Mercados de Energía Eléctrica
Formación de precios – Despacho Económico

Sesión 3
3/12/2025

Nociones de microeconómía

Qué es el Mercado?

- La economía se centra en optimización y el equilibrio.
- La Macroeconomía estudia la economía en general (inflación,
- El desempleo y el costo del capital)
- La Microeconomía estudia comportamiento de los consumidores y los productores y se pregunta si los precios de equilibrio observados y las cantidades en cada mercado son económicamente eficientes.

En esta sección se discute la microeconomía del mercado de electricidad Veremos que las características del mercado de la electricidad pueden concluir en precios y cantidades insuficientes. Aprenderemos a medir las pérdidas sociales Asociados tanto a la falta de eficiencia como a la imposición de la regulación

Mercados Competitivos Vs.
Mercados No-Competitivos

Los mercados pueden estar integrados o empaquetados *bundled*
en un mercado único.
Por ejemplo. Una sola empresa produce, transmite y distribuye electricidad
unos consumidores.

Los mercados no empaquetados (Unbundled)

Monopolio: Vendedor Unico
Monopsonio: Comprador Unico

Two types of Electricity Markets

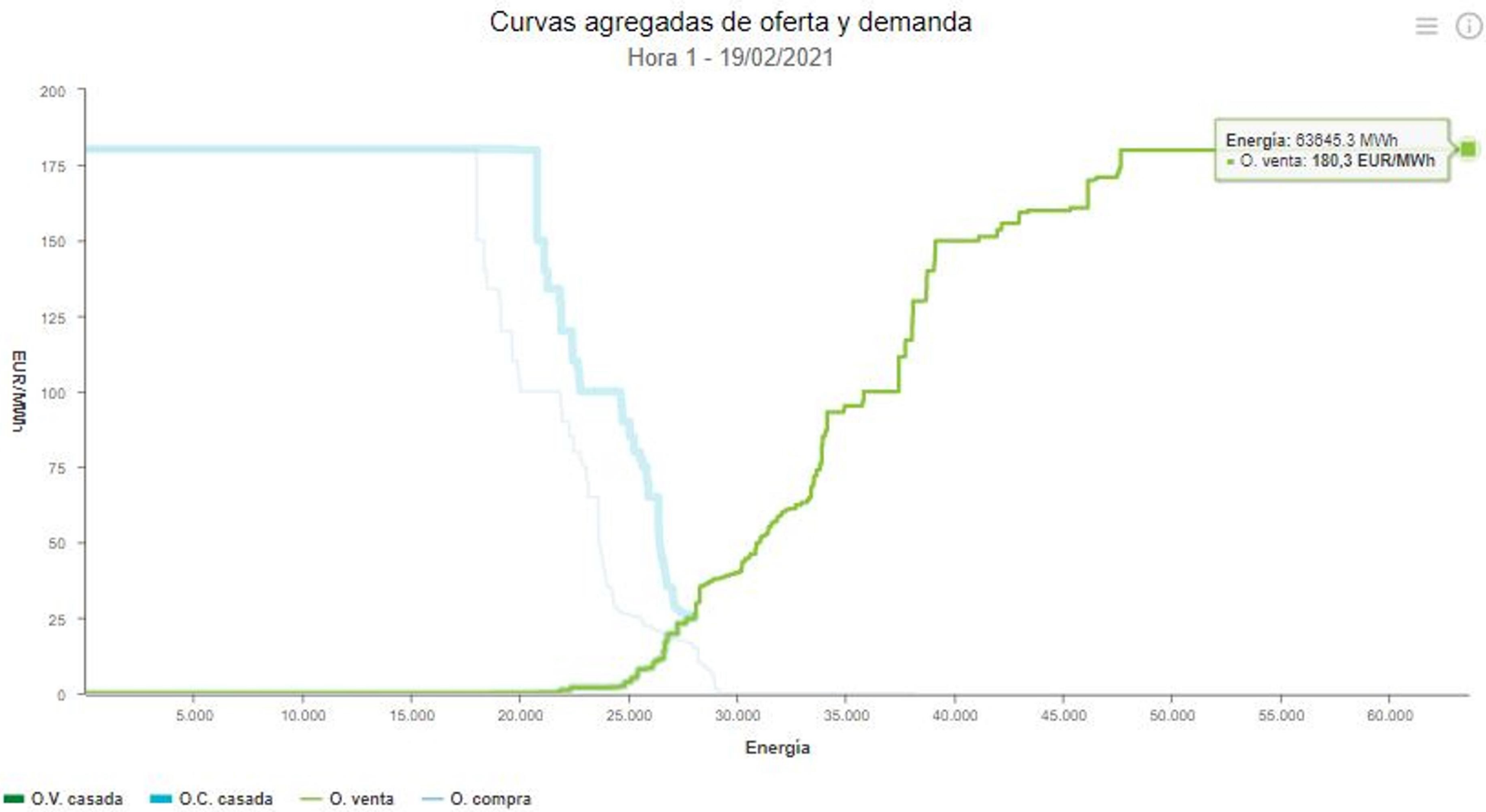
1.- Cost Based Markets.

- MO Makes all decisions
- Agents inform MO their Cost curves
- Traditional Economic Dispatch (ED) is performed by MO
  - Production cost (Inelastic demand)
  - Social cost (Elastic demand)
- Unit Commitment (UC) is done taking into account start-up & shut-down costs
- MO Assures the reserve margin
- Network optimization via AC-OPF (volt-var regulation)
- Remuneration Ex-post via CoS/RoR regulation

Two types of Electricity Markets

2.- Price Based Markets.

- In Day ahead bid Agents (generators and demands) inform MO their hourly prices of energy
- MO clear the market: Each one is seeking its own benefit
- Market Based Economic Dispatch (ED) is performed by MO
- Unit Commitment (UC) is done taking into account start-up & shut-down costs
- Two situations
  - Agents are price takers (perfect competition)
  - Agents are able to shift the price (oligopoly)
- Network optimization via AC-OPF (volt-var regulation)

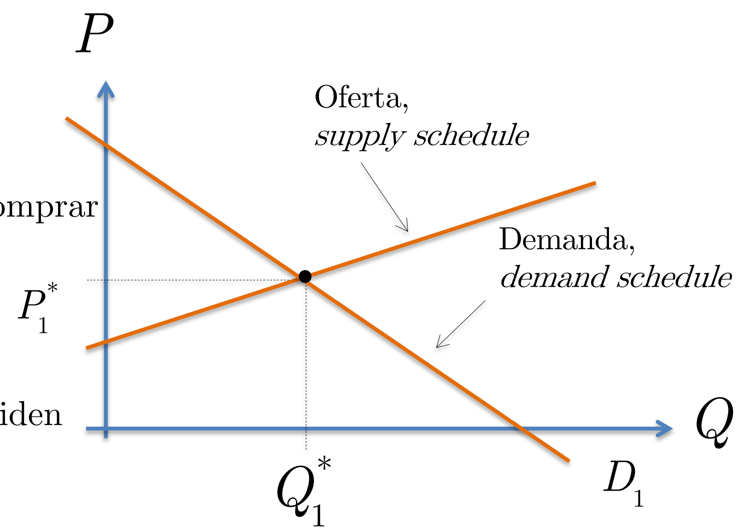

Curvas agregadas de oferta y demanda
Hora 1 - 19/02/2021
Energía: 63845.3 MWh
O. venta: 180,3 EUR/MWh
EUR/MWh
200
175
150
125
100
75
50
25
0
5.000
10.000
15.000
20.000
25.000
30.000
35.000
40.000
45.000
50.000
55.000
60.000
Energía
O.V. casada
O.C. casada
O. venta
O. compra

Mercados de competencia perfecta.

Bajo competencia perfecta la interacción de cuantiosos vendedores y compradores acaba en un precio de mercado que iguala el costo incremental de la *última* unidad producida y vendida. Esta es la *solución económicamente eficiente*.

Mecanismo de Mercado:

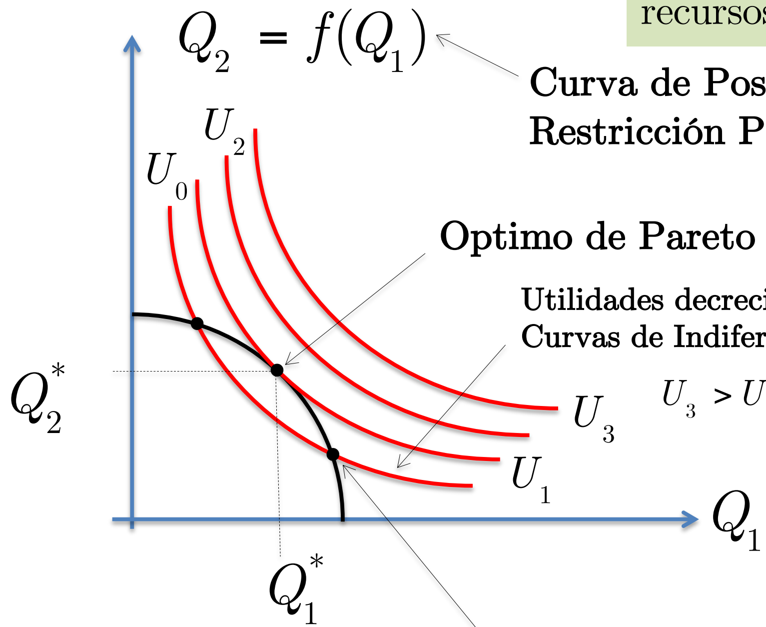
Un director de subasta (Auctioneer) pregunta (Ask) los participantes la cantidad Q que quieren vender o comprar y a que precio P. Se ordenan los precios de las ofertas y demandas en forma ascendente y descendente, y se fija el precio y la cantidad en el que coinciden ambas curvas (se casan las curvas)



Fuente: Dammert et al (2008)

Economía del Bienestar

La maximización del bienestar social requiere una asignación eficiente de los recursos (que son escasos).



Curva de Posibilidades de Producción o Restricción Presupuestaria del Consumo

Optimo de Pareto (Competencia Perfecta)

Utilidades decrecientes
Curvas de Indiferencia Social

$U_3 > U_2 > U_1 > U_0$

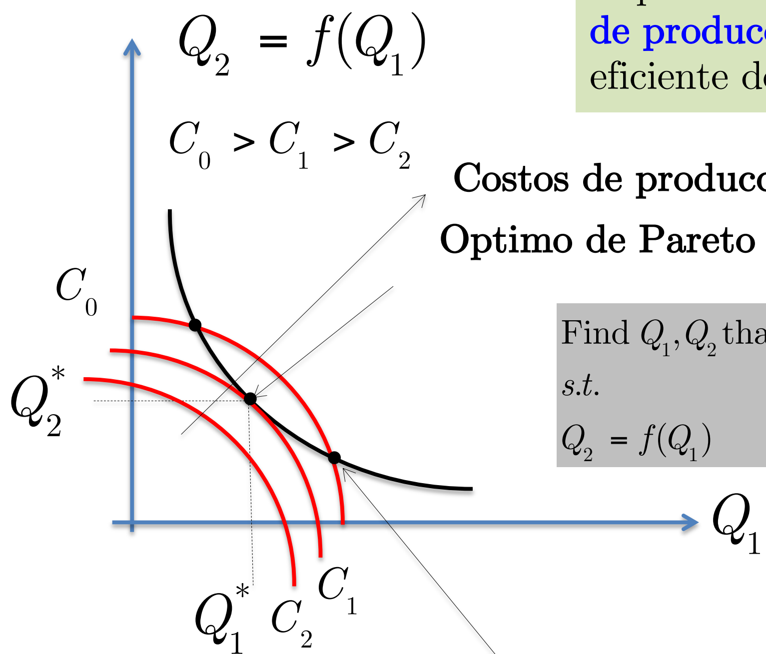
Find Q_1, Q_2 that maximize $U(Q_1, Q_2)$
s.t.
$Q_2 = f(Q_1)$

Estrategia eficiente, pero no óptima $U_1 < U_0$

Equilibrio General Competitivo

Economía del Bienestar

La maximización del bienestar social Implica la **minimización de los costos de producción** mediante una asignación eficiente de los recursos (que son escasos).



Costos de producción crecientes

Optimo de Pareto (Competencia Perfecta)

Find Q_1, Q_2 that minimize $C = k_1 Q_1 + k_2 Q_2$

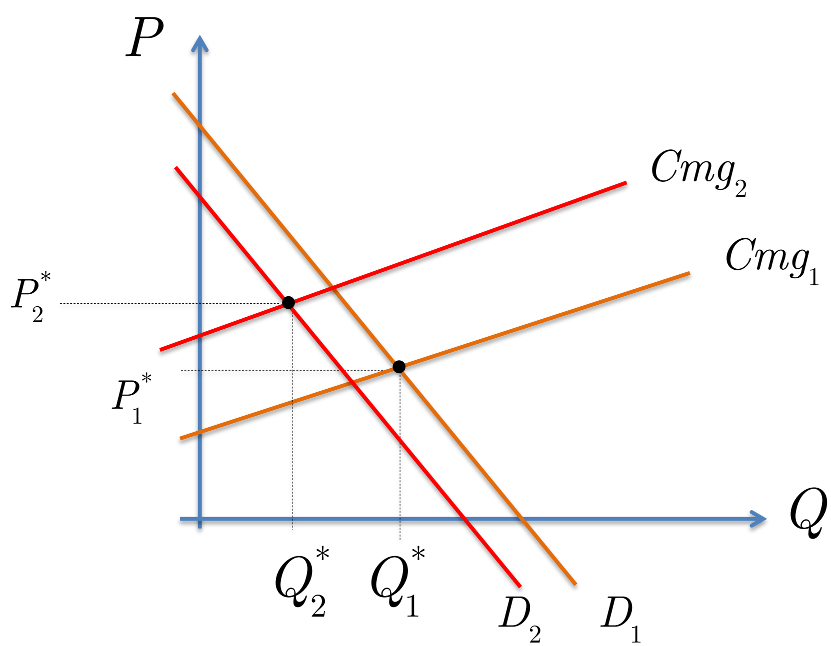
$s.t.$

$Q_2 = f(Q_1)$

Estrategia eficiente, pero no óptima $C_0 > C_1$

Equilibrio General Competitivo

Precios de equilibrio (competencia perfecta)



Equilibrio General Competitivo

Fallas del Mercado

El modelo de equilibrio es un REFERENTE IDEAL
Los mercados reales pueden comportarse de forma muy diferente debido a varios factores:

Poder de Mercado: un agente puede influir en los precios. Habilidad de colocar el precio por encima del costo marginal de producción.

Consecuencia: no se logra el máximo nivel de bienestar, con una menor producción y mayores precios que los que existirían bajo competencia perfecta.

Fallas del Mercado

El modelo de equilibrio es un REFERENTE IDEAL
Los mercados reales pueden comportarse de forma muy diferente debido a varios factores:

Existencia de Monopolio Natural. Vendedor Unico. Cuando el máximo nivel de bienestar ocurre cuando hay un solo agente. Actividades de red: agua, teléfonos, gas y electricidad.

Fallas del Mercado

El modelo de equilibrio es un REFERENTE IDEAL
Los mercados reales pueden comportarse de forma muy diferente debido a varios factores:

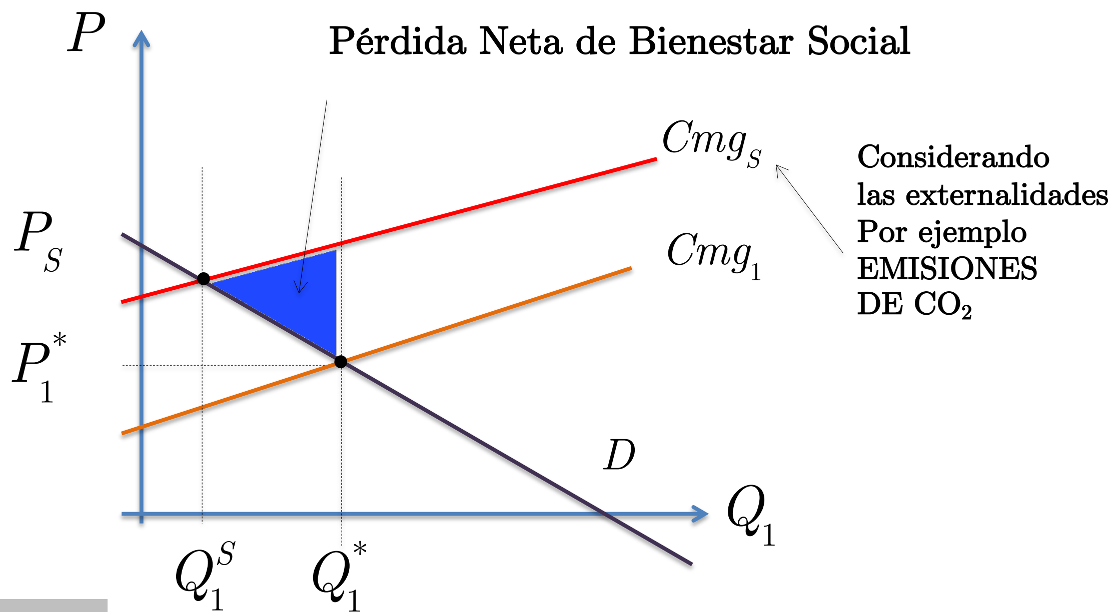
Asimetría de la Información: utilización de información privilegiada para el beneficio de un agente. Consecuencia: no se logra el máximo nivel de bienestar, con una menor producción y mayores precios que los que existirían bajo competencia perfecta.

Fallas del Mercado

El modelo de equilibrio es un REFERENTE IDEAL
Los mercados reales pueden comportarse de forma muy diferente debido a varios factores:

Externalidades: que surgen cuando un agente, sin tomar en cuenta las consecuencias de sus actos, toma decisiones que pueden afectar el bienestar de otros agentes.

<u>Externalidades</u>



Equilibrio General
Competitivo

Las Fallas del Mercado
"Existencia de Ineficiencia Económica"
se pueden mitigar mediante dos formas
1.- Regulando el Mercado.
(Intervención del Estado, Fijando precios por ejemplo)
2.- Creando condiciones para la Competencia
(A veces incluye, otra forma de regulación: creando reglas,
day ahead markets)

Fallas del Mercado

La existencia de fallas de mercado es una de las razones que suelen justificar la intervención del Estado mediante la creación de Entidades reguladoras.

Algunas medidas son:

- la imposición de obligaciones de alcance universal,
- aplicación de impuestos a algunas actividades,
- creación de instancias de resolución de conflictos
- garantía al cumplimiento de los contratos,
- la regulación de precios de los monopolios,
- la imposición de estándares de calidad

Fuente: Dammert et al (2008)

Microeconomía

La teoría microeconómica generalmente se presenta con la siguiente secuencia (Nicholson, Pindick, Mas-Colell)

- Demanda, Utilidad, Excedente del consumidor
- Consumo, Costos, Excedente del productor
- Competencia Perfecta, equilibrios y Bienestar Social
- Fallas de Mercado:
  - Poder de Mercado y Monopolio
  - Otras fallas: Externalidades y Asimetría de la información
- la imposición de estándares de calidad

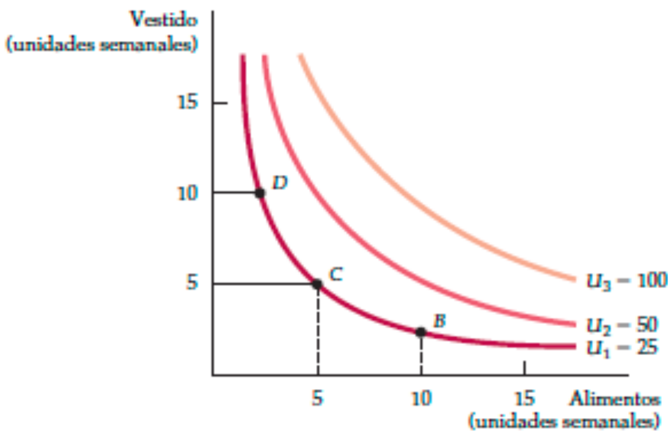
Otros enfoques (Varian), analizan inicialmente los equilibrios Profit Maximization, Cost Minimization, Utility Maximization para posteriormente caracterizar la demanda, la producción y las fallas del mercado.

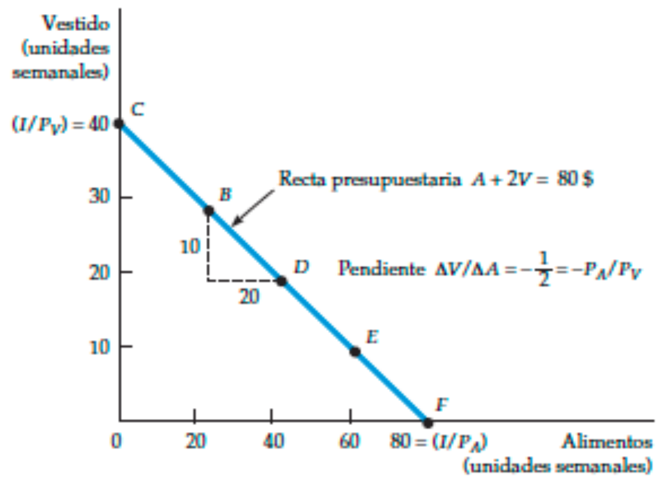
Fuente: Dammert et al (2008)

Microeconomía: Demanda

Conducta del consumidor:
Función de Utilidad U

Curvas de Indiferencia y Restricción Presupuestaria

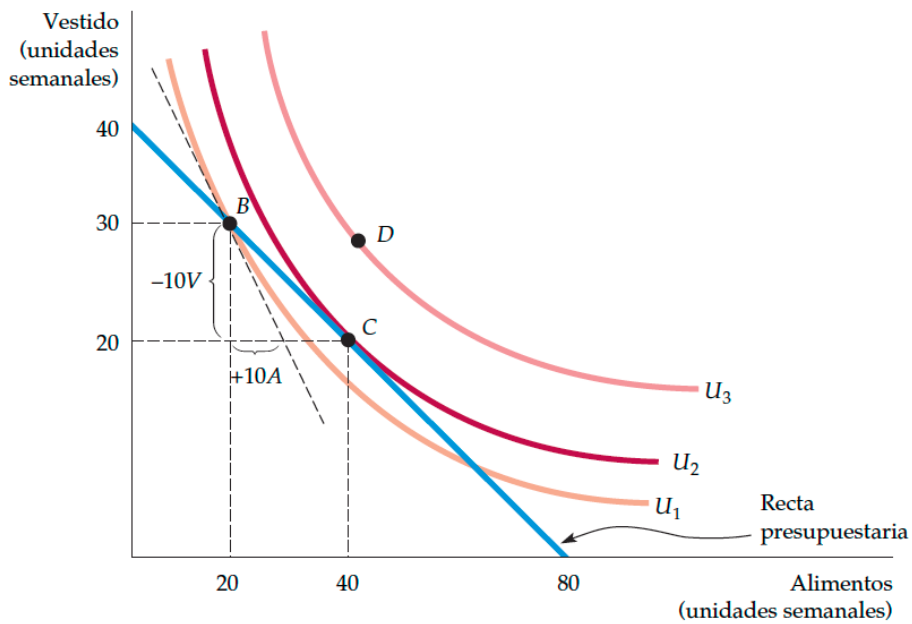




Fuente: Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2005)

Microeconomía: Demanda

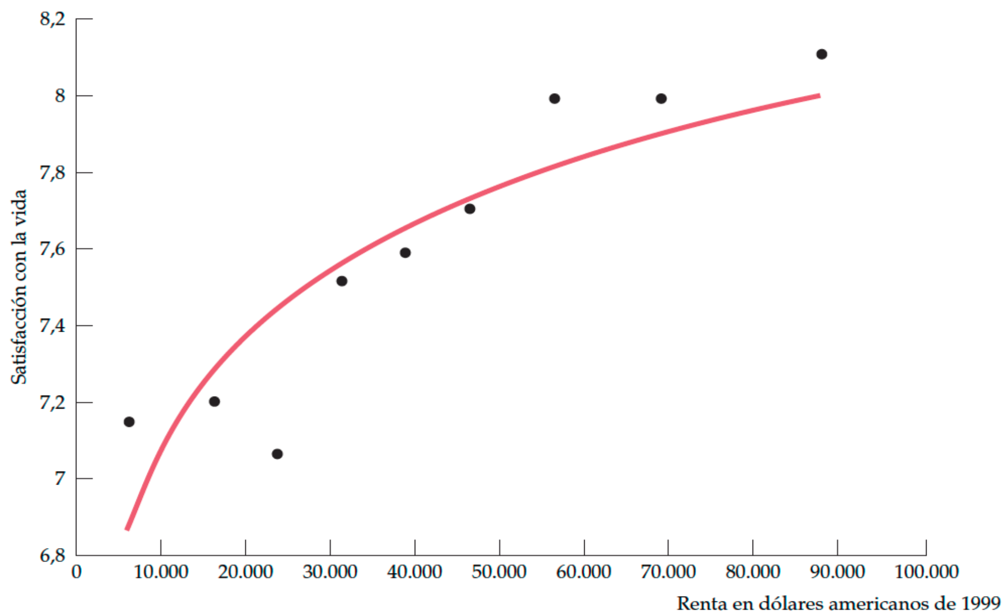
Conducta del consumidor:
Selección Optima



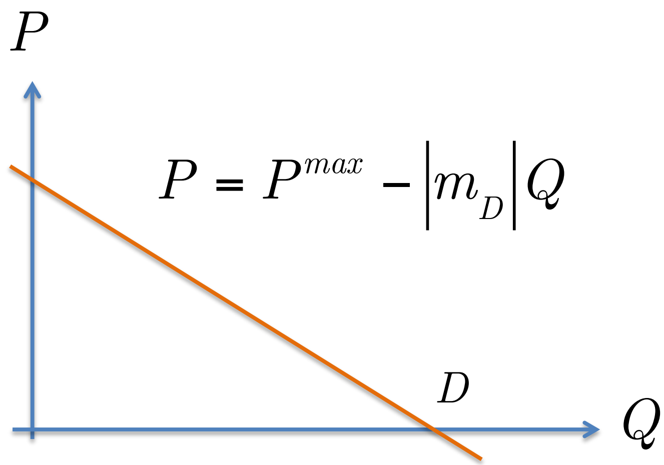
Fuente: Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2005)

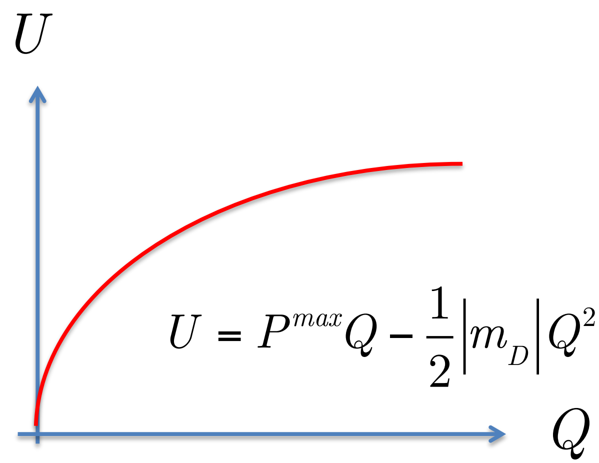
Microeconomía: Demanda

Utilidad Marginal Decreciente: ¿cuánto cuesta la felicidad?



Fuente: Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2005)





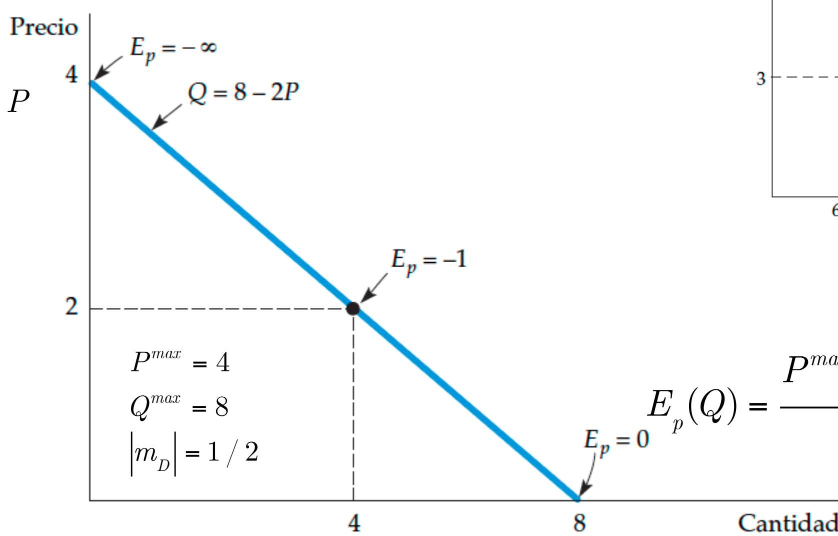
Utilidad Marginal Decreciente

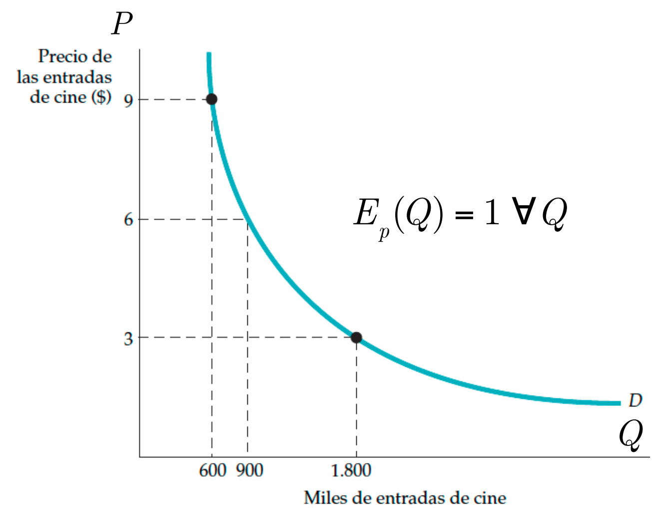
$$U(Q) = \int_0^Q P \, dQ = \int_0^Q [P^{max} - |m_D| Q] \, dQ$$

$$U(Q) = C + P^{max} Q - \frac{1}{2} |m_D| Q^2$$

La Elasticidad de la Demanda

$$E_p = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta P / P} = \frac{P}{Q}\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{P(Q)}{Q}\left[\frac{dP(Q)}{dQ}\right]^{-1}$$

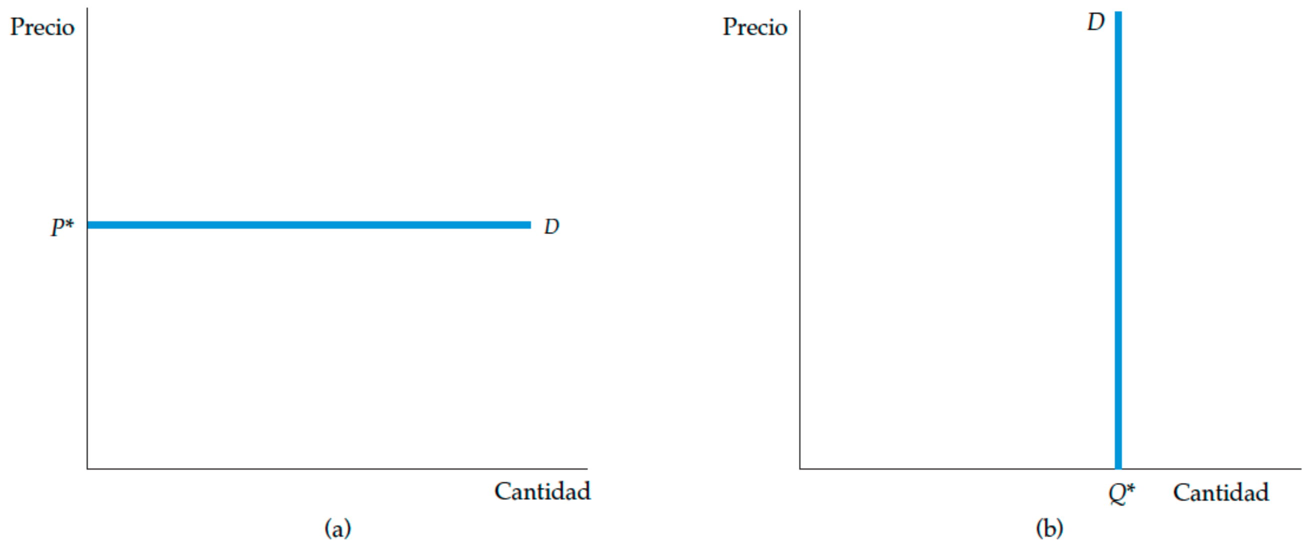




$$E_p(Q) = 1 \ \forall Q$$

$$E_p(Q) = \frac{P^{max} - |m_D|Q}{Q}\left[-|m_D|\right]^{-1} = 1 - \frac{P^{max}}{|m_D|Q}$$

La Elasticidad de la Demanda



(a) La demanda infinitamente elástica. (b) La demanda totalmente inelástica

Microeconomía: La Producción

Costs:

	Cost	Technology
very short run	**all** costs are fixed	fixed
short run	**some** costs are fixed	fixed
long run	**no** costs are fixed	fixed
very long run	**no** costs are fixed	**not fixed**

Rothwell, G., & Gomez, T. (2003)

kaizen Company

Microeconomía: La Producción

Costs: TOTAL, MEDIO y MARGINAL

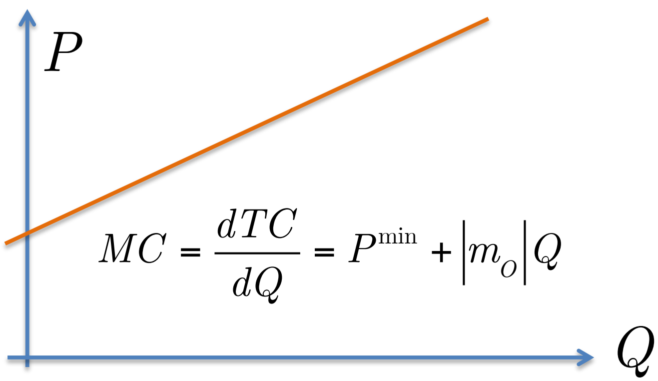
$$TC(Q) = FC + VC(Q)$$

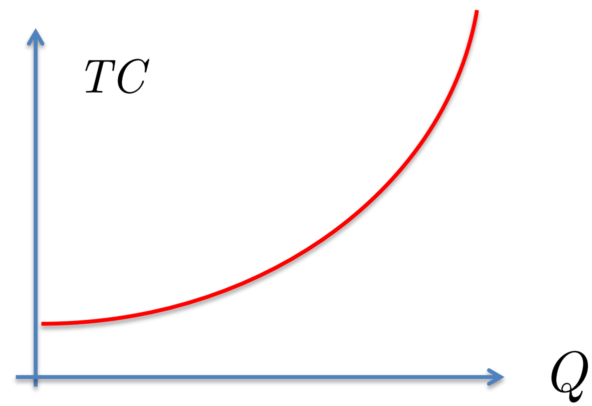
$$AC = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{FC}{Q} + \frac{VC(Q)}{Q}$$

$$MC = \frac{dTC(Q)}{dQ} \Leftrightarrow TC(Q) = \int MC(Q)\,dQ$$

Rothwell, G., & Gomez, T. (2003)

Curva de Oferta





Estructura de Costos del Productor

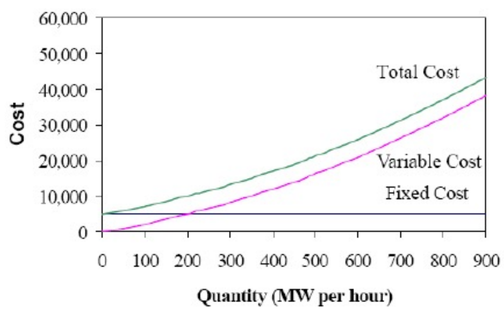
$$TC = FC + VC = \int_0^Q MC\, dQ = \int_0^Q [P^{\min} + |m_O| Q]\, dQ$$

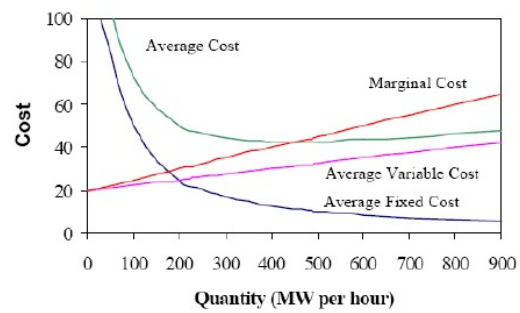
$$TC = C + P^{\min} Q + \frac{1}{2} |m_O| Q^2$$

Microeconomía: La Producción

Total, Average, and Marginal Cost

Q	Total Cost	Fixed Cost	Variable Cost	Average Cost	Average Fixed Cost	Average Variable Cost	Marginal Cost
100	7,250	5,000	2,250	73	50	23	25
200	10,000	5,000	5,000	50	25	25	30
300	13,250	5,000	8,250	45	17	28	35
400	17,000	5,000	12,000	43	13	30	40
500	21,250	5,000	16,250	43	10	33	45
600	26,000	5,000	21,000	43	8	35	50
700	31,250	5,000	26,250	45	7	38	55
800	37,000	5,000	32,000	46	6	40	60
900	43,250	5,000	38,250	49	6	43	65



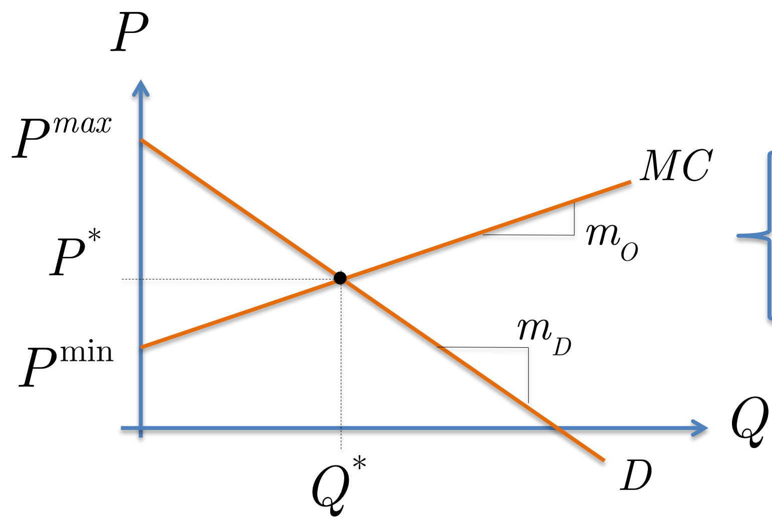


Rothwell, G., & Gomez, T. (2003)

COMPETENCIA PERFECTA

Competencia Perfecta

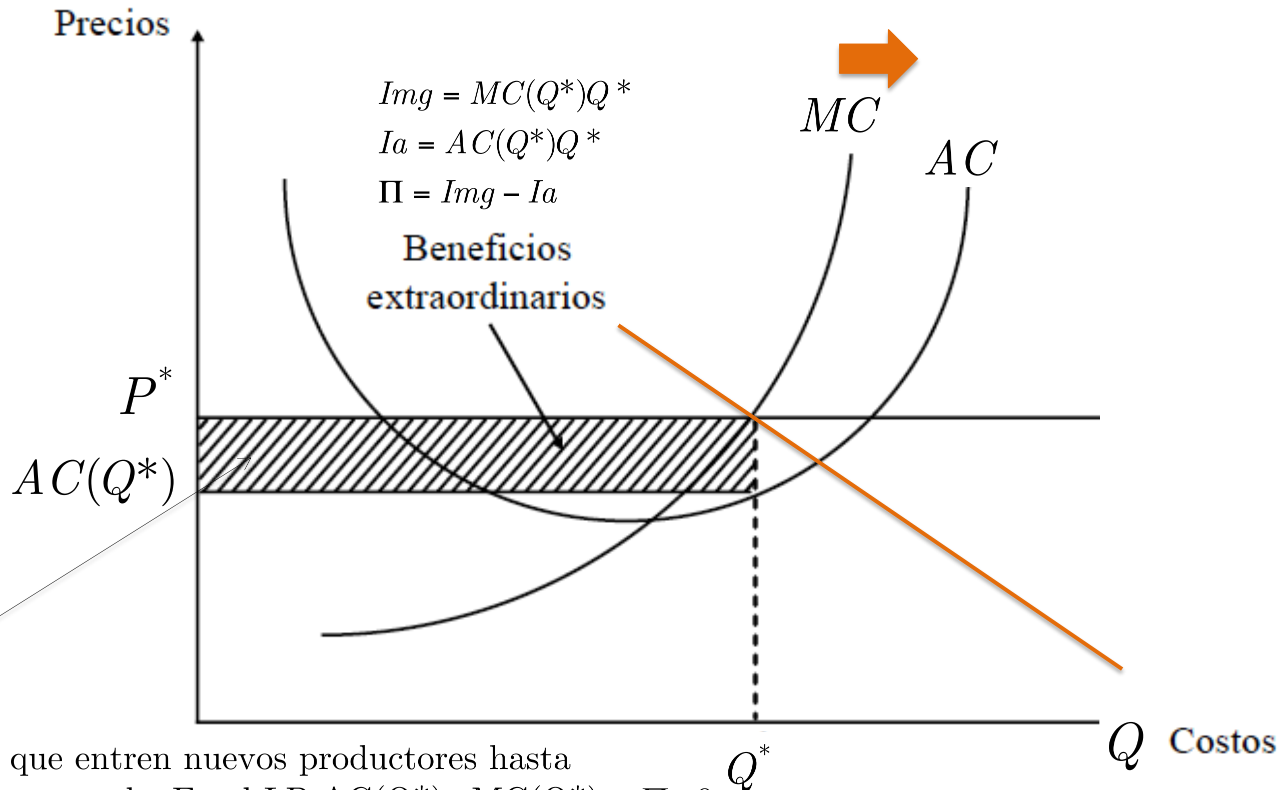
Muchos productores y compradores: curvas de oferta y demanda
. agregadas



Find P^*, Q^*

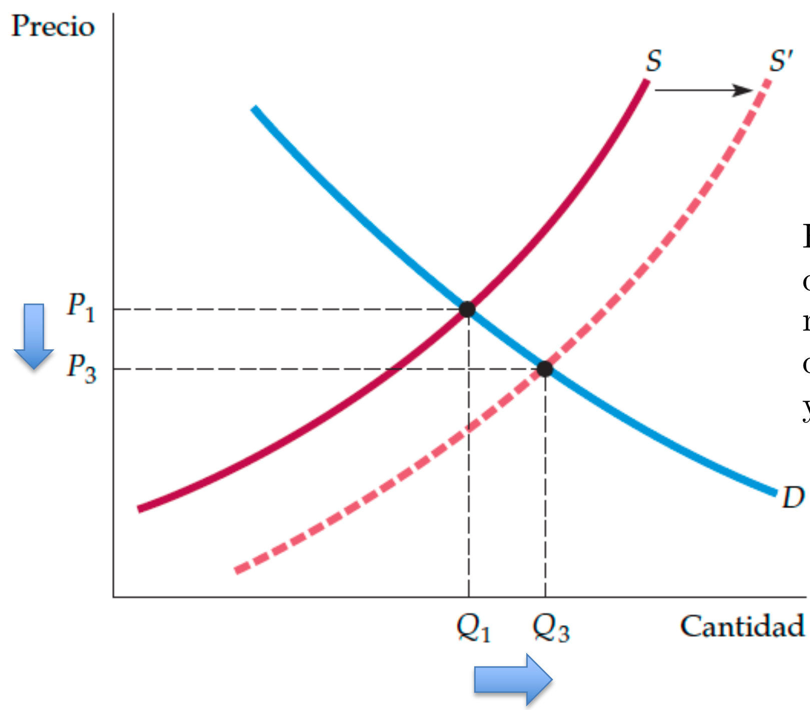
$$\begin{cases} MC : P = P^{\min} + |m_O| Q \\ D : P = P^{max} - |m_D| Q \end{cases}$$

Competencia Perfecta



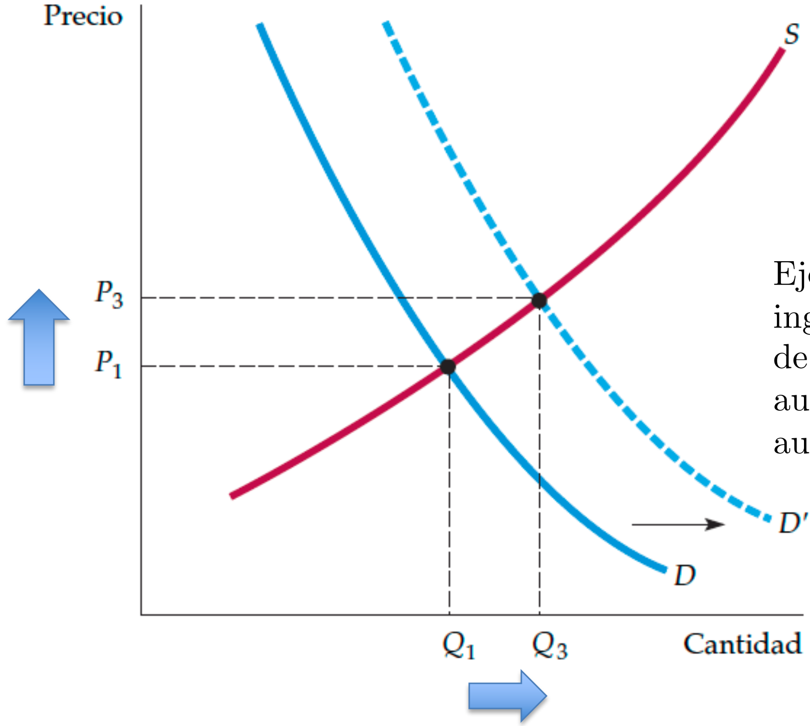
Atractivo para que entren nuevos productores hasta
Que el beneficio se anule. En el LP $AC(Q^{*})=MC(Q^{*})$ y $\Pi=0$

VARIACIONES DEL EQUILIBRIO



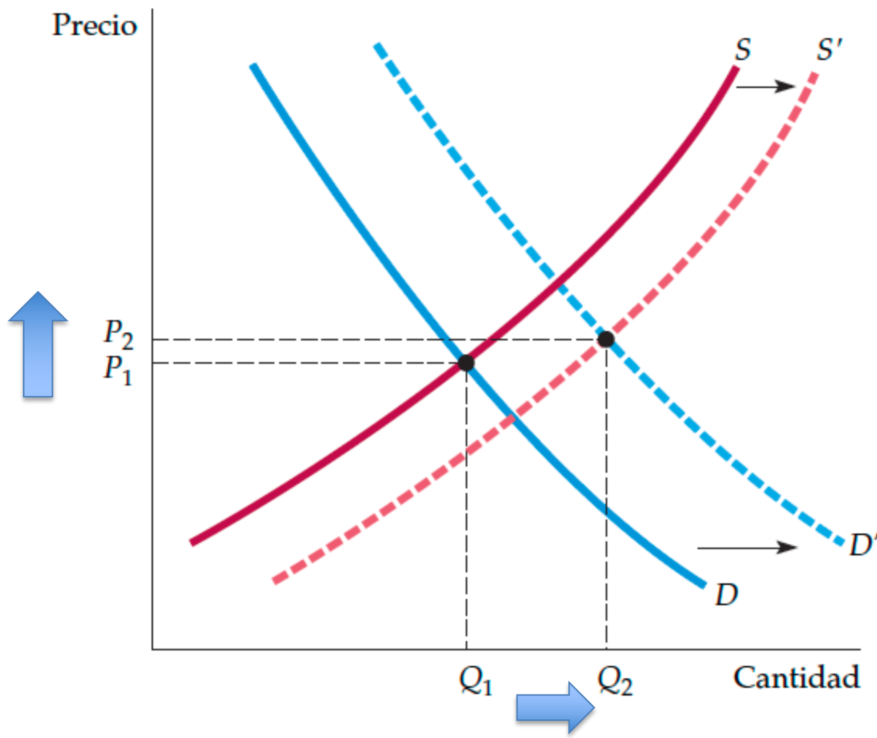
Ejemplo, si baja el precio
de las materias primas en el
mercado, bajan los costos,
disminuye el precio
y aumentan las ventas.

VARIACIONES DEL EQUILIBRIO



Ejemplo, si aumentan los ingresos o la renta de los consumidores aumenta el precio y aumentan las ventas.

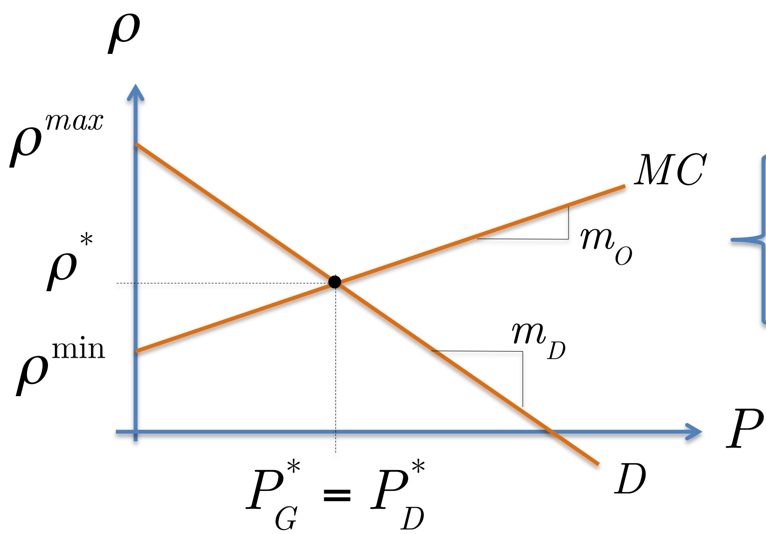
VARIACIONES DEL EQUILIBRIO



Ejemplo, si baja el precio de las materias primas en el mercado, bajan los costos, disminuye el precio y aumentan las ventas.

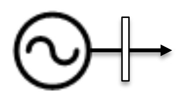
Ejemplo, si aumentan los ingresos o la renta de los consumidores aumenta el precio y aumentan las ventas.

PERFECT COMPETITION
TOO MANY PRICE-TAKERS



Find ρ^*, P_G^*

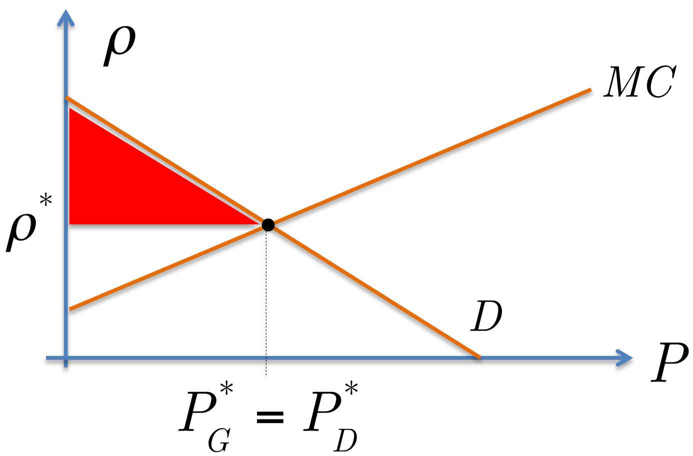
$$\begin{cases} MC : \rho = \rho^{\min} + \left|m_O\right| P_G \\ D : \rho = \rho^{max} - \left|m_D\right| P_D \end{cases}$$

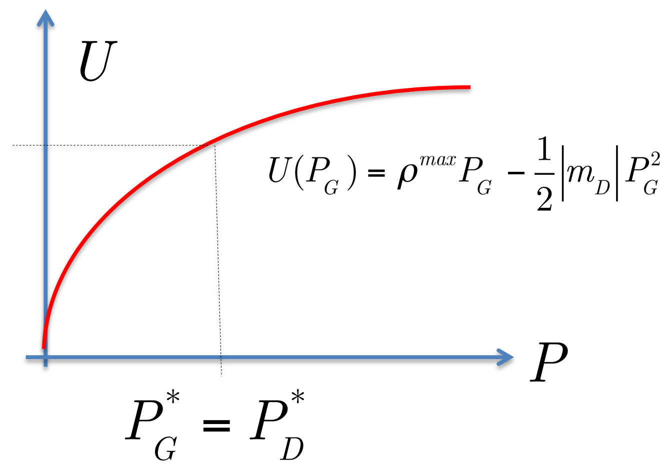


$$P_G^* = P_D^*$$

Perfect Competition

CONSUMER SURPLUS





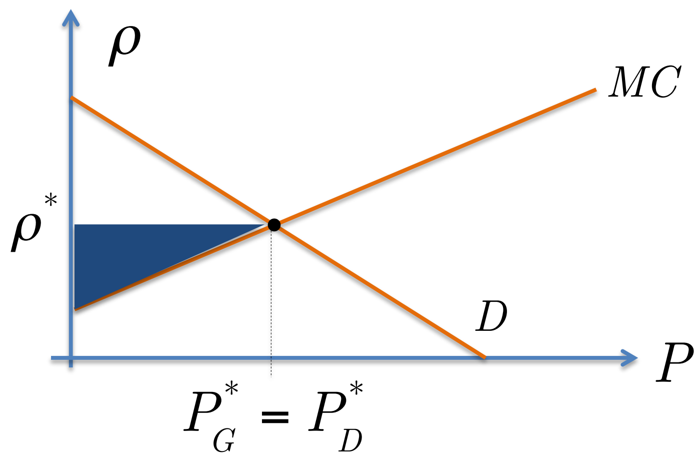
$$CSP^* = \int_0^{P_D} \rho \, dQP_D - \rho P_D = U(P_D) - \rho P_D$$

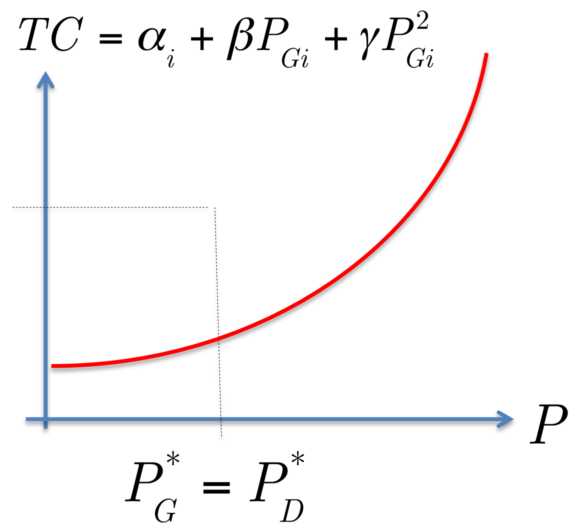
Consumer benefit
– Consumer expenditure

$$CSP^* = \rho^{max} P_D - \frac{1}{2}|m_D| P_D^2 - \rho P_D$$

Perfect Competition

PRODUCER SURPLUS





(Revenue – Costs)

$$PSP^* = \rho P_G - \int_0^{P_G} MC(P_G)\,dP_G = \rho P_G - TC(P_G) = \Pi_G$$

$$PSP^* = \rho P_G - \rho^{\min} P_G - \frac{1}{2}\left|m_O\right| P_G^2 - C = \rho P_G - \left[\alpha_i + \beta P_{Gi} + \gamma P_{Gi}^2\right]$$

Perfect Competition

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP
MIN SOCIAL COST

Conocidas la estructura de costos y utilidad:

Find ρ^*, P_G^*

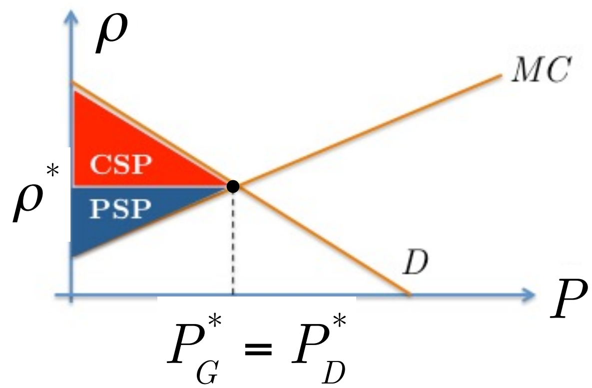
$\max SW^* = PSP^* + CSP^*$

$\min SocialCost = SC^* = -SW^*$

$$\min = \int_0^{P_G} MC(P_G)\, dP_G - \int_0^{P_D} D(P_D)\, dP_D$$

st.

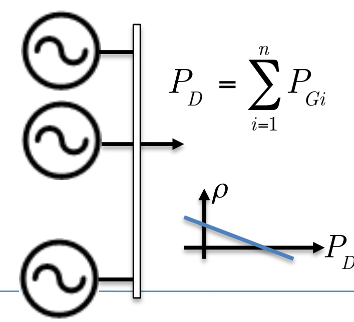
$P_G = P_G$



Para i=1,...,n productores y una sola demanda

$$MC_i : \rho = \rho_i^{\min} + |m_{Oi}| P_{Gi} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$D : P = \rho^{\max} - |m_D| P_D$$



Perfect Competition

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP
MIN SOCIAL COST

$$\min = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{0}^{P_{Gi}} MC(P_{Gi})\,dP_{Gi}\right] - \int_{0}^{P_{D}} D(P_{D})\,dP_{D}$$

$$st$$

$$P_{D} = \sum_{i=1}^{n} P_{Gi}$$

Finding the optimum: Lagrangian (Wood & Wollemberg)

Minimize: $\mathrm{f}(\mathbf{x})$

Subject to: $\omega_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, N\omega$

$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, Ng$

$\mathbf{x}$ = vector of real numbers, dimension = N

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathrm{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N\omega} \lambda_i \omega_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{Ng} \mu_i g_i(\mathbf{x})$$

1. $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0) = 0$ for $i = 1 \ldots N$
2. $\omega_i(\mathbf{x}^0) = 0$ for $i = 1 \ldots N\omega$
3. $g_i(\mathbf{x}^0) \leq 0$ for $i = 1 \ldots Ng$
4. $\left.\begin{array}{l} \mu_i^0 g_i(\mathbf{x}^0) = 0 \\ \mu_i^0 \geq 0 \end{array}\right\}$ for $i = 1 \ldots Ng$

Finding the optimum: Lagrangian (Wood & Wollemberg)

Minimize: $f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + x_2^2$

Subject to the constraint: $\omega(x_1, x_2) = 0$

Where: $\omega(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 0.25x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0.5x_1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 1$$

$$\lambda = 2$$

Finding the optimum: Lagrangian (Wood & Wollemberg)

Minimize: $f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + x_2^2$

Subject to: $\omega(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_2 = 0$

$g(x_1, x_2) = x_1 + 0.2x_2 - 3 \leq 0$

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2) + \lambda[\omega(x_1, x_2)] + \mu[g(x_1, x_2)]$$
$$= 0.25x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2) + \mu(x_1 + 0.2x_2 - 3)$$

The first condition gives

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0.5x_1 - \lambda + \mu = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda + 0.2\mu = 0$$

The second condition gives

$$5 - x_1 - x_2 = 0$$

The third condition gives

$$x_1 + 0.2x_2 - 3 \leq 0$$

The fourth condition gives

$$\mu(x_1 + 0.2x_2 - 3) = 0$$
$$\mu \geq 0$$

$$x_1 = 2.5 \qquad \lambda = 5.9375$$
$$x_2 = 2.5 \qquad \mu = 4.6875$$

Finding the optimum: Gradient Search (Wood & Wollemberg)

3.4.2 Economic Dispatch by Gradient Search

In the case of power system economic dispatch this becomes:

$$f = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) \tag{3.12}$$

and the object is to drive the function to its minimum. However, we have to be concerned with the constraint function:

$$\Phi = \left(P_{\text{load}} - \sum_{i=1}^{N} P_i\right) \tag{3.13}$$

To solve the economic dispatch problem which involves minimizing the objective function and keeping the equality constraint, we must apply the gradient technique directly to the Lagrange function itself.

The Lagrange function is:

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) + \lambda\left(P_{\text{load}} - \sum_{i=1}^{N} P_i\right) \tag{3.14}$$

Finding the optimum:
Gradient Search
(Wood & Wollemberg)

and the gradient of this function is:

$$\nabla \mathscr{L} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial P_1} \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial P_2} \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial P_3} \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P_1} F_1(P_1) - \lambda \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P_2} F_2(P_2) - \lambda \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P_3} F_3(P_3) - \lambda \\ P_{\mathrm{load}} - \sum_{i=1}^{N} P_i \end{bmatrix}$$

The problem with this formulation is the lack of a guarantee that the new points generated each step will lie on the surface Φ. We shall see that this can be overcome by a simple variation of the gradient method.

The economic dispatch algorithm requires a starting λ value and starting values for P_1, P_2, and P_3. The gradient for $\mathscr{L}$ is calculated as above and the new values of λ, P_1, P_2, and P_3, etc., are found from:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - (\nabla \mathscr{L})\alpha \tag{3.16}$$

where the vector $\mathbf{x}$ is:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Finding the optimum: Newton (Wood & Wollemberg)

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \nabla \mathscr{L}_x\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{d^2 \mathscr{L}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 \mathscr{L}}{dx_1\, dx_2} & \cdots \\ \dfrac{d^2 \mathscr{L}}{dx_2\, dx_1} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{d^2 \mathscr{L}}{d\lambda\, dx_1} & \cdots & \end{bmatrix}$$

Perfect Competition

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP
MIN SOCIAL COST

$$\min = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{0}^{P_{Gi}} MC(P_{Gi})\,dP_{Gi}\right] - \int_{0}^{P_D} D(P_D)\,dP_D$$

st

$$P_D = \sum_{i=1}^{n} P_{Gi}$$

Perfect Competition

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP
MIN SOCIAL COST

Lagrangian:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\left[FC + \rho_i^{\min} P_{Gi} + \frac{1}{2}\left|m_{Oi}\right|\left(P_{Gi}\right)^2\right] - \left[\rho^{\max} P_D - \frac{1}{2}\left|m_D\right|\left(P_D\right)^2\right] + \lambda\left[P_D - \sum_{i=1}^{n} P_{Gi}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_{Gi}} = \rho_i^{\min} + \left|m_{Oi}\right| P_{Gi} - \lambda = 0 \;\; i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_D} = -\rho^{\max} + \left|m_D\right| P_D + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_D - \sum_{i=1}^{n} P_{Gi} = 0$$

Perfect Competition

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP
MIN SOCIAL COST

Equilibrium:

$$\begin{bmatrix} P_{G1}^* \\ \vdots \\ P_{Gn}^* \\ P_D^* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |m_{O1}| & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & |m_{On}| & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -|m_D| & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\rho_1^{\min} \\ \vdots \\ -\rho_n^{\min} \\ -\rho^{\max} \\ 0 \end{bmatrix}$$

See Matlab program: ED.m

Perfect Competition

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP
WITH PRODUCTION CONSTRAINTS

$$\min = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{0}^{P_{Gi}} MC(P_{Gi})\,dP_{Gi}\right] - \int_{0}^{P_D} D(P_D)\,dP_D$$

st

$$P_D = \sum_{i=1}^{n} P_{Gi} \qquad P_{Gi} \leq P_{Gi}^{\max}\ i = 1,\ldots,n$$

Perfect Competition

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP WITH PRODUCTION CONSTRAINTS

Lagrangiano:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\left[FC + \rho_i^{\min} P_{Gi} + \frac{1}{2}\left|m_{Oi}\right|\left(P_{Gi}\right)^2\right] - \left[\rho^{\max} P_D - \frac{1}{2}\left|m_D\right|\left(P_D\right)^2\right] + \lambda\left[P_D - \sum_{i=1}^{n} P_{Gi}\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left[P_{Gi} - P_{Gi}^{\max}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_{Gi}} = \rho_i^{\min} + \left|m_{Oi}\right| P_{Gi} - \lambda + \mu_i = 0 \;\; i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_D} = -\rho^{\max} + \left|m_D\right| P_D + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_D - \sum_{i=1}^{n} P_{Gi} = 0, \; \frac{\partial L}{\partial \mu_i} = P_{Gi} - P_{Gi}^{\max} \leq 0, \; i = 1,\ldots,n$$

$$\mu_i\left(P_{Gi} - P_{Gi}^{\max}\right) = 0, i = 1,\ldots,n$$

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP WITH PRODUCTION CONSTRAINTS

Equilibrium:

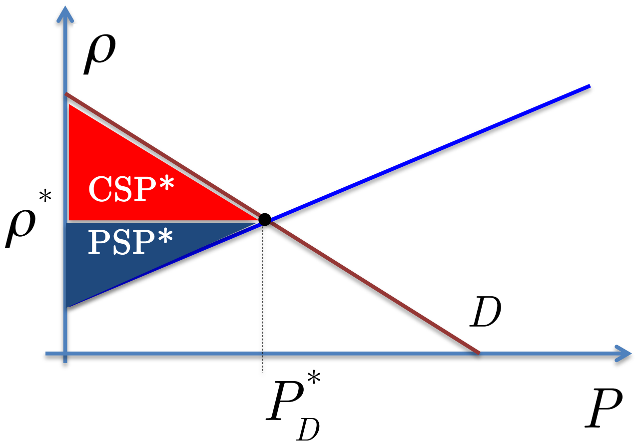
$$\begin{bmatrix} |m_{O1}| & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |m_{On}| & 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -|m_D| & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{G1}^* \\ \vdots \\ P_{Gn}^* \\ P_D^* \\ \lambda \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_1^{\min} \\ \vdots \\ -\rho_n^{\min} \\ -\rho^{\max} \\ 0 \\ P_{G1}^{\max} \\ \vdots \\ P_{Gn}^{\max} \end{bmatrix}$$

$$\mu_i (P_{Gi} - P_{Gi}^{\max}) = 0, \beta_i > 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

MAX SOCIAL WELFARE: CSP+PSP WITH PRODUCTION CONSTRAINTS

Equivalent marginal production curve:

$$MC_{eq} : \rho = \rho_{eq}^{\min} + \left| m_{Oeq} \right| P_G$$



$$PSP^* = \sum_{i=1}^{n} PSP_i^* = \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} P_{Gi} - \sum_{i=1}^{n} \int_0^{P_{Gi}} \rho_i^{\min} + \left| m_{Oi} \right| P_{Gi} \, dP_{Gi}$$

$$PSP^* = \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} P_{Gi} - \int_0^{P_D} \rho_{eq}^{\min} + \left| m_{Oeq} \right| P_G \, dP_G$$

$$\int_0^{P_G} \rho_{eq}^{\min} + \left| m_{Oeq} \right| P_G \, dP_G = \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} P_G - PSP^*$$

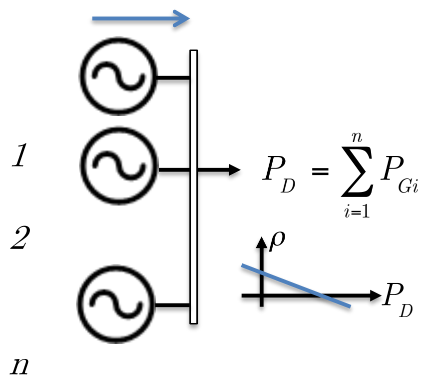
$$\rho_{eq}^{\min} P_D + \frac{1}{2} \left| m_{Oeq} \right| P_D^2 = \rho \cdot P_D - PSP^*$$

$$m_{Oeq} = \frac{\rho^* - \rho_{eq}^{\min}}{P_D^*} > 0$$

$$\rho_{eq}^{\min} P_D + \frac{1}{2} (\rho - \rho_{eq}^{\min}) P_D = \rho \cdot P_D - PSP^*$$

$$\rho_{eq}^{\min} = \rho^* - 2 \frac{PSP^*}{P_D^*}$$

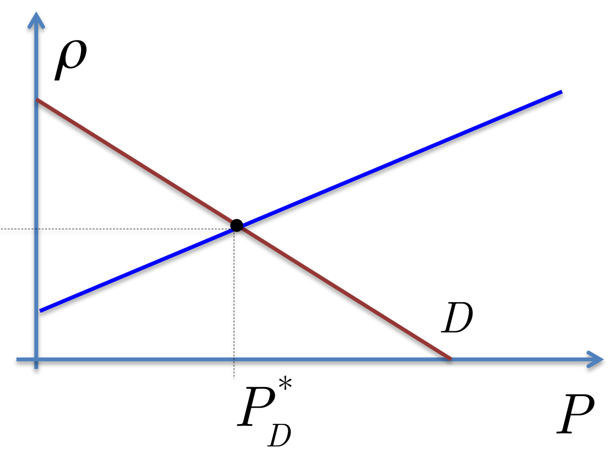
Perfect Competition



$$P_D = \sum_{i=1}^{n} P_{Gi}$$

$$P_{Gi} < P_{Gi}^{\max} \Rightarrow \mu_i = 0 \;\; i = 1,\ldots,n$$

$$\rho^* = \lambda = \frac{\partial SC}{\partial P_{G1}} = \ldots = \frac{\partial SC}{\partial P_{Gn}}$$



	Benefit	Cost
G1	$P_{G1}^*\lambda$	$\rho_1^{\min} P_{G1}^* + \frac{1}{2}\lvert m_{O1}\rvert \left(P_{G1}^*\right)^2$
G2	$P_{G2}^*\lambda$	$\rho_2^{\min} P_{G2}^* + \frac{1}{2}\lvert m_{O2}\rvert \left(P_{G2}^*\right)^2$
D	$\rho^{\max} P_D^* - \frac{1}{2}\lvert m_D\rvert \left(P_D^*\right)^2$	$P_D^*\lambda$