EA611 – Circuitos II

Capítulo 5
Componentes simétricas

Carlos A. Castro

DSE/FEEC/UNICAMP

- Circuito equilibrado – pode-se analisar apenas uma das fases (equivalente monofásico)

  As grandezas das demais fases são obtidas considerando as defasagens de $\pm 120^\circ$

- Circuito não equilibrado – é necessário considerar todas as fases conjuntamente, o que torna a análise mais complexa e trabalhosa

- Desequilíbrios em sistemas trifásicos podem ser causados por:
  - Geradores não equilibrados
  - Cargas não equilibradas
  - Linhas de transmissão não equilibradas
  - Faltas (curtos-circuitos)

- Em 1918 C.L. Fortescue[1] publicou o artigo:

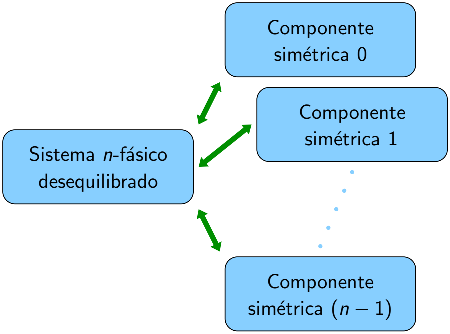
"Method of Symmetrical Co-Ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks", AIEE Transactions 37 (II): 1027-1140 (1918).

Apresentado à 34a. Convenção Anual do AIEE (American Institute of Electrical Engineers), Atlantic City, NJ, 28 de julho de 1918.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Legeyt_Fortescue.

- Um sistema desequilibrado de n fasores correlacionados pode ser decomposto em n sistemas de fasores equilibrados – componentes simétricos dos fasores originais

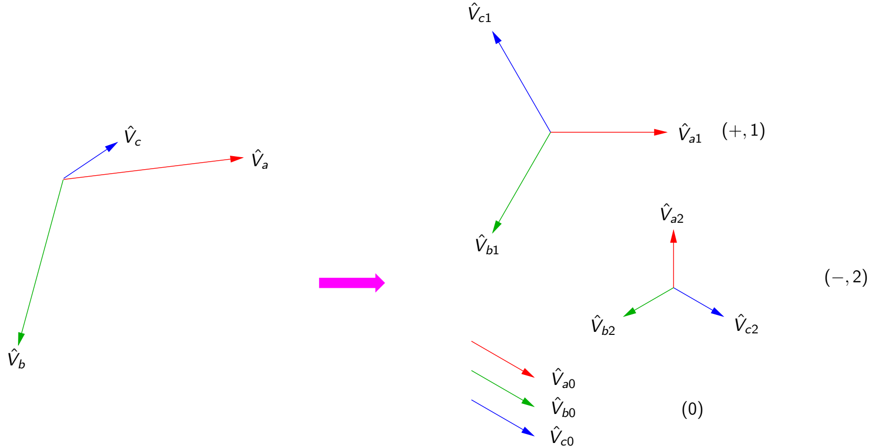
- Os n fasores de cada conjunto de componentes são iguais em magnitude e os ângulos entre os fasores adjacentes do conjunto são iguais



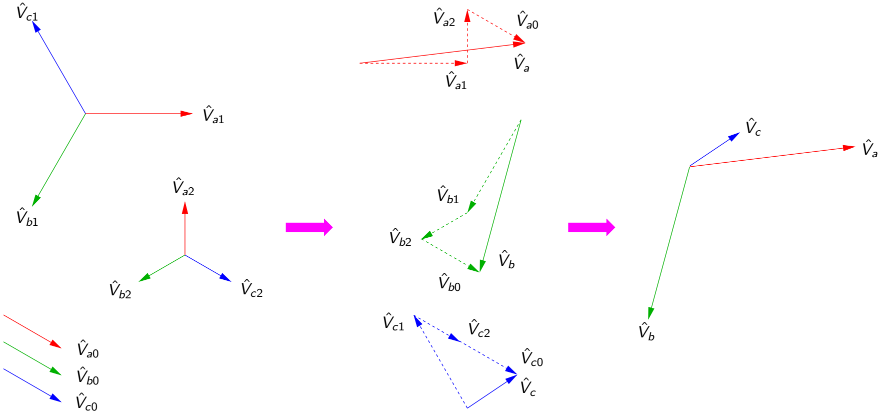
- Qualquer que seja o motivo do desequilíbrio de um sistema, a análise por meio de componentes simétricas requer a representação de todos os elementos do circuito por meio de seus equivalentes em componentes simétricas
- A transformação empregando componentes simétricas levará a um circuito onde as sequências são desacopladas (como em um circuito equilibrado, onde as fases são desacopladas), permitindo a análise isolada de cada sequência
- Um sistema trifásico desequilibrado pode ser decomposto em três sistemas equilibrados e desacoplados (independentes), formado por componentes de sequência positiva (+), negativa (-) e zero (0)

- Sistema de sequência positiva $(+, 1)$:
  - Três fasores equilibrados (mesmo módulo e defasados de 120°)
  - Sequência de fases igual ao do sistema original (ABC ou ACB)
- Sistema de sequência negativa (-, 2):
  - Três fasores equilibrados (mesmo módulo e defasados de 120°)
  - Sequência de fases inversa ao do sistema original (respectivamente ACB ou ABC)
- Sistema de sequência zero (0):
  - Três fasores de mesmo módulo e com os mesmos ângulos de fase
  - Defasagem entre fasores iguais a 0

- Considere as tensões trifásicas, sequência de fases ABC (fictícias):



Decomposição em componentes simétricas



- A relação entre as tensões e as componentes de sequência é:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}_{a0} \\ \hat{V}_{b0} \\ \hat{V}_{c0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{V}_{a1} \\ \hat{V}_{b1} \\ \hat{V}_{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{V}_{a2} \\ \hat{V}_{b2} \\ \hat{V}_{c2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{V}_{a0} \\ \hat{V}_{a0} \\ \hat{V}_{a0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{V}_{a1} \\ \hat{V}_{a1} \angle -120^\circ \\ \hat{V}_{a1} \angle 120^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{V}_{a2} \\ \hat{V}_{a2} \angle 120^\circ \\ \hat{V}_{a2} \angle -120^\circ \end{bmatrix}$$

$$= \hat{V}_{a0} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \hat{V}_{a1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \hat{V}_{a2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

em que $\alpha = 1 \angle 120^\circ$ é o operador de sequência

- As tensões podem também ser representadas por:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \hat{V}_{b0} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \hat{V}_{b1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} + \hat{V}_{b2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \hat{V}_{c0} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \hat{V}_{c1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} + \hat{V}_{c2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Notação usual de componentes simétricas em função da fase A:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \hat{V}_{a0} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \hat{V}_{a1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \hat{V}_{a2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$= \hat{V}_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \hat{V}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \hat{V}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{V}_0 + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 \\ \hat{V}_0 + \alpha^2 \, \hat{V}_1 + \alpha \, \hat{V}_2 \\ \hat{V}_0 + \alpha \, \hat{V}_1 + \alpha^2 \, \hat{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix}$$

em que **T** é a matriz de transformação de componentes simétricas ou matriz de Transformada de Fortescue

$$\hat{V}^{abc} = \mathbf{T} \cdot \hat{V}^{012}$$

$$\hat{V}^{012} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \hat{V}^{abc}$$

em que:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

- As transformações são válidas também para correntes:

$$\hat{I}^{abc} = \mathbf{T} \cdot \hat{I}^{012}$$

$$\hat{I}^{012} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \hat{I}^{abc}$$

- Considere o sistema de tensão equilibrado (simétrico):

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\,\angle\theta^\circ \\ V\,\angle\theta - 120^\circ \\ V\,\angle\theta + 120^\circ \end{bmatrix} = V\,\angle\theta^\circ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \hat{V}_A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{V}_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{ seq. positiva}$$

Exercício

Verifique que:

$$\begin{aligned} \hat{I}_A &= 1{,}60\,\angle 25^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_B &= 1{,}00\,\angle 180^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_C &= 0{,}90\,\angle 132^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{I}_A^0 &= 0{,}45\,\angle 96{,}45^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_A^1 &= 0{,}94\,\angle -0{,}05^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_A^2 &= 0{,}60\,\angle 22{,}32^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

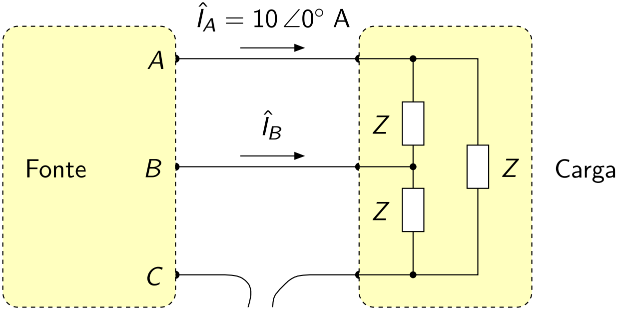
Exercício

Verifique que:

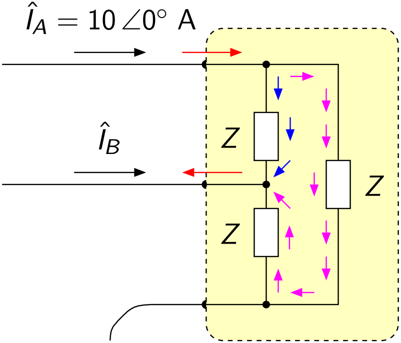
$$\begin{aligned} \hat{I}_A^0 &= 0{,}60\,\angle 90^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_A^1 &= 1{,}00\,\angle 30{,}05^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_A^2 &= 0{,}80\,\angle -30^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{I}_A &= 1{,}71\,\angle 24{,}21^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_B &= 0{,}40\,\angle 89{,}88^\circ \text{ A} \\ \hat{I}_C &= 1{,}71\,\angle 155{,}85^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Exemplo

A carga trifásica mostrada abaixo tem uma de suas fases interrompida. Determine os valores dos fasores de corrente de cada componente simétrica.



Como a fase C foi interrompida, $\hat{I}_C = 0$. Com relação à fase B:



$$\rightarrow \qquad \hat{I}_B = -\hat{I}_A = 10 \angle 180^\circ \text{ A}$$

Correntes de linha:

$$\hat{I}^{abc} = \begin{bmatrix} 10\,\angle 0^\circ \\ 10\,\angle 180^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Correntes de sequência:

$$\hat{I}^{012} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \hat{I}^{abc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5{,}78\,\angle -30^\circ \\ 5{,}78\,\angle 30^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

Note que as correntes de sequência referem-se à fase A, ou seja:

$$\hat{I}_A^0 = 0$$
$$\hat{I}_A^1 = 5{,}78\,\angle -30^\circ \text{ A}$$
$$\hat{I}_A^2 = 5{,}78\,\angle 30^\circ \text{ A}$$

As correntes de sequência então são:

- Sequência zero:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_A^0 \\ \hat{I}_B^0 \\ \hat{I}_C^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ A}$$

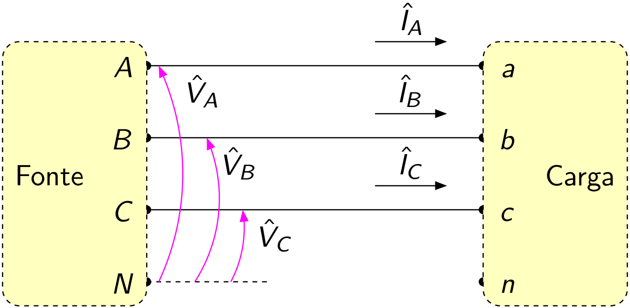
- Sequência positiva:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_A^1 \\ \hat{I}_B^1 \\ \hat{I}_C^1 \end{bmatrix} = \hat{I}_A^1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}78\,\angle -30^\circ \\ 5{,}78\,\angle -150^\circ \\ 5{,}78\,\angle 90^\circ \end{bmatrix} \text{ A}$$

- Sequência negativa:

$$\left[\begin{array}{c} \hat{I}_A^2 \\ \hat{I}_B^2 \\ \hat{I}_C^2 \end{array}\right] = \hat{I}_A^2 \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 5{,}78\,\angle 30^\circ \\ 5{,}78\,\angle 150^\circ \\ 5{,}78\,\angle -90^\circ \end{array}\right] \text{A}$$

- Com relação a impedâncias:



$$\hat{V}^{abc} = \mathbf{Z}^{abc} \cdot \hat{I}^{abc}$$

$$\hat{V}^{abc} = \mathbf{Z}^{abc} \cdot \hat{I}^{abc}$$

$$\mathbf{T} \cdot \hat{V}^{012} = \mathbf{Z}^{abc} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{I}^{012} \qquad \text{(premultiplicando por } \mathbf{T}^{-1}\text{)}$$

$$\underbrace{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}}_{\mathbf{I}} \cdot \hat{V}^{012} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{Z}^{abc} \cdot \mathbf{T}}_{\mathbf{Z}^{012}} \cdot \hat{I}^{012}$$

$$\hat{V}^{012} = \mathbf{Z}^{012} \cdot \hat{I}^{012}$$

$$\mathbf{Z}^{012} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{Z}^{abc} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{Z}^{abc} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}^{012} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

- Considere uma carga para a qual seu modelo corresponda a uma matriz impedância equilibrada (simétrica):

$$\mathbf{Z}^{abc} = \begin{bmatrix} Z_p & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_p & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_p \end{bmatrix}$$

então:

$$\hat{V}^{abc} = \mathbf{Z}^{abc} \cdot \hat{I}^{abc}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \hat{V}_a = Z_p \, \hat{I}_a + Z_m \, \hat{I}_b + Z_m \, \hat{I}_c \\ \hat{V}_b = Z_m \, \hat{I}_a + Z_p \, \hat{I}_b + Z_m \, \hat{I}_c \\ \hat{V}_c = Z_m \, \hat{I}_a + Z_m \, \hat{I}_b + Z_p \, \hat{I}_c \end{cases}$$

ou seja, as grandezas das fases são dependentes umas das outras

Agora:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}^{012} &= \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{Z}^{abc} \cdot \mathbf{T} \\
&= \begin{bmatrix} (Z_p + 2\,Z_m) & 0 & 0 \\ 0 & (Z_p - Z_m) & 0 \\ 0 & 0 & (Z_p - Z_m) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Z^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ análogo a três sistemas monofásicos desacoplados

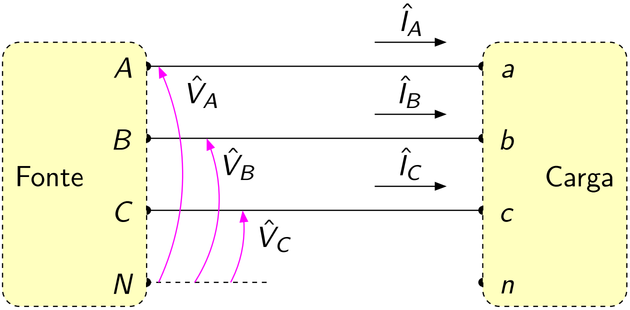
Exercício

Um sistema trifásico do tipo gerador-linha-carga tem as características descritas a seguir. Calcule as correntes na linha em componentes de fase (ABC) e componentes simétricas (012) usando $\hat{V}^{012} = \mathbf{Z}^{012} \cdot \hat{I}^{012}$.

- Gerador com tensões (de fase) assimétricas: $\begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13{,}8\,\angle 0^\circ \\ 13{,}8\,\angle -90^\circ \\ 13{,}8\,\angle 90^\circ \end{bmatrix}$ kV
- Linha equilibrada com impedâncias próprias de $(3{,}0 + j\,5{,}6)\ \Omega$ e impedâncias mútuas de $j\,2{,}60\ \Omega$
- Carga equilibrada conectada em Y cuja impedância é de $j\,50\ \Omega/\text{fase}$

Resp.: $248{,}87\,\angle -86{,}89^\circ$ A, $260{,}74\,\angle -179{,}20^\circ$ A, $259{,}65\,\angle 5{,}69^\circ$ A

- Considere novamente o circuito:



- A potência complexa absorvida pela carga será:

$$S_{3\phi} = \hat{V}_A \cdot \hat{I}_A^* + \hat{V}_B \cdot \hat{I}_B^* + \hat{V}_C \cdot \hat{I}_C^*$$

ou

$$S_{3\phi} = \left[\begin{array}{ccc} \hat{I}_A^* & \hat{I}_B^* & \hat{I}_C^* \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{array} \right] = \left(\boldsymbol{I}_{abc}^* \right)^T \cdot \boldsymbol{V}_{abc}$$

- Com relação às correntes tem-se:

$$\boldsymbol{I}_{abc} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{I}_{012}$$

$$\boldsymbol{I}^*_{abc} = \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{I}^*_{012}$$

$$\left(\boldsymbol{I}^*_{abc}\right)^T = \left(\boldsymbol{I}^*_{012}\right)^T \cdot \left(\mathbf{T}^*\right)^T$$

$$\left(\boldsymbol{I}^*_{abc}\right)^T = \left(\boldsymbol{I}^*_{012}\right)^T \cdot \mathbf{T}^*$$

$$\left(\boldsymbol{I}^*_{abc}\right)^T = \left(\boldsymbol{I}^*_{012}\right)^T \cdot 3 \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

- Voltando à equação da potência trifásica:

$$
\begin{aligned}
S_{3\phi} &= \left(\boldsymbol{I}_{abc}^{*}\right)^{T} \cdot \boldsymbol{V}_{abc} \\
&= 3 \cdot \left(\boldsymbol{I}_{012}^{*}\right)^{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{V}_{012}
\end{aligned}
$$

$$
S_{3\phi} = 3 \cdot \left(\boldsymbol{I}_{012}^{*}\right)^{T} \cdot \boldsymbol{V}_{012}
$$

$$
S_{3\phi} = 3 \cdot \left(\hat{V}_0 \cdot \hat{I}_0^{*} + \hat{V}_1 \cdot \hat{I}_1^{*} + \hat{V}_2 \cdot \hat{I}_2^{*}\right)
$$

- Retomando a equação básica da potência trifásica:

$$S_{3\phi} = \hat{V}_A \cdot \hat{I}_A^* + \hat{V}_B \cdot \hat{I}_B^* + \hat{V}_C \cdot \hat{I}_C^*$$

- Considerando os valores de base para o sistema por unidade:

$V_{\ell b}$	tensão de linha de base
$V_{fb} = V_{\ell b}/\sqrt{3}$	tensão de fase de base
I_b	corrente de linha de base
$S_b = \sqrt{3} \cdot V_{\ell b} \cdot I_b$	potência trifásica de base

- A potência trifásica em pu fica:

$$\frac{S_{3\phi}}{S_b} = \frac{\hat{V}_A \cdot \hat{I}_A^* + \hat{V}_B \cdot \hat{I}_B^* + \hat{V}_C \cdot \hat{I}_C^*}{\sqrt{3} \cdot V_{\ell b} \cdot I_b}$$

$$s_{3\phi} = \frac{\hat{V}_A \cdot \hat{I}_A^* + \hat{V}_B \cdot \hat{I}_B^* + \hat{V}_C \cdot \hat{I}_C^*}{\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\ V_{fb}\right) \cdot I_b}$$

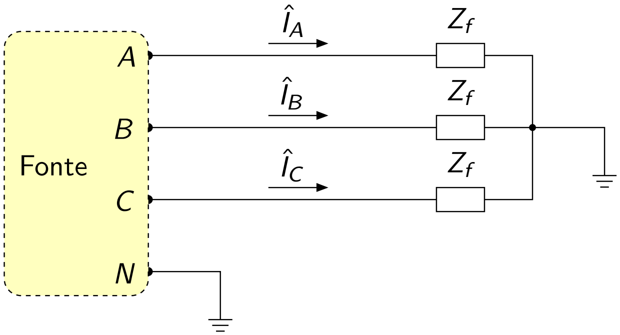
$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\hat{v}_A \cdot \hat{\imath}_A^* + \hat{v}_B \cdot \hat{\imath}_B^* + \hat{v}_C \cdot \hat{\imath}_C^*\right] \quad \text{aplicando a transformação \ldots}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[3 \cdot \left(\hat{v}_0 \cdot \hat{\imath}_0^* + \hat{v}_1 \cdot \hat{\imath}_1^* + \hat{v}_2 \cdot \hat{\imath}_2^*\right)\right]$$

$$s_{3\phi} = \left(\hat{v}_0 \cdot \hat{\imath}_0^* + \hat{v}_1 \cdot \hat{\imath}_1^* + \hat{v}_2 \cdot \hat{\imath}_2^*\right)$$

ou seja, não há o fator 3 quando as potências são representadas em por unidade

- Considere uma carga trifásica equilibrada com o neutro solidamente aterrado, alimentada por uma fonte trifásica equilibrada.



- Tensões de fase:

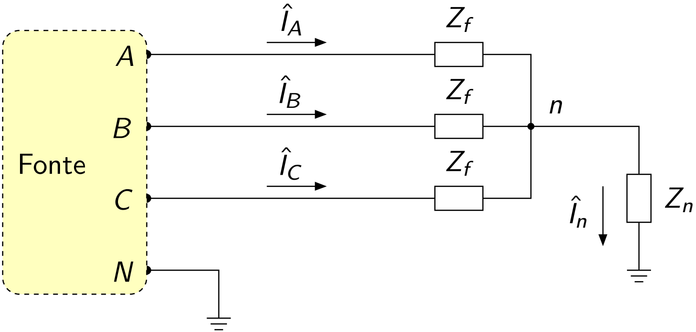
$$\hat{V}_A = Z_f \cdot \hat{I}_A$$
$$\hat{V}_B = Z_f \cdot \hat{I}_B$$
$$\hat{V}_C = Z_f \cdot \hat{I}_C$$

- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f & 0 & 0 \\ 0 & Z_f & 0 \\ 0 & 0 & Z_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_A \\ \hat{I}_B \\ \hat{I}_C \end{bmatrix}$$

- A matriz de impedância diagonal indica que que a análise do circuito pode ser feita por fase de forma independente (desacoplada)

- Considere agora o circuito a seguir, que tem uma impedância de neutro



- Note que agora há uma diferença de potencial entre o ponto neutro da carga n e o ponto neutro da fonte N (aterrado)

- Tensões de fase:

$$\hat{V}_A = Z_f \cdot \hat{I}_A + Z_n \cdot \hat{I}_n$$
$$\hat{V}_B = Z_f \cdot \hat{I}_B + Z_n \cdot \hat{I}_n$$
$$\hat{V}_C = Z_f \cdot \hat{I}_C + Z_n \cdot \hat{I}_n$$

e

$$\hat{I}_n = \hat{I}_A + \hat{I}_B + \hat{I}_C$$

- Logo, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_f + Z_n & Z_n & Z_n \\ Z_n & Z_f + Z_n & Z_n \\ Z_n & Z_n & Z_f + Z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_A \\ \hat{I}_B \\ \hat{I}_C \end{bmatrix}$$

- Neste caso, a análise do circuito não pode ser feita de forma desacoplada $\rightarrow$ matriz cheia

- Passando do sistema de fases para componentes simétricas:

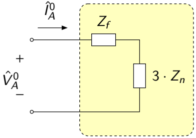
$$\begin{aligned}
\hat{V}^{abc} &= \mathbf{Z}^{abc} \cdot \hat{I}^{abc} \\
\mathbf{T} \cdot \hat{V}^{012} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}^{012} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{I}^{012} \\
\mathbf{T} \cdot \hat{V}^{012} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}^{012} \cdot \hat{I}^{012} \qquad (\cdot \mathbf{T}^{-1}) \\
\hat{V}^{012} &= \mathbf{Z}^{012} \cdot \hat{I}^{012}
\end{aligned}$$

em que:

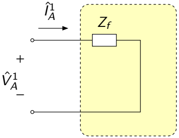
$$\mathbf{Z}^{012} = \begin{bmatrix} Z_f + 3 \cdot Z_n & 0 & 0 \\ 0 & Z_f & 0 \\ 0 & 0 & Z_f \end{bmatrix}$$

- Os circuitos em componentes de sequência estão desacoplados (matriz diagonal), podendo ser analisados independentemente

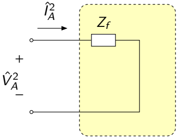
- Os circuitos por sequência são:



$Z_0 = Z_f + 3 \cdot Z_n$



$Z_1 = Z_f$



$Z_2 = Z_f$

- Resumo das diferentes situações de conexão de cargas em Y:

  - Carga equilibrada em Y, com impedância de aterramento Z_n:

$$Z_0 = Z_f + 3 \cdot Z_n \qquad Z_1 = Z_2 = Z_f$$

  - Carga equilibrada em Y, solidamente aterrada $(Z_n = 0)$:

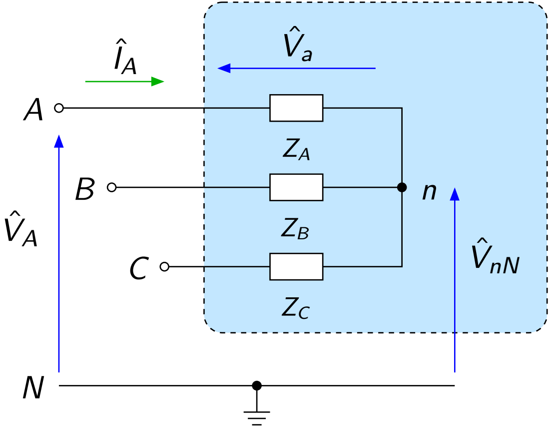
$$Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_f$$

  - Carga equilibrada em Y, com neutro isolado $(Z_n = \infty)$:

$$Z_0 = \infty \qquad Z_1 = Z_2 = Z_f$$

$$\rightarrow \quad \hat{I}^0 = 0$$

- Considere agora uma carga em Y com neutro isolado (sem aterramento, ou $Z_n = \infty$):



- Analisando a fase A:

$$\hat{V}_a = \hat{V}_A - \hat{V}_{nN}$$

- Considerando as três fases:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{V}_{nN} \\ \hat{V}_{nN} \\ \hat{V}_{nN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_A & 0 & 0 \\ 0 & Z_B & 0 \\ 0 & 0 & Z_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_A \\ \hat{I}_B \\ \hat{I}_C \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{I}_A + \hat{I}_B + \hat{I}_C = 0$$

- Considerando que a carga seja equilibrada ($Z_A = Z_B = Z_C = Z$):

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{V}_{nN} \\ \hat{V}_{nN} \\ \hat{V}_{nN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_A \\ \hat{I}_B \\ \hat{I}_C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}'_0 \\ \hat{V}'_1 \\ \hat{V}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} - \hat{V}_{nN} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix}$$

- Premultiplicando por $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}'_0 \\ \hat{V}'_1 \\ \hat{V}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} - \hat{V}_{nN} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\hat{V}^{012}\right)' = \hat{V}^{012} - \hat{V}_{nN} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \hat{I}^{012}$$

- Logo:

$$\hat{V}_{nN} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{V}^{012} - \mathbf{Z} \cdot \hat{I}^{012}$$

$$\hat{V}_{nN} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \cdot \left(\hat{V}^{012} - \mathbf{Z} \cdot \hat{I}^{012} \right)$$

- Como $\hat{I}_0 = 0$ (neutro isolado):

$$\hat{V}_{nN} = \hat{V}_0$$

Exercício

Uma carga em estrela com neutro isolado da terra tem impedâncias de fase iguais a $8 + j\,6\ \Omega$ e é alimentada por tensões trifásicas desequilibradas:

$$\hat{V}^{abc} = \begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210\,\angle 0^\circ \\ 210\,\angle -90^\circ \\ 210\,\angle 90^\circ \end{bmatrix} \text{ V}$$

Calcule as correntes de linha, a tensão de deslocamento de neutro e as tensões sobre cada impedância, realizando os cálculos com as componentes de fase e componentes simétricas.

Resp.: $14\,\angle -36{,}87^\circ$ A ; $22{,}14\,\angle -145{,}3^\circ$ A ; $22{,}14\,\angle 71{,}57^\circ$ A ; $70\,\angle 0^\circ$ V ; $140\,\angle 0^\circ$ V ; $221{,}36\,\angle -108{,}43^\circ$ V ; $221{,}36\,\angle 108{,}43^\circ$ V

Exemplo

Um sistema elétrico alimenta uma carga equilibrada em Y com impedância de aterramento através de uma linha de transmissão de 100 km. Calcule a tensão na carga sob as seguintes condições:

- Frequência do sistema: $f = 60$ Hz
- Parâmetros da carga por fase: $R = 750\ \Omega$, $L = 363$ mH
- Resistência de aterramento da carga: $R_n = 100\ \Omega$

- Tensões na fonte:

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_A &= 298{,}675\,\angle 0^\circ \text{ kV} \\
\hat{V}_B &= 283{,}807\,\angle -118{,}25^\circ \text{ kV} \\
\hat{V}_C &= 283{,}807\,\angle 118{,}25^\circ \text{ kV}
\end{aligned}
$$

- Parâmetros da linha de transmissão:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0{,}3 + j\,2{,}5\ \Omega/\text{km} \\
z_1 &= 0{,}03 + j\,0{,}4\ \Omega/\text{km} \\
z_2 &= z_1
\end{aligned}
$$

Tensões de sequência na fonte:

$$\hat{V}^{012} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}_A \\ \hat{V}_B \\ \hat{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}0 \\ 288{,}675 \\ 0{,}0 \end{bmatrix} \text{ kV}$$

Matriz de sequência da carga:

$$\mathbf{Z}_c^{012} = \begin{bmatrix} 1050 + j\,136{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 750 + j\,136{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 750 + j\,136{,}9 \end{bmatrix} \Omega$$

Matriz de sequência da linha:

$$\mathbf{Z}_\ell^{012} = \begin{bmatrix} 30 + j\,250 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + j\,40 & 0 \\ 0 & 0 & 3 + j\,40 \end{bmatrix} \Omega$$

Impedância total vista pela fonte:

$$\mathbf{Z}_T^{012} = \begin{bmatrix} 1080 + j\,386{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 753 + j\,176{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 753 + j\,176{,}9 \end{bmatrix} \Omega$$

Correntes de sequência fornecidas pela fonte:

$$\hat{I}^{012} = \left(Z_T^{012}\right)^{-1} \cdot \hat{V}^{012} = \begin{bmatrix} 8{,}82 \angle -19{,}7^\circ \\ 373{,}22 \angle -13{,}2^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \text{A}$$

Tensões de sequência na carga:

$$\hat{V}_c^{012} = Z_c^{012} \cdot \hat{I}^{012} = \begin{bmatrix} 9{,}23 \angle -12{,}3^\circ \\ 284{,}53 \angle -2{,}9^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \text{kV}$$

Tensões de fase na carga:

$$\hat{V}_c^{abc} = \mathbf{T} \cdot \hat{V}^{012} = \begin{bmatrix} 293{,}64 \angle -3{,}2^\circ \\ 281{,}42 \angle -121{,}1^\circ \\ 278{,}76 \angle 115{,}7^\circ \end{bmatrix} \text{ kV}$$

Exercício

Um sistema elétrico alimenta uma carga equilibrada em Y com impedância de aterramento através de uma linha de transmissão de 100 km. Calcule a tensão na fonte sob as seguintes condições:

- Tensões de linha equilibradas na carga: $V_c = 440$ kV
- Frequência do sistema: $f = 60$ Hz
- Parâmetros da carga por fase: $R = 220\ \Omega$, $L = 282{,}573$ mH

- Parâmetros da impedância de aterramento da carga: $R_n = 81\ \Omega$, $L_n = 2122$ mH
- Parâmetros da linha de transmissão:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0{,}3 + j\,2{,}5\ \Omega/\text{km} \\
z_1 &= 0{,}05 + j\,0{,}3\ \Omega/\text{km} \\
z_2 &= z_1
\end{aligned}
$$

Resp.: $473{,}75\ \angle 35{,}41^\circ$ kV

- Cap 05 - Exercicios.pdf [PDF]

- F.V. Gomes, Análise de sistemas elétricos de potência 1, Notas de aula, UFJF, 2012
- TE061 – Introdução aos sistemas de eneria elétrica, Notas de aula, UFPR, www.cricte2004.eletrica.ufpr.br/odilon/te061/aula_Componentes_Simetricas.pdf
- M.C.D. Tavares, notas de aula de EA611, FEEC/UNICAMP
- P. Cardieri, notas de aula de EA611, FEEC/UNICAMP