# Módulo 1 - Introducción a la Optimización Matemática

Paulo M. De Oliveira-De Jesus

pm.deoliveiradejes@uniandes.edu.co

https://power.uniandes.edu.co/people/professor/pdeoliveira

Departamento de Ingeniería Eléctrica & Electrónica

Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes

Abril de 2025

**Resumen**

En este documento se describe modelos de optimización lineal y no-lineal utilizando diferentes herramientas computacionales.

# Índice

# 1. Introducción

En este documento se describen los fundamentos de optimización lineal y no lineal (cuadrática)-

El repositorio de software utilizado en esta guía de estudio se encuentra en la siguiente página GitHub.

# 2. Optimización Matemática

A continuación se describen las nociones básicas de los problemas de optimización formulados tanto de forma lineal como no-lineal.

## 2.1. Programación Lineal

La programación lineal (PL) es una técnica matemática que se utiliza para resolver problemas de optimización [1]. Su objetivo es maximizar o minimizar una función lineal de variables reales sujeta a un conjunto de restricciones lineales de variables reales.

La búsqueda de una solución $x$ que minimiza o maximiza una función $f(x)$ ha sido ampliamente tratada en el cálculo diferencial. Curiosamente, en los siglos XVI y XVII, matemáticos como Newton, Leibniz, Bernoulli y Lagrange trabajaron en la obtención de máximos y mínimos condicionados de funciones no lineales, mucho antes que se formulara formalmente la programación lineal.

El desarrollo de la PL ocurrió durante la Segunda Guerra Mundial. Durante este período, se planteó el LP como un modelo matemático para planificar las operaciones logísticas del ejercito durante el esfuerzo de guerra, con el objetivo de reducir los costos y aumentar las pérdidas del enemigo. Sin embargo, se mantuvo en secreto hasta 1947, año en que George B. Dantzig formuló el *método Simplex* para la solución de problemas de PL son la siguiente estructura canónica:

Maximizar la función objetivo:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

Sujeto a las siguientes restricciones de igualdad (=) y desigualdad ($\leq$, $\geq$):

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = b_1 \tag{2}$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n \leq b_2 \tag{3}$$

$$\vdots$$

$$A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \ldots + A_{mn}x_n \geq b_m \tag{4}$$

Donde:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 &\text{ son las variables de decisión, en color azul} \\ c_1, c_2, \ldots, c_n &\text{ son los coeficientes de la función objetivo} \\ A_{ij} &\text{ son los coeficientes de las restricciones} \\ b_1, b_2, \ldots, b_m &\text{ son los coeficientes independientes de las restricciones} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la función objetivo y las restricciones son conocidos y especificados en color verde.

El problema de optimización planteado en las Ecs. 1-4 posee $n$ variables de decisión y $m$ restricciones. Todas las variables del problema son continuas.

Un problema de programación lineal se considera sobredeterminado cuando hay más restricciones que variables de decisión ($m > n$). En otras palabras, el número de restricciones es mayor que el número de incógnitas en el sistema. Esto puede ocurrir en situaciones en las que hay múltiples limitaciones o condiciones que deben cumplirse, pero no todas pueden ser satisfechas simultáneamente. Cuando un problema de programación lineal está sobredeterminado, es posible que no haya una solución que satisfaga todas las restricciones simultáneamente. En tales casos, se busca la mejor solución posible que minimice o maximice la función objetivo dentro de las limitaciones dadas.

Un problema de programación lineal se considera subdeterminado cuando hay más variables de decisión que restricciones. En otras palabras, el número de incógnitas es mayor que el número de restricciones en el sistema ($n > m$). Cuando un problema de programación lineal está subdeterminado, se pueden tener infinitas soluciones factibles. Por lo tanto, es importante considerar criterios adicionales (como minimizar o maximizar la función objetivo) para seleccionar una solución específica.

El problema primal establecido en las Ecs. 1-4 pueden escribirse de forma compacta (matricial) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5}$$

La correspondiente formulación dual se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \leqslant \mathbf{c}^T \\ & \boldsymbol{\lambda} \leqslant \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6}$$

Las variables duales $\boldsymbol{\lambda}$ (también llamadas multiplicadores Lagrange) se asocian con las restricciones del problema primal (Ec. 5). Cada restricción tiene su propia variable dual. Estas variables representan el costo marginal o el valor adicional que se obtendría al relajar una restricción específica.

Ejemplo ilustrativo:

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \tag{7}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Este problema está subdeterminado ($n > m$) por cuanto tiene tres incógnitas ($n$=3) con solo dos restricciones ($m$=2). Existen infinitas soluciones que satisfacen ambas restricciones, pero solo una solución que cumple con el objetivo establecido.

Solución óptima primal es ($x_1$, $x_2$, $x_3$) = (6.667, 1.6667, 0) con $Z$ = 28.33.

El planteamiento dual es:

$$\text{Minimizar} \quad W = 10y_1 + 15y_2 \tag{8}$$

Sujeto a:

$$y_1 + 2y_2 \geq 3,$$
$$2y_1 + y_2 \geq 5,$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 2,$$
$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Solución dual es $(y_1, y_2) = (0, 5)$ con $W = 75$. El estudiante interesado puede validar estas soluciones en la siguiente hoja de Excel y el siguiente script de GAMS:

https://github.com/pmdeoliveiradejesus/MISE_E4/blob/main/M1.2/PL/M1_2_PL_E1.xlsx

https://github.com/pmdeoliveiradejesus/MISE_E4/blob/main/M1.2/PL/M1_2_PL_E1.gms

## 2.2. Programación Cuadrática

La programación cuadrática es un proceso de optimización matemática que se centra en resolver problemas que involucran funciones no lineales de tipo cuadrático. Específicamente, busca optimizar (ya sea minimizando o maximizando) una función cuadrática multivariante sujeta a restricciones lineales en las variables. Aunque el término "programación" en este contexto no está relacionado con la programación de computadoras, se refiere a un procedimiento formal para resolver problemas matemáticos. La programación cuadrática ha sido utilizada desde la década de 1940 y se considera un tipo de programación no lineal.

El problema de programación cuadrática con $n$ variables y $m$ restricciones se puede formular de la siguiente manera:

Dado:

Un vector real $\boldsymbol{c}$ de dimensión $n$. Una matriz simétrica real $\boldsymbol{Q}$ de dimensión $(n \times n)$. Una matriz real $(\boldsymbol{A})$ de dimensión $(m \times n)$. Un vector real $\boldsymbol{c}$ de dimensión $m$.

El objetivo de la programación cuadrática es encontrar un vector $x$ de dimensión $n$ que minimice la función de costo:

$$f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \tag{9}$$

sujeto a la restricción lineal:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{b} \tag{10}$$

donde $x^T$ denota la transposición vectorial de $x$, y $\preceq$ representa la desigualdad por componentes (es decir, cada entrada del vector $(Ax)$ es menor o igual que la entrada correspondiente del vector $b$.

En el caso especial de que $(\boldsymbol{Q})$ sea positiva definida simétrica, la función de costo se reduce a mínimos cuadrados:

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}|\boldsymbol{Rx} - \boldsymbol{d}|^2 \tag{11}$$

sujeto a la misma restricción lineal. Aquí, ($\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$) es la descomposición de Cholesky de ($\boldsymbol{Q}$), y ($\boldsymbol{c} = -R^T d$)

Las condiciones necesarias de primer orden para la programación cuadrática con restricciones de desigualdad se derivan del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Estas condiciones son:

Condición de Factibilidad Primal: Las restricciones de desigualdad deben cumplirse: ($\boldsymbol{Ax} \preceq \boldsymbol{b}$).

Condición de Factibilidad Dual: Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad deben ser no negativos: ($\lambda_i \geq 0$).

Condición de Complementariedad: Para cada restricción activa (es decir, para la cual se cumple la igualdad), el producto del multiplicador de Lagrange y la desviación de la restricción debe ser igual a cero: ($\lambda_i(b_i - a_i^T x) = 0$).

Condición de Gradiente Cero: El gradiente de la función objetivo más la suma ponderada de los gradientes de las restricciones activas debe ser igual a cero: ($\nabla f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla a_i^T x = 0$). En resumen, las condiciones KKT aseguran que la solución óptima cumpla tanto las restricciones de desigualdad como las condiciones de optimalidad

# Referencias

[1] David G Luenberger, Yinyu Ye, et al., *Linear and nonlinear programming*, vol. 2, Springer, 1984.