Data Structures

Ch6

图
Graphs

2024 年 11 月 19 日

学而不厭 誨人不倦

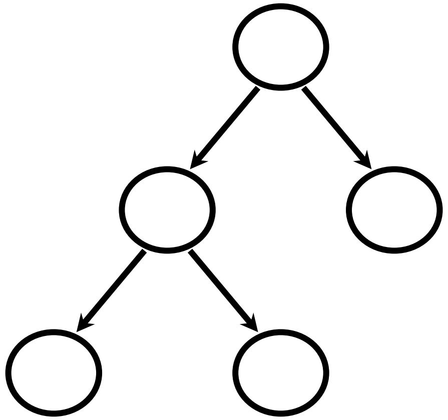
6.6 有向无环图及其应用

6-6-1　AOV网与拓扑排序

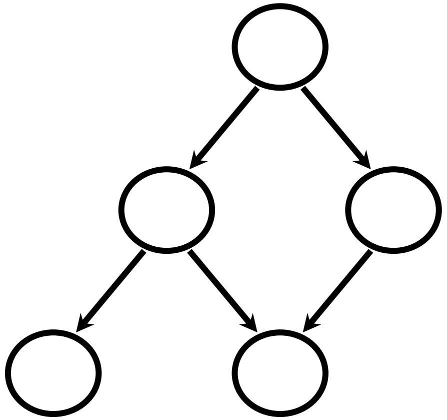
1. 有向无环图

Directed Acyclic Graph

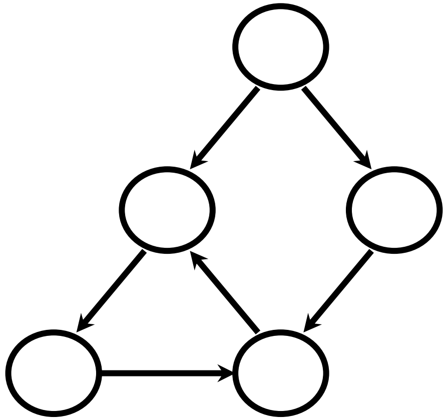
一个无环的有向图称为有向无环图，简称 DAG 图。



有向树



DAG 图

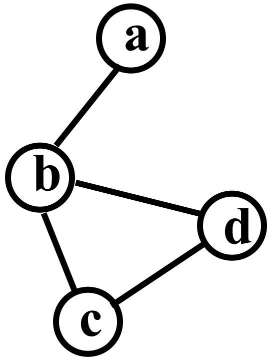


有向图

1. 有向无环图

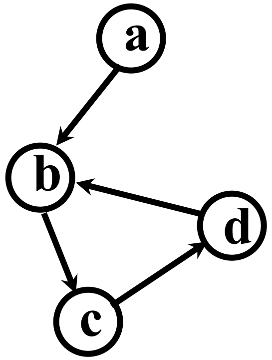
给定一个图，如何判断是否存在环？

利用深度优先搜索算法，若将要指向的顶点已被访问过，则存在环。



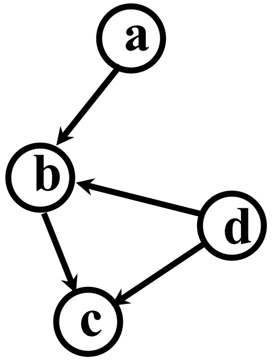
无向图

可正确判定



有向图

可正确判定



特例

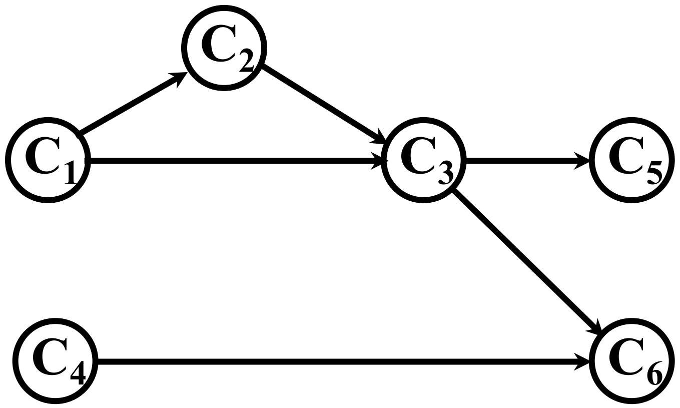
不可正确判定

如何判断一个有向图是否为 DAG 图？ **方法1** 在一个连通分量里寻找环。

1. 有向无环图

问题： **假设以有向图表示一个工程的施工图或程序的数据流图，则图中不允许出现回路。**

课程编号	课程名称	先决条件
C_1	程序语言基础	
C_2	离散数学	C_1
C_3	数据结构	C_1，C_2
C_4	微机原理	
C_5	编译原理	C_3
C_6	操作系统	C_3，C_4



表示课程之间优先关系的有向图

这种用顶点表示活动，用弧表示活动之间的优先关系的有向图称为顶点表示活动的网：AOV 网。

在 AOV 网中不应该出现有向环，否则将存在某项活动以自己为先决条件。

2. AOV网的定义

什么是工程？工程有什么共性?

几乎所有的工程都可以分为若干个称作活动的子工程

某些活动之间通常存在一定的约束条件

AOV网（顶点表示活动的网）：在一个表示工程的有向图中，用顶点表示活动，用弧表示活动之间的优先关系

AOV网（activity on vertex network）

AOV网中出现回路意味着什么?

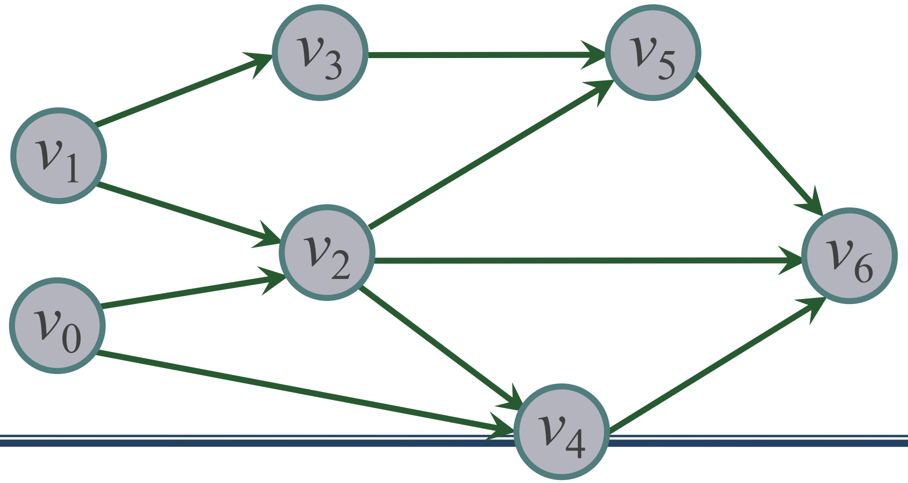
活动之间的优先关系是矛盾的

3. 拓扑序列

- 拓扑序列：设有向图$G=(V，E)$具有 n 个顶点，则顶点序列 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ 称为一个拓扑序列，当且仅当满足下列条件：若从顶点 v_i 到 v_j 有一条路径，则在顶点序列中顶点 v_i 必在顶点 v_j 之前

使得AOV网中所有应该存在的前驱和后继关系都能得到满足

- 拓扑排序：对一个有向图构造拓扑序列的过程



拓扑序列 1： $v_0\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6$

拓扑序列 2： $v_0\ v_1\ v_3\ v_2\ v_4\ v_5\ v_6$

4. 拓扑排序

性质：若AOV 网中的所有顶点都在它的**拓扑排序序列**中，则该 AOV 网中必定不存在**环**；否则必存在**环**。

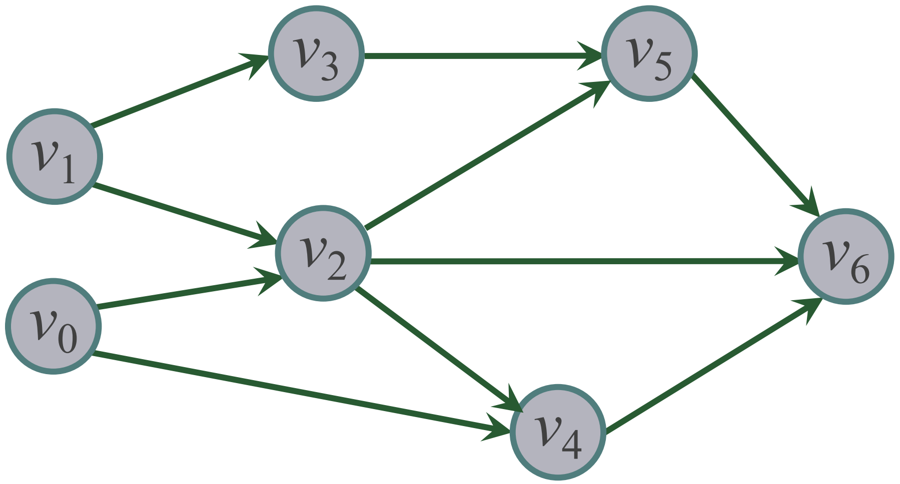
拓扑排序算法的思想：

1. 在有向图中选取一个**没有前驱**的顶点并输出；
2. 从图中**删除该顶点**及所有以此顶点为尾的**弧**；
3. 重复上述两步，直至**全部顶点均已输出**；或者**当前图中不存在无前驱的顶点**为止。

得到一个拓扑排序

存在环

4. 拓扑排序



1. 在有向图中选取一个没有前驱的顶点并输出；
2. 从图中删除该顶点及所有以此顶点为尾的弧；
3. 重复上述两步，直至全部顶点均已输出；或者当前图中不存在无前驱的顶点为止。

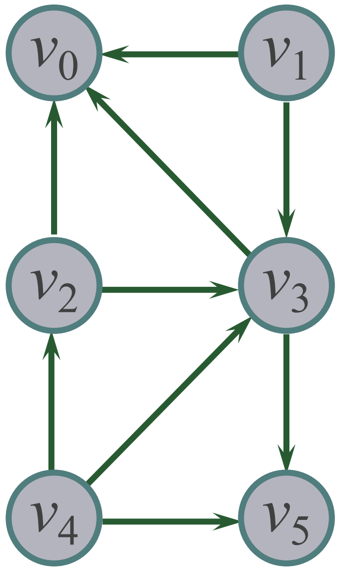
没有前驱的顶点 = 入度为零的顶点

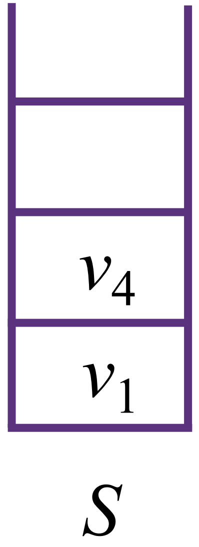
删除顶点及以它为尾的弧 = 弧头顶点的入度减1

拓扑序列： v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6

5. 拓扑排序算法-存储结构

- 图采用什么存储结构呢？ ⇨ 邻接表
- 在邻接表中，如何求顶点的入度？ ⇨ 顶点表中增加入度域
- 如何查找没有前驱的顶点？ ⇨ 设置栈或队列





	in	vertex	firstEdge
0	3	v_0	∧
1	0	v_1	→ 0 → 3 ∧
2	1	v_2	→ 0 → 3 ∧
3	3	v_3	→ 0 → 5 ∧
4	0	v_4	→ 2 → 3 → 5 ∧
5	2	v_5	∧

5. 拓扑排序算法-存储结构

```
struct EdgeNode
{
   int adjvex;
   EdgeNode *next;
} ;
```

```
template <typename DataType>
struct VertexNode
{
   DataType vertex;
   EdgeNode *firstEdge;
};
```

```
const int MaxSize = 10;
template <typename DataType>
class ALGraph
{
public:
   ALGraph(DataType a[ ], int n, int e);
   ~ALGraph( );
   void DFTraverse(int v);
   void BFTraverse(int v);
private:
   VertexNode<DataType>  adjlist[MaxSize];
   int vertexNum, edgeNum;
};
```

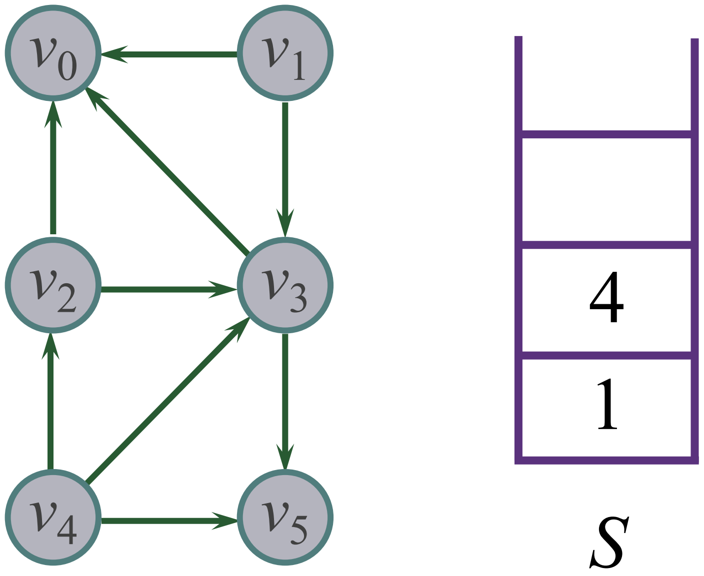
6. 拓扑排序算法-伪代码

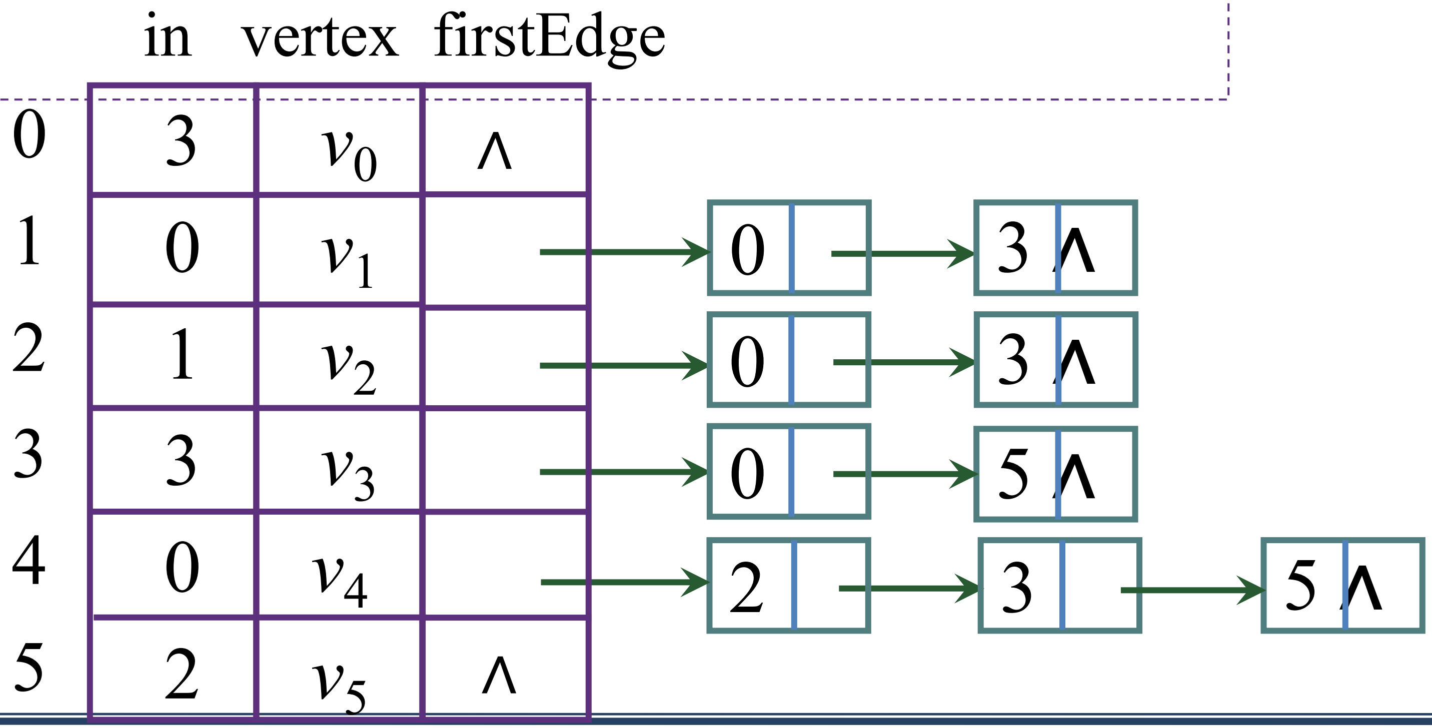
图：带入度的邻接表　　栈：入度为 0 的顶点（编号）

算法：TopSort
输入：有向图$G=(V, E)$
输出：拓扑序列
1. 栈 S 初始化；累加器 count 初始化；
2. 扫描顶点表，将入度为 0 的顶点压栈；
3. 当栈 S 非空时循环
 3.1 j = 栈顶元素出栈；输出顶点 j；count++；
 3.2 对顶点 j 的每一个邻接点 k 执行下述操作：
  3.2.1 将顶点 k 的入度减 1；
  3.2.2 如果顶点 k 的入度为 0，则将顶点 k 入栈；
4. if (count<vertexNum) 输出有回路信息；

6. 拓扑排序算法-实现

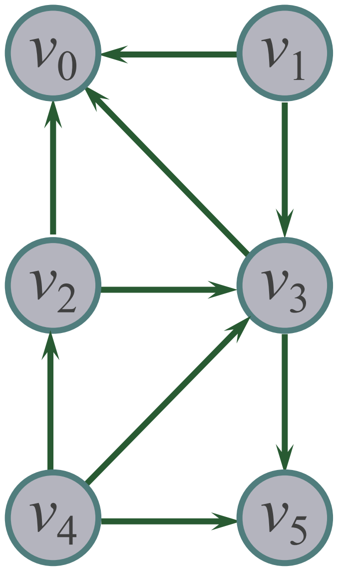
```
void TopSort( )
{
    int i, j, k, count = 0, S[MaxSize], top = -1;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)
        if (adjlist[i].in == 0)
            S[++top] = i;
```

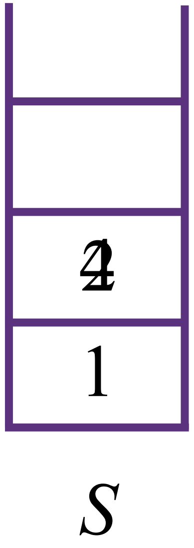




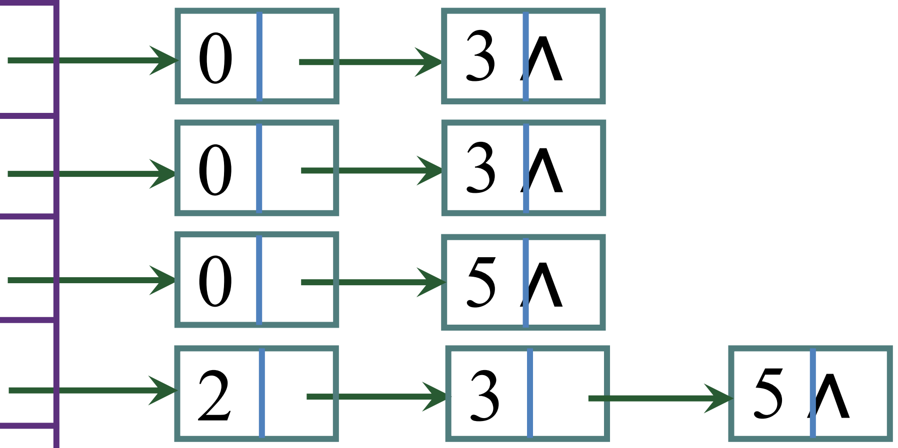
5. 拓扑排序算法-实现

```
while (top != -1 )
{
   j = S[top--];
   cout << adjlist[j].vertex;
   count++;
   p = adjlist[j].firstEdge;
   while (p != nullptr)
   {
      k = p->adjvex;  adjlist[k].in--;
      if (adjlist[k].in == 0)  S[++top] = k;
      p = p->next;
   }
```





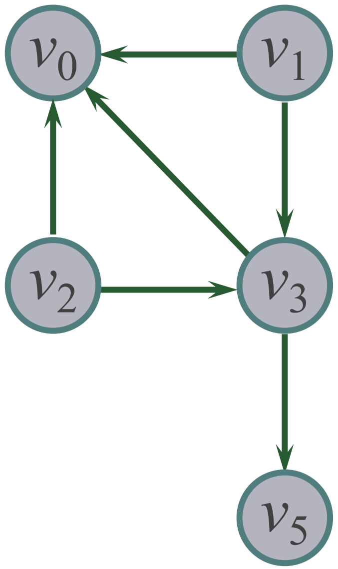
	in	vertex	firstEdge
0	3	v_0	∧
1	0	v_1	
2	~~1~~ 0	v_2	
3	~~3~~ 2	v_3	
4	0	v_4	
5	~~2~~ 1	v_5	∧

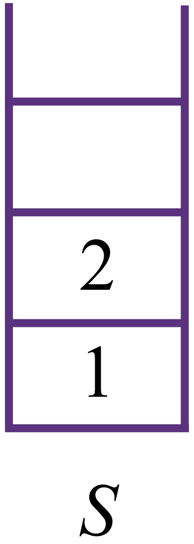


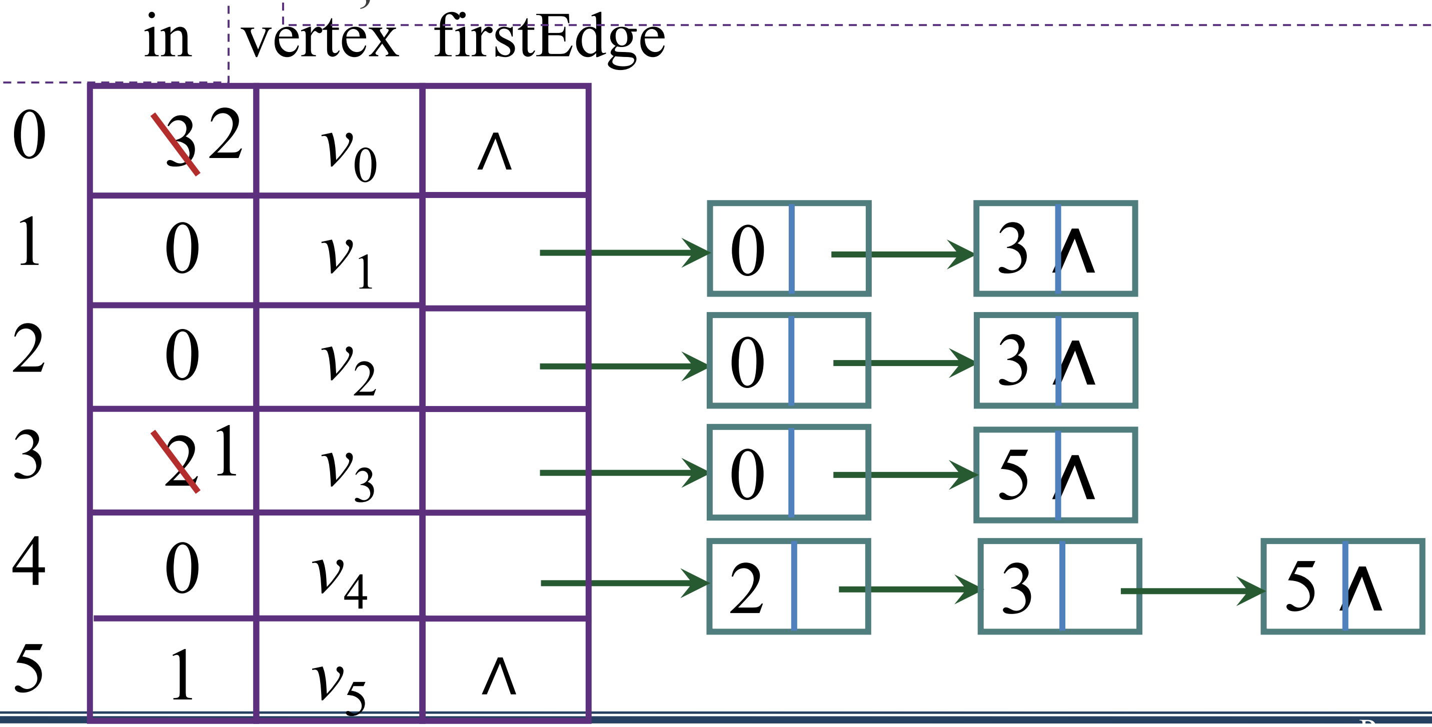
5. 拓扑排序算法-实现

```
while (top != -1 )
{
   j = S[top--];
   cout << adjlist[j].vertex;
   count++;
```

```
   p = adjlist[j].firstEdge;
   while (p != nullptr)
   {
      k = p->adjvex;  adjlist[k].in--;
      if (adjlist[k].in == 0)  S[++top] = k;
      p = p->next;
   }
```







5. 拓扑排序算法-实现

```
void TopSort( )
{
    int i, j, k, count = 0,  S[MaxSize], top = -1;
    EdgeNode *p = nullptr;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)               /*扫描顶点表*/
        if (adjlist[i].in == 0)  S[++top] = i;
    while (top != -1 )                            /*当栈中还有入度为0的顶点时*/
    {
        j = S[top--];   cout << adjlist[j].vertex;     count++;
        p = adjlist[j].first;
        while (p != nullptr)                      /*描顶点表，找出顶点j的所有出边*/
        {
            k = p->adjvex;  adjlist[k].in--;
            if (adjlist[k].in == 0) S[++top] = k;   /*将入度为0的顶点入栈*/
            p = p->next;
        }
    }
    if (count < vertexNum )  cout << "有回路";
}
```

$O(n)$

$O(e)$

时间复杂度? ⇨ $O(n+e)$

6.6 有向无环图及其应用

6-6-2　AOE网与关键路径

拓扑排序解决工程的可行性或合理性。

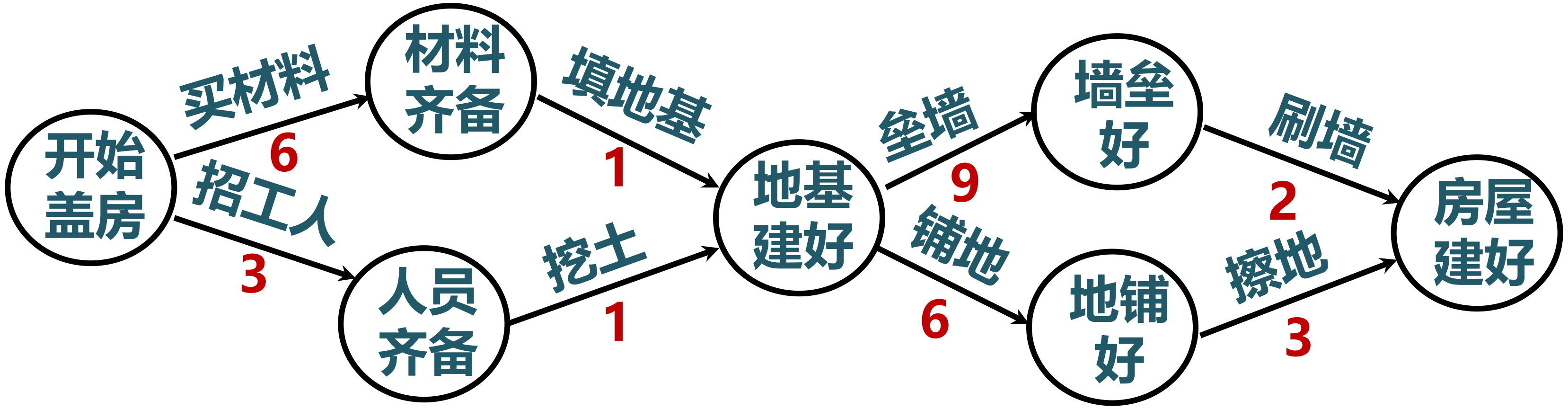
关键路径则关心工程解决的时间问题。

2023 年 11 月 21 日

1. AOE网的定义

AOE网（Activity on Edge network）

有向无环图也可作为描述工程管理的有效工具。



顶点表示事件(状态)　　弧表示活动

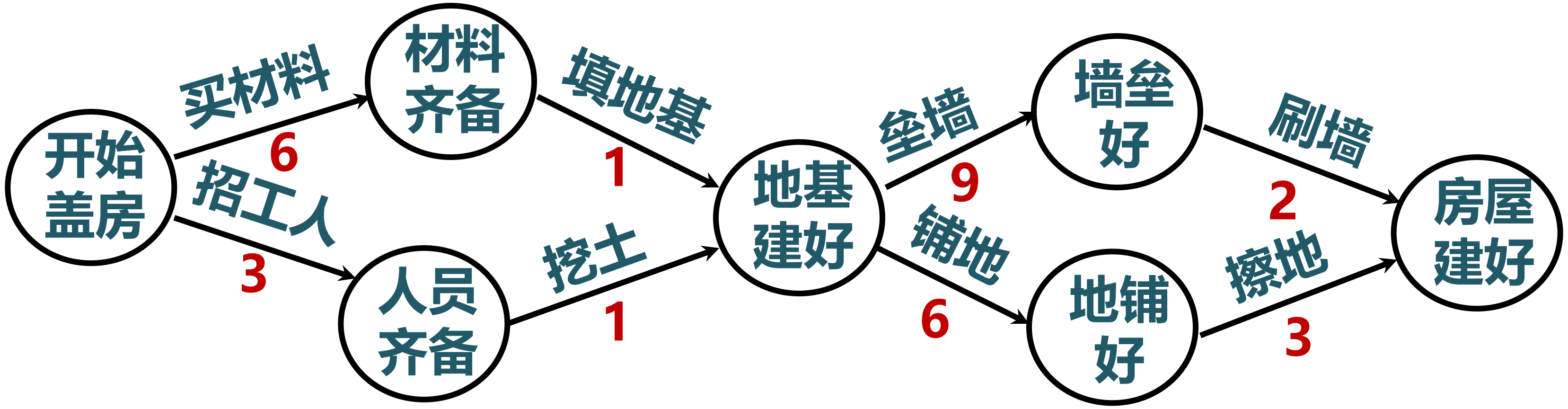
每个事件表示在它之前的活动已经完成，在它之后的活动可以开始

为弧加权，通常表示活动所需要的时间

这种边表示活动的带权的有向无环图称为 AOE 网

2. 关键路径

如何求“关键活动”和“关键路径”？



通常，AOE 网中只有一个入度为 0 的顶点(**源点**)，一个出度为 0 的顶点(**终点**)。

1. 完成整项工程至少需要多少时间?

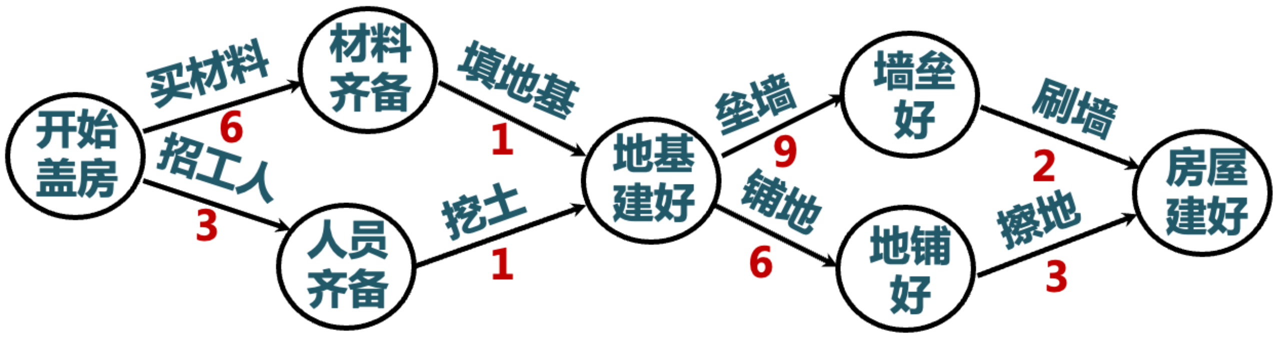
2. 哪些活动是影响工程进度的关键?

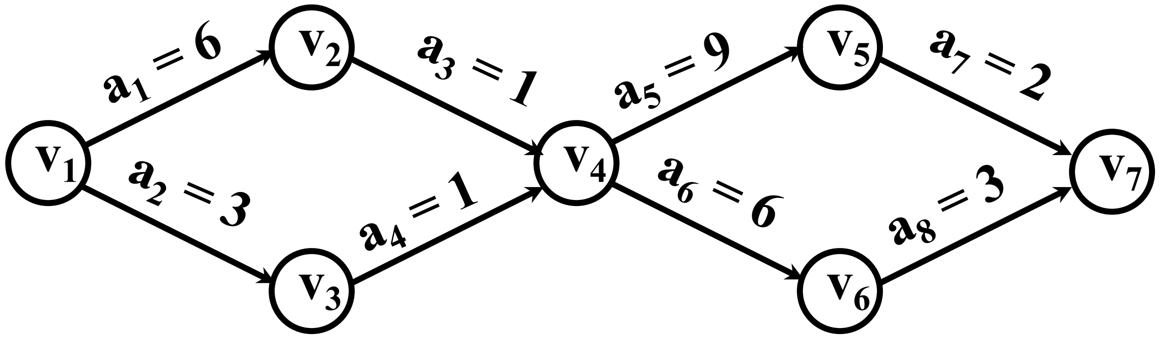
整个工程完成的时间为：从有向网的源点到汇点（终点）的最长路径（权和）。

这里的最长路径叫做**关键路径**。

“**关键活动**”指的是：该弧上的权值增加将使得有向网上的最长路径的长度增加。

2. 关键路径





弧表示一个子工程，

弧上的权值表示完成该项子工程所需时间。

“事件（顶点）”的最早发生时间ve(j)

ve(j)=从源点到顶点j的最长路径长度；

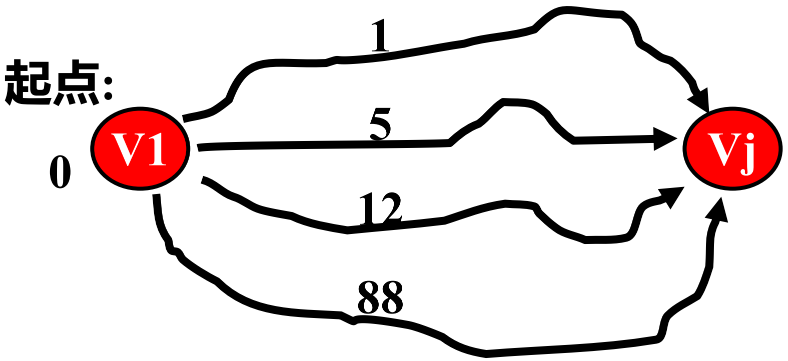
“事件（顶点）”的最迟发生时间vl(k)

不推迟整个工程完成的前提下，事件k最迟发生的时间。需要考虑顶点k到终点的最长路径。

从源点到汇点有多条不同的路径，我走捷径，工程岂不是可以最早完工？

2. 关键路径

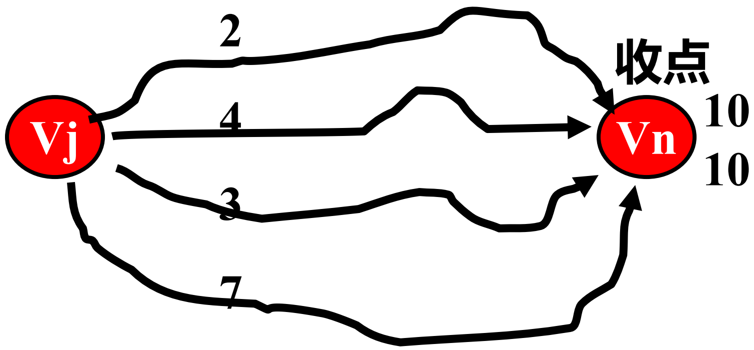
最早发生时间ve(j)



ve(Vj) = 88

取 1、5、12、88的最大值 88

最迟发生时间vl(k)



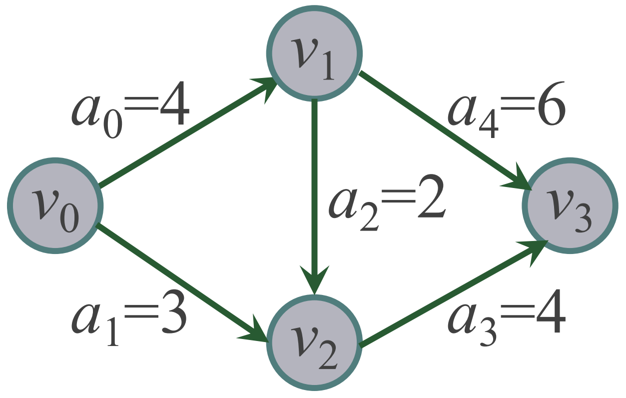
vl(Vj) = 取 10-2、10-4、10-3、10-7的最小值 3;

或 10 - 最长路径 7

有向网中的每一条弧都是工程中必不可少的一项子工程，并行的各项子工程，以持续时间最长的子工程为关键工程，决定了整个工程完工的最早时间，而持续时间较短的子工程则有一定的自由度。

6.6 有向无环图及其应用

2. 关键路径



$ve(v_i)$ —— 事件 v_i 的最早发生时间

$vl(v_i)$ —— 事件 v_i 的最迟发生时间

$ee(a_i)$ —— 活动 a_i 的最早开始时间

$el(a_i)$ —— 活动 a_i 的最迟开始时间

$$dut(j,k) = len\langle v_j, v_k\rangle$$

$dut(j, k)$——活动 a_i 的持续时间，满足 a_i 关联事件 v_j、v_k

$el(a_i) - ee(a_i)$ 意味着完成活动 a_i 的时间余量

事件—— 发生 → 最早

活动—— 开始 → 最迟

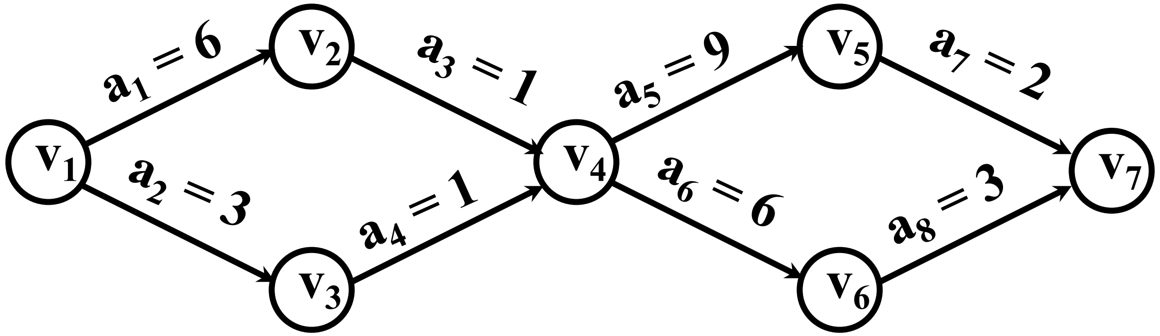
$el(a_i) = ee(a_i)$ 的活动叫做**关键活动**； $vl(v_i) = ve(v_i)$ 的事件叫做**关键事件**；

关键路径上的活动都是关键活动。关键路径上的事件都是关键事件。

2. 关键路径

辨别关键活动就是要找 $el(a_i) = ee(a_i)$ 的活动

因此首先必须求出 AOE 网中的所有活动的 $ee(a_i)$ 和 $el(a_i)$ 。



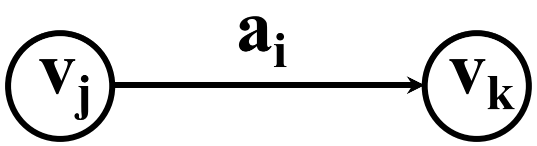
例 a_4

$ee(a_4) = ve(v_3)$

$el(a_4) = vl(v_4) - dut(3, 4)$

事件与活动之间的关系

设活动 a_i 关联的前后事件分别为 v_j 、 v_k



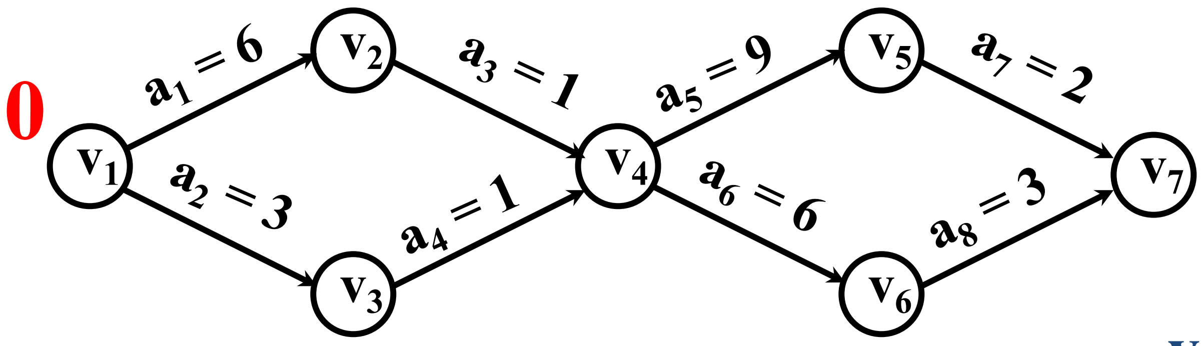
则有 $ee(a_i) = ve(v_j)$

$el(a_i) = vl(v_k) - dut(j, k)$

2. 关键路径

问题转化为求各事件的 $ve(v_j)$ 和 $vl(v_j)$ 。

注意： 源点和汇点一定是关键事件，其最早和最迟发生时间相等



$$ve(v_j) = \mathrm{Max}\{ ve(v_i) + dut(i, j) \}$$

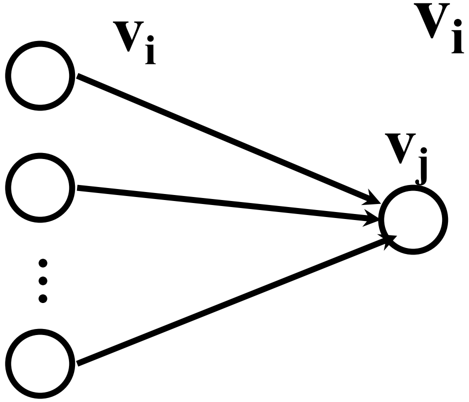
v_i 是 v_j 的前驱事件

例，最早发生时间

$ve(v_2) = ve(v_1) + 6$

$ve(v_3) = ve(v_1) + 3$

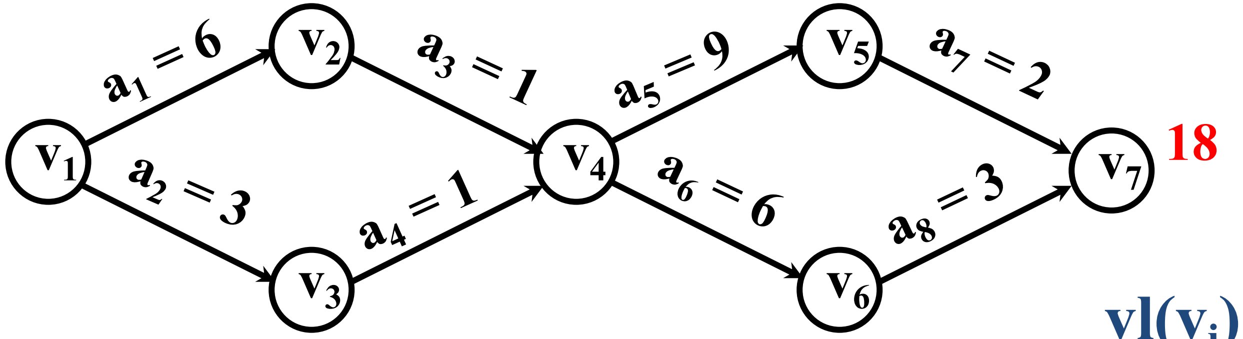
$ve(v_4) = $ $ve(v_2) + 1$? $ve(v_3) + 1$?



2. 关键路径

问题转化为求各事件的 $ve(v_i)$ 和 $vl(v_i)$ 。

注意： 源点和汇点一定是关键事件，其最早和最迟发生时间相等



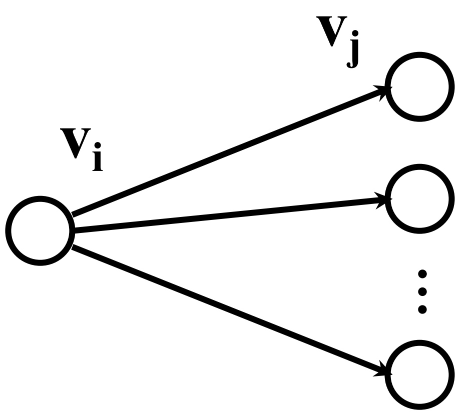
$$vl(v_i) = \mathrm{Min}\{ vl(v_j) - dut(i,j) \}$$

例，最迟发生时间

v_j 是 v_i 的后继事件

例，

$$vl(v_5) = vl(v_7) - 2$$
$$vl(v_6) = vl(v_7) - 3$$
$$vl(v_4) = vl(v_5) - 9\ ?$$
$$vl(v_6) - 6\ ?$$



3. 关键路径算法描述

1. 从源点 v_0 出发，令 $ve(v_0) = 0$，按拓扑有序求其余各事件的最早发生时间 $ve(v_i)$。

$$ve(v_j) = Max\{ ve(v_i) + dut(i, j) \}$$

v_i 是 v_j 的前驱事件

2. 从终点 v_n 出发，令 $vl(v_n) = ve(v_n)$，按逆拓扑有序求其余各事件的最迟发生时间 $vl(v_i)$。

$$vl(v_i) = Min\{ vl(v_j) - dut(i, j) \}$$

v_j 是 v_i 的后继事件

3. 根据各事件的 $ve(v_i)$ 和 $vl(v_i)$，求各活动的最早开始时间 $ee(a_j)$ 和最迟开始时间 $el(a_j)$。

设活动 a_i 关联的前后事件分别为 v_j 、v_k

$$ee(a_i) = ve(v_j)$$

$$el(a_i) = vl(v_k) - dut(j, k)$$

4. $el(a_j) = ee(a_j)$ 的活动为关键活动。

$dut(j,k) = len<v_j, v_k>$

3. 关键路径算法实现

算法：关键路径算法
输入：带权有向图 $G=(V，E)$
输出：关键活动

1. 计算各个活动的最早开始时间和最晚开始时间
2. 计算各个活动的时间余量，时间余量为 0 即为关键活动

设带权有向图 $G=(V，E)$含有 n 个顶点 e 条边，设置 4 个一维数组：

（1）事件的最早发生时间 ve[n]
（2）事件的最迟发生时间 vl[n]：
（3）活动的最早开始时间 ee[e]
（4）活动的最晚开始时间 el[e]

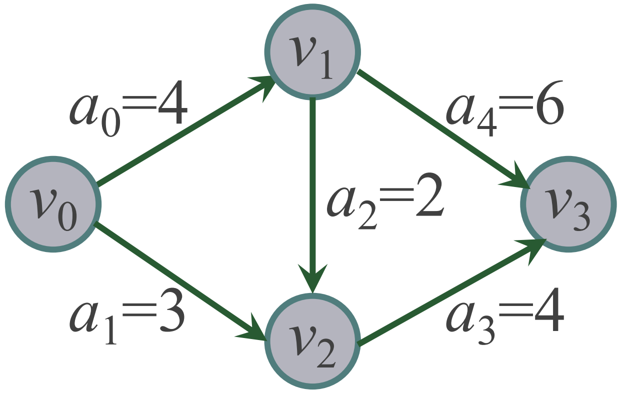
3. 关键路径算法实现

（1）事件的最早发生时间 ve[k]

$$\begin{cases} ve[0] = 0 \\ ve[k] = \max\{ve[j] + len<v_j, v_k>\} \quad (<v_j, v_k> \in p[k]) \end{cases}$$

p[k]：所有到达 v_k 的有向边

事件 v_2 的最早发生时间是多少?



$$ve[2] = \max\{ve[0] + a_1, ve[1] + a_2\} = \{0 + 3, 4 + 2\} = 6$$

AOE网的性质：只有进入 v_k 的所有活动<v_j，v_k>都结束，v_k 代表的事件才能发生

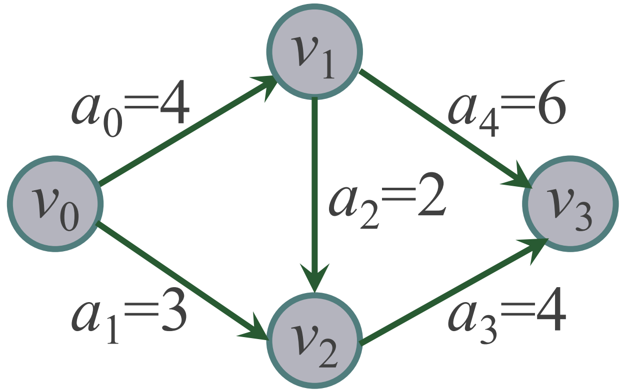
3. 关键路径算法实现

（1）事件的最早发生时间 ve[k]

$$
\begin{cases} ve[0] = 0 \\ ve[k] = \max\{ve[j] + len\langle v_j, v_k\rangle\} \quad (\langle v_j, v_k\rangle \in p[k]) \end{cases}
$$

p[k]：所有到达 v_k 的有向边

	v_0	v_1	v_2	v_3
ve[k]	0	4	6	10



3. 关键路径算法实现

（2）事件的最迟发生时间 vl[k]

$$\begin{cases} vl[n-1] = ve[n-1] \\ vl[k] = \min\{vl[j]-len\langle v_k, v_j\rangle\} \end{cases}$$

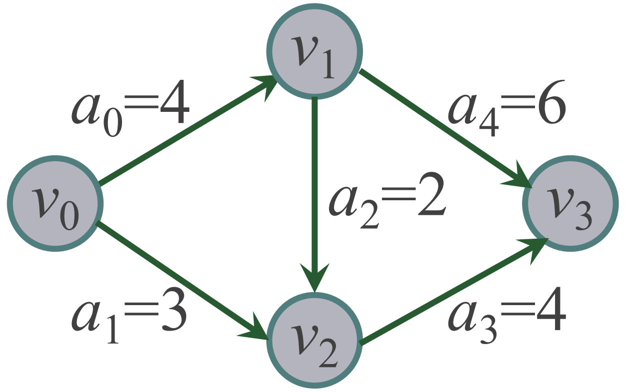
（$\langle v_k, v_j\rangle \in s[k]$）s[k]：所有从 v_k 发出的有向边

事件 v_3 的最迟发生时间是多少?

vl[3] = ve[3] = 10

事件 v_2 的最迟发生时间是多少?

vl[2] = vl[3] – a_3 = 6



事件 v_0 的最迟发生时间是多少?

ve[0] = min{ve[1] – a_0, ve[2] – a_1} = {4 – 4, 6 – 3} = 0

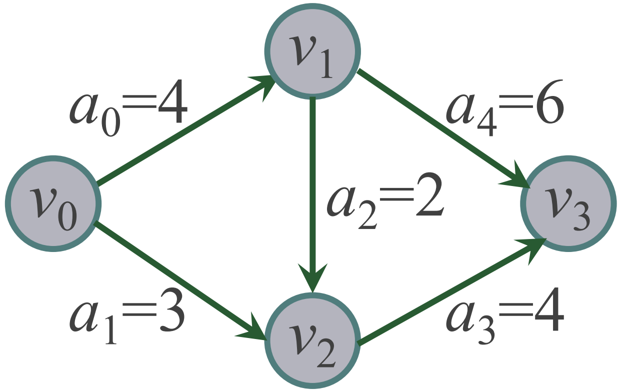
3. 关键路径算法实现

（2）事件的最迟发生时间 vl[k]

$$\begin{cases} vl[n-1] = ve[n-1] \\ vl[k] = \min\{vl[j] - len\langle v_k, v_j\rangle\} \end{cases}$$

（$\langle v_k, v_j\rangle \in s[k]$）s[k]：所有从 v_k 发出的有向边

	v_0	v_1	v_2	v_3
ve[k]	0	4	6	10
vl[k]	0	4	6	10



3. 关键路径算法实现

（3）活动的最早开始时间 ee[i]　　（4）活动的最晚开始时间 el[i]

若活动 a_i 由有向边$<v_k, v_j>$表示，则

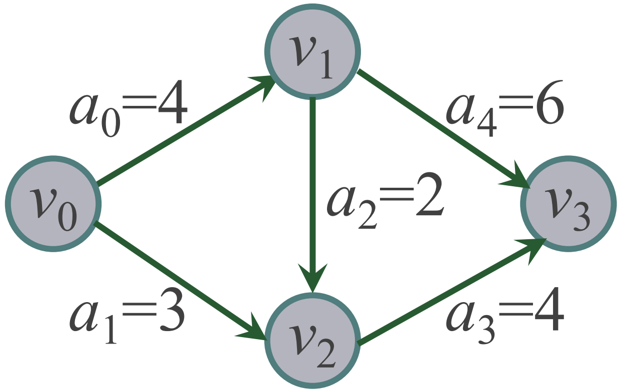
$$\begin{cases} ee[i] = ve[k] \\ el[i] = vl[j] - len<v_k, v_j> \end{cases}$$

活动 a_2 的最早开始时间是多少?

ee[2] = ve[1] = 4

活动 a_2 的最晚开始时间是多少?

el[2] = vl[2] − 2 = 4

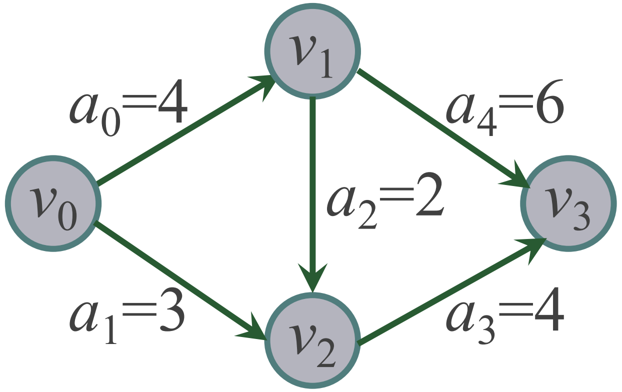


3. 关键路径算法实现

（3）活动的最早开始时间 ee[i]　　（4）活动的最晚开始时间 el[i]

若活动 a_i 由有向边 $<v_k, v_j>$ 表示，则

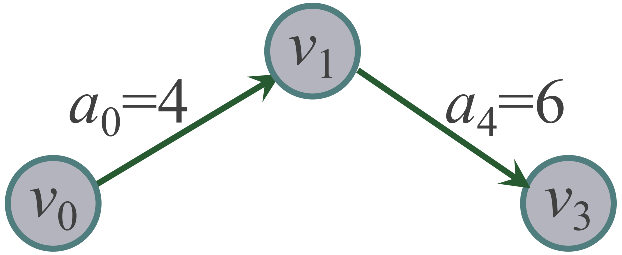
$$\begin{cases} ee[i] = ve[k] \\ el[i] = vl[j] - len<v_k, v_j> \end{cases}$$

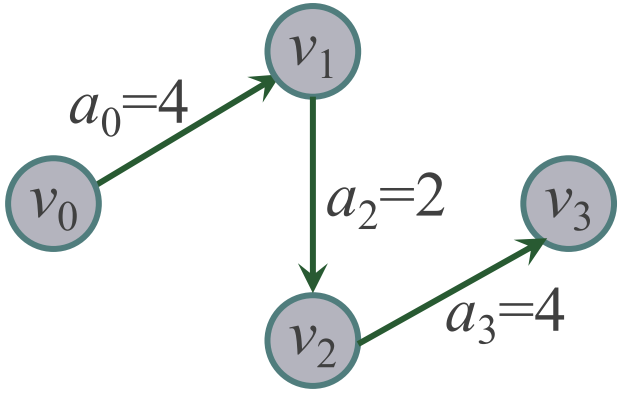


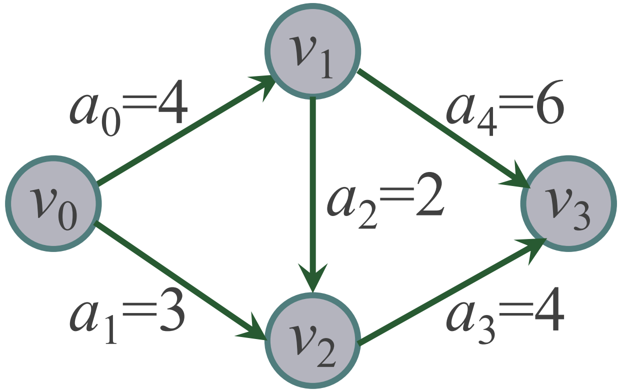
	v_0	v_1	v_2	v_3
ve[k]	0	4	6	10
vl[k]	0	4	6	10

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
ee[i]	0	0	4	6	4
el[i]	0	3	4	6	4

3. 关键路径算法实现



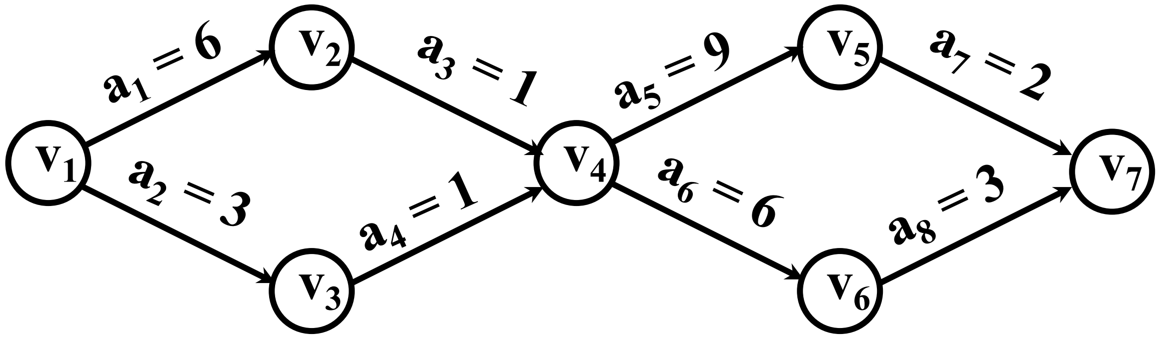




	v_0	v_1	v_2	v_3
ve[k]	0	4	6	10
vl[k]	0	4	6	10

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
ee[i]	0	0	4	6	4
el[i]	0	3	4	6	4

例题



事件—— 发生 → 最早

活动—— 开始 → 最迟

关键路径 a_1 a_3 a_5 a_7

$ve(v_j)$ = Max{ $ve(v_i)$ +dut(i , j) }

v_i 是 v_j 的前驱事件

$vl(v_i)$ = Min{ $vl(v_j)$ − dut(i , j) }

v_j 是 v_i 的后继事件

设活动 a_i 关联的前后事件分别为 v_j 、 v_k

$ee(a_i) = ve(v_j)$

$el(a_i) = vl(v_k) - dut(j, k)$

拓扑有序

事件	ve	vl
v_1	0	0
v_2	6	6
v_3	3	6
v_4	7	7
v_5	16	16
v_6	13	15
v_7	18	18

逆拓扑有序

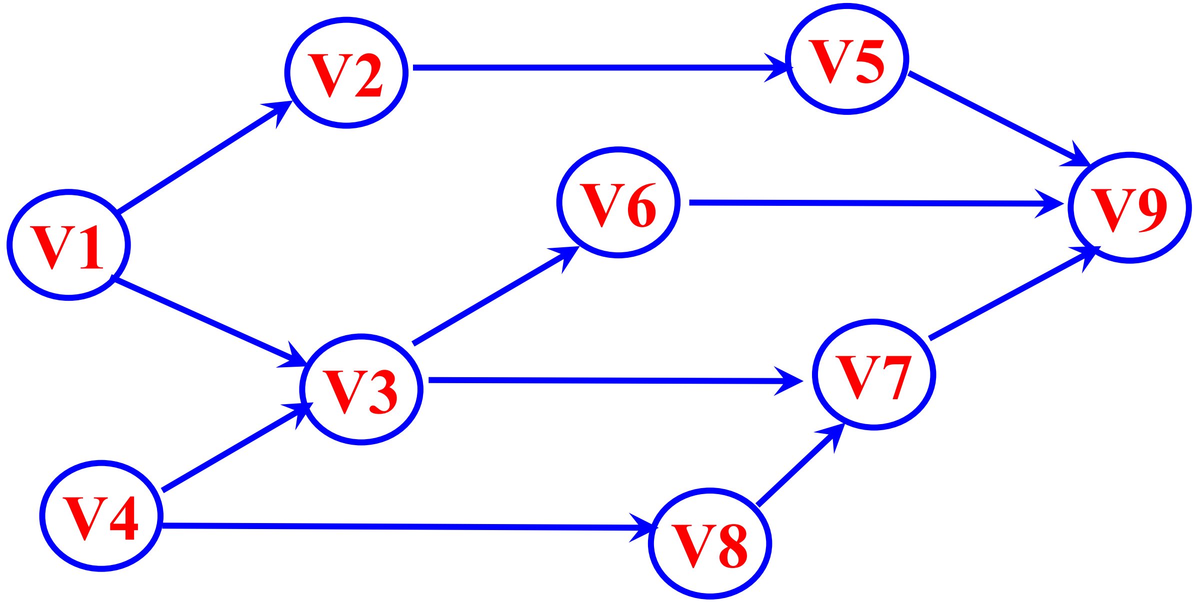
活动	ee	el
a_1	0	0
a_2	0	3
a_3	6	6
a_4	3	6
a_5	7	7
a_6	7	9
a_7	16	16
a_8	13	15

小结

1. 掌握拓扑排序算法及实现
2. 理解AOV网的定义及性质
3. 理解关键路径算法及实现方法

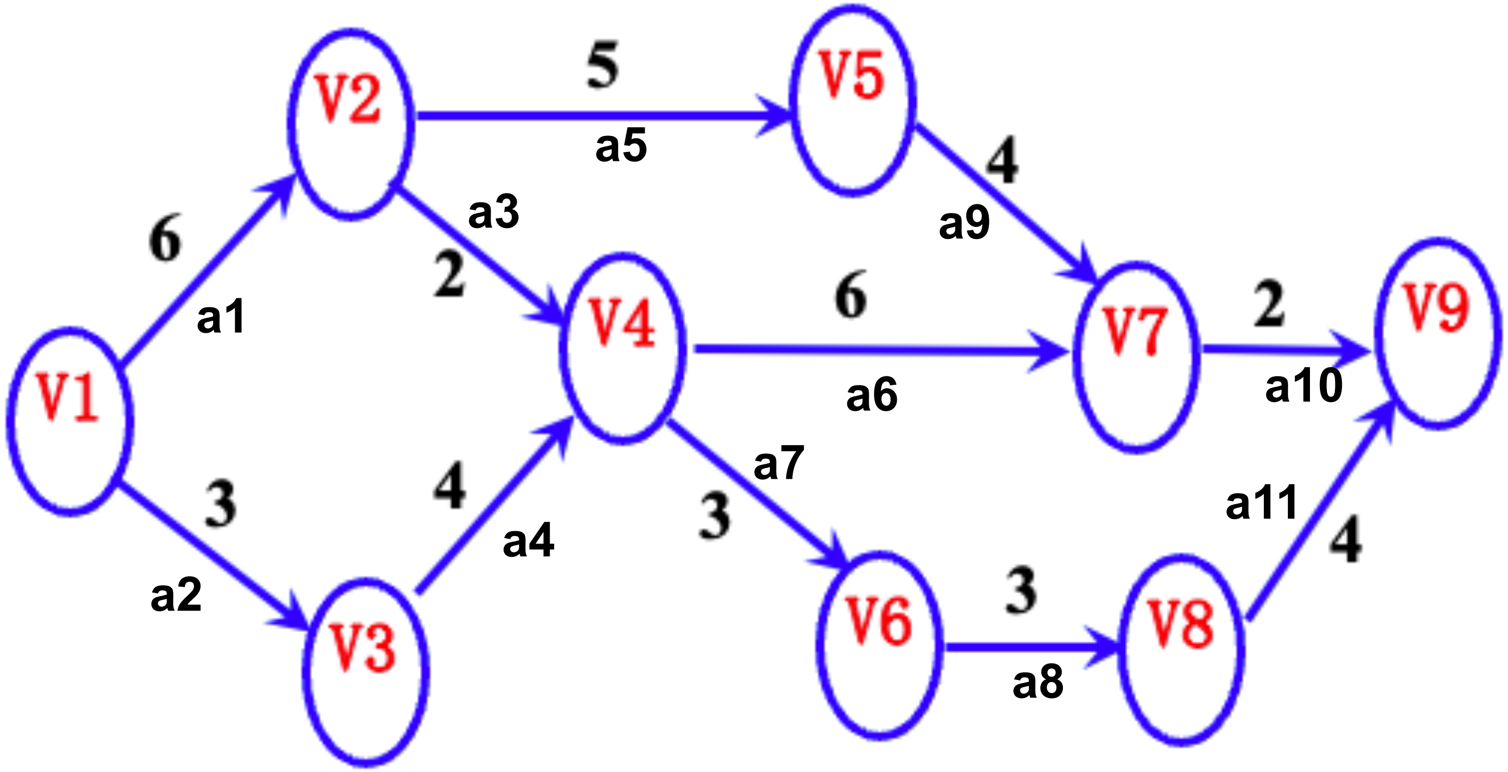
作业

有向图如下图所示，请写出它的一个拓扑有序序列。



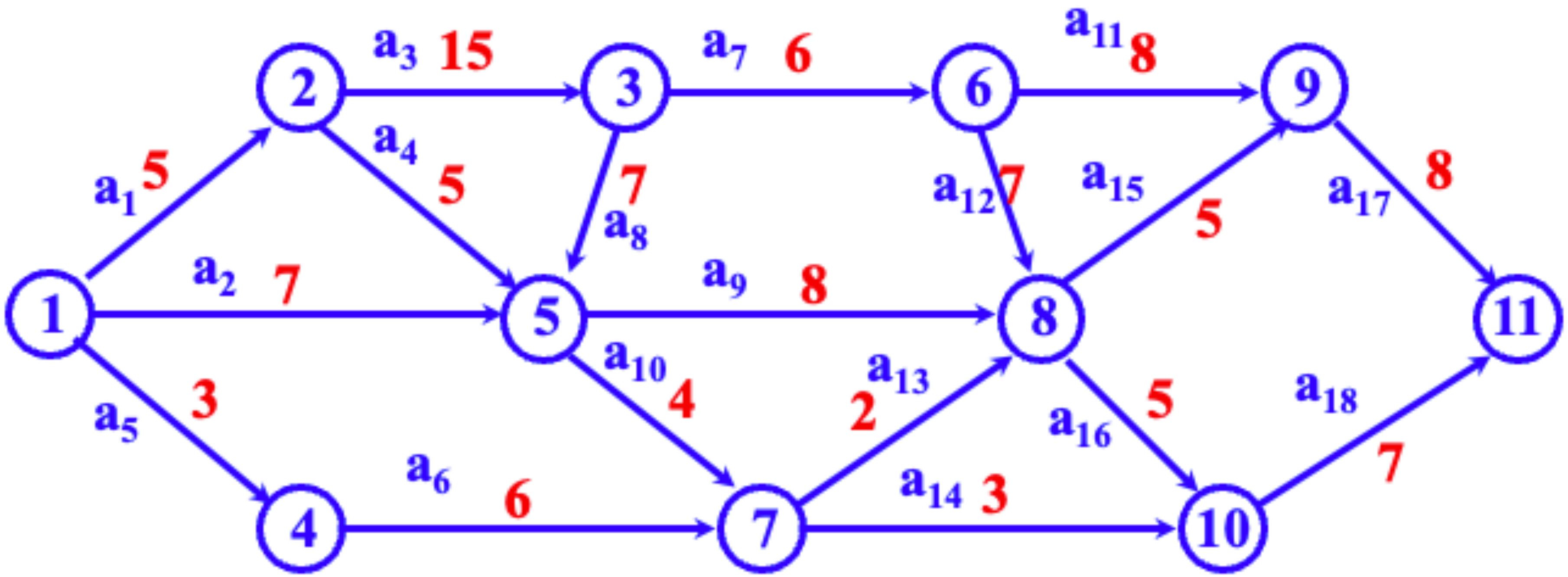
作业

求 AOE 网关键路径　　要求：构造事件表和活动表



作业

求 AOE 网关键路径　　要求：构造事件表和活动表



本章总结

1、熟悉图的各个基本概念

2、掌握图的各种存储结构，能写出其存储表示

3、掌握图遍历的递归算法（DFS&BFS）

4、掌握图的连通性问题，能求出最小生成树：Prim，Kruskal

5、掌握最短路径的算法：Dijkstra、Floyd

6、掌握有向无环图，能进行拓扑排序，会求关键路径

Thank You !

Q & A

作业

有向图如下图所示，请写出它的一个拓扑有序序列。