UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Informática

Modelación y Simulación

Laboratorio 3

Gustavo Hurtado

Patricia Melo

Profesor: Gonzalo Acuña

Ayudante: Diego Mellis

Santiago – Chile

2020

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Esta experiencia se divide en dos partes, en la primera se trabajará con dos funciones de transferencia conectadas en retroalimentación,en donde a partir de ellas se debe generar el modelo de estado correspondiente, luego se debe hacer el proceso inverso transformando así el modelo de estado a las funciones de transferencia originalmente ingresadas. En la segunda parte se debe desarrollar un programa el cual genere el modelo de estado a partir de un problema en particular planteado, aplicando también para este caso 3 ejemplos. Además, se realizará la resolución de un ejemplo de modelo de estado visto en cátedra.

El objetivo de este laboratorio es complementar el aprendizaje de modelos de estado visto en cátedra, a través de actividades desarrolladas en el lenguaje de programación MATLAB.

El informe consta de un marco teórico, donde se verán definiciones bases para entender el desarrollo del laboratorio, además, cuenta del desarrollo de la primera parte, en la que se realiza la transformación de función de transferencia a modelo de estado y viceversa. Mientras que en la segunda parte se desarrolla un problema ya planteado, junto con un ejemplo visto en cátedra de modelo de estado. Finalmente se encuentran las conclusiones de la experiencia y las referencias.

CAPÍTULO 2. MÁRCO TEÓRICO

A continuación se definirán algunos conceptos para tener un mayor entendimiento en el informe.

2.1 MATLAB

Como Juan Pablo Requez (2017) menciona, MATLAB es un programa computacional que ejecuta una gran variedad de operaciones y tareas matemáticas. Trabaja con matrices y vectores, puede resolver varios problemas matemáticos como por ejemplo simples ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales, entre otros. Permite graficar funciones y así presentar los resultados de una manera más ilustrativa.

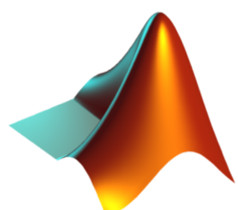

Figura 2.1: Logo Matlab

2.1.1 Funciones de MATLAB

Algunas de las funciones de MATLAB utilizadas en este laboratorio fueron *tf()*, *initial()* y *ss()*, las cuales se detallan a continuación.

- **tf()**

  Esta función sirve para generar una función de transferencia a partir del numerador y denominador de la misma. Estos se deben ingresar como vectores separados.

- **ss()**

La función *ss()* permite convertir las matrices A, B, C y D al sistema de estado dado por (2.1).

- **initial()**

Según MathWorks (S.F.) *initial()* calcula la respuesta no forzada de un modelo *ss*, con una condición inicial especificada en un vector $x0$. De esta forma grafica el comportamiento del modelo de estado *ss*.

2.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Abreviada como $H(s)$ (en el dominio de Laplace), es una función lineal que permite saber el comportamiento del sistema lineal invariante (SLI) que se estudia, en otras palabras, ante cualquier entrada se sabe el comportamiento que tendrá el sistema y la salida que dará.

El sistema puede estar compuesto por varias funciones de transferencia y que estas estén conectadas entre si. Las conexiones pueden ser en serie, paralelo o en retroalimentación como se muestra en la figura 2.2 . Cabe destacar que $H(s)$ puede ser reducido utilizando la fórmula de Mason.

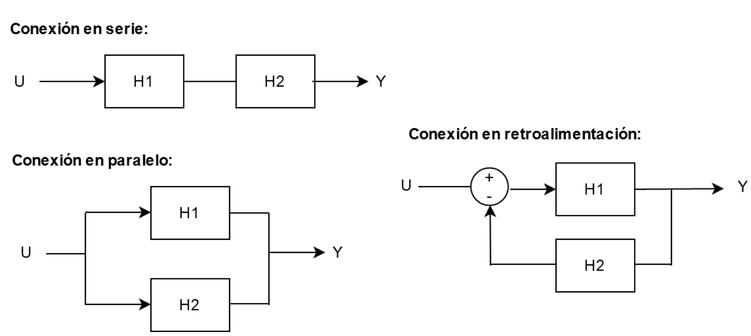

Figura 2.2: Conexiones entre funciones de transferencia

2.3 MODELOS DE ESTADOS

Según como indica Rodriguez (2003), la teoría basada en variables de estado es aplicable tanto a sistemas que pueden ser lineales o no lineales, invariantes o variantes en el tiempo, con simple o múltiple entradas y simple o múltiple salidas, lo que entrega una gran flexibilidad y poder de modelación. Uno de los puntos claves que permite esto, es que los modelos de estado no necesitan todo el historial pasado para el cálculo de un sistema, sino, que sólo necesita conocer los valores iniciales de un tiempo pasado (ej: $x'(0) = 2$)

Entonces, como indica nuevamente Rodriguez (2003), las variables de estado se definen como el conjunto mínimo de variables $x_1(t), x_2(t)..x_n(t)$ tales que su conocimiento en cualquier tiempo t_0 y la información sobre la señal de entrada aplicada en conjunto al tiempo t_0 son suficientes para determinar el estado del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$. Las variables de estado no necesitan tener un signicado físico y si lo tienen no requieren ser cantidades medibles lo cual proporciona bastante libertad para seleccionarlas.

De esta manera, los modelos de estados se pueden representar como en (2.1).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \tag{2.1}$$

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

En este capítulo se verán los pasos para transformar de función de transferencia a modelo de estado, para luego realizar el proceso inverso, es decir, pasar del modelo de estado a función de transferencia.

3.1 PASOS PARA TRANSFORMAR FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA A MODELO DE ESTADO

En este laboratorio se tiene como entrada dos funciones de transferencia que están conectadas en retroalimentación, y con el formato presentado en la Figura 3.1, cambiando solo las variables a, b, c y d.

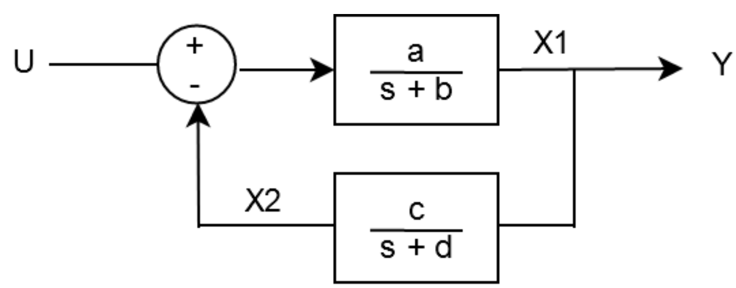

Figura 3.1: Funciones de transferencia

Para el desarrollo de esta transformación se presentará primero los pasos matemáticos obteniendo finalmente la expresión en matrices y luego como fue aplicado en MATLAB.

3.1.1 Desarrollo manual

Los pasos para transformar se enumeran a continuación.

1. Se escriben las ecuaciones a partir de las entradas, funciones de transferencia y salidas que se obtienen, siempre cumpliendo con $Y = H * U$, de esta forma se dice que X_1 corresponde

a la salida de $\frac{a}{s+b}$ y X_2 a la salida de $\frac{c}{s+d}$.

$$X_1 = \frac{a}{s+b} * (U - X_2) \tag{3.1}$$

$$X_2 = \frac{c}{s+d} * X_1 \tag{3.2}$$

2. Continuando con las ecuaciones se despeja sX_1 a partir de (3.1) y sX_2 de (3.2), se la siguiente manera.

$$\begin{aligned} (s+b)X_1 &= a(U - X_2) \\ sX_1 + bX_1 &= aU - aX_2 \\ sX_1 &= aU - aX_2 - bX_1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} (s+d)X_2 &= cX_1 \\ sX_2 + dX_2 &= cX_1 \\ sX_2 &= cX_1 - dX_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3. Ahora se debe regresar al dominio del tiempo, utilizando la inversa de Laplace en el final de (3.3) y (3.4).

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= a * u(t) - a * x_2(t) - b * x_1(t) \\ \dot{x_2}(t) &= c * x_1(t) - d * x_2(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. El último paso es escribir de forma matricial la expresión vista en (3.5), esta debe ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b & -a \\ c & -d \end{bmatrix}}_{A} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} * u \tag{3.6}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} * u \tag{3.7}$$

Dicho lo anterior se obtiene la matriz para $\dot{X}$ en (3.6) y la matriz de salida *Y* en (3.7).

3.1.2 Desarrollo en MATLAB

Como se definió en la Figura 3.1, las funciones de transferencia deben tener el formato $H_1 = \frac{a}{s+b}$ y $H_2 = \frac{c}{s+d}$, por lo que se solicita al inicio del programa ingresar a, b, c y d respectivamente.

```
disp("La funcion de transferencia de H1 es de la forma: a/(s+b)")
a = input("Ingrese a: ");
b = input("Ingrese b: ");

disp("La funcion de transferencia de H2 es de la forma: c/(s+d)")
c = input("Ingrese c: ");
d = input("Ingrese d: ");
```

Como ya se conoce los valores que deben tener las matrices A, B, C y D para que la función de transferencia sea transformada a modelo de estado, simplemente se procede a definir dichas matrices en MATLAB.

```
A = [-b -a; c -d];
B = [a; 0];
C = [1 0];
D = 0;
```

El código recién expuesto genera las mismas matrices de las ecuaciones (3.6) y (3.7).

Además, en esta parte se decidió graficar el comportamiento del modelo de estado en el tiempo mediante la función *initial()* de MATLAB, esto se realiza ingresando como entradas al programa los valores de a = 4, b = 5, c = 2 y d = 1. En la Figura 3.2 se puede apreciar el gráfico creado.

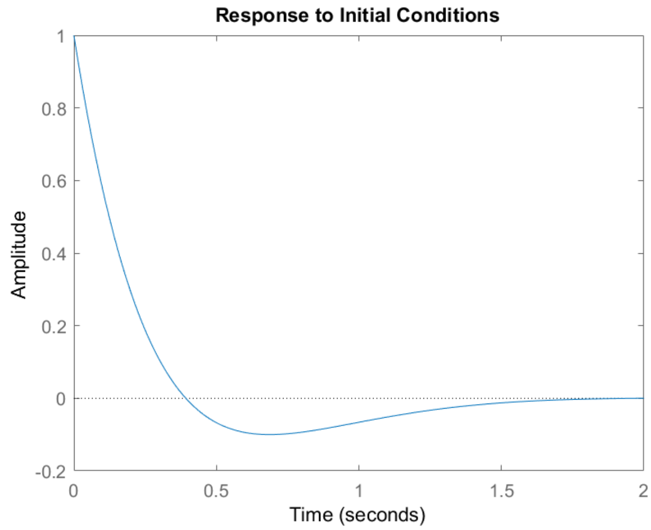

Figura 3.2: Comportamiento modelo de estado

A partir de la Figura 3.2 se puede observar que el modelo de estado se estabiliza en 0 cuando han pasado cerca de 2 segundos, además, la amplitud máxima es apenas inicia el sistema, llegando al valor de 1.

3.2 PASOS PARA TRANSFORMAR MODELO DE ESTADO A FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

En este caso se crea una función que reciba la salida del proceso anterior, es decir, el modelo de estado expresado forma matricial (ecuaciones 3.6 y 3.7). A partir de este modelo se debe realizar la transformación de modelo de estado a función de transferencia, entregando como resultado final las dos funciones de transferencia ingresadas al inicio de la primera parte (ver Figura 3.1). Para ello primero se mostrará el trabajo de matrices realizado manualmente, y luego la implementación de dicho desarrollo en MATLAB.

3.2.1 Desarrollo manual

Para este caso se tendrá al inicio las mismas matrices expuestas en las ecuaciones (3.6) y (3.7), y para realizar la transformación se debe utilizar la siguiente ecuación.

$$H(s) = \frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{3.8}$$

1. Primero se realiza la multiplicación de sI, esto entrega por resultado la matriz:

$$sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

2. Continuando se procede con $sI - A$, lo que da:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -b & -a \\ c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+b & a \\ -c & s+d \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

3. Después se debe calcular la inversa de (3.11), en otras palabras $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{det|sI-A|} * adj(sI - A)$.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+b)(s+d)+ac} * \begin{bmatrix} s+d & -a \\ c & s+b \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

4. Procediendo, se debe multiplicar esta última matriz C con (3.12).

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+b)(s+d)+ac} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s+d & -a \\ c & s+b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+b)(s+d)+ac} * \begin{bmatrix} s+d & -a \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.12}$$

5. Luego a (3.13) se le multiplica la matriz B.

$$
\begin{aligned}
C(sI-A)^{-1}B &= \frac{1}{(s+b)(s+d)+ac} * \begin{bmatrix} s+d & -a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+b)(s+d)+ac} * \begin{bmatrix} as+ad & 02 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

6. Finalmente se le debe sumar D a (3.14), pero como D tiene valor 0 queda exactamente igual. De esta manera H(s) queda expresado en la ecuación 3.15.

$$
H(s) = \frac{as+ad}{(s+b)(s+d)+ac} \tag{3.14}
$$

La función de transferencia H(s) representa a todo el sistema, pero ésta a su vez esta compuesta por dos funciones de transferencia conectadas en retroalimentación, como se aprecia en la Figura 3.1, dado esto es que se busca encontrar H_1 y H_2 pertenecientes a H(s), y por la regla de Mason se sabe que:

$$
H(s) = \frac{H_1}{1+H_1 * H_2} \tag{3.15}
$$

Entonces, para encontrar los valores de H_1 y H_2 se trabaja con (3.15).

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{a(s+d)}{(s+b)(s+d)+ac} * \frac{\frac{1}{(s+b)(s+d)}}{\frac{1}{(s+b)(s+d)}} \\
&= \frac{\frac{a}{(s+b)}}{\frac{(s+b)(s+d)+ac}{(s+b)(s+d)}} \\
&= \frac{\frac{a}{(s+b)}}{1+\frac{ac}{(s+b)(s+d)}} \\
&= \frac{\frac{a}{(s+b)}}{1+\frac{a}{(s+b)} * \frac{c}{(s+d)}}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Relacionando (3.16) y (3.17) se puede decir que $H_1 = \frac{a}{s+b}$ y que $H_2 = \frac{c}{s+d}$, los cuales corresponden a las funciones de transferencia originales.

3.2.2 Desarrollo en MATLAB

El código creado para esta transformación fue realizado paso a paso tal y como se expresa en el desarrollo manual, este código se detalla a continuación.

```
1  function [H1, H2] = transformar_ME_a_FT(A, B, C, D)
2  syms s
3
4  sI = [s 0;0 s];
5  res = sI-A;
6  det=(res(1)*res(4)-(res(2)*res(3)));
7  adj=[res(4) -res(3);-res(2) res(1)];
8  res=C*adj;
9  res=res*B;
10 res=res+D;
11 H =(1/det)*res;
12
13 %Separando H(s) en H1 y H2
14 [H1, H2] = separar_H(H, det, A);
15 H1 = simplifyFraction(H1);
16 H2 = simplifyFraction(H2);
17
18 end
```

La función *transformar_ME_a_FT()* recibe como entrada las matrices del modelo de estado generado a partir de las ecuaciones (3.6) y (3.7), y entrega como salida las funciones de transferencia H_1, H_2 explicadas con anterioridad.

En la línea 2 se define s como símbolo, de esta forma permite utilizar s sin la necesidad de definirlo con un valor. Luego en las líneas 4 y 5 se realiza el desarrollo de (3.10) y (3.11). Continuando, en las líneas 6 y 7 se calcula el determinante y adjunta respectivamente, para luego proceder con el calculo de (3.13) y (3.14). En la línea 10 se le suma D que tiene valor 0, por lo que no afecta al resultado. Finalmente se obtiene el resultado de $H(s)$, pero para separar dicha función de transferencia en las dos ingresadas originalmente es que se llama a la función *separar_H()*, obteniendo H_1 y H_2, luego se simplifican estas fracciones quedando con la misma expresión original presentada en la Figura 3.1.

```
1  function [H1, H2] = separar_H(H, det, A)
2  syms s
3
4  %Numerador y denominador de H(s)
5  numerador = H(1)*det;
6  denominador = det;
7
8  %(s+d)*(s+b)
9  res = det+(A(3)*A(2));
10
11 numerador = numerador/res;
12 den1 = (denominador-res)/res;
13
14 H1 = numerador;
15 H2 = den1/H1;
16
17 end
```

En la función *separar_H()* se debe ingresar $H(s)$, el determinante calculado previamente y la matriz A. Retorna las funciones de transferencia H_1 y H_2. En un inicio se separa el numerador y denominador de $H(s)$, esto se encuentra en las líneas 5 y 6 respectivamente. Después utilizando la matriz A y el determinante se obtiene $(s+d)(s+b)$, esto será utilizado de la misma forma que en (3.17) para el numerador (ver línea 11), sin embargo, para el caso del denominador se procede a realizar otro calculo. En la línea 12 al denominador se le resta $(s+d)(s+b)$, quedando $a*c$, a este valor se le divide por $(s+d)(s+b)$, lo que da por resultado $\frac{a}{(s+b)} * \frac{c}{(s+d)}$. Después se define H_1 como el numerador, y H_2 como la división entre $\frac{a}{(s+b)} * \frac{c}{(s+d)}$ y $\frac{a}{(s+b)}$. Finalmente los valores de H_1 y H_2 son retornados.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

En este capítulo se abordará el desarrollo de la segunda parte del laboratorio, la cual a su vez cuenta con 2 secciones, abarcando paso a paso el análisis y entregando finalmente un gráfico que muestra la respuesta de los sistemas.

4.1 PROBLEMA GENERAL PROPUESTO

En esta sección se mostrará el desarrollo del problema que involucra a la Figura 4.1, en el que se busca modelar este sistema mediante modelo de estados.

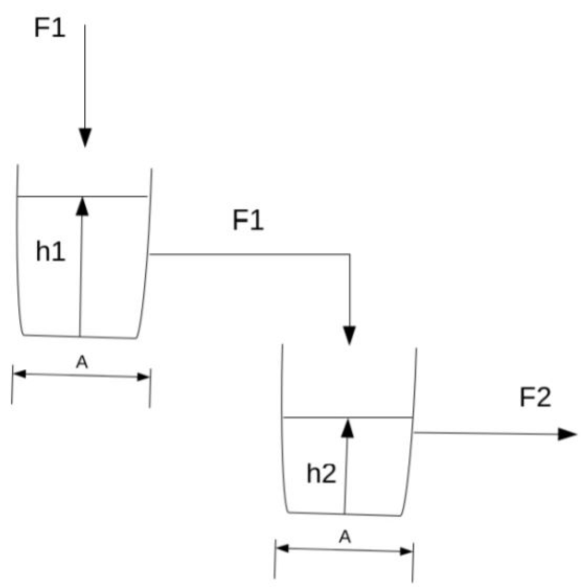

Figura 4.1: Problema general propuesto

4.1.1 Desarrollo manual

Para el desarrollo de este caso, en primer lugar se deben identificar las variables y parámetros que se tienen en el problema. De esta manera, de la Figura 4.1 se puede identificar que:

- Variables del problema
  - F_1: variable de entrada y salida para contenedor 1. También es la variable de entrada para el contenedor 2. Identifica flujo de agua.
  - F_2: variable de salida para contenedor 2. Identifica flujo de agua.
  - h_1: variable que mide el nivel de agua dentro del contenedor 1.
  - h_2: variable que mide el nivel de agua dentro del contenedor 2.
- Parámetro del problema
  - A: Área o sección del contenedor 1 y 2.

Ahora es necesario identificar el modelo fenomenológico del sistema, donde (4.1) y (4.2) representan la conservación de la materia, mientras que (4.3) y (4.4) muestran las ecuaciones de flujos de los recipiente, donde finalmente (4.5) y (4.6) indican la fórmula de volumen para cada recipiente. Es importante notar que en la ecuación (4.1) se tiene un valor de 0, es decir, no existe una variación del volumen en el tiempo dentro del recipiente 1.

$$\frac{dV_1}{dt} = F_1 - F_1 = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{dV_2}{dt} = F_1 - F_2 \tag{4.2}$$

$$F1 = h_1 - h_2 \tag{4.3}$$

$$F2 = h_2 \tag{4.4}$$

$$V_1 = Ah_1 \tag{4.5}$$

$$V_2 = Ah_2 \tag{4.6}$$

Luego de identificar el modelo fenomenológico es necesario determinar las variables que tendrá el modelo de estado para ese problema, proceso que se puede apreciar en la Figura

4.2, donde las entradas, salidas y estados son transformados. Cabe destacar que el uso de h_1 y h_2 como salidas y estados se da debido a que son los elementos acumuladores dentro del sistema, lo que permite identificar de mejor manera que son estas las variables para el modelo de estado.

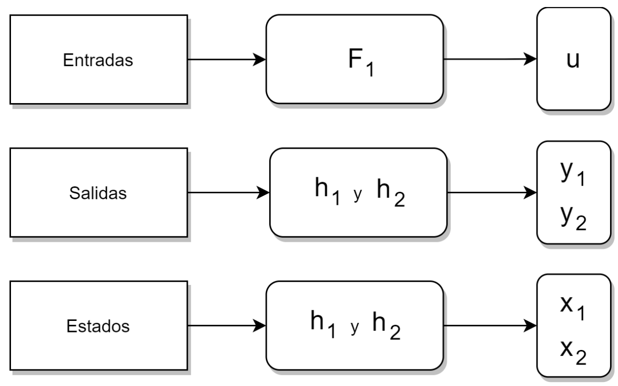

Figura 4.2: Variables de estado problema propuesto

Considerando que se utilizarán las variables antes descritas en la Figura 4.2, ahora es necesario describir el modelo de estado básico (2.1), al cual aún falta definir los valores de sus matrices A, B, C y D.

Para llegar a las matrices es necesario obtener $\frac{dx_1}{dt}$ y $\frac{dx_2}{dt}$, para esto, lo que se hará es utilizar las ecuaciones del modelo fenomenológico.

Uniendo las ecuaciones (4.1), (4.3) y (4.5) se logra determinar:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1 A}{dt} &= h_1 - h_2 - (h_1 - h_2) \\ \frac{dh_1 A}{dt} &= 0 \\ \frac{dh_1}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Se puede apreciar que en (4.7) y (4.8) figura un A, pero este no es el mismo A que se indica en (2.1), más bien es el parámetro A, es decir, el área de los recipientes. Considerando esto, entonces es posible sacar esta constante de la derivada, obteniendo así que $\frac{dh_1}{dt} = 0$

Uniendo las ecuaciones (4.2), (4.3), (4.4) y (4.6) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\frac{dh_2A}{dt} &= h_1 - h_2 - (h_2)\\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{h_1}{A} - \frac{2h_2}{A}\end{aligned} \tag{4.8}$$

Como se puede apreciar en la Figura 4.2, h_1 y h_2 ahora se pueden considerar en términos de x_1 y x_2, de esta manera, si se toman las ecuaciones (4.7) y (4.8) se pueden reescribir como en (4.9) y (4.10) respectivamente. Por otro lado, se tiene que $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_2$.

$$\frac{dh_1}{dt} = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{x_1}{A} - \frac{2x_2}{A} \tag{4.10}$$

Ya después de realizar estos procedimientos, entonces es posible escribir de manera matricial el modelo de estado en (4.11) y (4.12).

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{A} & \frac{-2}{A}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}}_{B} u \tag{4.11}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u \tag{4.12}$$

4.1.2 Desarrollo Matlab

En este apartado se verá la implementación en código que se realizó para este modelo en particular.

Primero se declaran las variables simbólicas que serán utilizadas a lo largo del programa, que en este caso son $h_1,\ h_2,\ F1,\ F2,\ A$, para luego solicitar el único parámetro necesario para este modelo, que es el área de los recipientes.

```
syms h1 h2 F1 F2 A
A = input("Ingrese area recipiente 1 y 2: ");
F1 = input("Ingrese flujo inicial recipiente 1: ");
h1 = input("Ingrese nivel recipiente 1: ");
h2 = input("Ingrese nivel recipiente 2: ");
```

Luego se hace la definición del modelo fenomenológico, donde se definen las ecuaciones que permitirán obtener el modelo de estado.

```
%Flujos
F1 = h1 - h2;
F2 = h2;

%Variacion de volumen
dv1 = F1 - F1;
dv2 = F1 - F2;

%Volumen
V1 = A*h1;
V2= A*h2;
```

Se establecen los nuevos valores para entradas, salidas y estado.

```
%Variables
x1 = h1;
x2 = h2;
u = F1;
```

Uniendo las ecuaciones del modelo fenomenológico se obtiene:

```
dh1 = 0;
dh2 = (h1 - 2*h2)/A;
```

Luego se generan las variables de estado

```
dx1 = 0*x1 + 0*x2
dx2 = (x1 - 2*x2)/A
```

Considerando las variables de estado y el modelo de estado básico (2.1), es posible escribir las matrices del modelo de estado. Se puede ver que en A se realizan unas sumas y multiplicaciones convenientes, esto se hace con motivo de obtener lo mismo que se aprecia en

(4.11), donde se tiene una matriz con dos ceros en la parte superior y $1/A$ con $-2/A$ en la segunda fila.

```
A = [0 0 ; ((dx2 + 2*x2/A)/x1) ((dx2 - x1/A)/x2)]
B = [0 ; 0]
C = [1 0; 0 1]
D = [0;0]
```

Finalmente se grafica el comportamiento del sistema, el cual será presentado más adelante.

```
x0 = [1 ; 0];
sys = ss(double(A),double(B),double(C),double(D));
initial(sys,x0)
```

4.2 PROBLEMA EJEMPLO CLASES

En esta sección se mostrará el desarrollo del problema que involucra a la Figura 4.3 en el que se busca modelar este sistema mediante modelo de estados. Este ejemplo puede ser encontrado en la presentación de la clase N°17, página 7, de Modelación y Simulación, Acuña (2020).

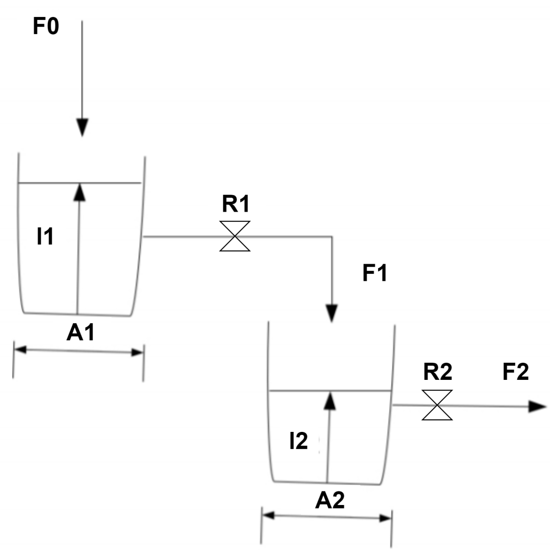

Figura 4.3: Problema ejemplo clases

4.2.1 Desarrollo manual

Para el desarrollo de este caso, al igual que en el anterior, primero se deben identificar las variables y parámetros que se tienen en el problema. De esta manera, de la Figura 4.3 se puede identificar que:

- Variables del problema
  - F_0: variable de entrada para contenedor 1 y sistema en general. Representa flujo de agua.
  - F_1: variable de salida para contenedor 1 y de entrada para contenedor 2. Identifica flujo de agua.
  - F_2: variable de salida para contenedor 2 y sistema en general. Identifica flujo de agua.
  - l_1: variable que mide el nivel de agua dentro del contenedor 1.
  - l_2: variable que mide el nivel de agua dentro del contenedor 2.
- Parámetros del problema
  - A_1: Área o sección del contenedor 1.
  - A_2: Área o sección del contenedor 2.
  - R_1: Válvula de paso del contenedor 1.
  - R_2: Válvula de paso del contenedor 2.

Así como en el problema propuesto para el laboratorio, en este caso es necesario identificar el modelo fenomenológico del sistema, donde (4.13) y (4.14) representan la conservación de la materia, mientras que (4.15) y (4.16) muestran las ecuaciones de flujos de los recipientes, donde finalmente (4.17) y (4.18) indican la fórmula de volumen para cada recipiente.

$$\frac{dV_1}{dt} = F_0 - F_1 \tag{4.13}$$

$$\frac{dV_2}{dt} = F_1 - F_2 \tag{4.14}$$

$$F1 = \frac{l_1 - l_2}{R_1} \tag{4.15}$$

$$F2 = \frac{l_2}{R_2} \tag{4.16}$$

$$V_1 = Al_1 \tag{4.17}$$

$$V_2 = Al_2 \tag{4.18}$$

Luego de identificar el modelo fenomenológico es necesario determinar las variables que tendrá el modelo de estado para ese problema, proceso que se puede apreciar en la Figura 4.4, que si bien es muy similar al de la Figura 4.2, en este caso se tiene que la entrada es F_0 en vez de F_1. Acá, las entradas, salidas y estados son transformados. Cabe destacar que el uso de l_1 y l_2 como salidas y estados se da debido a que son los elementos acumuladores dentro del sistema, lo que permite identificar de mejor manera que son estas las variables para el modelo de estado.

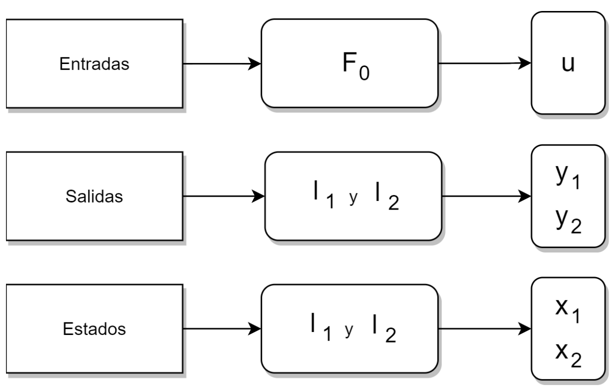

Figura 4.4: Variables de estado problema visto en clases

Considerando que se utilizarán las variables antes descritas en la Figura 4.4, ahora es necesario describir el modelo de estado básico (2.1), al cual aún falta definir los valores de sus matrices A, B, C y D.

Para obtener las matrices antes mencionadas es necesario calcular $\frac{dx_1}{dt}$ y $\frac{dx_2}{dt}$, para esto, lo que se hará es utilizar las ecuaciones del modelo fenomenológico.

Uniendo las ecuaciones (4.13), (4.15) y (4.17) se logra determinar:

$$
\begin{aligned}
\frac{dh_1 A_1}{dt} &= F_0 - \frac{l_1 - l_2}{R_1} \\
\frac{dh_1}{dt} &= \frac{F_0}{A_1} - \frac{l_1 - l_2}{A_1 R_1} \\
\frac{dh_1}{dt} &= -\frac{l_1}{A_1 R_1} + \frac{l_2}{A_1 R_1} + \frac{F_0}{A_1}
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Dado que A_1 y A_2 son parámetros constantes dentro del modelo, entonces es posible sacarlos de la derivada y es lo que permite que en (4.19) y (4.20) pasen derivando las ecuaciones.

Uniendo las ecuaciones (4.14), (4.15), (4.16) y (4.18) se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{dh_2 A_2}{dt} &= \frac{l_1 - l_2}{R_1} - \frac{l_2}{R_2} \\
\frac{dh_2}{dt} &= \frac{l_1 - l_2}{A_2 R_1} - \frac{l_2}{A_2 R_2} \\
\frac{dh_2}{dt} &= \frac{l_1}{A_2 R_1} - \frac{l_2}{A_2 (R_1 + R_2)} -
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Como se puede apreciar en la Figura 4.4, l_1 y l_2 ahora se pueden considerar en términos de x_1 y x_2, de esta manera, si se toman las ecuaciones (4.19) y (4.20) se pueden reescribir como en (4.21) y (4.22) respectivamente, considerando también que ahora F_0 es u. Por otro lado, se tiene que $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_2$.

$$
\frac{dx_1}{dt} = -\frac{x_1}{A_1 R_1} + \frac{x_2}{A_1 R_1} + \frac{u}{A_1} \tag{4.21}
$$

$$
\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{A_2 R_1} - \frac{x_2}{A_2 (R_1 + R_2)} - \tag{4.22}
$$

Ya después de realizar estos procedimientos, entonces es posible escribir de manera matricial el modelo de estado en (4.23) y (4.24).

$$
\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{A_1 R_1} & \frac{1}{A_1 R_2} \\ \frac{1}{A_2 R_1} & \frac{-1}{A_2 (R_1 + R_2)} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \tag{4.23}
$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} u \tag{4.24}$$

4.2.2 Desarrollo Matlab

En este apartado se verá la implementación en código que se realizó para este modelo visto en cátedra.

Primero se declaran las variables simbólicas que serán utilizadas a lo largo del programa, que en este caso son l_1, l_2, $F0$, $F1$, $F2$, u, $A1$, $A2$, $R1$ y $R2$ para luego solicitar las variables y parámetros necesarios para el sistema.

```
syms l1 l2 F0 F1 F2 u A1 A2 R1 R2
F0 = input("Ingrese flujo inicial recipiente 1: ");
A1 = input("Ingrese area recipiente 1: ");
A2 = input("Ingrese area recipiente 2: ");
R1 = input("Ingrese R recipiente 1: ");
R2 = input("Ingrese R recipiente 2: ");
l1 = input("Ingrese nivel recipiente 1: ");
l2 = input("Ingrese nivel recipiente 2: ");
```

Luego se hace la definición del modelo fenomenológico, donde se definen las ecuaciones que permitirán obtener el modelo de estado.

```
%Flujos
F1 = (l1 - l2)/R1;
F2 = l2/R2;

%Variacion de volumen
dv1 = F0 - F1;
dv2 = F1 - F2;

%Volumen
V1 = A1*l1;
V2 = A2*l2;
```

Se establecen los nuevos valores para entradas, salidas y estado.

```
% Variables
x1 = l1;
x2 = l2;
u = F0;
```

Uniendo las ecuaciones del modelo fenomenológico se obtiene:

```
dl1 = F0/A1 - (l1 - l2)/(R1*A1);
dl2 = (l1 - l2)/(R1*A2) - (l2)/(R2*A2);
```

Luego se generan las variables de estado

```
dx1 = -(x1)/(R1*A1) + x2/(A1*R2) + u/A1;
dx2 = (x1)/(R1*A2) - x2/(A2*(R1+R2)) + 0*u;
```

Considerando las variables de estado y el modelo de estado básico (2.1), es posible escribir las matrices del modelo de estado. Dado que en $dx1$ y $dx2$ lo que importa es lo que acompaña a $x1$ y $x2$ para realizar las matrices A,B,C y D se realizaron operaciones convenientes para obtener estos valores. Se puede ver que de mv_1 a mv_6 se realizan estas operaciones.

```
mv_1 = (dx1 - x2/(A1*R2) - u/A1)/x1
mv_2 = (dx1 + (x1)/(R1*A1) - u/A1)/x2
mv_3 = (dx2 + x2/(A2*(R1+R2)))/x1
mv_4 = (dx2 - x1/(R1*A2))/x2
mv_5 =  (dx1 - (-(x1)/(R1*A1) + x2/(A1*R2)))/u
mv_6 =  (dx2 - ((x1)/(R1*A2) - x2/(A2*(R1+R2))))/u

A = [mv_1 mv_2 ; mv_3 mv_4]
B = [mv_5 ; mv_6]
C = [1 0; 0 1]
D = [0;0]
```

Finalmente se grafica el comportamiento del sistema. Con la función $ss()$ se crea el modelo estado en base a las matrices A, B, C y D, mientras que $initial()$ se encarga de graficar este sistema, este gráfico será presentado en la sección de ejemplos.

```
x0 = [1 ; 0];
sys = ss(double(A),double(B),double(C),double(D));
initial(sys,x0)
```

4.3 EJEMPLOS DE LA PARTE 2

Para la primera sección de este capítulo se solicita incluir 3 ejemplos y sus resultados luego de ejecutarlos en MATLAB. Así como también se mostrarán los resultados obtenidos de la segunda sección del capítulo.

4.3.1 Ejemplo 1

- Considerando las siguientes entradas para el modelo:
    - Área recipiente 1 y 2 (A) = 10 $[m^2]$
    - Flujo inicial recipiente 1 (F_1) = 4 $[\frac{m^3}{s}]$
    - Nivel recipiente 1 (H_1) = 25 $[m]$
    - Nivel recipiente 2 (H_1) = 10 $[m]$

Se obtiene que las variables $dh1 = dx1 = 0$ y $dh2 = dx2 = 0{,}5$, mientras que en (4.25) y (4.26) se obtiene el modelo de estado en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \tag{4.25}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u \tag{4.26}$$

Finalmente en la Figura 4.5 se puede apreciar la respuesta del sistema para el ejemplo 1.

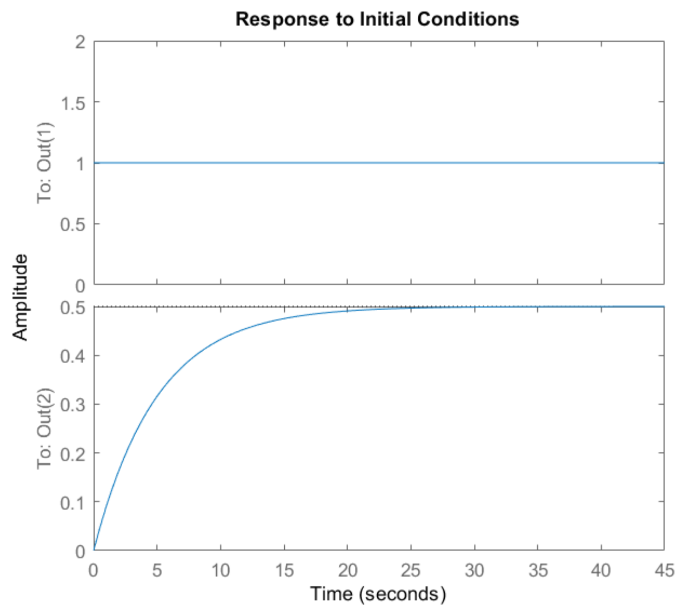

Figura 4.5: Respuesta del modelo de estado para el ejemplo 1

4.3.2 Ejemplo 2

- Considerando las siguientes entradas para el modelo:
  - Área recipiente 1 y 2 (A) = 300 $[m^2]$
  - Flujo inicial recipiente 1 (F_1) = 45 $[\frac{m^3}{s}]$
  - Nivel recipiente 1 (H_1) = 20 $[m]$
  - Nivel recipiente 2 (H_1) = 16 $[m]$

Se obtiene que las variables $dh1 = dx1 = 0$ y $dh2 = dx2 = -0{,}04$, mientras que en (4.27) y (4.28) se obtiene el modelo de estado en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}0033 & -0{,}0067 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \tag{4.27}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u \tag{4.28}$$

Finalmente en la Figura 4.6 se puede apreciar la respuesta del sistema para el ejemplo 2.

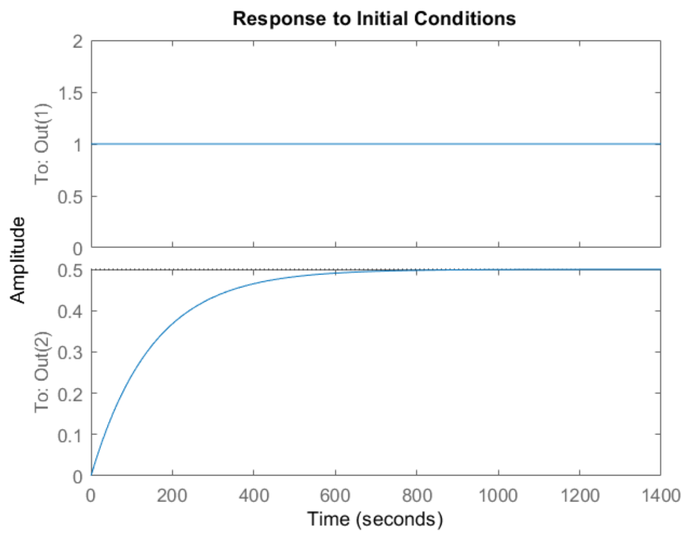

Figura 4.6: Respuesta del modelo de estado para el ejemplo 2

4.3.3 Ejemplo 3

- Considerando las siguientes entradas para el modelo:
  - Área recipiente 1 y 2 (A) = 5000 $[m^2]$
  - Flujo inicial recipiente 1 (F_1) = 400 $[\frac{m^3}{s}]$
  - Nivel recipiente 1 (H_1) = 1 $[m]$
  - Nivel recipiente 2 (H_1) = 1 $[m]$

Se obtiene que las variables $dh1 = dx1 = 0$ y $dh2 = dx2 = -2{,}0000 * e^{-04}$, mientras que en (4.29) y (4.30) se obtiene el modelo de estado en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}2 * 1{,}0 * e^{-03} & -0{,}0067 * 1{,}0 * e^{-03} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \tag{4.29}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u \tag{4.30}$$

Finalmente en la Figura 4.7 se puede apreciar la respuesta del sistema para el ejemplo 3.

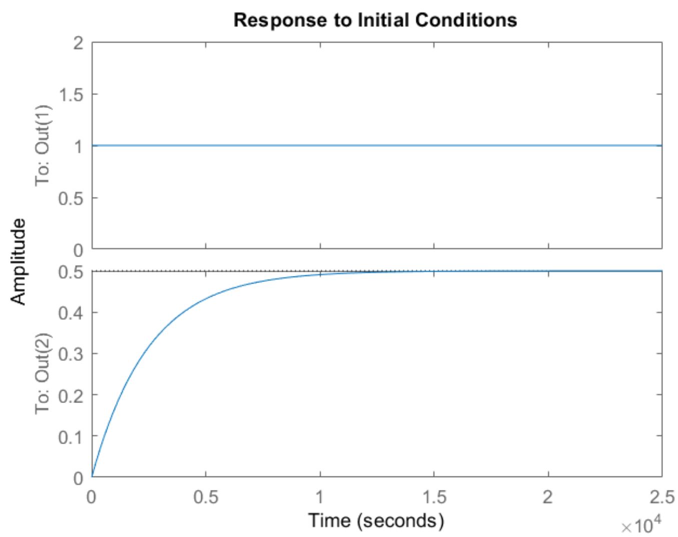

Figura 4.7: Respuesta del modelo de estado para el ejemplo 3

4.3.4 Ejemplo clase 17

- Considerando las siguientes entradas para el modelo:
  - Área recipiente 1 (A_1) = 2 $[m^2]$
  - Área recipiente 2 (A_2) = 4 $[m^2]$
  - Flujo inicial recipiente 1 (F_0) = 100 $[\frac{m^3}{s}]$
  - Nivel recipiente 1 (H_1) = 1 $[m]$
  - Nivel recipiente 2 (H_1) = 1 $[m]$

- R recipiente 1 (H_1) = 0.25 $[\frac{s}{m^2}]$
- R recipiente 2 (H_1) = 0.0625 $[\frac{s}{m^2}]$

Se obtiene que las variables $dh1 = dx1 = 64$ y $dh2 = dx2 = 2{,}6 - 2{,}0000 * e^{-04}$, mientras que en (4.31) y (4.32) se obtiene el modelo de estado en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2{,}0 & 8{,}0 \\ 1{,}0 & -0{,}8 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \tag{4.31}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u \tag{4.32}$$

Finalmente en la Figura 4.8 se puede apreciar la respuesta del sistema para el ejemplo de la clase 17.

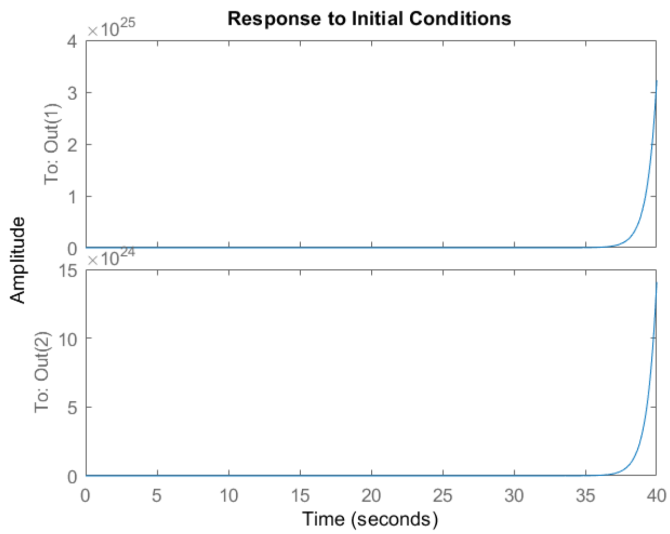

Figura 4.8: Respuesta del modelo de estado para el ejemplo de clase 17

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En esta experiencia a diferencia de otras, MATLAB no fue tan relevante, ya que gran parte del proceso para desarrollar los ejercicios propuestos se tuvieron que realizar de manera manual primero, y luego con eso se facilitaba la implementación en MATLAB. Aún así, haciendo uso de funciones como $ss()$ o $tf()$ fue posible generar modelos de estados y funciones de transferencia que permitían luego graficar los sistemas y sus respectivas respuestas.

En la primera parte de este laboratorio se pudo apreciar cómo era el proceso para pasar de una función de transferencia a un modelo de estado, como también su proceso inverso, es decir, pasar de un modelo de estado a una función de transferencia. Por intuición se podría llegar a creer que la dificultad para ambos procesos debería ser igual, pero la realidad es que para pasar de modelo de estado a función de transferencia el proceso es más complejo debido a que el modelo de estado utiliza matrices, por lo que los procesos como multiplicaciones, o incluso peor, la inversa que se debe realizar para obtener la función de transferencia aumentan más la dificultad de este procedimiento. Además como la función de transferencia que se entrega es la general del sistema, es necesario realizar un procedimiento adicional para separarlas en las funciones de transferencia que el sistema original poseía. Por otro lado, es importante mencionar que el sistema que se puede apreciar en la Figura 3.2 era un sistema estable, ya que se puede ver como a medida que avanza el tiempo este tiende al 0.

Con respecto a la segunda parte, en un principio resultó algo complejo de entender lo que se pedía, pero más en el ámbito de MATLAB que en lo teórico o manual. Aún así, se logró obtener un programa que fuese capaz de representar el modelo de estado para este problema, tomando en consideración todas sus variables y parámetros, pero también considerando el modelo fenomenológico que por detrás lo componía. Es interesante notar que en el primer caso la acción del primer recipiente es prácticamente nula, ya que lo que entra es exactamente lo que sale, dejando así la variabilidad del sistema dispuesta sólo en el segundo recipiente. En las respuestas obtenidas para este sistema considerando diferentes valores de variables y parámetros, es posible observar que si bien la forma de las curvas de salida es idéntica, los tiempos y las magnitudes que afectan al sistema difieren en base al área del recipiente. Por otro lado, en el ejemplo presentado en clases, dado que existen las válvulas y lo que entra y sale del recipiente 1 no es exactamente igual, el comportamiento del sistema es muy diferente, ya que como se puede ver en la Figura 4.8 ambas salidas del sistema (F1 y F2) se disparan. Esto se puede entender como que hasta que los estanques no lleguen a su nivel máximo de agua no habría problema, pero alrededor del segundo 38 estos llegan a ese nivel y comienzan a desbordarse, llevando al sistema a una inestabilidad.

Finalmente, se puede decir que se cumplieron a cabalidad los objetivos planteados al comienzo de este informe, ya que haciendo uso de MATLAB y los modelos de estado, se realizaron varios programas que permitieron conocer y entender cómo reaccionan a lo largo del tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

Acuña, G. (2020a). Mys clase 17. [Online] http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F266664%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FMyS%20Clase%2017.pdf.

Acuña, G. (2020b). Mys clase 18. [Online] http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F266707%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FMyS%20Clase%2018.pdf.

Acuña, G. and Mellis, D. (2020). Modelación y simulación laboratorio 3. [Online] http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F203008%2Fmod_resource%2Fcontent%2F8%2FLab_3_MyS_2020_1.pdf.

MathWorks (S.F.). initial. [Online] https://es.mathworks.com/help/control/ref/initial.html.

Requez, J. P. (2017). ¿qué es matlab? [Online] http://acapmi.com/blog/2017/09/18/que-es-matlab/.

Rodríguez, J. L. (2003). Modelos en el espacio de estado. [Online] http://www.unet.edu.ve/~jlrodriguezp/modss01.pdf.