

Despacho Económico con Demanda Elástica

Mercados Eléctricos - Despacho Económico, Subastas y Contratos

Paulo M. De Oliveira-De Jesus^{*}

Diciembre 2025

* pdeoliv@gmail.com

Resumen

En este documento se describe el problema de despacho económico de centrales eléctricas térmicas en el contexto de un sistema de potencia operando en régimen estable en condición confiable, seguro y suficiente. Las técnicas de solución al problema del despacho óptimo presentadas en el documento *Guía de Estudio Despacho Económico Básico* es ampliado considerando que las demandas son elásticas capaces de reaccionar ante el cambio en los precios.

Índice

1. Introducción	4
2. Despacho económico uninodal con demanda elástica y restricciones de generación	5
2.1. Suposiciones	7
2.2. Formulación del problema	7
2.3. Solución del problema	8
2.4. Ejemplo 1 - Caso de Estudio 1	9
3. Despacho económico multinodal con demanda elástica, red con pérdidas y restricciones de generación y transmisión	12
3.1. Suposiciones	13
3.2. Formulación del problema	14
3.3. Solución del problema	15
3.4. Ejemplo 2 - Caso de Estudio 2	16
A. Caso de Estudio 1	21
B. Caso de Estudio 2	22

1. Introducción

En este documento se describe el problema de despacho económico/flujo de potencia óptimo de sistemas eléctricos en el contexto de un sistema de potencia con mecanismos efectivos para que exista respuesta de la demanda y que es operado en régimen estable de forma confiable, segura y suficiente.

Se plantea la solución del despacho óptimo previamente discutido considerando ahora que las demandas son elásticas, es decir capaces de reaccionar ante el cambio en los precios. Hoy en día es posible incorporar demandas elásticas en la gestión eficiente del sistema, en virtud de la incorporación masiva de medidores inteligentes capaces de transmitir a los consumidores señales económicas localizadas a tiempo real [1, 2].

Los modelos formulados en este documento constituyen herramientas útiles para operadores y reguladores que requieran realizar simulaciones del comportamiento de los mercados eléctricos dominados por centrales térmicas tomando en cuenta la respuesta de demanda. Para información adicional acerca de este tipo de despacho/OPF consultar el texto de Fred Schweppe, Spot Pricing of Electricity [3].

Los métodos discutidos aquí pueden extenderse a aplicaciones avanzadas como la incorporación masiva de almacenamiento (por ejemplo, vehículos eléctricos, baterías en sistemas de transmisión) y generación renovable no despachable e intermitente (por ejemplo, generación eléctrica eólica y solar fotovoltaica). Algunas referencias relevantes son [4, 5]. Aliento los estudiantes de maestría abordar estos temas en sus trabajo de grado.

Este documento se organiza de la siguiente forma. La sección 2 describe despacho económico uninodal de centrales térmicas con restricciones en la capacidad de generación de potencia activa y demanda elástica. La sección 3 describe el despacho económico de centrales térmicas con demanda elástica, red de transmisión con pérdidas de potencia activa/reactiva y con restricciones en la capacidad de transmisión de las líneas. Cada uno de los métodos mencionados tiene un ejemplo resuelto en detalle en MSExcel, ejemplo tomado del capítulo 5 del texto de Antonio Gómez-Expósito [6].

El repositorio de software utilizado en los ejemplos se encuentra en la siguiente página de GitHub.

2. Despacho económico uninodal con demanda elástica y restricciones de generación

En esta sección se resuelve el problema de despacho económico uninodal de centrales térmicas con demandas elásticas y restricciones de capacidad de generación de potencia activa. En la Figura 8 se muestra un sistema uninodal en el que varios generadores alimentan una demanda que cambia su nivel de consumo P_D en MW ante cambios en el precio nodal λ en \$/MWh. Asumimos inicialmente que el sistema no tiene red de transmisión y por lo tanto no hay pérdidas activas y reactivas. Toda la producción es consumida por la demanda.

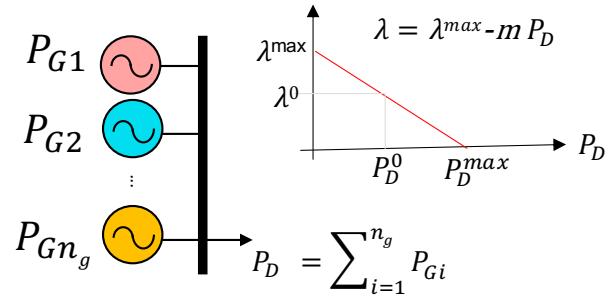


Figura 1: Despacho económico uninodal elástico

El objetivo del despacho óptimo planteado en esta sección es determinar la producción que debe tener cada uno de los n_g generadores del sistema (P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}) para satisfacer la demanda demanda (elástica) al mínimo *costo social* posible. La producción de cada unidad generadora se encuentra limitada a un máximo y un mínimo, a saber: $P_{Gi}^{min} < P_{Gi} < P_{Gi}^{max}$.

Hasta ahora la demanda ha sido un parámetro conocido (inelástico). Para la inclusión de la demanda como una función del problema OPF se deben realizar algunas definiciones previas. La función de demanda se define mediante una relación entre el precio a pagar λ en \$/MWh y el nivel de consumo P_D en MW:

$$\lambda = \lambda^{max} - mP_D, m > 0 \quad (1)$$

donde λ^{max} en \$/MWh es el precio máximo a pagar por un suministro de energía eléctrica escaso y m en \$/MW²h es la pendiente de la curva de demanda, que se asume en este caso como lineal (pudiera no serlo). Suponiendo que el sistema está en un punto de operación dado (P_D^0, λ^0), se define la *elasticidad del precio de la demanda* como:

$$\epsilon = \frac{\frac{\Delta P_D}{P_D^0}}{\frac{\Delta \lambda}{\lambda^0}} = \frac{1}{m} \frac{\lambda^0}{P_D^0}, m > 0 \quad (2)$$

La interpretación de este parámetro es simple. Supongamos que en cierto punto de operación, una carga demandando a cierto precio, la elasticidad es $-1/3$. Suponiendo un comportamiento lineal de la demanda respecto al precio, una elasticidad de -0.333 significa que un aumento de 1% en el precio producirá una contracción de 0.333% de la demanda. En otras palabras, un aumento de 300% del precio (4 veces el precio normal) implicará una contracción de 100% de la demanda, es decir una reducción total. En este caso, precio base multiplicado por 4 sería el que está dispuesto a pagar el consumidor por el último vatio disponible, *la última Coca-cola del desierto*.

El beneficio de la demanda en $\$/h$ responde al concepto de *utilidad marginal decreciente* y se define como:

$$U(P_D) = \int_0^{P_D^{max}} \lambda dP_D = \int_0^{P_D^{max}} [\lambda^{max} - mP_D] dP_D, m > 0 \quad (3)$$

Cuanto mayor es la cantidad que consumimos de un bien, en este caso la electricidad, menor es la utilidad marginal que nos aporta cada nueva unidad del mismo. Si sustituimos la función de demanda (Ec. 33) en la ecuación 3 y resolvemos la integral tenemos una expresión de la utilidad total de la demanda en función de los parámetros de la curva m y λ^{max} :

$$U(P_D) = \lambda^{max} P_D - \frac{1}{2} m P_D^2, m > 0 \quad (4)$$

El *bienestar social* (o social welfare) en $\$/h$ se define como la diferencia entre la utilidad total de la demanda y el costo de producción total de las n_g unidades generadoras:

$$SW = U(P_D) - \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) \quad (5)$$

donde función de costo de producción de cada generador i es:

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (6)$$

donde C_0 , a y b son coeficientes de la función de costo dada en la Ec. 6. Los parámetros dependen de la tecnología de generación utilizada. Para la interpretación económica de los factores C_0 , a y b revisar sección 1.6 y 3.1 del texto de Wood & Wolleberg (2013).

El costo incremental de cada generador i es

$$IC_i(P_{Gi}) = \frac{dC_i(P_{Gi})}{dP_{Gi}} = a_i + b_i P_{Gi} \quad (7)$$

En términos generales se define el costo social como el negativo del bienestar social:

$$SC = -SW \quad (8)$$

El bienestar social es un concepto básico de la microeconomía. Detalles pueden consultarse en Nicholson [7], capítulos 3, 4 y 5.

2.1. Suposiciones

En este modelo se asume lo siguiente:

1. Operación segura en régimen estable
2. Modelo uninodal
3. Todos los generadores son térmicos, es decir, queman algún tipo de combustible (carbón, gas, diesel o biomasa) en calderas, turbinas o en motores de combustión interna.
4. No hay red de transmisión. Todos los generadores y la demanda están conectados en el mismo nodo.
5. Los generadores tienen límites mínimos y máximos de producción.
6. Las demandas son elásticas, responden al cambio en el precio marginal del sistema.

2.2. Formulación del problema

El problema de optimización económica consiste encontrar el despacho de potencia activa en n_g generadores $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$ y la demanda P_D para la condición de mínimo *costo social* (o máximo bienestar social):

$$\min_{\mathbf{P}_G P_D} SC = C(\mathbf{P}_G) - U(P_D) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) - \int_0^{P_D^{max}} \lambda dP_D \quad (9)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi} = P_D^{\text{total}} \quad (10)$$

$$P_{Gi}^{min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{max}, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (11)$$

donde el costo de producción $C(\mathbf{P}_G)$ y la utilidad de la demanda $U(P_D)$ están expresadas en función de las variables económicas a través de la ecuaciones 6 y 3, respectivamente.

2.3. Solución del problema

En su formulación estándar el problema de despacho económico con demanda elástica, el objetivo (el costo social) es cuadrático en virtud que la utilidad de la demanda es una función de segundo grado (Ec. 3). El problema de optimización debe ser resuelto mediante técnicas de *Programación Nolineal*. En este caso utilizaremos el método de multiplicadores de Lagrange generalizado mediante el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [8]. El problema de optimización se reduce a un sistema de ecuaciones no-lineal que debe ser resuelto mediante un método numérico.

El Lagrangiano posee la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{P}_G, P_D, \lambda) = & \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) - \int_0^{P_D^{\max}} \lambda dP_D + \lambda (P_D^{\text{total}} - \sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi}) \\ & + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i^{\max} (P_{Gi}^{\max} - P_{Gi}) + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i^{\min} (P_{Gi}^{\min} - P_{Gi}) \end{aligned} \quad (12)$$

Las condiciones necesarias de primer-orden de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} = IC_i(P_{Gi}) - \lambda = 0; \quad i = 1, \dots, n_g \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_D} = \lambda = \lambda^{\max} - mP_D \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} = IC_i(P_{Gi}) - \lambda - \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \mu_i^{\max}} = P_{Gi}^{\max} - P_{Gi} - \gamma_i = 0, \quad \gamma_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \mu_i^{\min}} = -P_{Gi}^{\min} + P_{Gi} - \eta_i = 0, \quad \eta_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (18)$$

$$\mu_i^{\max} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\max}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (19)$$

$$\mu_i^{\min} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\min}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (20)$$

Las ecuaciones 15-20 constituyen un sistema de $3n_g+2$ ecuaciones lineales con $2n_g$ ecuaciones no-lineales con $5n_g+2$ incógnitas. Las soluciones (raíces) de este sistema deben obtenerse mediante métodos numéricos (Newton, por ejemplo).

A continuación se presenta una formulación matricial compacta que puede ser implementada en MS Excel (Solver) o Matlab (fsolve).

Se define el vector de incógnitas para la i -ésima posición como:

$$\boldsymbol{x} = [P_{Gi}, P_D, \lambda, \mu_i^{max}, \mu_i^{min}, \gamma_i, \eta_i]^T \quad (21)$$

y el sistema a resolver se escribe como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\alpha} \\ \mu_i^{max} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{máx}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \\ \mu_i^{min} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{mín}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (22)$$

donde para la i -ésima posición se dispone de la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_i & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -m & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [-a_i, -\lambda^{max}, 0, P_{Gi}^{max}, P_{Gi}^{min}]^T \quad (24)$$

La dimensión de $\boldsymbol{\beta}$ es $3n_g+2 \times 3n_g+2$. La dimensión de $\boldsymbol{\alpha}$ es $3n_g+2 \times 1$.

2.4. Ejemplo 1 - Caso de Estudio 1

Consideremos el problema de despacho económico uninodal básico con restricciones en la capacidad de generación en el caso de estudio 1 (Anexo A). Recordemos que en esta formulación la demanda P_D es conocida (inelástica).

La solución de equilibrio para demanda inelástica en pico ($P_D=600$ MW) fue $P_{G1}=433.3$ MW, $P_{G3}=166.7$ y el precio marginal del sistema $\lambda=41.67$ \$/MWh. Detalles de como se llegó a ésta solución puede consultarse en el documento Despacho Económico Básico (Ejemplo resuelto en la sección 2).

Supongamos ahora que la demanda en pico tiene una elasticidad $\epsilon=-1/3$. En este caso, aplicando la expresión 34 para $P_D^0=600$ MW y $\lambda^0=41.67$ \$/MWh, podemos obtener la pendiente de la curva de demanda $m=-0.21$ \$/MW²h y el precio máximo $\lambda^{max}=166.7$ \$/MWh.

Para hallar la solución del despacho óptimo con demanda elástica con restricciones de generación se aplicó la formulación compacta discutida en esta sección (Sistema de ecuaciones definido en Ec. 26).

Como tenemos dos ($n_g=2$) generadores y una sola demanda, el vector \mathbf{x} tiene un total de $5n_g+2=12$ incógnitas, a saber:

$$\mathbf{x} = [P_{G1}, P_{G2}, P_D, \lambda, \mu_1^{max}, \mu_2^{max}, \mu_1^{min}, \mu_2^{min}, \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2]^T \quad (25)$$

Se dispone de un sistema con 12 ecuaciones. Ocho son de lineales y 4 son no-lineales.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}\mathbf{x} &= \boldsymbol{\alpha} \\ \mu_i^{max} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{máx}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2 \\ \mu_i^{min} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{mín}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2 \end{aligned} \quad (26)$$

donde la matriz $\boldsymbol{\beta}$ posee la siguiente estructura (8×8):

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\begin{array}{cccccccccc} b_1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad (27)$$

El arreglo $\boldsymbol{\alpha}$ posee la siguiente estructura (8×1):

$$\boldsymbol{\alpha} = [-a_1, -a_2, -\lambda^{max}, 0, P_{G1}^{max}, P_{G2}^{max}, P_{G1}^{min}, P_{G2}^{min}]^T \quad (28)$$

adicionalmente se deben cumplir cuatro restricciones no-lineales adicionales:

$$\mu_1^{max} (P_{G1} - P_{G1}^{\text{máx}}) = 0 \quad (29)$$

$$\mu_2^{max} (P_{G2} - P_{G2}^{\text{máx}}) = 0 \quad (30)$$

$$\mu_1^{min} (P_{G1} - P_{G1}^{\text{mín}}) = 0 \quad (31)$$

$$\mu_2^{min} (P_{G2} - P_{G2}^{\text{mín}}) = 0 \quad (32)$$

Las variables de holgura $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2$ son positivas.

El procedimiento de solución puede encontrarse en la siguiente hoja de [MS Excel](#). Se incluyen dos métodos. El método compacto basado en sistemas de ecuaciones formulado aquí y

un método en el que se formula el problema de optimización directamente. Ambas aproximaciones llegan a la misma solución.

Los resultados obtenidos (Estudio EG) se muestran en la Tabla 2.

Estudio	Esc.	P_D	P_{G1}	P_{G2}	λ	μ_1^{max}	C	U	SW
		MW	MW	MW	\$/MWh	\$/MWh	\$/h	\$/h	\$/h
B	max	600	433.3	166.7	41.67		19217	0	-19217
BG	max	600	400	200	45.00	-5.00	19300	0	-19300
EG	max	600	400	189.2	43.90	-3.93	18819.3	134358	115539

Tabla 1: Solución despacho uninodal con demanda elástica y restricciones de generación (EG)

B: Despacho uninodal básico (inelástico) sin restricciones de generación

BG: Despacho uninodal con demanda inelástica y con restricciones de generación

EG: Despacho uninodal con demanda elástica y restricciones de generación

En la Tabla 2 podemos observar tres resultados. Las dos primeras líneas de la tabla corresponden a los despachos con demanda inelástica (sin y con restricciones) discutidos en el documento Despacho Económico Básico (secciones 1 y 2).

En la tercera linea de la tabla podemos observar el resultado de la aplicación del modelo incluyendo la elasticidad en la demanda P_D . Nótese como la demanda elástica se contrajo en 10.8MW para así pagar un precio marginal ligeramente menor de 43.9 \$/MWh en lugar de los 45 \$/MWh correspondientes a la solución inelástica.

Como resultado relevante se observa que la demanda al ser elástica hace que la congestión sea menos severa: $\mu_1^{max}=-3.9$ en lugar de - 5.0 \$/MWh. Esta es una demostración del porqué los mercados con respuesta de demanda pueden moderar la volatilidad del mercado spot de electricidad. Para ello, en condiciones de alta volatilidad, el consumidor puede acudir a una fuente de energía de sustitución (el gas natural por ejemplo) o utilizar energía energía de reserva almacenada en las baterías de los vehículos eléctricos.

El efecto moderador producido por la respuesta de la demanda puede observarse en la Fig. 2

En el nuevo punto de operación, a pesar que continua el cuello de botella en el generador más barato (unidad 1), los costos totales de los generadores se contrajeron a 18819 \$ /h, sensiblemente inferiores a los observados en la solución inelástica. Invitamos al lector a verificar qué sucedió con los lucros de los generadores en el caso que se incluyan demandas elásticas, en este caso con elasticidad de $\epsilon=-1/3$.

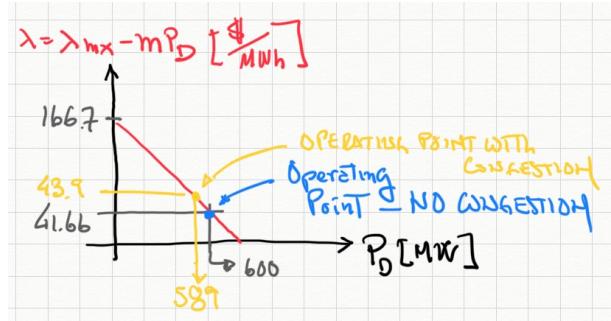


Figura 2: Despacho económico uninodal óptimo con demanda inelástica y elástica ambos con restricciones de generación.

3. Despacho económico multinodal con demanda elástica, red con pérdidas y restricciones de generación y transmisión

En esta sección se describe el problema de despacho económico con demanda elástica y restricciones de generación estudiado en la sección 2 de este documento pero ahora incluyendo el efecto de las pérdidas de potencia en el sistema de transmisión multinodal y las restricciones de capacidad de transporte.

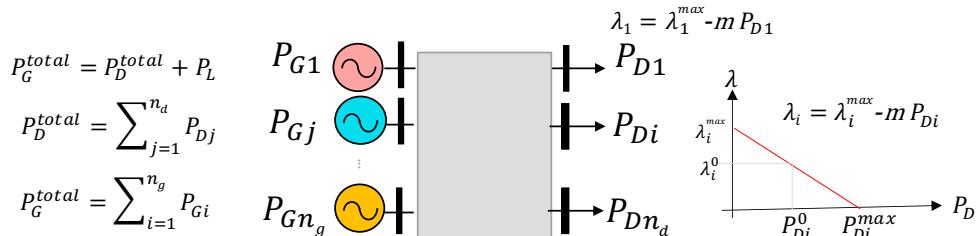


Figura 3: Despacho económico multinodal elástico

En la Figura 3 se muestra un sistema multinodal en el que n_g unidades generadoras alimentan n_d demandas que pueden modificar su patrón de consumo P_{Di} en MW ante cambios en el precio nodal λ_i en \$/MWh. Asumimos que el sistema tiene una red de transmisión y por lo tanto hay pérdidas activas y reactivas. Toda la producción de potencia activa debe satisfacer las demandas y las pérdidas.

La función de demanda se define en cada nodo con demanda i mediante una relación entre el precio a pagar λ_i en \$/MWh y el nivel de consumo P_{Di} en MW de dicho nodo:

$$\lambda_i = \lambda_i^{max} - m_i P_{Di} \quad (33)$$

donde λ_i^{max} en \$/MWh es el precio máximo a pagar por un suministro de energía eléctrica escaso en el nodo i y m_i en \$\text{MW}^2\text{h} es la pendiente de la curva de demanda en el nodo i , que se asume en este caso como lineal. Suponiendo que cada nodo de demanda i del sistema está en un punto de operación dado (P_{Di}^0, λ_i^0) , se define *la elasticidad del precio de la demanda* en cada nodo i como:

$$\epsilon_i = \frac{\frac{\Delta P_{Di}}{P_D^0}}{\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i^0}} = \frac{1}{m_i} \frac{\lambda_i^0}{P_{Di}^0} \quad (34)$$

La utilidad de cada demanda i en \$\text{/h} responde a:

$$U_i(P_{Di}) = \int_0^{P_{Di}^{max}} \lambda dP_D = \int_0^{P_{Di}^{max}} [\lambda_i^{max} - m_i P_{Di}] dP_D \quad (35)$$

$$U_i(P_{Di}) = \lambda^{max} P_{Di} - \frac{1}{2} m_i P_{Di}^2 \quad (36)$$

La utilidad total de todas las demandas del sistema es:

$$U_i(\mathbf{P}_D) = \sum_{i=1}^{n_d} U_i(P_{Di}) \quad (37)$$

con $[\mathbf{P}_D] = [P_{D1}, \dots, P_{Dd_d}]^T$

El *bienestar social* (o social welfare) en \$\text{/h}\$ se define como la diferencia entre la utilidad total de las n_d demandas y el costo de la producción total de las n_g unidades generadoras:

$$SW(\mathbf{P}_D, \mathbf{P}_G) = -SC(\mathbf{P}_D, \mathbf{P}_G) = U(\mathbf{P}_D) - C(\mathbf{P}_G) \quad (38)$$

3.1. Suposiciones

En este modelo se asume lo siguiente:

1. Modelo multinodal
2. Operación segura en régimen estable
3. Todos los generadores son térmicos, es decir, queman algún tipo de combustible (carbón, gas, diesel o biomasa) en calderas, turbinas o en motores de combustión interna.

4. Las demandas nodales son elásticas, no responden al cambio en los precios en su barra.
5. Se incluye el efecto de la red (pérdidas de potencia activa y reactiva).
6. Se incluyen restricciones operativas (capacidad de transporte y generación de potencia activa).

3.2. Formulación del problema

El problema de optimización consiste encontrar el despacho de potencia activa en n_g generadores $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$ cuya generación de potencia activa está restringida a límites de capacidad de generación y n_d demandas elásticas $\mathbf{P}_D = [P_{D1}, \dots, P_{Dn_d}]^T$ para la condición mínimo costo de social (o máximo bienestar social).

Planteamiento formal:

Considere una red de n nodos con n_g nodos de generación y con n_d nodos de demanda elásticas. Nótese que pueden existir nodos que tienen tanto generación como consumo.

Variables conocidas:

Matriz de admitancia del sistema: $\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\mathbf{B}$

Curvas de demanda de potencia activa del sistema: $\lambda_i = \lambda_i^{max} + m_i P_{Di}$, $i = 2, \dots, n_d$

Factor de potencia de las demandas: $f p_i$ $i = 2, \dots, n_d$

Curvas de costo incremental de generación: $IC_i = a_i + b_i P_{Gi}$, $i = 2, \dots, n_g$

Magnitud de tensiones en barras slack/referencia y PV (consigna AVR): $\mathbf{V} = [V_1, \dots, V_{n_g}]^T$

Angulo de la barra slack/referencia nulo: $\theta_1 = 0$

Variables a calcular (incógnitas):

Despacho de generación de potencia activa $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$ en barra slack/referencia y nodos PV

Despacho de potencia reactiva $\mathbf{Q}_G = [Q_{G1}, \dots, Q_{Gn_g}]^T$ en barra slack/referencia y nodos PV

Demandas de potencia activa y reactiva $\mathbf{P}_D = [P_{D1}, \dots, P_{Dn_d}]^T$, $\mathbf{Q}_D = [Q_{D1}, \dots, Q_{Dn_d}]^T$, $i = 2, \dots, n_d$

Angulos en todas las barras del sistema excepto la slack/referencia: $\boldsymbol{\theta} = \theta_2, \dots, \theta_n$

Magnitud de tensiones en barras PQ: $\mathbf{V} = [V_1, \dots, V_{n_d}]^T$

Función objetivo:

$$\min_{\mathbf{P}_G \mathbf{Q}_G \mathbf{P}_D \mathbf{Q}_D \mathbf{V} \boldsymbol{\theta}} SC = C(\mathbf{P}_G) - U(\mathbf{P}_D) = \sum_{i=1}^{n_g} [C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2] - [\lambda^{max} P_D - \frac{1}{2} m P_D^2] \quad (39)$$

Restricciones:

sujeto al factor de potencia de la carga:

$$\cos(\tan^{-1}(\frac{Q_{Di}}{P_{Di}})) = fp_i \text{ en atraso } Q_{Di} > 0; \text{ en adelanto } Q_{Di} < 0 \quad i = 2, \dots, n_d \quad (40)$$

sujeto al equilibrio de potencia activa y reactiva nodal:

$$P_i = P_{Gi} - P_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (41)$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}] \forall i = 1, \dots, n \quad (42)$$

sujeto a los límites de capacidad de generación de potencia activa:

$$P_{Gi}^{min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{max}, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (43)$$

sujeto al flujo de potencia aparente:

$$\frac{|S_{jk}^L - S_{kj}^L|}{2} \leq S_{jk}^{L-max} \quad \forall k, j = 1, \dots, n \quad (44)$$

donde:

$$S_{jk}^L = \sqrt{(P_{jk}^L)^2 + (Q_{jk}^L)^2} \quad \forall k, j = 1, \dots, n \quad (45)$$

$$P_{jk}^L = V_j V_k [G_{jk} \cos \theta_{jk} + B_{jk} \sin \theta_{kj}] \quad \forall k, j = 1, \dots, n \quad (46)$$

$$Q_{jk}^L = V_j V_k [G_{jk} \sin \theta_{jk} - B_{jk} \cos \theta_{kj}] \quad \forall k, j = 1, \dots, n \quad (47)$$

donde el costo de producción $C(\mathbf{P}_G)$ y la utilidad de la demanda $U(\mathbf{P}_D)$ están expresadas en función de las variables económicas a través de la ecuaciones 6 y 37, respectivamente.

3.3. Solución del problema

La solución del despacho económico se obtiene mediante un solver externo (Matlab-Fmincon, MINOS-GAMS, Solver de MSEExcel, etc.) a partir de la formulación establecida en las Ecs. 39-47.

3.4. Ejemplo 2 - Caso de Estudio 2

Planteemos el modelo descrito en la sección 3.2 para resolver el problema de despacho en el Caso de Estudio 1 (en la sección 2) incluyendo ahora una red de transmisión de tres líneas y tres nodos. La red de transmisión está especificada en el Caso de Estudio 2¹. En este ejemplo asumiremos que las líneas tienen pérdidas de potencia activa y reactiva, y que la línea 1-3 se encuentra limitada a 140 MVA (0.7 pu). Asumimos también el nodo 1 como referencia (slack/referencia), el nodo 2 como PV y el nodo 3 como PQ. Las tensiones de los generadores se fijan en $V_1=V_2=1.0$ en pu. El ángulo de la barra de referencia se fija en $\theta_1=0$ radianes.

El caso de estudio 2 tiene dos generadores ($n_g=2$) y una demanda ($n_d=1$). La matriz de admitancia es conocida. La estructura de costos de cada generador también es conocida.

A continuación definiremos la curva de demanda a partir de un punto de operación (precio, consumo) conocido. En la sección 3 del documento Despacho Económico Básico observamos que para condiciones de demanda mínima (250 MW) el modo de demanda (3) posee un precio marginal local de $LMP_3 = \lambda_3=30.9620$ \$/MWh. Asumiremos una elasticidad de -0.333 en este punto de operación para obtener la siguiente función de demanda:

$$LMP_3 = \lambda_3 = \lambda_3^{max} - m_3 P_{D3} = 123.85 - 0.37 P_{D3} \quad (48)$$

como el factor de potencia de la carga es unitario no se requiere determinar la potencia reactiva de la carga.

La función de utilidad de la demanda en \$/h en el nodo 3 es:

$$U_3 = \lambda_3^{max} P_{D3} - \frac{1}{2} m_3 P_{D3}^2 = 123.85 P_{D3} - 0.1857 P_{D3}^2 \quad (49)$$

El problema de despacho óptimo consiste en determinar $\mathbf{P}_G=[P_{G1} P_{G2}]$, $\mathbf{Q}_G=[Q_{G1} Q_{G2}]$, P_{D3} , V_3 , θ_2 , θ_3 para el mínimo costo social:

$$\min_{\mathbf{P}_G \mathbf{Q}_G P_{D3} \theta_2 V_3 \theta_3} C_1(P_{G1}) + C_2(P_{G2}) - U_3(P_{D3}) \quad (50)$$

sujeto a:

$$\theta_1 = 0, Q_{D3} = 0 \quad (51)$$

¹Revisar documento Caso de Estudio 2 [aquí](#)

sujeto a:

$$P_1 = P_{G1} = V_1 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{1k} \cos \theta_{1k} + B_{1k} \sin \theta_{1k}] \rightarrow \lambda_1 \quad (52)$$

$$P_2 = P_{G2} = V_2 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{2k} \cos \theta_{2k} + B_{2k} \sin \theta_{2k}] \rightarrow \lambda_2 \quad (53)$$

$$P_3 = -P_{D3} = V_3 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{3k} \cos \theta_{3k} + B_{3k} \sin \theta_{3k}] \rightarrow \lambda_3 \quad (54)$$

$$Q_1 = Q_{G1} = V_1 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{1k} \sin \theta_{1k} - B_{1k} \cos \theta_{1k}] \quad (55)$$

$$Q_2 = Q_{G2} = V_2 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{2k} \sin \theta_{2k} - B_{2k} \cos \theta_{2k}] \quad (56)$$

$$Q_3 = -Q_{D3} = V_3 \sum_{k=1}^3 V_k [G_{3k} \sin \theta_{3k} - B_{3k} \cos \theta_{3k}] \quad (57)$$

sujeto a los límites de capacidad de generación de potencia activa:

$$P_{G1}^{min} \leq P_{G1} \leq P_{G1}^{max} \quad (58)$$

$$P_{G2}^{min} \leq P_{G2} \leq P_{G2}^{max} \quad (59)$$

sujeto al flujo de potencia entre barras activa, reactiva y aparente:

$$\frac{|S_{13}^L - S_{31}^L|}{2} \leq S_{13}^{L-max} = 0.7 \text{ pu (140 MVA)} \quad (60)$$

donde:

$$S_{13}^L = \sqrt{(P_{13}^L)^2 + (Q_{13}^L)^2}, S_{31}^L = \sqrt{(P_{31}^L)^2 + (Q_{31}^L)^2}$$

$$\begin{aligned} P_{13}^L &= V_1 V_3 [G_{13} \cos \theta_{13} + B_{13} \sin \theta_{13}] \\ P_{31}^L &= V_1 V_3 [G_{13} \cos \theta_{31} + B_{13} \sin \theta_{31}] \\ Q_{13}^L &= V_1 V_3 [G_{13} \sin \theta_{13} - B_{13} \cos \theta_{13}] - B_{13} V_1^2 \\ Q_{31}^L &= V_1 V_3 [G_{13} \sin \theta_{31} - B_{13} \cos \theta_{31}] - B_{13} V_3^2 \end{aligned}$$

El problema de optimización definido Ecs. 50-60 en tiene 8 incógnitas ($\mathbf{P}_G=[P_{G1}, P_{G2}]$, $\mathbf{Q}_G=[Q_{G1}, Q_{G2}]$, P_{D3} , θ_2 , V_3 , θ_3) y 9 restricciones: 6 de igualdad y 3 de desigualdad. El procedimiento de solución mediante el Solver GHG NonLinear puede encontrarse en la siguiente hoja de [MSExcel](#).

Las variables de estado resultantes de la solución del problema de optimización son: $\mathbf{P}_G=[179.4 \text{ MW}, 64.5 \text{ MW}]$, $\mathbf{Q}_G=[-2.26 \text{ mvar}, 18.32 \text{ mvar}]$, $V_3=0.9859 \text{ pu}$, $\theta_2=-0.0199 \text{ rad}$, $\theta_3=-0.0711 \text{ rad}$.

El costo social mínimo fue $SC=12533.97 \text{ \$/h}$. El costo total de producción es $6514.32 \text{ \$/h}$. La utilidad de la demanda fue $19048.3 \text{ \$/h}$. Los precios marginales locales (LMP) son $\lambda=\lambda_1=28.97 \text{ \$/MWh}$, $\lambda_2=31.45 \text{ \$/MWh}$ y $\lambda_3=34.41 \text{ \$/MWh}$.

Recordemos que la solución reportada para la condición de demanda inelástica en [6], (Sección-Ejemplo 5.5, pag. 200) y en la sección 4 del documento Despacho Económico Básico, λ_3 fue $37.48 \text{ \$/MWh}$. Una conclusión relevante de este resultado es que la respuesta de demanda contribuye a moderar la volatilidad de los precios marginales locales debido a los cuellos de botella. El efecto moderador producido por la respuesta de la demanda puede observarse en la Fig. 4. Note que el LMP en la barra 3 ($\lambda_3=34.41 \text{ \$/MWh}$) sigue siendo muy atractivo para instalar allí nueva generación.

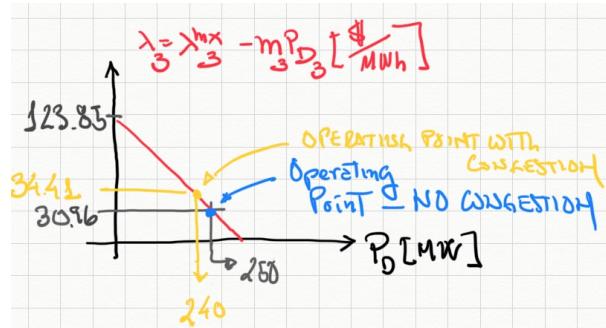


Figura 4: Despacho económico multinodal óptimo con demanda elástica.

En la Tabla 2 se resumen los resultados obtenidos:

Estudio	Esc.	P_D	P_{G1}	P_{G2}	$\lambda = \lambda_1$	λ_2	λ_3	C	U	SW
		MW	MW	MW	\$/MWh	\$/MWh	\$/MWh	\$/h	\$/h	\$/h
BPerd	min	250	200.3	53.3	30.02	30.32	30.96	6783	0	-6783
BT	min	250	170.1	79.9	28.51	32.99	37.48	6742	0	-6742
EPerdGT	min	240.7	179.4	64.5	28.97	31.45	34.41	6514	19048	12534

Tabla 2: Solución despacho multinodal con demanda elástica, perdidas activas y restricciones de generación y transmisión (EPerdGT)

BPerd: Despacho multinodal básico considerando pérdidas activas

BT: Despacho multinodal básico sin pérdidas activas con restricciones de transmisión

EPerdGT: Despacho multinodal con demanda elástica, perdidas activas y restricciones de generación y transmisión

Nótese que el costo total de producción se contrajo a 6514 \$/h, cuando los estudios con demanda inelástica (Bperd y BT) arrojan costos mayores. Es claro que la respuesta de demanda contribuye a mejorar la eficiencia del sistema. El lector tambien podrá verificar que el lucro de la generación tambien se deteriora con respecto a las soluciones inelásticas.

Los flujos de potencia entre los nodos 12, 13, 23 son ahora 38.3, 140 y 102.3 MW, tal como se observa en la Fig. 5.

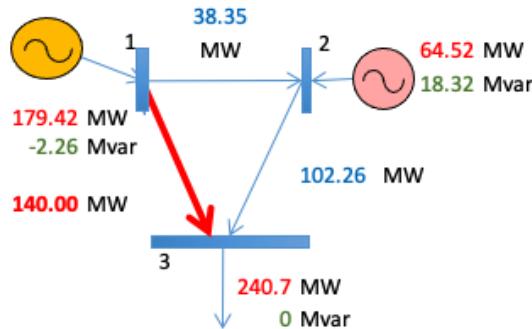


Figura 5: Despacho económico multinodal elástico con pérdidas con restricciones en línea 13

La demanda no es lo suficientemente elástica para evitar la congestión de la línea 13 que sigue activa. Considere que el estudiante es un promotor de energías renovables. Por ejemplo, el OPEX de la generación solar fotovoltaica es casi nulo. Es decir, $C(P_G) = 0$ \$/h. En este

caso todos los ingresos corresponden a lucro o beneficio de corto plazo. ¿Estaría dispuesto el estudiante a instalar nueva generación? ¿dónde conviene más? ¿en el nodo 3? ¿o en el nodo 2?

Referencias

- [1] Gerald Thomas Heydt, “The next generation of power distribution systems”, *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 1, no. 3, pp. 225–235, 2010.
- [2] Gerald Thomas Heydt, Badrul H Chowdhury, Mariesa L Crow, Daniel Haughton, Brian D Kiefer, Fanjun Meng, and Bharadwaj R Sathyaranayana, “Pricing and control in the next generation power distribution system”, *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 3, no. 2, pp. 907–914, 2012.
- [3] Fred C Schweppe, Michael C Caramanis, Richard D Tabors, and Roger E Bohn, *Spot pricing of electricity*, Springer Science & Business Media, 1988.
- [4] Oscar Diaz-Caballero, Paulo M De Oliveira-De Jesus, and Jose M Yusta, “Market equilibrium analysis considering electric vehicle aggregators and wind power producers without storage capabilities”, in *2020 IEEE 14th International Conference on Compatibility, Power Electronics and Power Engineering (CPE-POWERENG)*. IEEE, 2020, vol. 1, pp. 382–387.
- [5] David Toquica, Paulo M De Oliveira-De Jesus, and Angela I Cadena, “Power market equilibrium considering an ev storage aggregator exposed to marginal prices-a bilevel optimization approach”, *Journal of Energy Storage*, vol. 28, pp. 101267, 2020.
- [6] Antonio Gómez-Expósito, Antonio J Conejo, and Claudio Cañizares, *Electric energy systems: analysis and operation*, CRC press, 2018.
- [7] Walter Nicholson, *Teoría microeconómica. Principios básicos y ampliaciones: principios básicos y ampliaciones*, Editorial Paraninfo, 2005.
- [8] H Kuhn and A Tucker, “Nonlinear programming, second berkeley symposium of math. statistics and probability”, *University of California Press, Berkeley*, vol. 13, pp. 481–492, 1951.

A. Caso de Estudio 1

En este documento se define el *Caso de Estudio 1* para los estudios de operación económica de sistemas de potencia. El caso consiste en un modelo uninodal (sin pérdidas, sin sistema de transmisión) de dos generadores térmicos que deben atender una demanda. La demanda se define de dos formas: 1) inelástica, es decir, que su magnitud es independiente de los precios, 2) elástica, donde el consumo esta determinado por la variación de los precios. El caso de estudio está tomado del texto *Electric Energy Systems Analysis and Operation* de Gómez-Expósito, Conejo y Cañizares (Second Edition, 2018) [6].

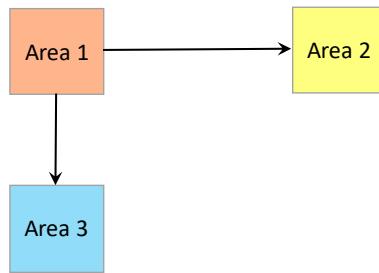


Figura 6: Sistema eléctrico de potencia operando en pool

Considere la *area de control 1* mostrada en la Fig. 8. Dos generadores térmicos atienden una demanda total P_D^{total} tal como se muestra en la Fig. 9.

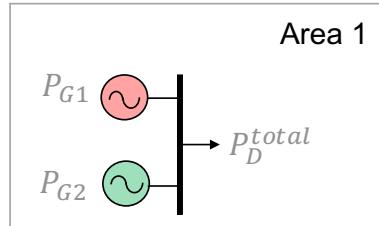


Figura 7: Sistema uninodal

Las funciones de costo unitario cuadrático se caracterizan por los parámetros proporcionados en la Tabla B de la siguiente manera:

donde C_0 , a y b son coeficientes de la función de costo dada en la Eq. 66 y $P_G^{\text{mín}}$, $P_G^{\text{máx}}$ son los límites de producción de los generadores.

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (61)$$

Demandas inelásticas

Unit	C_0 (\$/h)	a (\$/MWh)	b (\$/MW ² h)	P_G^{\min} (MW)	P_G^{\max} (MW)
1	100	20	0.05	0	400
2	200	25	0.10	0	300

Tabla 3: Costos de producción

Consideremos dos niveles de demanda P_D^{total} : 250 (mínimo) y 600 MW (máximo). Esta carga total incluye la demanda propia del área y las exportaciones programadas a las áreas 2 y 3.

Demanda elástica

En condiciones de equilibrio (sin restricciones de generación y flujo por las líneas), los precios marginales para la demanda mínima (250 MW) y máxima (600 MW) es 30 y 41.67 \$/MWh (Sin red). Consideremos que el precio máximo a pagar por la demanda (precio de escasez) es 150 \$/MWh. Bajo esta suposición la Tabla 6 muestra los parámetros de las curvas de demanda para la condición pico y fuera de pico 6.

Load	a^D (\$/MWh)	b^D [\$/(MW) ² h]	P_D^{\min} (MW)	P_D^{\max} (MW)
1a(max)	150	-0.48000	0	1000
1b(min)	150	-0.18055	0	1000

Tabla 4: Demanda elástica

En este caso la función de utilidad en \$/h esta dada por:

$$U_i(P_{Di}) = a_i^D P_{Di} + \frac{1}{2} b_i^D P_{Di}^2 \quad (62)$$

La curva de demanda está dada por $\rho_i(P_{Di}) = dU_i/dP_{Di}$:

$$\rho_i(P_{Di}) = a_i^D + b_i^D P_{Di} \quad (63)$$

B. Caso de Estudio 2

En este documento se define el *Caso de Estudio 2* para los estudios de operación económica de sistemas de potencia. El caso consiste en un modelo multinodal (con un sistema de transmisión) de dos generadores térmicos que deben atender una demanda. En este caso el sistema de potencia tiene pérdidas activas y reactivas. El caso esta tomado del texto *Electric*

Energy Systems Analysis and Operation de Gómez-Expósito, Conejo y Cañizares (Second Edition, 2018) [6].

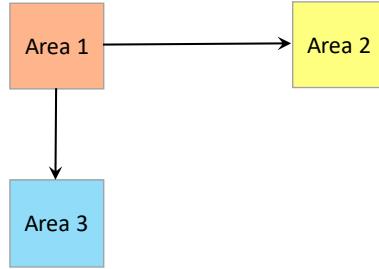


Figura 8: Sistema eléctrico de potencia operando en pool

Considere la *area de control 1* mostrada en la Fig. 8. Dos generadores térmicos atienden una demanda total P_D^{total} tal como se muestra en la Fig. 9 mediante un sistema de transmisión de tres líneas.

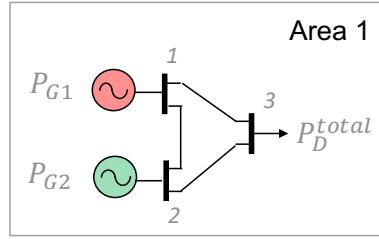


Figura 9: Sistema uninodal

Las funciones de costo unitario cuadrático se caracterizan por los parámetros proporcionados en la Tabla B de la siguiente manera:

Unit	C_0 (\$/h)	a (\$/MWh)	b (\$/MW ² h)	$P_G^{\text{mín}}$ (MW)	$P_G^{\text{máx}}$ (MW)
1	100	20	0.05	0	400
2	200	25	0.10	0	300

Tabla 5: Costos de producción

donde C_0 , a y b son coeficientes de la función de costo dada en la Eq. 66 y $P_G^{\text{mín}}$, $P_G^{\text{máx}}$ son los límites de producción de los generadores.

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (64)$$

Demanda inelástica

Consideremos dos niveles de demanda P_D^{total} : 300 (mínimo) y 600 MW (máximo). Esta carga total incluye la demanda propia del área y las exportaciones programadas a las áreas 2 y 3.

Demanda elástica

En condiciones de equilibrio (sin restricciones de generación y flujo por las líneas), los precios marginales locales para la demanda máxima y mínima es 30 y 47.67 \$/MWh (Sin red).

Considere dos curvas de demanda/utilidad para la carga total: en pico (max) y fuera de pico (min). Esta carga total incluye la demanda propia del área y las exportaciones programadas a las áreas 2 y 3.

Para la demanda elástica considere los coeficientes dados en la Tabla 6 para la determinación de la función de utilidad.

Load	a^D (\$/MWh)	b^D [\$/(MW) ² h]	$P_D^{\text{mín}}$ (MW)	$P_D^{\text{máx}}$ (MW)
1a(max)	55	-0.2	0	300

Tabla 6: Demanda elástica

$$U_i(P_{Di}) = a_i^D P_{Di} + \frac{1}{2} b_i^D P_{Di}^2 \quad (65)$$

La curva de demanda está dada por $\rho_i(P_{Di}) = dU_i/dP_{Di}$:

$$\rho_i(P_{Di}) = a_i^D + b_i^D P_{Di} \quad (66)$$

Red de Transmisión

Los parámetros del sistema de transmisión se muestran en la Tabla 7. Las bases del sistema son 100 kV y 200 MVA. Las tensiones en las barras PV son unitarias. Para los estudios con red se asume una carga con factor de potencia unitario.

Desde barra	Hasta barra	Resistencia (pu)	Reactancia (pu)	Susceptancia Shunt (pu)
1	2	0.02	0.1	0
1	3	0.02	0.1	0
2	3	0.02	0.1	0

Tabla 7: Parámetros del sistema de transmisión

Matriz de admitancia nodal (pu):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3,8462 - 19,2308i & -1,9231 + 9,6154i & -1,9231 + 9,6154i \\ -1,9231 + 9,6154i & 3,8462 - 19,2308i & -1,9231 + 9,6154i \\ -1,9231 + 9,6154i & -1,9231 + 9,6154i & 3,8462 - 19,2308i \end{bmatrix} \quad (67)$$