Data Structures

Ch6

图 Graphs

2023 年 11 月 9 日

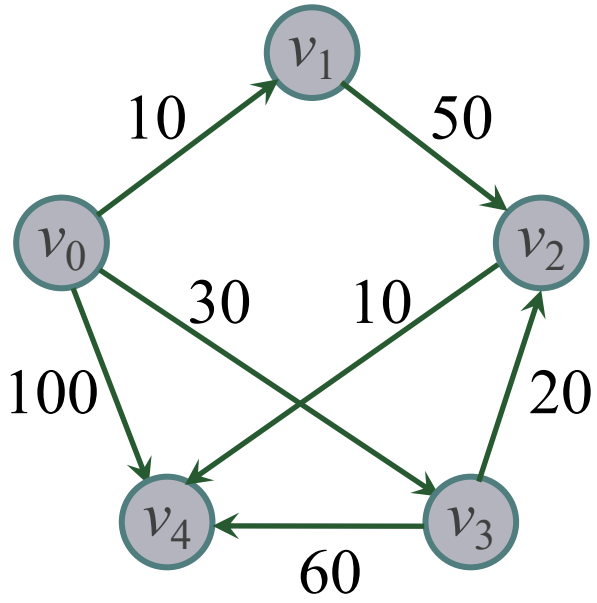
学而不厌 诲人不倦

Chapter 6 图

6.5 最短路径

1. 最短路径

- 最短路径：**非带权图**——边数最少的路径
- 最短路径：**带权图**——边上的权值之和最少的路径



v_0 到 v_4 的最短路径：

$v_0\,v_4$：1

$v_0\,v_3\,v_4$：2

$v_0\,v_1\,v_2\,v_4$：3

$v_0\,v_3\,v_2\,v_4$：3

v_0 到 v_4 的最短路径：

$v_0\,v_4$：100

$v_0\,v_3\,v_4$：90

$v_0\,v_1\,v_2\,v_4$：70

$v_0\,v_3\,v_2\,v_4$：60

1. 最短路径

【单源点最短路径问题】

给定带权有向图 $G=(V, E)$ 和源点 $v \in V$，求从 v 到 G 中其余各顶点的最短路径

【每一对顶点的最短路径问题】

给定带权有向图 G = (V, E)，对任意顶点 vi 和vj（i ≠ j），求从顶点 vi 到顶点 vj 的最短路径

6.5 最短路径

6-5-1　Dijkstra算法

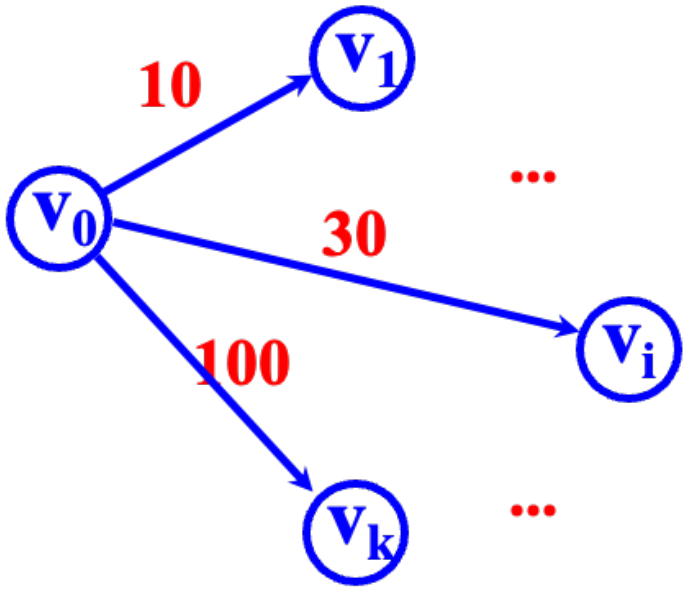
1. Dijkstra算法思想

最小生成树Prim算法、Kruskal算法均为贪心算法，
其中Prim算法是对图的节点贪心，而Kruskal算法是对图上的边贪心。

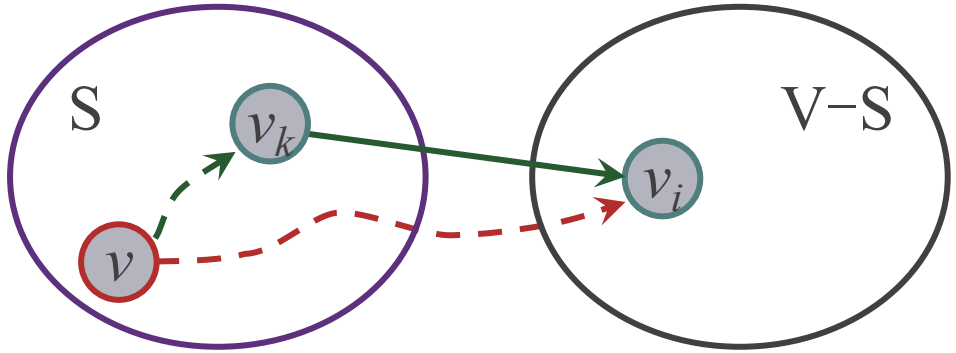
思想：**贪心算法**(局部最优)，**按路径长度递增的次序产生最短路径**。

贪心算法： 利用局部最优来计算全局最优。

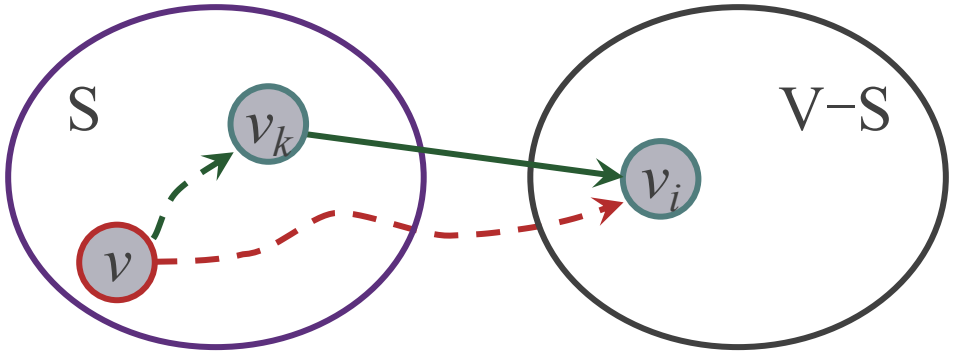
利用已得到的顶点的最短路径来计算其它顶点的最短路径。



假设图中所示为从源点到其余各点之间的最短路径，
则在这些路径中，必然存在一条**长度最短**者。



1. Dijkstra算法思想



v：源点

S：已经生成最短路径的终点

$w<v, v_i>$：从顶点 v 到顶点 v_i 的权值

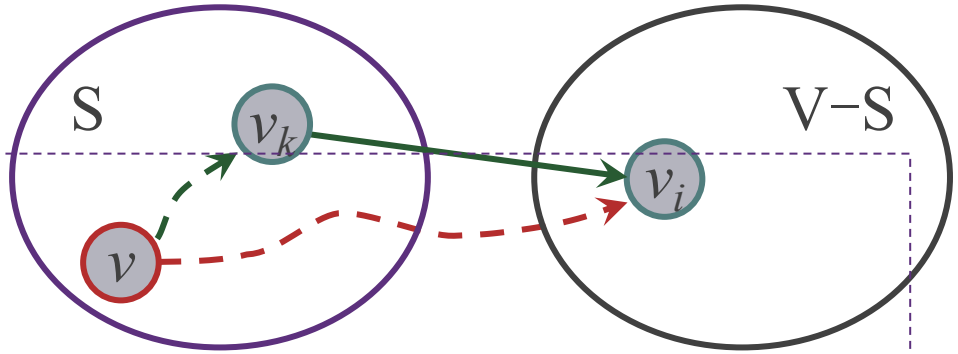
$dist(v, v_i)$：表示从顶点 v 到顶点 v_i 的最短路径长度

$$dist(v, v_k) = min\{dist(v, v_j), (j=1..n)\};$$
$$S = S + \{v_k\};$$
$$dist(v, v_j)=min\{dist(v, v_j),\ dist(v, v_k) + w<v_k, v_j>\};$$

1. 从未标记结点中选择距离源点最近的结点v_k；
2. 将结点v_k加入最短路径终点集合；
3. 计算从刚加入结点v_k到未标记邻近结点v_j的距离，

   如果 源点到v_k的距离＋v_k到v_j的距离＜ 源点到v_j的距离，则更新源点到v_j的距离。

1. Dijkstra算法思想



算法： Dijkstra算法

输入： 有向网图 $G=(V, E)$，源点 v

输出： 从 v 到其他所有顶点的最短路径

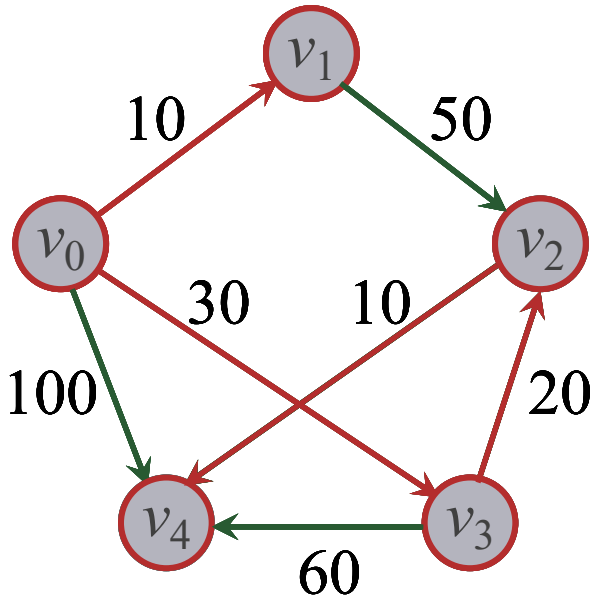
1. 初始化：集合$S = \{v\}$； $dist(v, v_i) = w<v, v_i>, (i=1...n)$；
2. 重复下述操作直到 $S == V$

   2.1 $dist(v, v_k) = min\{dist(v, v_j), (j=1..n)\}$；

   2.2 $S = S + \{v_k\}$；

   2.3 $dist(v, v_j)=min\{dist(v, v_j), dist(v, v_k) + w<v_k, v_j>\}$；

1. Dijkstra算法思想



初始化：$S=\{v_0\}$

dist(v, v_i)：$<v_0,v_1>10$ $<v_0,v_2>\infty$ $<v_0,v_3>30$ $<v_0,v_4>100$

第一次迭代：$S=\{v_0, v_1\}$

dist(v, v_i)：$<v_0,v_1,v_2>60$ $<v_0,v_3>30$ $<v_0,v_4>100$

第二次迭代：$S=\{v_0, v_1, v_3\}$

dist(v, v_i)：$<v_0,v_3,v_2>50$ $<v_0,v_3,v_4>90$

第三次迭代：$S=\{v_0, v_1, v_3, v_2\}$

dist(v, v_i)：$<v_0,v_3,v_2,v_4>60$

第四次迭代：$S=\{v_0, v_1, v_3, v_2, v_4\}$

2. Dijkstra算法存储结构

图采用什么存储结构呢？ ⇨ 邻接矩阵

算法：Dijkstra算法

输入：有向网图 $G=(V, E)$，源点 v

输出：从 v 到其他所有顶点的最短路径

1. 初始化：集合$S = \{v\}$； $\text{dist}(v, v_i) = w<v, v_i>, (i=1...n)$；
2. 重复下述操作直到 $S == V$
   - 2.1 $\text{dist}(v, v_k) = \min\{\text{dist}(v, v_j), (j=1..n)\}$；
   - 2.2 $S = S + \{v_k\}$；
   - 2.3 $\text{dist}(v, v_j)=\min\{\text{dist}(v, v_j), \text{dist}(v, v_k) + w<v_k, v_j>\}$；

2. Dijkstra算法存储结构

如何存储dist(v, v_i)呢? ⇨ 待定路径表（当前的最短路径）

- **整型数组dist[n]：存储当前最短路径的长度**
- **字符串数组path[n]：存储当前的最短路径，即顶点序列**

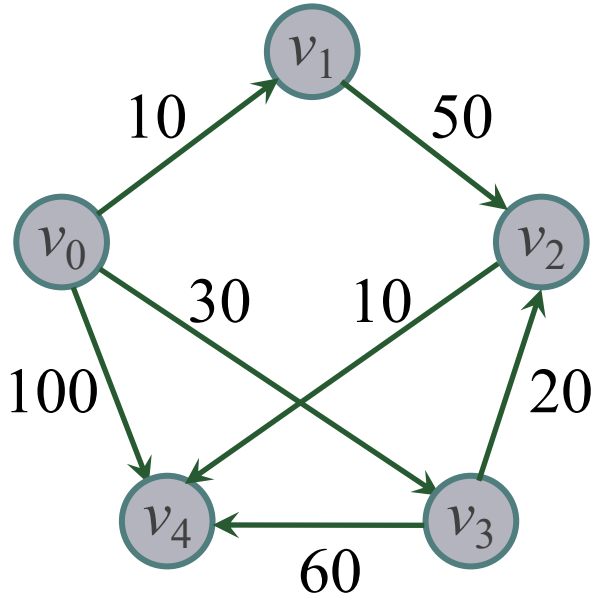
算法：Dijkstra算法

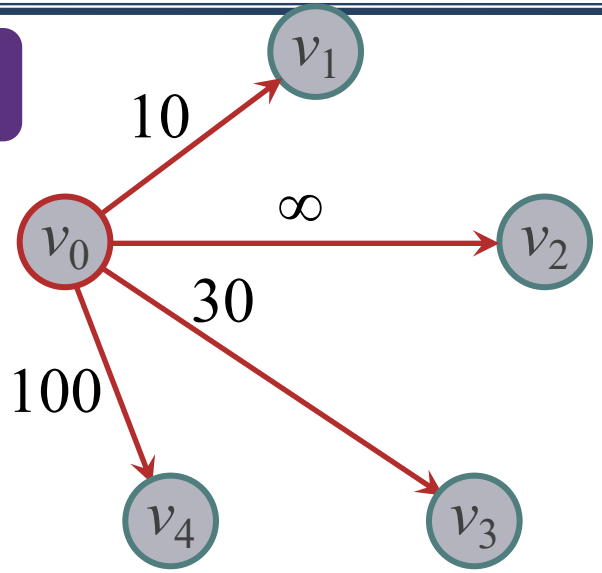
输入：有向网图 $G=(V, E)$，源点 v

输出：从 v 到其他所有顶点的最短路径

1. 初始化：集合$S = \{v\}$； $dist(v, v_i) = w<v, v_i>, (i=1...n)$；
2. 重复下述操作直到 $S == V$
   - 2.1 $dist(v, v_k) = \min\{dist(v, v_j), (j=1..n)\}$；
   - 2.2 $S = S + \{v_k\}$；
   - 2.3 $dist(v, v_j)=\min\{dist(v, v_j), dist(v, v_k) + w<v_k, v_j>\}$；

3. Dijkstra算法实现





当前的最短路径：

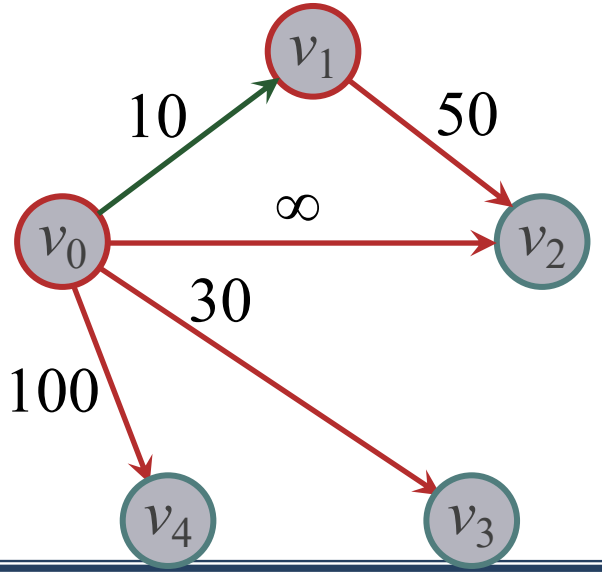
$<v_0,v_1>10$

$<v_0,v_2>\infty$

$<v_0,v_3>30$

$<v_0,v_4>100$

dist[n]	0	10	∞	30	100



当前的最短路径：

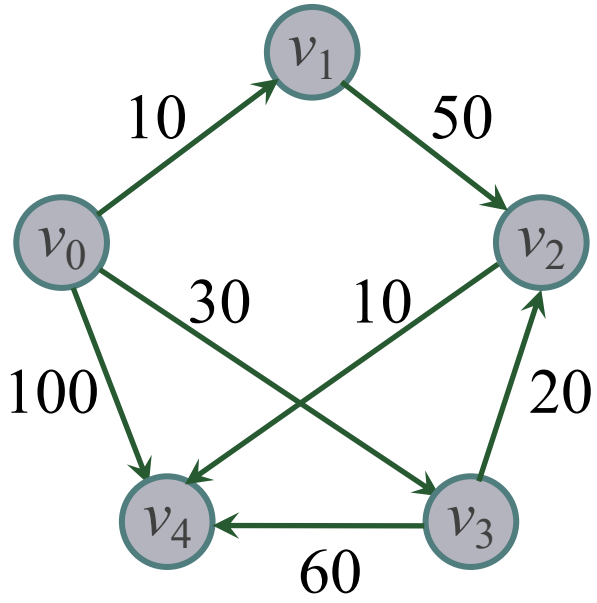
$<v_0,v_1,v_2>60$

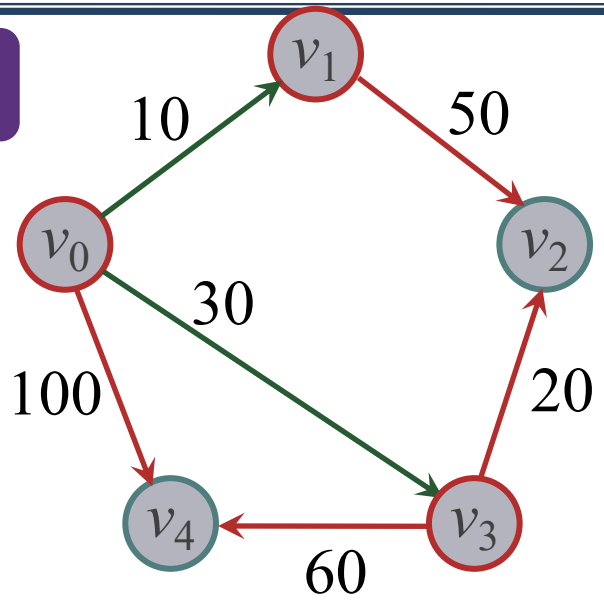
$<v_0,v_3>30$

$<v_0,v_4>100$

dist[n]	0	10	60	30	100

3. Dijkstra算法实现



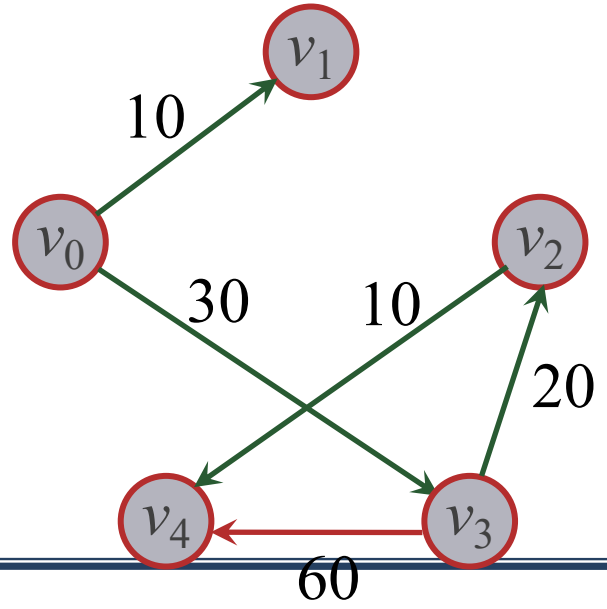


当前的最短路径：

$<v_0,v_3,v_2>50$

$<v_0,v_3,v_4>90$

dist[n]	0	10	50	30	90

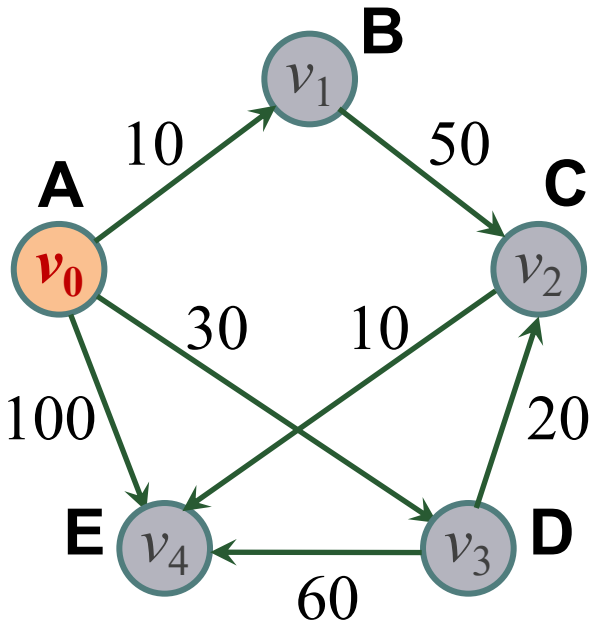


当前的最短路径：

$<v_0,v_3,v_2,v_4>60$

dist[n]	0	10	50	30	60

Dijkstra算法



图

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	10	∞	30	100
v_1	∞	0	50	∞	∞
v_2	∞	∞	0	∞	10
v_3	∞	∞	20	0	60
v_4	∞	∞	∞	∞	0

邻接矩阵　∞=1000

终点： v_1　v_2　v_3　v_4　　S

num=1, k =1

dist：	10	∞	30	100
path：	v_0,v_1	v_0,v_2	v_0,v_3	v_0,v_4

v_0

num=2, k =3

dist：	0	60	30	100
path：	v_0,v_1	v_0,v_1,v_2	v_0,v_3	v_0,v_4

局部最优

v_0,v_1

num=3, k =2

dist：	0	50	0	90
path：	v_0,v_1	v_0,v_3,v_2	v_0,v_3	v_0,v_3,v_4

v_0,v_2,v_3

num=4, k =2

dist：	0	0	0	60
path：	v_0,v_1	v_0,v_3,v_2	v_0,v_3	v_0,v_3,v_2,v_4

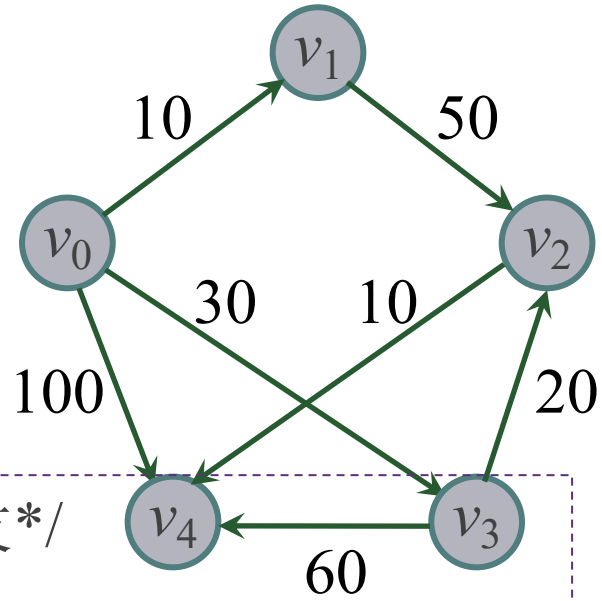
v_0,v_1,v_3,v_2

num=5, k =4

v_0,v_1,v_3,v_2,v_4

3. Dijkstra算法实现

下标 终点	1 v_1	2 v_2	3 v_3	4 v_4	S
dist path	10 v_0,v_1	∞ v_0,v_2	30 v_0,v_3	100 v_0,v_4	v_0

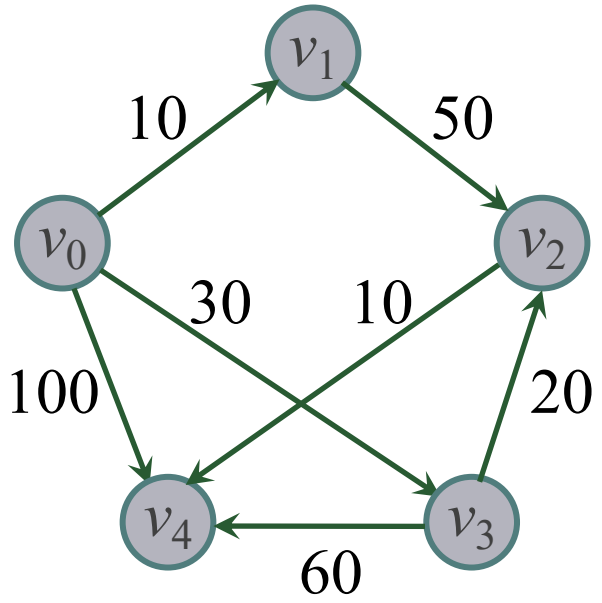



```
void Dijkstra(int v)                          /*从源点v出发*/
{
   int i, k, num, dist[MaxSize];
   string path[MaxSize];
   for (i = 0; i < vertexNum; i++)            /*初始化数组dist[n]和path[n]*/
   {
      dist[i] = edge[v][i];
      path[i] = vertex[v] + vertex[i];        /*字符串连接*/
   }
```

3. Dijkstra算法实现

下标 终点	1 v_1	2 v_2	3 v_3	4 v_4	S
dist path	10 v_0,v_1	∞ v_0,v_2	30 v_0,v_3	100 v_0,v_4	v_0
dist path					v_0,v_1
dist path					
dist path					
dist path					

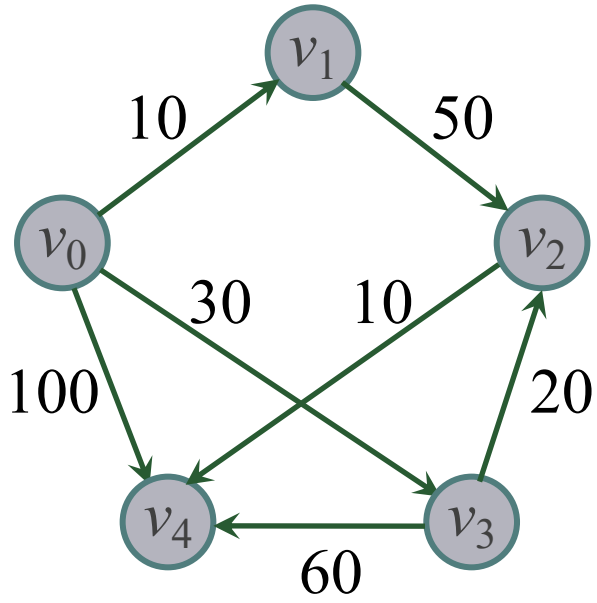
```
for (num = 1; num < vertexNum; num++)
{
    for (k = 0, i = 0; i < vertexNum; i++)
        if ((dist[i] != 0) && (dist[i] < dist[k])) k = i;
    cout << path[k] << dist[k];

}
```



3. Dijkstra算法实现

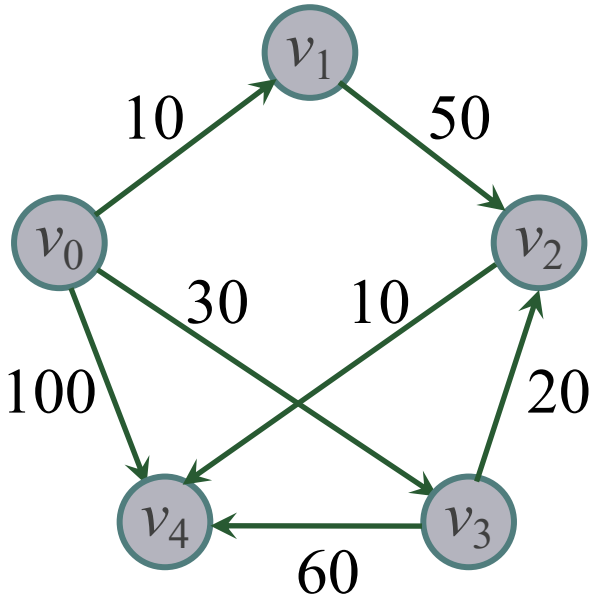
下标 终点	1 v_1	2 v_2	3 v_3	4 v_4	S
dist path	10 v_0,v_1	∞ v_0,v_2	30 v_0,v_3	100 v_0,v_4	v_0
dist path	0 v_0,v_1	60 v_0,v_1,v_2	30 v_0,v_3	100 v_0,v_4	v_0,v_1
dist path					
dist path					
dist path					

```
for (num = 1; num < vertexNum; num++)
{   for (i = 0; i < vertexNum; i++)
        if (dist[i] > dist[k] + edge[k][i]) {
            dist[i] = dist[k] + edge[k][i];
            path[i] = path[k] + vertex[i];
        }
    dist[k] = 0;
}
```



3. Dijkstra算法实现

下标 终点	1 v_1	2 v_2	3 v_3	4 v_4	S
dist path	10 v_0,v_1	∞ v_0,v_2	30 v_0,v_3	100 v_0,v_4	v_0
dist path	0 v_0,v_1	60 v_0,v_1,v_2	30 v_0,v_3	100 v_0,v_4	v_0,v_1
dist path		50 v_0,v_3,v_2	0 v_0,v_3	90 v_0,v_3,v_4	v_0,v_2,v_3
dist path		0 v_0,v_3,v_2		60 v_0,v_3,v_2,v_4	v_0,v_1,v_3,v_2
dist path				0 v_0,v_3,v_2,v_4	v_0,v_1,v_3,v_2,v_4



3. Dijkstra算法实现


```
void Dijkstra(int v)                                   /*从源点v出发*/
{
   int i, k, num, dist[MaxSize];  string path[MaxSize];
   for (i = 0; i < vertexNum; i++)
   {
      dist[i] = edge[v][i];   path[i] = vertex[v] + vertex[i];
   }
   for (num = 1; num < vertexNum; num++)
   {
      for (k = 0, i = 0; i < vertexNum; i++)
         if ((dist[i] != 0) && (dist[i] < dist[k])) k = i;
      cout << path[k] << dist[k];
      for (i = 0; i < vertexNum; i++)
         if (dist[i] > dist[k] + edge[k][i]) {
            dist[i] = dist[k] + edge[k][i];  path[i] = path[k] + vertex[i];
         }
      dist[k] = 0;
   }
}
```

$O(n)$

$O(n)$

$O(n)$

$O(n)$

时间复杂度? ⇨ $O(n^2)$

6.5 最短路径

6-5-2　Floyd算法

问题提出

每一对顶点的最短路径问题

【问题】给定带权有向图 $G=(V,E)$，对任意顶点 v_i 和 v_j（$i \neq j$），求从顶点 v_i 到顶点 v_j 的最短路径

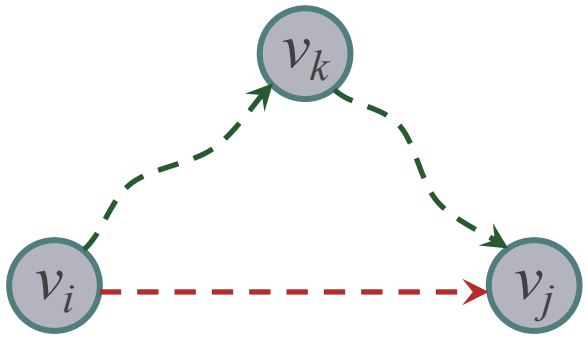
算法1：每次以一个顶点为源头，重复执行 Dijkstra 算法 n 遍，便可得到每一对顶点之间的最短路径。

算法时间复杂度：$O(n^3)$

算法2：Floyd 算法

算法时间复杂度：$O(n^3)$

1. Floyd算法思想



$w<v_i, v_j>$：从顶点 v_i 到顶点 v_j 的权值

$\text{dist}_k(v_i, v_j)$：从顶点 v_i 到顶点 v_j 经过的顶点编号不大于 k 的最短路径长度

算法：Floyd算法

输入：带权有向图 $G=(V, E)$

输出：每一对顶点的最短路径

1. 初始化：假设从 v_i 到 v_j 的弧是最短路径，即$\text{dist}_{-1}(v_i, v_j)=w<v_i, v_j>$；
2. 循环变量 k 从 $0\sim n-1$ 进行 n 次迭代：

$$\text{dist}_k(v_i, v_j)=\min\{\text{dist}_{k-1}(v_i, v_j), \text{dist}_{k-1}(v_i, v_k)+\text{dist}_{k-1}(v_k, v_j)\}$$

2. Floyd算法存储结构

如何存储dist？ 如何存储带权有向图？ ⇨ 邻接矩阵

$$\begin{cases} \text{dist}_{-1}(v_i, v_j) = w<v_i, v_j> \\ \text{dist}_k(v_i, v_j) = \min\{\text{dist}_{k-1}(v_i, v_j), \text{dist}_{k-1}(v_i, v_k)+\text{dist}_{k-1}(v_k, v_j)\} \end{cases}$$

算法：Floyd算法

输入：带权有向图 $G=(V, E)$

输出：每一对顶点的最短路径

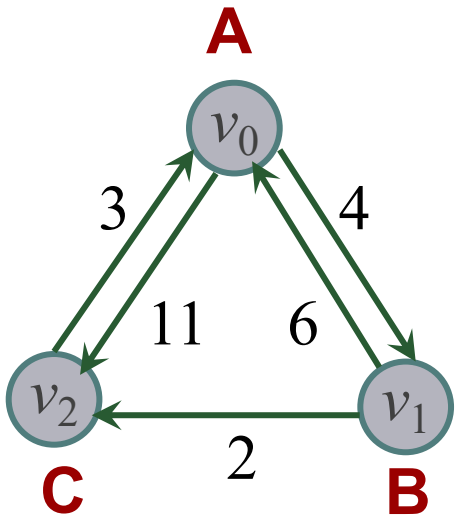
1. 初始化：假设从 v_i 到 v_j 的弧是最短路径，即$\text{dist}_{-1}(v_i, v_j)=w<v_i, v_j>$；
2. 循环变量 k 从 $0\sim n-1$ 进行 n 次迭代：

$$\text{dist}_k(v_i, v_j)=\min\{\text{dist}_{k-1}(v_i, v_j), \text{dist}_{k-1}(v_i, v_k)+\text{dist}_{k-1}(v_k, v_j)\}$$

3. Floyd算法实现

初始化

$$dist_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$



$$path_{-1} = \begin{pmatrix} & AB & AC \\ BA & & BC \\ CA & CB & \end{pmatrix}$$

```
void Floyd( )                    string ch[ ]={"A","B","C"};
{
   int i, j, k, dist[MaxSize][MaxSize];
   string path[MaxSize][MaxSize];
   for (i = 0; i < vertexNum; i++)
      for (j = 0; j < vertexNum; j++)
       {  dist[i][j] = edge[i][j];
          if (dist[i][j] != 1000)
              path[i][j] = vertex[i] + vertex[j];
          else path[i][j] = "";
       }


}
```

3. Floyd算法实现

经过v_0

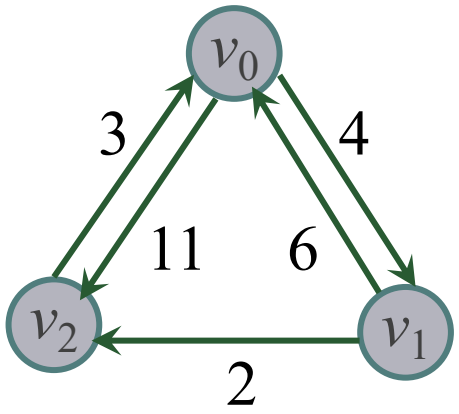
$$dist_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

经过v_1

$$dist_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

经过v_2

$$dist_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$




```
for (k = 0; k < vertexNum; k++)
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)
        for (j = 0; j < vertexNum; j++)
            if (dist[i][k] + dist[k][j] < dist[i][j])
            {       dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j];
                    path[i][j] = path[i][k] + path[k][j];
            }
```

3. Floyd算法实现

```
void Floyd( )
{
    int i, j, k, dist[MaxSize][MaxSize];
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)
        for (j = 0; j < vertexNum; j++)
            dist[i][j] = edge[i][j];
    for (k = 0; k < vertexNum; k++)
        for (i = 0; i < vertexNum; i++)
            for (j = 0; j < vertexNum; j++)
                if (dist[i][k] + dist[k][j] < dist[i][j])
                    dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j];
}
```

$O(n^2)$

$O(n^3)$

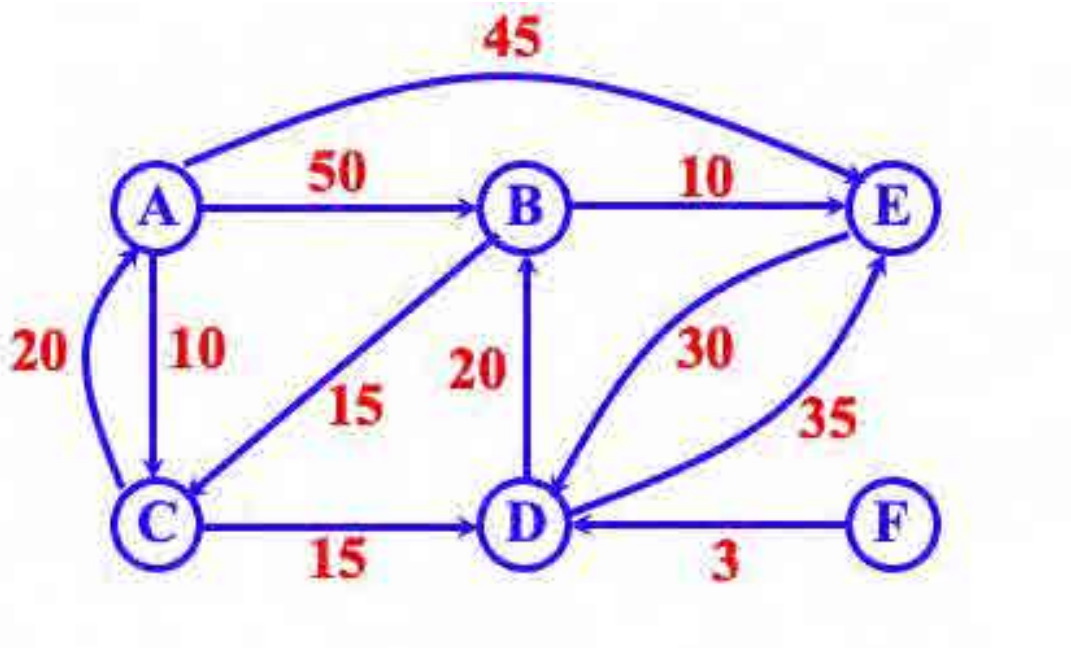
时间复杂度? ⇨ $O(n^3)$

小结

1. 掌握Dijkstra算法及实现方法
2. 理解Floyd算法及实现方法

作业

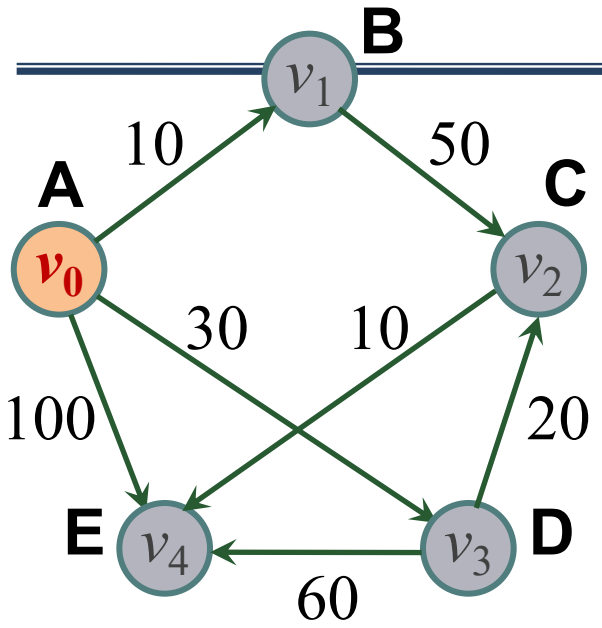
1. 求 A 到其它各点的最短路径及长度　要求：中间过程
2. 求所有顶点对之间的最短路径及长度　要求：中间过程



Thank You !

Q & A

Dijkstra算法



图

终点:	v_1	v_2	v_3	v_4	S
dist:	10	∞	30	100	num=1, k =1
path:	v_0,v_1	v_0,v_2	v_0,v_3	v_0,v_4	v_0
dist:	0	60	30	100	num=2, k =3
path:	v_0,v_1	v_0,v_1,v_2	v_0,v_3	v_0,v_4	v_0,v_1
		局部最优			
dist:	0	50	0	90	num=3, k =2
path:	v_0,v_1	v_0,v_3,v_2	v_0,v_3	v_0,v_3,v_4	v_0,v_2,v_3

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	0	10	∞	30	100
v_1	∞	0	50	∞	∞
v_2	∞	∞	0	∞	10
v_3	∞	∞	20	0	60
v_4	∞	∞	∞	∞	0

邻接矩阵　∞=1000

```
for (num = 1; num < vertexNum; num++)
{
   for (k = 0, i = 0; i < vertexNum; i++)
      if ((dist[i] != 0) && (dist[i] < dist[k])) k = i;
   cout << path[k] << dist[k];
   for (i = 0; i < vertexNum; i++)
      if (dist[i] > dist[k] + edge[k][i]) {
         dist[i] = dist[k] + edge[k][i];  path[i] = path[k] + vertex[i];
      }
   dist[k] = 0;
}
```