

# Despacho Económico Básico

Operación Económica de Sistemas Eléctricos de Potencia

Paulo M. De Oliveira-De Jesus<sup>\*</sup>

Noviembre 2024

---

<sup>\*</sup>[pdeoliv@gmail.com](mailto:pdeoliv@gmail.com)

## Resumen

En este documento se describe el problema de despacho económico básico de centrales eléctricas térmicas en el contexto de un sistema de potencia operando en régimen estable, con demandas inelásticas en condiciones apropiadas de confiabilidad, suficiencia y seguridad. El problema de despacho se plantea considerando completitud de información en mercados eléctricos basados en costo (cost-based). En los mercados basados en costo un planificador/operador benevolente tiene la potestad de ordenar la producción sin sesgo alguno, atendiendo solamente criterios de eficiencia económica. Constituye un planteamiento útil para áreas de operación establecidas por control de frecuencia (AGC) en las que una sola firma detenta varios los activos de generación de distintas tecnologías. Se estudian cinco modelos: 1) despacho básico, 2) despacho con restricciones de generación, 3) despacho con red (con pérdidas) sin restricciones, 4) despacho con red (sin pérdidas) con restricciones de transmisión y 5) despacho generalizado (flujo de potencia óptimo).

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Despacho económico clásico</b>	<b>5</b>
2.1. Suposiciones . . . . .	6
2.2. Formulación del problema . . . . .	6
2.3. Solución del problema . . . . .	7
2.3.1. Solución de Gómez Expósito <i>et al</i> . . . . .	8
2.3.2. Solución compacta . . . . .	8
2.4. Interpretación económica de $\lambda$ . . . . .	9
2.5. Ejemplo 1 - Caso de Estudio 1 . . . . .	9
<b>3. Despacho económico con restricciones de generación</b>	<b>10</b>
3.1. Suposiciones . . . . .	10
3.2. Formulación del problema . . . . .	11
3.3. Solución del problema . . . . .	11
3.3.1. Solución compacta . . . . .	12
3.4. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores de congestión de generación $\mu^{max}$ y $\mu^{min}$ . . . . .	13
3.5. Ejemplo 2 - Caso de Estudio 1 . . . . .	13
<b>4. Despacho económico con red</b>	<b>15</b>
4.1. Suposiciones . . . . .	16
4.2. Formulación del problema . . . . .	16
4.3. Solución del problema . . . . .	17
4.3.1. Solución basada en la formula B . . . . .	18
4.3.2. Solución basada en factores de penalización . . . . .	18
4.3.3. Solución basada en el modelo no-lineal del sistema de potencia . . . . .	19
4.4. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores incrementales de transmisión . . . . .	20
4.5. Ejemplo 3 - Caso de Estudio 2 . . . . .	21
<b>5. Despacho económico con restricciones de transmisión</b>	<b>24</b>
5.1. Suposiciones . . . . .	25
5.2. Formulación del problema . . . . .	25
5.3. Solución del problema . . . . .	26
5.4. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores de congestión de red $\mu^L$ . . . . .	27

5.5. Ejemplo 4 - Caso de Estudio 2 . . . . .	28
<b>6. Despacho económico generalizado - Flujo de Potencia Optimo</b>	<b>31</b>
6.1. Suposiciones . . . . .	31
6.2. Formulación del problema . . . . .	32

# 1. Introducción

En este documento se describe el problema de despacho económico básico de centrales eléctricas térmicas en el contexto de un sistema de potencia operando en régimen estable en condiciones de confiabilidad aceptable para perturbaciones creíbles, suficiente y seguro.

Se entiende cómo despacho básico el hecho que las demandas son consideradas inelásticas, es decir no modifican su patrón de consumo ante los cambios en los precios.

Se utilizará la teoría de la variaciones, incremental o marginal (Lagrange y Teorema de Karush-Kuhn-Tucker [1]) para la determinación de las asignaciones óptimas y los precios correspondientes. En este documento los términos marginal e incremental son equivalentes y se utilizan indistintamente.

El despacho se aplica en el ámbito de los mercados basados en costo (cost-based) en el que un planificador/operador benevolente tiene información completa de los agentes y la potestad de ordenar la producción sin sesgo alguno, atendiendo solamente criterios de eficiencia económica. También es un planteamiento útil para áreas de operación definidas por control de frecuencia (AGC) en las que una sola firma detenta varios los activos de generación de distintas tecnologías.

Este documento se organiza de la siguiente forma. La sección 2 describe el despacho económico básico uninodal, sin red y sin restricción alguna. La sección 3 describe despacho económico uninodal con restricciones en la capacidad de generación de potencia activa. La sección 4 describe despacho económico con red de transmisión con pérdidas de potencia activa y reactiva, sin restricciones. La sección 5 describe despacho económico con red de transmisión con solamente pérdidas de potencia reactiva y con restricciones en la capacidad de transmisión de las líneas.

Cada uno de los métodos mencionados tiene un ejemplo resuelto en detalle en MSEExcel, ejemplo tomado del texto de Gómez-Expósito [2].

Finalmente se plantea un despacho económico generalizado, también llamado Flujo de Potencia Optimo en el que se incluye la metodología de asignación de potencia en unidades térmicas considerando las pérdidas y todas las restricciones operacionales.

El repositorio de software utilizado se encuentra en la siguiente página del repositorio [GitHub](#).

## 2. Despacho económico clásico

En esta sección se resuelve el problema de despacho económico clásico de centrales térmicas. En la Figura 1 se muestra un sistema uninodal en el que varios generadores alimentan una

demanda. El objetivo del despacho óptimo es determinar la producción de cada generador para satisfacer la demanda a mínimo costo.

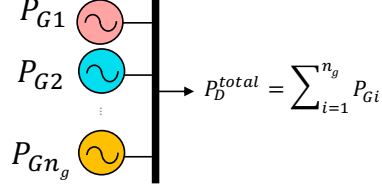


Figura 1: Despacho económico uninodal

## 2.1. Suposiciones

Se asume que:

1. Operación segura en régimen estable
2. Todos los generadores son térmicos, es decir, queman algún tipo de combustible (carbón, gas, diesel o biomasa) en calderas, turbinas o en motores de combustión interna.
3. No hay red. Todos los generadores y demandas están conectados en el mismo nodo.
4. Los generadores no tienen límites mínimos ni máximos de producción.
5. Las demandas son inelásticas, no responden al cambio en el precio marginal del sistema.
6. Las demandas corresponden a cargas base.

## 2.2. Formulación del problema

El problema de optimización económica consiste encontrar el despacho de potencia activa en  $n_g$  generadores  $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  tal que satisfaga la demanda  $P_D^{total}$  a mínimo costo de producción:

$$\min_{\mathbf{P}_G} C(\mathbf{P}_G) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) \quad (1)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi} = P_D^{total} \quad (2)$$

La función de costo de producción de cada generador  $i$  es:

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (3)$$

donde  $C_0$ ,  $a$  y  $b$  son coeficientes de la función de costo dada en la Ec. 3. Los parámetros dependen de la tecnología de generación utilizada. Para la interpretación económica de los factores  $C_0$ ,  $a$  y  $b$  revisar sección 1.6 y 3.1 del texto de Wood & Wollemborg (2013) [3].

Una vez obtenido las soluciones del despacho óptimo  $P_{Gi}$  para  $i=1, \dots, n_g$  y el precio marginal del sistema  $\lambda$  conviene definir las siguientes entidades económicas.

Se define como ingreso en \$/h la remuneración de los productores por venta de energía:

$$I_i = P_{Gi} \lambda, \quad I = \sum_{i=1}^{n_g} I_i \quad (4)$$

Se define como lucro de los productores en \$/h el beneficio o utilidad de los productores por venta de energía:

$$L_i = P_{Gi} \lambda - C_i(P_{Gi}), \quad L = \sum_{i=1}^{n_g} L_i \quad (5)$$

Se define el pago de la demanda en \$/h la erogación por concepto de energía de los consumidores:

$$L_i = P_D \lambda \quad (6)$$

### 2.3. Solución del problema

En caso que el parámetro  $b$  en la Ec. 3 sea nulo, la formulación del problema es lineal susceptible de ser resuelta mediante *Programación Lineal*. Por ejemplo, Simplex [4]. La función objetivo también puede linearizarse por trozos. De este modo, problema también se vuelve lineal y resoluble usando programación cuadrática secuencial. En estos casos la formulación dual del problema provee el precio marginal de equilibrio para el cual se minimizan los costos.

En su formulación estándar el problema de despacho económico básico debe ser resuelto mediante técnicas de *Programación No lineal*. En este caso utilizaremos el método de multiplicadores de Lagrange [5] que permite reducir el problema de optimización a un sistema de ecuaciones lineales de fácil resolución.

El Lagrangiano posee la siguiente estructura:

$$\mathcal{L}(P_G, \lambda) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) + \lambda \left( P_D^{\text{total}} - \sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi} \right) \quad (7)$$

Las condiciones necesarias de primer-orden de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} = IC_i(P_{Gi}) - \lambda = 0; \quad i = 1, \dots, n_g \quad (9)$$

donde el costo incremental de cada generador  $i$  es

$$IC_i(P_{Gi}) = \frac{dC_i(P_{Gi})}{dP_{Gi}} = a_i + b_i P_{Gi} \quad (10)$$

Las ecuaciones 8 y 9 constituyen un sistema de  $n_g+1$  ecuaciones lineales con  $n_g+1$  incógnitas cuya solución es directa.

### 2.3.1. Solución de Gómez Expósito *et al*

En [2] se plantea una elegante solución al problema. Especificando los datos conocidos como vectores:

$$\mathbf{C}_0 = [C_{01}, \dots, C_{0n_g}]^T \text{ en } \$/\text{h} \quad (11)$$

$$\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_{n_g}]^T \text{ en } \$/\text{MWh} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}([b_1, \dots, b_{n_g}]^T) \text{ en } \$/\text{MWh}^2 \quad (13)$$

$$\mathbf{e} = [1, \dots, 1]^T \quad (14)$$

El costo incremental del sistema y despacho resultante es:

$$\lambda = \frac{P_D^{\text{total}} + \mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} \text{ en } \$/\text{MWh} \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_G = \frac{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} P_D^{\text{total}} + \frac{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} (\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a})}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a} \text{ en MW} \quad (16)$$

Nótese que el costo fijo  $\mathbf{C}_0$  no está incluido en la solución. Esto tiene sentido por cuanto el costo fijo es una constante que desaparece en el análisis incremental.

### 2.3.2. Solución compacta

Una estrategia de solución más compacta se indica a continuación. Se define el vector de incógnitas: despacho óptimo y precio marginal del sistema  $\mathbf{x} = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}, \lambda]^T$ :



$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \quad (17)$$

donde para la  $i$ -ésima posición se dispone de la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_i & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = [-a_i, P_D^{total}]^T \quad (18)$$

La dimensión de  $\boldsymbol{\beta}$  es  $n_g+1 \times n_g+1$ . La dimensión de  $\boldsymbol{\alpha}$  es  $n_g+1 \times 1$ .

## 2.4. Interpretación económica de $\lambda$

Para un despacho óptimo dado  $([P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T)$ , La relación entre el precio marginal del sistema ( $\lambda$ ) y los costos incrementales de cada generador ( $IC_i(P_{Gi})$ ) viene dado por la siguiente expresión:

$$IC_i(P_{Gi}) = \frac{dC_i(P_{Gi})}{dP_{Gi}} = a_i + b_i P_{Gi} = \lambda, \forall i = 1, \dots, n_g \quad (19)$$

En el punto de equilibrio (especificación o despacho de cada  $P_{Gi}$  que produce el mínimo costo total  $C = \sum_{i=1}^{n_g} C_i$ ) todos los costos incrementales  $IC_i$  coinciden con el precio marginal del sistema  $\lambda$ .

## 2.5. Ejemplo 1 - Caso de Estudio 1

Consideremos el problema de despacho económico uninodal en el caso de estudio 1<sup>1</sup> La solución de despacho óptimo para la condición de demanda máxima ( $P_D^{total}=600$  MW) se muestra en la Tabla 1. Para hallar la solución se aplicó la aproximación compacta (Ec. 17). En este caso las matrices  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\beta}$  son:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -1 \\ 0 & b_1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha} = [-a_1, -a_2, P_D^{total}]^T \quad (20)$$

La solución es directa:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_{G1} \\ P_{G2} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -1 \\ 0 & b_1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ P_D^{total} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Estudio	Esc.	$P_D^{total}$ MW	$P_{G1}$ MW	$P_{G2}$ MW	$\lambda$ \$/MWh	C \$/h
B	<b>max</b>	600	433.3	166.7	41.67	19217
B	<b>min</b>	250	200	50	30.00	6675

Tabla 1: Solución despacho uninodal básico (B)

B: Despacho uninodal básico sin restricciones de generación

El procedimiento de solución puede encontrarse en la siguiente hoja de [MSExcel](#).

### Discusión acerca de los resultados:

- Puede observarse que en la condición de demanda máxima (cuando  $P_D^{total}=600$  MW) ambos generadores poseen ingresos superiores a sus costos de producción:  $I(P_{G1})=P_{G1} \cdot \lambda=18055.6$  \$/h,  $C(P_{G1})=13461.1$  \$/h.  $I(P_{G2})=P_{G2} \cdot \lambda=6944.4$  \$/h,  $C(P_{G2})=5755.6$  \$/h. Es decir, ambos generadores tienen lucro:  $R_{G1}=4594.4$  \$/h,  $R_{G2}=1188.9$  \$/h. El lucro total para la generación del área 1 (suponiendo que ambos generadores pertenecen a la misma firma) es 5783.3 \$/h. ¿ocurre lo mismo en la condición de mínima demanda (cuando  $P_D^{total}=250$  MW)?
- La proporción del despacho entre G1 y G2 es distinta para las condiciones de máxima y mínima demanda, 2.58:1 a 4:1, respectivamente. El generador 2 (que resulta más costoso y ineficiente) tiene una mayor participación en el despacho a medida que la demanda aumenta. Esto provoca un aumento del costo precio marginal de la energía en la medida que se incrementa la demanda. Es decir no existen *economías de escala* en el negocio de la generación de electricidad con centrales térmicas.
- Valide la siguiente afirmación: El precio marginal de generación  $\lambda$  aumenta de forma lineal con la demanda  $P_D^{total}$ .

## 3. Despacho económico con restricciones de generación

En esta sección se resuelve el problema de despacho económico estudiado en la sección 2 incluyendo restricciones de capacidad de generación.

### 3.1. Suposiciones

Se asume que:

---

<sup>1</sup>Revisar documento Caso de Estudio 1.

1. Operación segura en régimen estable
2. Todos los generadores son térmicos, es decir, queman algún tipo de combustible (carbón, gas, diesel o biomasa) en calderas, turbinas o en motores de combustión interna.
3. No hay red. Todos los generadores y demandas están conectados en el mismo nodo.
4. Las demandas son inelásticas, no responden al cambio en los precios marginales del sistema.
5. Las demandas corresponden a cargas base.

### 3.2. Formulación del problema

El problema de optimización económica consiste encontrar el despacho de potencia activa en  $n_g$  generadores  $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  cuya potencia está restringida a límites de generación tal que satisfaga la demanda  $P_D^{\text{total}}$  a mínimo costo de producción:

Minimizar Ec. 1 (Costo de producción)

sujeto a:

Ec. 44 (Equilibrio de potencia)

$$P_{Gi}^{\min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{\max}, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (22)$$

### 3.3. Solución del problema

En su formulación estándar el problema de despacho económico con restricciones de capacidad debe ser resuelto mediante técnicas de *Programación No lineal*. En este caso utilizaremos el método de multiplicadores de Lagrange generalizado mediante el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [1]. El problema de optimización se reduce a un sistema de ecuaciones no-lineal que debe ser resuelto mediante un método numérico.

El Lagrangiano posee la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{P}_G, \lambda) = & \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) + \lambda (P_D^{\text{total}} - \sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi}) \\ & + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i^{\max} (P_{Gi}^{\max} - P_{Gi}) + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i^{\min} (P_{Gi}^{\min} - P_{Gi}) \end{aligned} \quad (23)$$

Las condiciones necesarias de primer-orden de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} = IC_i(P_{Gi}) - \lambda - \mu_i^{\text{max}} - \mu_i^{\text{min}} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \mu_i^{\text{max}}} = P_{Gi}^{\text{max}} - P_{Gi} - \gamma_i = 0, \quad \gamma_i > 0, \forall i = 1, \dots, n_g \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \mu_i^{\text{min}}} = -P_{Gi}^{\text{min}} + P_{Gi} - \eta_i = 0, \quad \eta_i > 0, \forall i = 1, \dots, n_g \quad (27)$$

$$\mu_i^{\text{max}}(P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{max}}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (28)$$

$$\mu_i^{\text{min}}(P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{min}}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (29)$$

Las ecuaciones 24-29 constituyen un sistema de  $3n_g+1$  ecuaciones lineales con  $2n_g$  ecuaciones no-lineales con  $5n_g+1$  incógnitas. Las soluciones (raíces) de este sistema deben obtenerse mediante métodos numéricos (Newton, por ejemplo).

### 3.3.1. Solución compacta

A continuación se presenta una formulación matricial compacta que puede ser implementada en MS Excel (Solver) o Matlab (Fsolve).

Se define el vector de incógnitas para la  $i$ -ésima posición como:

$$\mathbf{x} = [P_{Gi}, \lambda, \mu_i^{\text{max}}, \mu_i^{\text{min}}, \gamma_i, \eta_i]^T \quad (30)$$

y el sistema a resolver se escribe como:

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{x} &= \alpha \\ \mu_i^{\text{max}}(P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{max}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \\ \mu_i^{\text{min}}(P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{min}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (31)$$

donde para la  $i$ -ésima posición se dispone de la siguiente estructura

$$\beta = \begin{bmatrix} b_i & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [-a_i, P_D^{total}, P_{Gi}^{max}, P_{Gi}^{min}]^T \quad (33)$$

La dimensión de  $\boldsymbol{\beta}$  es  $3n_g+1 \times 3n_g+1$ . La dimensión de  $\boldsymbol{\alpha}$  es  $3n_g+1 \times 1$ .

### 3.4. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores de congestión de generación $\mu^{max}$ y $\mu^{min}$

Para un despacho óptimo con restricciones de capacidad de generación dado  $([P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T)$ , La relación entre el precio marginal del sistema ( $\lambda$ ), los coeficientes KKT ( $\mu_i^{min}, \mu_i^{max}$ ) y los costos incrementales de cada generador ( $IC_i(P_{Gi})$ ) viene dado por las siguientes expresiones:

$$IC_i(P_{Gi}) = \lambda + \mu_i^{min} \geq \lambda \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{min} \quad (34)$$

$$IC_i(P_{Gi}) = \lambda \quad \text{si } P_{Gi}^{min} < P_{Gi} < P_{Gi}^{max} \quad (35)$$

$$IC_i(P_{Gi}) = \lambda + \mu_i^{max} \leq \lambda \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{max} \quad (36)$$

Cuando se activa el limite superior  $P_{Gi}^{max}$ , el coeficiente  $\mu_i^{max}$  es negativo. Esto significa que en condiciones de escasez, el precio marginal del sistema  $\lambda$  sube debido a la adición de  $\mu_i^{max}$  al costo incremental  $IC_i$ , que como sabemos depende de la tecnología de generación:  $\lambda = IC_i - \mu_i^{max} > IC_i$ .

Por otra parte, cuando se activa el limite inferior  $P_{Gi}^{min}$  el coeficiente  $\mu_i^{min}$  es positivo. Observamos que en condiciones de abundancia, el precio marginal del sistema  $\lambda$  disminuye debido a la sustracción de  $\mu_i^{min}$  al costo incremental  $IC_i$ :  $\lambda = IC_i - \mu_i^{min} > IC_i$ .

Finalmente, cuando el despacho de potencia de mínimo costo ocurre sin activar alguno de los limites, el precio del sistema coincide con el costo incremental de todos los generadores.

### 3.5. Ejemplo 2 - Caso de Estudio 1

Consideremos el problema de despacho económico uninodal con restricciones en la capacidad de generación en el caso de estudio 1.

La solución para una demanda máxima de  $P_D^{total}=600$  MW se muestra en la Tabla 2. Para hallar la solución se aplicó la formulación compacta discutida en esta sección (Sistema de ecuaciones definido en Ec. 31).

Como  $n_g=2$ , tendremos un vector  $\mathbf{x}$  con  $5n_g+1=11$  incógnitas, a saber:

$$\mathbf{x} = [P_{G1}, P_{G2}, \lambda, \mu_1^{max}, \mu_2^{max}, \mu_1^{min}, \mu_2^{min}, \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2]^T \quad (37)$$

La matriz  $\beta$  posee la siguiente estructura:

$$\beta = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

La matriz  $\alpha$  posee la siguiente estructura:

$$\alpha = [-a_1, -a_2, P_D^{total}, P_{G1}^{max}, P_{G2}^{max}, P_{G1}^{min}, P_{G2}^{min}]^T \quad (39)$$

adicionalmente se deben cumplir cuatro restricciones no-lineales adicionales:

$$\mu_1^{max} (P_{G1} - P_{G1}^{max}) = 0 \quad (40)$$

$$\mu_2^{max} (P_{G2} - P_{G2}^{max}) = 0 \quad (41)$$

$$\mu_1^{min} (P_{G1} - P_{G1}^{min}) = 0 \quad (42)$$

$$\mu_2^{min} (P_{G2} - P_{G2}^{min}) = 0 \quad (43)$$

En este modelo las variables de holgura  $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2$  son positivas.

El procedimiento de solución puede encontrarse en la siguiente hoja de [MSEExcel](#).

De la Tabla 2 podemos observar que para el despacho resultante en condición de demanda máxima se activó la restricción de capacidad del generador 1 (el más económico). En este caso, el coeficiente KKT activado es negativo:  $\mu_1^{max} = -5$  \$/MWh. Esto implica que en condiciones de escasez, el precio marginal del sistema es superior en 5 \$/MWh al costo incremental del generador 1  $IC_1(400MW) = 40$  \$/MWh. El costo incremental del generador 2 (donde no hay activación de límites) equivale al precio marginal, en este caso 44 \$/MWh

En condiciones de demanda mínima no se viola ningún límite y el despacho óptimo coincide con el reportado en la Tabla 2 que reporta los resultados del Ejemplo 1 (sección 2.5).

### Discusión acerca de los resultados:

- Se observa que al restringir la capacidad del generador 1 a 400MW ya no es posible satisfacer el despacho de mínimo costo (19217 \$/h) establecido en la Tabla 1 para

Estudio	Esc.	$P_D^{total}$ MW	$P_{G1}$ MW	$P_{G2}$ MW	$\lambda$ \$/MWh	$\mu_1^{max}$ \$/h	C \$/h
B	max	600	433.3	166.7	41.67		19217
B	min	250	200	50	30.00		6675
BRG	max	600	400	200	45.00	-5	19300
BRG	min	250	200	50	30.00	0	6675

Tabla 2: Solución despacho uninodal básico con restricciones de generación (BRG)

B: Despacho uninodal básico sin restricciones de generación

BRG: Despacho uninodal básico con restricciones de generación

la condición de demanda máxima sin restricciones de capacidad. En consecuencia el precio marginal del sistema sube de 41.67 a 45 \$/MWh, lo que constituye un incentivo a que se conecten nuevos generadores.

- La restricción provoca la necesidad de despachar el generador 2 (el más ineficiente) para poder cubrir la porción de demanda que no puede atender el generador 1 debido a la restricción. Esta ineficiencia tiene un costo social. La demanda pasa a pagar 27000 \$/h en lugar de 25000 \$/h (cuando no existían restricciones). Por otra parte, el lucro de ambos generadores sube de 5783.3 a 7700 \$/h debido a las restricciones. En suma, la sociedad pierde porque los costos producción pasan de 19217 a 19300 \$/h, lo que revela una ineficiencia económica.

**Conclusión:** la congestión o *cuellos de botella* en la producción conduce a la elevación de los precios y a la pérdida de bienestar social.

## 4. Despacho económico con red

En esta sección se describe el problema de despacho económico básico estudiado en la sección 2 incluyendo el efecto de las pérdidas de potencia en el sistema de transmisión. Tal como se muestra en la Figura 2 la idea es determinar la producción de cada generador para satisfacer las demandas nodales a mínimo costo tomando en cuenta una red de transmisión multinodal con pérdidas de potencia activa. La solución del despacho con red determina como repartir las pérdidas activas del sistema entre los agentes (unidades generadoras y demandas) desde el punto de vista marginalista.

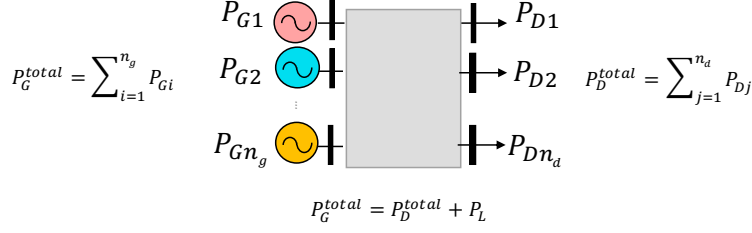


Figura 2: Despacho económico multinodal

Nótese que en el modelo multinodal toda la producción debe satisfacer todas las demandas más las pérdidas.

#### 4.1. Suposiciones

Se asume que:

1. Operación segura en régimen estable
2. Todos los generadores son térmicos, es decir, queman algún tipo de combustible (carbón, gas, diesel o biomasa) en calderas, turbinas o en motores de combustión interna.
3. Los generadores no tienen límites mínimos ni máximos de producción.
4. Las demandas nodales son inelásticas, no responden al cambio en los precios en su barra.
5. Las demandas corresponden a cargas base.
6. Se incluye el efecto de la red pero sin restricciones operativas (capacidad de transporte, límites de tensión y de generación de potencia reactiva).

#### 4.2. Formulación del problema

El problema de optimización económica consiste encontrar el despacho de potencia activa se mínimo costo de producción teniendo en cuenta que  $n_g$  generadores atienden a las demandas a través de un sistema de transmisión. Las demandas se encuentran ubicadas en distintos nodos del sistema. La demanda agregada es  $P_D^{total}$ .

Su formulación básica es hallar el despacho  $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  para

Minimizar Ec. 1 (Costo de producción)



sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi} = P_L(\mathbf{P}_G) + P_D^{\text{total}} \quad (44)$$

donde  $P_L(\mathbf{P}_G)$  son las pérdidas de potencia activa totales del sistema. Las pérdidas activas dependen del despacho. Cada despacho produce un punto de operación distinto y por ende distintas pérdidas.

### 4.3. Solución del problema

En este caso, el Lagrangiano debe incluir la función de pérdidas  $P_L(\mathbf{P}_G)$  de forma explícita:

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}_G, \lambda) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) + \lambda \left( P_D^{\text{total}} + P_L(\mathbf{P}_G) - \sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi} \right) \quad (45)$$

Las condiciones necesarias de primer-orden de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_L(\mathbf{P}_G) - P_D^{\text{total}} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} = IC_i(P_{Gi}) + \frac{dP_L(\mathbf{P}_G)}{dP_{Gi}} - \lambda = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (47)$$

La función de perdidas  $P_L$  con tiene un comportamiento cuadrática con respecto a cada una de las potencias generadas  $P_{Gi}$ . Por lo tanto la ecuación de equilibrio de potencia (Ec. 46) sigue siendo lineal.

Las ecuaciones 46 y 47 constituyen entonces un sistema de  $n_g+1$  ecuaciones lineales con  $n_g+1$  incógnitas. Se pueden mencionar tres métodos para resolver el despacho económico con pérdidas.

Se pueden identificar tres estrategias de solución para el despacho económico con pérdidas.

1. La solución es directa si se conoce la estructura de  $P_L(\mathbf{P}_G)$ . Kirchmayer (1958) [6] propuso una formula cuadrática (Bloss formula) que permite resolver el problema mediante un sistema de ecuaciones lineales.
2. El problema se puede resolver mediante el cálculo de factores de penalización recurriendo al calculo de las sensibilidades en la solución sucesiva de flujos de potencia. Este método se describe en detalle en el libro de Bergen & Vittal (2000) [7].
3. El problema se puede resolver sustituyendo la ecuación de equilibrio de potencia (Ec. 46) por las ecuaciones de potencia activa y reactiva nodales en función de las variables de estado. Este método se describe en el Gomez et al (2018) [2].

#### 4.3.1. Solución basada en la formula B

En un sistema con  $n_g$  generadores las pérdidas totales de potencia activa se determinan a partir del despacho  $\mathbf{P}_G$  mediante la siguiente fórmula:

$$P_L(\mathbf{P}_G) = \mathbf{P}_G^T \mathbf{B}_L \mathbf{P}_G + \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{P}_G + \mathbf{B}_0 \quad (48)$$

donde las matrices  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}_{L0}$  y  $\mathbf{B}_L$  son constantes. En Kirchmayerse presenta una primera aproximación para obtener la formula general de pérdidas [6]. En general, la obtención de las matrices B es complicada en sistemas de gran tamaño. En los años 50 la determinación de los coeficientes de la fórmula se realizaba de forma manual, lo que implicaba un esfuerzo de cálculo de varias semanas.

El método general para la obtención de la fórmula de pérdidas se describe en forma general en Zhu(2009) [8] y para el caso de  $n_g = 2$  en Kothari (2013) [9].

#### 4.3.2. Solución basada en factores de penalización

Este método consiste en determinar el precio marginal del sistema con red y sin restricciones de capacidad ( $\lambda$ ) mediante un método iterativo en el que se calculan los factores incrementales de pérdidas de transmisión, en lo sucesivo denominados ITL, a partir de una serie de flujos de potencias.

Los factores incrementales de pérdida de transmisión se definen como:

$$ITL_i = \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} \quad (49)$$

Las ITL de potencia activa pueden determinarse en cualquier punto de operación directamente de la solución de un flujo de potencia.

Los factores de penalización se definen como:

$$L_i = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}} \forall i = 2, 3, \dots, n_g \quad (50)$$

Nótese que el ITL correspondiente a la barra de referencia ( $i=1$ ) es nulo, por lo que  $L_1=1$ .

De las condiciones de optimalidad de primer orden establecidas en la Ec. 47 se observa el siguiente equilibrio:

$$L_1 \frac{dC_1}{dP_{G1}} = L_2 \frac{dC_2}{dP_{G2}} = \dots = L_{n_g} \frac{dC_{n_g}}{dP_{G_{n_g}}} = \lambda \quad (51)$$

### 4.3.3. Solución basada en el modelo no-lineal del sistema de potencia

La solución del despacho económico con red consiste en incluir en el modelo de despacho básico (sección 2) las ecuaciones de la activa/reactiva en cada nodo y las variables de estado (tensiones y ángulos) en el problema de despacho económico. Esta estrategia corresponde a una versión simplificada del Flujo de Potencia Optimo (OPF). En este caso el problema se formula de forma explícita de modo que un solver externo (Matlab-Fmincon, MINOS-GAMS, Solver de MSExcel, etc.) resuelva el problema.

Considere una red de  $n$  nodos con  $n_g$  barras de generación PV y  $n_d$  barras de demanda PQ.

#### Variables conocidas:

Matriz de admitancia del sistema:  $\mathbf{Y}=\mathbf{G}+j\mathbf{B}$

Demandas de potencia activa y reactiva del sistema:  $S_{Di}=P_{Di} + jQ_{Di}, i = 2, \dots, n$

Magnitud de tensiones en barras slack y PV (consigna AVR):  $\mathbf{V}=[V_1, \dots, V_{n_g}]^T$

Angulo de la barra slack nulo:  $\theta_1=0$

#### Variables a calcular:

Despacho de potencia activa  $\mathbf{P}_G=[P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  en barra slack y nodos PV

Despacho de potencia reactiva  $\mathbf{Q}_G=[Q_{G1}, \dots, Q_{Gn_g}]^T$  en barra slack y nodos PV

Angulos en todas las barras del sistema excepto la slack:  $\boldsymbol{\theta}=\theta_2, \dots, \theta_n$

Magnitud de tensiones en barras PQ:  $\mathbf{V}=[V_1, \dots, V_{n_d}]^T$

$$\min_{\mathbf{P}_G, \mathbf{Q}_G, \mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}} C(\mathbf{P}_G) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) \quad (52)$$

sujeto a:

$$P_i = P_{Gi} - P_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (53)$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (54)$$

Nótese que los precios marginales en cada uno los nodos 1 hasta  $n$  corresponden directamente a los multiplicadores de Lagrange asociado a las restricciones de igualdad (Ec. 53). En este caso, como la red tiene resistencias, se verifica que todos los LMPs son diferentes precio marginal del sistema:  $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ .

En [2] se aplican para cada nodo los equilibrios de potencia activa y reactiva para hallar el despacho óptimo con red.

En la formulación general del flujo de potencia óptimo (OPF), todas las variables (excepto el ángulo de la barra slack y la matriz de admitancia) son desconocidas.

#### 4.4. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores incrementales de transmisión

Para el despacho óptimo  $([P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T)$ , se van a obtener  $n$  multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$ . Un multiplicador para cada una de las  $n$  expresiones establecidas en Ec. 53. Todos los nodos tendrán un precio de marginal distinto, diferenciado por localización. En este sentido definimos los Precios Marginales Locales (LMP) como:

$$LMP_i = \lambda_i \forall i = 1, \dots, n \text{ en } \$/\text{MWh} \quad (55)$$

En [2], (Ec. 5.67) se demuestra que los LMPs dependen del precio marginal del sistema (que depende de la selección arbitraria de la barra slack) y los factores incrementales de transmisión (ITL):

$$LMP_i = \lambda_i = \lambda(1 - ITL_i(\mathbf{P}_G)), \forall i = 1, \dots, n \quad (56)$$

donde cada  $ITL_i$  se determina en con el despacho óptimo mediante el análisis de sensibilidad descrito [aquí](#)

Nótese que para  $i=1$ ,  $ITL_1=0$ , entonces el precio marginal en el nodo de referencia coincide con el precio marginal del sistema:  $\lambda_1 = \lambda$ .

La interpretación económica de los LMPs es como sigue:

- En un nodo  $i$  con  $LMP_i > \lambda$  y  $ITL_i = \frac{dP_L}{dP_{Gi}-dP_{Di}} < 0$  nos dice que:

Un aumento de la demanda y/o disminución de la generación produce un *aumento* de las pérdidas activas totales. Por lo tanto el precio marginal local de la barra  $i$  es *superior* al precio marginal del sistema  $LMP_i > \lambda$ . En este caso, el  $LMP_i > \lambda$  constituye un incentivo a los generadores para que se instalen en la barra  $i$ , ya que esta barra tiene un precio mayor al del sistema. Con ITLs negativos las demandas deben pagar por las pérdidas.

- En un nodo  $i$  con  $LMP_i < \lambda$  y  $ITL_i = \frac{dP_L}{dP_{Gi}-dP_{Di}} > 0$  nos dice que:

Un aumento de la demanda y/o disminución de la generación produce una *reducción* de las pérdidas activas totales. Por lo tanto el precio marginal local de la barra  $i$  es *inferior* al precio marginal del sistema  $LMP_i < \lambda$ . En este caso, el  $LMP_i < \lambda$  constituye un incentivo a los consumidores para que se instalen en la barra  $i$ , ya que esta barra tiene

un precio menor al del sistema. Con ITLs positivos los generadores son penalizados con precios LMP reducidos respecto al precio marginal del sistema.

Los LMPs constituyen señales económicas de localización y eficiencia a los agentes de generación. Los generadores cuya localización contribuye a la disminución de las pérdidas activas totales son *premiados* al poder vender su energía a precios superiores al precio marginal del sistema. Aquellos generadores que no contribuyen a la reducción de pérdidas son *penalizados* al tener que vender su energía a precios inferiores al precio marginal del sistema.

Los LMPs tambien constituyen señales económicas a los agentes de consumo. Un análisis de incentivos similar al realizado con la producción se puede realizar con la demanda.

### 4.5. Ejemplo 3 - Caso de Estudio 2

Planteemos el modelo descrito en la sección 4.3.3 para resolver el problema de despacho en el Caso de Estudio 1 (ver sección 2.5) incluyendo ahora una red de transmisión de tres líneas y tres nodos. La red de transmisión está especificada en el Caso de Estudio 2.

Asumimos el nodo 1 como referencia (slack), el nodo 2 como PV y el nodo 3 como PQ. Las tensiones de los generadores se fijan en  $V_1=V_2=1.0$  en pu. Angulo de la barra de referencia  $\theta_1=0$  rad. Las condiciones de demanda mínima:  $P_{D3}= 3$  pu (250 MW)  $Q_{D3}= 0$  pu.

Determinar  $\mathbf{P}_G=[P_{G1}P_{G2}]$ ,  $\mathbf{Q}_G=[Q_{G1}Q_{G2}]$ ,  $V_3$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  para el mínimo costo de producción:

$$\min_{\mathbf{P}_G \mathbf{Q}_G V_3 \theta_3} C(\mathbf{P}_G) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) \quad (57)$$

sujeto a:

$$P_1 = P_{G1} = V_1 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{1k} \cos \theta_{1k} + B_{1k} \sin \theta_{1k}] \rightarrow \lambda_1 \quad (58)$$

$$P_2 = P_{G2} = V_2 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{2k} \cos \theta_{2k} + B_{2k} \sin \theta_{2k}] \rightarrow \lambda_2 \quad (59)$$

$$P_3 = -P_{D3} = V_3 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{3k} \cos \theta_{3k} + B_{3k} \sin \theta_{3k}] \rightarrow \lambda_3 \quad (60)$$

$$Q_1 = Q_{G1} = V_1 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{1k} \sin \theta_{1k} - B_{1k} \cos \theta_{1k}] \quad (61)$$

$$Q_2 = Q_{G2} = V_2 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{2k} \sin \theta_{2k} - B_{2k} \cos \theta_{2k}] \quad (62)$$

$$Q_3 = -Q_{D3} = V_3 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{3k} \sin \theta_{3k} - B_{3k} \cos \theta_{3k}] \quad (63)$$

Nótese que los LMPs de los nodos 1, 2 y 3 corresponden directamente a los multiplicadores de Lagrange asociado a las restricciones de igualdad (Ecs. 59-61):  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ .

El problema de optimización definido Ecs. 58-63 en tiene 7 incógnitas y 6 restricciones. Note que las conductancias fueron despreciadas, por cuanto no se consideran las pérdidas activas. Las pérdidas reactivas si están incluidas. Las restricciones del problema tambien pueden ser formuladas de forma lineal utilizando del modelo DC  $\mathbf{P} = \mathbf{B}\boldsymbol{\theta}$ .

El procedimiento de solución mediante el Solver GHG NonLinear puede encontrarse en la siguiente hoja de [MSEExcel](#).

Las variables de estado resultantes de la solución del problema de optimización son::  $\mathbf{P}_G = [200.3 \text{ MW}, 53.3 \text{ MW}]$ ,  $\mathbf{Q}_G = [-4.1 \text{ mvar}, 22.1 \text{ mvar}]$ ,  $V_3 = 0.9823 \text{ pu}$ ,  $\theta_2 = -0.0255 \text{ rad}$ ,  $\theta_3 = -0.0763 \text{ rad}$ .

El costo total de producción es 6383.41 \$/h. Los precios marginales locales (LMP) son  $\lambda = \lambda_1 = 30.02 \text{ $/MWh}$ ,  $\lambda_2 = 30.32 \text{ $/MWh}$  y  $\lambda_3 = 30.96 \text{ $/MWh}$ .

Los coeficientes incrementales de transmisión en los nodos 2 y 3 son  $ITL_2 = -0.0103$  y  $ITL_3 = -0.03149$ , respectivamente. Las pérdidas activas y reactivas del sistema son 3.6 MW y 18 mvar, respectivamente. Los flujos de potencia entre los nodos 12, 13, 23 son 50, 150 y 102.1 MW, tal como se observa en la Fig 4.

#### Discusión acerca de los resultados obtenidos:

- Desde el punto de vista de las transacciones económicas, ambos generadores 1 y 2

Estudio	Esc.	$P_D^{total}$ MW	$P_{G1}$ MW	$P_{G2}$ MW	$\lambda = \lambda_1$ \$/MWh	$\lambda_2$ \$/MWh	$\lambda_3$ \$/MWh	C \$/h
B	max	600	433.3	166.7	41.67			19217
B	min	250	200	50	30.00			6675
BPerd	max	600	442	179	42.09	42.89	45.46	19798
BPerd	min	250	200.33	53.26	30.02	30.32	30.96	6783

Tabla 3: Solución despacho multinodal básico con pérdidas (BPerd)

B: Despacho uninodal básico sin restricciones de generación

BPerd: Despacho multinodal básico considerando pérdidas activas

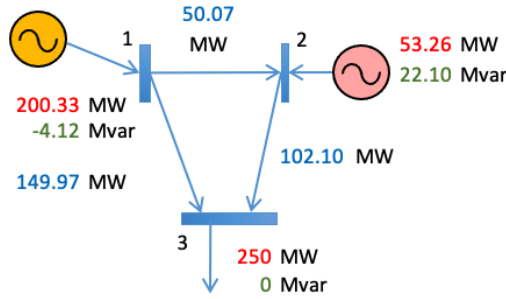


Figura 3: Despacho económico multinodal con pérdidas sin restricciones

tienen lucro: 1003 y 141.8 \$/h, respectivamente.

- Si comparamos la solución sin pérdidas (fila 2 de la Tabla 4) con la solución con pérdidas (fila 4 de la Tabla 4) para el despacho óptimo de mínima demanda observamos un ligero aumento del costo de producción total. Es necesario producir un poco más para satisfacer el consumo propio de la red (las pérdidas). Como las pérdidas activas de red no son aprovechables (se convierten en calor) este aumento del costo revela una pérdida de bienestar (aumento del costo social). Las pérdidas obtenidas podrían reducirse aun más incluyendo otras variables de estado como las tensiones (AVR) de los generadores 1 y 2, que en este caso se encuentran en 1.0 pu.
- Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (53)-(59) suministrados por el análisis de sensibilidad del Solver de MSExcels corresponden a los LMPs. Se observa que el generador 2 absorbe reactivos y su  $LMP_2 > \lambda$  (es decir  $ITL_2 < 0$ ). Esto significa que una variación positiva de potencia producida activa en el generador producirá una reducción de las pérdidas activas totales del sistema. Por su buena

gestión, el generador 2 es premiado con un precio marginal local superior al del mercado, lo que permite aumentar sus ingresos y su lucro.

- Por otra parte, se observa que en el nodo 3 el precio marginal local también es superior al precio marginal del sistema ( $LMP_3 > \lambda$ , es decir  $ITL_3 < 0$ ). Esto significa que una aumento del consumo en el nodo 3 producirá un aumento de las pérdidas activas totales del sistema. En este caso, la demanda debe pagar el costo de las pérdidas activas totales y el incentivo al generador 2. En números, la demanda tiene que pagar 7740.5 \$/h a los generadores, de los cuales 236.3 \$/h corresponden a pérdidas y 7504.2 \$/h corresponden a la compra de energía. El generador 1 recibe 6013.4 \$/h por energía vendida (no recibe ingresos por pérdidas en virtud que su ITL es nulo). El generador 2 recibe 1615.2 \$/h de los cuales 16.3 \$/h corresponden a un premio por reducción de pérdidas y 1598.7 \$/h corresponden ingresos por venta de energía.
- Si se hace un balance contable entre lo que pagan los consumidores y lo que reciben ambos generadores se observa un superávit de 111.9 \$/h. Bajo el modelo incremental, no es posible reconciliar el costo de las pérdidas, es decir eliminar el superávit. Las señales de precio eficiente enviadas a los consumidores tienden a recuperar aproximadamente el doble de las pérdidas activas totales. En otras palabras, en este ejemplo las señales de precio recibidas por las demandas conducen al pago más del doble de las pérdidas de modo que los generadores ajusten sus despachos a la condición de mínimo costo de producción (mínimo consumo de combustible en las centrales térmicas). Cualquier intento de modificar los LMPs de modo que se elimine el superávit conducirá a una solución ineficiente.
- Las pérdidas se reparten entre las unidades generadoras de manera desigual. El generador 1 asume 0.26MW y el generador 2 asume 3.33MW. Es relevante y algo no intuitivo que la unidad más ineficiente (generador 2) obtenga la mayor proporción de pérdidas. ¿Por qué ocurre esto? ¿Qué sucedería si elegimos la barra 2 como slack y la barra 1 como PV? El razonamiento detrás de este resultado se deja al lector.

## 5. Despacho económico con restricciones de transmisión

En esta sección se resuelve el problema de despacho económico estudiado en la sección 2 incluyendo las restricciones de capacidad de las líneas de transmisión. Este método permite determinar qué agentes deben pagar los precios de congestión debido a las restricciones en



la capacidad de transporte.

## 5.1. Suposiciones

Se asume que:

1. Operación segura en régimen estable
2. Todos los generadores son térmicos, es decir, queman algún tipo de combustible (carbón, gas, diesel o biomasa) en calderas, turbinas o en motores de combustión interna.
3. Se dispone de una red multinodal con sistema de transmisión sin pérdidas. Es decir las conductancias de la matriz de admitancias son nulas.
4. Las demandas son inelásticas, no responden al cambio en los precios marginales del sistema.
5. Las demandas corresponden a cargas base.
6. Las líneas de transmisión poseen límites de capacidad en MW

## 5.2. Formulación del problema

El problema de optimización económica consiste encontrar el despacho de potencia activa en  $n_g$  generadores  $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  cuya potencia está restringida a límites de generación tal que satisfaga la demanda  $P_D^{\text{total}}$  a mínimo costo de producción:

Minimizar Ec. 1 (Costo de producción)

sujeito a las restricciones de equilibrio de potencia activa y reactiva nodal (Ecs. Ec. 53-54) y de capacidad de transmisión :

$$P_{jk}^L = \frac{|P_{jk} - P_{kj}|}{2} \leq P_{jk}^{L-\max} \forall k, j = 1, \dots, n \quad (64)$$

donde el flujo de potencia activa entre barras en MW es:

$$P_{jk} = V_j V_k B_{jk} \sin \theta_{jk} \quad (65)$$

En algunos casos se determina el despacho óptimo utilizando como criterio los límites de estabilidad en MW por lo que es necesario utilizar las capacidades de las líneas también en MW. Sin embargo, el límite térmico de una línea de transmisión viene dado en Amperios.

En este caso, se puede utilizar las capacidades de las líneas expresadas en MVA a tensión nominal.

Nótese que los LMPs de los nodos 1 hasta  $n$  corresponden directamente a los multiplicadores de Lagrange asociado a las restricciones de igualdad (Ec. 53). En este caso, como la red no tiene resistencias, se verifica que todos los LMPs coinciden con el precio marginal del sistema:  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ .

El coeficiente KKT asociado a la restricción de capacidad de cada línea existente entre  $j$  y  $k$  (Ec. 90) permite establecer la sensibilidad entre el flujo de potencia en el enlace  $j$ - $k$  y la potencia inyectada en el nodo  $k$

$$\mu_j^L = \frac{\partial P_{jk}}{\partial P_{Gj}} \quad (66)$$

### 5.3. Solución del problema

La solución del despacho económico sin pérdidas pero con restricciones de red consiste en incluir en el modelo de despacho básico (sección 2) las ecuaciones de la activa/reactiva en cada nodo y las variables de estado (tensiones y ángulos) en el problema de despacho económico. Esta estrategia corresponde a otra versión simplificada del Flujo de Potencia Optimo (OPF). En este caso el problema se formula de forma explícita de modo que un solver externo (Matlab-Fmincon, MINOS-GAMS, Solver de MSeExcel, etc.) resuelva el problema.

Modelo formal de optimización:

Considere una red de  $n$  nodos con  $n_g$  barras de generación PV y  $n_d$  barras de demanda PQ.

**Variables conocidas:**

Matriz de admitancia del sistema:  $\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\mathbf{B}$

Demandas de potencia activa y reactiva del sistema:  $S_{Di} = P_{Di} + jQ_{Di}, i = 2, \dots, n$

Magnitud de tensiones en barras slack y PV (consigna AVR):  $\mathbf{V} = [V_1, \dots, V_{n_g}]^T$

Angulo de la barra slack nulo:  $\theta_1 = 0$

Curvas de costo incremental de generación:  $IC_i = a + bP_G, i = 2, \dots, n_g$

**Variables a calcular:**

Despacho de potencia activa  $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  en barra slack y nodos PV

Despacho de potencia reactiva  $\mathbf{Q}_G = [Q_{G1}, \dots, Q_{Gn_g}]^T$  en barra slack y nodos PV

Angulos en todas las barras del sistema excepto la slack:  $\boldsymbol{\theta} = \theta_2, \dots, \theta_n$

Magnitud de tensiones en barras PQ:  $\mathbf{V} = [V_1, \dots, V_{n_d}]^T$

$$\min_{\mathbf{P}_G \mathbf{Q}_G \mathbf{V} \theta} C(\mathbf{P}_G) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) \quad (67)$$

sujeto a:

$$P_i = P_{Gi} - P_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (68)$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (69)$$

$$P_{jk}^L = \frac{|V_j V_k G_{jk} \cos \theta_{jk} - V_k V_j B_{jk} \sin \theta_{kj}|}{2} \leq P_{jk}^{L-max} \forall k, j = 1, \dots, n \quad (70)$$

#### 5.4. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores de congestión de red $\mu^L$

Para el despacho óptimo  $([P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T)$ , se van a obtener  $n$  multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$ . En este caso todos iguales por cuanto no hay pérdidas. Si existe una línea con congestión, todos los nodos tendrán un precio de marginal distinto, diferenciado por localización. En este sentido definimos los Precios Marginales Locales (LMP) como:

$$LMP_i = \lambda_i \forall i = 1, \dots, n \text{ en } \$/\text{MWh} \quad (71)$$

En este caso LMPs dependen del precio marginal del sistema (que depende de la selección arbitraria de la barra slack) y los coeficientes KKT asociados a la congestión:

$$LMP_i = \lambda_i = \lambda - \mu_i^L, \forall i = 1, \dots, n \quad (72)$$

Nótese que para  $i=1$ ,  $\mu_1^L=0$ , entonces el precio marginal en el nodo de referencia coincide con el precio marginal del sistema:  $\lambda_1 = \lambda$ .

La interpretación económica de los LMPs es como sigue:

- En un nodo  $i$  con  $LMP_i > \lambda$  y  $\mu_i^L < 0$  nos dice que:

Un aumento de la demanda y/o disminución de la generación produce un aumento en la congestión en el sistema (activación de límites de capacidad en líneas de transmisión). Por lo tanto el precio marginal local de la barra  $i$  es *superior* al precio marginal del sistema  $LMP_i > \lambda$ . En este caso, el  $LMP_i > \lambda$  constituye un incentivo a los generadores

para que se instalen en la barra  $i$  ya que esta barra tiene un precio mayor al del sistema. Con factores de congestión negativos las demandas son penalizadas por su responsabilidad en la congestión de la red.

- En un nodo  $i$  con  $LMP_i < \lambda$  y  $\mu_i^L > 0$  nos dice que:

Un aumento de la demanda y/o disminución de la generación produce un alivio en la congestión en el sistema (reducción de las violaciones de los límites de capacidad en líneas de transmisión). Por lo tanto el precio marginal local de la barra  $i$  es *inferior* al precio marginal del sistema  $LMP_i < \lambda$ . En este caso, el  $LMP_i < \lambda$  constituye un incentivo a la instalación de consumos debido a los precios reducidos. Con factores de congestión positivos los generadores son penalizados por su responsabilidad en la congestión de la red.

Los LMPs envían señales de eficiencia a los agentes del mercado, generadores y demandas, debido el impacto de la potencia inyectada su punto de conexión en la variación de las pérdidas y la congestión.

## 5.5. Ejemplo 4 - Caso de Estudio 2

Planteemos el modelo descrito en la sección 4.3.3 para resolver el problema de despacho en el Caso de Estudio 1 (en la sección 2.5) incluyendo ahora una red de transmisión de tres líneas y tres nodos. La red de transmisión está especificada en el Caso de Estudio 2. En este ejemplo asumiremos que las líneas no tienen resistencias y que la línea 1-3 se encuentra limitada a 140 MW (0.7 pu)<sup>2</sup>.

Asumimos el nodo 1 como referencia (slack), el nodo 2 como PV y el nodo 3 como PQ. Las tensiones de los generadores se fijan en  $V_1=V_2=1.0$  en pu. Angulo de la barra de referencia  $\theta_1=0$  rad. Las condiciones de demanda mínima:  $P_{D3}= 1.25$  pu (250 MW)  $Q_{D3}= 0$  pu.

Determinar  $\mathbf{P}_G=[P_{G1}P_{G2}]$ ,  $\mathbf{Q}_G=[Q_{G1}Q_{G2}]$ ,  $V_3$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  para el mínimo costo de producción:

$$\min_{\mathbf{P}_G \mathbf{Q}_G \theta_2 V_3 \theta_3} C_1(P_{G1}) + C_2(P_{G2}) \quad (73)$$

sujeto a:

$$\theta_1 = 0, Q_{D3} = 0 \quad (74)$$

---

<sup>2</sup>Recordemos que en el Ejemplo 3 (Sección Fig. 4), para la condición de despacho de mínimo costo con pérdidas activas de red, el flujo entre 1 y 3 fue 150MW)

sujeto al equilibrio de potencia activa y reactiva del sistema:

$$P_1 = P_{G1} = V_1 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{1k} \cos \theta_{1k} + B_{1k} \sin \theta_{1k}] \rightarrow \lambda_1 \quad (75)$$

$$P_2 = P_{G2} = V_2 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{2k} \cos \theta_{2k} + B_{2k} \sin \theta_{2k}] \rightarrow \lambda_2 \quad (76)$$

$$P_3 = -P_{D3} = V_3 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{3k} \cos \theta_{3k} + B_{3k} \sin \theta_{3k}] \rightarrow \lambda_3 \quad (77)$$

$$Q_1 = Q_{G1} = V_1 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{1k} \sin \theta_{1k} - B_{1k} \cos \theta_{1k}] \quad (78)$$

$$Q_2 = Q_{G2} = V_2 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{2k} \sin \theta_{2k} - B_{2k} \cos \theta_{2k}] \quad (79)$$

$$Q_3 = -Q_{D3} = V_3 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{3k} \sin \theta_{3k} - B_{3k} \cos \theta_{3k}] \quad (80)$$

$$P_{13}^{linea} = \frac{|V_1 V_3 B_{13} \sin \theta_{13} - V_3 V_1 B_{31} \sin \theta_{31}|}{2} \leq 0,7 \quad (81)$$

El multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de desigualdad (Ec. 81) se denota  $\mu_{13}^L$ .

El problema de optimización definido Ecs. 75-81 en tiene 7 incógnitas y 7 restricciones: 6 de igualdad y 1 de desigualdad. El procedimiento de solución mediante el Solver GHG NonLinear puede encontrarse en la siguiente hoja de [MSEExcel](#).

Las variables de estado resultantes de la solución del problema de optimización son:  $\mathbf{P}_G = [171.12 \text{ MW}, 79.88 \text{ MW}]$ ,  $\mathbf{Q}_G = [9.13 \text{ mvar}, 7.24 \text{ mvar}]$ ,  $V_3 = 0.9980 \text{ pu}$ ,  $\theta_2 = -0.0151 \text{ rad}$ ,  $\theta_3 = -0.0702 \text{ rad}$ .

El costo total de producción es 6441.97 \$/h. Los precios marginales locales (LMP) son  $\lambda = \lambda_1 = 30.02 \text{ $/MWh}$ ,  $\lambda_2 = 30.32 \text{ $/MWh}$  y  $\lambda_3 = 30.96 \text{ $/MWh}$ .

Los coeficientes de congestión en los nodos 2 y 3 son  $\mu_2^L = -4.48 \text{ $/MWh}$  y  $\mu_3^L = -8.97 \text{ $/MWh}$ . Las pérdidas activas y reactivas del sistema son 0 MW y 16.4 mvar, respectivamente. Los flujos de potencia entre los nodos 12, 13, 23 son ahora 30, 140 y 110 MW, tal como se observa en la Fig. 4.

### Discusión acerca de los resultados obtenidos:

- Desde el punto de vista de las transacciones económicas, ambos generadores 1 y 2 tienen lucro: 723.5 y 319.1 \$/h, respectivamente.

Estudio	Esc.	$P_D^{total}$ MW	$P_{G1}$ MW	$P_{G2}$ MW	$\lambda = \lambda_1$ \$/MWh	$\lambda_2$ \$/MWh	$\lambda_3$ \$/MWh	C \$/h
B	min	250	200	50	30.00			6675
BT	min	250	170.1	79.9	28.51	32.99	37.48	6742

Tabla 4: Solución despacho multinodal básico sin pérdidas con restricciones de transmisión (BT)

B: Despacho uninodal básico sin restricciones de generación

BT: Despacho multinodal básico sin pérdidas activas con restricciones de transmisión

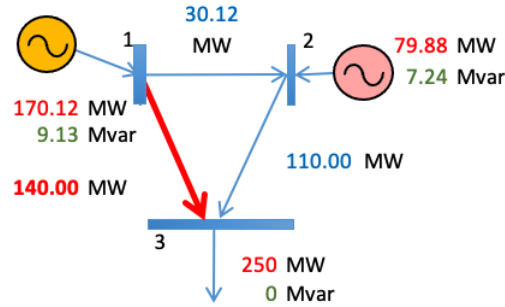


Figura 4: Despacho económico multinodal sin pérdidas con restricciones en línea 13

- Si comparamos la solución sin congestión (fila 2 de la Tabla 4) con la solución con congestión de red (fila 4 de la Tabla 4) para el despacho óptimo de mínima demanda observamos un ligero aumento del costo de producción total. En virtud que existe una limitación en la línea 1-3 es necesario despachar algunos MW adicionales en el generador mas costoso (unidad 2). El aumento del costo del servicio debido a la restricción de seguridad revela una pérdida de bienestar (aumento del costo social). Las congestiones pudieran aliviarse un poco incluyendo otras variables de estado como las tensiones (AVR) de los generadores 1 y 2, que en este caso se encuentran en 1.0 pu.
- Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (71)-(76) suministrados por el análisis de sensibilidad del Solver de MSExcel corresponden a los LMPs. Se observa que el generador 2 inyecta reactivos y su  $LMP_2 > \lambda$  (es decir  $\mu_2^L < 0$ ). Esto significa que una variación positiva de potencia producida activa en el generador producirá un alivio en la congestión del sistema. Por su buena gestión, el generador 2 es premiado con un precio marginal local superior al del mercado, lo que permite aumentar sus ingresos y su lucro.

- Por otra parte, se observa que en el nodo 3 el precio marginal local también es superior al precio marginal del sistema ( $LMP_3 > \lambda$ , es decir  $\mu_3^L < 0$ ). Esto significa que una aumento del consumo en el nodo 3 producirá un aumento de la congestión en el sistema. En este caso, la demanda debe pagar el incentivo al generador 2. En números, la demanda tiene que pagar 9937.1 \$/h a los generadores, de los cuales 2244.5 \$/h corresponden a cargos por congestión y 7126.5 \$/h corresponden a la compra de energía. El generador 1 recibe 4148.5 \$/h por energía vendida (no tiene ingresos/cargos por congestión en virtud que su  $\mu_1^L$  es nulo). El generador 2 recibe 2638.7 \$/h de los cuales 358.5 \$/h corresponden a un premio por alivio de congestión y 2280.2 \$/h corresponden ingresos por venta de energía.
- Si se hace un balance contable entre lo que pagan los consumidores y lo que reciben ambos generadores se observa un superávit de 1882.8 \$/h. Esta diferencia entre lo que pagan los consumidores y lo que reciben los generadores es recaudado por el operador de red, constituyendo una señal clara de dónde se deben hacer las inversiones requeridas para aliviar los nexos que producen la congestión.
- ¿Es posible plantear un modelo de despacho conjunto en el que se asignen los costos tanto de las pérdidas como de la congestión de red entre los agentes generadores y consumidores? ¿se pueden incluir otras variables sujetas a limitación como por ejemplo: las tensiones y los ángulos (estabilidad), la potencia reactiva suministrable por las unidades de generación y/o otros equipos como Statcom, SVC, etc.?

## 6. Despacho económico generalizado - Flujo de Potencia Optimo

En esta sección se plantea el problema de flujo de potencia óptimo cuyo objetivo es la minimización de los costos de producción en unidades térmicas.

### 6.1. Suposiciones

Se asume que:

1. Operación segura en régimen estable
2. Todos los generadores son térmicos, es decir, queman algún tipo de combustible (carbón, gas, diesel o biomasa) en calderas, turbinas o en motores de combustión interna.

3. Se dispone de una red multinodal con sistema de transmisión con pérdidas activas y reactivas.
4. Las demandas son inelásticas, no responden al cambio en los precios marginales del sistema.
5. Las demandas corresponden a cargas base.
6. Se consideran limites en las tensiones, potencias activas y reactivas generadas
7. e consideran limites de estabilidad (flujos de potencia en las líneas)

## 6.2. Formulación del problema

Modelo formal de optimización:

Considere una red de  $n$  nodos con  $n_g$  barras de generación PV y  $n_d$  barras de demanda PQ.

**Variables conocidas:**

Matriz de admitancia del sistema:  $\mathbf{Y}=\mathbf{G}+j\mathbf{B}$

Demandas de potencia activa y reactiva del sistema:  $S_{Di}=P_{Di} + jQ_{Di}, i = 2, \dots, n$

Angulo de la barra slack nulo:  $\theta_1=0$

Curvas de costo incremental de generación:  $IC_i=a+bP_G, i=2, \dots, n_g$

**Variables a calcular:**

Despacho de potencia activa  $\mathbf{P}_G=[P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  en barra slack y nodos PV

Despacho de potencia reactiva  $\mathbf{Q}_G=[Q_{G1}, \dots, Q_{Gn_g}]^T$  en barra slack y nodos PV

Magnitud de tensiones en barras slack y PV (consigna AVR):  $\mathbf{V}=[V_1, \dots, V_{n_g}]^T$

Angulos en todas las barras del sistema excepto la slack:  $\boldsymbol{\theta}=\theta_2, \dots, \theta_n$

Magnitud de tensiones en barras PQ:  $\mathbf{V}=[V_1, \dots, V_{n_d}]^T$

$$\min_{\mathbf{P}_G \mathbf{Q}_G \mathbf{V} \boldsymbol{\theta}} C(\mathbf{P}_G) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) \quad (82)$$

sujeto a:

$$\theta_1 = 0, \quad (83)$$

sujeto al equilibrio del sistema

$$P_i = P_{Gi} - P_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (84)$$



$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (85)$$

capacidad de generación

$$P_{Gi}^{min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{max}, \forall i = 1, \dots, n_g \text{ (límites potencia activa)} \quad (86)$$

$$Q_{Gi}^{min} \leq Q_{Gi} \leq Q_{Gi}^{max}, \forall i = 1, \dots, n_g \text{ (límites potencia reactiva)} \quad (87)$$

capacidad de transmisión

$$P_{jk}^L \leq P_{jk}^{L-max} \forall k, j = 1, \dots, n \text{ (flujo de potencia activa)} \quad (88)$$

$$S_{jk}^L \leq S_{jk}^{L-max} \forall k, j = 1, \dots, n \text{ (flujo de potencia aparente)} \quad (89)$$

$$\theta_{jk} \leq \theta_{jk}^{max} \forall k, j = 1, \dots, n \text{ (límites diferencia angular)} \quad (90)$$

$$V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max}, \forall i = 1, \dots, n \text{ (límites magnitud de tensión)} \quad (91)$$

En el problema de despacho general con red se definen los ajustes de las variables de control en barras PV y slack para un área de interés. Los precios tendrán información acerca de las pérdidas y la violación de restricciones en régimen estable.

Para incluir consideraciones de seguridad, es decir ajustes que permitan soportar contingencias creíbles, el despacho económico tal como se ha planteado aquí pasa a ser considerado un flujo de potencia óptimo restringido a la seguridad del sistema. En este caso deben considerarse condiciones de operación N-1 y la posibilidad de hacer deslastre óptimo de carga. Estos aspectos serán cubiertos en el tema relativo a Flujo de Potencia Óptimo.

## Referencias

- [1] H Kuhn and A Tucker, “Nonlinear programming, second berkeley symposium of math. statistics and probability”, *University of California Press, Berkeley*, vol. 13, pp. 481–492, 1951.
- [2] Antonio Gómez-Expósito, Antonio J Conejo, and Claudio Cañizares, *Electric energy systems: analysis and operation*, CRC press, 2018.

- [3] Allen J Wood, Bruce F Wollenberg, and Gerald B Sheblé, *Power generation, operation, and control*, John Wiley & Sons, 2013.
- [4] George B Dantzig, “Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities”, *Activity analysis of production and allocation*, vol. 13, pp. 339–347, 1951.
- [5] Mokhtar S Bazaraa, Hanif D Sherali, and Chitharanjan M Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, John Wiley & Sons, 2013.
- [6] Leon K Kirchmayer, *Economic operation of power systems*, vol. 707, Wiley New York, 1958.
- [7] Arthur Bergen and Vijay Vittal, *Power systems analysis*, Prentice Hall, 2000.
- [8] Jizhong Zhu, *Optimization of power system operation*, John Wiley & Sons, 2009.
- [9] Dwarkadas Pralhaddas Kothari and IJ Nagrath, *Modern power system analysis*, Tata McGraw-Hill Education, 2018.