Практикум на ЭВМ

Аппроксимация задачи с помощью метода конечных элементов

Прокашев Максим Павлович

411 группа

13 ноября 2021 г.

2021

1 Условие задачи

Аппроксимировать следующую задачу с помощью метода конечных элементов (кусочно-квадратичных) и найти решение полученной системы алгебраических уравнений при различных h и f:

$$-(ku')' + u = f(x)$$

$$u(0) + u'(0) = u(1) = 0, \; k = \begin{cases} 1 & x \leq 0.5 \\ \frac{3}{2} & x > 0.5 \end{cases}$$

Исследовать построенную разностную схему на устойчивость и сходимость.

2 Решение

Разобьём отрезок $[0, \; 1]$ на множество маленьких отрезков ("конечных элементов") длиной h, построив на нём равномерную сетку:

$$\overline{D_h} = \{x_j = jh, \; j = 0, \ldots, 2N-1; \; 2Nh = 1\} \tag{1}$$

Каждый конечный элемент образован 3 соседними узлами, всего же их $2N$. Будем искать приближённое решение в виде:

$$u^h(x) = \sum_{j=0}^{2N-1} c_j \cdot \varphi_j^h(x) \tag{2}$$

, где c_j — неизвестные коэффициенты,
, а $\left\{\varphi_j^h\right\}$ — набор базисных функций. Они имеют кусочно-квадратичный вид и представляют собой полиномы Лагранжа, построенные по 3 узлам. Исходное уравнение можно записать в виде $Lu = f$, где $Lu = -(ku')' + u$.

Применяем **метод Галёркина**: неизвестные коэффициенты c_j определяются из условия ортогональности невязки базисным функциям $Ac = b$, в которой:

$$a_{ij} = \left(L\varphi_j^h, \; \varphi_i^h\right), \; b_i = \left(f, \; \varphi_i^h\right); \; i, \; j = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{2N-1} c_j \cdot \int_0^1 L\varphi_j^h \cdot \varphi_i^h dx = \int_0^1 f \cdot \varphi_i^h dx \tag{4}$$

Кроме этих уравнений будут граничные:

$$\begin{cases} u(0) + u'(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

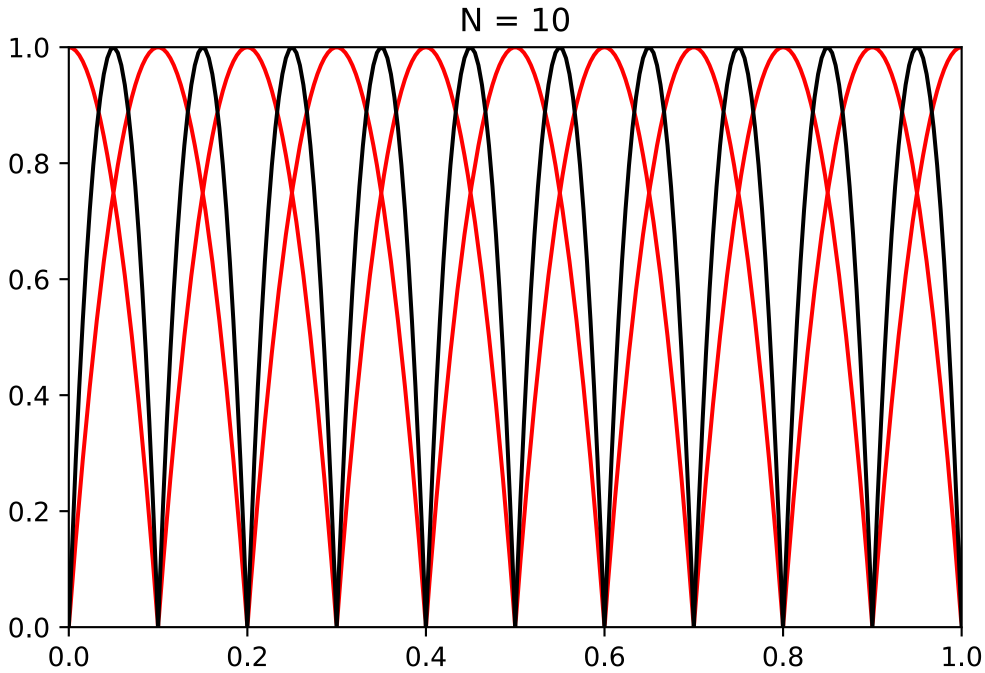


Рис. 1: Базисные функции.

Получим явный вид формулы для элементов матрицы A:

$$a_{ij} = \left(L\varphi_j^h,\ \varphi_i^h\right) = \int_0^1 L\varphi_j^h \cdot \varphi_i^h dx = \int_0^1 -(k(x)(\varphi_j^h)')'\varphi_i^h + \varphi_j^h\varphi_i^h dx =$$

$$- k(x)(\varphi_j^h)' \underbrace{\varphi_i^h}_{0}\Big|_0^1 + \int_0^1 k(x)(\varphi_j^h)'(\varphi_i^h)' + \varphi_j^h\varphi_i^h dx \quad (6)$$

Следовательно:

$$a_{ij} = \int_0^1 k(x)(\varphi_j^h)'(\varphi_i^h)' + \varphi_j^h\varphi_i^h dx,\ k(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0.5 \\ \frac{3}{2} & x > 0.5 \end{cases} \quad (7)$$

Кусочно-квадратичные базисные функции имеют вид:

$$\begin{cases} \overline{\varphi}_j^h = \frac{(h(j-1)-x)(-h(j+1)+x)}{h^2},\ j = 0,\dots,N \\ \widehat{\varphi}_j^h = \frac{4(hj-x)(-h(j+1)+x)}{h^2},\ j = 0,\dots,N \end{cases} \quad (8)$$

Матрица A выглядит так (первая строка следует из краевых условий):

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{h} & \frac{2}{h} & 0 & 0 & \dots \\ (L\widehat{\varphi}_0, \overline{\varphi}_0) & (L\widehat{\varphi}_0, \widehat{\varphi}_0) & (L\widehat{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1) & 0 & 0 & \dots \\ (L\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_0) & (L\overline{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_0) & (L\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_1) & (L\overline{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_1) & (L\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2) & \dots \\ 0 & 0 & (L\widehat{\varphi}_1, \overline{\varphi}_1) & (L\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_1) & (L\widehat{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Воспользуемся краевыми условиями, чтобы переопределить коэффициенты a_{ij}:

$$u(0) + u'(0) = 0 \Rightarrow c_0\overline{\varphi}_0(0) + (c_1\widehat{\varphi}_1(0) + c_2\overline{\varphi}_2(0))' = 0$$
$$\Rightarrow c_1 + \frac{4}{h}c_2 + \frac{2}{h}c_3 = 0 \Rightarrow a_{00} = 1,\ a_{01} = \frac{4}{h},\ a_{02} = \frac{2}{h},\ b_0 = 0$$
$$u(1) = 0 \Rightarrow c_{2N-1}\varphi_{2N-1} = 0 \Rightarrow c_{2N-1} = 0$$

В итоге, базисные функции будут иметь вид, показанный на Рис. 1. Вычислим элементы матрицы A (с помощью Wolfram Mathematica 12.3.0) используя явную формулу базисной функции (8), явную формулу элемента матрицы (6), вид носителя базисной функции.

$$(L\overline{\varphi}_j^h, \overline{\varphi}_j^h) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} [(\overline{\varphi}_j^h)'(\overline{\varphi}_j^h)' + \overline{\varphi}_j^h\overline{\varphi}_j^h]dx = \frac{16h}{15} + \frac{8}{3h}$$

$$(L\widehat{\varphi}_j^h, \widehat{\varphi}_j^h) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} [(\widehat{\varphi}_j^h)'(\widehat{\varphi}_j^h)' + \widehat{\varphi}_j^h\widehat{\varphi}_j^h]dx = \frac{8h}{15} + \frac{16}{3h}$$

$$(L\overline{\varphi}_j^h, \widehat{\varphi}_{j+1}^h) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} [(\overline{\varphi}_j^h)'(\widehat{\varphi}_{j+1}^h)' + \overline{\varphi}_j^h\widehat{\varphi}_{j+1}^h]dx = \frac{7h}{15} + \frac{4}{3h},\ j = 2k$$

$$(L\widehat{\varphi}_j^h, \overline{\varphi}_{j+2}^h) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} [(\widehat{\varphi}_j^h)'(\overline{\varphi}_{j+2}^h)' + \widehat{\varphi}_j^h\overline{\varphi}_{j+2}^h]dx = \frac{7h}{15} + \frac{4}{3h},\ j = 2k$$

Теперь вычислим вектор b:

$$\overline{b}_j = (f, \overline{\varphi}_j^h) = \int_0^1 f\overline{\varphi}_j^h\, dx = \frac{4}{3}hf(hj)$$

$$\widehat{b}_j = (f, \widehat{\varphi}_j^h) = \int_0^1 f\widehat{\varphi}_j^h\, dx = \frac{2}{3}hf(hj)$$

Вектор b заполняется следующим образом:

$$b = (\overline{b}_0, \widehat{b}_0, \overline{b}_1, \widehat{b}_1, ...)$$

3 Аппроксимация, сходимость и результаты

Пусть в правой части стоит функция:

$$f(x) := -2\pi\cos(\pi x^2) + \sin(\pi x^2) + 4\pi^2 x^2 \sin(\pi x^2)$$

Тогда аналитическим решением нашей задачи будет:

$$U_{anal} = \sin(\pi x^2)$$

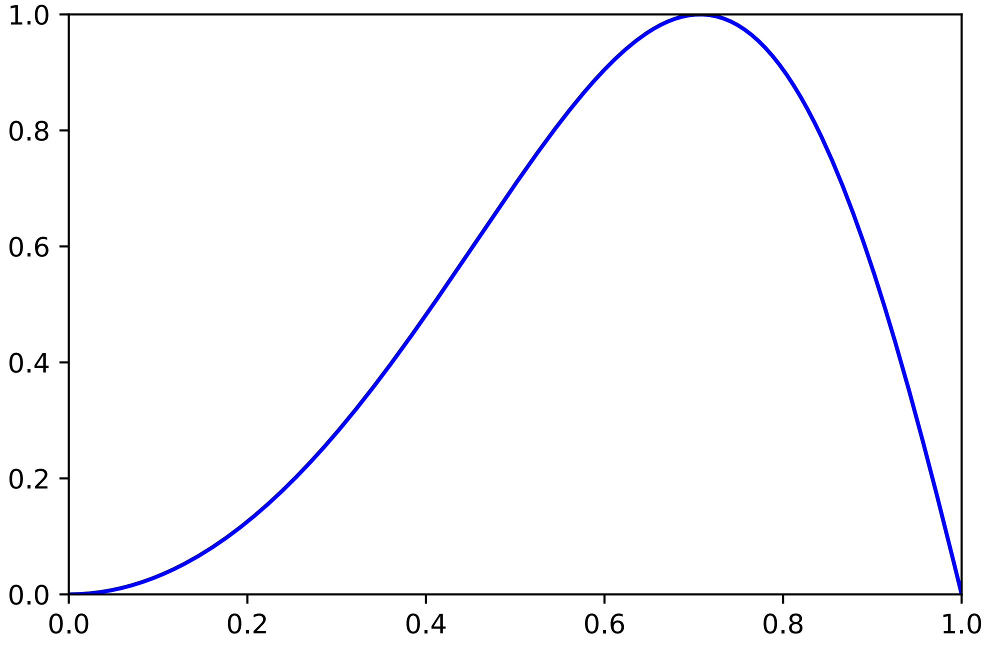
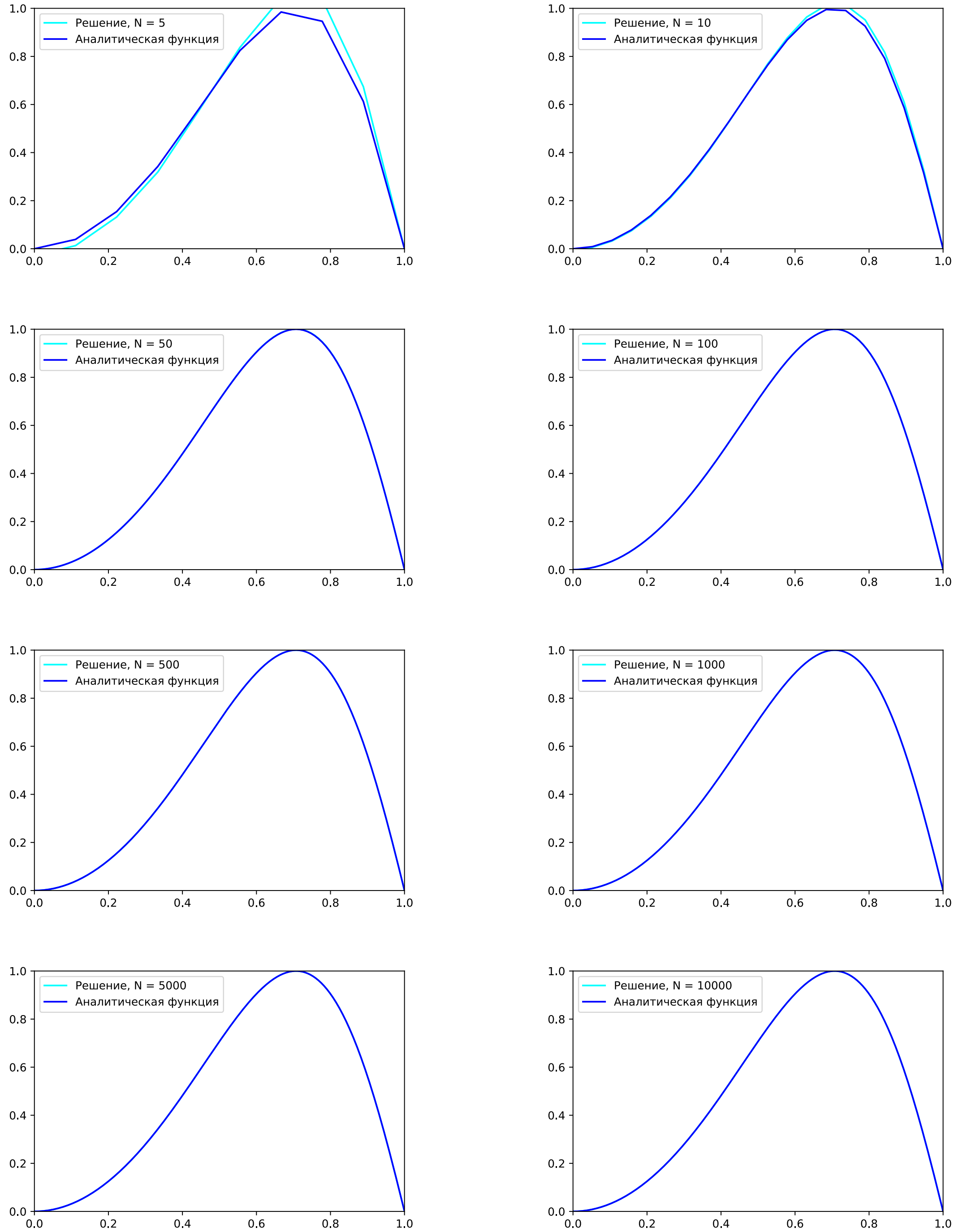


Рис. 2: $U_{anal} = \sin(\pi x^2)$

3.1 Аппроксимация

Аппроксимируем решение с данной правой частью и построим графики обеих функций для $N = 5,\ 10,\ 50,\ 100,\ 500,\ 1000,\ 5000,\ 10000$.



3.2 Погрешность

Погрешность $\delta = max_{x\in[0,1]}|u_{analytical} - u_{approximation}|$ при различных N = 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000 соответственно равна:

N	Погрешность
5	9.12989e-02
10	2.59366e-02
50	1.10012e-03
100	2.75474e-04
500	1.10292e-05
1000	2.75746e-06
5000	1.10415e-07
10000	2.70430e-08

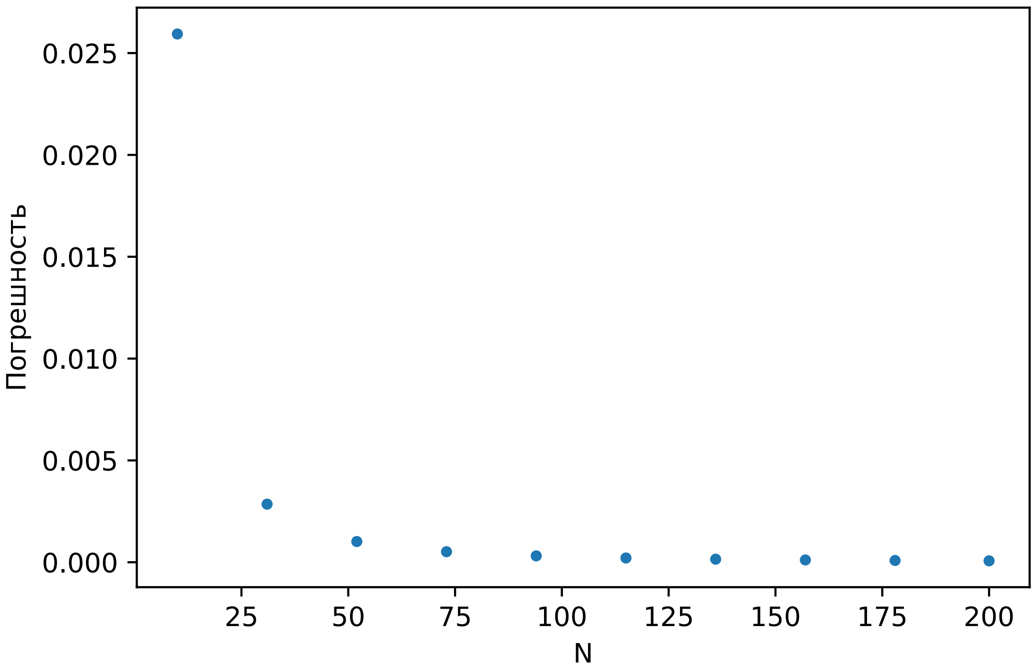


Рис. 3: Погрешность