



Data Structures

Ch6



Graphs

2024 年 11 月 5 日

学而不厌 诲人不倦

- ➡ 6.1 引言
- ➡ 6.2 图的逻辑结构
- ➡ **6.3 图的存储结构及实现**
- ➡ 6.4 最小生成树
- ➡ 6.5 最短路径
- ➡ 6.6 有向无环图及其应用
- ➡ 6.7 扩展与提高
- ➡ 6.8 应用实例

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1 图的邻接矩阵存储结构

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1 图的邻接矩阵存储结构

1. 图的存储结构

 图是否可以采用顺序存储结构？

在图中，任何两个顶点之间都**可能存在关系**（边）



无法通过存储位置表示这种**任意的逻辑关系**



图无法采用顺序存储结构

 如何存储图呢？

图是由顶点和边组成



分别考虑

{ 如何存储顶点
如何存储边



1. 图的存储结构

邻接矩阵

 邻接矩阵也称**数组**表示法，其基本思想是：

- 一维数组：存储图中顶点的信息
- 二维数组（邻接矩阵）：存储图中各顶点之间的邻接关系

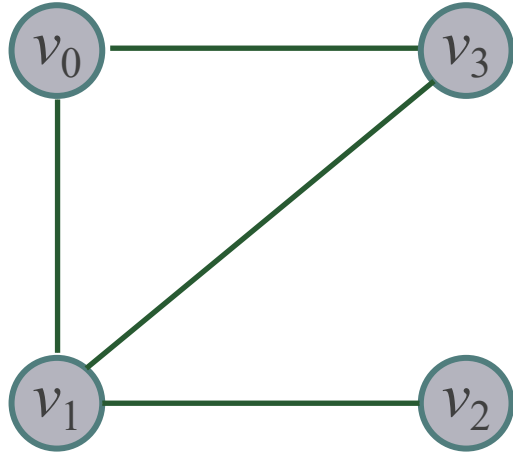
设 $G=(V, E)$ 有 n 个顶点，则邻接矩阵是一个 $n \times n$ 的方阵，定义为：

$$\text{edge}[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{若 } (v_i, v_j) \in E \text{ (或 } \langle v_i, v_j \rangle \in E) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1图的邻接矩阵存储结构

2. 图的存储示意图



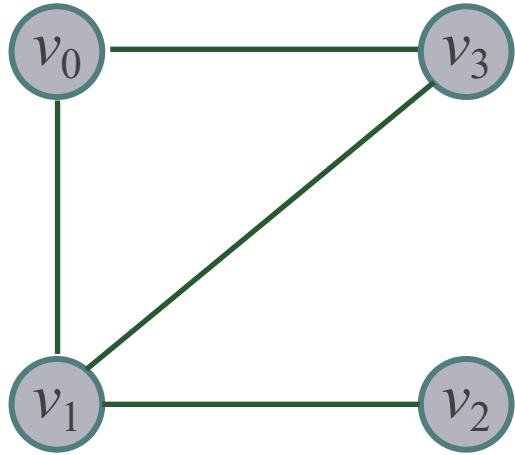
$$\text{vertex} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- 🕒 无向图的邻接矩阵有什么特点? \Rightarrow 对称矩阵
- 🕒 如何求顶点 v 的度? \Rightarrow 第 v 行 (或第 v 列) 非零元素的个数
- 🕒 如何判断顶点 i 和 j 之间是否存在边? \Rightarrow if (edge[i][j] == 1)

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1图的邻接矩阵存储结构

2. 图的存储示意图



vertex =

	0	1	2	3
	v_0	v_1	v_2	v_3

edge =

	v_0	v_1	v_2	v_3
v_0	0	1	0	1
v_1	1	0	1	1
v_2	0	1	0	0
v_3	1	1	0	0



如何求顶点 i 的所有邻接点?



扫描第 i 行

```
for (j = 0; j < n; j++)
```

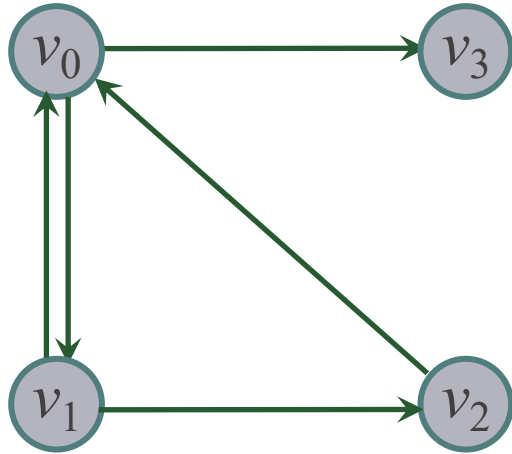
```
    if (edge[i][j] == 1)
```

顶点 j 是顶点 i 的邻接点

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1图的邻接矩阵存储结构

2. 图的存储示意图



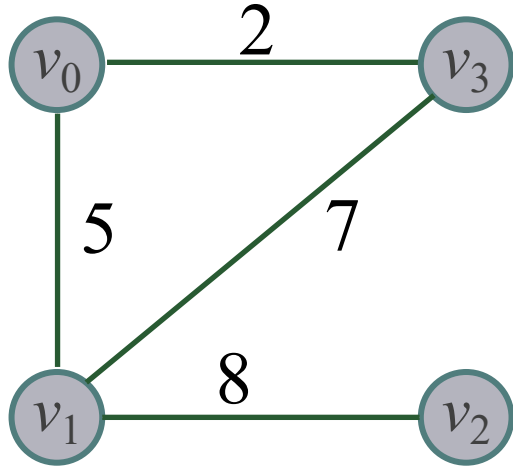
$$\text{vertex} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- 🕒 有向图的邻接矩阵一定不对称吗? \Rightarrow 顶点间存在方向相反的弧
- 🕒 如何求顶点 v 的出度? \Rightarrow 第 v 行非零元素的个数
- 🕒 如何求顶点 v 的入度? \Rightarrow 第 v 列非零元素的个数

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1 图的邻接矩阵存储结构

2. 图的存储示意图



vertex =

0	1	2	3
v_0	v_1	v_2	v_3

edge =

	v_0	v_1	v_2	v_3
v_0	0	5	∞	2
v_1	5	0	8	7
v_2	∞	8	0	∞
v_3	2	7	∞	0

网图的邻接矩阵可定义为：

$$\text{arc}[i][j] = \begin{cases} w_{ij} & \text{若 } (v_i, v_j) \in E \text{ (或 } \langle v_i, v_j \rangle \in E) \\ 0 & \text{若 } i = j \\ \infty & \text{其他} \end{cases}$$

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1 图的邻接矩阵存储结构

3. 图的存储结构定义



图的抽象数据类型定义？

ADT Graph

DataModel

...

Operation

CreatGraph: 图的建立

DestroyGraph: 图的销毁

DFTraverse: 深度优先遍历图

BFTraverse: 广度优先遍历图

endADT



```
const int MaxSize = 10;
template <typename DataType>
class MGraph
{
public:
    MGraph(DataType a[ ], int n, int e);
    ~MGraph( );
    void DFTraverse(int v);
    void BFTraverse(int v);
private:
    DataType vertex[MaxSize];
    int edge[MaxSize][MaxSize];
    int vertexNum, edgeNum;
};
```

6.3 图的存储结构及实现

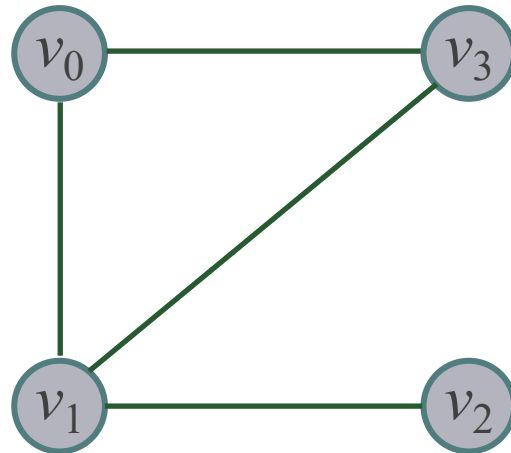
6-3-1 图的邻接矩阵存储结构

4. 图的建立

输入

$a =$

v_0	v_1	v_2	v_3
-------	-------	-------	-------



结果

vertex =

v_0	v_1	v_2	v_3
-------	-------	-------	-------

edge =

	v_0	v_1	v_2	v_3
v_0	0	1	0	1
v_1	1	0	1	1
v_2	0	1	0	0
v_3	1	1	0	0

vertexNum edgeNum

4	4
---	---



6.3 图的存储结构及实现

6-3-1 图的邻接矩阵存储结构

4. 图的建立

算法: CreatGraph(a[n], n, e)

输入: 顶点的数据a[n], 顶点个数n, 边的个数e

输出: 图的邻接矩阵

1. 存储图的顶点个数和边的个数;
2. 将顶点信息存储在一维数组vertex中;
3. 初始化邻接矩阵edge;
4. 依次输入每条边并存储在邻接矩阵edge中:
 - 4.1 输入边依附的两个顶点的编号i和j;
 - 4.2 将edge[i][j]和edge[j][i]的值置为1;

$$\text{vertex} = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$
$$\text{edge} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

vertexNum edgeNum

4	4
---	---

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1 图的邻接矩阵存储结构



4. 图的建立

```
template <typename DataType>
MGraph<DataType> :: MGraph(DataType a[ ], int n, int e)
{
    int i, j, k;
    vertexNum = n; edgeNum = e;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)           //存储顶点
        vertex[i] = a[i];
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)           //初始化邻接矩阵
        for (j = 0; j < vertexNum; j++)
            edge[i][j] = 0;
    for (k = 0; k < edgeNum; k++)             //依次输入每一条边
    {
        cin >> i >> j;                       //输入边依附的两个顶点的编号
        edge[i][j] = 1; edge[j][i] = 1;       //置有边标志
    }
}
```

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1图的邻接矩阵存储结构



5. 图的深度优先遍历

算法: DFTraverse

输入: 顶点的编号 v

输出: 图的深度优先遍历序列

1. 访问顶点 v ; 修改标志 $visited[v] = 1$;
2. j = 顶点 v 的第一个邻接点;
3. while (j 存在)
 - 3.1 if (j 未被访问) 从顶点 j 出发递归执行该算法;
 - 3.2 j = 顶点 v 的下一个邻接点;

vertex[v]

0 1 2 3

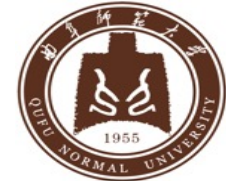
v_0	v_1	v_2	v_3
-------	-------	-------	-------

	v_0	v_1	v_2	v_3
v_0	0	1	0	1
v_1	1	0	1	1
v_2	0	1	0	0
v_3	1	1	0	0

0 1 2 3

visited[]

0	0	0	0
---	---	---	---



5. 图的深度优先遍历

```
template <typename DataType>
void MGraph<DataType> :: DFTraverse(int v)
{
    cout << vertex[v]; visited[v] = 1;
    for (int j = 0; j < vertexNum; j++)
        if (edge[v][j] == 1 && visited[j] == 0)
            DFTraverse( j );
}
```

	0	1	2	3
	v_0	v_1	v_2	v_3
v_0	0	1	0	1
v_1	1	0	1	1
v_2	0	1	0	0
v_3	1	1	0	0

6.3 图的存储结构及实现

6-3-1图的邻接矩阵存储结构

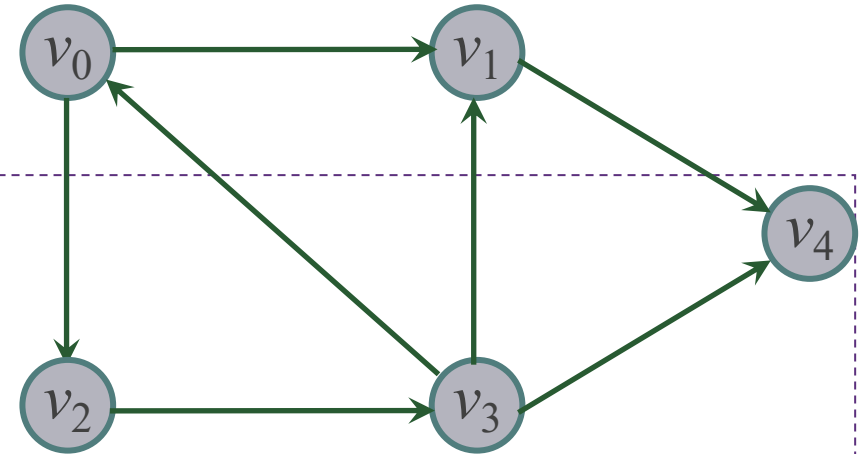
6. 图的广度优先遍历

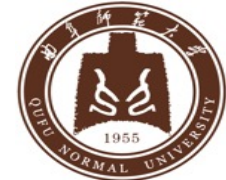
算法: BFTraverse

输入: 顶点的编号 v

输出: 图的广度优先遍历序列

1. 队列 Q 初始化;
2. 访问顶点 v ; 修改标志 $\text{visited}[v] = 1$; 顶点 v 入队列 Q ;
3. while (队列 Q 非空)
 - 3.1 i = 队列 Q 的队头元素出队;
 - 3.2 j = 顶点 v 的第一个邻接点;
 - 3.3 while (j 存在)
 - 3.3.1 如果 j 未被访问, 则
访问顶点 j ; 修改标志 $\text{visited}[j] = 1$; 顶点 j 入队列 Q ;
 - 3.3.2 j = 顶点 i 的下一个邻接点;





6. 图的广度优先遍历

```
template <typename DataType>
void MGraph<DataType> :: BFTraverse(int v)
{
    int w, j, Q[MaxSize];                                //采用顺序队列
    int front = -1, rear = -1;                             //初始化队列
    cout << vertex[v]; visited[v] = 1; Q[++rear] = v;      //被访问顶点入队
    while (front != rear)                                   //当队列非空时
    {
        w = Q[++front];                                    //将队头元素出队并送到v中
        for (j = 0; j < vertexNum; j++)
            if (edge[w][j] == 1 && visited[j] == 0 ) {
                cout << vertex[j]; visited[j] = 1; Q[++rear] = j;
            }
    }
}
```

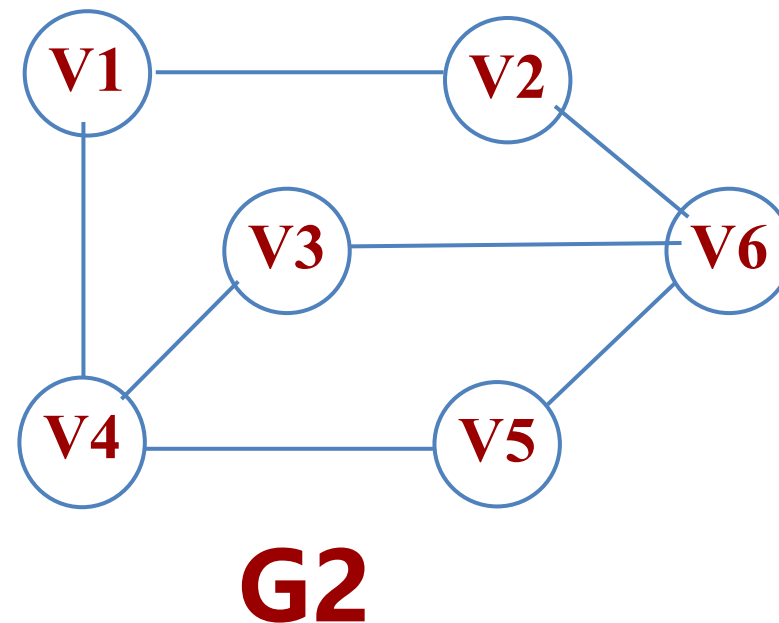
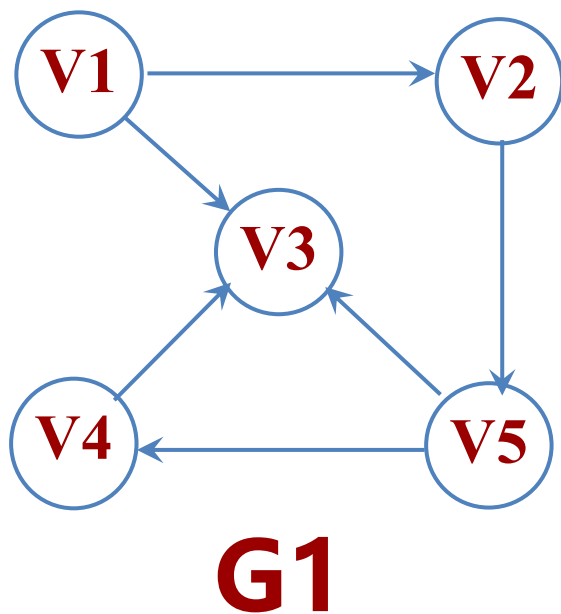
6.3 图的存储结构及实现

6-3-1 图的邻接矩阵存储结构



例题

1. 有向图G1和无向图G2如下图所示，请分别画出它们的邻接矩阵和邻接表。



6.3 图的存储结构及实现

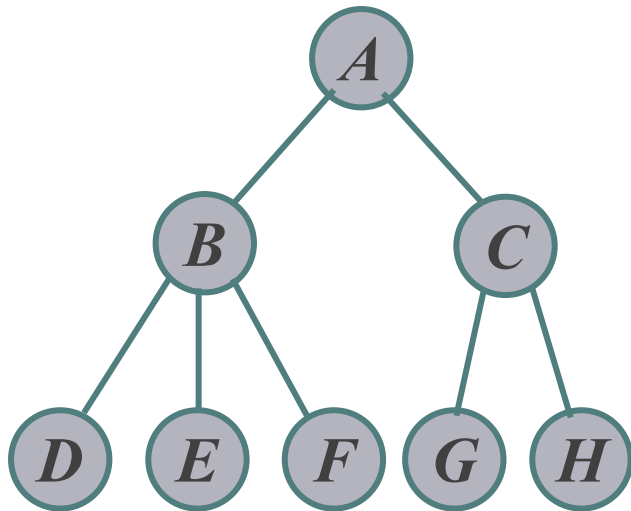
6-3-2 图的邻接表存储结构

6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

1. 图的邻接表存储

- 🕒 邻接矩阵存储结构的时空复杂度是多少? $\Rightarrow O(n^2)$
- 🕒 如果采用邻接矩阵存储**稀疏图**, 会出现什么情况? \Rightarrow 稀疏矩阵
- 🕒 树的孩子表示法?



0	A		→	1	→	2	Λ		
1	B		→	3	→	4	→	5	Λ
2	C		→	6	→	7	Λ		
3	D	Λ							
4	E		→	8	Λ				
5	F	Λ							
6	G	Λ							
7	H	Λ							

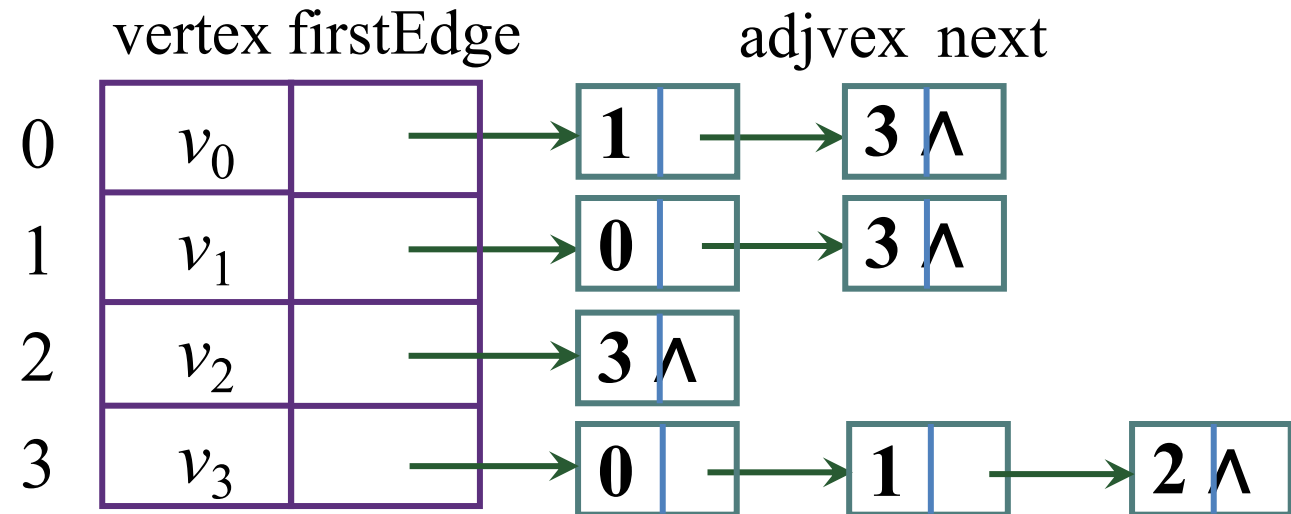
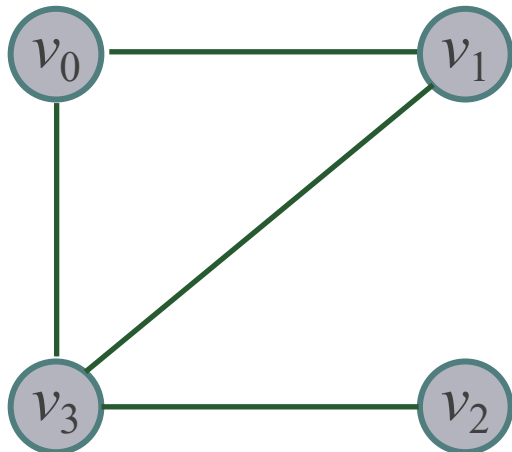
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

1. 图的邻接表存储

 邻接表存储的基本思想是：

- 边表（邻接表）：顶点 v 的所有邻接点链成的单链表
- 顶点表：所有边表的头指针和存储顶点信息的一维数组



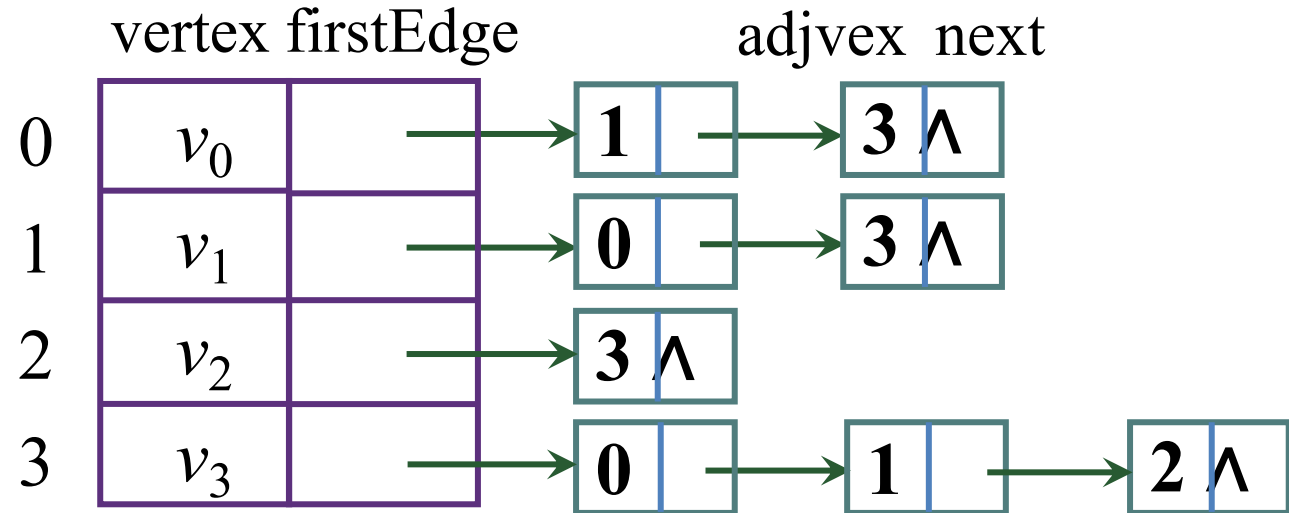
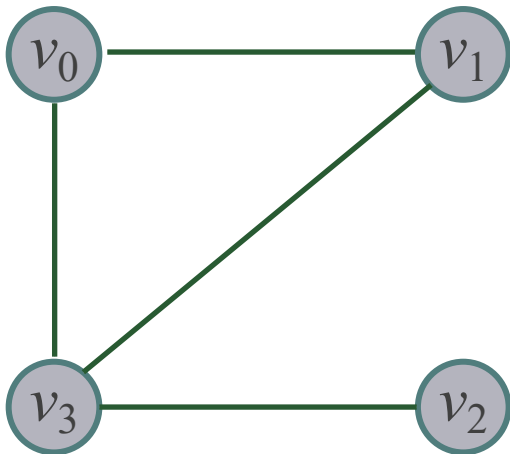
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

2. 图的邻接表存储结构定义

```
struct EdgeNode
{
    int adjvex;
    EdgeNode *next;
};
```

```
template <typename DataType>
struct VertexNode
{
    DataType vertex;
    EdgeNode *firstEdge;
};
```



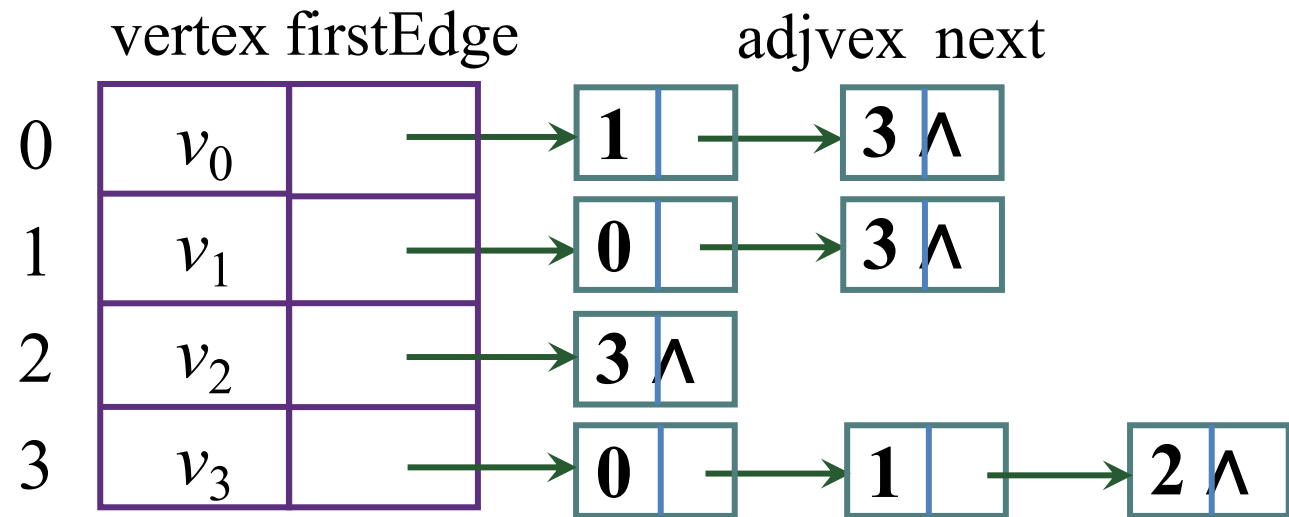
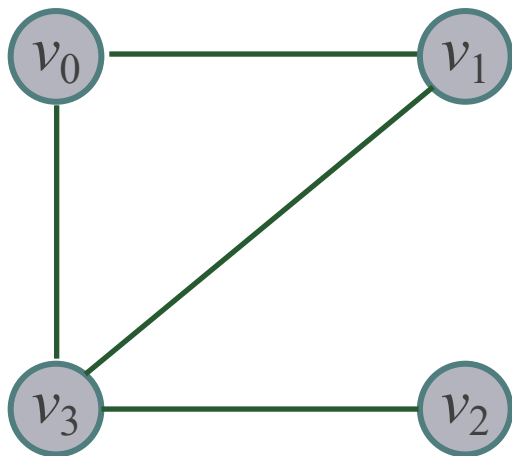
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

3. 图的邻接表基本操作

🕒 边表中的结点表示什么? \Rightarrow 对应图中的一条边

🕒 设图有 n 个顶点 e 条边, 邻接表的空间复杂度是多少? $\Rightarrow O(n+e)$



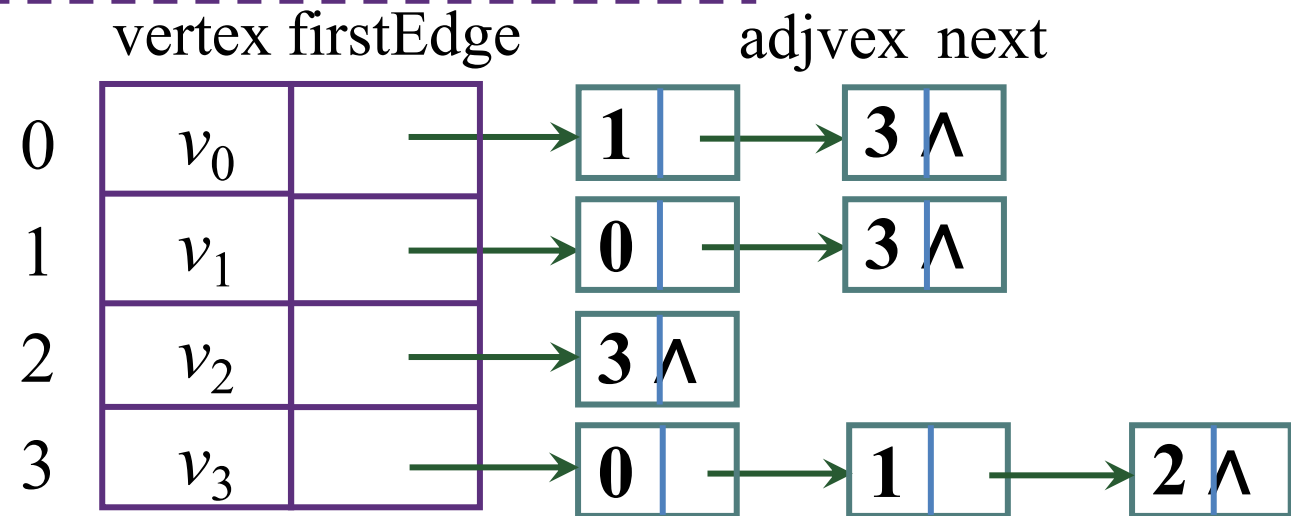
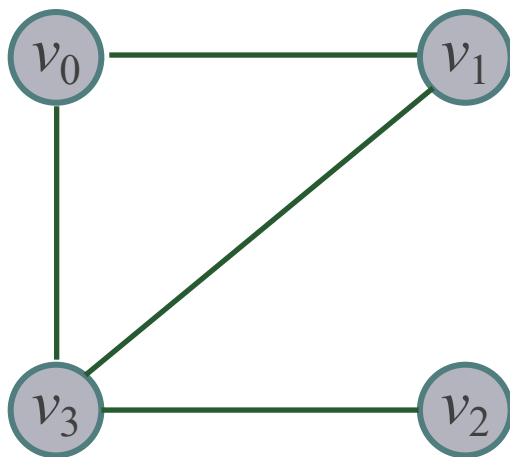
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

3. 图的邻接表基本操作

 如何求顶点 v 的度? \Rightarrow 顶点 v 的边表中结点的个数

```
p = adjlist[v].firstEdge; count = 0;
while (p != nullptr)
{
    count++; p = p->next;
}
```



6.3 图的存储结构及实现

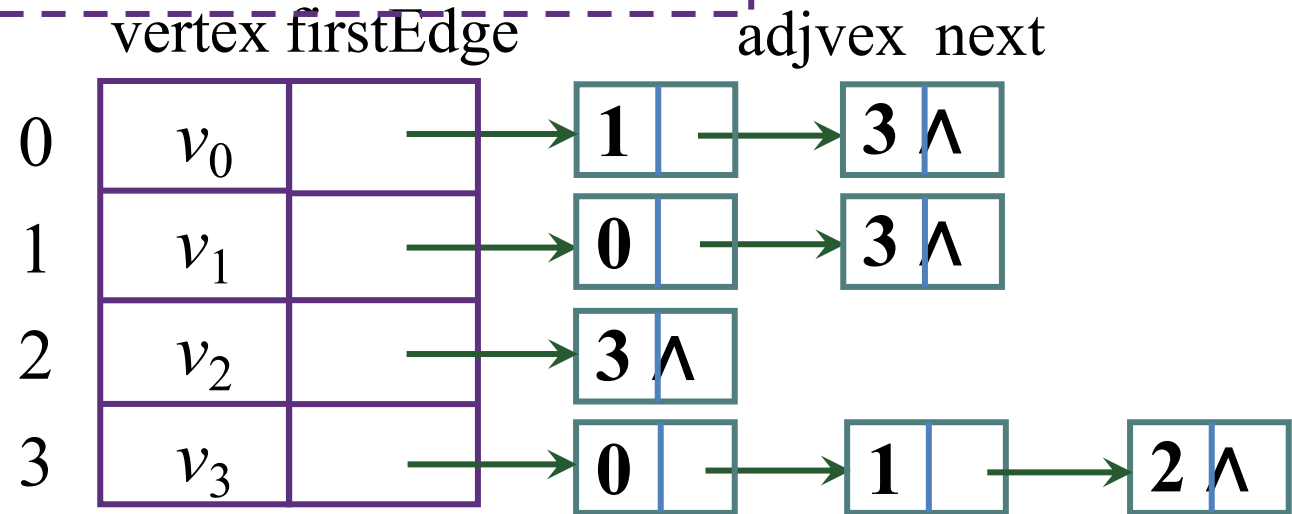
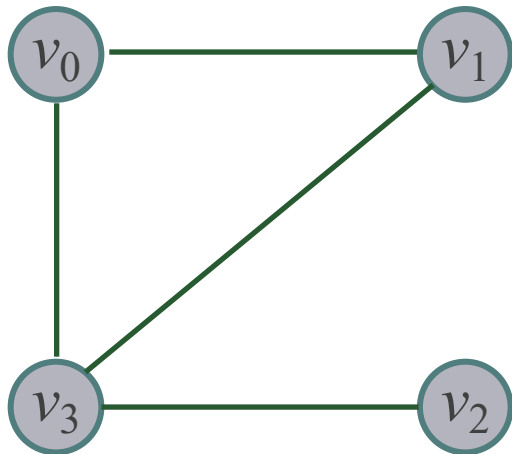
6-3-2 图的邻接表存储结构

3. 图的邻接表基本操作

🕒 如何求顶点 v 的所有邻接点? \Rightarrow 顶点 i 的边表中的所有结点

```
p = adjlist[v].firstEdge;
while (p != nullptr)
{
    j = p->adjvex;
    p = p->next;
}
```

//j是v的邻接点



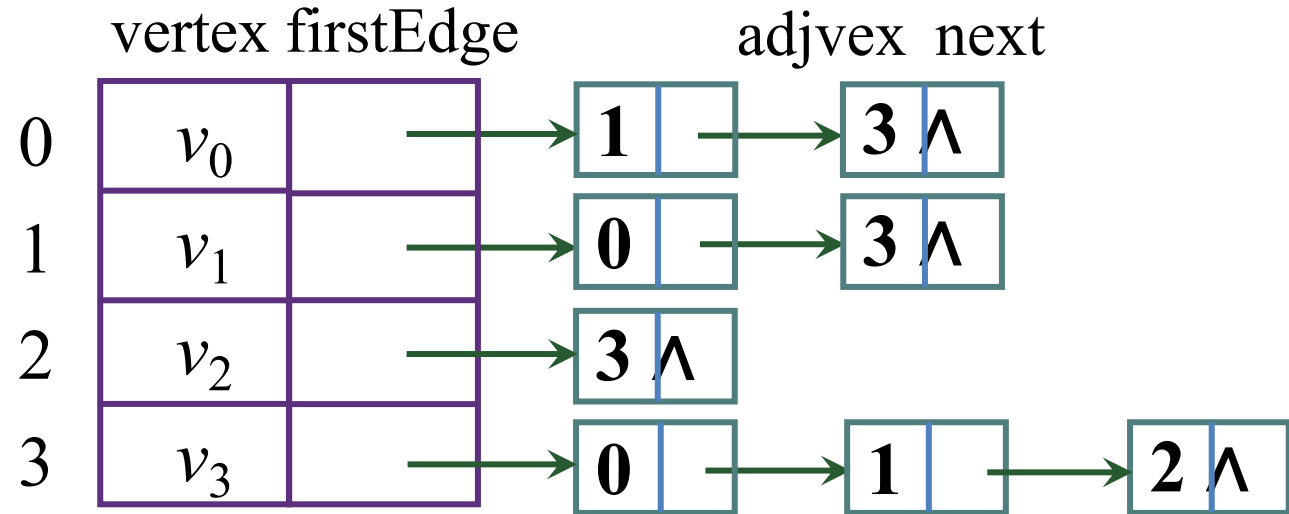
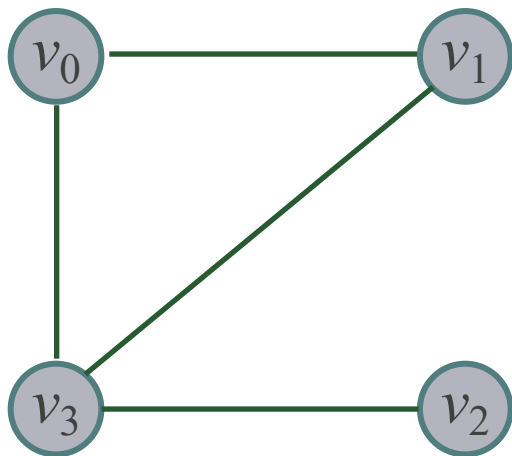
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

3. 图的邻接表基本操作

 如何判断顶点 i 和顶点 j 之间是否存在边?

⇒ 测试顶点 i 的边表中是否存在数据域为 j 的结点



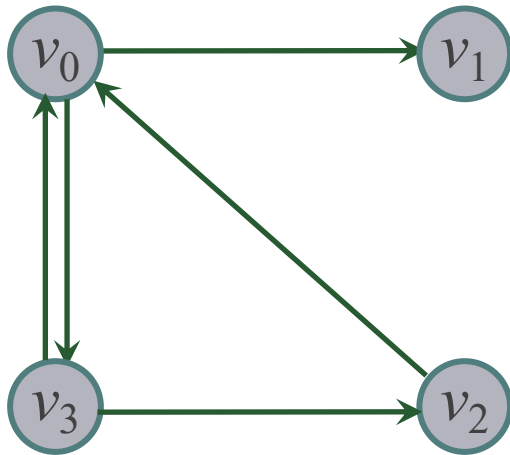
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

4. 存储有向图

🕒 如何求顶点 v 的出度? \Rightarrow 顶点 v 的出边表中结点的个数

🕒 如何求顶点 v 的入度? \Rightarrow 所有出边表中数据域为 v 的结点个数



	vertex	firstEdge	adjvex	next
0	v_0		1	3 \wedge
1	v_1	\wedge		
2	v_2		0	\wedge
3	v_3		0	2 \wedge

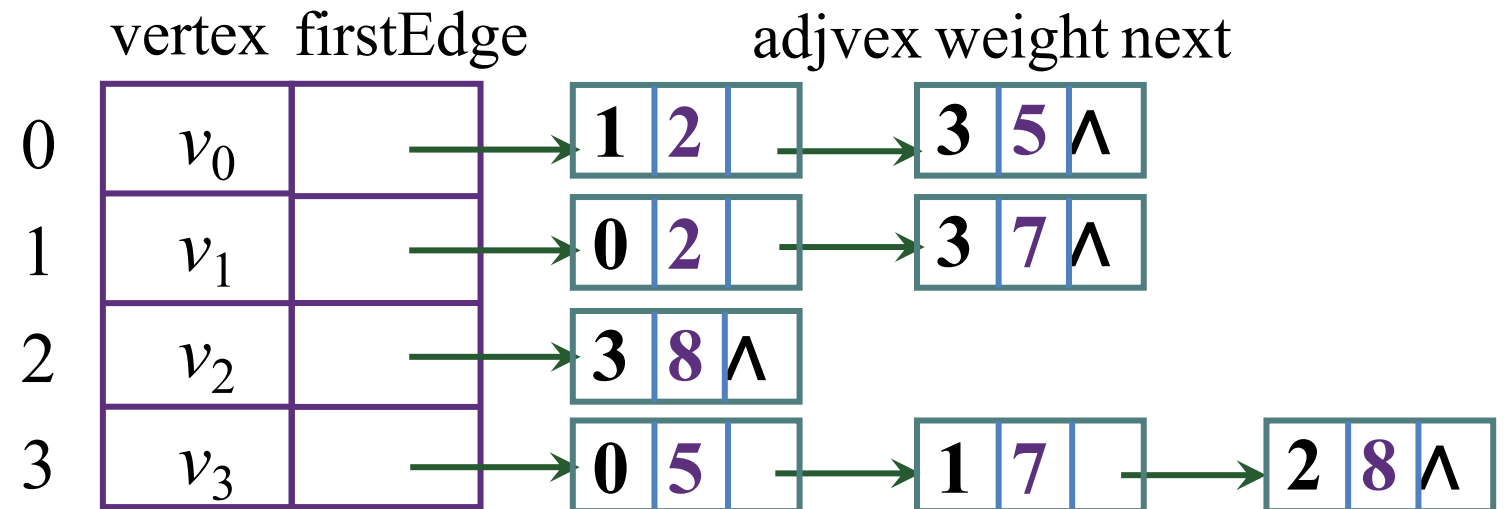
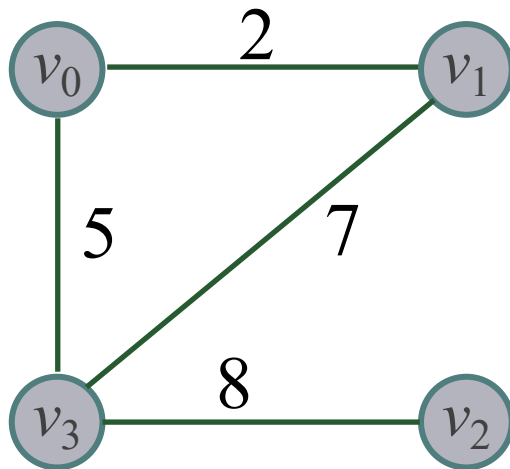
6.3 图的存储结构及实现

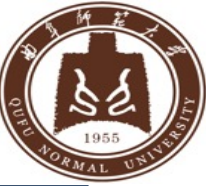
6-3-2 图的邻接表存储结构

5. 存储带权图

🕒 邻接表如何存储带权图？

⇒ 权值存储在边表中





6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

6. 邻接表存储结构定义

 图的抽象数据类型定义？

ADT Graph

DataModel

...

Operation

CreatGraph: 图的建立

DestroyGraph: 图的销毁

DFTraverse: 深度优先遍历图

BFTraverse: 广度优先遍历图

endADT



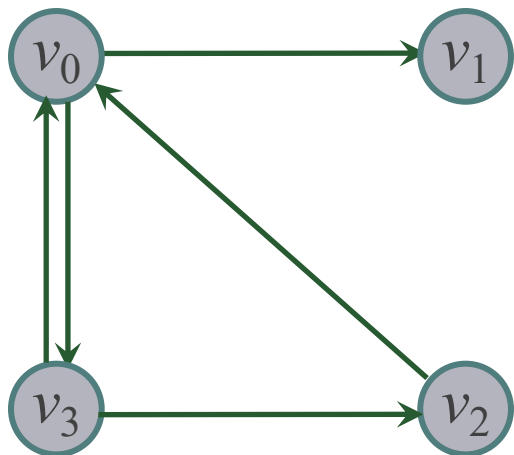
```
const int MaxSize = 10;
template <typename DataType>
class ALGraph
{
public:
    ALGraph(DataType a[ ], int n, int e);
    ~ALGraph( );
    void DFTraverse(int v);
    void BFTraverse(int v);
private:
    VertexNode<DataType> adjlist[MaxSize];
    int vertexNum, edgeNum;
};
```



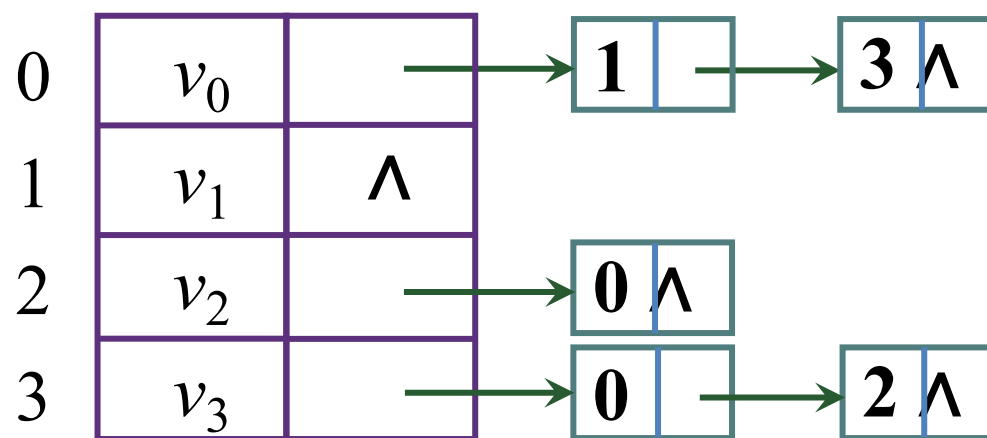
7. 图的建立

输入

$a = [v_0, v_1, v_2, v_3]$



结果





6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

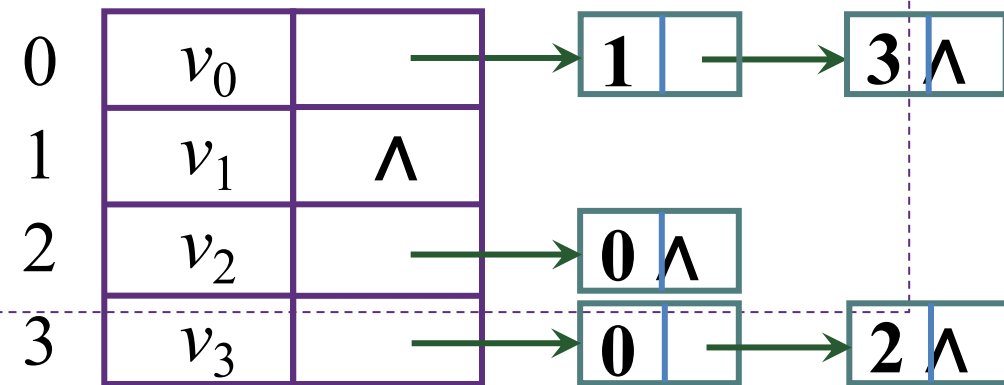
7. 图的建立

算法: $\text{CreatGraph}(a[n], n, e)$

输入: 顶点的数据信息 $a[n]$, 顶点个数 n , 边的个数 e

输出: 图的邻接表

1. 存储图的顶点个数和边的个数;
2. 将顶点信息存储在顶点表中, 将该顶点边表的头指针初始化为NULL;
3. 依次输入边的信息并存储在边表中:
 - 3.1 输入边所依附的两个顶点的编号 i 和 j ;
 - 3.2 生成边表结点 s , 其邻接点的编号为 j ;
 - 3.3 将结点 s 插入到第 i 个边表的表头;





6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

7. 图的建立

```
template <typename DataType>
ALGraph<DataType> :: ALGraph(DataType a[ ], int n, int e)
{
    int i, j, k;  EdgeNode *s = nullptr;
    vertexNum = n; edgeNum = e;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)    //输入顶点信息，初始化顶点表
    {
        adjlist[i].vertex = a[i]; adjlist[i].firstEdge = nullptr;
    }
}
```

v_0	\wedge
v_1	\wedge
v_2	\wedge
v_3	\wedge

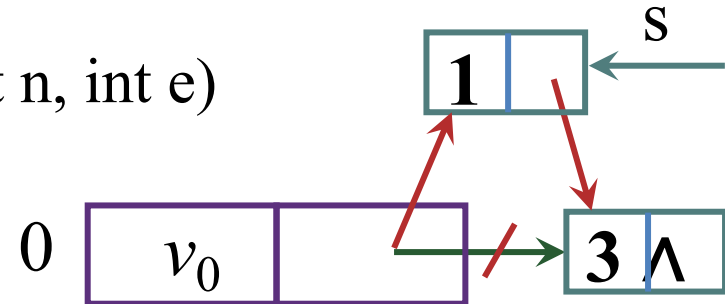


6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

7. 图的建立

```
template <typename DataType>
ALGraph<DataType> :: ALGraph(DataType a[ ], int n, int e)
{
    int i, j, k;   EdgeNode *s = nullptr;
    vertexNum = n; edgeNum = e;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)    //输入顶点信息，初始化顶点表
    {
        adjlist[i].vertex = a[i]; adjlist[i].firstEdge = nullptr;
    }
    for (k = 0; k < edgeNum; k++)    //依次输入每一条边
    {
        cin >> i >> j;                //输入边所依附的两个顶点的编号
        s = new EdgeNode; s->adjvex = j; //生成一个边表结点s
        s->next = adjlist[i].firstEdge; //将结点s插入到第i个边表的表头
        adjlist[i].firstEdge = s;
    }
}
```



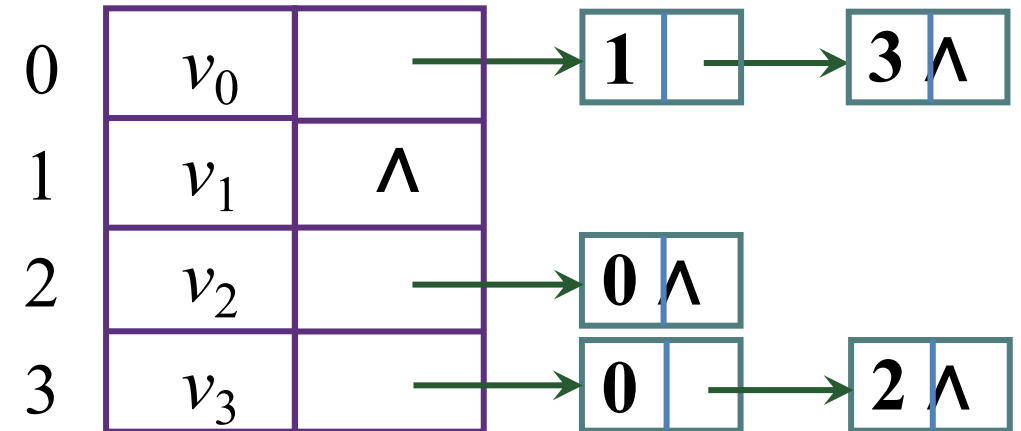
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

8. 图的销毁

在邻接表存储中，须释放所有在程序运行过程中申请的的边表结点

```
template <typename DataType>
ALGraph<DataType>::~~ALGraph( )
{
    EdgeNode *p = nullptr, *q = nullptr;
    for (int i = 0; i < vertexNum; i++)
    {
        p = q = adjlist[i].firstEdge;
        while (p != nullptr)
        {
            p = p->next;
            delete q; q = p;
        }
    }
}
```



6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

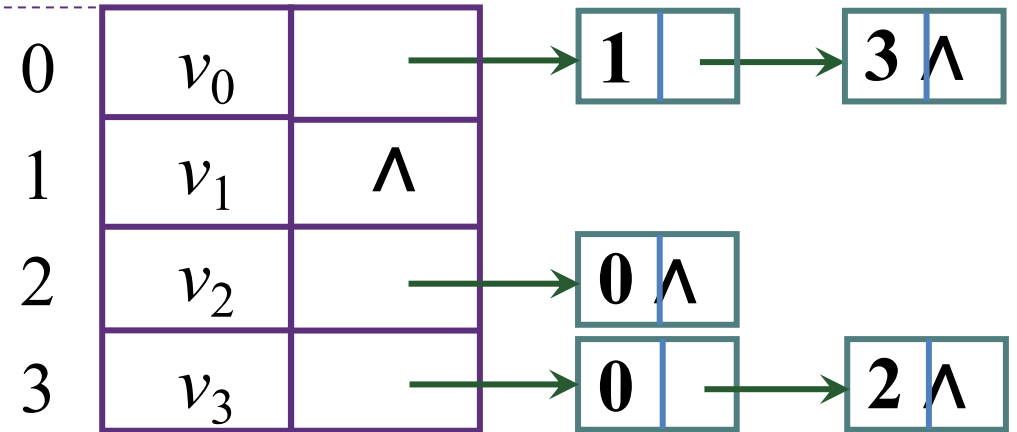
9. 图的深度优先遍历

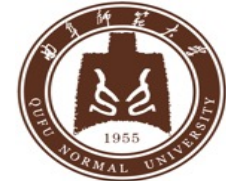
算法：DFTraverse

输入：顶点的编号 v

输出：无

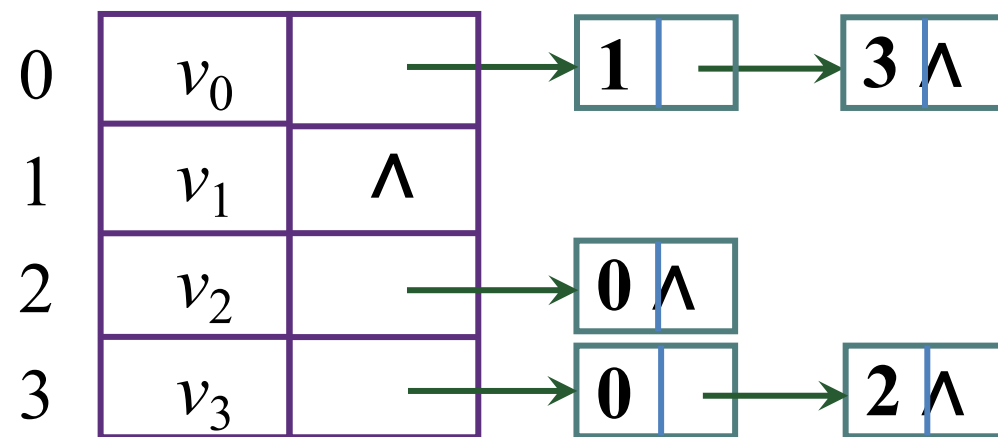
1. 访问顶点 v ; 修改标志 $visited[v] = 1$;
2. j = 顶点 v 的第一个邻接点;
3. while (j 存在)
 - 3.1 if (j 未被访问) 从顶点 j 出发递归执行该算法;
 - 3.2 j = 顶点 v 的下一个邻接点;

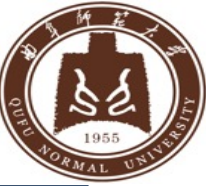




9. 图的深度优先遍历

```
template <typename DataType>
void ALGraph<DataType> :: DFTraverse(int v)
{
    int j; EdgeNode *p = nullptr;
    cout << adjlist[v].vertex; visited[v] = 1;
    p = adjlist[v].firstEdge;
    while (p != nullptr)
    {
        j = p->adjvex;
        if (visited[j] == 0) DFTraverse(j);
        p = p->next;
    }
}
```





6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

10. 图的广度优先遍历

算法: BFTraverse

输入: 顶点的编号 v

输出: 无

1. 队列 Q 初始化;
2. 访问顶点 v ; 修改标志 $\text{visited}[v] = 1$; 顶点 v 入队列 Q ;
3. while (队列 Q 非空)
 - 3.1 i = 队列 Q 的队头元素出队;
 - 3.2 j = 顶点 v 的第一个邻接点;
 - 3.3 while (j 存在)
 - 3.3.1 如果 j 未被访问, 则
访问顶点 j ; 修改标志 $\text{visited}[j] = 1$; 顶点 j 入队列 Q ;
 - 3.3.2 j = 顶点 i 的下一个邻接点;

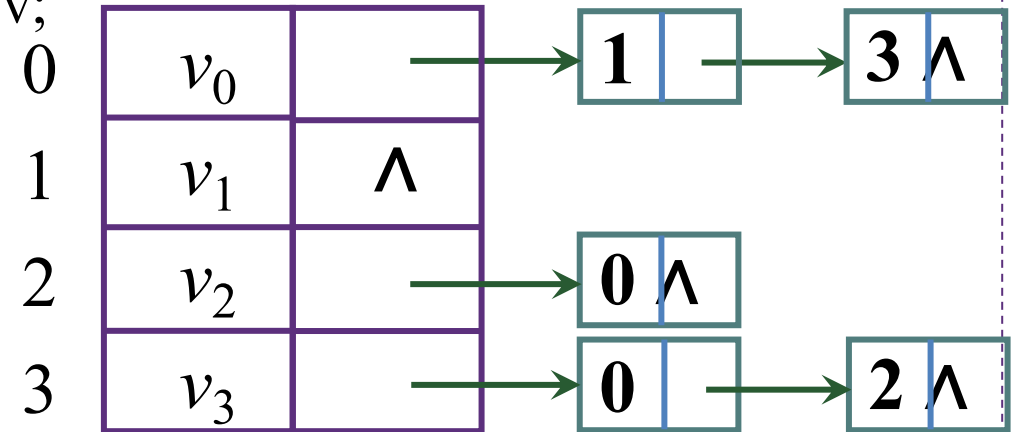
6.3 图的存储结构及实现

6-3-2 图的邻接表存储结构

10. 图的广度优先遍历

```

template <typename DataType>
void ALGraph<DataType> :: BFTraverse(int v)
{
    int w, j, Q[MaxSize]; int front = -1, rear = -1;
    EdgeNode *p = nullptr;
    cout << adjlist[v].vertex; visited[v] = 1; Q[++rear] = v;
    while (front != rear)
    {
        w = Q[++front];
        p = adjlist[w].firstEdge;
        while (p != nullptr)
        {
            j = p->adjvex;
            if (visited[j] == 0) {
                cout << adjlist[j].vertex; visited[j] = 1; Q[++rear] = j;
            }
            p = p->next;
        }
    }
}
    
```

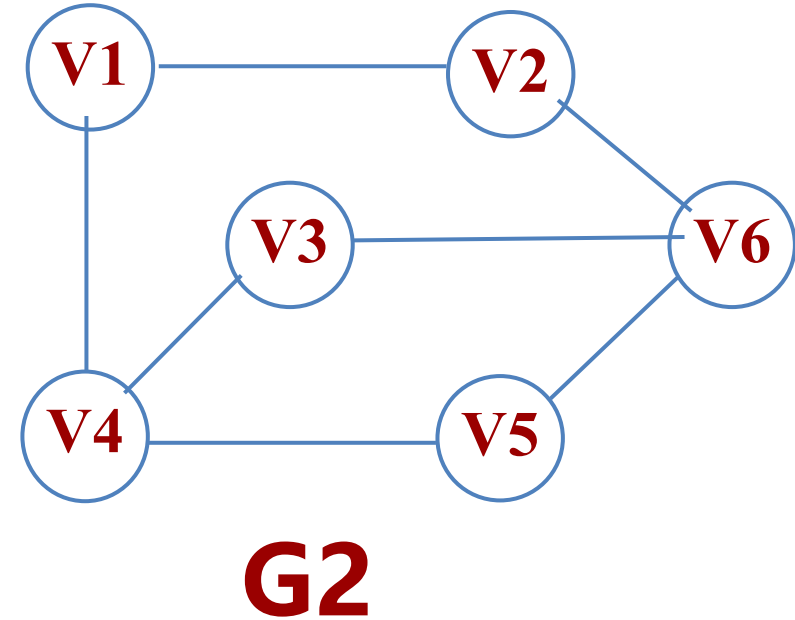
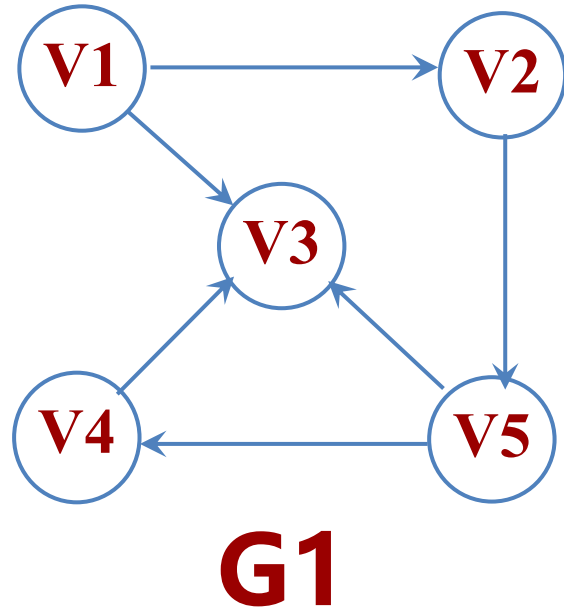


小结

1. 熟练掌握图的邻接矩阵存储及实现方法
2. 掌握图的邻接表存储及实现方法
3. 理解图的邻接矩阵与邻接表实现方法的区别
4. 掌握图的建立、深度优先遍历、广度优先遍历实现方法

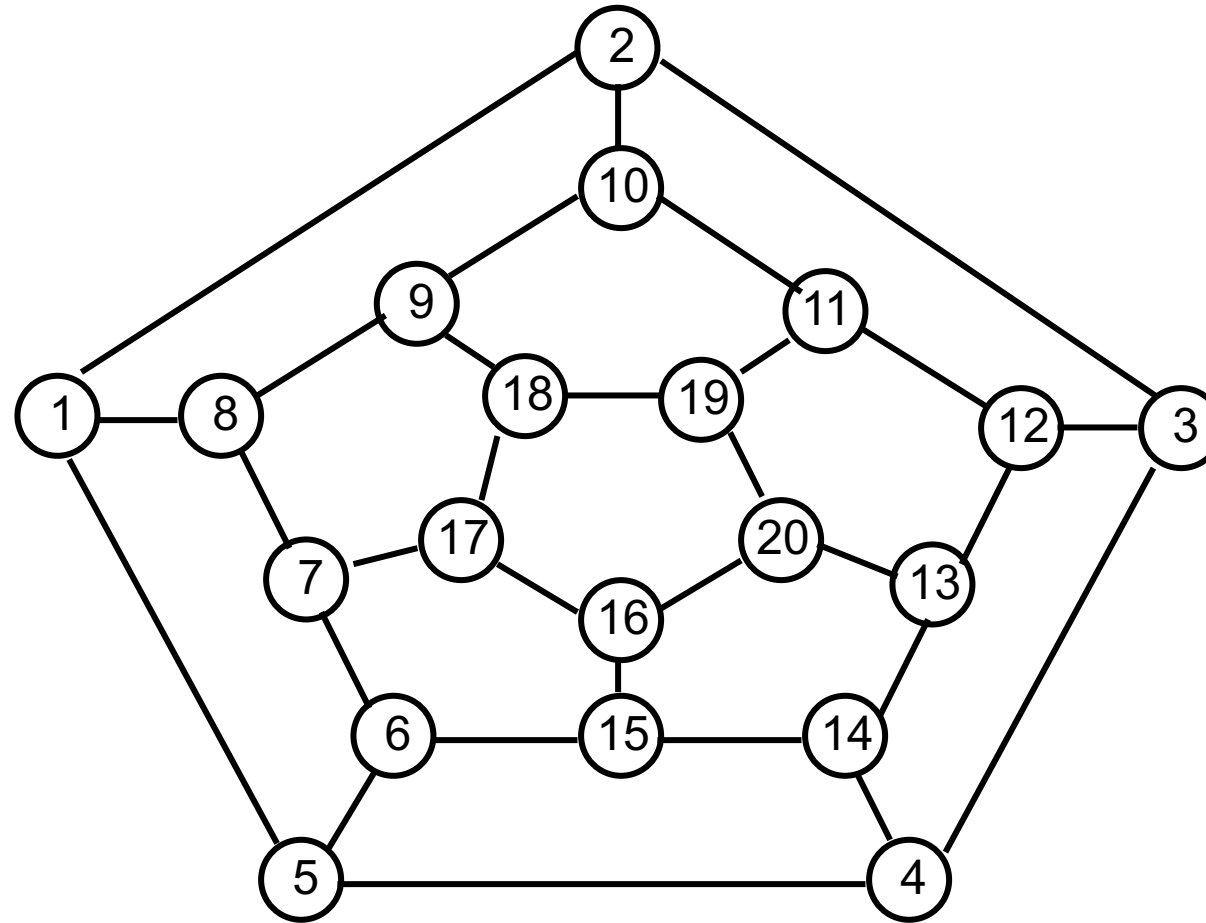
作业

2. 有向图G1和无向图G2如下图所示，请分别画出它们的邻接矩阵和邻接表。



作业

3. DFS, BFS 实现遍历 要求尽量按顶点序号顺序搜索 (作为练习)



实验六、图的构建与遍历

一、实验目的

1. 掌握图的**邻接矩阵**存储及实现方法
2. 掌握图的**邻接表**存储及实现方法
3. 掌握图的**建立**及**深度优先遍历**和**广度优先遍历**方法
3. 用C++语言实现相关算法，并上机调试。

二、实验内容

1. 实现图的邻接矩阵存储，并完成深度优先与广度优先遍历。
2. 实现图的邻接表存储，并完成深度优先与广度优先遍历。
3. 给出测试过程和测试结果。

实验时间： 第12周周四晚 19:00-21:00
实验地点： 格物楼A216



Thank You !

Q & A