Data Structures

字符串和多维数组
String & Matrices

2022 年 10 月 7 日

学而不厭 誨人不倦

☞ 4.1 引言

☞ 4.2 字符串

☞ 4.3 多维数组

☞ 4.4 矩阵的压缩存储

☞ 4.5 扩展与提高

☞ 4.6 应用举例

4.3 多维数组

4-3-1 数组的逻辑结构

1. 数组的定义

数组是n (n>=0) 个相同数据类型数据元素构成的有限序列。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

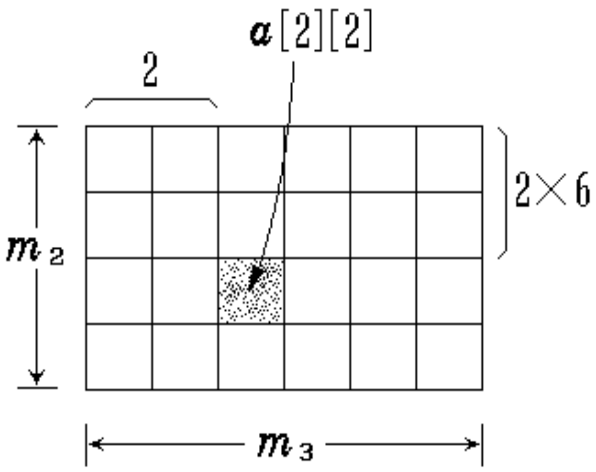
- 数组中的数据元素数目固定;
- 数组中的数据元素具有相同的数据类型;
- 数组中的每个数据元素都与一组唯一的下标值相对应;
- 数组是一种随机存储结构。

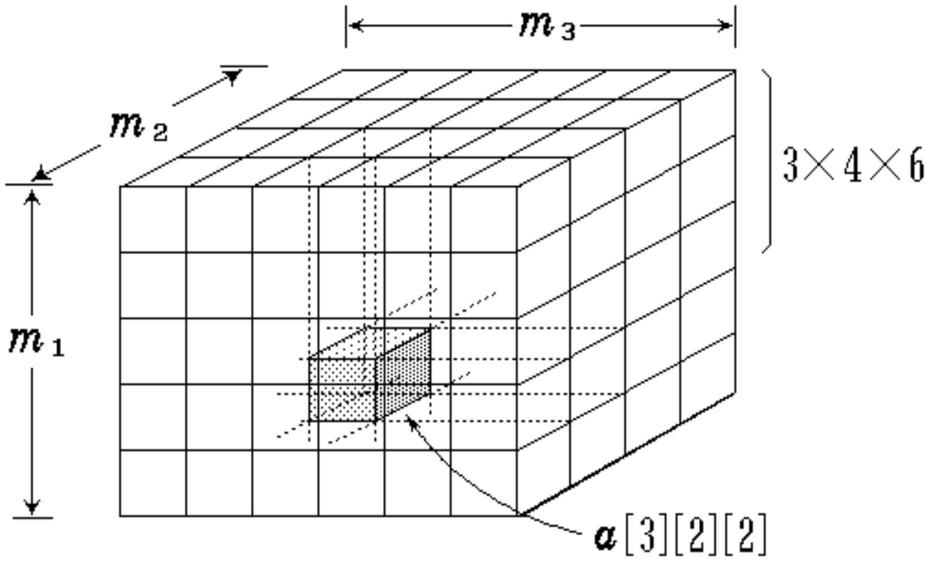
2. 数组的特点

- 一个**一维数组**，一旦第一个元素a_i的存储地址Loc(a_i)确定，而每个元素所占用的存储空间大小为**k**，则第**i**个元素的地址可以由以下公式计算：

$$Loc(a_i)=Loc(a_0)+i\times k$$

$m_1=5$　$m_2=4$　$m_3=6$





2. 数组的特点

以行序为主序：C/C++

$A=(A_1, A_2, \ldots, A_m)$

其中：

$A_i=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})\ (1\le i\le m)$

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} [a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0,n-1}] \\ [a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1}] \end{bmatrix}$$

以列序为主序：Fortran

$A=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$

其中：

$A_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})\ (1\le j\le n)$

$$A_{m\times n}=\left[\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{m-1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{m-1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{02} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m-1,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{0,n-1} \\ a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{m-1,n-1} \end{bmatrix}\right]$$

2. 数组的特点

数组有什么特点呢？

（1）元素本身可以具有某种结构，属于同一数据类型；

（2）数组是一个具有固定格式和数量的数据集合。

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & x & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

在数组上一般不能执行插入或删除某个数组元素的操作

2. 数组的特点

数组有什么基本操作呢？

（1）存取：给定一组下标，读出对应的数组元素

（2）修改：给定一组下标，存储或修改与其相对应的数组元素

寻址

ADT Matrix

DataModel

相同类型的数据元素的有序集合，每个元素受n（$n \geq 1$）个线性关系的约束

Operation

InitMatrix：数组的初始化

DestroyMatrix：数组的销毁

GetMatrix：读操作，读取这组下标对应的数组元素

SetMatrix：写操作，存储或修改这组下标对应的数组元素

endADT

4.3 多维数组

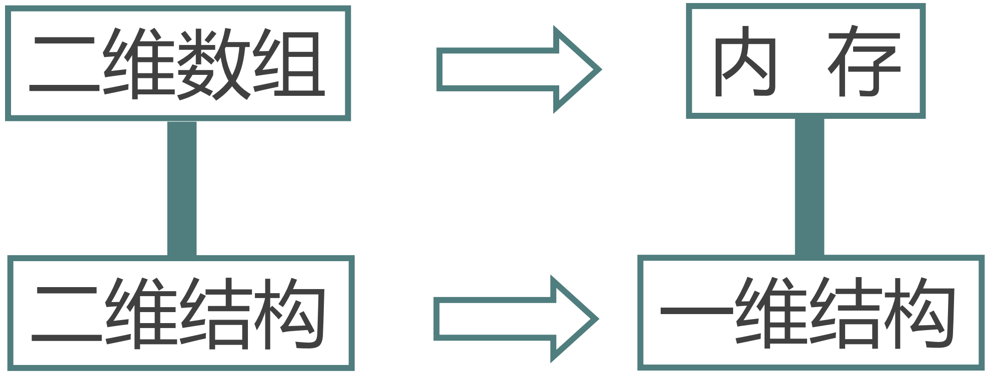
4-3-2　数组的存储结构

4.3 多维数组

1. 数组的存储结构

如何存储（多维）数组呢？

数组没有插入和删除操作，所以，不用预留空间，适合采用顺序存储



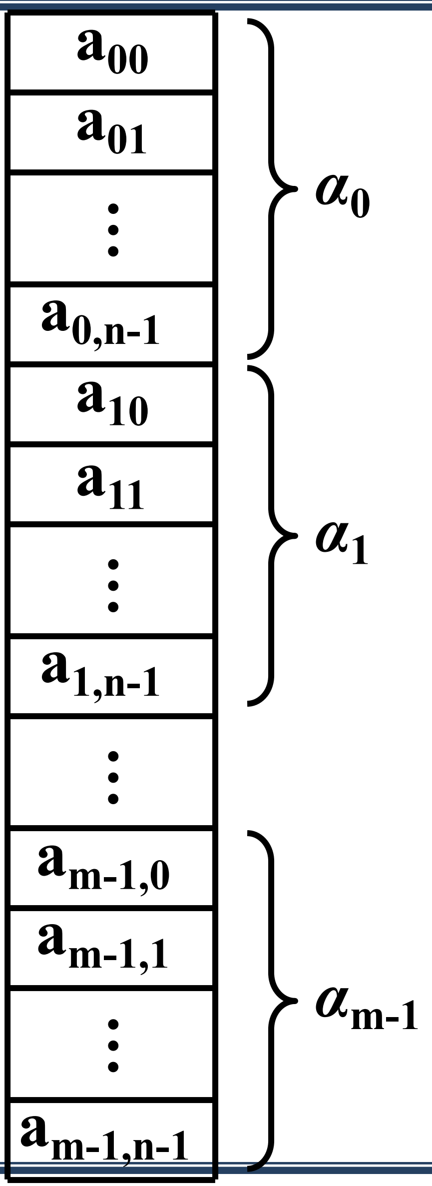
- 按行优先：先存储行号较小的元素，行号相同者先存储列号较小的元素
- 按列优先：先存储列号较小的元素，列号相同者先存储行号较小的元素

1. 数组的存储结构

以行序为主序：C/C++

$$A_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} [a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0,n-1}] \\ [a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1}] \end{bmatrix}$$



1.数组的存储结构

设二维数组 $A(m \times n)$

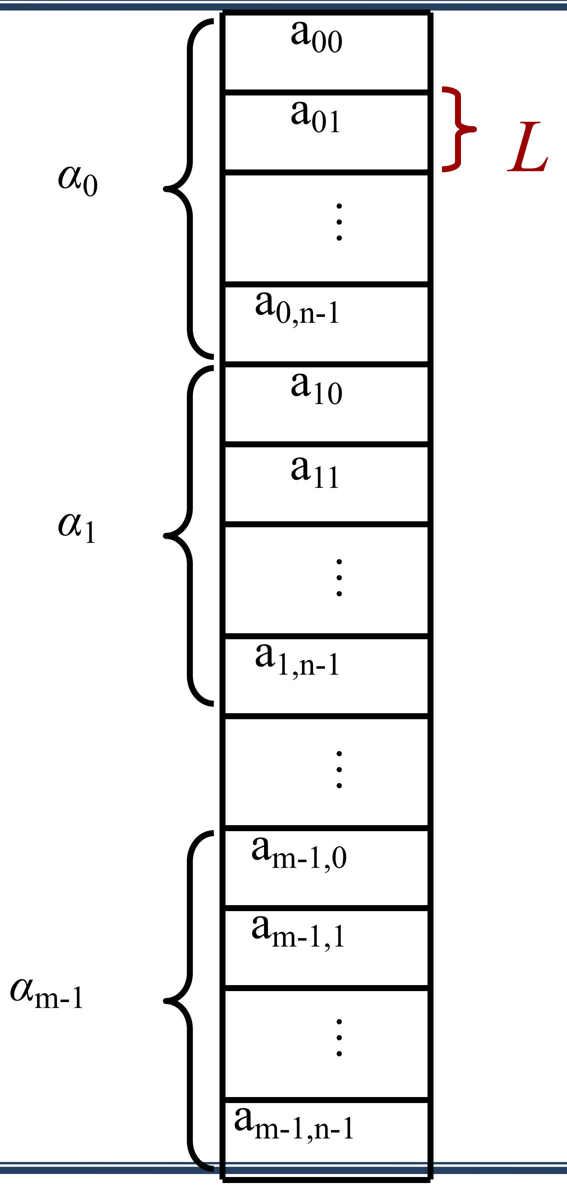
其数组元素 a_{ij} 的存储位置为

$$LOC(i, j) = LOC(0, 0) + (n \times i + j) L$$

其中，$LOC(0, 0)$是a_{00}的存储位置；

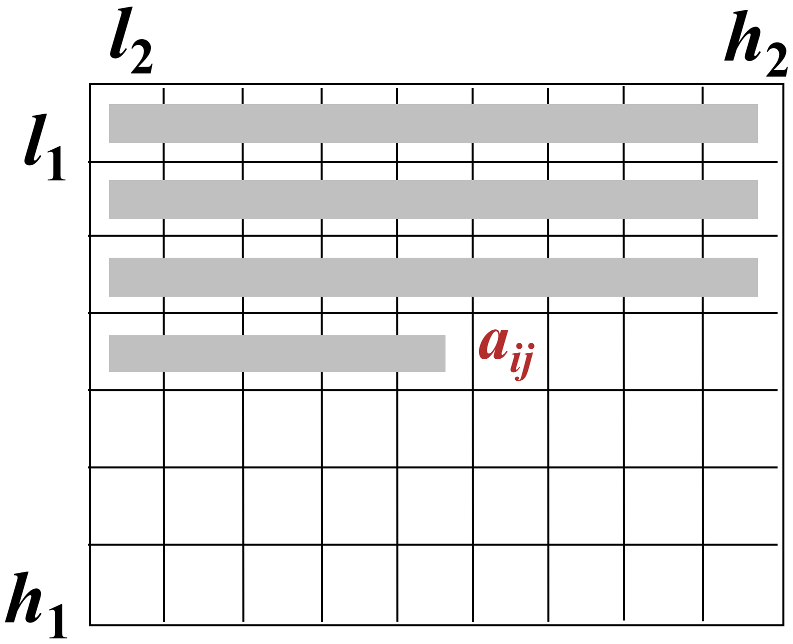
L是每个数组元素占用的存储单元数；

例，$LOC(1, 1) = LOC(0, 0) + (n \times 1 + 1) L$



1. 数组的存储结构

按行优先：先存储行号较小的元素，行号相同者先存储列号较小的元素



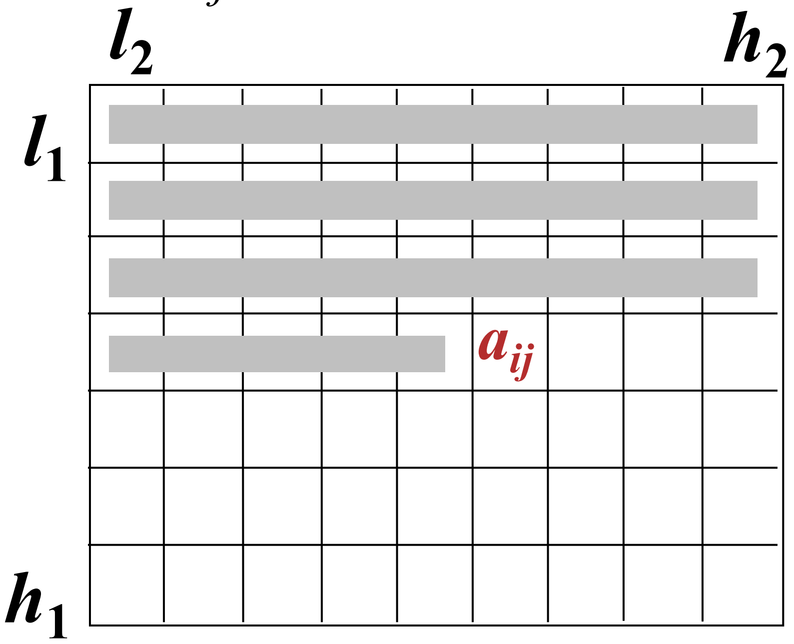
如何得到元素a_{ij}的存储地址？

第l_1行　　　　第l_1+1行

$a_{l_1 l_2}$	$\cdots$	$a_{l_1 h_2}$	$a_{(l_1+1)l_2}$	$\cdots$	$a_{(l_1+1)h_2}$	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	$a_{h_1 h_2}$

1. 数组的存储结构

$$\mathrm{Loc}(a_{ij})=\mathrm{Loc}(a_{l1l2})+((i-l_1)\times(h_2-l_2+1)+(j-l_2))\times c$$

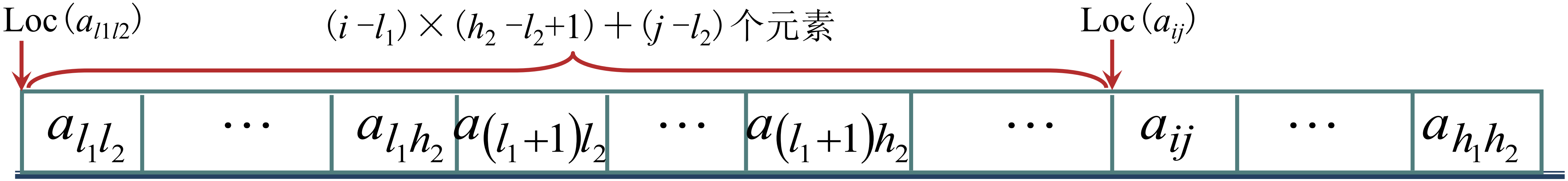


a_{ij}前面的元素个数

=整行数×每行元素个数+本行中a_{ij}前面的元素个数

$=(i-l_1)\times(h_2-l_2+1)+(j-l_2)$

按列优先与此类似，请自行给出



4.4 矩阵的压缩存储

4-4-1　特殊矩阵的压缩存储

特殊矩阵

- 特殊矩阵：矩阵中很多值相同的元素并且它们的分布有一定的规律

  为值相同的元素分配一个存储空间

  保证随机存取，即在$O(1)$时间内寻址

压缩思路： 用一维数组 SA 模拟存储 n 阶矩阵 A 。

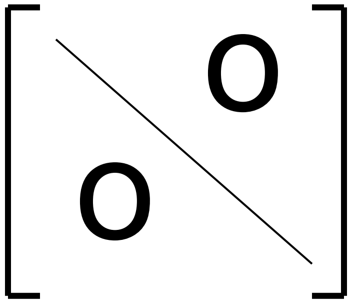
关键问题：如何建立 数组元 SA[k] 和 矩阵元 a_{ij} 之间的一一对应关系。

4.4 矩阵的压缩存储

1. 对称矩阵

对称矩阵特点：$a_{ij}=a_{ji}$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$



如何压缩存储对称矩阵呢？ ⇨ 只存储下三角部分的元素

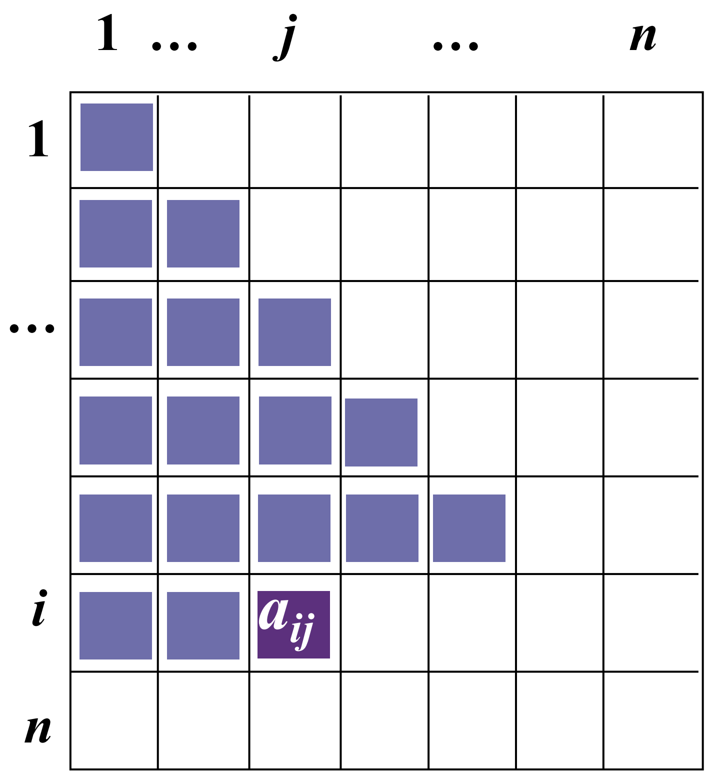
1. 对称矩阵

a_{ij} 在一维数组中的序号 $= i\times(i-1)/2+j$

$\because$ 一维数组下标从 0 开始

$\therefore a_{ij}$ 在一维数组中的下标

$$k = i\times(i-1)/2+j-1$$



0	1	2	3	4	5		k					n(n+1)/2-1
a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{ij}	…	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}
第1行	第2行		第3行						第n行			

1. 对称矩阵

对称矩阵压缩存储后的寻址方法

$$k = \begin{cases} \dfrac{i(i-1)}{2} + j - 1 & \text{当} \quad i \geq j \\[2ex] \dfrac{j(j-1)}{2} + i - 1 & \text{当} \quad i < j \end{cases}$$

0	1	2	3	4	5		k					n(n+1)/2-1
a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{ij}	…	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}
第1行	第2行		第3行						第n行			

1. 对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & & & 0 & \\ 5 & 2 & & & \\ 3 & 1 & 3 & & \\ 2 & 5 & 2 & 8 & \\ 1 & 6 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

n = 5, 1+2+3+4+5 = 5*(5+1)/2 = 15

一维数组 SA[1..15] **作为数组** A **的存储结构**:

SA=(4 5 2 3 1 3 2 5 2 8 1 6 7 9 5)

如: a[5,3] = a[3,5] = 7

k = i(i-1)/2 + j-1 = 5(5-1)/2 + 3-1 = 12

故:sa[12] = 7

2. 三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & c & c & c & c \\ 6 & 2 & c & c & c \\ 4 & 8 & 1 & c & c \\ 7 & 4 & 6 & 0 & c \\ 8 & 2 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) 下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ c & 2 & 9 & 4 & 6 \\ c & c & 1 & 5 & 7 \\ c & c & c & 0 & 8 \\ c & c & c & c & 7 \end{pmatrix}$$

(b) 上三角矩阵

如何压缩存储三角矩阵呢？ ⇨ 下（上）三角部分的元素；相同的常数只存储一个

2. 三角矩阵

下三角矩阵的压缩存储

0	1	2	3	4	5		k						n(n+1)/2
a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{ij}	…	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	c
第1行	第2行		第3行						第n行				

下三角矩阵压缩存储后的寻址方法

对于下三角中的元素a_{ij}（$i \geq j$）：$k = i \times (i-1)/2 + j-1$

对于上三角中的元素a_{ij}（$i < j$）：$k = n \times (n+1)/2$

上三角矩阵的压缩存储请仿此给出

3. 对角矩阵

对角矩阵：所有非零元素都集中在以主对角线为中心的带状区域中，所有其他元素都为零

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

如何压缩存储对角矩阵呢？

⇩

只存储非零元素

3. 对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 在一维数组中的序号

$=2+3(i-2)+(j-i+2)$

$=2i+j-2$

∵一维数组下标从 0 开始

∴元素 a_{ij} 在一维数组中的下标

$=2i+j-3$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{54}	a_{55}

第1行　第2行　第3行

4.4 矩阵的压缩存储

4-4-2　稀疏矩阵的压缩存储

1. 稀疏矩阵定义及特点

- 稀疏矩阵：矩阵中有很多零元素，并且分布没有规律

- 稀疏矩阵如何压缩存储？

  只存储非零元素，零元素不分配存储空间

- 如何只存储非零元素？

- 三元组：（行号，列号，非零元素值）

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. 三元组表

- 三元组表：将稀疏矩阵的非零元素对应的三元组所构成的集合，按行优先的顺序排列成一个线性表

((1, 1, 3), (1, 4, 7), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (5, 4, 8))

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

```
template <typename DataType>
struct element
{
    int row, col;
    DataType item;
};
```

- 三元组：（行号，列号，非零元素值）

3. 三元组顺序表

- 三元组顺序表：采用顺序存储结构存储三元组表

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

((1, 1, 3), (1, 4, 7), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (5, 4, 8))

稀疏矩阵的修改操作 ⇨ 三元组表的插入/删除操作

3. 三元组顺序表

是否对应惟一的稀疏矩阵？

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

```
const int MaxTerm = 100;
struct SparseMatrix
{
     element data[MaxTerm];
     int mu, nu, tu;  //行数、列数、非零元素数目
};
```

	row	col	item
0	1	1	3
1	1	4	7
2	2	3	1
3	3	1	2
4	5	4	8
	空闲	空闲	空闲
MaxTerm−1			
	5（矩阵的行数）		
	4（矩阵的列数）		
	5（非零元个数）		

缺点：稀疏矩阵的加法、乘法等操作，非零元素的个数及位置都会发生变化，则在三元组顺序表中就要进行插入和删除操作，顺序存储就十分不便

4. 十字链表

十字链表：采用链接存储结构存储三元组表

row	col	item
down		right

```
struct OrthNode
{
    Element data;
    OrthNode *right, *down;
};
```

row： 非零元行号

col： 非零元列号

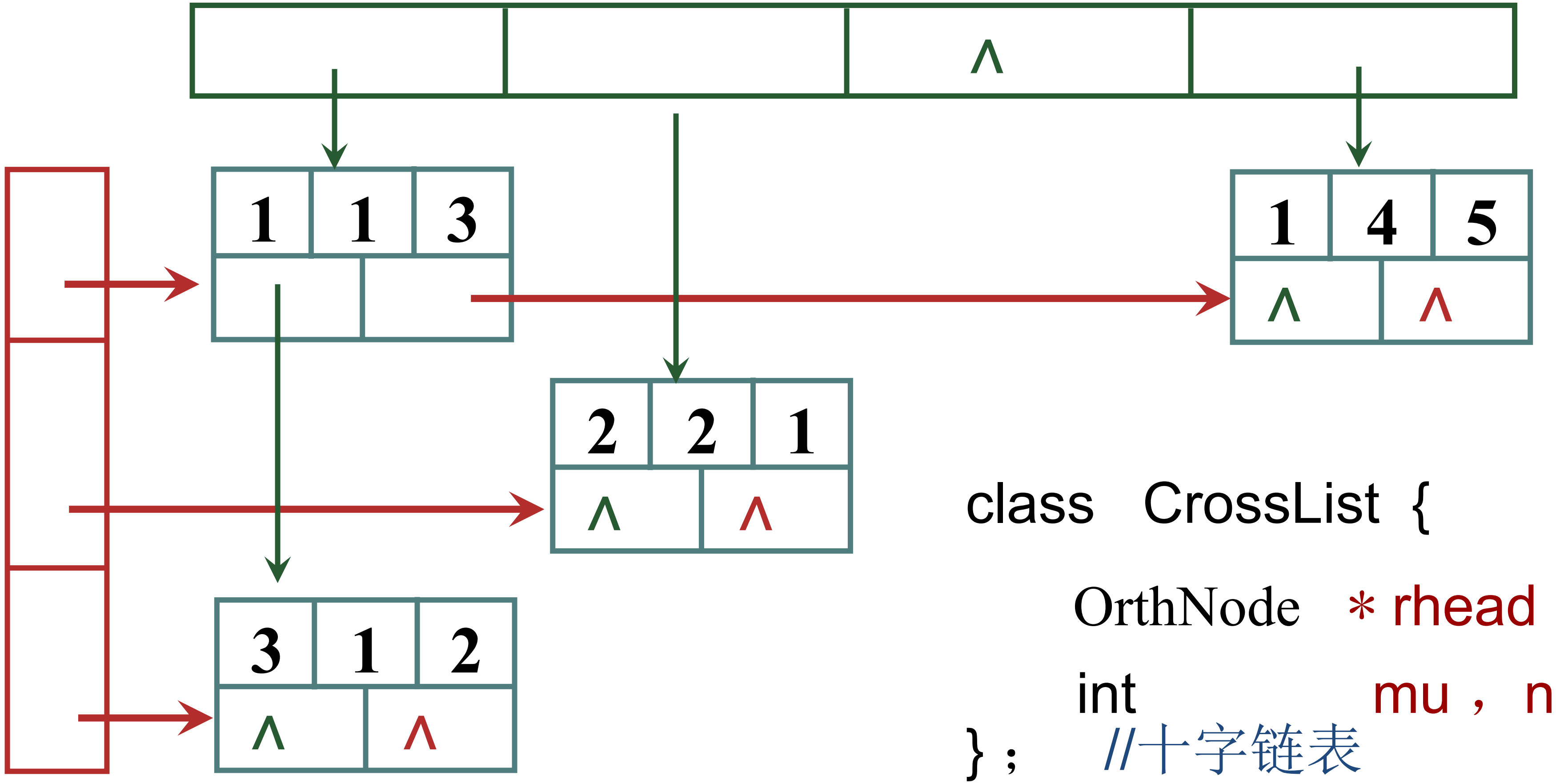
item： 非零元值

right： 本行下一个非零元

down： 本列下一个非零元

4. 十字链表

每个非零元既是某个行链表中的结点，又是某个列链表中的结点，整个矩阵构成了一个十字交叉的链表，故称为十字链表结构。



$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
class  CrossList {
    OrthNode  * rhead , * chead ;  //一维数组
    int        mu , nu , tu ;
} ;   //十字链表
```

4.5 扩展与提高

矩阵乘法的最新进展

nature

Explore content ⌄ About the journal ⌄ Publish with us ⌄

nature > articles > article

Article | Open Access | Published: 05 October 2022

Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning

Alhussein Fawzi, Matej Balog, Aja Huang, Thomas Hubert, Bernardino Romera-Paredes, Mohammadamin Barekatain, Alexander Novikov, Francisco J. R. Ruiz, Julian Schrittwieser, Grzegorz Swirszcz, David Silver, Demis Hassabis & Pushmeet Kohli

Nature **610**, 47–53 (2022) | Cite this article

Metrics

一个4X5和5X5矩阵乘，标准算法需要100次乘法，Strassen算法需要80次乘法，DeepMind的AlphaTensor找到了一种只需要76次乘法的解法。

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}$$

Standard algorithm	Strassen's algorithm
$h_1 = a_{1,1}\, b_{1,1}$	$h_1 = (a_{1,1} + a_{2,2})\,(b_{1,1} + b_{2,2})$
$h_2 = a_{1,1}\, b_{1,2}$	$h_2 = (a_{2,1} + a_{2,2})\, b_{1,1}$
$h_3 = a_{1,2}\, b_{2,1}$	$h_3 = a_{1,1}\,(b_{1,2} - b_{2,2})$
$h_4 = a_{1,2}\, b_{2,2}$	$h_4 = a_{2,2}\,(-b_{1,1} + b_{2,1})$
$h_5 = a_{2,1}\, b_{1,1}$	$h_5 = (a_{1,1} + a_{1,2})\, b_{2,2}$
$h_6 = a_{2,1}\, b_{1,2}$	$h_6 = (-a_{1,1} + a_{2,1})\,(b_{1,1} + b_{1,2})$
$h_7 = a_{2,2}\, b_{2,1}$	$h_7 = (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2})$
$h_8 = a_{2,2}\, b_{2,2}$	
$c_{1,1} = h_1 + h_3$	$c_{1,1} = h_1 + h_4 - h_5 + h_7$
$c_{1,2} = h_2 + h_4$	$c_{1,2} = h_3 + h_5$
$c_{2,1} = h_5 + h_7$	$c_{2,1} = h_2 + h_4$
$c_{2,2} = h_6 + h_8$	$c_{2,2} = h_1 - h_2 + h_3 + h_6$

1. 稀疏矩阵的转置

实质：行、列号交换

(1，2，12) ⟶ (2，1，12)

(4，3，24) ⟶ (3，4，24)

矩阵$M_{6\times7}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

转置矩阵$T_{7\times6}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 15 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 稀疏矩阵的转置

矩阵$M_{6\times7}$

i	j	a_{ij}
1	2	12
1	3	9
3	1	-3
3	6	14
4	3	24
5	2	18
6	1	15
6	4	-7

①

i	j	a_{ij}
2	1	12
3	1	9
1	3	-3
6	3	14
3	4	24
2	5	18
1	6	15
4	6	-7

②

转置矩阵$T_{7\times6}$

i	j	a_{ij}
1	3	-3
1	6	15
2	1	12
2	5	18
3	1	9
3	4	24
4	6	-7
6	3	14

2. 稀疏矩阵的转置算法

按照 T 中三元组的次序依次在 M 中寻找相应的三元组进行转置。

T 按行序等价于 M 按列序

实质：按照 M 的列序进行转置。

思想：按照 M 的列序从头到尾对 M 三元组进行扫描，找到一个，就进行转置，并插入到 T 三元组中。

2. 稀疏矩阵的转置算法

矩阵$M_{6\times7}$

i	j	a_{ij}
1	2	12
1	3	9
3	1	-3
3	6	14
4	3	24
5	2	18
6	1	15
6	4	-7

col = 6

转置矩阵$T_{7\times6}$

i	j	a_{ij}
1	3	-3
1	6	15
2	1	12
2	5	18
3	1	9
3	4	24
4	6	-7
6	3	14

3. 稀疏矩阵的转置实现

- 基本思想：设两个顺序表A、B，在A中依次查找第1列、第2列、…、最后一列，将找到后的元素行号列号交换并转储到B中。

```
void Transpose_1(SparseMatrix &A, SparseMatrix &B)
{
    int pa, pb, col;
    B.mu = A.nu; B.nu = A.mu; B.tu = A.tu;
    pb = 0;
    for (col =1;col<=A.nu;col++)
        for(pa=0;pa<A.tu;pa++)
            if(A.data[pa].col==col)
            {
                B.data[pb].row = A.data[pa].col;
                B.data[pb].col = A.data[pa].row;
                B.data[pb].item = A.data[pa].item;
                pb++;
            }
}
```

4. 算法复杂度分析

算法的时间复杂度： $O(nu \times tu)$

若 tu 和 mu×nu 同数量级，时间复杂度为$O(mu \times nu^2)$

一般矩阵的转置算法为:

```
for ( col = 1 ; col <= nu ; ++ col )
    for ( row = 1 ; row <= mu ; ++ row )
        T[col][row] = M[row][col] ;
```

时间复杂度： $O(mu \times nu)$

由此可知，此算法仅适用于 $tu \ll mu \times nu$ 的情况。

优点: 非零元在表中按行序有序存储，便于进行依行顺序处理的矩阵运算。

缺点: 无法直接存取某行的某个非零元素。

1. 广义表的概念

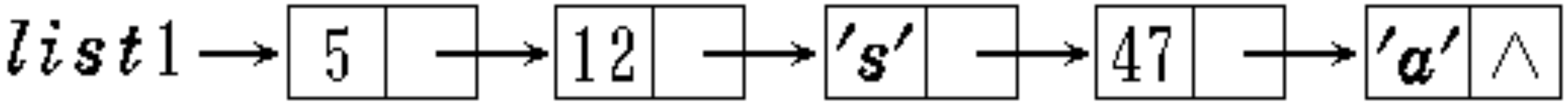
概念：广义表是n(n>=0)个元素$a_1,a_2,\ldots,a_n$的有限序列，其中a_i或者是原子或者是一个广义表。

- 表的深度：表展开后所含括号的层数。
- 递归表：允许递归的表。
- 再入表：允许结点共享的表。
- 纯表：与树对应的表。
- 线性表：

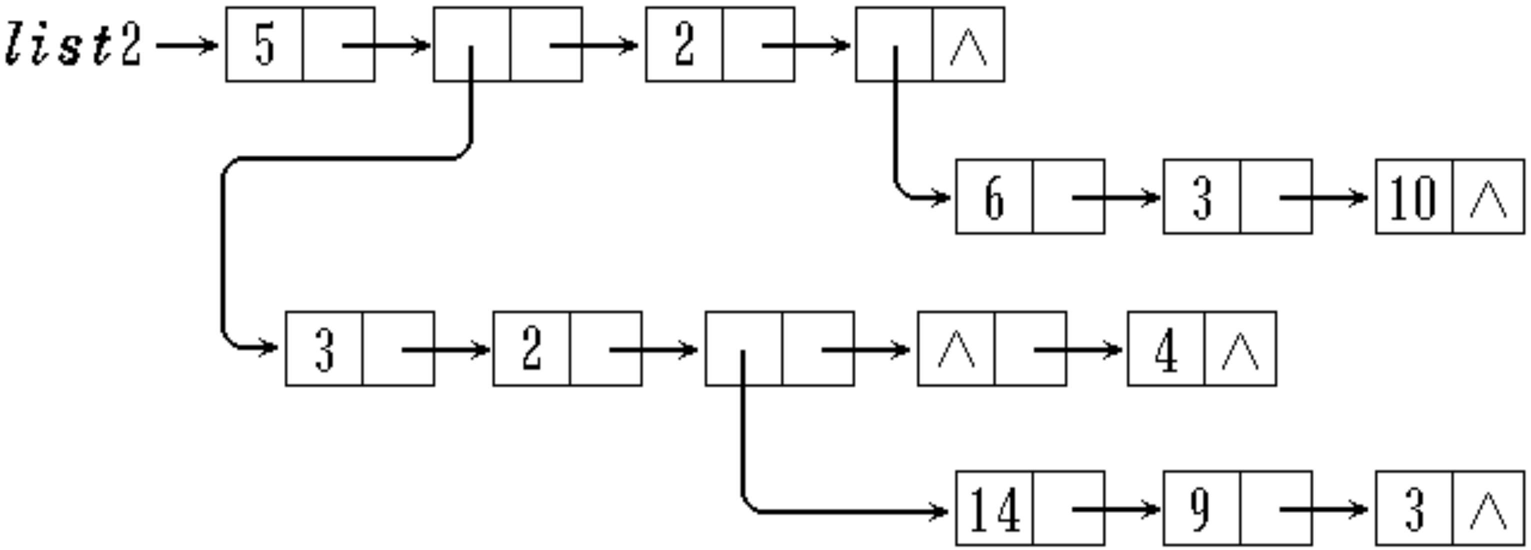
通常用圆括号将广义表括起来，用逗号分隔其中的元素。为了区分原子和广义表，书写时用大写字母表示广义表，用小写字母表示原子。

2. 广义表的表示

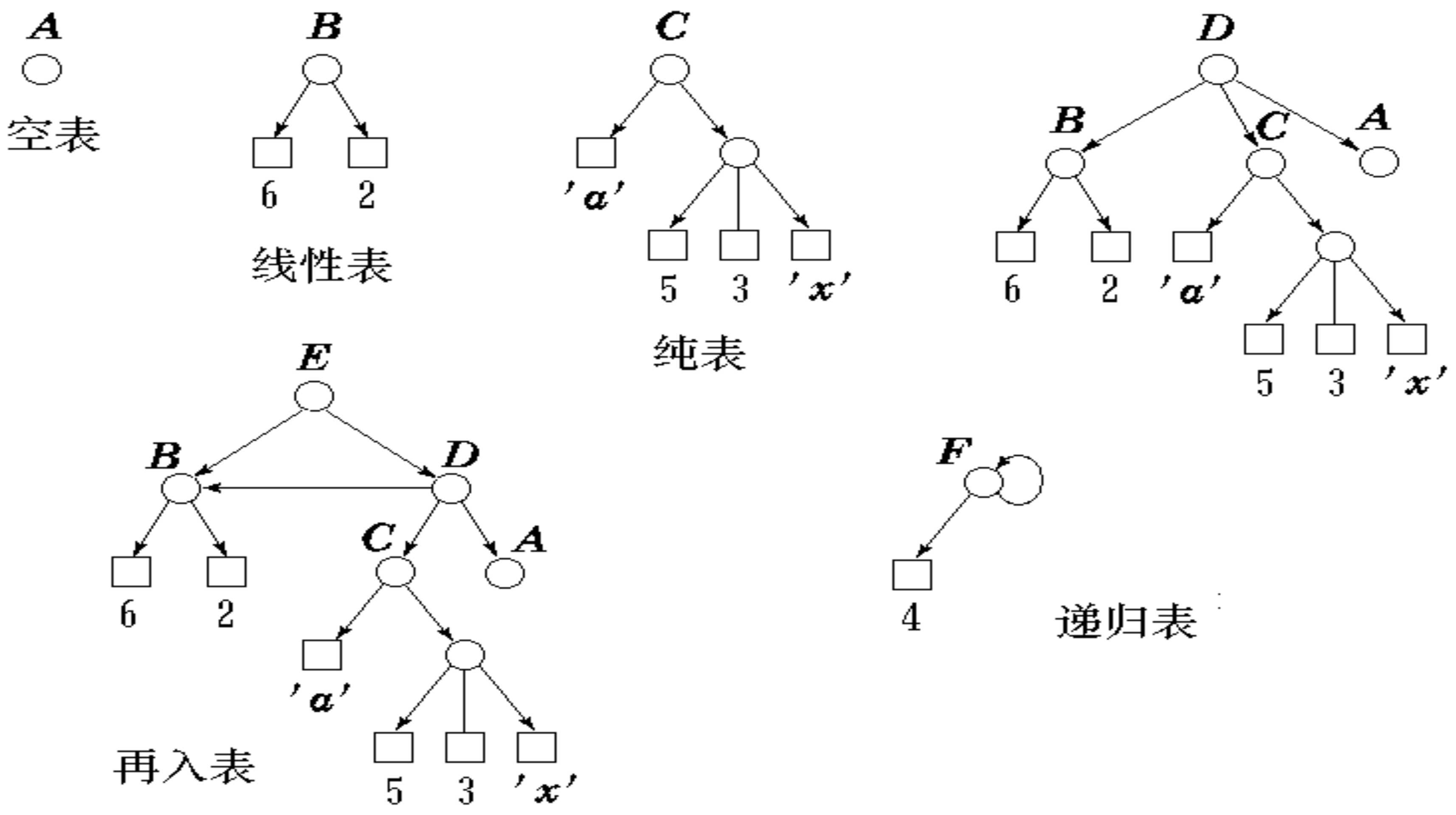
只包括整数和字符型数据的广义表链表表示



表中套表情形下的广义表链表表示



2. 广义表的表示



3. 广义表的定义

广义表(列表) $LS = (a_1 , a_2 , . . . , a_n)$

LS： 列表名称

n ： 列表长度

a_i ： 可以是单个*元素*，也可以是子列表，分别称为原子和子表。

a_1 ： LS 的表头 (第一个*元素*)。

$(a_2 , a_3 , . . . , a_n)$： LS 的表尾 (列表)。

3. 广义表的定义

(1) A = ( ) —— A是一个空表，长度为 0 。

(2) B = (e) —— B中只有一个原子 e ，长度为 1 。

(3) C = (a ,(b ,c ,d)) —— C有两个元素，原子 a 和子表 (b ,c ,d) ，长度为 2 。

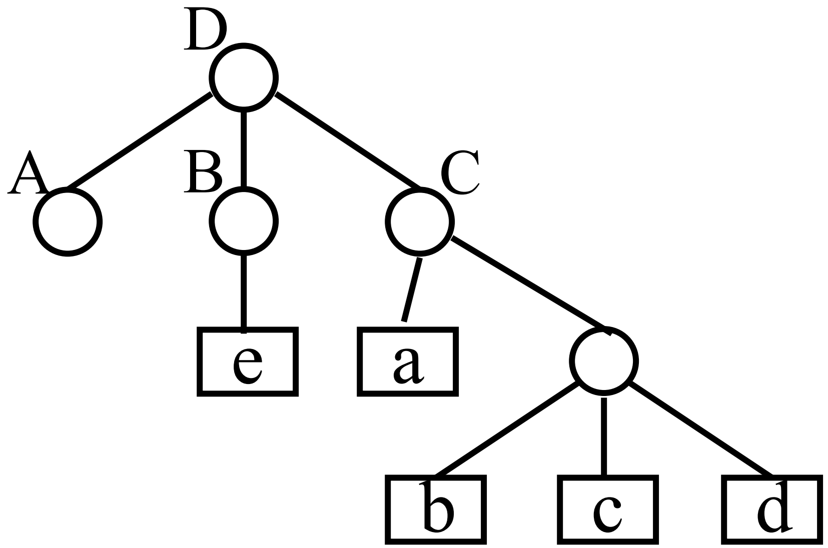
(4) D = (A ,B ,C) —— D有三个元素，都是子表，长度为 3 。且有

D = (( ) ,(e) ,(a ,(b ,c ,d))) 。

(5) E = (a ,E) —— E为一个递归的表，长度为 2 。且有 E = (a ,(a ,(a ,···))) 。

4. 广义表的性质

(1) 列表是一个多层次的结构。



可见，列表可以描述为一棵树。

(2) 列表可为其它列表所共享。

例，D = (A ,B ,C)

(3) 列表可以是一个递归的表。

例， E = (a , E)

(4) ( ) $\overset{?}{=}$ (( ))

( ) 为空表，长度 0；(( )) 长度 1，可分解得到表头、表尾均为空表 ( )。

4. 广义表的性质

(5) 任何一个非空列表，其表头可能是原子或列表，而表尾一定是列表。

例，B = (e)　　　　表头为原子 e；表尾为空表 ( ) 。

例，B = ((a ,b) ,c)　　　　表头为列表 (a ,b) ；表尾为列表 (c) 。

两个重要的函数: GetHead ( )　　GetTail( )

5. 广义表举例

1. A=( )　　B=(e)
2. C=(a,(b,c,d))
3. D=(A,B,C)

即 ： D=(( ),(e),(a,(b,c,d)))

5. E=(a,E)=(a,(a,(a,…..)))
6. (B,C)

GetHead (B)=e

GetHead (D)=A

GetTail(B)=( )

GetTail(D)=(B,C)

GetHead ((B,C))=B

GetTail((B,C))=(C)

5. 广义表举例

GetHead(GetHead(GetTail((a,(b,c,d)))))

GetTail(GetHead(GetTail((a,(b,c,d)))))

GetTail(a,(b,c,d))=((b,c,d))

(GetHead(GetTail(a,(b,c,d))))= (b,c,d)

GetHead(GetHead(GetTail(a,(b,c,d))))=?   b

GetTail(GetHead(GetTail(a,(b,c,d))))=?   (c,d)

5. 广义表举例

Ls=((a,b,c),(d,e,f,g)) 中取出原子e的运算

L1= GetTail(Ls)= ((d,e,f,g))

L2= GetHead(L1)= (d,e,f,g)

L3= GetTail(L2)= (e,f,g)

L4= GetHead(L3)= e

本章小结

1. 理解字符串的定义和存储结构
2. 掌握字符串的模式匹配的BF算法和KMP算法
3. 掌握KMP算法中next、nextval数组的计算方法及匹配过程
4. 掌握数组的逻辑结构、存储结构及寻址方法
5. 掌握特殊矩阵的压缩存储方法
6. 理解稀疏矩阵的三元组顺序表和十字链表存储方法
7. 理解稀疏矩阵转置的计算方法
8. 了解广义表的概念和基本操作

数组总结

数组是n (n>=0) 个相同数据类型数据元素构成的有限序列。

1. 数组/矩阵的定义、存储、定位

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} [a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0,n-1}] \\ [a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1}] \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{|c|}\hline a_{00} \\ \hline a_{01} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{0,n-1} \\ \hline \end{array}\right\} \alpha_0$$

$$\left.\begin{array}{|c|}\hline a_{10} \\ \hline a_{11} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{1,n-1} \\ \hline \end{array}\right\} \alpha_1$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \vdots \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{|c|}\hline a_{m-1,0} \\ \hline a_{m-1,1} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{m-1,n-1} \\ \hline \end{array}\right\} \alpha_{m-1}$$

以行序为主序：C/C++

$$LOC(i, j) = LOC(0, 0) + (n\times i + j)L$$

2. 特殊矩阵： 矩阵中很多**值相同**的元素并且它们的分布有一定的**规律**

对称矩阵、三角矩阵、对角矩阵等

关键问题： 如何建立 **数组元 SA[k]** 和 **矩阵元 a_{ij}** 之间的一一对应关系。

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & k & & & & n(n+1)/2-1 \\ \underbrace{a_{11}}_{\text{第1行}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{a_{21}\quad a_{22}}_{\text{第2行}}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{a_{31}\quad a_{32}\quad a_{33}}_{\text{第3行}}} & \cdots & a_{ij} & \cdots & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{a_{n1}\quad a_{n2}\quad \cdots\quad a_{nn}}_{\text{第n行}}} \end{array}$$

3. 稀疏矩阵的压缩存储：三元组顺序表（行号，列号，非零元素值）

作业

1. 若两个M×N的矩阵A和B都是利用三元组顺序表压缩存储，若要得到同样采用三元组顺序表压缩存储的矩阵C，C＝A＋B（对应元素相加），请写出算法。

   Status AddSMatrix(TSMatrix &C, TSMatrix A, TSMatrix B)

2.假设按行序为主序的存储方式存储整数数组A9×3×5×8，第一个元素的字节地址为100，每个元素占两个字节，问下列元素的地址是什么？

(1)A0000　(2)A1111　(3)A3125　(4)A8247

3.若将n×n的右上半三角矩阵Aij压缩存储为一维数组Sk，请写出二维下标i,j与一维下标k的对应关系。

4.求下列广义表操作的结果。

(1)GetHead((p,h,w))　(2)GetTail((p,h,w))

(3)GetHead(((a,b),(c,d)))　(4)GetTail(((a,b),(c,d)))

(5)GetHead(GetTail(((a,b),(c,d))))

(6)GetTail(GetHead(GetTail(((a,b),(c,d)))))

实验安排

实验四、字符串和多维数组的实现与应用

一、实验目的

1．掌握字符串模式匹配的BF和KMP方法。

2．掌握特殊矩阵/稀疏矩阵的压缩存储方法。

3．用C++语言实现相关算法，并上机调试。

二、实验内容

1. 实现BF算法和KMP算法，并用不同的主串和模式串进行测试。（基本要求1）
2. 设计算法实现特殊矩阵的压缩存储，并实现矩阵元素按下标检索的过程。（基本要求2）
3. 设计稀疏矩阵存储的三元顺序表数据结构，进一步实现稀疏矩阵的转置。（扩展内容）
4. 给出测试过程和测试结果。

实验时间： 第8周周四晚
22网安：18:30-20:10 22物联网：20:10-21:50
实验地点：软件基础实验室301（老干部处）

Thank You !

Q & A