 matchs est $1 - p_{xA}^2$.
Ainsi, pour la configuration BCB, la probabilité de victoire de A vaut :

$$(1 - p_{CA})(1 - p_{BA}^2) = (1 - p_{CA})(1 - p_{BA})(1 + p_{BA})$$

et pour la configuration CBC :

$$(1 - p_{BA})(1 - p_{CA}^2) = (1 - p_{BA})(1 - p_{CA})(1 + p_{CA})$$

Comme C est meilleur que B, $p_{BA} \leq p_{CA}$, et $1 + p_{BA} \leq 1 + p_{CA}$. L'ordre qui maximise les chances de A est donc CBC.

Exercice 271. La probabilité d'avoir au moins deux votes justes vaut 1 moins la probabilité d'avoir au plus un vote juste. En supposant que les membres du jury décident de manière indépendante :

— La probabilité de n'avoir aucun vote juste est $\frac{(1-p)^2}{2}$

— La probabilité d'avoir exactement un vote juste est $2\frac{p(1-p)}{2} + \frac{(1-p)^2}{2} = p(1-p) + \frac{(1-p)^2}{2}$

Donc la probabilité complémentaire vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{(1-p)^2}{2} + p(1-p) + \frac{(1-p)^2}{2} &= p(1-p) + (1-p)^2 \\
&= (1-p)(p + (1-p)) \\
&= 1 - p
\end{aligned}$$

Et donc la probabilité recherchée vaut p.

Alternative : On peut utiliser la probabilité conditionnelle sachant le vote du troisième jury :

— Si le troisième jury vote juste (probabilité $1/2$) : la probabilité d'avoir au moins un vote juste parmi les deux premiers est $1-(1-p)^2$

— Si le troisième jury ne vote pas juste (probabilité $1/2$) : la probabilité d'avoir deux votes justes parmi les deux premiers est p^2

la probabilité cherchée vaut donc $\frac{1-(1-p)^2+p^2}{2} = \frac{1-1+2p-p^2+p^2}{2} = p$

Exercice 272. Il y a $10+n$ boules au total, donc à chaque tirage la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{10}{10+n}$. En 20 tirages la probabilité d'obtenir 20 boules noires est donc $\left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}$, et celle d'obtenir au moins une boule blanche est $p_n = 1-\left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
p_n \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 1-\left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} \geq \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} \leq \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\cdot 10^{20} \leq (10+n)^{20}\\
&\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{20}}\cdot 10 \leq 10+n\\
&\Leftrightarrow 10\left(2^{\frac{1}{20}}-1\right) \leq n
\end{aligned}$$

On calcule que $10\left(2^{\frac{1}{20}}-1\right) \approx 0,35$, donc $p_n \geq \frac{1}{2} \Leftarrow n \geq 1$: une seule boule blanche suffit. On vérifie bien que $p_1 \approx 0,85$.

Exercice 273.

Exercice 274. La première personne a 365 "choix" possibles [8], la deuxième 364, la troisième 363, etc... de proche en proche, la $k^{\text{ème}}$ personne a $365-(k-1)$ "choix" possibles. Donc, la probabilité que les m personnes aient des dates d'anniversaire distinctes est $\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-(m-1))}{365^m}$, et celle que deux individus au moins :

$$p_m = 1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-(m-1))}{365^m}$$

8. On suppose implicitement que la distribution des naissances est uniforme dans l'année, ce qui est plutôt faux en pratique. On va supposer $m < 365$, sinon l'exercice est trivial et $p_m = 1$.

En faisant l'application numérique, on obtient $p_m \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq 23$. Pour $m = 23$, $p_m = 0,5073$. Avec 69 personnes, la probabilité dépasse 99%.

Exercice 275.

Exercice 276.

Exercice 277.

Exercice 278.

Exercice 279.

Exercice 280.

Exercice 281.

Exercice 282.

Exercice 283.

Exercice 284.

Exercice 285.

Exercice 286.

Exercice 287.

Exercice 288.

Exercice 289.

Exercice 290.

Exercice 291.

Exercice 292.

Exercice 293.

Exercice 294.

Exercice 295.

Exercice 296.

Exercice 297.

Exercice 298.

Exercice 299.

Exercice 300.

Exercice 301.

Exercice 302.

Exercice 303.

Exercice 304.

Exercice 305.

Exercice 306.

Exercice 307.

Exercice 308.

Exercice 309.

Exercice 310.

Exercice 311.

Exercice 312.

Exercice 313.

Exercice 314.

Exercice 315.

Exercice 316.

Exercice 317.

Exercice 318.

Exercice 319.

Exercice 320.

Exercice 321.

Exercice 322.

Exercice 323.

Exercice 324.

Exercice 325.

Exercice 326.

Exercice 327.

Exercice 328.

Exercice 329.

10 Nombres complexes

Exercice 330.

Exercice 331.

Exercice 332.

Exercice 333.

Exercice 334.

Exercice 335.

Exercice 336.

Exercice 337.

Exercice 338.

Exercice 339.

Exercice 340.

Exercice 341.

Exercice 342.

Exercice 343.

Exercice 344.

Exercice 345.

Exercice 346.

Exercice 347.

Exercice 348.

Exercice 349.

Exercice 350.

Exercice 351.

Exercice 352.

Exercice 353.

Exercice 354.

Exercice 355.

Exercice 356.

Exercice 357.

Exercice 358.

Exercice 359.

Exercice 360.

Exercice 361.

Exercice 362.

Exercice 363.

Exercice 364.

Exercice 365.

Exercice 366.

Exercice 367.

Exercice 368.

Exercice 369.

Exercice 370.

Exercice 371.

Exercice 372.

Exercice 373.

Exercice 374.

Exercice 375.

Exercice 376.

Exercice 377.

Exercice 378.

Exercice 379.

Exercice 380.

Exercice 381.

Exercice 382.

Exercice 383.

Exercice 384.

Exercice 385.

Exercice 386.

Exercice 387.

Exercice 388.

Exercice 389.

Exercice 390.

Exercice 391.

Exercice 392.

Exercice 393.

Exercice 394.

Exercice 395.

Exercice 396.

Exercice 397.

Exercice 398.

Exercice 399.

Exercice 400.

Exercice 401.

Exercice 402.

Exercice 403.

Exercice 404.

Exercice 405.

Exercice 406.

Exercice 407.

Exercice 408.

Exercice 409.

11 Polynômes et équations algébriques

Exercice 410.

Exercice 411.

Exercice 412.

Exercice 413.

Exercice 414.

Exercice 415.

Exercice 416.

Exercice 417.

Exercice 418.

Exercice 419.

Exercice 420.

Exercice 421.

Exercice 422.

Exercice 423.

Exercice 424.

Exercice 425.

Exercice 426.

Exercice 427.

Exercice 428.

Exercice 429.

Exercice 430.

Exercice 431.

Exercice 432.

Exercice 433.

Exercice 434.

Exercice 435.

Exercice 436.

Exercice 437.

Exercice 438.

Exercice 439.

Exercice 440.

Exercice 441.

Exercice 442.

Exercice 443.

Exercice 444.

Exercice 445.

Exercice 446.

Exercice 447.

Exercice 448.

Exercice 449.

Exercice 450.

Exercice 451.

Exercice 452.

Exercice 453.

Exercice 454.

Exercice 455.

Exercice 456.

Exercice 457.

Exercice 458.

12 Arithmétique

Exercice 459.

Exercice 460.

Exercice 461.

Exercice 462.

Exercice 463.

Exercice 464.

Exercice 465.

Exercice 466.

Exercice 467.

Exercice 468.

Exercice 469.

Exercice 470.

Exercice 471.

Exercice 472.

Exercice 473.

Exercice 474.

Exercice 475.

Exercice 476.

Exercice 477.

Exercice 478.

Exercice 479.

Exercice 480.

Exercice 481.

Exercice 482.

Exercice 483.

Exercice 484.

Exercice 485.

Exercice 486.

Exercice 487.

Exercice 488.

Exercice 489.

Exercice 490.

Exercice 491.

Exercice 492.

Exercice 493.

Exercice 494.

Exercice 495.

Exercice 496.

Exercice 497.

Exercice 498.

Exercice 499.

Exercice 500.

Exercice 501.

Exercice 502.

Exercice 503.

Exercice 504.

Exercice 505.

Exercice 506.

Exercice 507.

Exercice 508.

Exercice 509.

Exercice 510.

Exercice 511.

Exercice 512.

Exercice 513.

Exercice 514.

Exercice 515.

Exercice 516.

Exercice 517.

Exercice 518.

Exercice 519.

Exercice 520.

Exercice 521.

Exercice 522.

Exercice 523.

Exercice 524.

Exercice 525.

Exercice 526.

Exercice 527.

Exercice 528.

Exercice 529.

Exercice 530.

Exercice 531.

Exercice 532.

Exercice 533.

Exercice 534.

Exercice 535.

Exercice 536.

Exercice 537.

Exercice 538.

Exercice 539.

Exercice 540.

Exercice 541.

Exercice 542.

Exercice 543.

Exercice 544.

Exercice 545.

Exercice 546.

Exercice 547.

Exercice 548.

Exercice 549.

Exercice 550.

Exercice 551.

Exercice 552.

Exercice 553.

Exercice 554.

Exercice 555.

Exercice 556.

Exercice 557.

Exercice 558.

Exercice 559.

Exercice 560.

Exercice 561.