【解析几何】齐次化联立

Rhonsua*

October 2024

*Neated by Pomelorin.

目录

1 摘要

齐次化联立可能是课改之后唯二甚至唯一高考中可以正常使用而不至于被扣分的技巧。

凭心而论，这是因为这个技巧不够高级，甚至有时用起来是在自掘坟墓，所以才能在高考中无所顾忌的使用，也正是因为这个技巧不够高级，因此**能用齐次化联立做的题目，用普通联立一定做得出，用普通联立做不出的题目，那么用齐次化联立也做不出**。

当然，齐次化联立有它的好处，好处就是联立方程好写好整理，斜率积斜率和的表达形式简单，换句话说，齐次化联立从解题思想上，仍是传统联立那一套。**但是运算上，70% 左右的情况会比传统联立简单一些——有相当多的题目使用这个技巧会让计算变得更复杂，这是绝对不能忽视的，因此掌握之后不可滥用**。

齐次化联立的核心思想只有一个，就是将题目中涉及的斜率直接变成一个**一元二次方程的两个根**，这样直接根据**韦达定理**，我们就可以得到**斜率和、斜率积的表达式**。

2 例题 1

先用一个例题引入最简单模式的齐次化联立：

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$，O 为坐标原点，$A, B \in C$，$OA \perp OB$，证明：直线 AB 过定点。

传统联立：

由题意知，AB 不过原点。设 $AB: x = my+n$，点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$。

$$\begin{cases} x = my + n \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 = 2pm, y_1 y_2 = -2pn$$

因为 $OA \perp OB$，

$$k_1k_2 = \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = \frac{y_1y_2}{(my_1+n)(my_2+n)} = \frac{-2pn}{-2pnm^2+2pnm^2+n^2} = -1$$

即 $n = 2p$。

所以 AB 恒过点 $(2p, 0)$。

齐次化联立：

由题意知，AB 不过原点。设 $AB : mx + ny = 1$，点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$。

（注意该种设法是配合齐次化联立，该设法类似截距式方程，同样不过原点，但 m, n 可以为 0）

$$\begin{cases} mx + ny = 1 \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

$$y^2 = 2px \cdot (mx + ny)$$

整理得：

$$y^2 - 2pnxy - 2pmx^2 = 0$$

因为 AB 不过原点，$x \neq 0$。则：

$$\frac{y^2}{x^2} - 2pn\frac{y}{x} - 2pm = 0$$

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 2pn, \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -2pm$$

$$k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -2pm = -1$$

故 $2pm=1$。易知当 $x=2p$ 时，$y=0$。所以 AB 恒过点 $(2p,0)$。

我们基本可以看出，设直线方程 $mx+ny=1$ 的目的是方便升次，常数乘 $(mx+ny)^2$，一次项乘 $mx+ny$，二次项不变，便可以得到关于两个斜率和积的关系。

3 例题 2

上面一题还没看出计算优势。来看下面一道：

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。以原点为圆心，以椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+2=0$ 相切。

- 求椭圆 C 的标准方程；
- 设 $A(-2,0)$，过点 $R(1,0)$ 作与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点，连接 AM,AN，分别交直线 $x=3$ 于 P,Q 两点。若直线 PR,QR 的斜率分别为 k_1,k_2。

试问 k_1k_2 是否为定值？若是，求出 k_1k_2；若不是，请说明理由。

第一问答案是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$。

齐次化联立：

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$。首先我们观察到 k_{AM}，k_{AN} 的形式为 $\dfrac{y}{x+2}$，并不是 $\dfrac{y}{x}$ 的形式。

这里用一种方法：平移坐标系。

将原坐标系向左平移两个单位，得到的椭圆方程为：$\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，点 $R(3,0)$。

设直线 $MN:x+ny=3$。

$$\begin{cases}x+ny=3\\ \dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$$

二次项不变，一次项乘 $\dfrac{1}{3}(x+ny)$，常数项乘 $\dfrac{1}{9}(x+ny)^2$。

得 $-x^2+6y^2-4nxy=0$。
即 $6\cdot\frac{y^2}{x^2}-4n\cdot\frac{y}{x}-1=0$，则有 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=k_{AM}k_{AN}=-\frac{1}{6}$。
又 $k_1k_2=\frac{y_P\cdot y_Q}{4}$，$\frac{y_P}{5}=\frac{y_1}{x_1}$，$\frac{y_Q}{5}=\frac{y_2}{x_2}$。
所以 $k_1\cdot k_2=\frac{25y_1y_2}{4x_1x_2}=-\frac{25}{24}$。

3.1 传统联立法

设直线 $MN: x=my+1, M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$。

$$\begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$$

消去 x 得：$(m^2+2)y^2+2my-3=0$。
得到 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+2}$。
所以 $k_{AM}=\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{y_P}{5}$，$k_{AN}=\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_Q}{5}$。
所以

$$\begin{aligned} k_1\cdot k_2 &= \frac{y_P}{2}\cdot\frac{y_Q}{2} \\ &= \frac{25y_1y_2}{4(x_1+2)(x_2+2)} \\ &= \frac{25}{4}\cdot\frac{y_1y_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \\ &= \frac{25}{4}\cdot\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9} \\ &= \frac{25}{4}\cdot\frac{-\frac{3}{m^2+2}}{-\frac{3m^2}{m^2+2}-\frac{6m^2}{m^2+2}+9} \\ &= -\frac{25}{24} \end{aligned}$$

计算难度高下立判了。

3.2 平移坐标系

简化计算很大一部分来自这个步骤，该方法和平移所有图像效果相同。

若将原点平移到点 (m, n) 位置，则需将坐标系向右平移 m 个单位（或向左平移 $-m$ 个单位），向上平移 n 个单位（或向下平移 $-n$ 个单位）。

则原坐标系的方程变换：

$$x \leftarrow x + m$$

$$y \leftarrow y + n$$

如

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

变为

$$\frac{(x+m)^2}{a^2} + \frac{(y+n)^2}{b^2} = 1$$