Data Structures

Ch5 树和二叉树

Trees & Binary Trees

2024 年 10 月 18 日

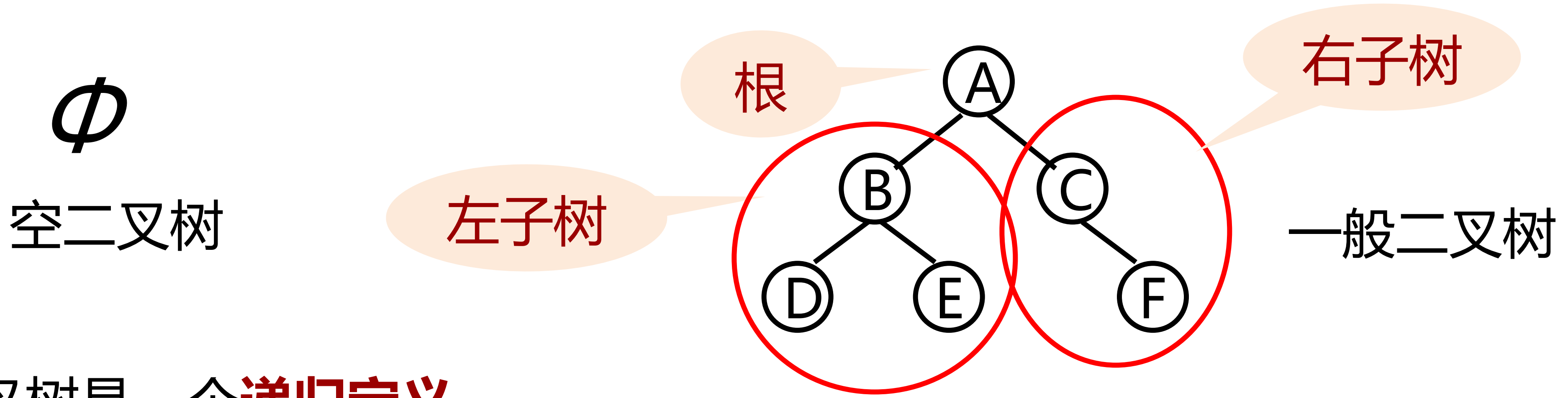
学而不厌 诲人不倦

5.4 二叉树的逻辑结构

5-4-1　二叉树的定义

1. 二叉树的定义

二叉树是 n(n≥0) 个结点的有限集，它或者是**空集**，或者是由一个**根**和称为**左、右子树**的两个互不相交的**二叉树**组成。



二叉树是一个**递归定义**。

树的子树次序不作规定，二叉树的两个子树有**左、右之分**。

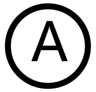
树中结点的度没有限制，二叉树中结点的度只能取 **0、1、2**。

2. 二叉树的基本形态

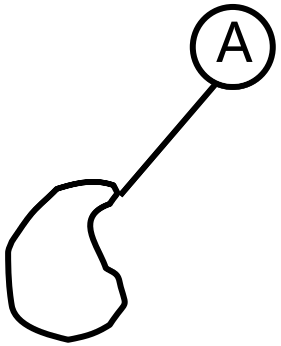
根据定义，二叉树通常具有 5 种基本形态:

Φ

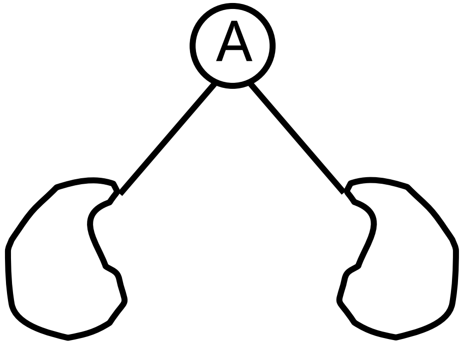
空二叉树



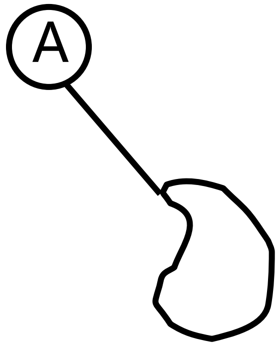
仅有根结点的二叉树



右子树为空的二叉树



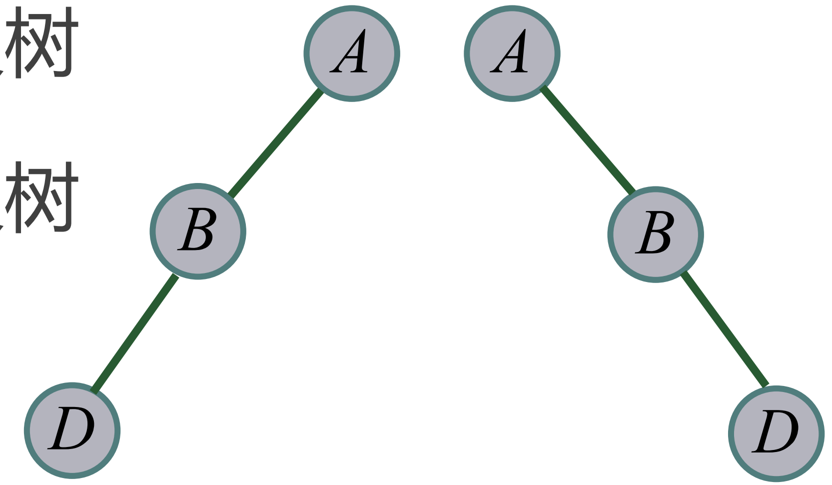
左、右子树均非空的二叉树



左子树为空的二叉树

3. 斜树

- 左斜树：所有结点都只有左子树的二叉树
- 右斜树：所有结点都只有右子树的二叉树
- 斜树：左斜树和右斜树的统称



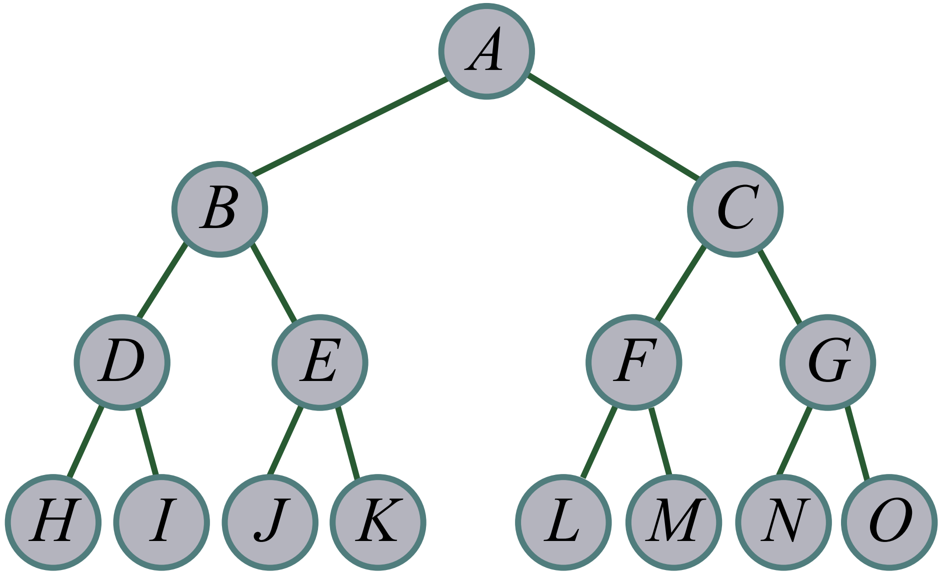
斜树有什么特点呢？

（1）每一层只有一个结点
（2）结点个数与其深度相同

斜树是树结构的特例，是从树结构退化成了线性结构

4. 满二叉树

- 满二叉树：所有分支结点都存在左子树和右子树，并且所有叶子都在同一层上的二叉树



- 满二叉树有什么特点呢?

（1）叶子只能出现在最下一层

（2）只有度为 0 和度为 2 的结点

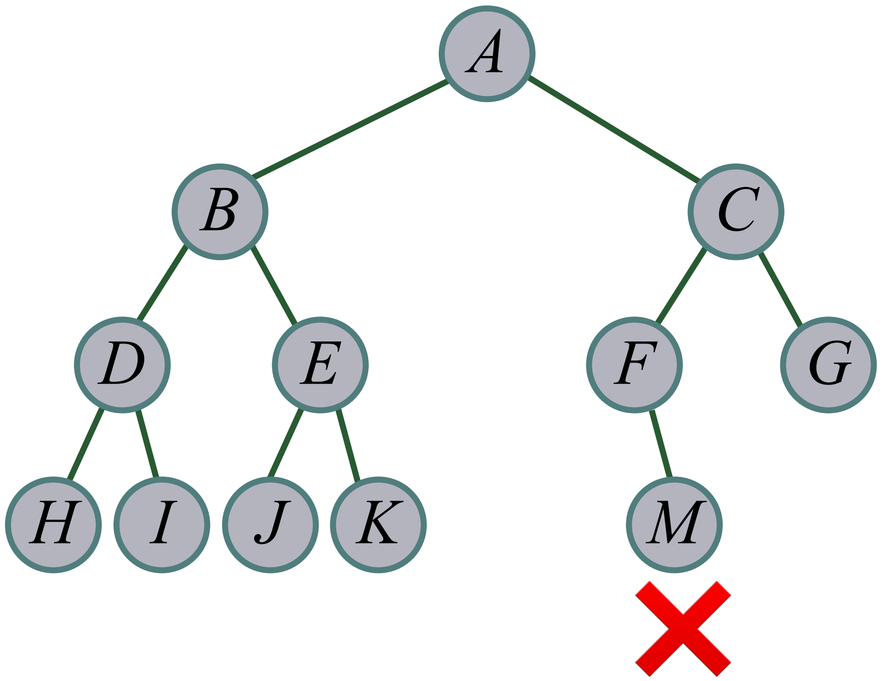
（3）在同样深度的二叉树中结点个数最多

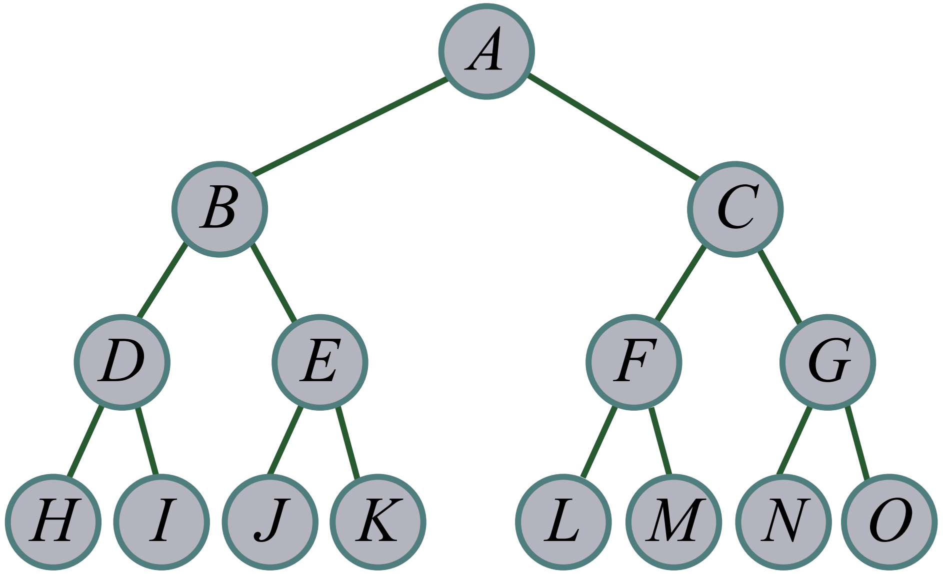
（4）在同样深度的二叉树中叶子结点个数最多

满二叉树是树结构的特例，是最**丰满**的二叉树

5. 完全二叉树

- 完全二叉树：在满二叉树中，从最后一个结点开始，连续去掉任意个结点得到的二叉树

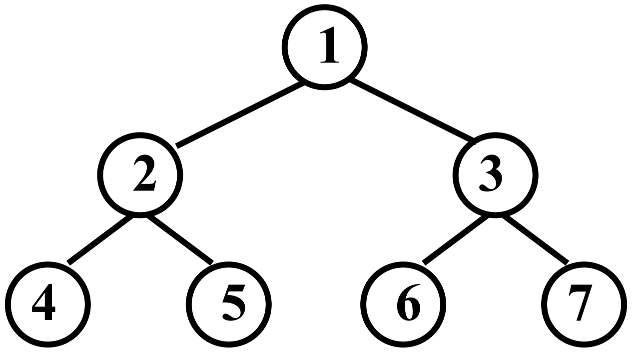




5. 完全二叉树

- 完全二叉树：深度为 **k** 的，有 **n** 个结点的二叉树，当且仅当其每一个结点都与深度为 k 的**满二叉树**中编号从 1 至 n 的结点一一对应时，称为完全二叉树。

对满二叉树的结点进行连续编号，从根结点起，自上而下，自左至右，1、2、3、……、2^k-1 。



满二叉树

5. 完全二叉树

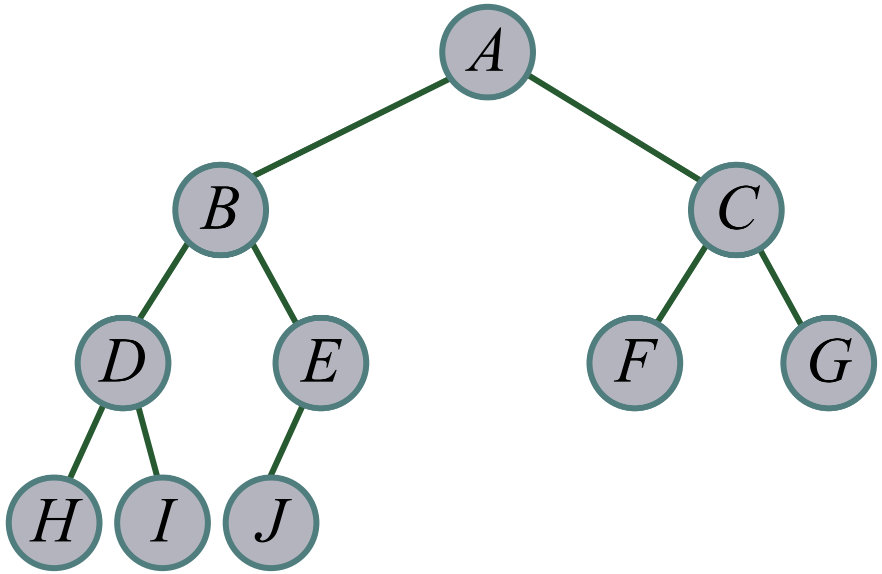
完全二叉树有什么特点呢?

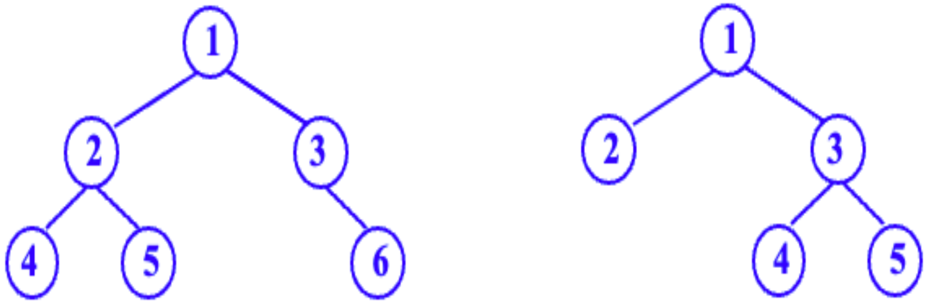
（1）叶子结点只能出现在最下两层且最下层的叶子结点都集中在二叉树的左面

（2）完全二叉树中如果有度为 1 的结点，只可能有一个，且该结点只有左孩子

（3）深度为 k 的完全二叉树在 k−1 层上一定是满二叉树

（4）在同样结点个数的二叉树中，完全二叉树的深度最小





非完全二叉树

5.4 二叉树的逻辑结构

5-4-2　二叉树的基本性质

1.性质 5-1：在一棵二叉树中，如果叶子结点数为 n_0，度为 2 的结点数为 n_2，则有: $n_0 = n_2 + 1$

证明: (1) 已知，终端结点数为 n_0，度为 2 的结点数为 n_2，
设度为 1 的结点数为 n_1，
由于二叉树中的所有结点的度只能为 0、1、2，
故二叉树的结点总数为 $n = n_0 + n_1 + n_2$；

(2) 除根结点外，其它结点都有一个分支进入，
设 B 为分支总数，故 $n = B + 1$，
由于这些分支均是由度为 1 或 2 的结点引出的，
所以有 $B = n_1 + 2n_2$，故 $n = n_1 + 2n_2 + 1$，

由 (1) 和 (2)，可得 $n_0 + n_1 + n_2 = n_1 + 2n_2 + 1$， 故有 $n_0 = n_2 + 1$。

2. 性质 5-2：二叉树的第 i 层上最多有2^{i-1}个结点（$i \geq 1$）

证明：采用归纳法证明。

当 $i = 1$时，只有一个根结点，而 $2^{i-1} = 2^0 = 1$，结论成立。

假设 $i = k$ 时结论成立，即第 k 层上最多有 2^{k-1} 个结点。

考虑 $i = k+1$ 时的情形。由于第 $k+1$ 层上的结点是第 k 层上结点的孩子，而二叉树中每个结点最多有两个孩子，故在第 $k+1$ 层上的最多大结点个数有 $2 \times 2^{k-1} = 2^k$ 个结点，则在 $i = k+1$时结论也成立。

由此，结论成立。

3. 性质 5-3：一棵深度为 k 的二叉树中，最多有 2^k-1个结点

证明：设深度为 k 的二叉树中结点个数最多为 n，则

$$n=\sum_{i=1}^{k}(\text{第}i\text{层上结点的最大个数})=\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}=2^k-1$$

$$S_k=\frac{a_1(1-q^k)}{1-q}\qquad(q\neq 1)$$

深度为 k 且具有 2^k-1个结点的二叉树一定是满二叉树

4. 性质 5-4：具有 n 个结点的完全二叉树的深度为 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

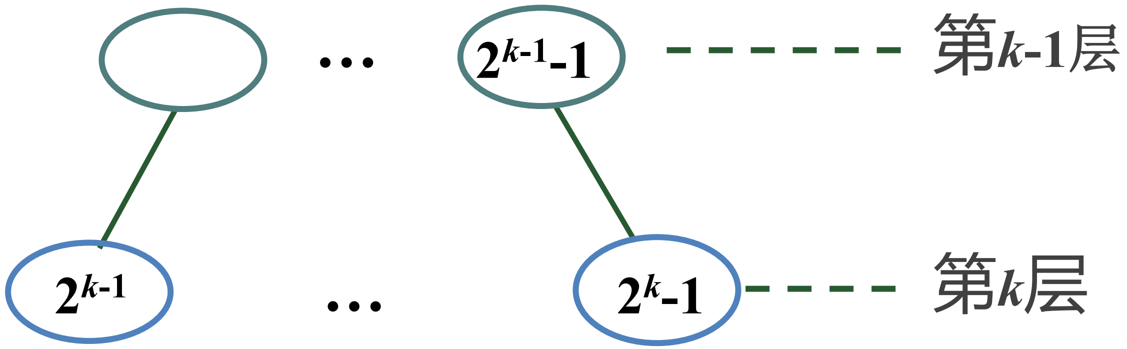
证明：设具有 n 个结点的完全二叉树的深度为 k，则

因为，

k-1 层满二叉树结点数 < k 层完全二叉树结点数 ≤ k 层满二叉树结点数

故 $2^{k-1}-1 < n \leq 2^k-1$

$$2^{k-1} \leq n < 2^k$$



对不等式取对数，有：$k-1 \leq \log_2 n < k$　　即：$\log_2 n < k \leq \log_2 n+1$

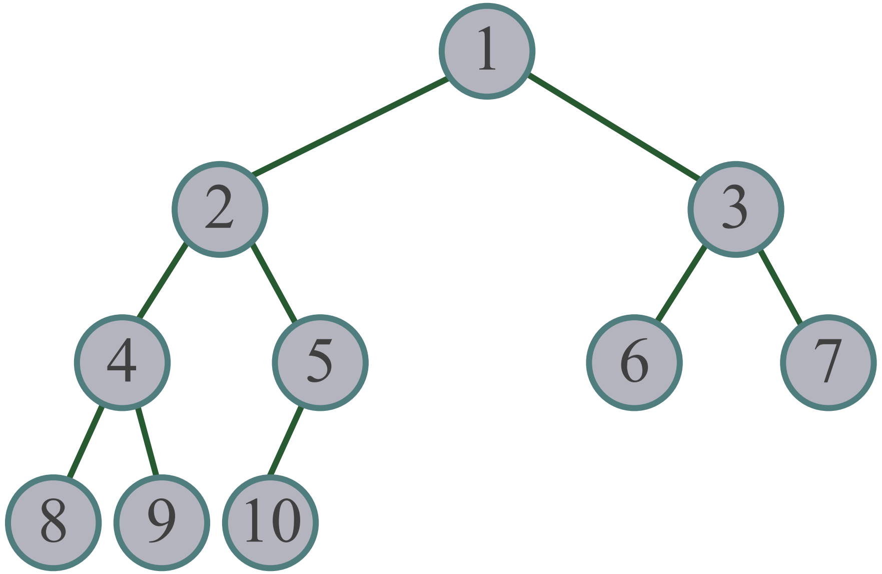
由于 k 是整数，故必有 $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

5. 性质 5-5： 对一棵具有 n 个结点的完全二叉树中从 1 开始按层序编号，对于任意的序号为 i（$1 \le i \le n$）的结点（简称结点 i），有：

（1）如果 $i > 1$，则结点 i 的双亲结点的序号为 $\lfloor i/2 \rfloor$，否则结点 i 无双亲结点

（2）如果 $2i \le n$，则结点 i 的左孩子的序号为 $2i$，否则结点 i 无左孩子

（3）如果 $2i+1 \le n$，则结点 i 的右孩子的序号为 $2i+1$，否则结点 i 无右孩子



思 考

1. 若一棵完全二叉树的结点总数为500个，请问叶子结点数为多少?

2. 若一棵树的度为4，其中度为1，2，3，4的结点数分别为3，3，1， 1个，请问叶子结点数为多少?

$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ (结点数=不同度的结点个数之和)

$n = B+1$ (结点数=分支数 + 1)

$B = 0 \times n_0 + 1\times n_1 + 2\times n_2 + 3\times n_3 + 4\times n_4$

5.4 二叉树的逻辑结构

5-4-3　二叉树的抽象数据类型定义

二叉树的抽象数据类型定义

ADT BiTree

DataModel

二叉树由一个根结点和两棵互不相交的左右子树构成，结点具有层次关系

Operation

InitBiTree：初始化一棵空的二叉树

CreatBiTree：建立一棵二叉树

DestroyBiTree：销毁一棵二叉树

PreOrder：前序遍历二叉树

InOrder：中序遍历二叉树

PostOrder：后序遍历二叉树

LevelOrder：层序遍历二叉树

简单起见，只讨论二叉树的遍历

endADT

二叉树的遍历

按某条搜索路径巡访树中每个结点，使得**每个结点均被访问一次**，而且**仅被访问一次**。

遍历对于线性结构而言，比较简单，而二叉树是一种**非线性结构**，因而需要找一种规律**以使二叉树的结点能排列到一个线性队列上来。**

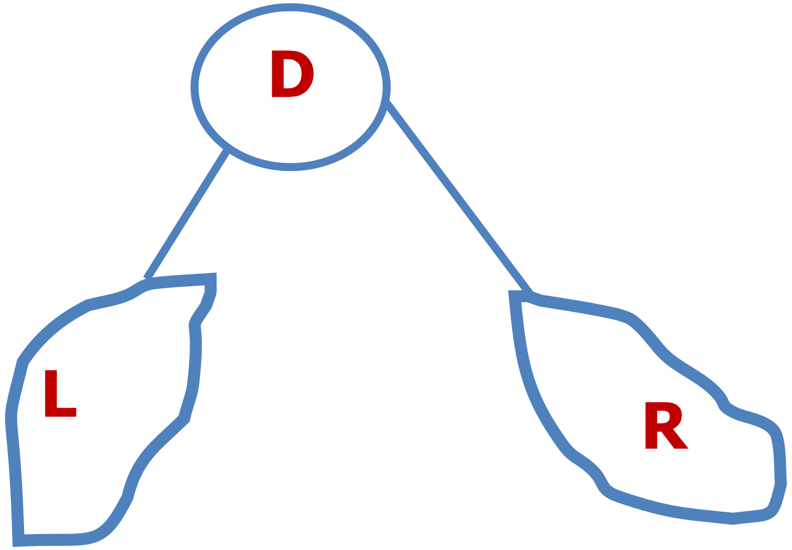
对二叉树而言，可以有三条搜索路径：

1、先上后下的按层次遍历

2、先左（子树）后右（子树）的遍历

3、先右（子树）后左（子树）的遍历

DLR，LDR，LRD，DRL，RDL，RLD



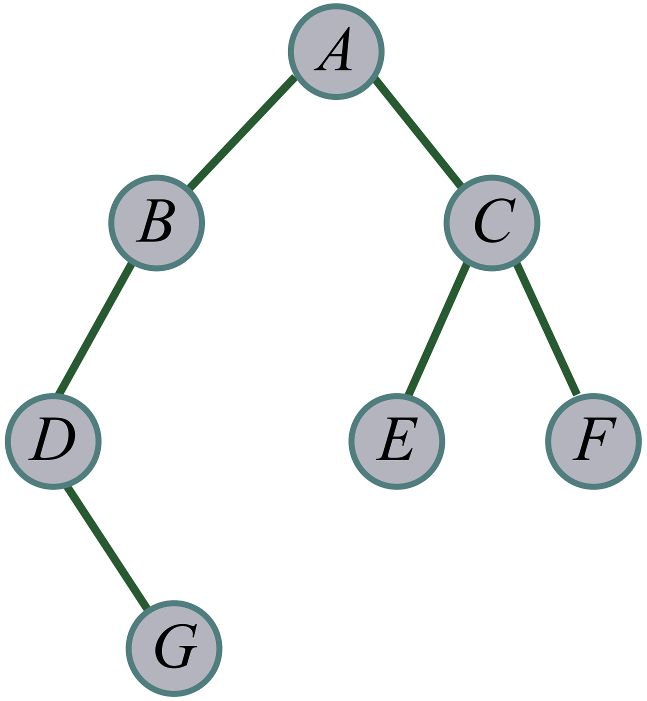
二叉树的前序（先根）遍历

若二叉树为空，则空操作返回；否则：

（1）访问根结点

（2）前序遍历根结点的左子树

（3）前序遍历根结点的右子树



前序遍历序列：*A B D G C E F*

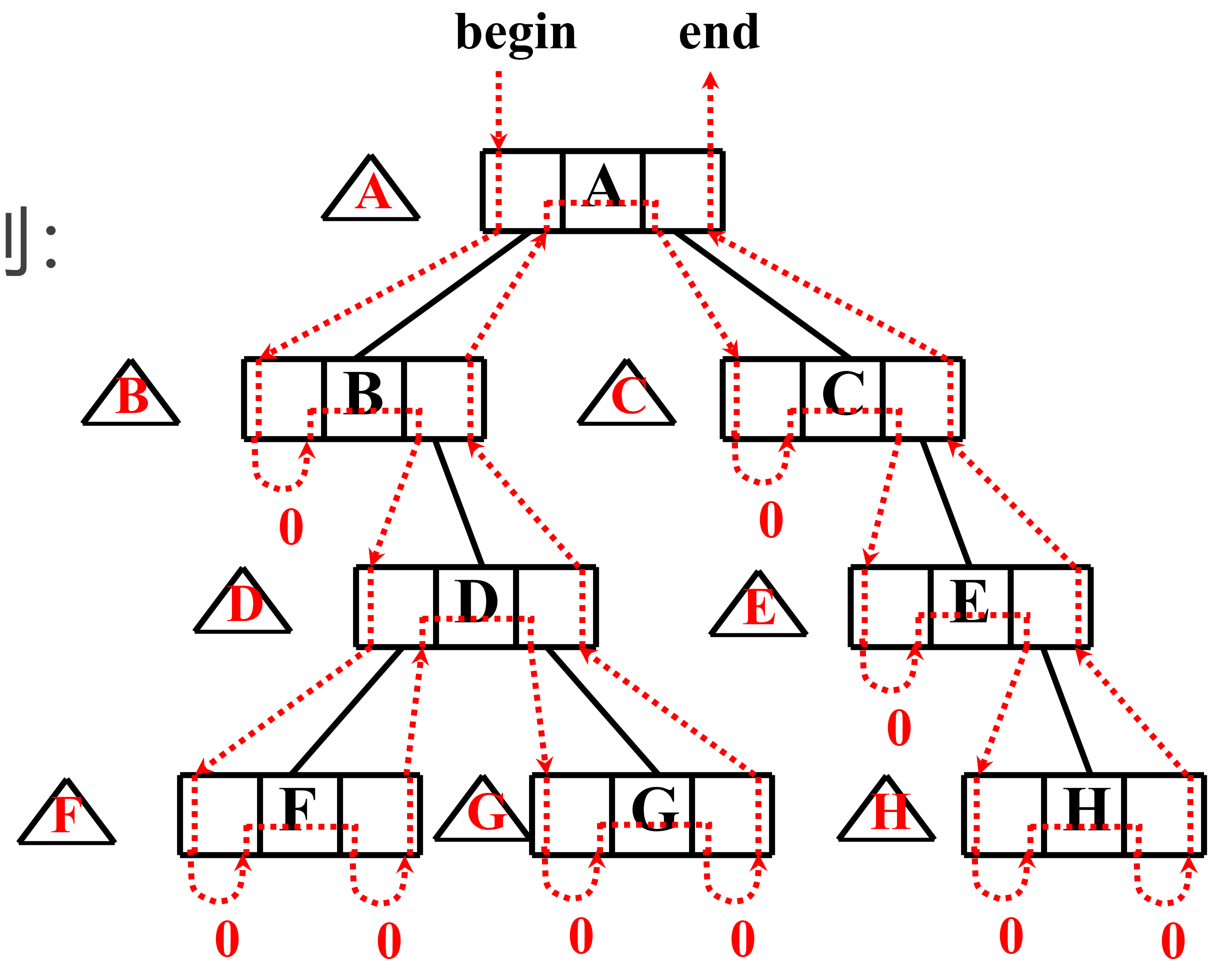
二叉树的前序（先根）遍历

若二叉树为空，则空操作返回；否则：

（1）访问根结点

（2）前序遍历根结点的左子树

（3）前序遍历根结点的右子树



先序遍历顺序： A B D F G C E H

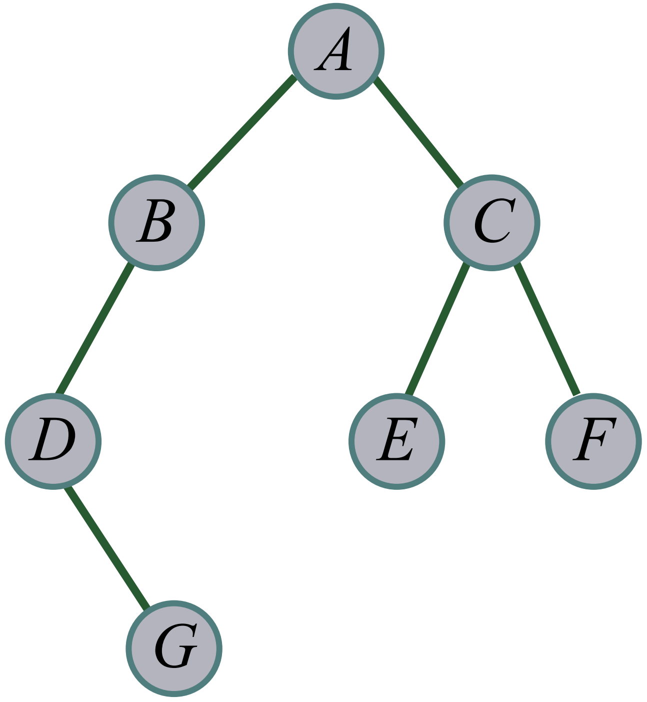
二叉树的后序（后根）遍历

若二叉树为空，则空操作返回；否则：

（1）后序遍历根结点的左子树

（2）后序遍历根结点的右子树

（3）访问根结点



后序遍历序列：*G D B E F C A*

二叉树的后序（后根）遍历

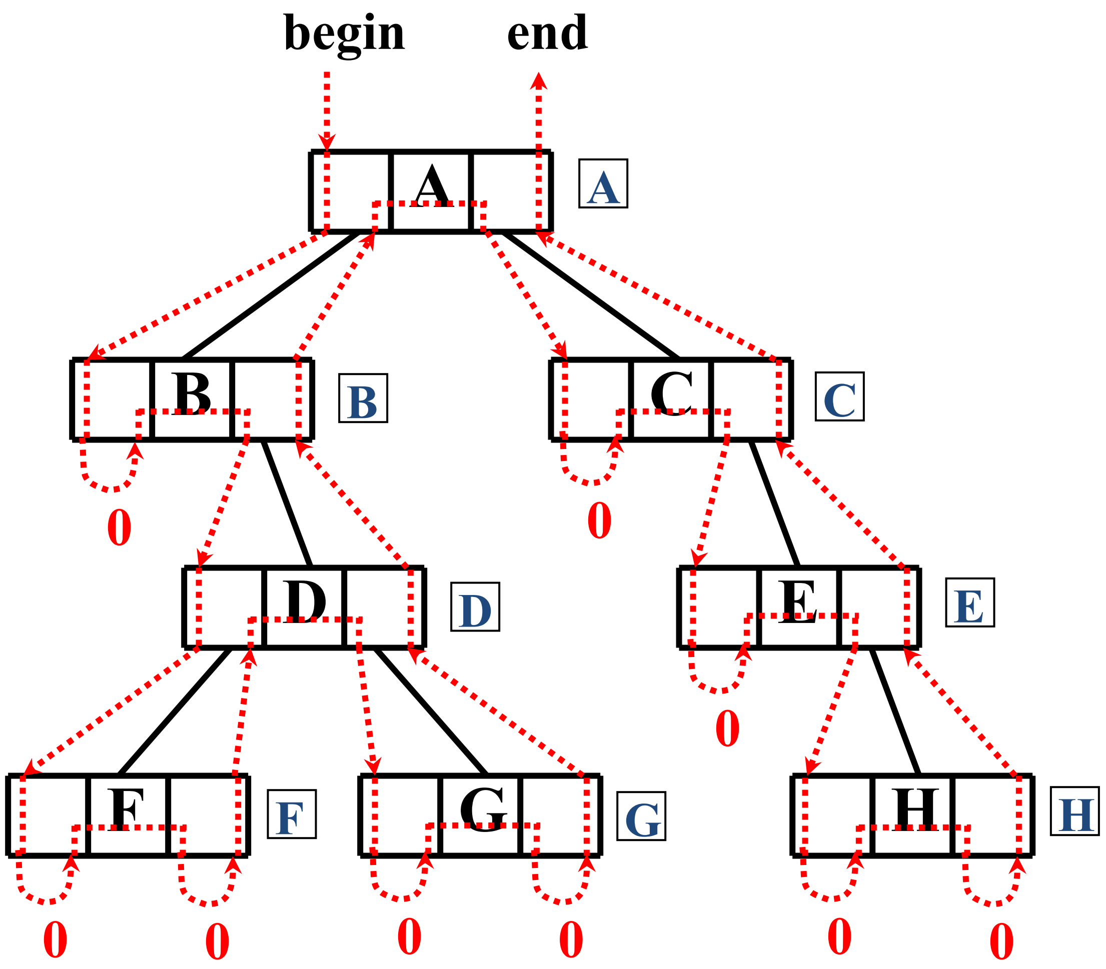
若二叉树为空，则空操作返回；否则：

（1）后序遍历根结点的左子树

（2）后序遍历根结点的右子树

（3）访问根结点

后序遍历顺序：F G D B H E C A



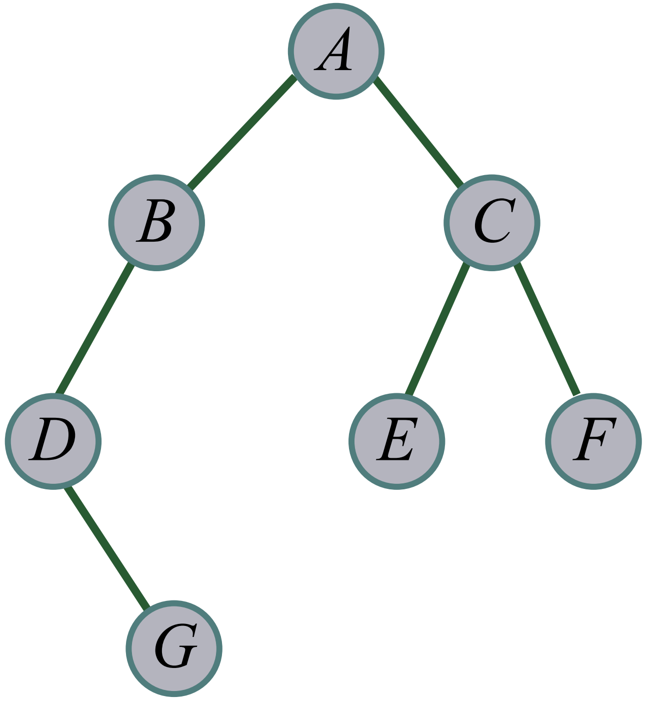
二叉树的中序（中根）遍历

若二叉树为空，则空操作返回；否则：

（1）中序遍历根结点的左子树

（2）访问根结点

（3）中序遍历根结点的右子树



中序遍历序列：*D G B A E C F*

二叉树的中序（中根）遍历

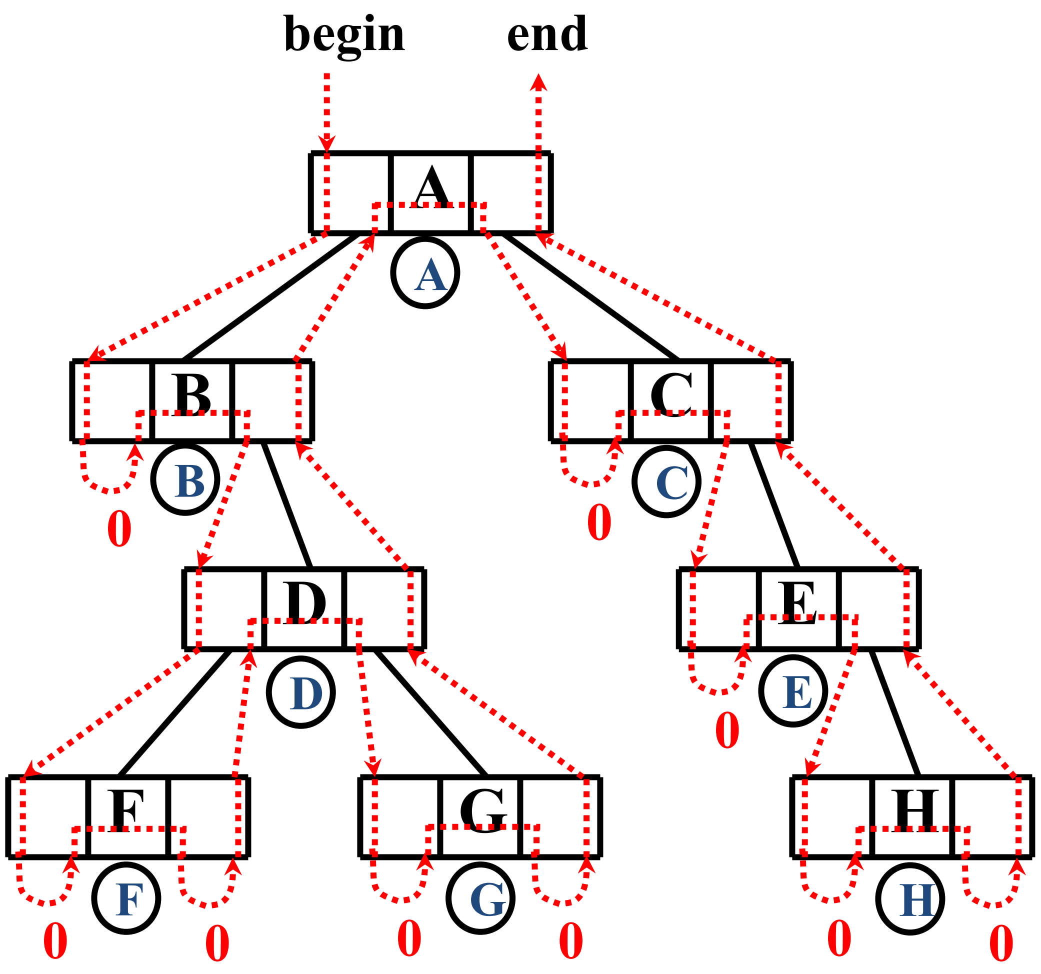
若二叉树为空，则空操作返回；否则：

（1）中序遍历根结点的左子树

（2）访问根结点

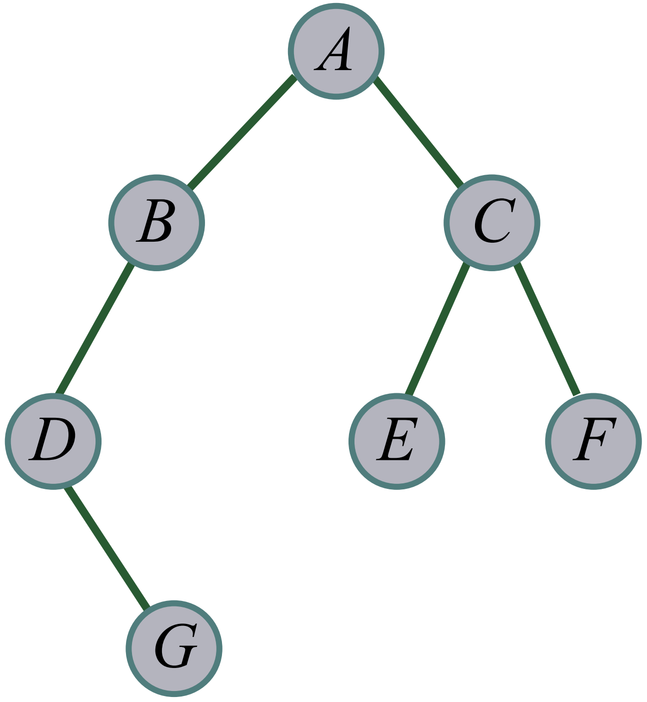
（3）中序遍历根结点的右子树

中序遍历顺序： B F D G A C E H



二叉树的层序遍历

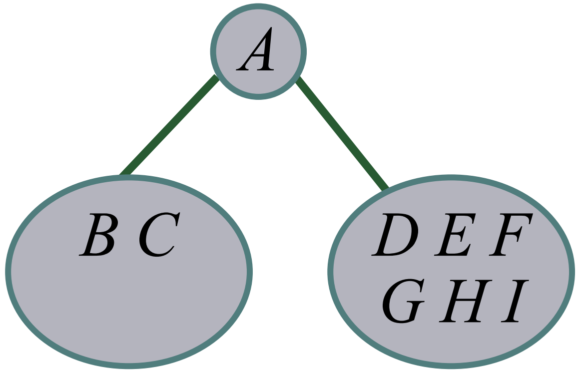
从二叉树的根结点开始，从上至下逐层遍历，在同一层中，则按从左到右的顺序对结点逐个访问



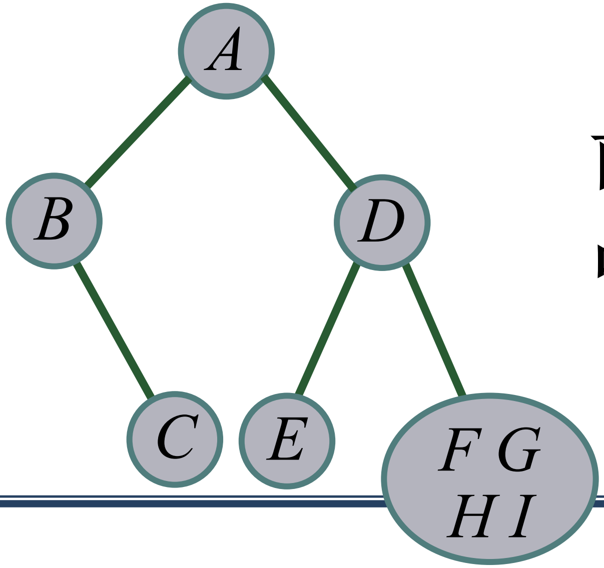
层序遍历序列：*A B C D E F G*

二叉树的遍历

若已知一棵二叉树的前序序列和中序序列，能否唯一确定这棵二叉树呢?



前序： A B C D E F G H I
中序： B C A E D G H F I



前序： B C
中序： B C

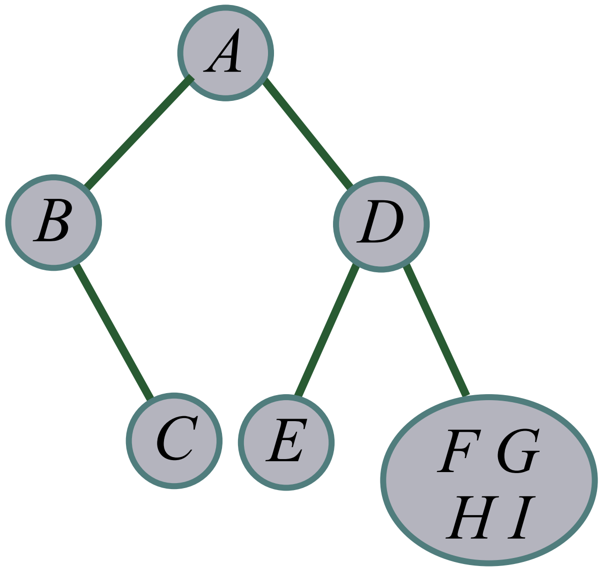
前序： D E F G H I
中序： E D G H F I

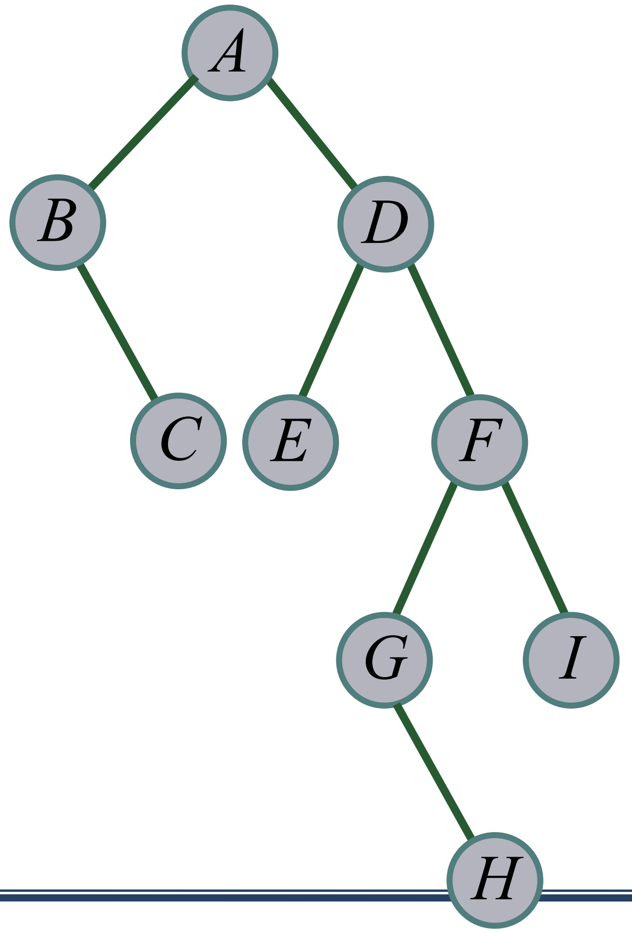
二叉树的遍历

- 若已知一棵二叉树的前序序列和中序序列，能否唯一确定这棵二叉树呢?

前序：**F G H I**

中序：**G H F I**





思 考

1．若已知一棵二叉树先序遍历序列为：BEFCGDH，中序遍历序列为：FEBGCHD，则后序遍历序列为________。

2．若已知一棵二叉树先序遍历序列为：CBDFAE， 中序遍历序列为： BFDCEA，则后序遍历序列为 ________。

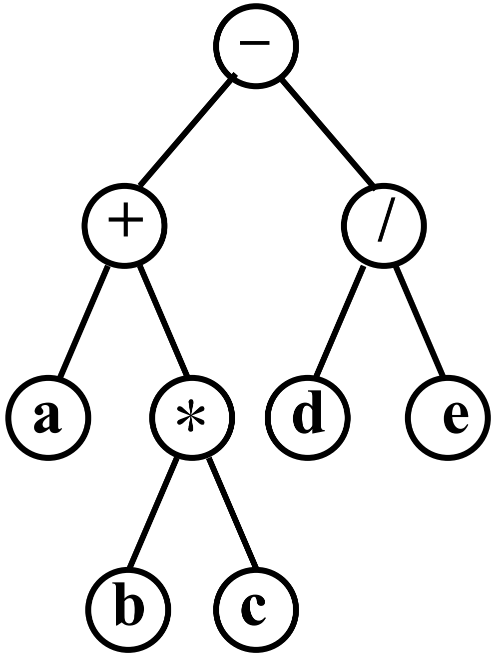
3．若已知一棵二叉树后序遍历序列为：TRVSWU， 中序遍历序列为： VRTUSW，则先序遍历序列为 ________。

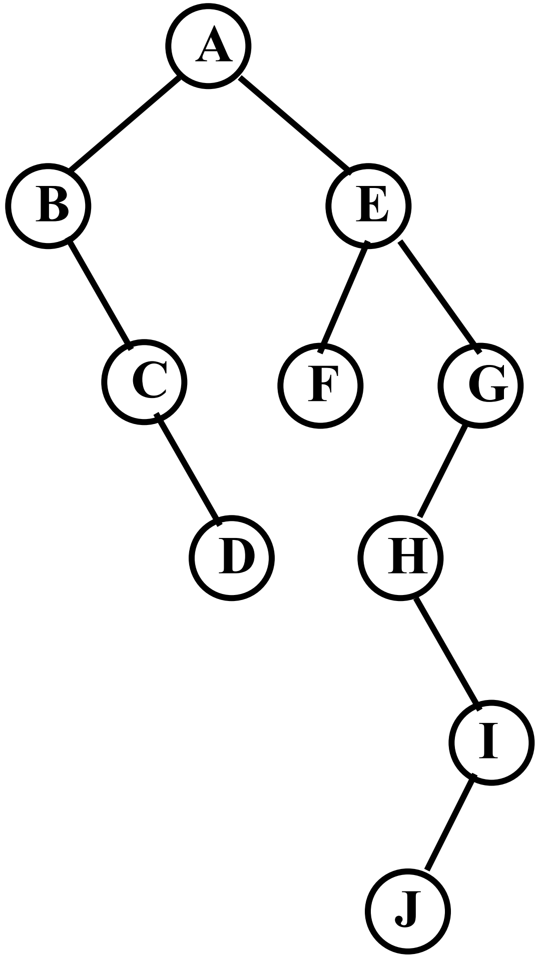
小结

1. 熟练掌握二叉树的递归定义和基本性质
2. 理解二叉树的抽象数据类型定义
3. 熟练掌握二叉树的遍历方法（前序、后序、中序、层次）

作业

4. 写出如下图中二叉树的先序遍历、后序遍历、中序遍历序列。





Thank You !

Q & A