Практикум на ЭВМ

Решение задачи методом конечных элементтов

Прокашев Максим Павлович

411 группа

21 марта 2022 г.

2022

1 Условие задачи

Для краевой задачи в единичном квадрате Ω:

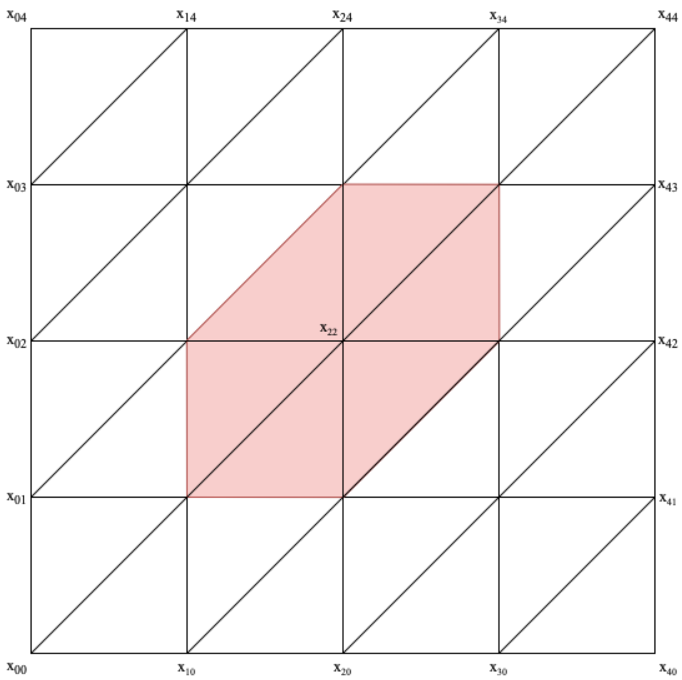
$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\delta\Omega} = 0 \end{cases}$$

построить проекционную схему при помощи неконформного метода конечных элементов и решить полученную систему ЛАУ при помощи попеременно-треугольного метода.

2 Решение

Квадрат $\Omega = \left[0,1\right] \times \left[0,1\right]$ разобьем квадратной сеткой с шагом $h = \dfrac{1}{n}$ и количеством элементов n^2:

$$\{x_{ij} = (ih, jh) \mid i,j = 0,1,\dots,n\}$$



Каждый элемент сетки разобьем диагональю из левого нижнего угла. Таким образом получим триангуляцию единичного квадрата элементами $e_i,\ i = 1,\dots,2n^2$.

Ищем решение $u(x,y)$ по методу Галеркина: $u_{ij}(x) = \sum\limits_{k,l=1}^{n-1} u_{kl}\phi_{kl},\ u_{kl} = u(x_{kl})$

Интегральное тождество: $\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_2}\right)dx = \int_\Omega f\phi_{ij}dx$

Базисные функции: $\phi_{kl}(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_{kl} = x_{ij} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

ϕ_{kl} — непрерывны на Ω, кусочно-линейные на треугольниках. Для любого внутреннего узла x_{kl} базисная функция равна 0 вне области шестиугольника, который образуют треугольники с вершиной в точке x_{kl}. Пусть Ω_{kl} область шестиугольника в которой $\phi_{kl} \neq 0$.

Посчитаем коэффициенты для разложения u_{kl}:

- Левая часть: $a_{klmn} = \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$
- Правая часть: $b_{kl} = \displaystyle\int_\Omega f \phi_{kl} dx_1 dx_2$

Для фиксированных k, l левая часть не равна нулю только в 6 случаях, так как непустое пересечение с областью Ω_{kl} имеют только области: $\Omega_{k\pm1,\ l},\ \Omega_{k,\ l\pm1},\ \Omega_{k\pm1,\ l\pm1}$.
Достаточно вычислить значение $\dfrac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_2}$ на 6 треугольниках:

$$\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_1} = \begin{cases} 0 & \text{на } e_1 \\ -\dfrac{1}{h} & \text{на } e_2 \\ -\dfrac{1}{h} & \text{на } e_3 \\ 0 & \text{на } e_4 \\ \dfrac{1}{h} & \text{на } e_5 \\ \dfrac{1}{h} & \text{на } e_6 \end{cases} \qquad \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x_1} = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{на } e_1 \\ \dfrac{1}{h} & \text{на } e_2 \\ 0 & \text{на } e_4 \\ -\dfrac{1}{h} & \text{на } e_5 \\ -\dfrac{1}{h} & \text{на } e_6 \\ 0 & \text{на } e_4 \end{cases}$$

Тогда для фиксированных k, l: $\begin{cases} a_{k,l,k\pm1,l\pm1} = 0 \\ a_{k,l,k\pm1,l} = a_{k,l,k,l\pm1} = -1 \\ a_{k,l,k,l} = 4 \end{cases}$

Уравнение с номером k, l имеет вид:

$$\frac{4u_{k,l} - u_{k-1,l} - u_{k,l-1} - u_{k+1,l} - u_{k,l+1}}{h^2} = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{kl}} f \phi_{kl} dx_1 dx_2$$

Аппроксимируем правую часть: $\displaystyle\int_{\Omega_{kl}} f \phi_{kl} dx_1 dx_2 \approx f(x_{kl}) \int_{\Omega_{kl}} \phi_{kl} dx_1 dx_2 = f(x_{kl}) h^2$

Итоговое уравнение:

$$\begin{cases} \dfrac{4u_{k,l} - u_{k-1,l} - u_{k,l-1} - u_{k+1,l} - u_{k,l+1}}{h^2} = f(x_{kl}) \\ u_{0,l} = u_{n,l} = u_{l,0} = u_{l,n} = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$

Учитывая граничные условия, итоговая матрица размера $(n-1)^2 \times (n-1)^2$ имеет блочный вид и диагональную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-3,n-3} & A_{n-3,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-2,n-3} & A_{n-2,n-2} & A_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Матрицы A_{ii} размера $(n-1) \times (n-1)$ имеют трехдиагональный вид:

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрицы $A_{ii\pm1}$ размера $(n-1) \times (n-1)$ имеют диагональный вид:

$$A_{ii\pm1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Результаты

В качестве примера возьмем функцию: $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Аналитическое решение для этой задачи: $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Краевые условия выполнены: $u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0$.

Пусть $\widetilde{u}$ решение полученное методом конечных элементов, а система ЛАУ решена при помощи попеременно-треугольного метода. Посмотрим на каком шаге при заданном n достигается нужное значение квадратичной нормы.

Норма \ **n**	**3**	**5**	**10**	**15**
e−4	18	62	349	971
e−5	22	79	466	1339
e−7	30	112	699	2076
e−10	43	163	1049	3180
e−15	64	248	1633	5021
e−20	85	333	2216	6862
e−29	123	483	????	????