

# Corrigés des exercices du lycée à la prépa scientifique

Pierre-Michel Danton

December 4, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Rédaction, modes de raisonnement</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Calcul algébrique</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Inégalités, inéquations, trinôme du second degré réel</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Calcul des limites</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Dérivation</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Fonctions puissances</b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Intégration</b>	<b>15</b>
<b>9</b>	<b>Probabilités</b>	<b>16</b>
<b>10</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>17</b>
<b>11</b>	<b>Polynômes et équations algébriques</b>	<b>18</b>
<b>12</b>	<b>Arithmétique</b>	<b>19</b>

## 1 Rédaction, modes de raisonnement

## 2 Calcul algébrique

**Exercice 36.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par linéarité de la somme:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k-1) &= 2 \sum_{k=1}^n k - n \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2\end{aligned}$$

**Exercice 37.** On a  $u_0 = 0$  (par convention, une somme vide vaut 0). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \frac{n^2+n}{3} - \frac{(n-1)^2+(n-1)}{3} \\ &= \frac{2n}{3}\end{aligned}$$

Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2n}{3}$ .

**Exercice 38.** Chaque élément de la table s'écrit  $i \times j$  avec  $1 \leq i, j \leq n$ . La moyenne vaut donc:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n ij \right) &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n i \right) \left( \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

*Remarque:* la difficulté de l'exercice est de bien maîtriser le symbole  $\Sigma$ . Ici, on a pu mettre en facteur  $i$  dans la somme sur  $j$ , puis mettre en facteur toute la somme sur  $j$  dans la somme sur  $i$ .

**Exercice 40.** a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Le cas  $x = 1$  est connu:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Supposons maintenant  $x \neq 1$ , ce qui va permettre de diviser par  $1-x$  dans la suite. L'idée est de faire "apparaître" une dérivée: au lieu de  $kx^k$ ,

on voudrait  $kx^{k-1}$ , qui est la dérivée de  $x \mapsto x^k$ ; on factorise donc par  $x$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n kx^k &= x \sum_{k=0}^n kx^{k-1} \\
 &= x \sum_{k=0}^n (x^k)' \\
 &= x \left( \sum_{k=0}^n x^k \right)' \\
 &= x \left( \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right)' \\
 &= x \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} \\
 &= x \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

b) Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $nx^{n+1} \rightarrow 0$  et  $(n+1)x^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc:

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^n kx^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-1)^2}$$

**Exercice 41.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

de plus,  $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n}$  et  $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$ , donc  $\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{n}$  ce qui prouve que  $u_{n+1} - u_n < 0$ : la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

### 3 Inégalités, inéquations, trinôme du second degré réel

**Exercice 61.**  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} |x + y| \leq |x| + |y| &\Leftrightarrow (x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ &\Leftrightarrow xy \leq |xy| \end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai. De plus pour l'égalité,  $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$  et donc que  $x$  et  $y$  sont de même signe.

**Exercice 62.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x| + |1-x|$$

On distingue trois cas:

- $x < 0 \Rightarrow |1-x| > 1 \Rightarrow |x| + |1-x| > 1$
- $x > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow |x| + |1-x| > 1$
- $x \in [0, 1] \Rightarrow |x| + |1-x| = x + (1-x) = 1$

Finalement, l'ensemble des solutions est  $[0, 1]$ .

*Interprétation géométrique et solution plus élégante:* la valeur absolue mesure la distance "usuelle" (euclidienne):  $|x| = |x - 0|$  est la distance de  $x$  à 0, et  $|x - 1|$  est la distance de  $x$  à 1. On cherche donc des points dont la distance à 0 plus la distance à 1 est identique. Si l'on prend le problème dans  $\mathbb{R}^2$  au lieu de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire dans le plan au lieu de sur une droite, c'est la définition d'une ellipse de foyers (0,0) et (1,0).

- Ici, comme la constante est exactement la distance entre les foyers, l'ellipse est aplatie et devient le segment entre les foyers, c'est-à-dire  $[0, 1]$ : on a donc une solution sans calcul, mais qui demande une certaine culture géométrique!
- Si la constante était strictement inférieure à la distance entre les foyers, il n'y aurait aucune solution, ni sur la droite, ni dans le plan.
- Enfin, si la constante était strictement supérieure à la distance entre les foyers, les deux solutions réelles seraient l'intersection de l'ellipse avec l'axe des abscisses.

**Exercice 63.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout entier non nul  $k \leq 2n$ , on a  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ , donc:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

On utilise cette minoration pour montrer (avec un peu de travail pour recoller les morceaux!) que la somme des inverses des entiers tend vers l'infini.

**Exercice 64.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in ]1, +\infty[$ , on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique:

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

Comme  $a > 1$ , pour tout entier  $k \leq n - 1$ , on a  $a^k \leq a^{n-1}$ , donc:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$$

Et finalement

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq na^{n-1}$$

**Exercice 65.** Soient deux réels positifs  $a$  et  $b$ . Par symétrie de l'énoncé, on peut supposer sans perte de généralité que  $a \geq b$ .

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{a} - \sqrt{b} \right| \leq \sqrt{|a - b|} &\Leftrightarrow \left( \sqrt{a} - \sqrt{b} \right)^2 \leq |a - b| \\ &\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \leq |a - b| \end{aligned}$$

Puisqu'on a supposé  $a \geq b \geq 0$ ,  $\sqrt{ab} \geq b$  et  $|a - b| = a - b$ :

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{a} - \sqrt{b} \right| \leq \sqrt{|a - b|} &\Leftrightarrow a + b - 2b \leq a - b \\ &\Leftrightarrow a - b \leq a - b \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat.

*Alternative:* on peut aussi utiliser le fait que pour  $a$  et  $b$  positifs,  $|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$ , et  $\min(a, b) \leq \sqrt{ab} \leq \max(a, b)$ .

**Exercice 66.** On sait que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ . En prenant  $a = \sqrt{k+1}$  et  $b = \sqrt{k}$  dans chaque terme de la somme, il vient:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq 2022 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} \geq 2022 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \geq 2022 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - 1 \geq 2022 \quad \text{par télescopage} \\ &\Leftrightarrow n \geq 2023^2 - 1 \end{aligned}$$

Finalement, le plus petit entier solution est  $2023^2 - 1$ .

**Exercice 68.** a) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 \leq m \leq n-1$ , on rappelle que:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

et que la factorielle satisfait  $(m+1)! = m!(m+1)$ , donc en simplifiant:

$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} = \frac{n-m}{m+1} = 1 + \frac{n-2m-1}{m+1}$$

ce qui montre que

$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} \geq 1 \Leftrightarrow n-2m-1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

b) D'après le point a), on a toute de suite:

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \dots \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1}$$

or  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , ce qui permet de retrouver le résultat de l'énoncé.

c) On rappelle la formule du binôme:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

En prenant  $x = y = 1$ , et comme les coefficients binomiaux sont positifs<sup>1</sup>, on a tout de suite la majoration:

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

---

<sup>1</sup>c'est important de le préciser, sinon la somme pour être inférieure à l'un de ses termes!

Reste la minoration: en se rappelant que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , on voit que  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  majore en fait tous les  $\binom{n}{k}$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Comme il y a exactement  $n+1$  termes dans la formule du binôme, on a:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \leq (n+1) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

ce qui prouve finalement que  $\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$ .

**Exercice 69.** a) Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On note  $f_k : x \mapsto |x - k|$ , fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\}$  et sa dérivée vaut -1 si  $x < k$ , et +1 si  $x > k$ .

Par linéarité de la dérivation, on a donc que  $f = \sum_{k=1}^n f_k$  est dérivable sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, 2022\}$ , et sa dérivée au point  $x \in \mathbb{K}$  vaut:

(nombre d'entiers naturels inférieurs à  $x$ ) - (nombre d'entiers supérieurs à  $x$  et inférieurs à 2022)

De façon informelle, on voit que ce nombre est négatif jusqu'à avoir autant d'entiers avant et après  $x$  ( $x < 1011$ ), qu'alors il s'annule ( $1011 < x < 1012$ ), et redevient positif ( $x > 1012$ ). Plus formellement, on écrit pour tout  $x \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2022 \quad \text{si } x < 1 \\ f'(x) &= +2022 \quad \text{si } x > 2022 \\ f'(x) &= \lfloor x \rfloor - (2022 - \lfloor x \rfloor) = 2\lfloor x \rfloor - 2022 \quad \text{si } x \in \mathbb{K} \cap ]1, 2022[ \end{aligned}$$

Étudions le signe de  $f'$  sur  $\mathbb{K} \cap ]1, 2022[$  pour étudier les variations de  $f$ . On rappelle que  $x \in \mathbb{K}$ , donc  $x$  n'est jamais entier:

$$\begin{aligned} 2\lfloor x \rfloor - 2022 < 0 &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < 1011 \Leftrightarrow x < 1011 \\ 2\lfloor x \rfloor - 2022 = 0 &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 1011 \Leftrightarrow x \in ]1011, 1012[ \\ 2\lfloor x \rfloor - 2022 > 0 &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > 1011 \Leftrightarrow x > 1012 \end{aligned}$$

En recollant avec les autres intervalles, on conclut que  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 1011[$ , constante sur  $]1011, 1012[$ , et strictement croissante sur  $]1012, +\infty[$ .

b) D'après ce qui précède, et comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  atteint son minimum en tout point de l'intervalle  $]1011, 1012[$ . Considérons donc  $m \in ]1011, 1012[$ , et regroupons astucieusement les termes: à tout indice  $1 \leq k \leq 1011$  on associe l'indice  $k' = 2023 - k$ . On observe que  $k < m < k'$  donc  $|m - k| + |m - k'| = |k' - k| = |2023 - 2k|$ , donc:

$$f(m) = \sum_{k=1}^{1011} (2023 - 2k)$$



Effectuons le changement d'indice  $j = 1012 - k$  (donc  $k = 1012 - j$ , ce qui revient simplement à sommer les termes "à l'envers"):

$$f(m) = \sum_{k=j}^{1011} (2j - 1) = 1011^2$$

car on se souvient, bien entendu, de la formule de la somme des nombres impairs! Pour rappel, elle est démontrée dans l'exercice 36.

Finalement, le minimum de la fonction vaut  $1011^2$ .

**Exercice 70.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $F(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ , appelée *partie fractionnaire* de  $x$ . Alors  $2x = 2\lfloor x \rfloor + 2F(x)$ . Deux cas sont possibles:

- $F(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow 2F(x) \in [0, 1[ \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$
- $F(x) \in [\frac{1}{2}, 1[ \Rightarrow 2F(x) \in [1, 2[ \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$

Finalement,  $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$ .

**Exercice 72.** On va utiliser les notations et le résultat de l'exercice 70. On introduit en plus la notation "indicatrice" pour tout énoncé  $p$ :  $1_p$  qui vaut 1 si  $p$  est vrai et 0 sinon. Dans l'exercice 70, on a vu que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1_{F(x) \geq \frac{1}{2}}$ . Comme  $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor F(x) + F(y) \rfloor$ , on obtient après simplification:

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 1_{F(x) \geq \frac{1}{2}} + 1_{F(y) \geq \frac{1}{2}} - \lfloor F(x) + F(y) \rfloor$$

On remarque ensuite que  $\lfloor F(x) + F(y) \rfloor = 1_{\min(F(x), F(y)) \geq \frac{1}{2}}$  pour conclure: le résultat vaut  $1 + 1 - 1 = 1$  si  $\min(F(x), F(y)) \geq \frac{1}{2}$ , et  $1_{F(x) \geq \frac{1}{2}} + 1_{F(y) \geq \frac{1}{2}} = 1_{\max(F(x), F(y)) \geq \frac{1}{2}} \in \{0, 1\}$  sinon. Dans tous les cas,  $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor - \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$ .

**Exercice 83.** Pour  $m \in \mathbb{R}$ , le discriminant vaut:

$$\Delta(m) = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2)$$

Donc:

- Si  $m \in \{-2, +2\}$ ,  $\Delta(m) = 0$  et  $p_m$  admet une racine réelle double.
- Si  $|m| < 2$ ,  $\Delta(m) < 0$  et  $p_m$  n'admet aucune racine réelle.
- Si  $|m| > 2$ ,  $\Delta(m) > 0$  et  $p_m$  admet deux racines réelles distinctes.

## 4 Trigonométrie

## 5 Calcul des limites

## 6 Dérivation

**Exercice 145.** Appliquer le cours.

**Exercice 146.** D'après le cours,  $h' = f' \cdot (g' \circ f)$ , donc en dérivant le produit de deux fonctions:

$$h'' = f'' \cdot (g' \circ f) + (f')^2 \cdot (g'' \circ f)$$

**Exercice 147.** Prouvons l'énoncé par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

- *Initialisation:* La propriété est triviale au rang  $n = 0$  ( $\cos = \cos$ ).
- *Hérédité:* Supposons la propriété vérifiée au rang  $n \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \cos^{(n+1)}(x) &= \left( \cos^{(n)}(x) \right)' \\ &= \left( \cos \left( x + \frac{n\pi}{2} \right) \right)' \\ &= -\sin \left( x + \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left( x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left( x + \frac{(n+1)\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

*Remarque:* on a utilisé le fait que  $\cos' = -\sin$ , et que:  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) = -\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$ , qui se retrouve facilement en dessinant le cercle trigonométrique.

**Exercice 148.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons par récurrence finie que pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = a^k f^{(k)}(ax + b)$ .

- *Initialisation:* pour  $k = 0$ ,  $g(x) = f(ax + b)$  pour tout réel  $x$  par définition.
- *Hérédité:* supposons la propriété vraie au rang  $k \leq n - 1$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(x) &= \left( g^{(k)}(x) \right)' \\ &= \left( a^k f^{(k)}(ax + b) \right)' \\ &= a^k \left( f^{(k)}(ax + b) \right)' \\ &= a^{k+1} f^{(k+1)}(ax + b) \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat.

*Remarque:* il est utile de calculer les premières dérivées à la main pour avoir l'intuition du résultat.

**Exercice 149.** Montrons par récurrence que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , et pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ .

- *Initialisation:* pour  $n = 0$ ,  $f(x) = x^{-1}$  pour tout réel non nul  $x$  par définition.
- *Hérédité:* supposons la propriété vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( f^{(n)}(x) \right)' \\ &= \left( (-1)^n n! x^{-(n+1)} \right)' \\ &= (-1)^n n! \left( x^{-(n+1)} \right)' \\ &= (-1)^n n! (-1)(n+1) x^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! x^{-(n+1)+1} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat.

*Remarque:* il est utile de calculer les premières dérivées à la main pour avoir l'intuition du résultat.

**Exercice 150.** Montrons l'existence de  $P_n$  par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

- *Initialisation:* pour  $n = 0$ , on a clairement  $P_0 = 1$ .
- *Hérédité:* supposons la propriété vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left( f^{(n)}(x) \right)' \\ &= \left( P_n(x) e^{-x^2} \right)' \\ &= P_n'(x) e^{-x^2} - 2x P_n(x) e^{-x^2} \\ &= (P_n'(x) - 2x P_n(x)) e^{-x^2} \end{aligned}$$

or  $P_n'$  et  $x \mapsto -2x P_n(x)$  sont des polynômes, donc leur somme l'est aussi.

Calculons  $P_0, P_1, P_2$ : on a vu que  $P_0 = 1$ . Puis, en utilisant la relation de récurrence, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_1(x) = -2x$ , et  $P_2(x) = (-2) - 2x(-2x) = 4x^2 - 2$ .

*Pour aller plus loin:* calculer le degré de  $P_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 7 Fonctions puissances

## 8 Intégration

## 9 Probabilités



## 10 Nombres complexes

## 11 Polynômes et équations algébriques

## 12 Arithmétique