Conduction dans un anneau cylindrique - Résolution numérique

Pedro Morel Rosa
pedro.morel-rosa@ensta-paris.fr
06/01/2021

1 Introduction

Ce rapport vise à discuter le problème présenté dans le PC2 du cours MF202. En plus de la solution analytique, la solution numérique et toutes les étapes qui lui sont intrinsèques seront présentées.

2 Problème

On cherche à calculer la température d'un anneau cylindrique. C'est-à-dire, on vise à modeliser un cylindre de grande dimension.

Pour procéder, nous utilisons l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques (1).

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1}$$

Étant donnée que les rayons maximum et minimum de l'anneau cylindrique sont, respectivement, a et b; on peut définir les conditions aux limites:

$$T(a, \theta) = T^a(\theta) \tag{2}$$

$$T(b, \theta) = T^b(\theta) \tag{3}$$

Pour la généralité du problème, nous considérons les fonctions (2) et (3) pouvant assumer n'importe quel comportement.

3 Discrétisation

On suppose une discrétisation régulière en r et en θ. On va discrétiser l'équation en r par différences finies (M points) et en θ avec des modes de Fourier (N points).

Compte tenu de la corrigé du PC2, les équations et les détails plus spécifiques de discrétisation sont supposés connues. Ce rapport vise à se concentrer sur les résultats de l'implementation numérique.

4 Implementation

Le langage de programmation choisi était Python, version 3.7.9. Le tableau (1) détaille les modules importés afin de fournir les outils de résolution numérique et de traitement graphique.

Modules
NumPy
SciPy
Matplotlib
seaborn

Table 1: Modules importés.

Afin de faire les passages entre l'espace physique et l'espace spectral, la fonction `fft` et `ifft` du module SciPy ont été utilisée.

Le tableau (2) détaille les valeurs des paramètres choisis pour effectuer la simulation.

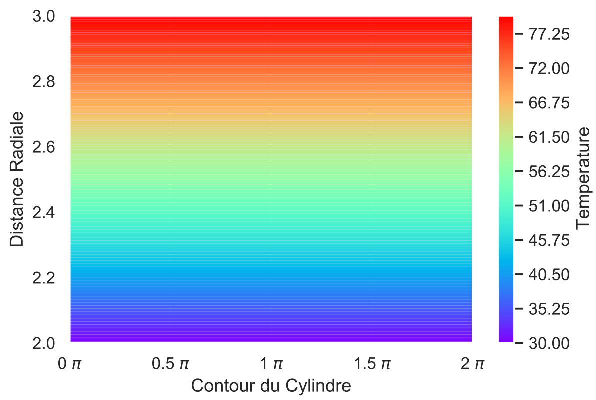
Paramètre	Valeur
M	100
N	160
a	3
b	4

Table 2: Valeurs des paramètres

5 Solution

Plusieurs simulations ont été réalisées afin de tester la robustesse de l'implémentation numérique. Parmi eux, on a le résultat dans l'image (1) pour les conditions aux limites (4) et (5).

Figure 1: Résultat pour les conditions (4) et (5)



$$T^a(\theta) = 30 \tag{4}$$

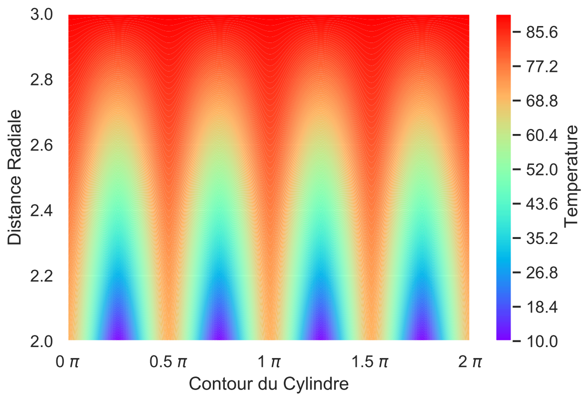
$$T^b(\theta) = 80 \tag{5}$$

Et on a aussi le résultat (2) pour un test un peu plus intéressant, avec les conditions aux limites (6) et (7).

$$T^a(\theta) = 40 + 30cos(8\theta) \tag{6}$$

$$T^b(\theta) = 90 + 10sin(2\theta) \tag{7}$$

Figure 2: Résultat pour les conditions (6) et (7)



Malheureusement, en raison de problèmes avec les outils graphiques, la carte de température n'a pas pu être représentée avec précision dans la géométrie suggérée (anneau cylindrique). A sa place, l'image est en coordonnées cartésiennes et montre la variation de l'angle θ le long de l'axe horizontal.

6 Conclusion

Les résultats sont conformes à la physique des conditions aux limites. À l'exception de la visualisation du résultat, qui n'a pas pu être représenté de la manière la plus fiable dans la géométrie du problème, le code fonctionne.