MED - Tema introductorio 1: Álgebra matricial - Teoría

Este tema es un repaso al álgebra matricial para el modelado estadístico de datos, no incluido en el material original.

Rango de una matriz

El rango de una matriz, escrito como $rg(A)$, es el número máximo de columnas (o filas) linealmente independientes de la matriz A.

Autovalor

Sea una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Un número $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *autovalor* de A si existe un vector no nulo $v \neq 0$ tal que

$$A\,v = \lambda\,v.$$

Ese vector v se llama autovector asociado a λ.

Dándole una interpretación intuitiva, al aplicar la matriz A al vector v no cambia su dirección, solo lo escala.

El factor de escala es λ:

- $\lambda = 0$: el vector se aplasta.
- $\lambda = 1$: el vector queda igual.
- $\lambda > 1$: se amplifica.
- $\lambda < 0$: cambia de sentido.

Propiedades de las matrices

Una matriz es cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *idempotente* si:

$$A^2 = A$$

Los autovalores de una matriz idempotente solo pueden ser:

$$\lambda = \{0, 1\}$$

Esto se deduce de:

$$A\,v = \lambda\,v \Rightarrow A^2 = \lambda^2 v = Av = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}.$$

La *traza* de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se define como

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Es decir, la traza es la suma de los elementos de la diagonal principal.

Propiedades fundamentales de la traza:

- Linealidad

$$tr\ (A + B) = tr\ (A) + tr\ (B), \quad tr\ (cA) = c\, tr\ (A)$$

- Invarianza cíclica:

$$tr\ (AB) = tr\ (BA)$$

(si los productos están bien definidos).

- La traza es igual a la suma de los autovalores (contando multiplicidades).

Para cualquier matriz cuadrada A:

$$tr(A) = \sum(\text{autovalores de A})$$

Si A es idempotente, la relación entre idempotencia y traza es:

$$tr(A) = rg(A)$$

Una *matriz simétrica* es aquella que cumple que $M = M^T\, M$.

Matriz identidad

La *matriz identidad* I es una matriz cuadrada de orden n que tiene unos en la diagonal principal y ceros en el resto de posiciones:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$