

Metody Obliczeniowe w Mikroelektronice i Fotonice

Piotr Mikołajczyk

Treść zadania 2:

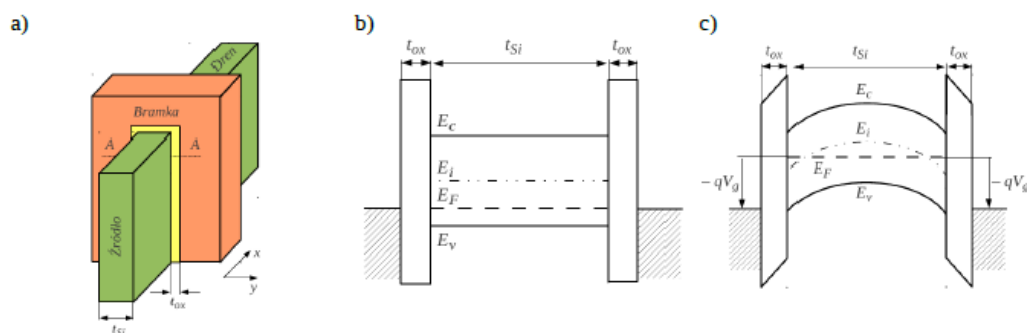
Dany jest dwubramkowy krzemowy tranzystor MOS jak na Rys. 2a. Strukturę pasmową w przekroju A–A łączącym lewą i prawą stronę bramki ilustrują Rys. 2b i c. Tranzystor ma następujące parametry:

- koncentracja domieszki akceptorowej w obszarze aktywnym $N_A = 2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$,
- grubość tlenku bramkowego $t_{ox} = 1,3 \text{ nm}$,
- grubość obszaru aktywnego (krzemu) $t_{Si} = 16 \text{ nm}$,
- bramka metalowa (brak zagięcia pasm); różnica prac wyjścia bramka-podłoże $\Phi_{MS} = 0$.

Proszę stworzyć jednowymiarowy opis tej struktury w tym przekroju. Korzystając z metody różnic skończonych i algorytmu Newtona wyznaczyć rozkład potencjału elektrostatycznego $\psi(y)$ w półprzewodniku dla napięcia bramki $V_g = 0,8 \text{ V}$. W sprawozdaniu podać przyjęte przybliżenie początkowe wektora $\psi(y)$ – warto poeksperymentować z kilkoma. Następnie:

- Wykreślić na wspólnym rysunku rozkład potencjału $\psi(y)$ w krzemie dla kilku – niekoniecznie kolejnych – iteracji metody Newtona.
- Zaproponować miarę pozwalającą szacować na bieżąco odległość rozwiązania w danej iteracji od rozwiązania „dokładnego”. Wykreślić wartość tej miary w funkcji liczby iteracji.

Na tej podstawie zaproponować kryterium zatrzymania algorytmu Newtona. Mile widziane jest porównanie wpływu przybliżenia początkowego $\psi(y)$ na kształt uzyskanej krzywej.



Rys. 1. Dwubramkowy tranzystor MOS analizowany w Zadaniu 2 (a), jego struktura pasmowa w przekroju A–A dla $V_g = 0$ (b) oraz dla $V_g > 0$ (c)

Stałe fizyczne i inne parametry:

- ładunek elementarny $q = 1,602177335 \times 10^{-19} \text{ C}$,
- przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m}$,
- przenikalność elektryczna dwutlenku krzemu $\epsilon_{ox} = 3,9 \epsilon_0$,
- przenikalność elektryczna krzemu $\epsilon_{Si} = 11,7 \epsilon_0$,
- stała Boltzmanna $k_B = 1,380658 \times 10^{-23} \text{ J/K}$,
- koncentracja samoistna nośników w krzemie $n_i = 1 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$,
- temperatura $T = 300 \text{ K}$.

W celu wykonania zadania , zaimplementowano w programie MATLAB kod zamieszczony w pliku „Załącznik 1.rar” Ma on za zadanie wykonywać metodami iteracyjnymi, różnic skończonych i algorytmu Newtona rozkład potencjału elektrycznego w półprzewodniku dla napięcia bramki $V_g = 0.8V$ dla danej na rysunku 1 struktury.

Metoda różnic skończonych służy do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. W metodzie tej poszukuje się rozwiązania poprzez zastąpienie równań różniczkowych, równaniami różnicowymi. Rozwiązanie równań różnicowych daje przybliżone wartości we wcześniej zdefiniowanych punktach siatkowych zwanych węzłami. Rozwiązanie przeprowadza się na siatce różnicowej dzięki czemu zagadnienie brzegowe sprowadza się do układu równań algebraicznych, który można łatwiej rozwiązać niż samo równanie różniczkowe cząstkowe metodą iteracyjną.

Metoda Newtona-Raphsona jest algorytmem linearyzacyjnym. Polega on na przybliżeniu dowolnego punktu funkcji $f(x)$, funkcją liniową, powstałą z rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Taylora. Powstała funkcja liniowa dobrze przybliża funkcję w pobliżu zadanego punktu x . W metodzie Newtona konstruowana jest styczna do funkcji $f(x)$ i gdy styczna przetnie oś x , znajdujący się punkt poszukiwany funkcji.

W celu obliczenia rozkładu potencjału wykorzystano z dyskretyzowane równanie Poissona – równanie różniczkowe drugiego rzędu. Rozwiązanie go polega na wykorzystaniu metody różnic skończonych wraz z metodą Newtona-Raphsona. Jeśli przenikalność elektryczna jest w przybliżeniu stała, to poszukiwanie rozwiązania dla i -tego węzła siatki można zapisać równaniem przedstawionym poniżej.

$$\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1} = -\frac{qh^2}{\epsilon}(p(\psi_i) - n(\psi_i) + N_D - N_A)$$

Równanie 1 – z dyskretyzowane równanie Poissona dla i -tego węzła siatki

Równanie to jest równaniem z jedną niewiadomą. Można go zapisać w sposób macierzowy który pokazano na rysunku 2. Przy takim zapisie powstaje macierz L , która jest macierzą współczynników stojących przy węzłach siatkowych związanych z ψ . Biorą się one z trójpunktowej aproksymacji pochodnych w siatce, dla siatki jednorodnej. Macierz P , zawierającą macierz kolumnową równań Poissona, oraz macierz ψ , która jest rozkładem potencjału w badanej strukturze oraz jednocześnie wektorem kolumnowym niewiadomych. Znaki zapytania są warunkami brzegowymi które zdefiniowano w procesie iteracyjnym. Są one nie zmienne przez cały proces iteracji.

Na rysunku 3 przedstawiono macierzową postać zapisu algorytmu Newtona. Przekształconą z macierzy z rysunku 2. Warunki brzegowe zostały zdefiniowane odpowiednio z ciągłości składowej normalnej wektora indukcji elektrostatycznej oraz dla zerowania pochodnej pola elektrycznego na granicy bramki i obszaru półprzewodnika (warunki brzegowe Dirichleta i von Neumanna) wynoszące dla macierzy J :

$$\begin{aligned} J(1,1) &= 1 + (\epsilon_{ps_si} \cdot \text{tox} / (\epsilon_{ps_ox} \cdot h)); \\ J(1,2) &= -(\epsilon_{ps_si} \cdot \text{tox} / (\epsilon_{ps_ox} \cdot h)) \\ J(\text{end},\text{end}) &= -1; \\ J(\text{end},\text{end} - 1) &= 1; \end{aligned}$$

Gdzie:

h – krok siatki , eps_si – przenikalność elektryczna krzemu, eps_ox – przenikalność elektryczna tlenku krzemu, tox – szerokość dielektryka.

Oraz dla macierzy b :

$$b(1) = Vg;$$

$$b(\text{end}) = 0;$$

$$\underbrace{\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}_{L\psi} = - \underbrace{\frac{qh^2}{\varepsilon}(p(\psi_i) - n(\psi_i) + N_D - N_A)}_{P(\psi_i)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}}_{\psi} = \underbrace{\begin{bmatrix} ? \\ P(\psi_2) \\ P(\psi_3) \\ P(\psi_4) \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix}}_{P(\psi)}$$

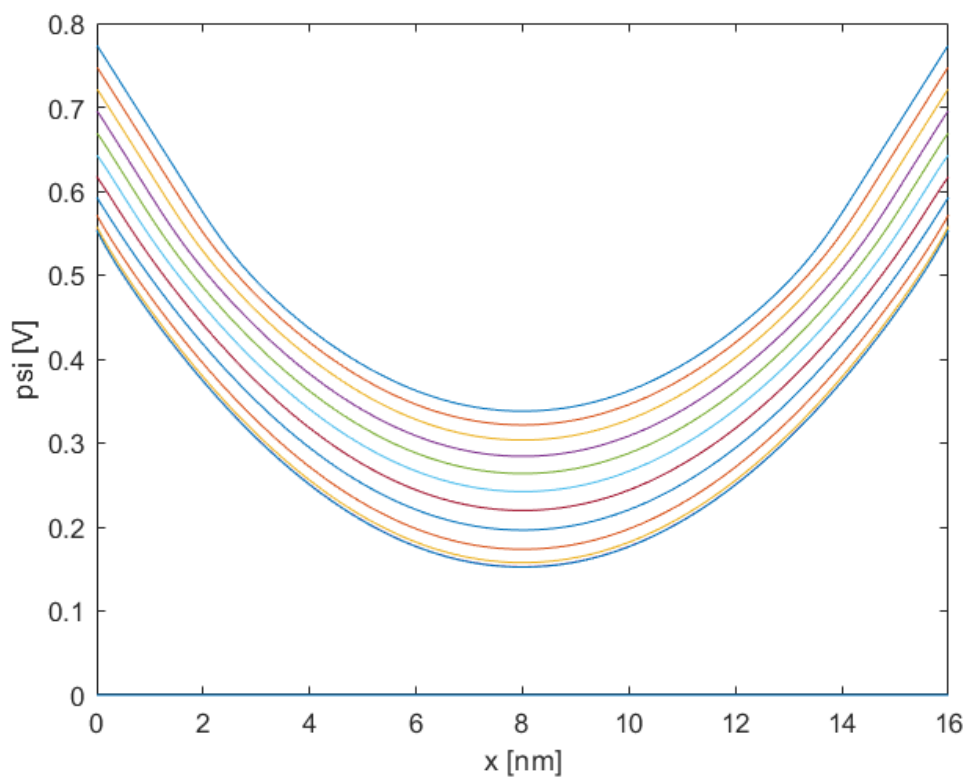
Rysunek 2 – z dyskretyzowane równanie Poissona w i -tym węźle siatki – postać macierzowa

$$\underbrace{(\mathbf{L} - P'^{(n)})}_{\mathbf{J}^{(n)}} \psi^{(n+1)} = \underbrace{P^{(n)} - P'^{(n)}\psi^{(n)}}_{\mathbf{b}^{(n)}}$$

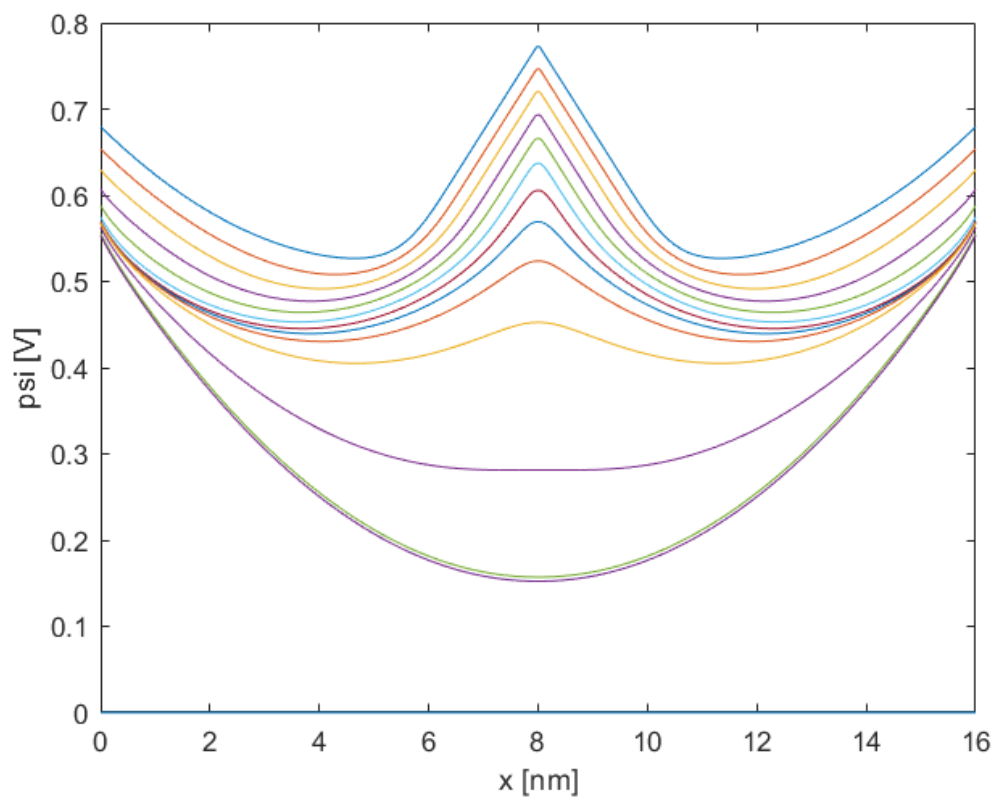
$$\underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (-2 - P'_2) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & (-2 - P'_3) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (-2 - P'_4) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{(n)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}}_{\psi^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} ? \\ P_2 - P'_2\psi_2 \\ P_3 - P'_3\psi_3 \\ P_4 - P'_4\psi_4 \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^{(n)}}$$

Rysunek 3 – Przekształcone z dyskretyzowanego równania Poissona z rysunku 2 na postać algorytmu Newtona

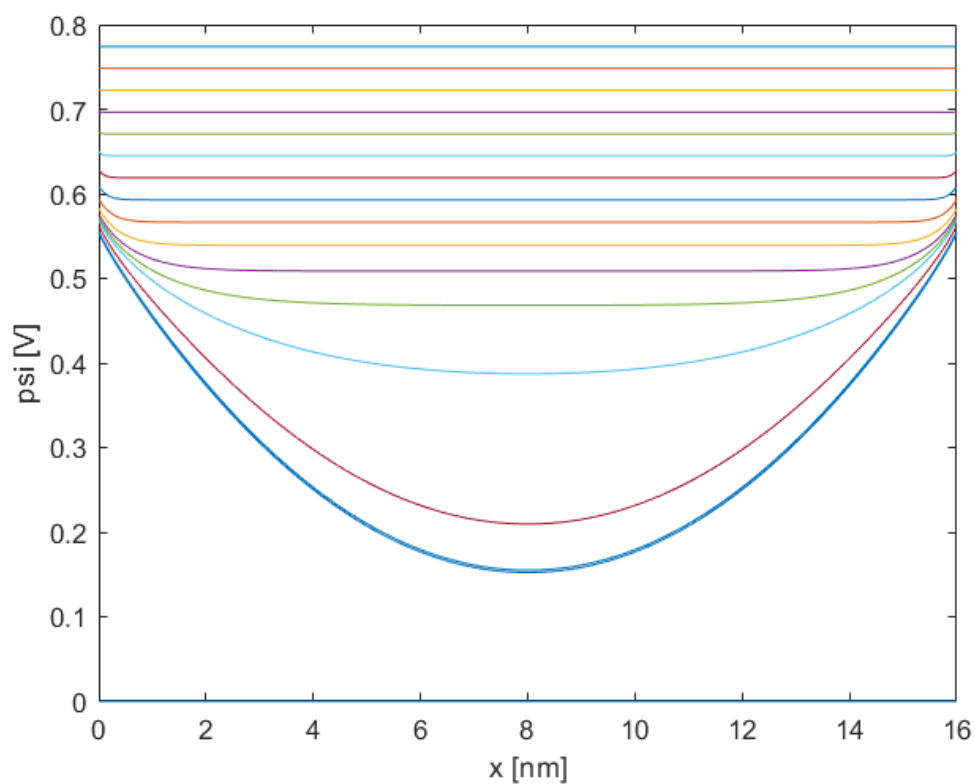
Poniżej przedstawiono wyniki potencjału dla różnych przybliżeń początkowych ψ :



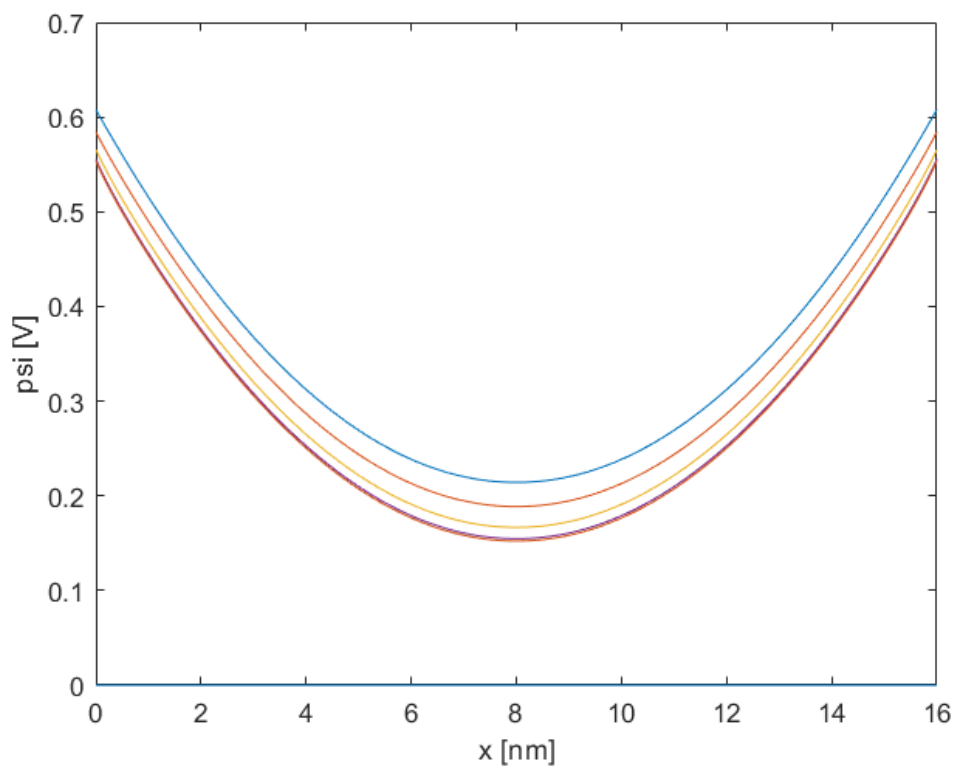
Rysunek 4 – pierwsze przybliżenie ψ : wektor przybliżony liniową zmianą w zakresie od V_g do 0V.



Rysunek 5 – pierwsze przybliżenie ψ : wektor przybliżony liniową zmianą w zakresie od 0V do V_g .

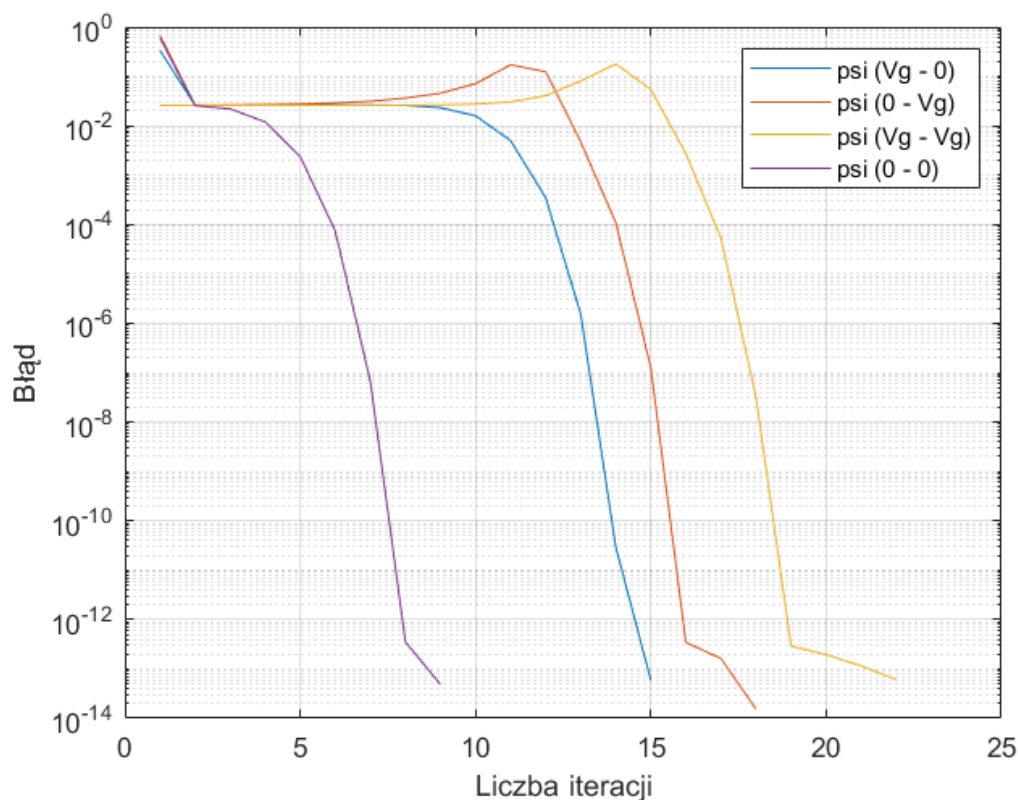


Rysunek 6 – pierwsze przybliżenie ψ : wektor przybliżony V_g w całym zakresie.



Rysunek 7 – pierwsze przybliżenie ψ : wektor przybliżony $0V$ w całym zakresie

Jako miarę pozwalającą szacować na bieżąco odległość rozwiązania w danej iteracji od rozwiązania przyjętego za dokładne, zaproponowano wartość bezwzględną maksymalnej różnicy wartości potencjałów, wyznaczonej w iteracji poprzedniej oraz iteracji aktualnej. Wartości te zapisano dla kolejnych iteracji, a następnie wykreślono na rysunku 8, dla różnych przybliżeń, korespondujących z rysunkami 4-7. Rysowanie poszczególnych wykresów zakończono w każdym przypadku po zbieżności funkcji do zadanej dokładności (w tym wypadku $1e-13$).



Rysunek 8 – Wykres błędów

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do uznani osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu MOBI została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Piotr Mikołajczyk

272018