Módulo 1 - Introducción a la Optimización Matemática

Paulo M. De Oliveira-De Jesus

Diciembre de 2025

Resumen

En este documento se describe la estructura de problemas de optimización lineal y no-lineal. Se plantean los modelos matemáticos y las estrategias de solución utilizando diferentes herramientas computacionales tanto de software libre como propietario.

Índice

1. Introducción a la Optimización Matemática

En este módulo tiene como objetivo conocer o repasar los modelos matemáticos de optimización matemática requeridos para la gestión integral de proyectos energéticos sostenibles.

Se estudiarán dos formulaciones que dependiendo de su naturaleza podrán ser lineales (LP) o no lineales-cuadráticos (NLP):

- Programación Lineal LP
- Programación No Lineal Cuadrática NLP/QP

El repositorio de software utilizado en esta guía de estudio se encuentra en la siguiente página GitHub.

1.1. Competencias del módulo

Al finalizar este módulo el estudiante habrá desarrollado las siguientes competencias específicas:

- Conocer la importancia de la optimización económica en la gestión integral de proyectos energéticos sostenibles.
- Conocer/repasar los fundamentos para el planteamiento y solución de problemas de optimización matemática.
- Resolver problemas de de programación lineal y no lineal implementados en plataformas avanzadas de optimización
- Utilizar modelos de optimización existentes implementados en plataformas avanzadas de optimización para la creación de nuevo conocimiento.

2. Programación Lineal

La programación lineal (PL) es una técnica matemática que se utiliza para resolver problemas de optimización [1]. Su objetivo es maximizar o minimizar una función lineal de variables reales sujeta a un conjunto de restricciones lineales de variables reales.

La búsqueda de una solución x que minimiza o maximiza una función $f(x)$ ha sido ampliamente tratada en el cálculo diferencial. Curiosamente, en los siglos XVI y XVII, matemáticos como Newton, Leibniz, Bernoulli y Lagrange trabajaron en la obtención de máximos y mínimos condicionados de funciones no lineales, mucho antes que se formulara formalmente la programación lineal.

El desarrollo de la PL ocurrió durante la Segunda Guerra Mundial. Durante este período, se planteó el LP como un modelo matemático para planificar las operaciones logísticas del ejercito durante el esfuerzo de guerra, con el objetivo de reducir los costos y aumentar las pérdidas del enemigo. Sin embargo, se mantuvo en secreto hasta 1947, año en que George B. Dantzig formuló el *método Simplex* para la solución de problemas de PL son la siguiente estructura canónica:

Maximizar la función objetivo:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

Sujeto a las siguientes restricciones de igualdad (=) y desigualdad ($\leq$, $\geq$):

$$A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \ldots + A_{1n} x_n = b_1 \tag{2}$$
$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \ldots + A_{2n} x_n \leq b_2 \tag{3}$$
$$\vdots$$
$$A_{m1} x_1 + A_{m2} x_2 + \ldots + A_{mn} x_n \geq b_m \tag{4}$$

Donde:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 & \text{ son las variables de decisión, en color azul} \\ c_1, c_2, \ldots, c_n & \text{ son los coeficientes de la función objetivo} \\ A_{ij} & \text{ son los coeficientes de las restricciones} \\ b_1, b_2, \ldots, b_m & \text{ son los coeficientes independientes de las restricciones} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la función objetivo y las restricciones son conocidos y especificados en color verde.

El problema de optimización planteado en las Ecs. 1-4 posee n variables de decisión y m restricciones. Todas las variables del problema son continuas.

Un problema de programación lineal se considera sobredeterminado cuando hay más restricciones que variables de decisión ($m > n$). En otras palabras, el número de restricciones es mayor que el número de incógnitas en el sistema. Esto puede ocurrir en situaciones en las que hay múltiples limitaciones o condiciones que deben cumplirse, pero no todas pueden ser satisfechas simultáneamente. Cuando un problema de programación lineal está sobredeterminado, es posible que no haya una solución que satisfaga todas las restricciones simultáneamente. En tales casos, se busca la mejor solución posible que minimice o maximice la función objetivo dentro de las limitaciones dadas.

Un problema de programación lineal se considera subdeterminado cuando hay más variables de decisión que restricciones. En otras palabras, el número de incógnitas es mayor que el número de restricciones en el sistema ($n > m$). Cuando un problema de programación lineal está subdeterminado, se pueden tener infinitas soluciones factibles. Por lo tanto, es importante considerar criterios adicionales (como minimizar o maximizar la función objetivo) para seleccionar una solución específica.

El problema primal establecido en las Ecs. 1-4 pueden escribirse de forma compacta (matricial) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5}$$

La correspondiente formulación dual se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \leqslant \mathbf{c}^T \\ & \boldsymbol{\lambda} \leqslant \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6}$$

Las variables duales $\boldsymbol{\lambda}$ (también llamadas multiplicadores Lagrange) se asocian con las restricciones del problema primal (Ec. 5). Cada restricción tiene su propia variable dual. Estas variables representan el costo marginal o el valor adicional que se obtendría al relajar una restricción específica.

2.1. Ejemplo 1 - LP

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo de la solución de un problema LP:

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \tag{7}$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10, \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 15, \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Este problema está subdeterminado ($n > m$) por cuanto tiene tres incógnitas (n=3) con solo dos restricciones (m=2). Existen infinitas soluciones que satisfacen ambas restricciones, pero solo una solución que cumple con el objetivo establecido.

Solución óptima primal es (x_1, x_2, x_3) = (6.667, 1.6667, 0) con Z = 28.33.

El planteamiento dual es:

$$
\text{Minimizar} \quad W = 10y_1 + 15y_2 \tag{8}
$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 &\geq 3, \\
2y_1 + y_2 &\geq 5, \\
y_1 + 3y_2 &\geq 2, \\
y_1, y_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Solución dual es (y_1, y_2) = (2.333, 0.333) con W = 28.333

El estudiante interesado puede validar estas soluciones con los scripts de GAMS y python (opcional) indicados en el repositorio GitHub.

3. Programación Cuadrática

La programación cuadrática es un proceso de optimización matemática que se centra en resolver problemas que involucran funciones no lineales de tipo cuadrático. Específicamente, busca optimizar (ya sea minimizando o maximizando) una función cuadrática multivariante sujeta a restricciones lineales en las variables. Aunque el término "programación" en este contexto no está relacionado con la programación de computadoras, se refiere a un procedimiento formal para resolver problemas matemáticos. La programación cuadrática ha sido utilizada desde la década de 1940 y se considera un tipo de programación no lineal.

El problema de programación cuadrática con n variables y m restricciones se puede formular de la siguiente manera:

Dado:

Un vector real $\boldsymbol{c}$ de dimensión n. Una matriz simétrica real $\boldsymbol{Q}$ de dimensión $(n \times n)$. Una matriz real $(\boldsymbol{A})$ de dimensión $(m \times n)$. Un vector real $\boldsymbol{c}$ de dimensión m.

El objetivo de la programación cuadrática es encontrar un vector x de dimensión n que minimice la función de costo:

$$f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \tag{9}$$

sujeto a restricciones lineales y/o no-lineales cuadráticas:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{b} \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_r\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \tag{11}$$

donde x^T denota la transposición vectorial de x, y $\preceq$ representa la desigualdad por componentes (es decir, cada entrada del vector (Ax) es menor o igual que la entrada correspondiente del vector b. $\boldsymbol{d}$ es un vector real de dimensión n. $\boldsymbol{Q}_r$ es una matriz simétrica real de dimensión $(n \times n)$.

En el caso especial de que $(\boldsymbol{Q})$ sea positiva definida simétrica, la función de costo se reduce a mínimos cuadrados:

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}|\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}|^2 \tag{12}$$

sujeto a la misma restricción lineal. $(\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R})$ es la descomposición de Cholesky de $(\boldsymbol{Q})$, y $(\boldsymbol{c} = -R^T d)$

Las condiciones necesarias de primer orden para la programación cuadrática con restricciones de desigualdad se derivan del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Estas condiciones son:

Condición de Factibilidad Primal: Las restricciones de desigualdad deben cumplirse: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{b})$.

Condición de Factibilidad Dual: Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad deben ser no negativos: $(\lambda_i \geq 0)$.

Condición de Complementariedad: Para cada restricción activa (es decir, para la cual se cumple la igualdad), el producto del multiplicador de Lagrange y la desviación de la restricción debe ser igual a cero: $(\lambda_i(b_i - a_i^T x) = 0)$.

Condición de Gradiente Cero: El gradiente de la función objetivo más la suma ponderada de los gradientes de las restricciones activas debe ser igual a cero: $(\nabla f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla a_i^T x = 0)$. En resumen, las condiciones KKT aseguran que la solución óptima cumpla tanto las restricciones de desigualdad como las condiciones de optimalidad

3.1. Ejemplo 2 - NLP/QP

Ejemplo ilustrativo de la solución de un problema NLP-QP:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 2{x_1}^2 + x_1 x_2 + {x_2}^2 + \frac{3}{2}{x_3}^2 + x_1 - 2x_2 \tag{13}$$

$$Z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Sujeto a:

$$\begin{gathered} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 4 \\ (x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 \leq 1 \end{gathered}$$

Este problema está subdeterminado ($n > m$) por cuanto tiene tres incógnitas (n=3) con solo dos restricciones (m=2). Existen infinitas soluciones que satisfacen ambas restricciones, pero solo una solución que cumple con el objetivo establecido.

Antes de resolver el problema directamente en una herramienta computacional aplicaremos la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Definimos el Lagrangiano como:

$$L = 2{x_1}^2 + x_1 x_2 + {x_2}^2 + \frac{3}{2}{x_3}^2 + x_1 - 2x_2 + \lambda({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 4) + \mu((x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 - 1) \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 + 2\lambda x_1 + 2\mu x_1 - 2\mu + 1 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 + 2\lambda x_2 - 2 = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 3x_3 + 2\lambda x_3 = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = (x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 - 1 + \psi = 0 \tag{20}$$

$$\mu((x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 - 1) = 0 \tag{21}$$

Las ecuaciones 16-21 constituyen un sistema de 5 ecuaciones no-lineales con 5 incógnitas. La solución óptima es:

x_1=0.344, x_2= 0.754, x_3=1.820, λ=-1.500, ψ=0.000, μ=1.598 con Z = 4.868.

El estudiante interesado puede validar estas soluciones con los scripts de GAMS y python (opcional) indicados en el repositorio GitHub.

Referencias

[1] David G Luenberger, Yinyu Ye, et al., *Linear and nonlinear programming*, vol. 2, Springer, 1984.

A. Ejercicio:

Utilice los códigos en GAMS para resolver para resolver el siguiente problema de optimización matemática:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 2{x_1}^2 + x_1 x_2 + {x_2}^2 + 3{x_3}^2 + x_1 - 2x_2 \tag{22}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 &= 9 \\ {x_1}^2 - 2x_1 + {x_2}^2 &\leq 0 \\ {x_1}^2 - x_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

Solución correcta: Optimal x: [1.00001328 1.00000034 2.64571935]. Objective value: 24.