



# Módulo 2 - Fundamentos de Despacho Económico de Centrales Eléctricas

Paulo M. De Oliveira-De Jesus

[pm.deoliveiradejes@uniandes.edu.co](mailto:pm.deoliveiradejes@uniandes.edu.co)

<https://power.uniandes.edu.co/people/professor/pdeoliveira>

Departamento de Ingeniería Eléctrica & Electrónica

Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes

Abril de 2025

## Resumen

En este documento se describen los fundamentos del problema de despacho económico de los agentes de un mercado eléctrico. Las estructuras de mercado, tanto centralizados como descentralizados, se analizan mediante técnicas de optimización utilizando diferentes herramientas computacionales comerciales y de software libre.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Optimización Matemática</b>	<b>4</b>
2.1. Programación Lineal . . . . .	4
2.2. Programación Cuadrática . . . . .	7
<b>3. Despacho Económico Lineal - Centralizado</b>	<b>9</b>
3.1. Formulación del problema . . . . .	9
3.2. Ejemplo 1 . . . . .	9
<b>4. Despacho Económico Básico Lineal - Descentralizado</b>	<b>12</b>
4.1. Formulación del problema . . . . .	12
<b>5. Despacho económico No Lineal (NLP-QP)</b>	<b>12</b>
5.1. Formulación del problema . . . . .	12
5.2. Solución del problema . . . . .	13
5.2.1. Solución compacta . . . . .	14
5.3. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores de congestión de generación $\mu^{max}$ y $\mu^{min}$ . . . . .	15
5.4. Ejemplo ilustrativo . . . . .	15
5.4.1. Solución Directa . . . . .	16
5.4.2. Solución mediante plataformas de Optimización . . . . .	17

## 1. Introducción

En este documento se describen los fundamentos del problema de despacho económico de los agentes de un mercado eléctrico. Existen dos tipos de mercados eléctricos: los basados en costos (centralizado) y los basados en precios (descentralizado). En los *mercados basados en costos* el operador de mercado (considerado un planificador benevolente) conoce la estructura de costos de los agentes y procede a realizar la asignación de la producción a cada agente de forma centralizada para la condición de máximo bienestar social. En los *mercados basados en precios* el operador de mercado asigna de forma descentralizada tanto el precio marginal como la producción a cada agente una vez casadas las posturas de oferta y demanda durante una subasta.

Los mercados eléctricos centralizados y descentralizados se analizan utilizando herramientas de programación lineal y no lineal mediante diferentes herramientas computacionales como Matlab, Octave, Microsoft Excel (Solver), Python y GAMS.

El repositorio de software utilizado en esta guía de estudio se encuentra en la siguiente página [GitHub](#).

Antes de introducir las distintas formulaciones de despacho económico es menester repasar algunos conceptos fundamentales de la programación matemática.

## 2. Optimización Matemática

A continuación se describen las nociones básicas de los problemas de optimización formulados tanto de forma lineal como no-lineal.

### 2.1. Programación Lineal

La programación lineal (PL) es una técnica matemática que se utiliza para resolver problemas de optimización [1]. Su objetivo es maximizar o minimizar una función lineal de variables reales sujeta a un conjunto de restricciones lineales de variables reales.

La búsqueda de una solución  $x$  que minimiza o maximiza una función  $f(x)$  ha sido ampliamente tratada en el cálculo diferencial. Curiosamente, en los siglos XVI y XVII, matemáticos como Newton, Leibniz, Bernoulli y Lagrange trabajaron en la obtención de máximos y mínimos condicionados de funciones no lineales, mucho antes que se formulara formalmente la programación lineal.

El desarrollo de la PL ocurrió durante la Segunda Guerra Mundial. Durante este período, se planteó el LP como un modelo matemático para planificar las operaciones logísticas del

ejército durante el esfuerzo de guerra, con el objetivo de reducir los costos y aumentar las pérdidas del enemigo. Sin embargo, se mantuvo en secreto hasta 1947, año en que George B. Dantzig formuló el *método Simplex* para la solución de problemas de PL con la siguiente estructura canónica:

Maximizar la función objetivo:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

Sujeto a las siguientes restricciones de igualdad (=) y desigualdad ( $\leq$ ,  $\geq$ ):

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = b_1 \quad (2)$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n \leq b_2 \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n \geq b_m \quad (4)$$

Donde:

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  son las variables de decisión, en color azul

$c_1, c_2, \dots, c_n$  son los coeficientes de la función objetivo

$A_{ij}$  son los coeficientes de las restricciones

$b_1, b_2, \dots, b_m$  son los coeficientes independientes de las restricciones

Los coeficientes de la función objetivo y las restricciones son conocidos y especificados en color verde.

El problema de optimización planteado en las Ecs. 1-4 posee  $n$  variables de decisión y  $m$  restricciones. Todas las variables del problema son continuas.

Un problema de programación lineal se considera sobredeterminado cuando hay más restricciones que variables de decisión ( $m > n$ ). En otras palabras, el número de restricciones es mayor que el número de incógnitas en el sistema. Esto puede ocurrir en situaciones en las que hay múltiples limitaciones o condiciones que deben cumplirse, pero no todas pueden ser satisfechas simultáneamente. Cuando un problema de programación lineal está sobredeterminado, es posible que no haya una solución que satisfaga todas las restricciones simultáneamente. En tales casos, se busca la mejor solución posible que minimice o maximice la función objetivo dentro de las limitaciones dadas.

Un problema de programación lineal se considera subdeterminado cuando hay más variables de decisión que restricciones. En otras palabras, el número de incógnitas es mayor que el número de restricciones en el sistema ( $n > m$ ). Cuando un problema de programación lineal está subdeterminado, se pueden tener infinitas soluciones factibles. Por lo tanto, es importante considerar criterios adicionales (como minimizar o maximizar la función objetivo) para seleccionar una solución específica.

El problema primal establecido en las Ecs. 1-4 pueden escribirse de forma compacta (matricial) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sujeto a} && \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5)$$

La correspondiente formulación dual se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} \\ &\text{sujeto a} && \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ &&& \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6)$$

Las variables duales  $\boldsymbol{\lambda}$  (también llamadas multiplicadores Lagrange) se asocian con las restricciones del problema primal (Ec. 5). Cada restricción tiene su propia variable dual. Estas variables representan el costo marginal o el valor adicional que se obtendría al relajar una restricción específica.

Ejemplo ilustrativo:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad (7)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Este problema está subdeterminado ( $n > m$ ) por cuanto tiene tres incógnitas ( $n=3$ ) con solo dos restricciones ( $m=2$ ). Existen infinitas soluciones que satisfacen ambas restricciones, pero solo una solución que cumple con el objetivo establecido.

Solución óptima primal es  $(x_1, x_2, x_3) = (6.667, 1.6667, 0)$  con  $Z = 28.33$ .

El planteamiento dual es:

$$\text{Minimizar } W = 10y_1 + 15y_2 \quad (8)$$

Sujeto a:

$$y_1 + 2y_2 \geq 3,$$

$$2y_1 + y_2 \geq 5,$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 2,$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Solución dual es  $(y_1, y_2) = (0, 5)$  con  $W = 75$ . El estudiante interesado puede validar estas soluciones en la siguiente hoja de Excel y el siguiente script de GAMS:

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/MISE\\_E4/blob/main/M1.2/PL/M1\\_2\\_PL\\_E1.xlsx](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/MISE_E4/blob/main/M1.2/PL/M1_2_PL_E1.xlsx)

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/MISE\\_E4/blob/main/M1.2/PL/M1\\_2\\_PL\\_E1.gms](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/MISE_E4/blob/main/M1.2/PL/M1_2_PL_E1.gms)

## 2.2. Programación Cuadrática

La programación cuadrática es un proceso de optimización matemática que se centra en resolver problemas que involucran funciones no lineales de tipo cuadrático. Específicamente, busca optimizar (ya sea minimizando o maximizando) una función cuadrática multivariante sujeta a restricciones lineales en las variables. Aunque el término “programación” en este contexto no está relacionado con la programación de computadoras, se refiere a un procedimiento formal para resolver problemas matemáticos. La programación cuadrática ha sido utilizada desde la década de 1940 y se considera un tipo de programación no lineal.

El problema de programación cuadrática con  $n$  variables y  $m$  restricciones se puede formular de la siguiente manera:

Dado:

Un vector real  $\mathbf{c}$  de dimensión  $n$ . Una matriz simétrica real  $\mathbf{Q}$  de dimensión  $(n \times n)$ . Una matriz real  $(\mathbf{A})$  de dimensión  $(m \times n)$ . Un vector real  $\mathbf{b}$  de dimensión  $m$ .

El objetivo de la programación cuadrática es encontrar un vector  $\mathbf{x}$  de dimensión  $n$  que minimice la función de costo:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (9)$$

sujeto a la restricción lineal:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \preceq \mathbf{b} \quad (10)$$

donde  $x^T$  denota la transposición vectorial de  $x$ , y  $\preceq$  representa la desigualdad por componentes (es decir, cada entrada del vector  $(Ax)$  es menor o igual que la entrada correspondiente del vector  $b$ ).

En el caso especial de que  $(Q)$  sea positiva definida simétrica, la función de costo se reduce a mínimos cuadrados:

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{d}\|^2 \quad (11)$$

sujeto a la misma restricción lineal. Aquí,  $(Q = \mathbf{R}^T \mathbf{R})$  es la descomposición de Cholesky de  $(Q)$ , y  $(\mathbf{c} = -\mathbf{R}^T \mathbf{d})$

Las condiciones necesarias de primer orden para la programación cuadrática con restricciones de desigualdad se derivan del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Estas condiciones son:

Condición de Factibilidad Primal: Las restricciones de desigualdad deben cumplirse:  $(\mathbf{A}\mathbf{x} \preceq \mathbf{b})$ .

Condición de Factibilidad Dual: Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad deben ser no negativos:  $(\lambda_i \geq 0)$ .

Condición de Complementariedad: Para cada restricción activa (es decir, para la cual se cumple la igualdad), el producto del multiplicador de Lagrange y la desviación de la restricción debe ser igual a cero:  $(\lambda_i(b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}) = 0)$ .

Condición de Gradiente Cero: El gradiente de la función objetivo más la suma ponderada de los gradientes de las restricciones activas debe ser igual a cero:  $(\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i \nabla \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = 0)$ . En resumen, las condiciones KKT aseguran que la solución óptima cumpla tanto las restricciones de desigualdad como las condiciones de optimalidad



### 3. Despacho Económico Lineal - Centralizado

En esta sección se resuelve el problema de despacho económico centralizado de plantas de generación térmicas. La naturaleza del problema de optimización es *lineal* (LP).

#### 3.1. Formulación del problema

En la Figura 3 se muestra un sistema uninodal en el que varios generadores alimentan una demanda. El objetivo del despacho óptimo es determinar la producción de cada generador para satisfacer la demanda a mínimo costo incluyendo restricciones de capacidad de generación [?].

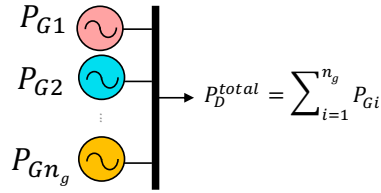


Figura 1: Despacho económico uninodal

El problema de optimización económica consiste encontrar el despacho de potencia activa en  $n_g$  generadores  $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  (MW) cuya potencia está restringida a límites de generación tal que satisfaga la demanda  $P_D^{\text{total}}$  en MW a mínimo costo de producción en \$/h :

$$\min_{\mathbf{P}_G} CP = \sum_{i=1}^{n_g} a_i P_{Gi} \quad (12)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi} = P_D^{\text{total}} \quad (13)$$

$$P_{Gi}^{\min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{\max}, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (14)$$

Donde  $C_{0i}$  es el costo de inversión (CAPEX) en \$ y  $a_i$  es el costo marginal de cada generador  $i$  en \$/MWh

#### 3.2. Ejemplo 1

Considere un sistema eléctrico de potencia con un *area de control única* donde dos plantas térmicas atienden una demanda total  $P_D^{\text{total}}$  tal como se muestra en la Fig. 4.

El costo marginal y los límites de producción se encuentran proporcionados en la Tabla 5.4 de la siguiente manera:

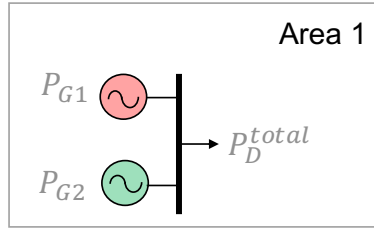


Figura 2: Sistema uninodal

Unidad	$a$ (\$/MWh)	$P_G^{\min}$ (MW)	$P_G^{\max}$ (MW)
1	20	0	400
2	25	0	300

Tabla 1: Costos de producción

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} \quad (15)$$

Consideremos un nivel de demanda  $P_D^{\text{total}}$  de 600 MW.

El problema primal esta dado por:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} f(x) &= 20x_1 + 25x_2 \\ x_1 + x_2 &= 600 \\ x_1 &\leq 400 \\ x_2 &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Reescribiendo para que todas las restricciones queden de la forma  $\leq$ :

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} f(x) &= 20x_1 + 25x_2 \\ -x_1 - x_2 &\leq -600 \\ x_1 + x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\leq 400 \\ x_2 &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

El problema dual esta dado por:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} f(\boldsymbol{\lambda}) &= -600\lambda_1 + 600\lambda_2 + 400\lambda_3 + 300\lambda_4 \\ &- \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 20 \\ &- \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \leq 25 \\ &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

La solución se muestra en la Tabla 4.

$P_D^{total}$	$P_{G1}$	$P_{G2}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	CP
MW	MW	MW	\$/MWh	\$/MWh	\$/MWh	\$/MWh	\$/h
600	<b>400</b>	200	25	0	5	0	13000

Tabla 2: Despacho uninodal básico con restricciones de generación

Podemos observar que para el despacho resultante en condición de demanda máxima se activó la restricción de capacidad del generador 1 (el más económico).

La primera restricción de desigualdad en Ec. 16 hace menester despachar el generador 2 (el más ineficiente) para poder cubrir la porción de demanda que no puede atender el generador 1 debido a la restricción.

El precio sombra  $\lambda_1$  o precio marginal del sistema correspondiente a la restricción de igualdad en Ec. 16 es de 25 \$/MWh. El precio sombra  $\lambda_3$  correspondiente a la primera restricción de desigualdad en Ec. 16 es de 5 \$/MWh, que es justamente la que está acotada. Debido al cuello de botella en el generador 1 es necesario adicionar 5 \$/MWh al costo marginal del mismo  $a_1=20$  \$/MWh para obtener un precio marginal del sistema de 25 \$/MWh.

Este resultado económico implica que el costo total mínimo de producción es 13000 \$/h, 8000 \$/h para el generador 1 y 5000 \$/h para el generador 2. Los generadores 1 y 2 tienen ingresos de 10000 \$/h y 5000 \$/h, respectivamente. En consecuencia el generador 1 tiene un lucro de 400 MW x 5 \$/MWh = 2000 \$/h y el generador 2 tiene un lucro nulo. Un precio marginal del sistema de 25 \$/MWh constituye un incentivo para ampliar la capacidad en el generador 1 (más eficiente).

El procedimiento de solución se pone a disposición en distintas herramientas:

MS Excel (Simplex):

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1\\_2\\_E1.xlsx](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1_2_E1.xlsx)

Python (Optimize, Scipy):

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1\\_2\\_E1\\_optimize.py](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1_2_E1_optimize.py)

Python (Pulp):

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1\\_2\\_E1\\_pulp.py](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1_2_E1_pulp.py)

Matlab (Linprog):

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1\\_2\\_E1\\_linprog\\_matlab.m](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1_2_E1_linprog_matlab.m)

Octave (GLPK):

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1\\_2\\_E1\\_glpk\\_octave.m](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1_2_E1_glpk_octave.m)

GAMS (CPLEX):

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1\\_2\\_E1\\_1.gms](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1_2_E1_1.gms)

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1\\_2\\_E1\\_2.gms](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/M1.2/M1_2_E1_2.gms)

## 4. Despacho Económico Básico Lineal - Descentralizado

En esta sección se resuelve el problema de despacho económico descentralizado mediante el mecanismo de subastas. La naturaleza del problema de optimización es *lineal* (LP).

### 4.1. Formulación del problema

## 5. Despacho económico No Lineal (NLP-QP)

En esta sección se resuelve a modo el problema despacho económico clásico de centrales térmicas con funciones de costo cuadráticas y restricciones de capacidad de generación. La naturaleza del problema de optimización es *no lineal: cuadrático* (NLP-QP).

### 5.1. Formulación del problema

En la Figura 3 se muestra un sistema uninodal en el que varios generadores alimentan una demanda. El objetivo del despacho óptimo es determinar la producción de cada generador para satisfacer la demanda a mínimo costo incluyendo restricciones de capacidad de generación [?].

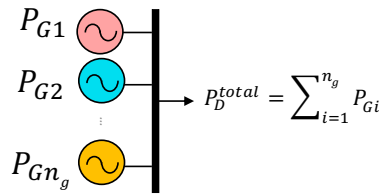


Figura 3: Despacho económico uninodal

El problema de optimización económica consiste encontrar el despacho de potencia activa en  $n_g$  generadores  $\mathbf{P}_G = [P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T$  cuya potencia está restringida a límites de generación tal que

satisfaga la demanda  $P_D^{\text{total}}$  a mínimo costo de producción:

$$\min_{P_G} C(P_G) = \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) \quad (19)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi} = P_D^{\text{total}} \quad (20)$$

$$P_{Gi}^{\min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{\max}, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (21)$$

La función de costo de producción de cada generador  $i$  es:

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (22)$$

donde  $C_0$ ,  $a$  y  $b$  son coeficientes de la función de costo dada en la Ec. 40. Los parámetros dependen de la tecnología de generación utilizada. Para la interpretación económica de los factores  $C_0$ ,  $a$  y  $b$  revisar sección 1.6 y 3.1 del texto de Wood & Wollemberg (2013).

Una vez obtenido las soluciones del despacho óptimo  $P_{Gi}$  para  $i=1, \dots, n_g$  y el precio marginal del sistema  $\lambda$  conviene definir las siguientes entidades económicas.

Se define como ingreso en \$/h la remuneración de los productores por venta de energía:

$$I_i = P_{Gi} \lambda, \quad I = \sum_{i=1}^{n_g} I_i \quad (23)$$

Se define como lucro de los productores en \$/h el beneficio o utilidad de los productores por venta de energía:

$$L_i = P_{Gi} \lambda - C_i(P_{Gi}), \quad L = \sum_{i=1}^{n_g} L_i \quad (24)$$

Se define el pago de la demanda en \$/h la erogación por concepto de energía de los consumidores:

$$L_i = P_D \lambda \quad (25)$$

## 5.2. Solución del problema

En su formulación estándar el problema de despacho económico con restricciones de capacidad debe ser resuelto mediante técnicas de *Programación No lineal*. En este caso utilizaremos el método de multiplicadores de Lagrange generalizado mediante el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [?]. El problema de optimización se reduce a un sistema de ecuaciones no-lineal que debe ser resuelto mediante un método numérico.

El Lagrangiano posee la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{P}_G, \lambda) = & \sum_{i=1}^{n_g} C_i(P_{Gi}) + \lambda (P_D^{\text{total}} - \sum_{i=1}^{n_g} P_{Gi}) \\ & + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i^{\text{máx}} (P_{Gi}^{\text{máx}} - P_{Gi}) + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i^{\text{mín}} (P_{Gi}^{\text{mín}} - P_{Gi}) \end{aligned} \quad (26)$$

Las condiciones necesarias de primer-orden de optimalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} = IC_i(P_{Gi}) - \lambda - \mu_i^{\text{max}} - \mu_i^{\text{min}} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \mu_i^{\text{max}}} = P_{Gi}^{\text{máx}} - P_{Gi} - \gamma_i = 0, \quad \gamma_i > 0, \forall i = 1, \dots, n_g \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \mu_i^{\text{min}}} = -P_{Gi}^{\text{mín}} + P_{Gi} - \eta_i = 0, \quad \eta_i > 0, \forall i = 1, \dots, n_g \quad (30)$$

$$\mu_i^{\text{max}} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{máx}}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (31)$$

$$\mu_i^{\text{min}} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{mín}}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \quad (32)$$

Las ecuaciones 27-32 constituyen un sistema de  $3n_g+1$  ecuaciones lineales con  $2n_g$  ecuaciones no-lineales con  $5n_g+1$  incógnitas. Las soluciones (raíces) de este sistema deben obtenerse mediante métodos numéricos (Newton, por ejemplo).

### 5.2.1. Solución compacta

A continuación se presenta una formulación matricial compacta que puede ser implementada en MS Excel (Solver) o Matlab (Fsolve).

Se define el vector de incógnitas para la  $i$ -ésima posición como:

$$\mathbf{x} = [P_{Gi}, \lambda, \mu_i^{\text{max}}, \mu_i^{\text{min}}, \gamma_i, \eta_i]^T \quad (33)$$

y el sistema a resolver se escribe como:

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{x} &= \alpha \\ \mu_i^{\text{max}} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{máx}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \\ \mu_i^{\text{min}} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{mín}}) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (34)$$

donde para la  $i$ -ésima posición se dispone de la siguiente estructura

$$\beta = \begin{bmatrix} b_i & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\alpha = [-a_i, P_D^{total}, P_{Gi}^{max}, P_{Gi}^{min}]^T \quad (36)$$

La dimensión de  $\beta$  es  $3n_g+1 \times 3n_g+1$ . La dimensión de  $\alpha$  es  $3n_g+1 \times 1$ .

### 5.3. Interpretación económica de $\lambda$ y los factores de congestión de generación $\mu^{max}$ y $\mu^{min}$

Para un despacho óptimo con restricciones de capacidad de generación dado  $([P_{G1}, \dots, P_{Gn_g}]^T)$ , La relación entre el precio marginal del sistema ( $\lambda$ ), los coeficientes KKT ( $\mu_i^{min}, \mu_i^{max}$ ) y los costos incrementales de cada generador ( $IC_i(P_{Gi})$ ) viene dado por las siguientes expresiones:

$$IC_i(P_{Gi}) = \lambda + \mu_i^{min} \geq \lambda \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{min} \quad (37)$$

$$IC_i(P_{Gi}) = \lambda \quad \text{si } P_{Gi}^{min} < P_{Gi} < P_{Gi}^{max} \quad (38)$$

$$IC_i(P_{Gi}) = \lambda + \mu_i^{max} \leq \lambda \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{max} \quad (39)$$

Cuando se activa el limite superior  $P_{Gi}^{max}$ , el coeficiente  $\mu_i^{max}$  es negativo. Esto significa que en condiciones de escasez, el precio marginal del sistema  $\lambda$  sube debido a la adición de  $\mu_i^{max}$  al costo incremental  $IC_i$ , que como sabemos depende de la tecnología de generación:  $\lambda = IC_i - \mu_i^{max} > IC_i$ .

Por otra parte, cuando se activa el limite inferior  $P_{Gi}^{min}$  el coeficiente  $\mu_i^{min}$  es positivo. Observamos que en condiciones de abundancia, el precio marginal del sistema  $\lambda$  disminuye debido a la sustracción de  $\mu_i^{min}$  al costo incremental  $IC_i$ :  $\lambda = IC_i - \mu_i^{min} > IC_i$ .

Finalmente, cuando el despacho de potencia de mínimo costo ocurre sin activar alguno de los limites, el precio del sistema coincide con el costo incremental de todos los generadores.

### 5.4. Ejemplo ilustrativo

El caso consiste en un modelo uninodal (sin pérdidas, sin sistema de transmisión) de dos generadores térmicos que deben atender una demanda. El caso de estudio está tomado del texto *Electric Energy Systems Analysis and Operation*<sup>1</sup> de Gómez-Expósito, Conejo y Cañizares (Second Edition, 2018) [?]. Dos generadores térmicos atienden una demanda total  $P_D^{total}$  tal como se muestra en la Fig. 4.

<sup>1</sup>Capítulo 5, pag. 199.

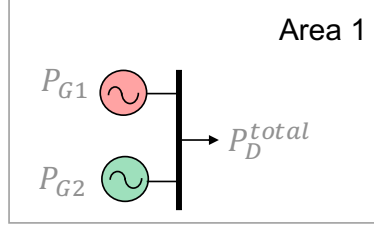


Figura 4: Sistema uninodal

Las funciones de costo unitario cuadrático se caracterizan por los parámetros proporcionados en la Tabla 5.4 de la siguiente manera:

Unit	$C_0$ (\$/h)	$a$ (\$/MWh)	$b$ (\$/MW <sup>2</sup> h)	$P_G^{\min}$ (MW)	$P_G^{\max}$ (MW)
1	100	20	0.05	0	400
2	200	25	0.10	0	300

Tabla 3: Costos de producción

donde  $C_0$ ,  $a$  y  $b$  son coeficientes de la función de costo dada en la Eq. 40 y  $P_G^{\min}$ ,  $P_G^{\max}$  son los límites de producción de los generadores.

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (40)$$

La solución para una demanda máxima de  $P_D^{total}=600$  MW se muestra en la Tabla 4.

#### 5.4.1. Solución Directa

Para hallar la solución se aplicó la formulación compacta discutida en esta sección (Sistema de ecuaciones definido en Ec. 34).

Como  $n_g=2$ , tendremos un vector  $\mathbf{x}$  con  $5n_g+1=11$  incógnitas, a saber:

$$\mathbf{x} = [P_{G1}, P_{G2}, \lambda, \mu_1^{\max}, \mu_2^{\max}, \mu_1^{\min}, \mu_2^{\min}, \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2]^T \quad (41)$$

La matriz  $\beta$  posee la siguiente estructura:



$$\beta = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

La matriz  $\alpha$  posee la siguiente estructura:

$$\alpha = [-a_1, -a_2, P_D^{total}, P_{G1}^{max}, P_{G2}^{max}, P_{G1}^{min}, P_{G2}^{min}]^T \quad (43)$$

adicionalmente se deben cumplir cuatro restricciones no-lineales adicionales:

$$\mu_1^{max} (P_{G1} - P_{G1}^{max}) = 0 \quad (44)$$

$$\mu_2^{max} (P_{G2} - P_{G2}^{max}) = 0 \quad (45)$$

$$\mu_1^{min} (P_{G1} - P_{G1}^{min}) = 0 \quad (46)$$

$$\mu_2^{min} (P_{G2} - P_{G2}^{min}) = 0 \quad (47)$$

En este modelo las variables de holgura  $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2$  son positivas.

El procedimiento de solución directa puede encontrarse en la siguiente hoja de MSExcel:

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/C3\\_QP/C3\\_E1.xlsx](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/C3_QP/C3_E1.xlsx)

$P_D^{total}$	$P_{G1}$	$P_{G2}$	$\lambda$	$\mu_1^{max}$	C
MW	MW	MW	\$/MWh	\$/h	\$/h
600	<b>400</b>	200	45.00	5	19300

Tabla 4: Solución despacho uninodal básico con restricciones de generación

De la Tabla 4 podemos observar que para el despacho resultante en condición de demanda máxima se activó la restricción de capacidad del generador 1 (el más económico). En este caso, el coeficiente KKT activado es:  $\mu_1^{max} = 5$  \$/MWh. Esto implica que en condiciones de escasez, el precio marginal del sistema es superior en 5 \$/MWh al costo incremental del generador 1  $IC_1(400MW)=40$  \$/MWh. El costo incremental del generador 2 (donde no hay activación de límites) equivale al precio marginal, en este caso 45 \$/MWh

#### 5.4.2. Solución mediante plataformas de Optimización

El procedimiento de solución mediante GRG non-linear puede encontrarse en la siguiente hoja de MS Excel:

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/C3\\_QP/C3\\_E1.xlsx](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/C3_QP/C3_E1.xlsx)

GAMS

[https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/C3\\_QP/C3\\_E1.gms](https://github.com/pmdeoliveiradejesus/PSE/blob/main/C3_QP/C3_E1.gms)

## Referencias

- [1] David G Luenberger, Yinyu Ye, et al., *Linear and nonlinear programming*, vol. 2, Springer, 1984.