
# Data Structures

Ch6

# 图 Graphs

2022 年 11 月 2 日

学而不厌 诲人不倦

# Chapter 6 图

# 6.3 图的存储结构及实现

## 6-3-1　图的邻接矩阵存储结构

# 6.3 图的存储结构及实现



## 1. 图的存储结构

图是否可以采用顺序存储结构?

在图中，任何两个顶点之间都可能存在关系（边）

⇩

无法通过存储位置表示这种任意的逻辑关系

⇩

图无法采用顺序存储结构

如何存储图呢?

图是由顶点和边组成 ⇨ 分别考虑 { 如何存储顶点 / 如何存储边 }

## 1. 图的存储结构

### 邻接矩阵

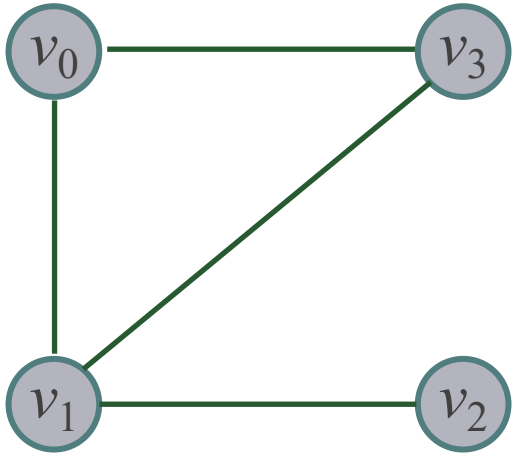
邻接矩阵也称数组表示法，其基本思想是：

- 一维数组：存储图中顶点的信息
- 二维数组（邻接矩阵）：存储图中各顶点之间的邻接关系

设$G=(V, E)$有 $n$ 个顶点，则邻接矩阵是一个 $n\times n$ 的方阵，定义为：

$$\text{edge[i][j]}=\begin{cases}1 & \text{若}(v_i, v_j)\in E\text{（或}<v_i, v_j>\in E\text{）}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

## 2. 图的存储示意图

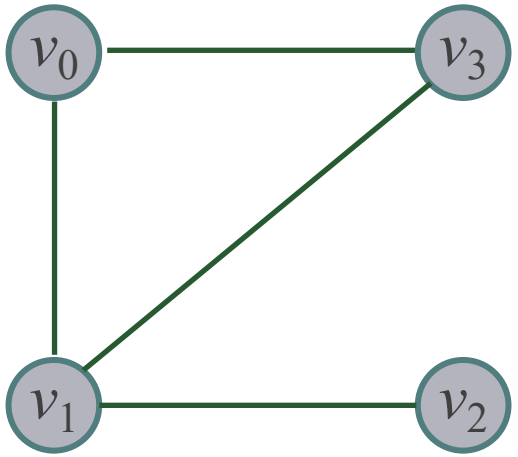



$$\text{vertex} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{edge} = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 无向图的邻接矩阵有什么特点？ ⇨ 对称矩阵
- 如何求顶点 $v$ 的度？ ⇨ 第 $v$ 行（或第 $v$ 列）非零元素的个数
- 如何判断顶点 $i$ 和 $j$ 之间是否存在边？ ⇨ if (edge[i][j] == 1)

## 2. 图的存储示意图




$$\text{vertex} = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

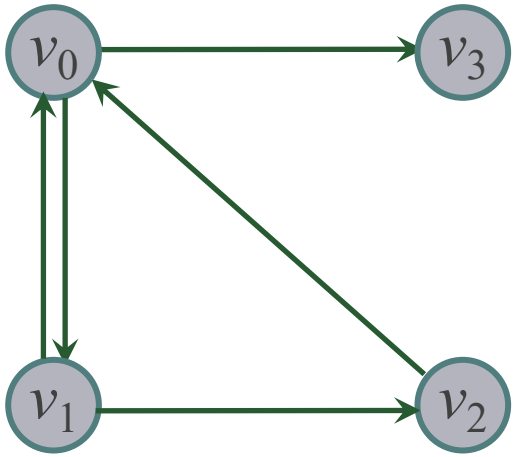
$$\text{edge} = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

如何求顶点 $i$ 的所有邻接点? ⇨ 扫描第 $i$ 行

```
for (j = 0; j < n; j++)
    if (edge[i][j] == 1)
        顶点 j 是顶点 i 的邻接点
```

# 6.3 图的存储结构及实现

## 2. 图的存储示意图

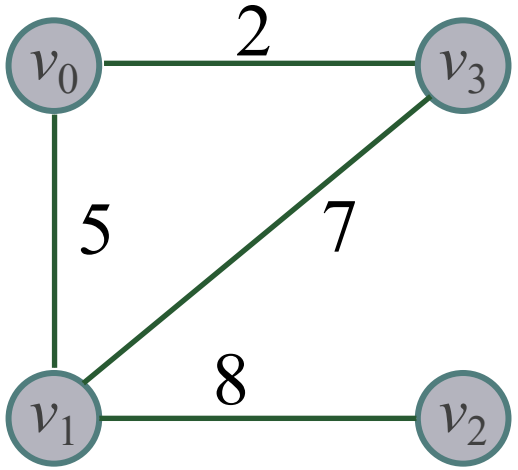



$$\text{vertex} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\text{edge} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 有向图的邻接矩阵一定不对称吗？ ⇨ 顶点间存在方向相反的弧
- 如何求顶点 $v$ 的出度？ ⇨ 第 $v$ 行非零元素的个数
- 如何求顶点 $v$ 的入度？ ⇨ 第 $v$ 列非零元素的个数

## 2. 图的存储示意图




$$\text{vertex} = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

$$\text{edge} = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 7 \\ \infty & 8 & 0 & \infty \\ 2 & 7 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

网图的邻接矩阵可定义为：

$$\text{arc[i][j]} = \begin{cases} w_{ij} & \text{若}(v_i, v_j) \in E \text{（或}<v_i, v_j> \in E\text{）} \\ 0 & \text{若} i = j \\ \infty & \text{其他} \end{cases}$$

## 3. 图的存储结构定义

图的抽象数据类型定义?

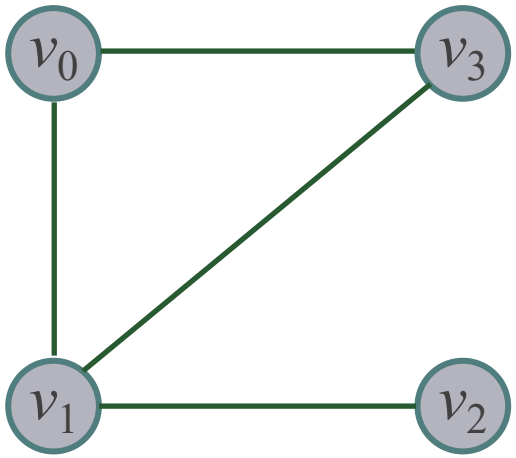
```
ADT  Graph
DataModel
    …
Operation
    CreatGraph：图的建立
    DestroyGraph：图的销毁
    DFTraverse：深度优先遍历图
    BFTraverse：广度优先遍历图
endADT
```

```
const int MaxSize = 10;
template <typename DataType>
class MGraph
{
public:
    MGraph(DataType a[ ], int n, int e);
    ~MGraph( );
    void DFTraverse(int v);
    void BFTraverse(int v);
private:
    DataType vertex[MaxSize];
    int edge[MaxSize][MaxSize];
    int vertexNum, edgeNum;
};
```

## 4. 图的建立

输入

a = | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |




结果

vertex = | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |

$$\text{edge} = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

| vertexNum | edgeNum |
|---|---|
| 4 | 4 |

## 4. 图的建立

算法：CreatGraph(a[n], n, e)

输入：顶点的数据a[n]，顶点个数n，边的个数e

输出：图的邻接矩阵

1. 存储图的顶点个数和边的个数；
2. 将顶点信息存储在一维数组vertex中；
3. 初始化邻接矩阵edge；
4. 依次输入每条边并存储在邻接矩阵edge中：
   4.1 输入边依附的两个顶点的编号i和j；
   4.2 将edge[i][j]和edge[j][i]的值置为1；

vertex =

| $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|

edge =

| | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $v_0$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $v_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $v_3$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

| vertexNum | edgeNum |
|---|---|
| 4 | 4 |

## 4. 图的建立

```
template <typename DataType>
MGraph<DataType> :: MGraph(DataType a[ ], int n, int e)
{
    int i, j, k;
    vertexNum = n; edgeNum = e;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)          //存储顶点
        vertex[i] = a[i];
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)          //初始化邻接矩阵
        for (j = 0; j < vertexNum; j++)
            edge[i][j] = 0;
    for (k = 0; k < edgeNum; k++)            //依次输入每一条边
    {
        cin >> i >> j;                       //输入边依附的两个顶点的编号
        edge[i][j] = 1; edge[j][i] = 1;      //置有边标志
    }
}
```

## 5. 图的深度优先遍历

算法：DFTraverse
输入：顶点的编号 v
输出：图的深度优先遍历序列

1. 访问顶点 v; 修改标志visited[v] = 1;
2. j =顶点 v 的第一个邻接点;
3. while (j 存在)
   3.1 if (j 未被访问) 从顶点 j 出发递归执行该算法;
   3.2 j = 顶点 v 的下一个邻接点;

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |

| | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $v_0$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $v_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $v_3$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

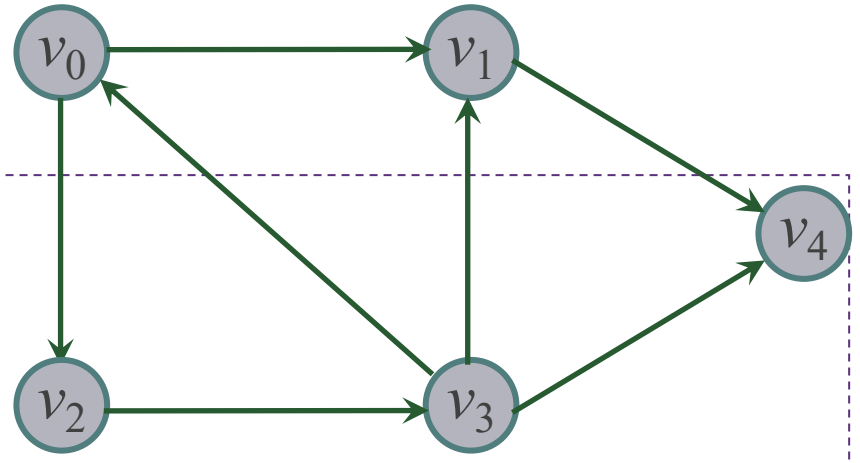
## 5. 图的深度优先遍历

```
template <typename DataType>
void MGraph<DataType> :: DFTraverse(int v)
{
    cout << vertex[v]; visited[v] = 1;
    for (int j = 0; j < vertexNum; j++)
        if (edge[v][j] == 1 && visited[j] == 0)
            DFTraverse( j );
}
```

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |

| | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $v_0$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $v_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $v_3$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

## 6. 图的广度优先遍历




算法：BFTraverse
输入：顶点的编号 v
输出：图的广度优先遍历序列

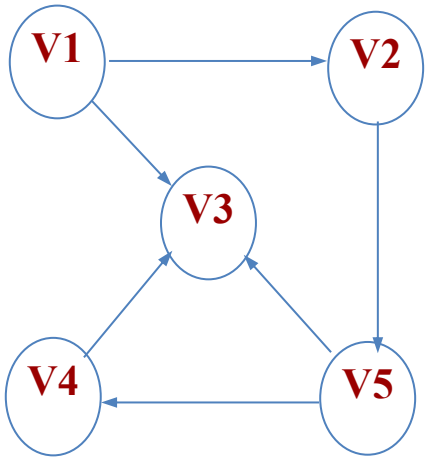
1. 队列 Q 初始化;
2. 访问顶点 v ; 修改标志visited [v] = 1; 顶点 v 入队列 Q;
3. while (队列 Q 非空)
   3.1 i = 队列 Q 的队头元素出队;
   3.2 j = 顶点 v 的第一个邻接点;
   3.3 while (j 存在)
      3.3.1 如果 j 未被访问，则
         访问顶点 j ; 修改标志visited[j] = 1; 顶点 j 入队列 Q;
      3.3.2 j = 顶点 i 的下一个邻接点;

## 6. 图的广度优先遍历

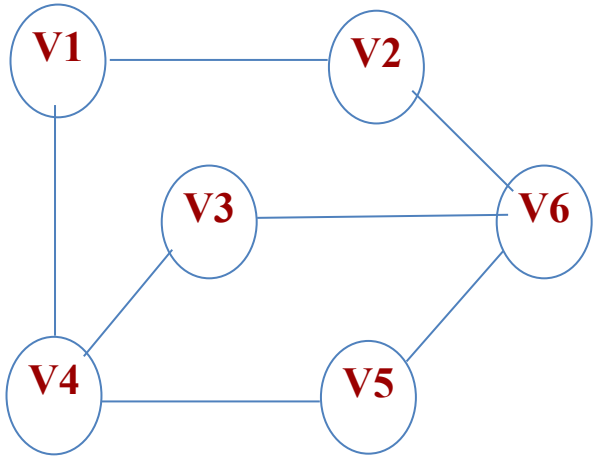
```
template <typename DataType>
void MGraph<DataType> :: BFTraverse(int v)
{
    int w, j, Q[MaxSize];                                  //采用顺序队列
    int front = -1, rear = -1;                             //初始化队列
    cout << vertex[v]; visited[v] = 1; Q[++rear] = v;      //被访问顶点入队
    while (front != rear)                                  //当队列非空时
    {
        w = Q[++front];                                    //将队头元素出队并送到v中
        for (j = 0; j < vertexNum; j++)
            if (edge[w][j] == 1 && visited[j] == 0 ) {
                cout << vertex[j]; visited[j] = 1; Q[++rear] = j;
            }
    }
}
```

## 例题

1．有向图G1和无向图G2如下图所示，请分别画出它们的邻接矩阵和邻接表。




G1



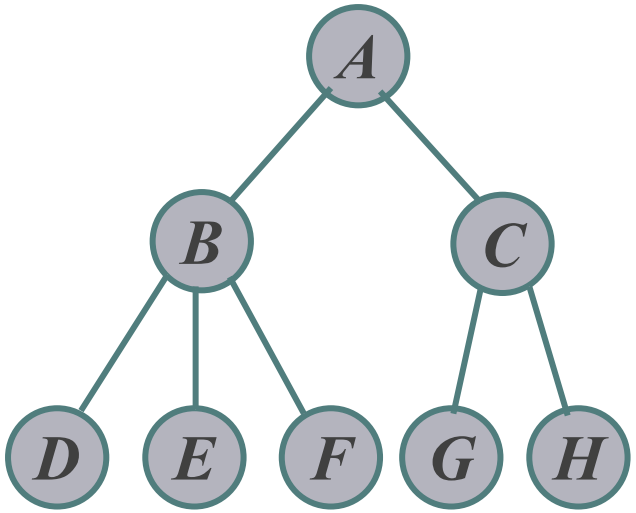

G2

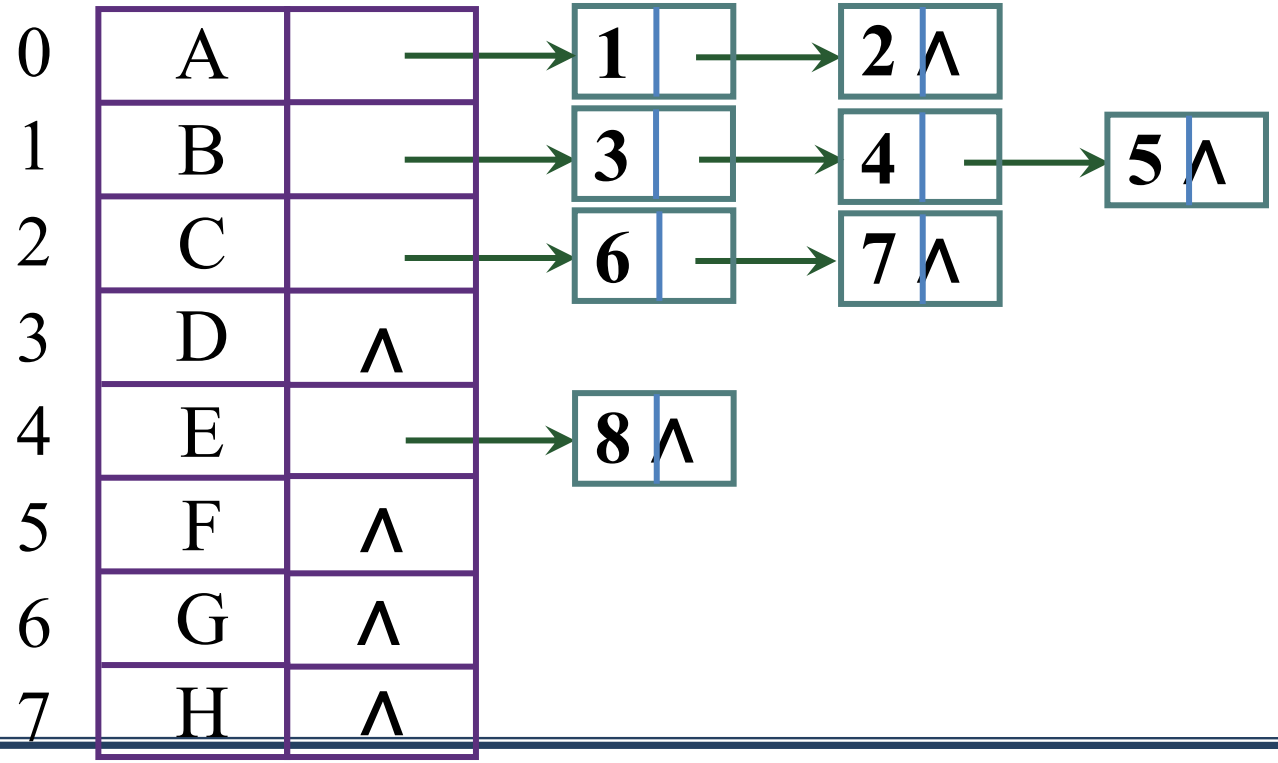
# 6.3 图的存储结构及实现

## 6-3-2　图的邻接表存储结构

## 1. 图的邻接表存储

- 邻接矩阵存储结构的空间复杂度是多少？ ⇨ $O(n^2)$
- 如果采用邻接矩阵存储稀疏图，会出现什么情况？ ⇨ 稀疏矩阵
- 树的孩子表示法？

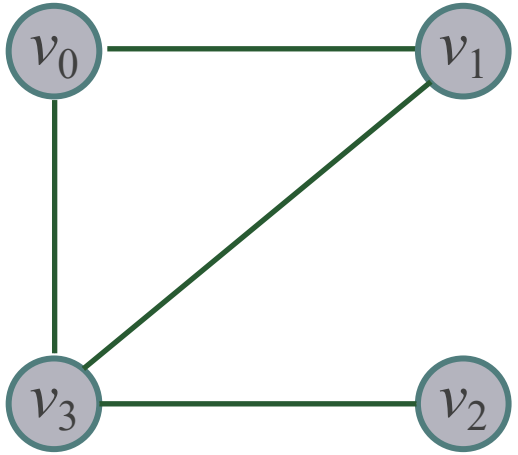


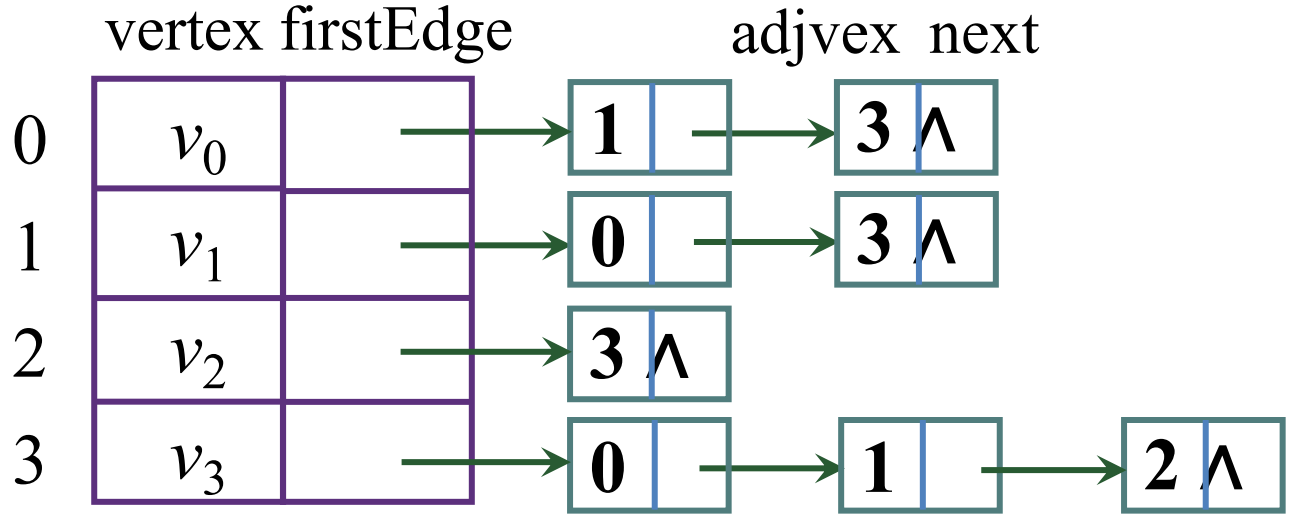



## 1. 图的邻接表存储

邻接表存储的基本思想是：

- 边表（邻接表）：顶点 $v$ 的所有邻接点链成的单链表
- 顶点表：所有边表的头指针和存储顶点信息的一维数组

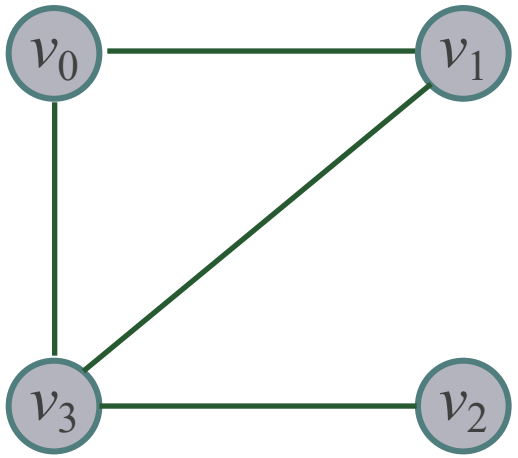


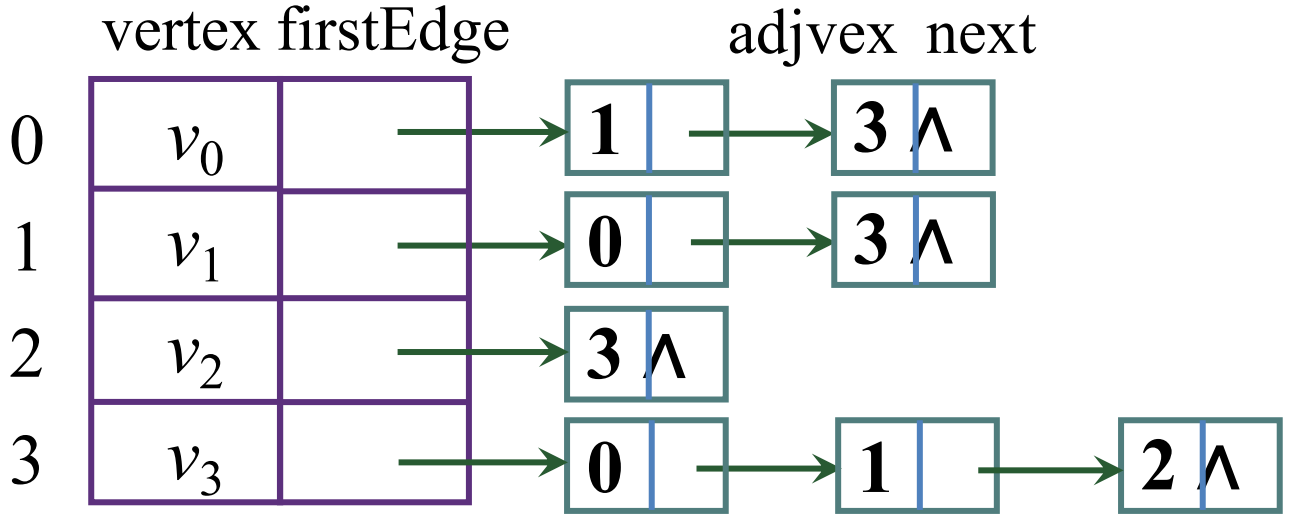



## 2. 图的邻接表存储结构定义

```
struct EdgeNode
{
    int adjvex;
    EdgeNode *next;
} ;
```

```
template <typename DataType>
struct VertexNode
{
    DataType vertex;
    EdgeNode *firstEdge;
};
```

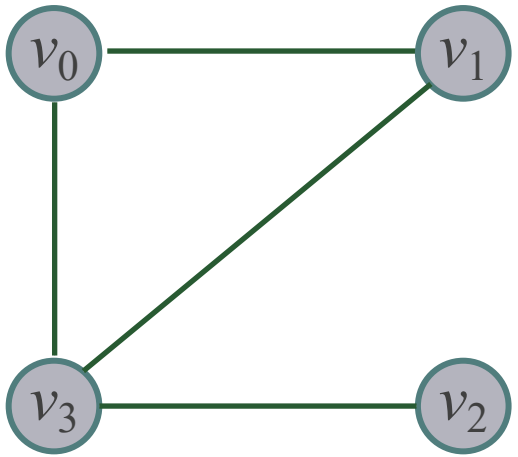


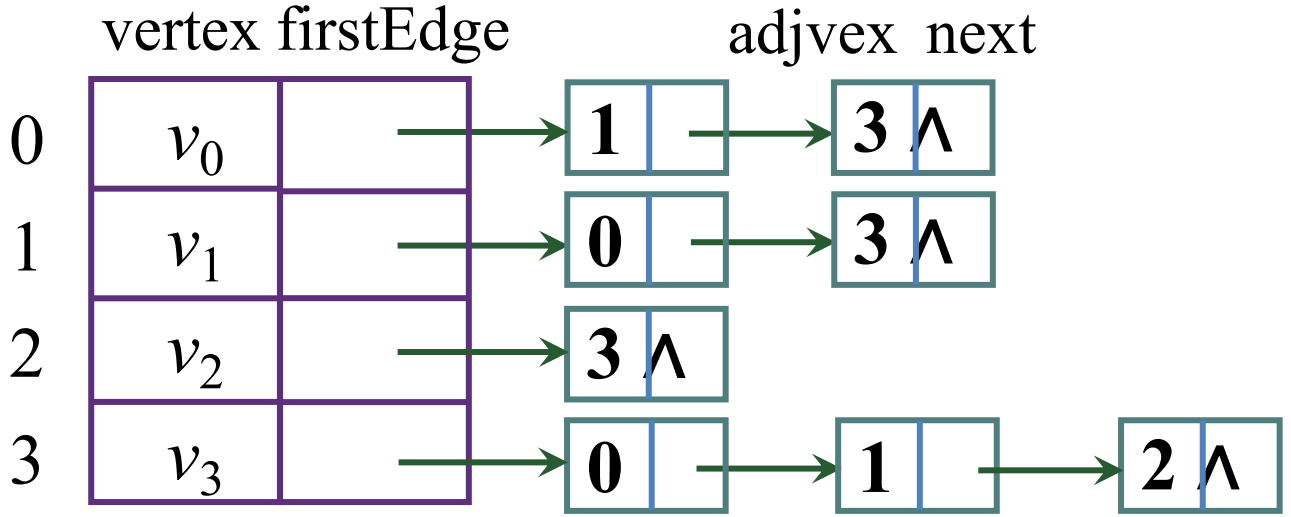



## 3. 图的邻接表基本操作

边表中的结点表示什么？ ⇨ 对应图中的一条边

设图有$n$个顶点$e$条边，邻接表的空间复杂度是多少？ ⇨ $O(n+e)$

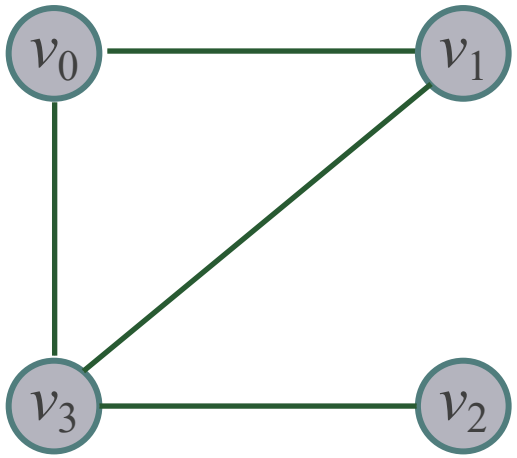


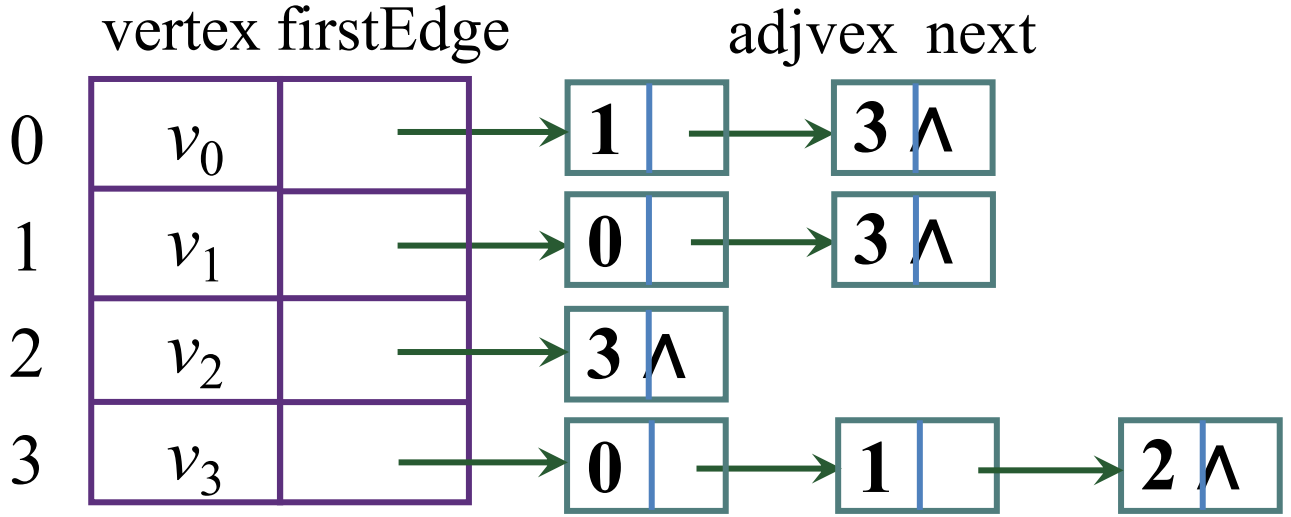



## 3. 图的邻接表基本操作

如何求顶点 $v$ 的度? ⇨ 顶点 $v$ 的边表中结点的个数

```
p = adjlist[v].firstEdge; count = 0;
while (p != nullptr)
{
    count++; p = p->next;
}
```

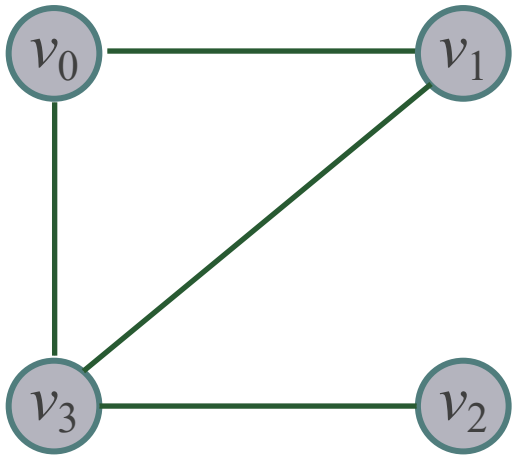


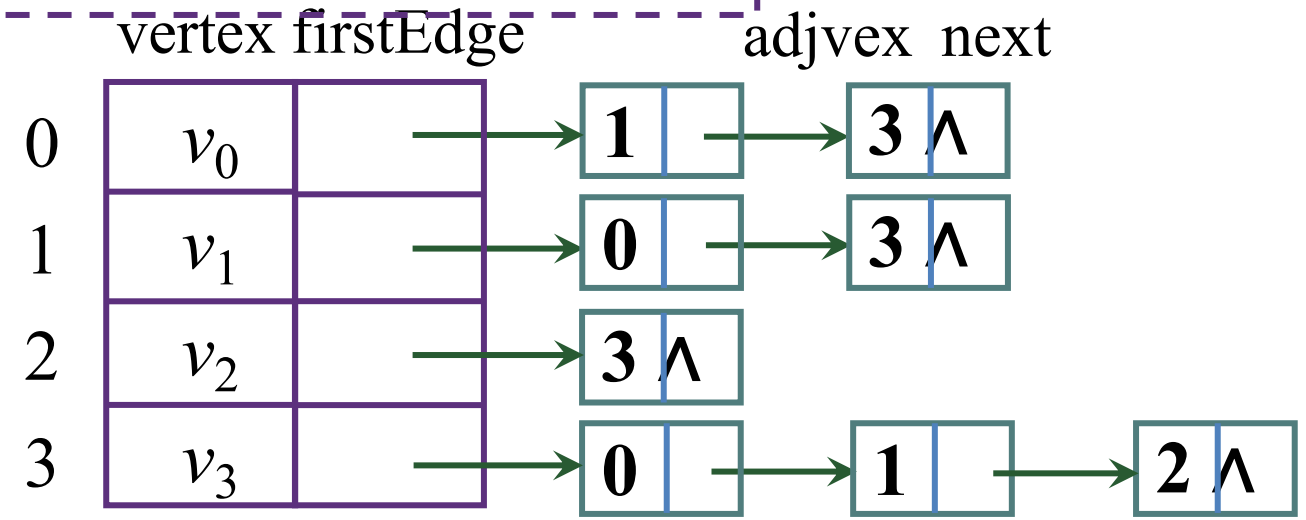



## 3. 图的邻接表基本操作

如何求顶点 $v$ 的所有邻接点? ⇨ 顶点 $i$ 的边表中的所有结点

```
p = adjlist[v].firstEdge;
while (p != nullptr)
{
    j = p->adjvex;                    //j是v的邻接点
    p = p->next;
}
```

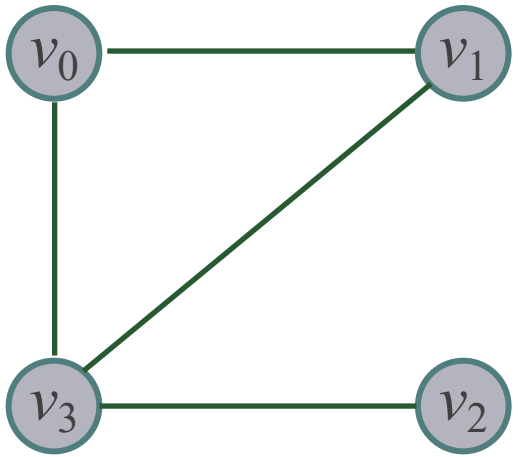


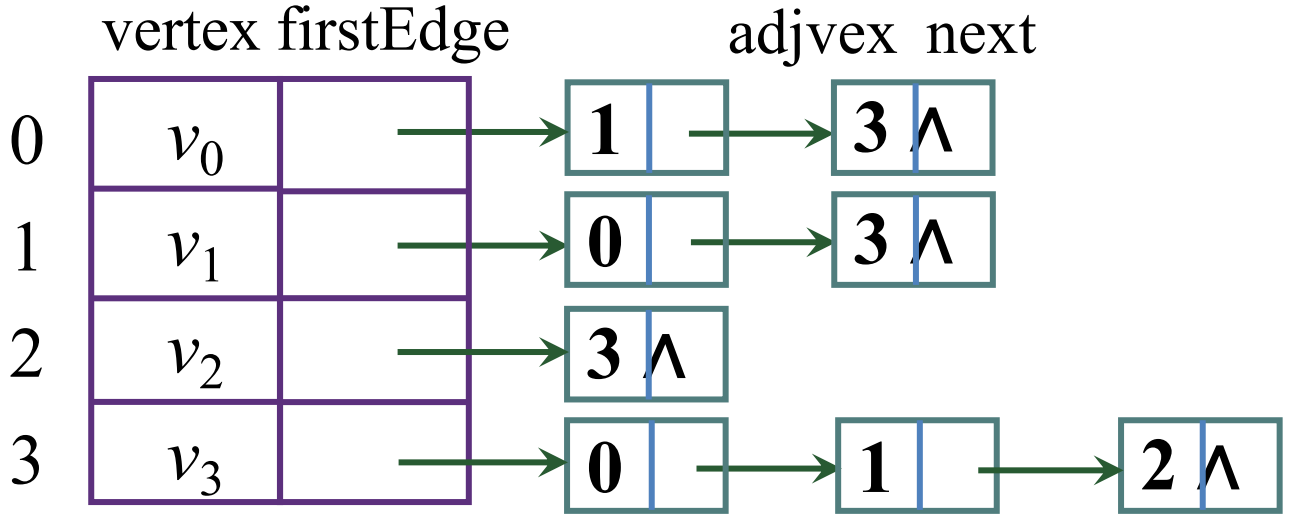



## 3. 图的邻接表基本操作

如何判断顶点 $i$ 和顶点 $j$ 之间是否存在边?

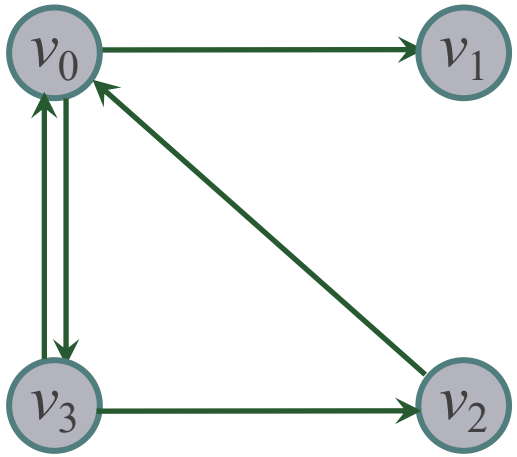
⇨ 测试顶点 $i$ 的边表中是否存在数据域为 $j$ 的结点

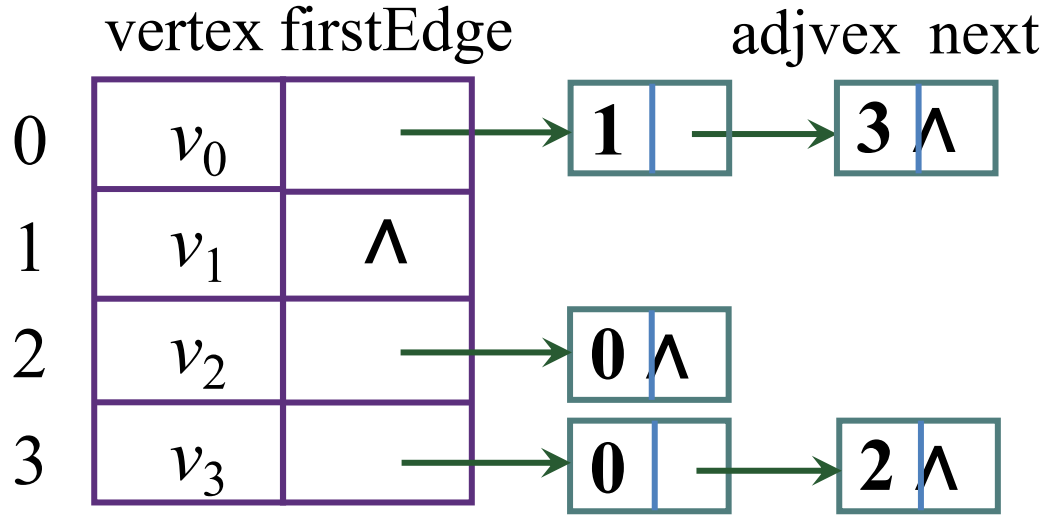


## 4. 存储有向图

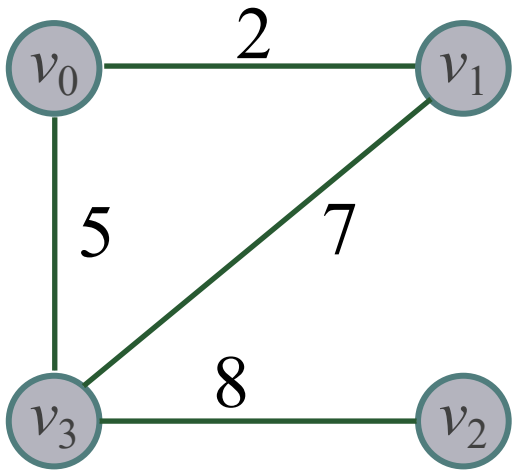
- 如何求顶点 $v$ 的出度? ⇨ 顶点 $v$ 的出边表中结点的个数
- 如何求顶点 $v$ 的入度? ⇨ 所有出边表中数据域为 $v$ 的结点个数

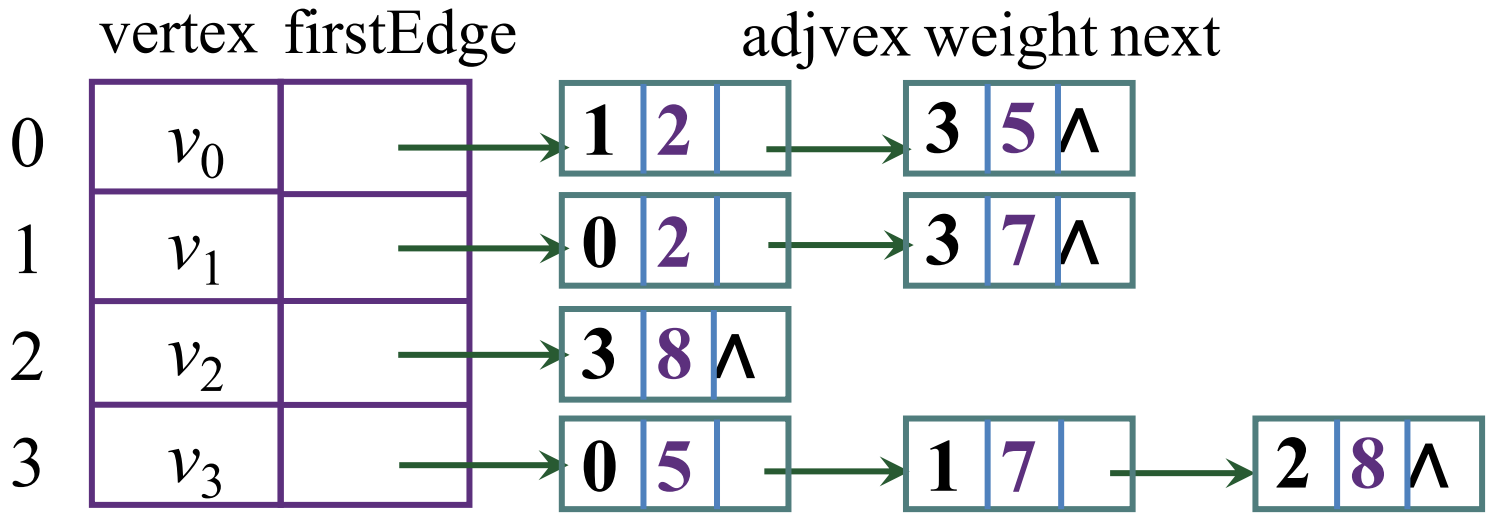


## 5. 存储带权图

邻接表如何存储带权图？ ⇨ 权值存储在边表中



## 6. 邻接表存储结构定义

图的抽象数据类型定义?

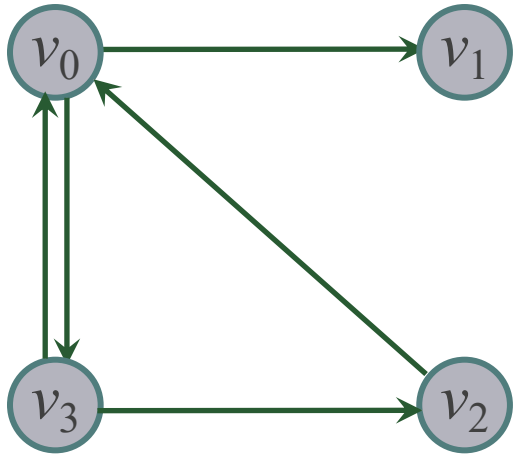
```
ADT  Graph
DataModel
    …
Operation
    CreatGraph：图的建立
    DestroyGraph：图的销毁
    DFTraverse：深度优先遍历图
    BFTraverse：广度优先遍历图
endADT
```

```
const int MaxSize = 10;
template <typename DataType>
class ALGraph
{
public:
    ALGraph(DataType a[ ], int n, int e);
    ~ALGraph( );
    void DFTraverse(int v);
    void BFTraverse(int v);
private:
    VertexNode<DataType>  adjlist[MaxSize];
    int vertexNum, edgeNum;
};
```

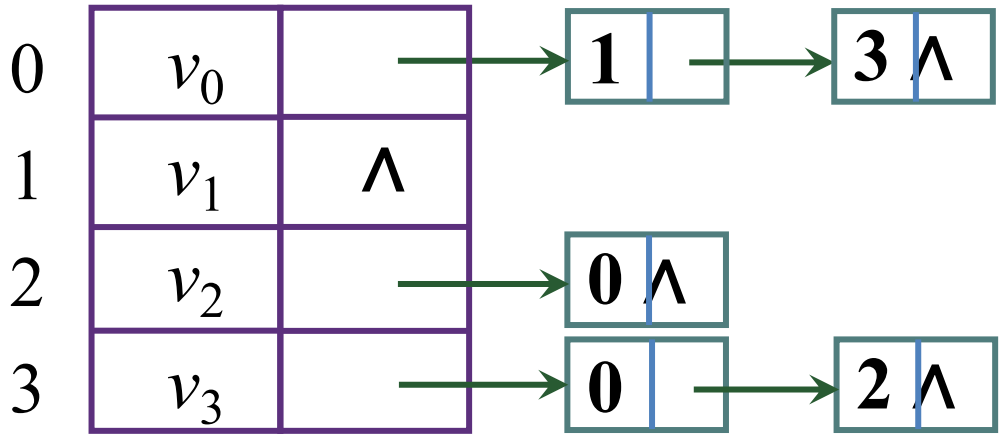
## 7. 图的建立

输入

a = | $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |




结果



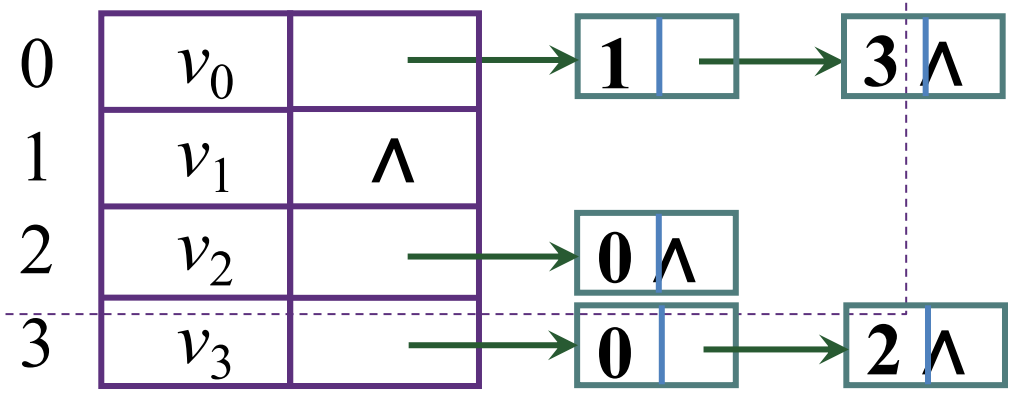
## 7. 图的建立

算法：CreatGraph(a[n], n, e)

输入：顶点的数据信息a[n]，顶点个数 n，边的个数 e

输出：图的邻接表

1. 存储图的顶点个数和边的个数；
2. 将顶点信息存储在顶点表中，将该顶点边表的头指针初始化为NULL；
3. 依次输入边的信息并存储在边表中：
   - 3.1 输入边所依附的两个顶点的编号 i 和 j；
   - 3.2 生成边表结点 s，其邻接点的编号为 j；
   - 3.3 将结点 s 插入到第 i 个边表的表头；



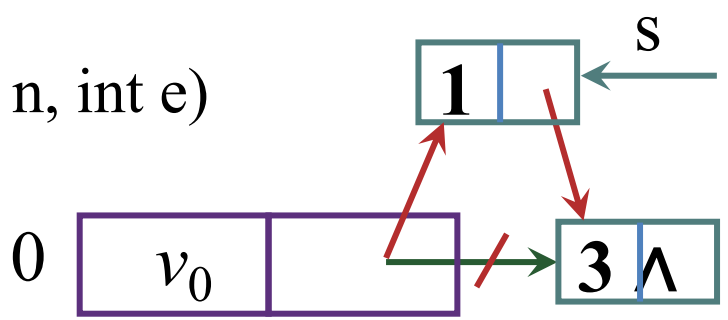
## 7. 图的建立

```
template <typename DataType>
ALGraph<DataType> :: ALGraph(DataType a[ ], int n, int e)
{
    int i, j, k;    EdgeNode *s = nullptr;
    vertexNum = n; edgeNum = e;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)      //输入顶点信息，初始化顶点表
    {
        adjlist[i].vertex = a[i];  adjlist[i].firstEdge = nullptr;
    }




}
```

| | |
|---|---|
| $v_0$ | ∧ |
| $v_1$ | ∧ |
| $v_2$ | ∧ |
| $v_3$ | ∧ |

## 7. 图的建立

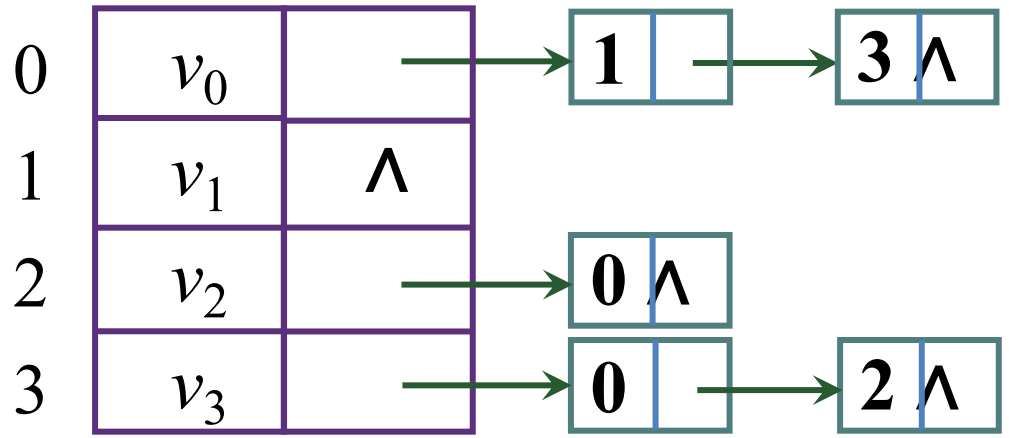
```
template <typename DataType>
ALGraph<DataType> :: ALGraph(DataType a[ ], int n, int e)
{
    int i, j, k;    EdgeNode *s = nullptr;
    vertexNum = n; edgeNum = e;
    for (i = 0; i < vertexNum; i++)     //输入顶点信息，初始化顶点表
    {
        adjlist[i].vertex = a[i];  adjlist[i].firstEdge = nullptr;
    }
    for (k = 0; k < edgeNum; k++)     //依次输入每一条边
    {
        cin >> i >> j;                  //输入边所依附的两个顶点的编号
        s = new EdgeNode; s->adjvex = j;  //生成一个边表结点s
        s->next = adjlist[i].firstEdge;     //将结点s插入到第i个边表的表头
        adjlist[i].firstEdge = s;
    }
}
```



## 8. 图的销毁

在邻接表存储中，须释放所有在程序运行过程中申请的的边表结点

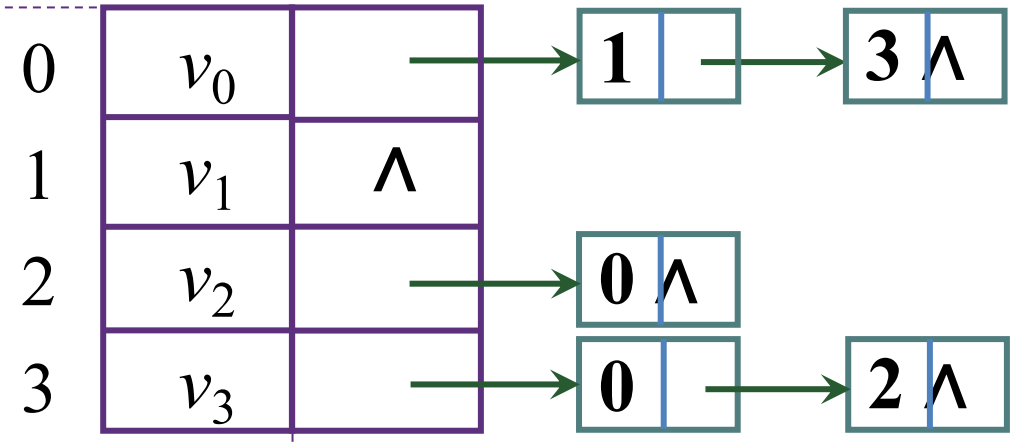
```
template <typename DataType>
ALGraph<DataType> :: ~ALGraph( )
{
    EdgeNode *p = nullptr, *q = nullptr;
    for (int i = 0; i < vertexNum; i++)
    {
        p = q = adjlist[i].firstEdge;
        while (p != nullptr)
        {
            p = p->next;
            delete q; q = p;
        }
    }
}
```



## 9. 图的深度优先遍历

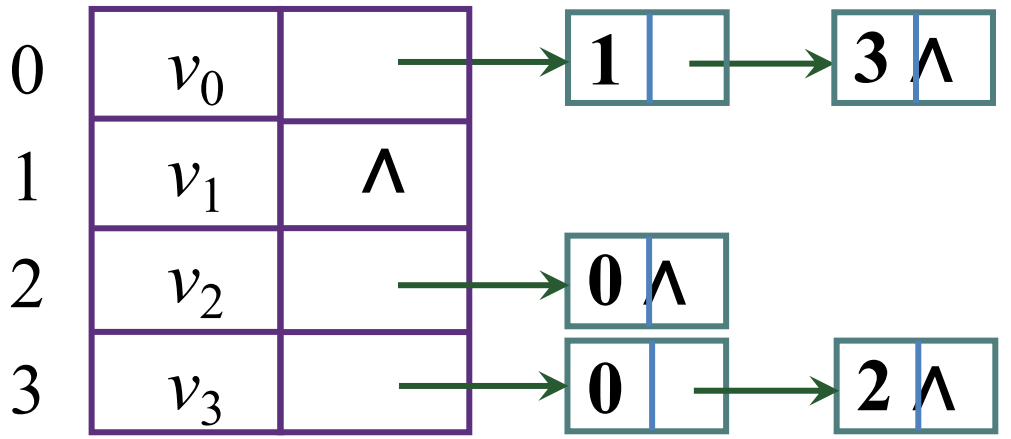
算法：DFTraverse
输入：顶点的编号 v
输出：无

1. 访问顶点 v; 修改标志visited[v] = 1;
2. j =顶点 v 的第一个邻接点;
3. while (j 存在)
   3.1 if (j 未被访问) 从顶点 j 出发递归执行该算法;
   3.2 j = 顶点 v 的下一个邻接点;



## 9. 图的深度优先遍历

```
template <typename DataType>
void ALGraph<DataType> :: DFTraverse(int v)
{
    int j;  EdgeNode *p = nullptr;
    cout << adjlist[v].vertex; visited[v] = 1;
    p = adjlist[v].firstEdge;
    while (p != nullptr)
    {
        j = p->adjvex;
        if (visited[j] == 0) DFTraverse(j);
        p = p->next;
    }
}
```



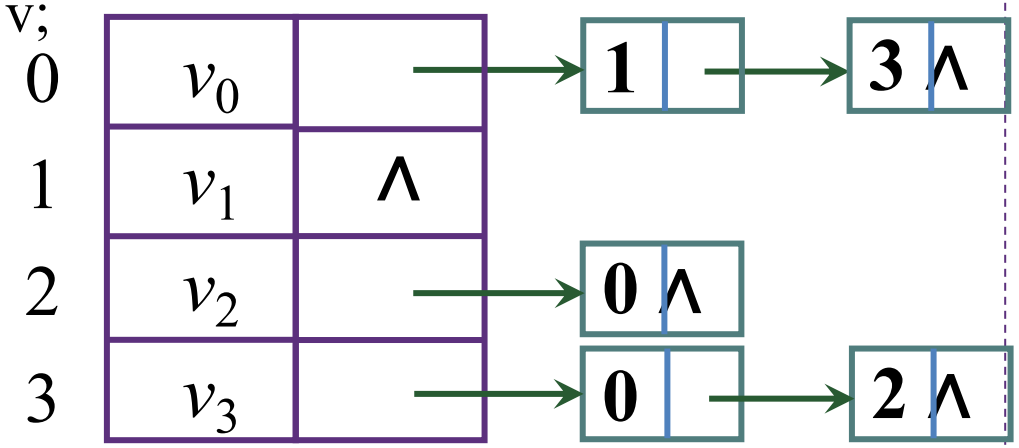
## 10. 图的广度优先遍历

算法：BFTraverse
输入：顶点的编号 v
输出：无

1. 队列 Q 初始化;
2. 访问顶点 v ; 修改标志visited [v] = 1; 顶点 v 入队列 Q;
3. while (队列 Q 非空)
   3.1 i = 队列 Q 的队头元素出队;
   3.2 j = 顶点 v 的第一个邻接点;
   3.3 while (j 存在)
      3.3.1 如果 j 未被访问，则
         访问顶点 j ; 修改标志visited[j] = 1; 顶点 j 入队列 Q;
      3.3.2 j = 顶点 i 的下一个邻接点;

## 10. 图的广度优先遍历

```
template <typename DataType>
void ALGraph<DataType> :: BFTraverse(int v)
{
    int w, j, Q[MaxSize]; int front = -1, rear = -1;
    EdgeNode *p = nullptr;
    cout << adjlist[v].vertex; visited[v] = 1; Q[++rear] = v;
    while (front != rear)
    {
        w = Q[++front];
        p = adjlist[w].firstEdge;
        while (p != nullptr)
        {
            j = p->adjvex;
            if (visited[j] == 0) {
            cout << adjlist[j].vertex; visited[j] = 1; Q[++rear] = j;
        }
        p = p->next;
    }
}
```

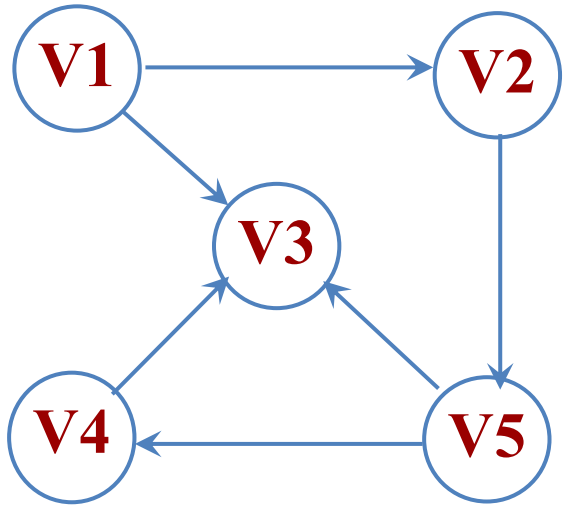


# 小结

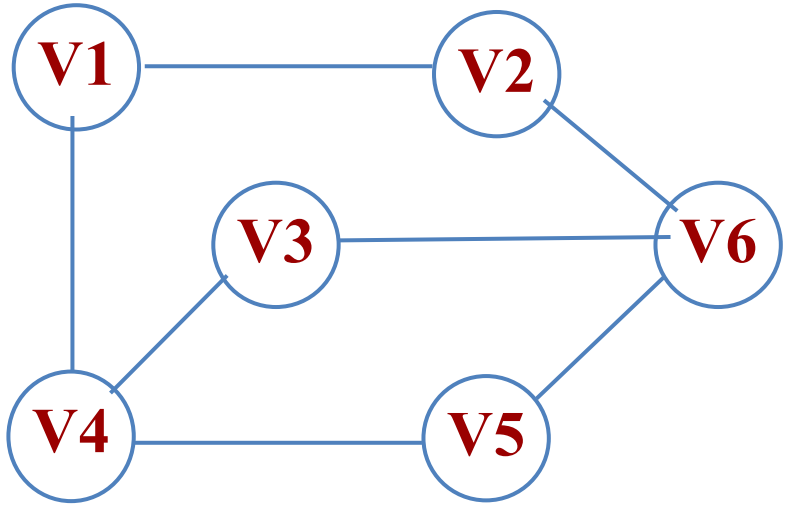
1. 熟练掌握图的邻接矩阵存储及实现方法
2. 掌握图的邻接表存储及实现方法
3. 理解图的邻接矩阵与邻接表实现方法的区别
4. 掌握图的建立、深度优先遍历、广度优先遍历实现方法

# 作业

2．有向图G1和无向图G2如下图所示，请分别画出它们的邻接矩阵和邻接表。



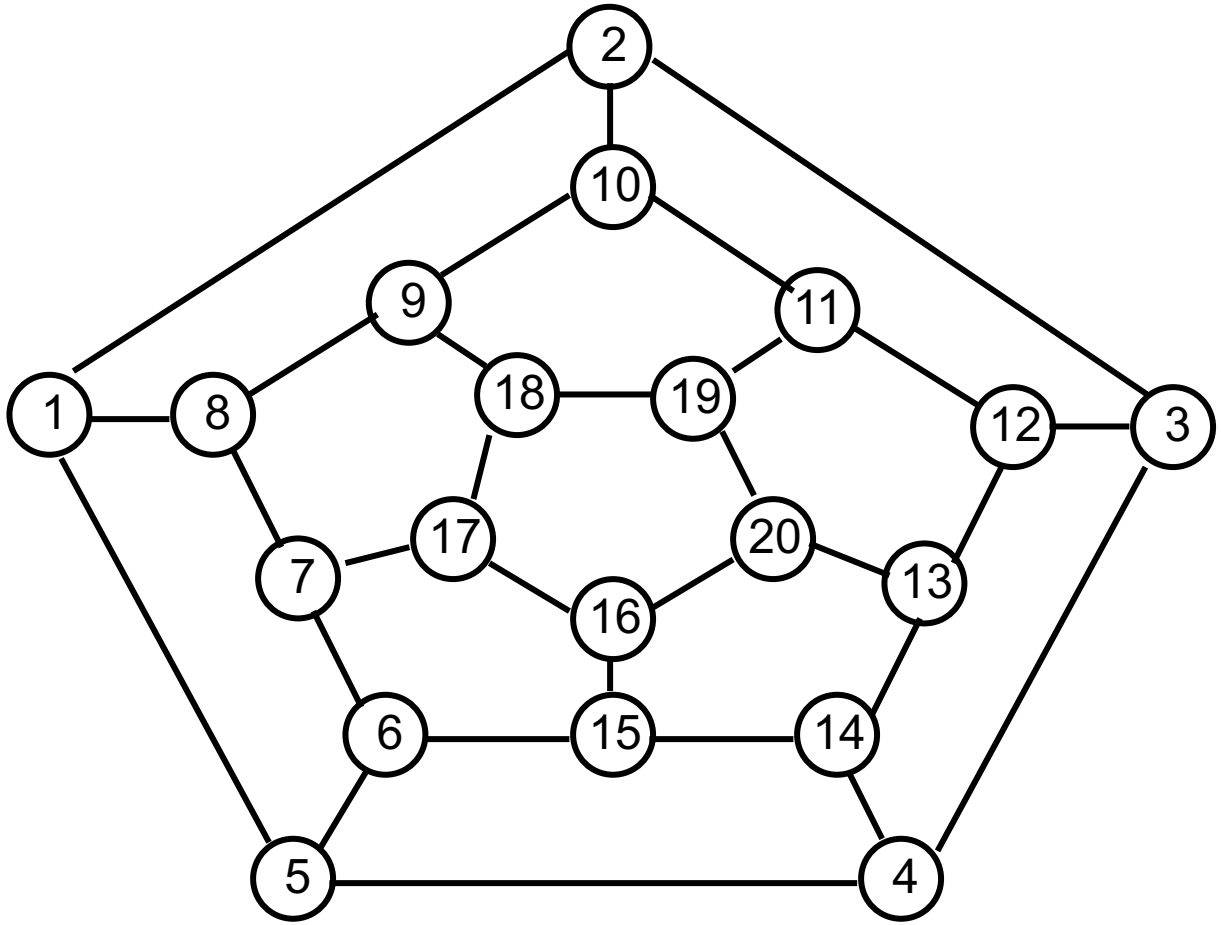

G1




G2

# 作业

3. DFS, BFS 实现遍历 要求尽量按顶点序号顺序搜索 （作为练习）



# 实验安排

## 实验六、图的构建与遍历

### 一、实验目的

1. 掌握图的邻接矩阵存储及实现方法
2. 掌握图的邻接表存储及实现方法
3. 掌握图的建立及深度优先遍历和广度优先遍历方法
3. 用C++语言实现相关算法，并上机调试。

### 二、实验内容

1. 实现图的邻接矩阵存储，并完成深度优先与广度优先遍历。
2. 实现图的邻接表存储，并完成深度优先与广度优先遍历。
3. 给出测试过程和测试结果。

实验时间：　第12周周四晚
　22网安：18:30-20:10　22物联网：20:10-21:50
实验地点：　软件基础实验室301（老干部处）


# Thank You !

## Q & A