1 Utilisation d'intégrales définies

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{x=0}^{\infty} x^3 \exp^{(-2x^2)}\, dx$
2. $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\infty} \frac{\exp^{(-5\theta)} - \exp^{(-\pi\theta)}}{\theta} d\theta$
3. $\displaystyle\int_{r=0}^{\infty} r^n \exp^{(-1.902r)}\, dr$

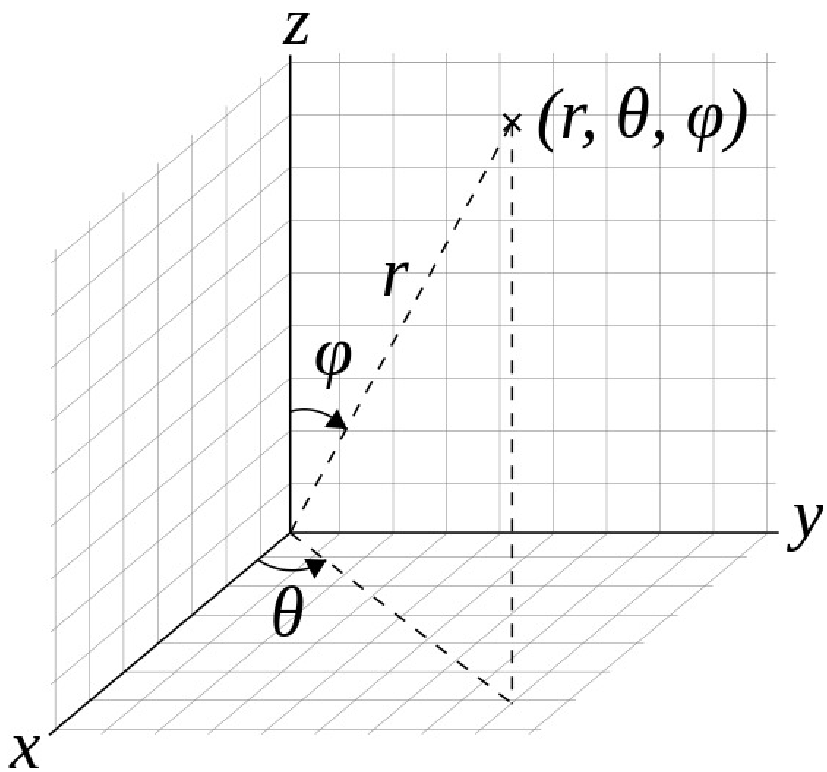
Calculez les intégrales suivantes en fonction de α :

1. $\displaystyle\int_{y=0}^{\infty} y^7 \exp^{(-\alpha y^2)}\, dy$
2. $\displaystyle\int_{\phi=0}^{\infty} \phi^5 \exp^{(-\alpha\phi^2)}\, d\phi$
3. $\displaystyle\int_{r=0}^{\infty} r^n \exp^{(-\alpha r)}\, dr$
4. $\displaystyle\int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{\infty} \phi^5 \exp^{(-\alpha\phi^2)}\, r^n \exp^{(-\beta r)}\, \frac{\exp^{(-5\theta)} - \exp^{(-\pi\theta)}}{\theta} dr d\theta d\phi$

Données :

- $\displaystyle\int_{t=0}^{\infty} t^{2n+1} \exp^{-at^2}\, dt = \frac{n!}{2a^{n+1}}$
- $\displaystyle\int_{t=0}^{\infty} \frac{\exp^{-at} - \exp^{-bt}}{t} dt = \ln\frac{b}{a}$
- $\displaystyle\int_{t=0}^{\infty} t^n \exp^{-at}\, dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$

2 Coordonnées sphériques



Le passage des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) se fait selon les formules suivantes :

- $x = r \sin\theta \cos\phi$
- $y = r \sin\theta \sin\phi$
- $z = r \cos\theta$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\phi = \arctan \frac{y}{x}$
- $\theta = \arccos \frac{z}{r}$

Soient les points suivants en coordonnées cartésiennes, calculez leur coordonnées sphériques :

- $M_x(1, 0, 0)$, $M_y(0, 1, 0)$, $M_z(0, 0, 1)$
- $P_{x,y}(1, 1, 0)$ $P_{x,z}(1, 0, 1)$ $P_{y,z}(0, 1, 1)$ et $P_{x,y,z}(1, 1, 1)$
- $Q_{x,y}(1, -1, 0)$ $Q_{x,z}(1, 0, -1)$ $Q_{y,z}(0, -1, 1)$ et $Q_{x,y,z}(-1, -1, -1)$

Lesquels de ces points sont-ils sur la même sphère?

3 Soit un objet sphérique dont la densité massique ρ varie en fonction de r

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) l'élément de volume sur lequel on intègre s'écrit $dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$.

Calculez sa masse si :

1. $\rho(r) = 1$;
2. $\rho(r) = r^2$; $r <= 3cm$;
3. $\rho(r) = 5 - r$;
4. $\rho(r) = 5 - r^2$;
5. $\rho(r) = \exp^{(-\zeta r)}$ sachant que $\int_0^\infty x^n \exp^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$;
6. $\rho(r) = \exp^{(-\alpha r^2)}$ sachant que $\int_0^\infty x^2 \exp^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a}}$;

$\rho(r)$ ne peut pas être négative.