







**Wyznaczanie drzewa najkrótszych
dróg w grafie skierowanym za pomocą**

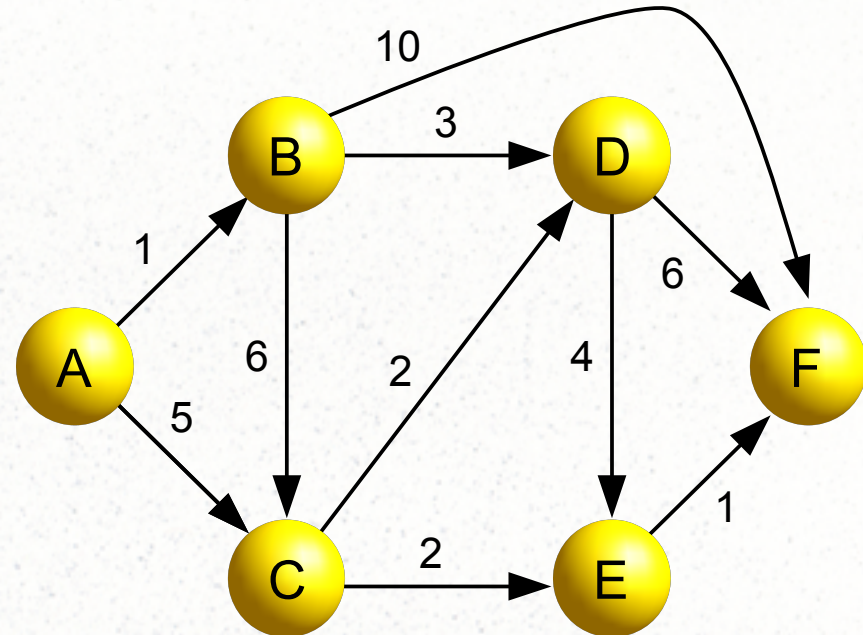
algorytmu Dijkstry

Zadanie:

Wyznaczyć drzewo najkrótszych dróg z wierzchołka A do wszystkich pozostałych wierzchołków.

Oznaczenia:

-  – wierzchołek o wadze nie ustalonej (choć być może już odwiedzony)
-  – wierzchołek aktywny (o wadze ustalonej w bieżącym kroku)
-  – wierzchołek o wadze ustalonej w poprzednich krokach
-  – krawędź wychodząca z wierzchołka aktywnego
-  – krawędź należąca do drzewa najkrótszych dróg
-  – pozostałe krawędzie



Krok 1

Wagi wierzchołków:

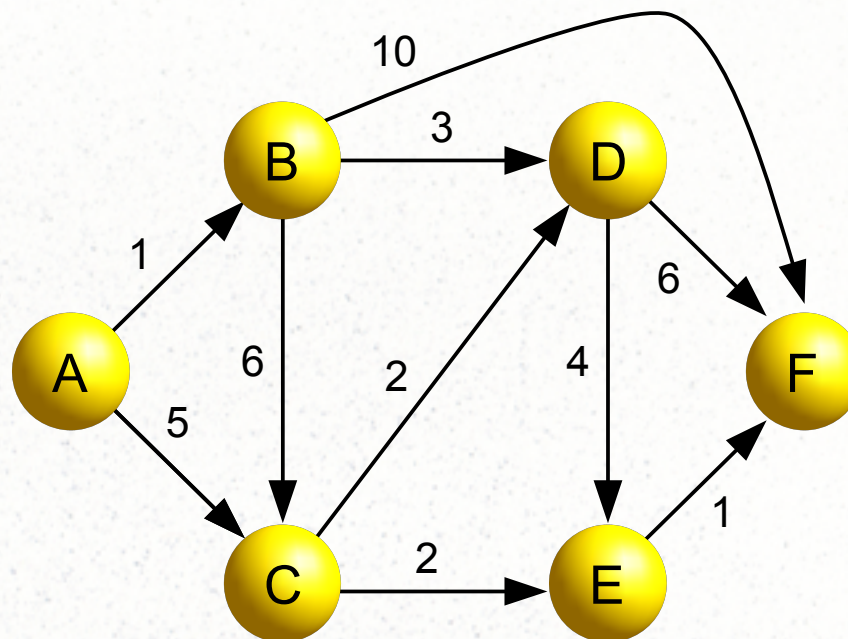
$$w(A) = 0$$

$$w(x) = \infty, \quad x = \{B, \dots, F\}$$

Minimalną wagę tymczasową ma A.

Jego wagę ustalamy.

Będzie on wierzchołkiem aktywnym w kolejnym kroku.



UWAGA! Puste miejsca w tabeli

odpowiadają wagom nieskończonym.

Dla przejrzystości nie wypisujemy ich w dalszych porównaniach.

Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B						
C						
D						
E						
F						

Krok 2

Wyznaczamy tymczasowe wagi wszystkich wierzchołków, o ile nie są już ustalone:

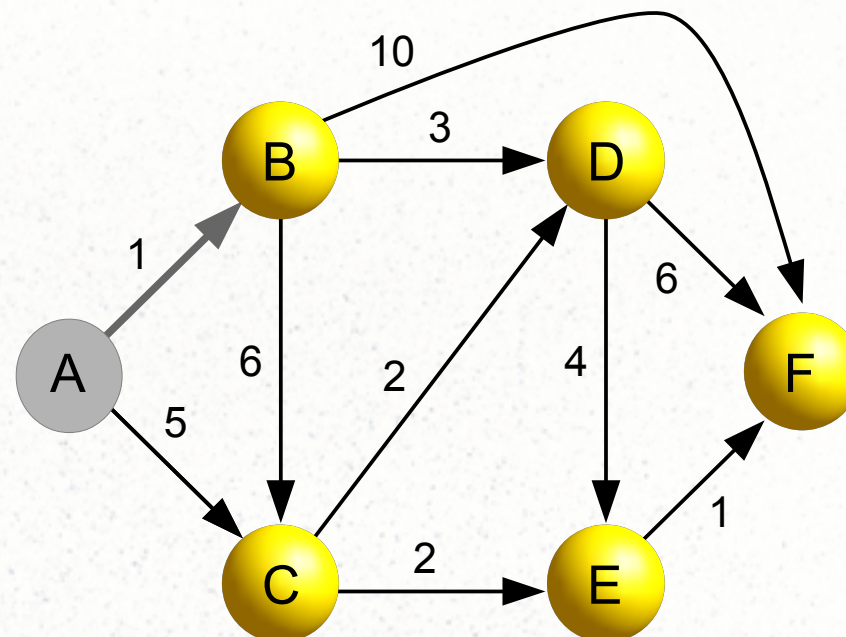
$$w(B) = w(A) + 1 = 1$$

$$w(C) = w(A) + 5 = 5$$

Wierzchołek o minimalnej wadze tymczasowej:

$$\arg \min(w(B), w(C)) = B$$

Będzie on wierzchołkiem aktywnym w następnym kroku. Krawędź prowadzącą do B włączamy do drzewa najkrótszych dróg.



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5				
D						
E						
F						

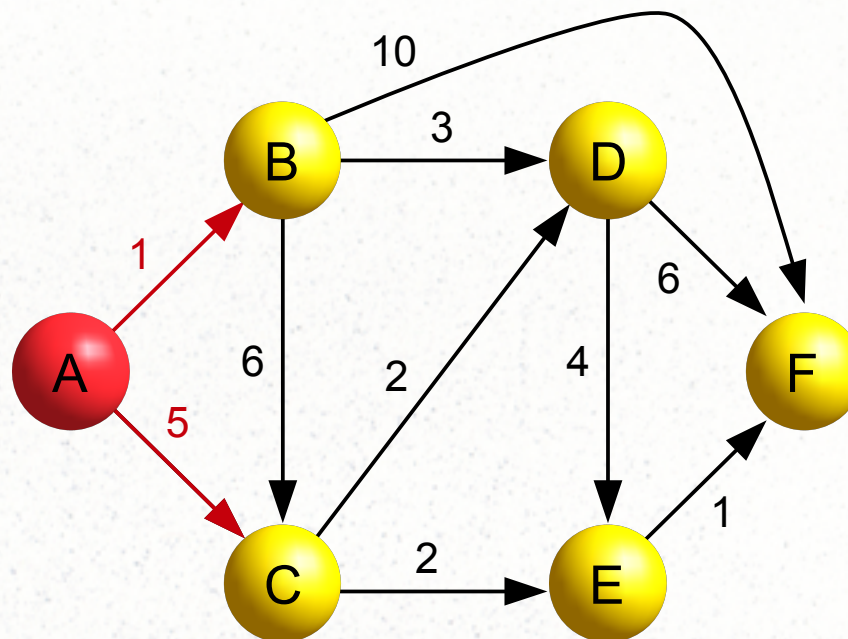
Krok 2

Wyznaczamy tymczasowe wagi wszystkich wierzchołków, o ile nie są już ustalone:

$$w(B) = w(A) + 1 = 1$$

$$w(C) = w(A) + 5 = 5$$

(pozostałe – nieskończone)



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5				
D						
E						
F						

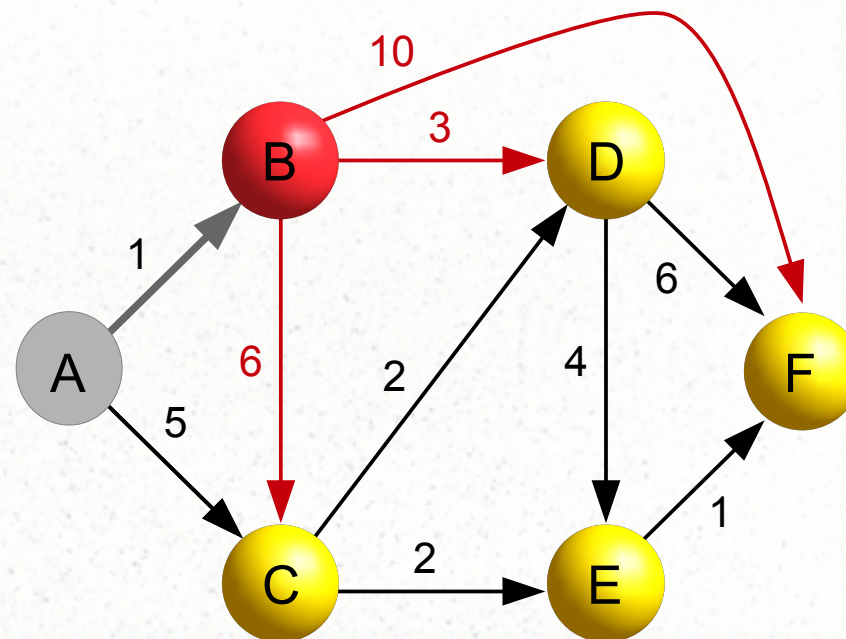
Krok 3

$$w(D) = w(B) + 3 = 4$$

$$w(F) = w(B) + 10 = 11$$

$$w(C) = \min(5, w(B) + 6) \\ = \min(5, 7) = 5$$

(pozostaje waga z poprzedniego kroku)



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5			
D			4			
E						
F			11			

Krok 3

$$w(D) = w(B) + 3 = 4$$

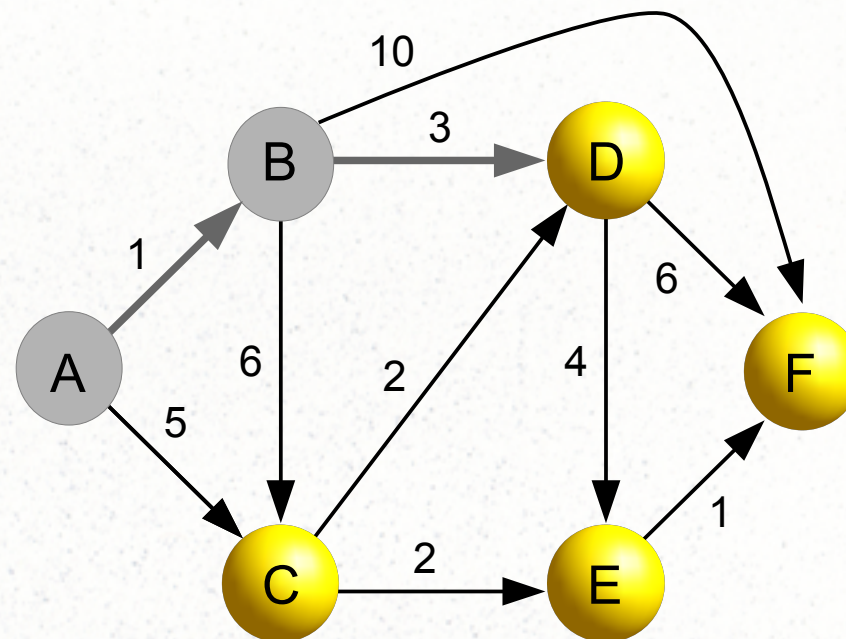
$$w(F) = w(B) + 10 = 11$$

$$w(C) = \min(5, w(B) + 6) \\ = \min(5, 7) = 5$$

(pozostaje waga z poprzedniego kroku)

Wierzchołek aktywny w nast. kroku:

$$\arg \min(w(C), w(D), w(F)) = D$$



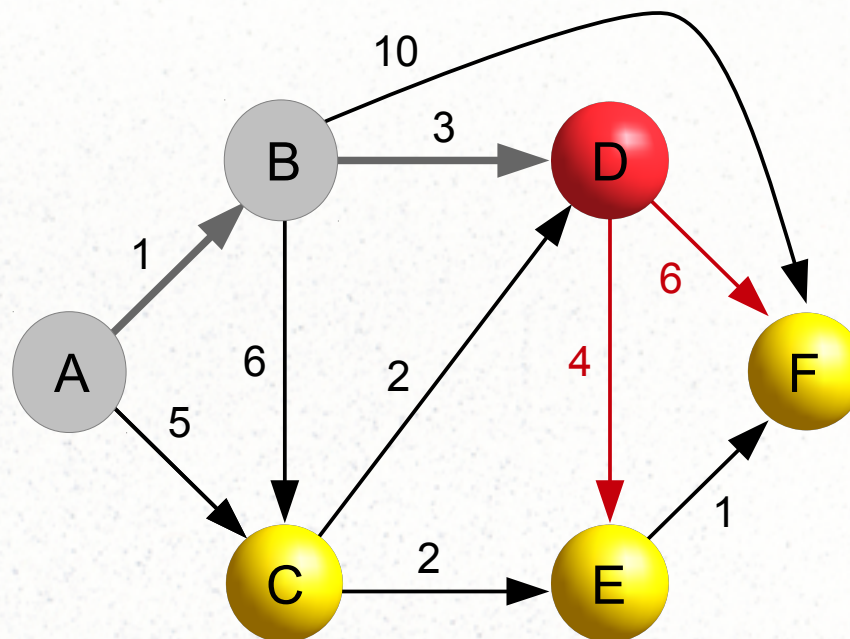
Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5			
D			4			
E						
F			11			

Krok 4

$$w(E) = w(D) + 4 = 8$$

$$w(F) = \min(11, w(D) + 6) \\ = \min(11, 10) = 10$$

$$w(C) = 5 \text{ (z poprzedniego kroku)}$$



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5	5		
D			4			
E				8		
F			11	10		

Krok 4

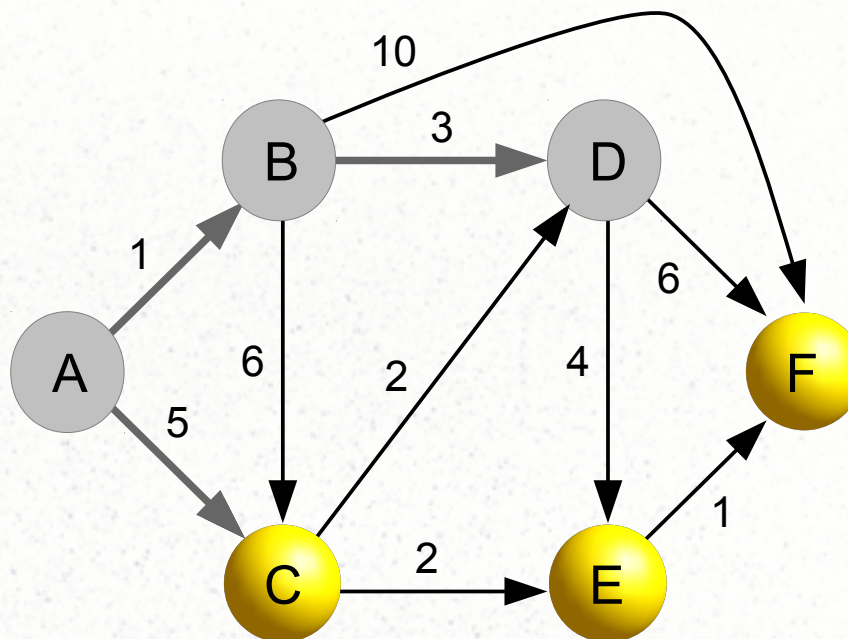
$$w(E) = w(D) + 4 = 8$$

$$w(F) = \min(11, w(D) + 6) \\ = \min(11, 10) = 10$$

$$w(C) = 5 \text{ (z poprzedniego kroku)}$$

Wierzchołek aktywny w nast. kroku:

$$\arg \min(w(C), w(E), w(F)) = C$$



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5	5		
D			4			
E				8		
F			11	10		

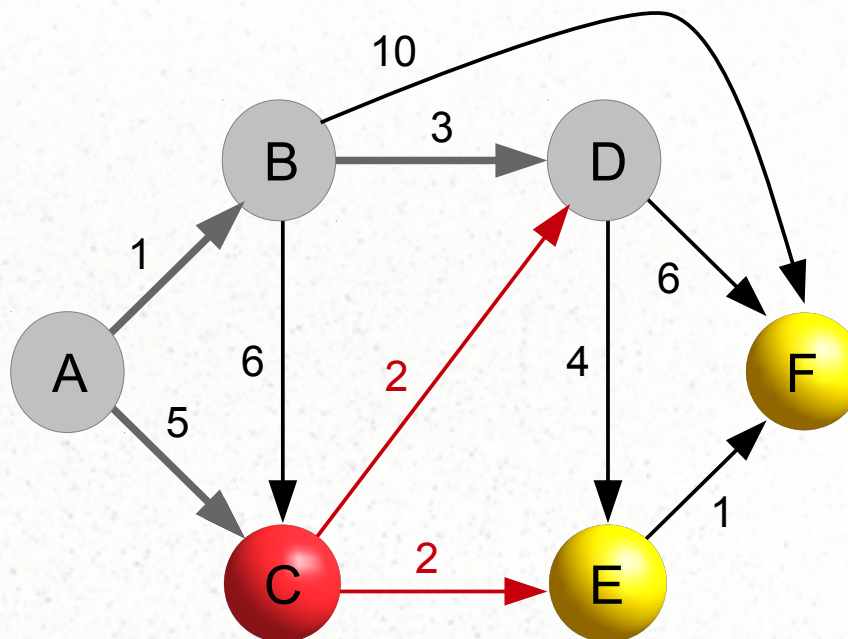
Krok 5

$$w(E) = \min(8, w(C)+2) \\ = \min(8, 7) = 7$$

$w(D)$ – już ustalona, więc
nie bierzemy
pod uwagę!

$$w(F) = 10$$

(z poprzedniego kroku)



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5	5		
D			4			
E				8	7	
F			11	10	10	

Krok 5

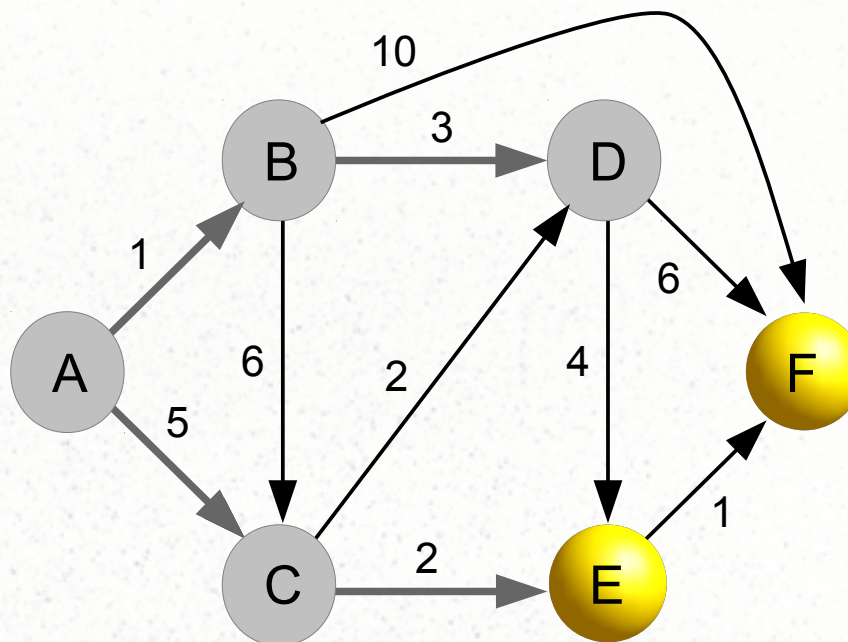
$$\begin{aligned} w(E) &= \min(8, w(C)+2) \\ &= \min(8, 7) = 7 \end{aligned}$$

$w(D)$ – już ustalona!

$w(F) = 10$ (z poprzedniego kroku)

Wierzchołek aktywny w nast. kroku:

$$\arg \min(w(E), w(F)) = E$$

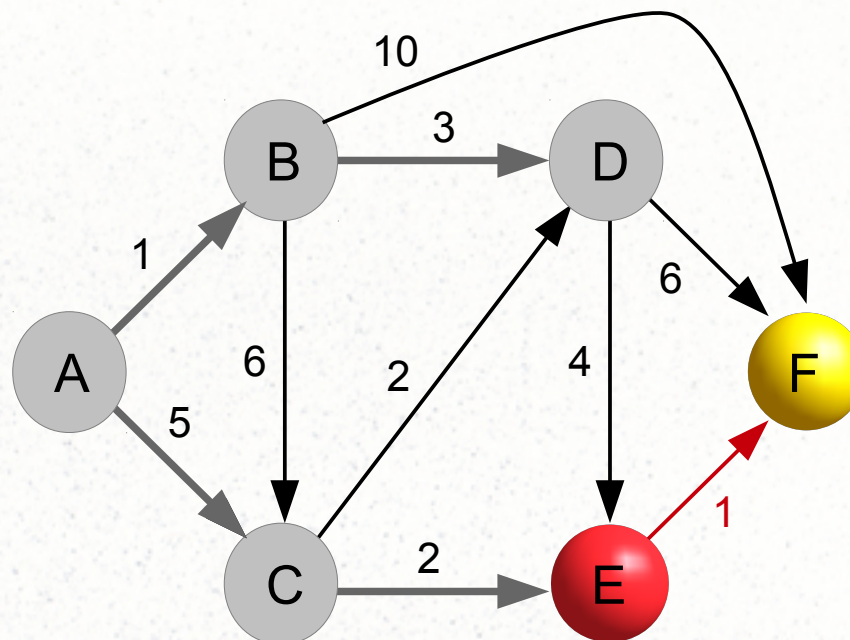


Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5	5		
D			4			
E				8	7	
F			11	10	10	

Krok 6

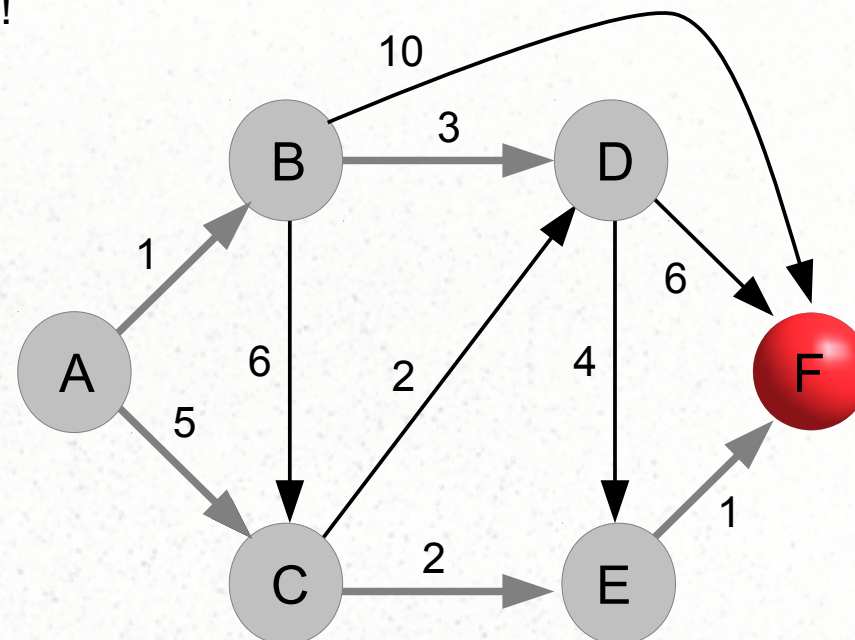
$$\begin{aligned}w(F) &= \min(10, w(E)+1) \\ &= \min(10, 7) = 7\end{aligned}$$

Wierzchołek aktywny w nast. kroku – *F*



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5	5		
D			4			
E				8	7	
F			11	10	10	8

Wszystkie wierzchołki mają ustalone wagi!



Krok	1	2	3	4	5	6
A	0					
B		1				
C		5	5	5		
D			4			
E				8	7	
F			11	10	10	8